山东省职业教育教材
审定委员会审定

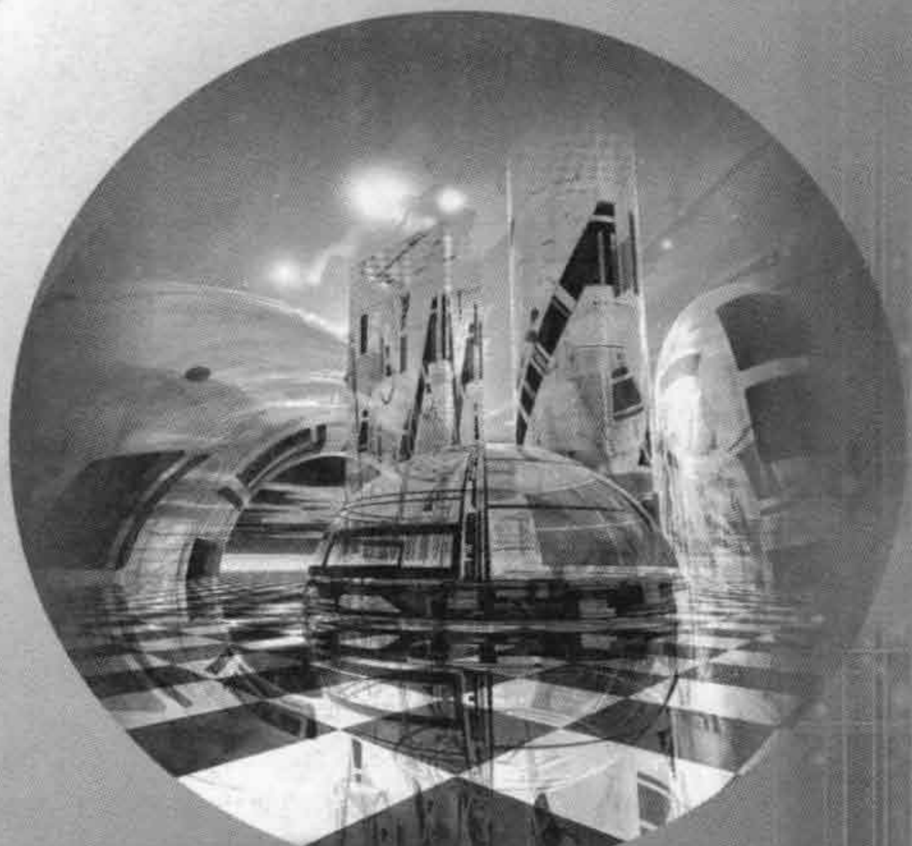
中等职业教育规划教材

数学

第一册

SHUXUE

山东省职业教育教材编写组 编著



人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学．第1册/山东省职业教育教材编写组编著．—3版．—北京：人民教育出版社，2012（2019.7重印）

中等职业教育规划教材

ISBN 978-7-107-19730-7

Ⅰ．①数… Ⅱ．①山… Ⅲ．①数学课—中等专业学校—教材 Ⅳ．①G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第036372号

中等职业教育规划教材　数学　第一册

出版发行　人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

网　址　http://www.pep.com.cn

经　销　全国新华书店

印　刷　山东汇文印务有限公司

版　次　2009年6月第3版

印　次　2019年7月第28次印刷

开　本　787毫米×1 092毫米　1/16

印　张　11

字　数　220千字

定　价　14.00元

主　　编　高存明

副 主 编　孙明红　李励信　陆泽贵

编写人员　于莺彬　于永强　王智海　王　程　刘明远　刘学卫

　　　　　闫桂明　祁志卫　杜红梅　李长林　李增华　聂鲁菊

　　　　　徐　刚　鹿继梅

责任编辑　龙正武

出 版 说 明

为了贯彻全国、全省职业教育工作会议精神，落实《面向21世纪教育振兴行动计划》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划，按照《中共山东省委山东省人民政府关于大力发展职业教育的决定》要求，山东省教育厅组织力量对中等职业教育文化基础课程、专业课程教材的建设进行了规划和编写，以适应职业教育改革与发展的需要．本套教材经山东省职业教育教材审定委员会审定通过，从2006年秋季开学起，陆续提供给全省中等职业学校使用．2009年春，我们根据教育部印发的公共基础课程新教学大纲的要求，对本套教材进行了修订．

本套教材贯彻“以服务为宗旨、以就业为导向”的教学指导思想，从经济和社会发展对高素质劳动者和各种专门人才的需要出发，并充分考虑到与我省九年义务教育教材的衔接，满足地方经济社会发展的需求，适应中等职业学校学生的实际水平，体现了“以人为本、以能力为本”的教育教学理念，注重对学生职业素质、创新精神和实践能力的培养，在教材体系、知识结构和内容阐述方面均作了一些新的尝试，努力满足不同类别、不同学制、不同专业和不同办学条件的学校教学需要，供中等职业学校和各种职业培训机构选用．

希望各地、各有关职业院校在使用山东省职业教育规划教材过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高．

二〇〇九年三月

编者寄语

亲爱的同学，首先祝贺你步入了一个崭新的学习阶段.

当你捧起这套数学教材时，我们殷切地希望她能成为你的良师益友.

著名数学家华罗庚曾经说过："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在，凡是出现量的地方就少不了用数学."马克思说："一种科学只有成功地运用数学时，才算到达完美的地步."从古希腊的巴特农神庙，到米洛斯的维纳斯雕塑，再到大自然的艺术品海螺、蜗牛的外形，无不展示着黄金分割的美；从遗传学的生命奥秘，到社会经济的发展，从海王星的发现、哈雷彗星的登场，到宇宙飞船的发射成功，处处散发着数学的芬芳……这些都说明数学与我们的日常生活紧密相连，息息相关.

本套教材既有必要的数学基础知识，又有强烈的时代气息，并注重与日常生活、工农业生产相联系. 通过她，能使你具有必备的数学基本技能，同时也能为你学习专业知识和职业技能及继续学习与终身发展奠定基础. 她展示了初等数学和现代数学的崭新风貌，她将不断吸引你的目光、激励你的兴趣、启迪你的思维，把你一步一步带入数学神圣的殿堂. 你会从"衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴"的探究中，享受"众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在，灯火阑珊处"的快乐.

在数学学习过程中，我们不仅会获得必要的数学知识，更重要的是，我们还会从中获得有用的数学精神、数学思维、数学研究方法等. 不管将来我们从事什么职业，数学都会随时随地产生作用，使我们受益终生. 数学能集中、强化人的注意力；能够给人带来发明创造的惊喜、谦虚谨慎的精神以及严谨的工作态度；还能够激发人们追求真理的勇气和信心；数学也能锻炼人们独立工作的能力……数学已成为现代人的基本素养.

亲爱的同学，数学本身与大自然一样，处处充满着神奇与奥秘，只要你怀着求知与探索的欲望，积极参与到数学学习活动中去，你会渐渐发现数学的美，体会到探究数学知识的愉悦. 俗话说，"好的开端，就是成功的一半"，让我们满怀信心，共同努力，一起步入数学的殿堂，体验新阶段学习数学的快乐，品尝学习成功的喜悦，获取数学学习的"点金术"吧！

目录

CONTENTS

01 第一章 集合

02 第二章 方程与不等式

03

第三章 函数

04

第四章 指数函数与对数函数

05

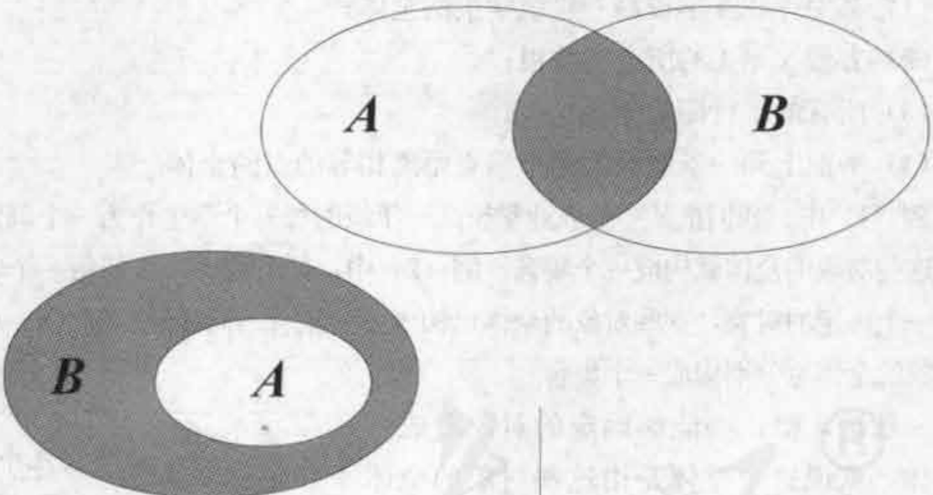
第五章 数列

06

第六章
空间几何体

第一章 集 合

无论是海洋里的生物，还是海面上航行的轮船；无论是海滩上游玩的人，还是天空中美丽的风筝，都可以看成一个个的整体，构成不同的集合.



数学是科学的大门和钥匙.

——培根

数学是科学和技术的基础.没有强有力的数学就不可能有强有力的科学.

集合是现代数学的基本概念，用它可以简洁、准确地表达数学内容. 充分条件、必要条件和充要条件等逻辑用语，是数学的通用语言. 学好这一章可以为今后学习数学奠定基础，并能进一步提高运用数学语言去理解和处理问题的能力.

1.1 集合及其表示

1.1.1 集合

在初中，我们用过“集合”这个词. 例如，自然数的集合、有理数的集合、不等式$x-7<3$解的集合、平面内到一个定点的距离等于定长的点的集合（即圆）等等.

我们再来看下面的一些例子：

（1）某中等职业学校高一年级学生的全体；

（2）方程 $x^2=4$ 的所有实数根；

（3）所有的平行四边形；

（4）平面上到一条线段的两个端点距离相等的点的全体.

例（1）中，我们把某中等职业学校高一年级的每一个学生作为一个确定的对象，这些对象的全体就构成一个集合；例（2）中，把方程 $x^2=4$ 的每一个实数根作为一个确定的对象，这些对象的全体也构成一个集合. 同样地，例（3）（4）中的对象的全体也分别构成一个集合.

一般地，把一些能够确定的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的**集合**（简称为**集**）. 构成集合的每个对象都叫做集合的**元素**.

试举出几个集合的例子.

试一试

一个集合，通常用大写英文字母 A，B，C，…表示，它的元素通常用小写英文字母 a，b，c，…表示.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$，读作“a 属于 A”.

如果 b 不是集合 A 的元素，就说 b 不属于 A，记作 $b\notin A$，读作“b 不属于 A”.

关于集合，再作如下说明：

(1) **确定性**：作为集合的元素，必须是完全确定的．这就是说，不能完全确定的对象，不能构成集合．例如，高一（1）班高个子同学的全体，就不能构成集合．这是由于没有规定多高才算是高个子，因而“高个子同学”不能确定．

在 1889 年，意大利数学家皮亚诺（G. Peano，1858—1932），首先使用“∈”来表示“属于”．

读一读

(2) **互异性**：一个给定集合中的元素，是互不相同的．也就是说，集合中的元素不能重复出现．

想一想　在本节开始的例（1）（2）（3）（4）中，哪些是有限集？哪些是无限集？

含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**．

特别地，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作$\varnothing$．例如，由平方等于-1的所有实数组成的集合就是空集．

人们约定用特定的一些大写英文字母表示数学中一些常用的数集，见表 1-1．

表 1-1　常用数集及其记号

常用数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

练习 1-1

1. 说出下面集合中的所有元素：

(1) 大于 2 且小于 7 的偶数构成的集合；

(2) 平方等于 1 的实数构成的集合．

2. 用符号“∈”或“∉”填空：

(1) 1 ____ $\mathbf{N}$，0 ____ $\mathbf{N}$，-4 ____ $\mathbf{N}$，0.3 ____ $\mathbf{N}$，$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{N}$；

(2) 1 ____ $\mathbf{Z}$，0 ____ $\mathbf{Z}$，-4 ____ $\mathbf{Z}$，0.3 ____ $\mathbf{Z}$，$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{Z}$；

(3) 1 ____ $\mathbf{Q}$，0 ____ $\mathbf{Q}$，-4 ____ $\mathbf{Q}$，0.3 ____ $\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{Q}$；

(4) 1 ____ $\mathbf{R}$，0 ____ $\mathbf{R}$，-4 ____ $\mathbf{R}$，0.3 ____ $\mathbf{R}$，$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{R}$；

(5) 1 ____ $\varnothing$，0 ____ $\varnothing$，-4 ____ $\varnothing$.

3. 判断下列语句描述的对象能否构成一个集合，并说明理由：

(1) 小于 10 的自然数的全体；

(2) 某校高一 (2) 班所有性格开朗的男生；

(3) 英文的 26 个字母；

(4) 非常接近 1 的实数；

(5) 小于 2 且大于 3 的自然数的全体；

(6) 中国所有的小河流.

1.1.2 集合的表示方法

1. 列举法

当集合中元素不多时，我们常常把集合的元素一一列举出来，写在大括号内表示这个集合，这种表示集合的方法叫做**列举法**.

例如，由 1，2，3，4，5，6 构成的集合，可表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

又如，中国古代四大发明构成的集合，可以表示为

{指南针，造纸术，活字印刷术，火药}.

再如，方程 $x^2+2x-3=0$ 所有的解构成的集合，可以表示为

$$\{-3, 1\}.$$

有些集合的元素较多，在不发生误解的情况下，也可列出几个元素作为代表，其他元素用省略号表示．例如，小于 100 的自然数的全体构成的集合，可表示为

$$\{0, 1, 2, 3, \cdots, 99\}.$$

有的集合只有一个元素．例如，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{a\}$ 等．注意 $\{0\}$ 与 0 有着本质的区别：$\{0\}$ 表示一个集合，0 是集合 $\{0\}$ 的一个元素.

想一想 a 与 $\{a\}$ 有什么区别？

例 1 用列举法表示下列集合：

(1) 大于 3 且小于 10 的所有奇数构成的集合；

(2) 方程 $x^2-x=0$ 的解的全体构成的集合；

(3) 一次函数 $y=-x+1$ 的图象与两坐标轴所有交点构成的集合.

解：(1) $\{5, 7, 9\}$；(2) $\{0, 1\}$；(3) $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

这里 (1) (2) 均为数集，而 (3) 是由平面上坐标为 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的两点构成的点集.

2. 性质描述法

我们容易看出，满足不等式 $2x>4$ 的全体实数构成的集合，不可能用列举法来表示，这时，可以用集合的特征性质来描述.

一般地，集合 A 的特征性质 p 是指，属于集合 A 的元素都具有这种性质 p，不属于集合 A 的元素都不具有这种性质 p.

例如，满足不等式 $2x>4$ 的全体实数构成的集合的特征性质是

$$\text{“}x\in\mathbf{R}\text{，且 }x>2\text{”.}$$

满足特征性质的元素都在集合中，不满足特征性质的元素都不在这个集合中. 所以，我们可以把这个集合表示为

$$A=\{x\in\mathbf{R} \mid x>2\}.$$

大括号竖线左边的 x 表示这个集合的任一元素，并标出元素的取值范围 U. 在竖线的右边写出只有集合内的元素 x 才具有的特征性质 p. 这种用集合的特征性质表示集合的方法叫做**性质描述法**.

用性质描述法表示的集合 A，一般记为 $A=\{x\in U \mid p\}$.

在某种约定下，x 的取值集合可以不写. 例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中取值，$x\in\mathbf{R}$ 常常省略不写. 上述集合 A 可以简写为 $\{x \mid x>2\}$.

想一想 2，4 是集合 $A=\{x \mid x>2\}$ 的元素吗?

又如，正偶数 2，4，6，8，…的全体构成的集合，它的每一个元素都具有性质“能被 2 整除，且大于 0”，而不属于这个集合的元素都不具有这种性质. 我们可以把这个集合表示为

$$\{x\in\mathbf{Z} \mid x\text{ 能被2整除，且大于0}\}$$

或 $\{x\in\mathbf{Z} \mid x=2n,\ n\in\mathbf{N}_+\}$.

有时为了方便，像正偶数集这样的集合也可以描述为

$$\{x \mid x\text{ 是正偶数}\}.$$

例 2 用性质描述法表示下列集合：

(1) 不等式 $x-1<5$ 的解构成的集合；

(2) 大于 10 且小于 20 的所有有理数构成的集合.

解：(1) 不等式 $x-1<5$ 的解构成的集合用性质描述法表示为 $\{x \mid x<6\}$；

(2) 设大于 10 且小于 20 的有理数为 x，它满足条件 $x\in\mathbf{Q}$，且 $10<x<20$，因此，用性质描述法表示为 $\{x\in\mathbf{Q} \mid 10<x<20\}$.

自己举出几个集合的例子，并分别用列举法和性质描述法表示出来.

试一试

练习 1-2

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 大于 3 且小于 10 的偶数的全体；

(2) 绝对值等于 1 的实数的全体；

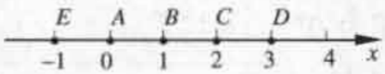
(3) 比 2 大 3 的实数的全体；

(4) 一年中有 31 天的月份的全体；

(5) 大于 3.5 且小于 12.8 的整数的全体.

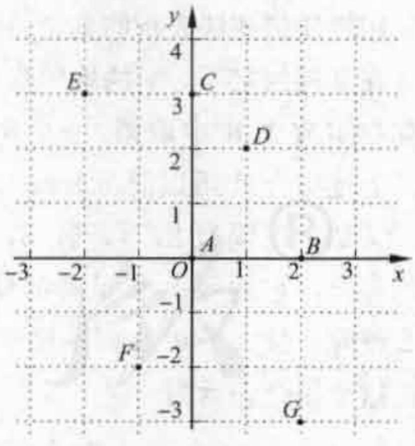
2. 用列举法写出图中各点的坐标构成的集合：

(1)



第 2 (1) 题

(2)



第 2 (2) 题

3. 用性质描述法表示下列集合：

(1) 由山东省的省会城市构成的集合；

(2) 目前你所在班级所有同学构成的集合；

(3) 正奇数的全体构成的集合；

(4) 绝对值等于 3 的实数的全体构成的集合；

(5) 不等式 $4x-5<3$ 的解构成的集合；

(6) 所有的正方形构成的集合.

1.2 集合之间的关系

观察下面两组集合：

(1) $M=\{x \mid x$ 是山东人$\}$，$N=\{x \mid x$ 是中国人$\}$；

(2) $C=\{1, 2\}$，$D=\{x \mid (x-1)(x-2)=0\}$.

你能发现集合 M 与 N、C 与 D 之间的关系吗？

可以看出，对于 (1) 中的两个集合，集合 M 的任意一个元素都是集合 N 的元素，但集合 N 中有的元素不在集合 M 中.

对于 (2) 中的两个集合，集合 C 的任意一个元素都是集合 D 的元素，并且集合 D 的任意一个元素都是集合 C 的元素.

为了表达集合之间的这些关系，我们引入如下概念：

如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A,$$

读作"A 包含于 B"，或"B 包含 A".

根据这个定义可知，任何一个集合 A 都是它本身的子集，即

$$A \subseteq A.$$

对于前面的集合 M 与 N、C 与 D，它们之间的关系可用上述符号分别表示为：

$\{x \mid x$ 是山东人$\} \subseteq \{x \mid x$ 是中国人$\}$，或 $M \subseteq N$；

$\{1, 2\} \subseteq \{x \mid (x-1)(x-2)=0\}$，或 $C \subseteq D$.

想一想 这里的集合 D 与 C 满足 $D \subseteq C$ 吗？

当集合 A 不是集合 B 的子集时，记作

$$A \not\subseteq B \text{ 或 } B \not\supseteq A,$$

读作"A 不包含于 B"，或"B 不包含 A".

如果集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作

$$A \subsetneqq B \text{ 或 } B \supsetneqq A,$$

读作“A 真包含于 B”，或“B 真包含 A”.

对于前面的集合 M 与 N，它们之间的关系可用真子集的符号表示为

$$M \subsetneqq N.$$

如果两个集合的元素完全相同，那么我们就说这两个**集合相等**. 集合 A 等于集合 B，记作

$$A=B.$$

由集合相等的定义，可得：

如果 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，那么 $A=B$；反之，如果 $A=B$，那么 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$.

对于前面的集合 C 与 D，它们之间的关系可以表示为

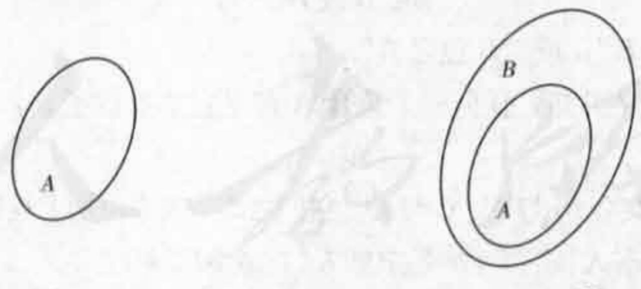
$$C=D.$$

规定：空集是任何集合的子集. 也就是说，对于任何集合 A，都有

$$\varnothing \subseteq A.$$

想一想 $\{0\}$ 与 $\varnothing$ 有什么不同？有什么关系？

我们常用平面上封闭曲线的内部来表示一个集合，如图 1-1（1）表示集合 A. 如果集合 A 是集合 B 的真子集，那么把表示 A 的区域画在表示 B 的区域内部，如图 1-1（2）.



（1） （2）

图 1-1

根据子集、真子集的定义可知：

对于集合 A，B，C，如果 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；

对于集合 A，B，C，如果 $A \subsetneqq B$，$B \subsetneqq C$，则 $A \subsetneqq C$.

例 1 写出集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 的所有子集和真子集.

解：集合 A 的所有子集为：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,\ 2\}$，$\{1,\ 3\}$，$\{2,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$.

在上述子集中，除去集合 A 本身，即 $\{1,\ 2,\ 3\}$，剩下的集合都是 A 的真子集.

> **议一议**　怎样保证不重不漏地写出 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 的所有子集？

例 2　说出以下两个集合之间的关系：

(1) $A=\{2,\ 4,\ 5,\ 7\}$，$B=\{2,\ 5\}$；

(2) $S=\{x \mid x^2=1\}$，$T=\{-1,\ 1\}$；

(3) $C=\{x \mid x\text{ 是奇数}\}$，$D=\{x \mid x\text{ 是整数}\}$.

解：(1) $A \supsetneqq B$；　(2) $S=T$；　(3) $C \subsetneqq D$.

练习 1-3

1. 指出下面各对集合之间的关系：

(1) $A=\{x \mid x^2-9=0\}$，$B=\{-3,3\}$；

(2) $A=\{x \mid x\text{ 是等边三角形}\}$，$B=\{x \mid x\text{ 是等腰三角形}\}$；

(3) $A=\{x \mid x>2\}$，$B=\{x \mid x>4\}$.

2. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$=$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$）填空：

(1) a ______ $\{a,\ b,\ c\}$；　　(2) $\{4,\ 5,\ 6\}$ ______ $\{6,\ 5,\ 4\}$；

(3) $\{a\}$ ______ $\{a,\ b,\ c\}$；　　(4) $\{a,\ b,\ c\}$ ______ $\{b,\ c\}$；

(5) $\varnothing$ ______ $\{1,\ 2,\ 3\}$；

(6) $\{x \mid x\text{ 是矩形}\}$ ______ $\{x \mid x\text{ 是正方形}\}$；

(7) 0 ______ $\{x \mid x^2=0\}$；　　(8) $\{0,\ 1\}$ ______ $\mathbf{N}$；

(9) $\varnothing$ ______ $\{0\}$；　　(10) 3 ______ $\varnothing$.

3. 写出集合 $A=\{s,\ t\}$ 的所有子集和真子集.

1.3　集合的基本运算

“运算”这个词，过去只用于数或数学式子．这里集合运算的意义是，由两个已知的集合，按照某种指定的法则，构造出一个新的集合.

1.3.1 交集

已知集合

$$M=\{1, 2, 3, 4\}, N=\{3, 4, 5, 6\},$$

我们可由这两个集合的所有公共元素构造出一个新的集合

$$\{3, 4\}.$$

下面，给出这种构造的新集合的定义.

一般地，给定两个集合 A，B，由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素构成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作

$$A\cap B,$$

读作“A 交 B”，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例如，$\{a, b, c, d\}\cap\{b, c, d, e, f\}=\{b, c, d\}$.

> **想一想** 你能用自己的语言表述 $A\cap B$ 的概念吗？

集合 A 与 B 的交集，可用图 1-2 中的阴影表示.

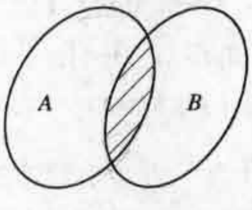


图 1-2

由交集的定义可知，对于任意两个集合 A，B，都有：

(1) $A\cap B=B\cap A$;

(2) $A\cap A=A$;

(3) $A\cap\varnothing=\varnothing$;

(4) 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap B=A$.

> **想一想** 如果两个集合没有公共元素，那么它们的交集是什么？

例 1 设集合 $A=\{x \mid x<1\}$，$B=\{x \mid x<2\}$，求 $A\cap B$.

解：$A\cap B=\{x \mid x<1\}\cap\{x \mid x<2\}=\{x \mid x<1\}$.

例 2 已知集合 $A=\{x \mid x\text{ 是奇数}\}$，$B=\{x \mid x\text{ 是偶数}\}$，$\mathbf{Z}=\{x \mid x\text{ 是整数}\}$，求 $A\cap\mathbf{Z}$，$B\cap\mathbf{Z}$，$A\cap B$.

解：因为 $A\subseteq\mathbf{Z}$，$B\subseteq\mathbf{Z}$，所以

$A \cap \mathbf{Z}=A$；

$B \cap \mathbf{Z}=B$；

$A \cap B=\{x \mid x$ 是奇数$\} \cap \{x \mid x$ 是偶数$\}=\varnothing$.

想一想　例 1 和例 2 的解法，各自的依据是什么？

1.3.2　并集

已知

$$M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ N=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\},$$

这两个集合的所有元素合并在一起，构造出一个新的集合

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

下面，给出这种构造的新集合的定义.

想一想　两个集合的公共元素，在新集合中为什么只出现了一次？

一般地，给定两个集合 A，B，由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素构成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作

$$A \cup B,$$

读作“A 并 B”，即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

例如，$\{a,\ c\} \cup \{b,\ c,\ d\}=\{a,\ b,\ c,\ d\}$.

集合 A 与 B 的并集，可用图 1-3 中的阴影表示.

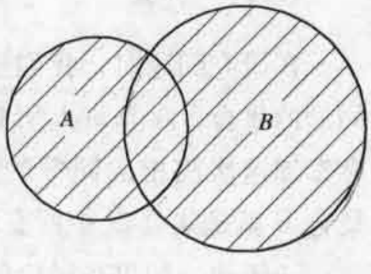


图 1-3

注意：在求集合的并集时，同时属于 A 和 B 的公共元素，在并集中只列举一次.

由并集的定义可知，对于任意两个集合 A，B，都有：

(1) $A \cup B=B \cup A$；

(2) $A \cup A=A$；

(3) $A \cup \varnothing=A$；

(4) 如果 $A \subseteq B$，那么 $A \cup B=B$.

读一读　并集定义中的“或”有三种含义，一是元素属于集合 A 但不属于集合 B；一是元素属于集合 B 但不属于集合 A；一是元素属于集合 A 且属于集合 B.

例 3　已知集合 $A=\{1,\ 3,\ 4\}$，$B=\{2,\ 4,\ 5\}$，求 $A \cup B$.

解：$A \cup B=\{1,\ 3,\ 4\} \cup \{2,\ 4,\ 5\}=\{1,$

2，3，4，5}.

例 4 设集合 $A=\{x \mid x>3\}$，$B=\{x \mid x>5\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解：因为 $B\subseteq A$，所以

$$A\cup B=A,$$
$$A\cap B=B.$$

想一想 例 3 和例 4 的解法，各自的依据是什么？

练习 1-4

1. 已知集合 $A=\{3, 4, 5, 6, 7\}$，$B=\{5, 7, 9\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
2. 已知集合 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{b, d, e, f\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
3. 设集合 $A=\{x \mid x<-1\}$，$B=\{x \mid x<3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
4. 设集合 $A=\{x \mid x>2\}$，$B=\{x \mid x<6\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
5. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-9=0\}$，$B=\{x \mid x-3=0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
6. 已知集合 $A=\varnothing$，$B=\{1, 2\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

1.3.3 补集

在研究问题时，我们经常需要确定研究对象的范围. 例如，设 U 是全班同学的集合，A 是班上所有参加某次演出的同学的集合，而 B 是班上所有没有参加这次演出的同学的集合，那么这三个集合有什么关系呢？容易看出，集合 B 就是集合 U 中所有不属于集合 A 的元素构成的集合.

一般地，如果在讨论的问题中，每一个集合都是某一个给定集合 U 的子集，那么就称 U 为这些集合的**全集**. 例如，我们在研究数集时，常常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集. 如果 A 是全集 U 的一个子集，由全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，叫做 A 在 U 中的**补集**，记作

$$\complement_U A,$$

读作"A 在 U 中的补集". 如图 1-4 中的阴影所示.

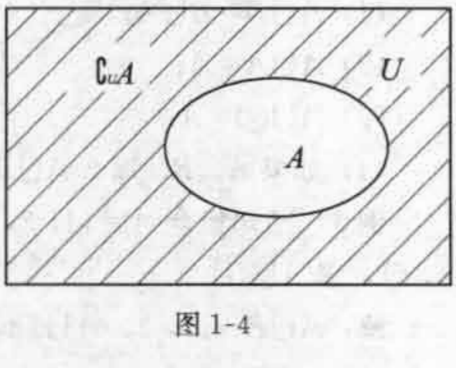


图 1-4

由补集的定义可知，对于给定的全集 U 以及它的任意一个子集 A，有：

(1) $A\cup \complement_U A=U$；

(2) $A\cap \complement_U A=\varnothing$；

(3) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

例 5　设全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，集合 $A=\{1, 3, 5\}$，求 $\complement_U A$，$A\cap \complement_U A$，$A\cup \complement_U A$.

解：$\complement_U A=\{2, 4, 6\}$，$A\cap \complement_U A=\varnothing$，$A\cup \complement_U A=U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例 6　设全集 $U=\{x \mid x$ 是实数$\}$，集合 $\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$，求 $\complement_U \mathbf{Q}$.

解：$\complement_U \mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是无理数$\}$.

例 7　设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x>5\}$，求 $\complement_U A$.

解：$\complement_U A=\{x \mid x\leqslant 5\}$.

> 你能举出几个补集的例子吗？
>
> **试一试**

练习 1-5

1. 设全集 $U=\{x \mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，集合 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid x<0\}$，求 $\complement_U A$.

3. 设全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，集合 $A=\{5, 2, 1\}$，$B=\{5, 4, 3, 2\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$\complement_U A\cap \complement_U B$，$\complement_U A\cup \complement_U B$.

4. 设全集 $U=\mathbf{Z}$，集合 $A=\{x \mid x=2k, k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=2k+1, k\in \mathbf{Z}\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

1.4 充要条件

1. 充要条件

在数学中，我们经常遇到“如果 p，那么 q”的形式，当“如果 p，那么 q”正确时，我们就说 p 可推出 q，记作

$$p\Rightarrow q,$$

读作“p 推出 q”.

此时，我们称 p 是 q 的**充分条件**，又称 q 是 p 的**必要条件**.

也就是说

“如果 p，那么 q”是正确的命题；

$p \Rightarrow q$；

p 是 q 的充分条件；

q 是 p 的必要条件.

这四句话的含义是相同的. 下面我们举例说明.

(1)“如果 $x=2$，那么 $x^2-4=0$”是正确的命题，这个命题还可表述为

$x=2 \Rightarrow x^2-4=0$；

$x=2$ 是 $x^2-4=0$ 的充分条件；

$x^2-4=0$ 是 $x=2$ 的必要条件.

(2)“如果四边形是矩形，那么四边形的对角线互相平分”是正确的命题，这个命题还可表述为

四边形是矩形 $\Rightarrow$ 四边形的对角线互相平分；

“四边形是矩形”是“四边形的对角线互相平分”的充分条件；

“四边形的对角线互相平分”是“四边形是矩形”的必要条件.

如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，那么称 p 是 q 的**充要条件**，记作

$$p \Leftrightarrow q,$$

读作“**p 与 q 等价**”或“**p 与 q 互为充要条件**”.

例如，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow$ 这个一元二次方程有两个相等的实数根；且，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根 $\Rightarrow \Delta=0$. 所以 $\Delta=0$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根的充要条件.

例 用充分条件、必要条件或充要条件表述下列各题中 p 与 q 的关系：

(1) p：$x>3$，q：$x>5$；

(2) p：$x=y$，q：$x^2=y^2$；

(3) p：x 是矩形，q：x 是有一个角为直角的平行四边形.

解：(1) 因为 $x>5 \Rightarrow x>3$，所以

q 是 p 的充分条件；

p 是 q 的必要条件.

(2) 因为 $x=y \Rightarrow x^2=y^2$，所以

p 是 q 的充分条件；

q 是 p 的必要条件.

(3) 因为 x 是矩形 $\Leftrightarrow$ x 是有一个角为直角的平行四边形，所以

p 是 q 的充要条件.

2. 子集与推出的关系

已知集合 $\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$，$\mathbf{R}=\{x \mid x$ 是实数$\}$，容易判断 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}$ 的子集，即 $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$. 同时，也容易得到

x 是有理数$\Rightarrow x$ 是实数，

这说明，$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$ 与"x 是有理数$\Rightarrow x$ 是实数"是等价的.

一般地，设集合 $A=\{x \mid p\}$，$B=\{x \mid q\}$. 那么

$A\subseteq B$ 与 $p\Rightarrow q$ 等价；

$A=B$ 与 $p\Leftrightarrow q$ 等价.

练习 1-6

1. 口答下列各题：

(1) $x=0$ 是 $x^2=0$ 的什么条件？

(2) 请你说出"$p\Rightarrow q$"的其他等价说法；

(3) 回忆你已学过的一些数学定理，并用充分条件、必要条件或充要条件表述.

2. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) $a=0$ 是 $ab=0$ 的____________；

(2) $x=3$ 是 $x^2-2x-3=0$ 的____________；

(3) 若 x，$y\in\mathbf{R}$，则 $x=0$ 且 $y=0$ 是 $x^2+y^2=0$ 的____________；

(4) $x^2-1=0$ 是 $x=1$ 的____________.

3. 用充分条件、必要条件或充要条件表述下列各题中 p 与 q 的关系：

(1) p：x 是 12 的约数，q：x 是 36 的约数；

(2) p：$x^2=y^2$，q：$x+y=0$.

4. 已知 p：x 是自然数，试确定一个命题 q，使得 p 是 q 的充分条件.

习题一

1. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 中国国旗图案颜色的全体所构成的集合；

(2) 地球上最高的山峰所构成的集合；

(3) 大于 1 且小于 100 的整数的全体所构成的集合；

(4) 能被 4 整除的所有的自然数所构成的集合；

(5) 相反数等于本身的实数的全体所构成的集合；

(6) 绝对值等于 2 的实数的全体所构成的集合；

(7) 在直角坐标平面上，直线 $y=x$ 上所有的点所构成的集合；

(8) 9 的平方根的全体所构成的集合.

2. 判断下列关系是否正确：

(1) $2\subsetneqq\{x \mid x\leqslant 10\}$；　　(2) $2\in\{x \mid x\leqslant 10\}$；

(3) $\{2\}\not\subseteq\{x \mid x\leqslant 10\}$；　　(4) $\varnothing\in\{x \mid x\leqslant 10\}$；

(5) $\varnothing\not\subseteq\{x \mid x\leqslant 10\}$；　　(6) $\varnothing\subsetneqq\{x \mid x\leqslant 10\}$.

3. 已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$，$C=\{6, 7, 8, 9\}$，求：

(1) $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap C$；

(2) $A\cup B$，$B\cup C$，$A\cup C$.

4. 已知集合 $A=\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是矩形$\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

5. 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，集合 $A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{4, 7, 8\}$：

(1) 求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$；

(2) 验证 $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$，$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

6. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，$=$）填空：

(1) 2 ________ $\{x \mid x$ 是奇数$\}$；　　(2) a ________ $\{a\}$；

(3) $\{0\}$ ________ $\varnothing$；　　(4) $\mathbf{Z}$ ________ $\mathbf{R}$；

(5) $\{a, b, c, d\}$ ________ $\{b, a, c, d\}$；

(6) $\{2, 3\}$ ________ $\{x\in\mathbf{Z} \mid 0<x<5\}$.

7. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) $x-1=0$ 是 $x^2-1=0$ 的________________；

(2) $x>5$ 是 $x>7$ 的________________；

(3) $a^2-3a+2=0$ 是 $a=1$ 的________________；

(4) $|x+3|+|y+2|=0$ 是 $x=-3$ 且 $y=-2$ 的________________；

(5) $a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的____________;

(6) $x-2=0$ 是 $(x-2)(x-3)=0$ 的____________.

阅读与实践

康托尔与集合论的产生

在原始社会早期人类就有了集合思想. 当时人们按照“堆”“捆”等概念来分东西和按照“部落”来识别不同的人就是集合思想的简单应用.

现代集合知识产生于 19 世纪后期，是德国著名数学家康托尔创立的.

康托尔（1845—1918），生于俄国圣彼得堡一个丹麦犹太血统的富商家庭，11 岁随家迁居德国，自幼对数学有浓厚兴趣. 22 岁获博士学位，以后一直从事数学教学与研究. 他所创立的集合论已被公认为现代数学的基础.

康托尔的小学阶段是在俄国度过的，中学开始在德国就读. 康托尔大约从中学时期就喜欢上了数学，学习数学非常用功. 因此，中学毕业时老师这样评价他：“康托尔的勤勉和热情堪称典范，在初等代数和三角方面成绩优异，其行为举止值得赞扬.”

康托尔 17 岁时就读于瑞士苏黎世大学，第二年到柏林大学主修数学. 1867 年获博士学位. 然后去哈雷大学任教. 当时在哈雷大学的著名数学家海涅发现康托尔的聪慧，于是鼓励他去研究当时数学界的热点——函数的性质. 康托尔就是在这个过程中创造集合论的. 从 1874 年直到他去世，康托尔为此发表了几十篇论文，系统阐述了现代集合理论.

康托尔创造的集合论是现代数学中一项很有价值的内容，但在当时由于人们对康托尔方法的不理解，康托尔的集合理论并没有马上被认可. 他受到了多方面的责难，这其中甚至包括他的老师克罗内克.

真金不怕火炼，康托尔的思想终于大放光彩. 1897 年举行的第一次国际数学家会议上，他的成就得到承认，伟大的哲学家、数学家罗素称赞康托尔的工作“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”. 德国著名数学家希尔伯特称康托尔是“数学天才”，称康托尔创造的集合论是“数学家的乐园”和“数学天才最惊人的产物”.

面对各方面的压力，康托尔不幸患上了抑郁症，但他矢志不移，坚持工作.康托尔晚年写出了四大本的《数学史讲义》专著，这也是常常被人们称道的.

康托尔于 1918 年 1 月 6 日因心脏病突发死于哈雷大学附属医院，享年 73 岁.

康托尔一生热爱数学，面对问题勇于运用智慧创造性地工作，遇到困难不屈不挠，始终坚持真理，敢于同困难作斗争，这是值得我们学习的.

趣味数学题选

某个班级统计喜欢体育活动的人数，结果是：喜欢打篮球的有 35 人，既喜欢打篮球又喜欢打排球的有 10 人，既喜欢打篮球又喜欢踢足球的有 8 人，还有篮球、排球和足球都喜欢的有 3 人，问只喜欢打篮球的有几人？

喜欢参加实践研究的同学可以结成小组，分工协作，对本学校学生参加社团活动（例如：数学兴趣小组、集邮协会、舞蹈队、乒乓球队）的有关情况分别进行调查、统计，例如：参加的人数，社团中性别的比例，年龄的分布等等. 仿照上面的题目编写出类似的数学问题，考考你的同学.

第二章　方程与不等式

用天平称量物体质量的关键是保持平衡，而玩跷跷板的乐趣在于有上有下，打破平衡. 等与不等是两个量之间最基本的关系.

问题是数学的心脏.

——哈尔莫斯

道虽弥，不行不至；事虽小，不为不成.

——《荀子·修身》

我们考察事物时，往往要进行大小、轻重、长短的比较．在数学中，我们经常应用等式和不等式的知识来研究这类问题．在这一章里，我们将学习方程和不等式的解法，并应用集合表示不等式的解集．

2.1 一元二次方程

问题 如图 2-1，现有长方形纸片一张，长 20 cm，宽 14 cm，在其四个角上各剪去一个边长相等的小正方形，然后把四边折起，如果恰好能将其做成底面积是 72 cm² 的无盖长方体纸盒．求剪去的小正方形边长是多少？

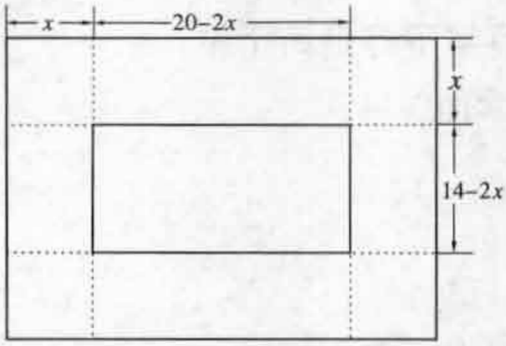


图 2-1

分析：设需要剪去小正方形的边长是 x cm，则盒子底面长方形的长是 $(20-2x)$cm，宽是 $(14-2x)$cm．根据题意，列出方程

$$(20-2x)(14-2x)=72.$$

化简，得

$$x^2-17x+52=0. \qquad ①$$

再求出 x 即可．

像①这样只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做**一元二次方程**．关于未知数 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 是常数，且 $a\neq 0$）是一元二次方程的一般形式．a，b，c 依次称为方程的二次项系数，一次项系数和常数项．

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做**方程的解**．

求出方程的解或者确定方程无解的过程，叫做**解方程**.

下面我们用初中学过的配方法来解一元二次方程.

例 用配方法解一元二次方程：

(1) $x^2+2x-3=0$； (2) $x^2-4x-3=0$；

(3) $2x^2-5x-3=0$； (4) $x^2-6x+10=0$.

解：(1) 移项，得 $x^2+2x=3$，配方，得

$$x^2+2x+1^2=3+1^2,$$

即$(x+1)^2=4$. 开平方，得

$$x+1=-2 \text{ 或 } x+1=2.$$

解得 $x_1=-3$，$x_2=1$.

所以原方程的两个根为-3，1.

(2) 移项，得 $x^2-4x=3$，配方，得

$$x^2-4x+2^2=3+2^2,$$

即$(x-2)^2=7$. 开平方，得

$$x-2=-\sqrt{7} \text{ 或 } x-2=\sqrt{7}.$$

解得 $x_1=2-\sqrt{7}$，$x_2=2+\sqrt{7}$.

所以原方程的两个根为 $2-\sqrt{7}$，$2+\sqrt{7}$.

(3) 方程两边都除以 2，得 $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$，移项，得

$$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{3}{2},$$

配方，得

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

即$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$. 开平方，得

$$x-\frac{5}{4}=-\frac{7}{4} \text{ 或 } x-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}.$$

解得 $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=3$.

所以原方程的两个根为$-\frac{1}{2}$，3.

(4) 移项，得 $x^2-6x=-10$，配方，得

$$x^2-6x+3^2=-10+3^2,$$

即$(x-3)^2=-1$.

所以原方程无实数解.

> **议一议** 配方的关键是什么?

一般地，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$用配方法可变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

讨论：(1) 当判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，解方程，得

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},}$$

这就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的**求根公式**.

> **想一想** 为什么要讨论 b^2-4ac 大于零，小于零，等于零?

(2) 当判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，解方程，得

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

为原方程两个相等的根；

> 请你解决本节开始提出的问题. **试一试**

(3) 当判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，原方程无实数根.

练习 2-1

1. 说出下列一元二次方程的根：

(1) $x^2=4$；　　(2) $x(x-3)=0$；

(3) $(x+1)(x-2)=0$；　　(4) $(x-1)^2=0$；

(5) $x^2+1=0$；　　(6) $(x+3)^2=-2$.

2. 用配方法解下列一元二次方程：

(1) $x^2+6x+7=0$；　　(2) $x^2-7x-8=0$；

(3) $2x^2+3=7x$；　　(4) $t^2+t-1=0$；

(5) $x^2-6x+9=0$；　　(6) $x^2+3x+3=0$.

3. 解下列一元二次方程：

(1) $x^2-3=0$；　　(2) $x^2+9x=0$；

(3) $5x^2+2x-3=0$；　　(4) $-x^2+6x+7=0$；

(5) $x^2-6x+5=0$；　　(6) $-3x^2+2x+1=0$.

4. 已知关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0$ 有两个相等的实数根，求实数 a 的值.

2.2 不等式

2.2.1 不等式的基本性质

1. 实数的大小

问题　现有 5 kg 白糖水，其中含白糖 1 kg. 再添加白糖 $m(m>0)$ kg 并全部溶解. 添加白糖之前，糖水的浓度是 $\frac{1}{5}$，添加白糖之后，糖水的浓度是 $\frac{1+m}{5+m}$，显然有

$$\frac{1+m}{5+m}>\frac{1}{5}.$$

从数学的角度来看，当 $m>0$ 时，这个不等式一定成立吗?

为解决这个问题，我们先来复习实数大小的基本性质.

对于任意两个实数 a 和 b，它们具有如下的基本性质：

大于号“$>$”和小于号“$<$”，是英国代数学家哈里奥特（T. Harriot，1560—1621）在 1600 年左右创用的. 但并没有被当时的数学界所接受，直到一百多年后才逐渐成为标准的应用符号.

读一读

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b,$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b,$$
$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b.$$

现在我们来解决前面提出的问题：

$$\frac{1+m}{5+m}-\frac{1}{5}=\frac{5+5m}{5(5+m)}-\frac{5+m}{5(5+m)}=\frac{4m}{5(5+m)}.$$

由题意知，$m>0$，所以

$$\frac{4m}{5(5+m)}>0,$$

即$\frac{1+m}{5+m}>\frac{1}{5}$.

> 你能在日常生活中找到这样的例子并用数学知识进行解释吗？
>
> 试一试

这样，我们通过生活经验猜想出一个不等式，又用作差比较法进行了验证.

作差比较是一种常见的比较两个实数（或代数式）大小的方法，一般步骤是：把要比较的两个实数（或代数式）作差，然后进行化简，判断最终化简结果的符号，从而判断出这两个实数（或代数式）的大小.

比较两个代数式的大小，就是比较两个代数式的值的大小.

例 1 比较下列各组中两个实数或代数式的大小：

(1) $-\frac{2}{3}$和$-\frac{3}{4}$；

(2) $2x^2+1$ 和 x^2-1；

(3) a^2+a-2 和 $2a^2-a-1$；

(4) x^2+5 和 $4x$.

解：(1) 因为

$$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}$$
$$=\frac{1}{12}>0.$$

所以$-\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$.

(2) 因为

$$\begin{aligned}&(2x^2+1)-(x^2-1)\\=&2x^2+1-x^2+1\\=&x^2+2>0.\end{aligned}$$

所以 $2x^2+1>x^2-1$.

(3) 因为

$$\begin{aligned}&(a^2+a-2)-(2a^2-a-1)\\=&a^2+a-2-2a^2+a+1\\=&-a^2+2a-1\\=&-(a^2-2a+1)\\=&-(a-1)^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

所以 $a^2+a-2\leqslant 2a^2-a-1$.

(4) 因为

$$\begin{aligned}&x^2+5-4x\\=&x^2-4x+2^2-4+5\\=&(x-2)^2+1>0.\end{aligned}$$

所以 $x^2+5>4x$.

读一读

根据哥德巴赫于 1734 年 1 月写给欧拉的一封信所述，现今通用的“$\geqslant$”和“$\leqslant$”符号为法国人布盖（P. Bouguer，1698—1758）所首先采用，然后逐渐流行.

2. 不等式的基本性质

我们一起回顾以前学过的不等式的基本性质：

(1) 不等式两边都加上（或减去）同一个整式，不等号的方向不变，即

$$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c\ (\text{或 } a-c>b-c);$$

(2) 不等式两边都乘以（或除以）同一个正数，不等号的方向不变，即

$$a>b,\ c>0\Rightarrow ac>bc\left(\text{或}\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right);$$

(3) 不等式两边都乘以（或除以）同一个负数，不等号的方向改变，即

$$a>b,\ c<0\Rightarrow ac<bc\left(\text{或}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right).$$

推论　对于 $a>0$，$b>0$，有 $a>b\Leftrightarrow a^2>b^2$.

证明：因为 $a>0$，$b>0$，所以

$$a+b>0,$$

则有

$$
\begin{aligned}
a>b &\Leftrightarrow a-b>0\\
&\Leftrightarrow (a-b)(a+b)>0\\
&\Leftrightarrow a^2-b^2>0\\
&\Leftrightarrow a^2>b^2.
\end{aligned}
$$

想一想　当 $a\leqslant b$ 时，你能写出相应的不等式的基本性质吗？

例 2　将下列不等式化成“$x>a$”或“$x<a$”的形式：

(1) $2x-5<-1$；　　(2) $-6x+9<3$.

解：(1) 不等式两边都加上 5，得 $2x<4$. 不等式两边都除以 2，得

$$x<2.$$

(2) 不等式两边都减去 9，得 $-6x<-6$. 不等式两边都除以 -6，得

$$x>1.$$

练习 2-2

1. 下列说法是否正确？

(1) 如果 $a>b$，则 $b<a$；

(2) 如果 $a+c>b$，则 $a<b-c$；

(3) 如果 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

(4) 如果 $a^2<b^2$，则 $|a|<|b|$.

2. 比较下列各组中两个实数或代数式的大小：

(1) $-\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{3}$；　　(2) $a+3$ 和 $a+6$；

(3) $2x^2+3x+4$ 和 x^2+3x+3；　　(4) a^2+10 和 $6a$；

(5) $2a^2-a+2$ 和 a^2-3a；　　(6) $(x-1)(x+2)-3$和$(2x-3)(x+1)$.

3. 用“$<$”或“$>$”填空：

(1) $a-3$ ______ $a-2$；　　(2) a^2+1 ______ 0；

(3) 如果 $a>b$，则 $a-c$ ______ $b-c$；　　(4) 如果 $a>b$，则 $3a$ ______ $3b$；

(5) 如果 $a>b$，则 $-3a$ ______ $-3b$；　　(6) 如果 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}$ ______ $\frac{1}{b}$.

4. 已知 $a<0$，$-1<b<0$，请把 ab^2，ab 与 a 三个数从小到大排列.

2.2.2　不等式的解集与区间

问题　某班级有 8 名同学参加植树活动，要求植树的总数不得少于 32 棵，则平均每名同学至少要植树多少棵?

分析：“至少”就是“大于或等于”，设平均每名同学植树 x 棵，则

$$8x\geqslant 32,$$

两边同除以 8，得 $x\geqslant 4$.

于是平均每名同学至少要植树 4 棵.

一般地，在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数值的全体所构成的集合，叫做**不等式的解集**. 不等式的解集，一般可用性质描述法来表示. 求不等式解集的过程，叫做**解不等式**.

例如，不等式 $8x\geqslant 32$ 的解集可表示为 $\{x \mid x\geqslant 4\}$.

只含有一个未知数，并且未知数的次数是 1，系数不等于 0 的整式不等式叫做**一元一次不等式**. 下面我们通过例题来回顾一元一次不等式的解法.

> 如果 $a+c>b$，则 $a>b-c$.
>
> **读一读**

例 3　解不等式 $\dfrac{2x+3}{5}\geqslant\dfrac{x-1}{2}+1$.

解：原不等式去分母，得

$$2(2x+3)\geqslant 5(x-1)+10,$$

去括号，得 $4x+6\geqslant 5x-5+10$. 移项，得

$$4x-5x\geqslant -6-5+10.$$

合并同类项，得 $-x\geqslant -1$.

两边同除以 -1，得 $x\leqslant 1$.

所以原不等式的解集是 $\{x \mid x\leqslant 1\}$.

> **想一想**　如果在不等式两边同时乘以一个负数，不等号的方向是否改变?

这个不等式的解集在数轴上表示如图 2-2.

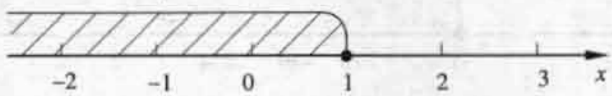


图 2-2

生活中还有一些问题涉及多个不等式. 一般地，含有相同未知数的几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做**一元一次不等式组**.

几个一元一次不等式的解集的交集，叫做由它们所组成的**一元一次不等式组的解集**. 特别地，如果各个不等式的解集的交集是空集，那么由它们所组成的不等式组的解集是空集. 求不等式组解集的过程，叫做**解不等式组**.

> 你能从图 2-2 中找到与 $\frac{2x+3}{5} \geqslant \frac{x-1}{2}+1$ 对应的方程 $\frac{2x+3}{5}=\frac{x-1}{2}+1$ 的解吗？
>
> 试一试

例 4 解不等式组

$$\begin{cases} x-5 \leqslant 2x-4 & ① \\ 3x+1<9-x & ② \end{cases}$$

分析：这个不等式组包含两个不等式，因此，求这个不等式组的解集，实际上就是求这两个不等式的解集的交集.

解：由不等式①得

$$x-2x \leqslant 5-4,$$
$$-x \leqslant 1,$$
$$x \geqslant -1.$$

所以不等式①的解集是 $\{x \mid x \geqslant -1\}$.

由不等式②得

$$3x+x<9-1,$$
$$4x<8,$$
$$x<2.$$

所以不等式②的解集是 $\{x \mid x<2\}$.

因为 $\{x \mid x \geqslant -1\} \cap \{x \mid x<2\}=\{x \mid -1 \leqslant x<2\}$，所以原不等式组的解集是

$$\{x \mid -1 \leqslant x<2\}.$$

说明：例 4 中①的解集与②的解集的交集运算可以在数轴上表示出来，如图 2-3 所示.

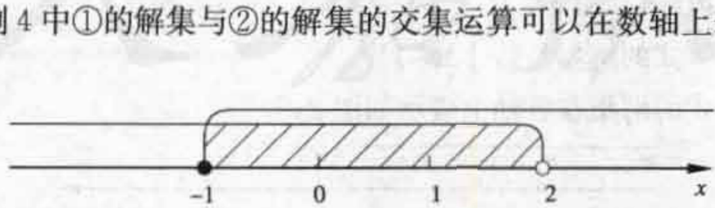


图 2-3

我们还经常用区间表示不等式的解集. 下面介绍区间的概念.

设 a，$b \in \mathbf{R}$，且 $a<b$，则：

满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，叫做**闭区间**，记作 $[a, b]$（如图 2-4（1））；

满足 $a < x < b$ 的全体实数 x 的集合，叫做**开区间**，记作 (a, b)（如图 2-4（2））；

满足 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，都叫做**半开半闭区间**，分别记作 $[a, b)$ 或 $(a, b]$（如图 2-4（3）（4））.

a 与 b 叫做区间的**端点**. 在数轴上表示区间时，端点属于这个区间，用实心点表示，不属于这个区间，用空心点表示.

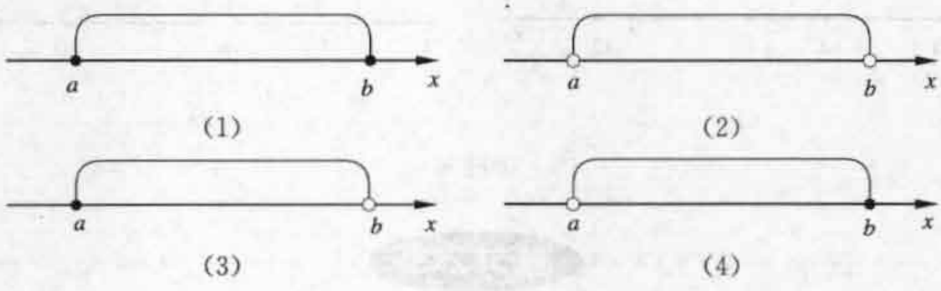


图 2-4

实数集 $\mathbf{R}$，也可用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$，符号“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”.

满足 $x \geqslant a$ 的全体实数，可记作 $[a, +\infty)$（如图 2-5（1））；

满足 $x > a$ 的全体实数，可记作 $(a, +\infty)$（如图 2-5（2））；

满足 $x \leqslant a$ 的全体实数，可记作 $(-\infty, a]$（如图 2-5（3））；

满足 $x < a$ 的全体实数，可记作 $(-\infty, a)$（如图 2-5（4））.

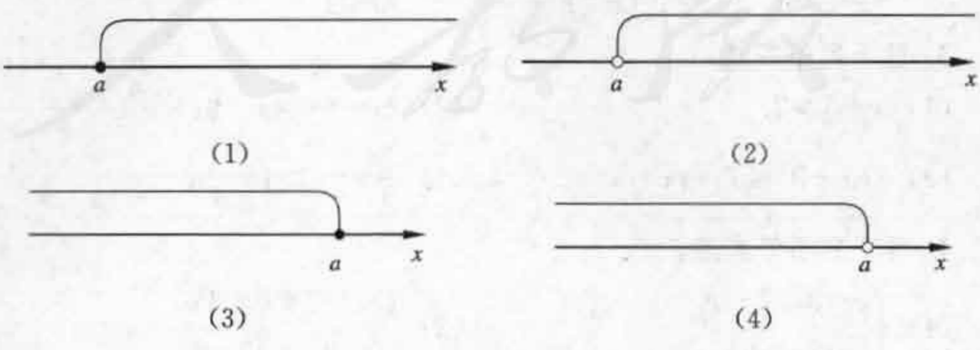


图 2-5

例 5 用区间记法表示下列不等式的解集：

(1) $-3<x\leqslant 8.5$； (2) $x\geqslant 10$.

解：(1) $(-3, 8.5]$； (2) $[10, +\infty)$.

例 6 用集合的性质描述法表示下列区间，并在数轴上表示：

(1) $[4, 12]$； (2) $(-\infty, -6)$.

解：(1) $\{x \mid 4\leqslant x\leqslant 12\}$； (2) $\{x \mid x<-6\}$.

如图 2-6 所示.

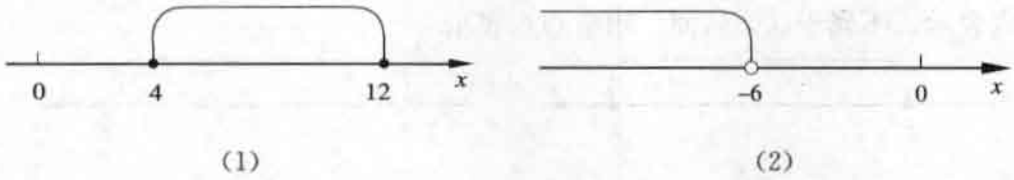


图 2-6

练习 2-3

1. 写出下列不等式的解集：

(1) $x-1>0$； (2) $2x<6$；

(3) $2-x\leqslant 0$； (4) $-x>3$；

(5) $2x-4\leqslant 0$； (6) $5-2x<0$.

2. 写出下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases}x>1\\x>2\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x<3\\x<5\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x<4\\x>-2\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x>2\\x<-1\end{cases}$ (5) $\begin{cases}x\geqslant 1\\x\leqslant 1\end{cases}$ (6) $\begin{cases}x>-1\\x<1\end{cases}$

3. 解下列不等式：

(1) $x+5>2$； (2) $2x-5<4x-9$；

(3) $3(x-3)\leqslant 7-x$； (4) $\frac{1}{3}x-5>1+\frac{1}{2}x$.

4. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}x-3\leqslant 7-x\\5-2x>9-x\end{cases}$ (2) $\begin{cases}5x-2<6-3x\\5-2x>35-8x\end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{x}{2}+1\leqslant 6-\frac{x}{2} \\ 3+\frac{2}{5}x>2-\frac{x}{5} \end{cases}$　　　(4) $\begin{cases} 2x+\frac{1}{3}>\frac{2}{3}-2x \\ 2-4x<16+3x \end{cases}$

5. 用区间记法表示下列不等式的解集，并在数轴上表示这些区间：

(1) $-1\leqslant x\leqslant 5$；　　　(2) $2<x<3$；

(3) $-6\leqslant x<-2$；　　　(4) $-3<x\leqslant 3$；

(5) $x\geqslant 0$；　　　(6) $x<2$.

2.2.3　含有绝对值的不等式

我们知道，$|-3|=3$，$|3|=3$，事实上，对任意实数 m，都有

$$|m|=\begin{cases} m & (m>0) \\ 0 & (m=0) \\ -m & (m<0) \end{cases}$$

实数 m 的绝对值 $|m|$，在数轴上表示对应实数 m 的点到原点的距离，这就是 $|m|$ 的几何意义. 例如，$|-3|=3$ 的几何意义就是数轴上与 -3 所对应的点到原点的距离为 3. $|3|=3$ 的几何意义就是数轴上与 3 所对应的点到原点的距离为 3. 如图 2-7 所示.

> **读一读**
>
> 绝对值符号"| |"是德国数学家魏尔斯特拉斯（K. T. W. Weierstrass，1815—1897）在 1841 年所使用，然后被人们接受，并且沿用至今.

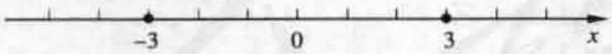


图 2-7

由 $|m|$ 的几何意义可知，在数轴上，坐标满足不等式

$$|x|\leqslant 3$$

的点的集合，是与原点的距离小于 3 或等于 3 的点的全体构成的集合，如图 2-8 所示.

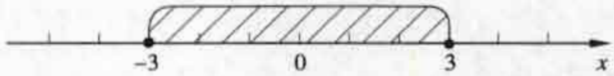


图 2-8

即

$$\{x \mid |x| \leqslant 3\}=\{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}=[-3, 3].$$

而坐标满足不等式

$$|x|>3$$

的点的集合，是与原点距离大于 3 的点的全体构成的集合，如图 2-9 所示.

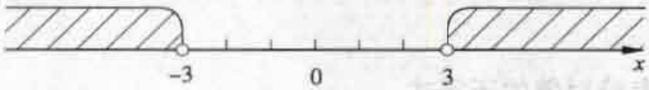


图 2-9

即$\{x \mid |x|>3\}=\{x \mid x<-3$或$x>3\}=(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

一般地，如果 $m>0$，则

$$\boxed{\begin{array}{l} |x| \leqslant m \Leftrightarrow -m \leqslant x \leqslant m, \\ |x| \geqslant m \Leftrightarrow x \leqslant -m \text{ 或 } x \geqslant m. \end{array}}$$

这个结果如图 2-10 所示.

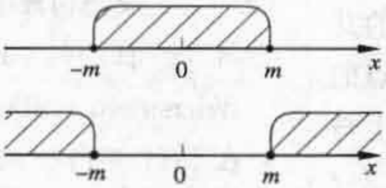


图 2-10

仿照上面，你能分别写出不等式 $|x|<5$ 和 $|x|>5$ 的充要条件，并在数轴上表示出来吗?

试一试

例 7 解下列不等式，并在数轴上表示它的解集：

(1) $|2x-3| \leqslant 1$; (2) $|2x-3|>1$.

解：(1) 原不等式等价于

$$-1 \leqslant 2x-3 \leqslant 1,$$

$$2 \leqslant 2x \leqslant 4,$$

$$1 \leqslant x \leqslant 2.$$

所以原不等式的解集是 $[1, 2]$（图 2-11 (1)).

(2) 原不等式等价于

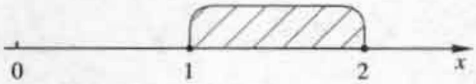
$$2x-3<-1, \qquad ①$$

或

$$2x-3>1. \qquad ②$$

①的解集是 $(-\infty, 1)$，②的解集是 $(2, +\infty)$.

所以原不等式的解集是 $(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$（图 2-11 (2)).



(1)

(2)

图 2-11

先提取 2，把 x 的系数变为 1 来解这两个不等式.

做一做

练习 2-4

1. 解下列不等式：

(1) $|x|<1$；　　(2) $|x|\geqslant 5$；

(3) $2|x|-4>0$；　　(4) $1-3|x|<0$；

(5) $|x+1|>0$；　　(6) $|x-2|<0$.

2. 解下列不等式，并在数轴上表示其解集：

(1) $|x-4|<9$；　　(2) $|x-2|>2$；

(3) $|1-2x|\leqslant 3$；　　(4) $|2x+1|\geqslant 7$.

3. 解不等式 $1\leqslant|x-2|\leqslant 2$.

4. 若关于 x 的不等式 $|x-a|<b$ 的解集为 $\{x\mid -3<x<9\}$，求实数 a，b 的值.

2.2.4　一元二次不等式

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式不等式叫做一元二次不等式.

它的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0(a\neq 0).$$

首先我们研究一元二次不等式 $x^2\leqslant m^2$ 和 $x^2\geqslant m^2(m>0)$ 的解法.

由"如果 $a>0$，$b>0$，那么 $a>b \Leftrightarrow a^2>b^2$"得：

对于任意实数 x，m，有 $|x|>|m| \Leftrightarrow x^2>m^2$，则

$$|x|\leqslant|m| \Leftrightarrow x^2\leqslant m^2;$$

$$|x|\geqslant|m| \Leftrightarrow x^2\geqslant m^2.$$

于是当 $m>0$ 时，有

$$x^2\leqslant m^2 \Leftrightarrow |x|\leqslant m;$$

$$x^2\geqslant m^2 \Leftrightarrow |x|\geqslant m.$$

例如

$$x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2;$$

$$x^2\geqslant 4 \Leftrightarrow |x|\geqslant 2 \Leftrightarrow x\geqslant 2 \text{或} x\leqslant -2.$$

例 8 解下列不等式：

(1) $(x+2)^2<4$; (2) $(x-1)^2\geqslant 9$.

解：(1) 原不等式等价于

$$|x+2|<2,$$

即 $-2<x+2<2$. 解得

$$-4<x<0.$$

所以原不等式的解集为 $(-4, 0)$（图 2-12）.

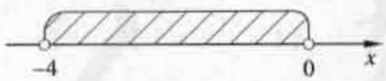
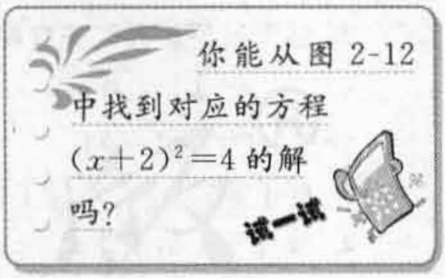


图 2-12



(2) 原不等式等价于

$$|x-1|\geqslant 3,$$

即 $x-1\leqslant -3$ 或 $x-1\geqslant 3$. 解得

$$x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 4.$$

所以原不等式的解集为 $(-\infty, -2]\cup[4, +\infty)$（图 2-13）.

图 2-13

下面我们用配方法研究一般的一元二次不等式的解法.

> 试一试
>
> 你能从图 2-13 中找到对应的方程 $(x-1)^2=9$ 的解吗?

例 9　解下列不等式：

(1) $x^2-2x-3\leqslant 0$;

(2) $-2x^2+5x+3<0$.

解：(1) 原不等式左边配方，得

$$x^2-2x+1^2\leqslant 3+1^2,$$

$$(x-1)^2\leqslant 4,$$

即 $|x-1|\leqslant 2$，从而

$$-2\leqslant x-1\leqslant 2,$$

解得 $-1\leqslant x\leqslant 3$.

所以原不等式的解集为 $[-1,\ 3]$ (图2-14).

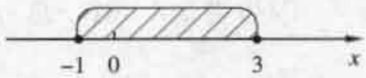


图 2-14

(2) 原不等式等价于

$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}>0,$$

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2>\frac{49}{16},$$

即 $\left|x-\frac{5}{4}\right|>\frac{7}{4}$，从而

$$x-\frac{5}{4}>\frac{7}{4} \text{ 或 } x-\frac{5}{4}<-\frac{7}{4},$$

解得 $x>3$ 或 $x<-\frac{1}{2}$.

所以原不等式的解集为 $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)\cup(3,\ +\infty)$ (图 2-15).

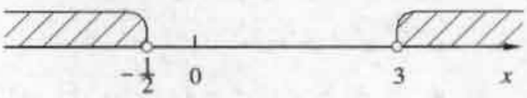


图 2-15

例 10　解下列不等式：

(1) $x^2-2x+3\leqslant 0$;

(2) $x^2+4x+5>0$;

(3) $x^2-2x+1>0$.

解：(1) 原不等式等价于

$$x^2-2x+1+2\leqslant 0,$$

即

$$(x-1)^2\leqslant -2.$$

因为不论 x 为何值，总有 $(x-1)^2\geqslant 0$ 成立，所以原不等式的解集是空集$\varnothing$.

> **想一想** 不等式的解集与对应方程的解有什么关系?

（2）原不等式等价于

$$(x+2)^2+1>0.$$

因为不论 x 为何值，总有 $(x+2)^2\geqslant 0$ 成立，从而

$$(x+2)^2+1>0$$

恒成立. 所以原不等式的解集是实数集 **R**.

（3）原不等式等价于

$$(x-1)^2>0.$$

因为当 $x\neq 1$ 时，总有$(x-1)^2>0$ 成立，所以原不等式的解集是

$$\{x\mid x\neq 1\}.$$

练习 2-5

1. 解下列不等式：

（1）$x^2-16<0$；（2）$x^2-16>0$；

（3）$(x-3)^2>0$；（4）$(x-3)^2<0$；

（5）$(x-1)^2+5>0$；（6）$(x-1)^2+5<0$.

2. 解下列不等式：

（1）$(x+1)^2<64$；（2）$(x-2)^2>100$；

（3）$x^2-3x-10>0$；（4）$-x^2-5x+14>0$.

3. 解下列不等式：

（1）$x^2+4x+4\leqslant 0$；（2）$x^2+4x+4>0$；

（3）$x^2+x+2<0$；（4）$x^2+x+2>0$.

4. 求不等式$(x^2-4x-5)(x^2+1)>0$的解集.

5. 已知方程 $x^2-(m+1)x+2=0$有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围.

习题二

1. 解下列一元二次方程：

(1) $4x^2-9=0$；　　(2) $x^2-x=0$；

(3) $x^2+5x+6=0$；　　(4) $x^2-5x=6$；

(5) $x^2+2x+1=0$；　　(6) $-3x^2+x+2=0$；

(7) $x^2+3=4x$；　　(8) $x^2-5x+5=0$.

2. 比较下列各组中两个实数或代数式的大小：

(1) $-\frac{8}{9}$和$-\frac{7}{8}$；　　(2) $(x+5)(x+7)$和$(x+6)^2$；

(3) $(x+1)^2$和$2x+1$；　　(4) $2a^2-7a+2$ 和 a^2-6a+1.

3. 填空题：

(1) $2x-3>1$ 的解集是________；

(2) $7-3x<4$ 的解集是________；

(3) $\begin{cases}x<9\\x>-2\end{cases}$的解集是________；

(4) $\begin{cases}x\leqslant 0\\x>-1\end{cases}$的解集是________；

(5) $\begin{cases}x<8\\x\leqslant -6\end{cases}$的解集是________；

(6) $\begin{cases}x\geqslant 8\\x>-6\end{cases}$的解集是________.

4. 解下列不等式：

(1) $x+8\leqslant 11-3x$；　　(2) $\frac{2}{3}x+1>\frac{1}{3}-x$；

(3) $\begin{cases}x+2>2x-3\\5x-1>3x+7\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\frac{x}{2}-12<2(x+1)\\x-2>5x+6\end{cases}$

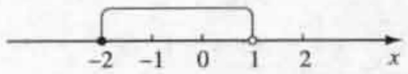
5. 用区间记法和集合的性质描述法分别表示下列不等式的解集：

(1) $-2\leqslant x\leqslant 0$；　　(2) $-7<x<7$；

(3) $0\leqslant x<3$；　　(4) $5<x\leqslant 9$；

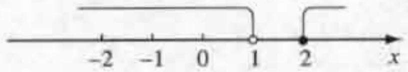
(5) $x<5$；　　(6) $x>-6$.

6. 用区间记法和集合的性质描述法分别表示下列数轴上所表示的不等式的解集：

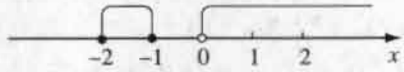


(1)

(2)



(3)



(4)

7. 解下列含绝对值的不等式：

(1) $|3x-1|\leqslant 5$；　　(2) $|2x-5|>3$；

(3) $\left|\frac{1}{4}+x\right|\leqslant\frac{1}{2}$；　　(4) $\frac{|3x-5|}{2}+4\leqslant 8$；

(5) $1<|x-3|<7$；　　(6) $|2x-1|>-1$.

8. 解下列一元二次不等式：

(1) $x^2-3x+2>0$；　　(2) $-x^2+10x+11>0$；

(3) $x^2+12x+36>0$；　　(4) $x^2-4x+20<0$；

(5) $x^2-10x+25\geqslant 0$；　　(6) $4x^2+4x+1<0$.

9. 已知方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围.

10. 李明同学在一次考试中，语文、英语的平均分数是 92 分，并且语文、英语、数学三科平均分不低于 90 分，问李明同学数学至少考了多少分？

阅读与实践

黄金分割

图 1 是一个大自然的艺术品——鹦鹉螺，它的美丽体现在它的螺旋线上. 这条螺旋线的美蕴涵着黄金分割比.

图 2 是鹦鹉螺的透视图，能清楚的看到这条美丽的曲线，而这条美丽的曲线处处位于一个黄金矩形内.

图 1

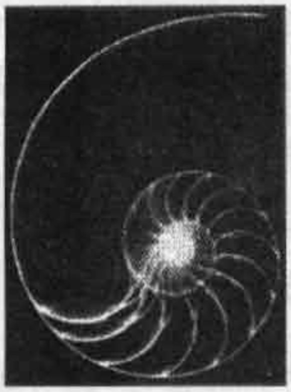


图 2

如果从两个边长是 1 的正方形开始画正方形，边长分别是 1，1，2，3，5，8，13，21，…（图 3），随着正方形的增加，所形成的矩形的长宽比例越来越接近黄金分割比．连接正方形内接曲线，便会得到这条螺旋线．

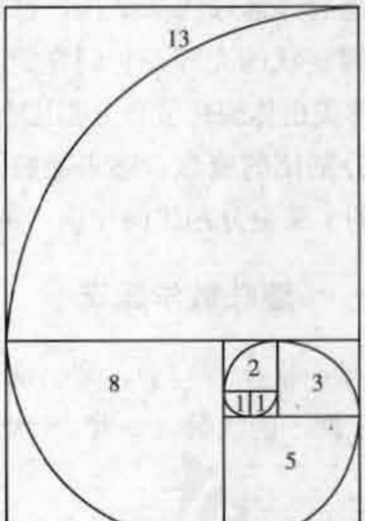


图 3

在古希腊的艺术和建筑中，人们已经广泛地使用黄金矩形，例如古希腊的巴特农神庙，其高和宽的比非常接近黄金分割比．在文艺复兴时代，意大利以神圣比例来称呼黄金分割比，认为黄金分割比是最完美的比例．

目前，我们经常使用或看到的明信片、邮票、国旗、名片等等其长宽之比都与黄金分割比非常接近．利用黄金分割比完成的构图通常具有秩序、明朗的特性，给人一种美的享受．

那么，什么是黄金分割比呢？

如图4，若点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 CB，且满足 $\frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC}$，则称点 C 是线段 AB 的黄金分割点．AC 与 AB 的比叫做黄金分割比．

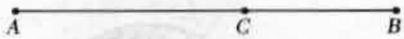


图4

设线段 $AB=1$，$AC=t$，由定义列方程 $\frac{t}{1}=\frac{1-t}{t}$，整理得 $t^2+t-1=0$，解得 $t_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $t_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（不合题意，舍去）．

黄金分割比是一个常数，它的值为 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$．

这个值的倒数是 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，大约是1.618，也称为黄金分割比．

在自然界中有许多东西的外形或内部结构，都可以发现黄金分割比的存在，例如菠萝、菊花以及螺旋状的壳等，它们左旋及右旋的比例，就都很接近黄金分割比．我们的人体美也体现在黄金分割比上．

这里已经给出了黄金分割比的概念，感兴趣的同学可以上网查阅有关资料，看一看本专业是否用到了黄金分割比的知识，黄金矩形的概念是怎样的．

趣味数学题选

1. 小王前不久刚参加了一次生日宴会，宴会那天，他发现，每两人见面时都要握手，他好奇地数了握手的次数，一共28次．你知道参加宴会的人有多少吗？

解：设参加这次宴会的人一共有 n 名．n 个参加宴会的人每人都握 $n-1$ 次手．并且当甲握乙的手时，乙也就握了甲的手了，这两次握手应该只算1次．所以握手的次数实际上只有 $n(n-1)$ 的一半．

列方程得 $\frac{n(n-1)}{2}=28$．解得

$$n=8 \text{ 或 } n=-7 \text{（不合题意舍去）}.$$

即参加宴会的人有8人．

2.《九章算术》是中国古代著名的数学著作．其中有一个题目说：一个正方形的围城，南北中间各有一个门（图5）．北门外20步处有一棵树．出南

门走 14 步，再向西走 1 775 步刚好可以看见城北的树，求这个围城的边长. 古人给出答案是 250 步，你认为对吗?

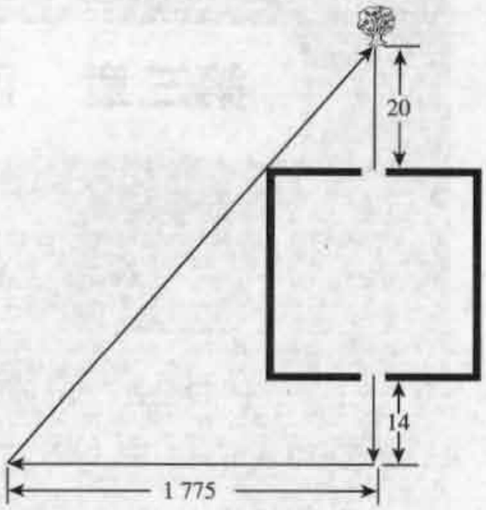
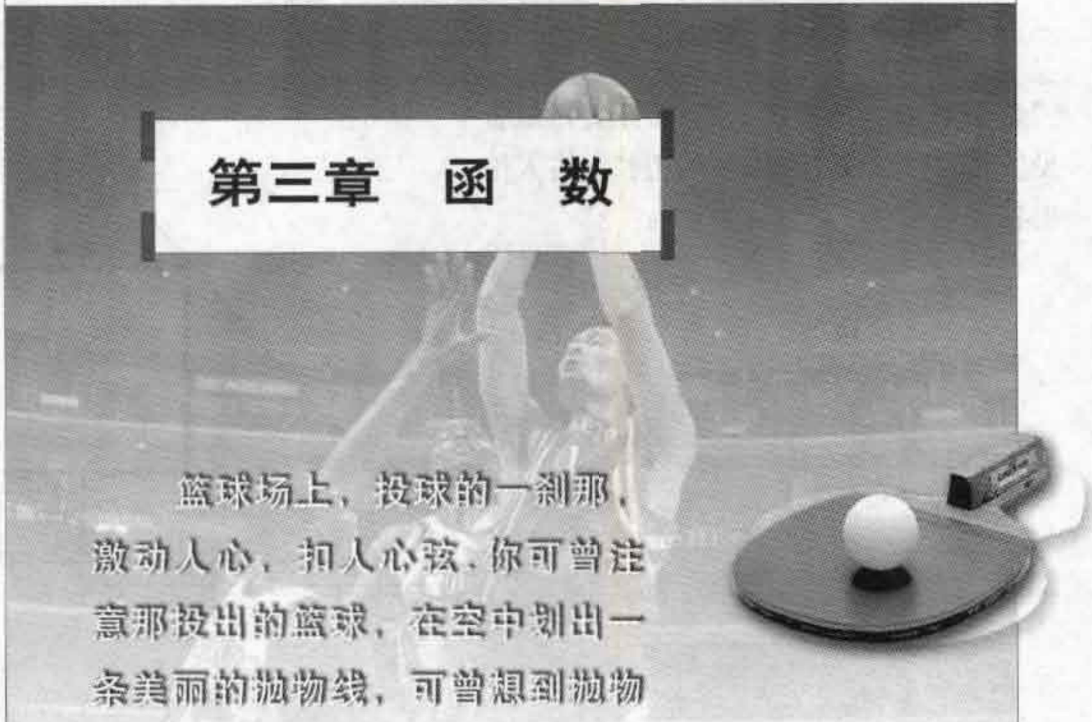
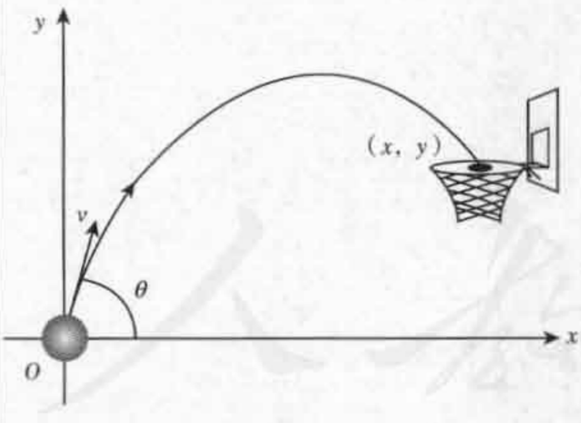


图 5



第三章　函　数

篮球场上，投球的一刹那，激动人心，扣人心弦．你可曾注意那投出的篮球，在空中划出一条美丽的抛物线，可曾想到抛物线的背后隐藏着篮球的高度与时间的函数关系．



历史使人聪明，
诗歌使人机智，
数学使人精细．

——培根

没有哪门学科能比数学更为清晰地阐明自然界的和谐性．

——卡罗斯

函数是数学中的重要概念，它描述了某一过程中变量之间的相互依赖和相互制约的关系以及集合之间的关系.

本章我们将进一步体会、理解函数的概念，学习函数的基本性质和函数的表示方法. 通过研究二次函数，学习研究函数性质的一些基本方法，为下一章学习指数函数、对数函数和以后的进一步学习打下基础.

3.1 函数的概念

在初中，我们已经学习了变量与函数的概念：在某个变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果给定一个 x 值，就相应地确定了唯一的 y 值，那么我们就称 y 是 x 的**函数**，其中 x 是自变量，y 是因变量.

下面我们通过日常生活中的实例，进一步研究函数，请你认真思考，并尝试解决提出的问题.

路程问题　一辆汽车在一段平坦的道路上以 100 km/h 的速度匀速行驶 2 h，试写出行驶路程 s(km) 和行驶时间 t(h) 的关系式，并指出 t 的取值范围.

体积问题　如图 3-1，一个圆柱形的玻璃杯，底面积为 15 cm^2，杯子的高度是 10 cm. 设杯中水的高度为 h(cm)，水的体积为 V(cm^3). 当 h 改变时，V 就会随之改变. 请写出用 h 表示 V 的关系式，并确定 h 的取值范围.

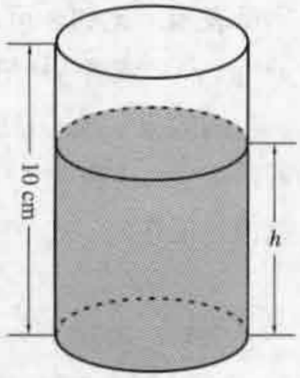


图 3-1

在路程问题中，由路程=速度×时间，得

$$s=100t\ (t\in[0,\ 2]).\qquad ①$$

在体积问题中，根据圆柱体的体积=底面积×高，得

$$V=15h,\qquad ②$$

因为杯中水的高度不会超过杯的高度，所以 h 的取值范围是 $[0,\ 10]$.

在①式中，我们可以认为路程 s 随着时间 t 的变化而变化，在②式中，体积 V 随着高度 h 的变化而变化. 这时就说，变量 t 和 h 是**自变量**，而路程 s 和体积 V 是**因变量**. 从以上两例，可以看到两个重要的事实：

(1) 在每个例子中都指出了自变量的取值集合；

(2) 每个例子中都给出了对应法则．这种对应法则要求：对自变量的任一个值，因变量都有唯一确定的值与之对应．对应法则可通过公式、数表和图象给出．

下面我们用集合语言，对函数的概念进行描述．

设集合 A 是一个非空实数集．按照某种确定的对应法则 f，对 A 中任意的实数 x，都有唯一确定的实数值 y 与它对应，则称这种对应法则为集合 A 上的一个**函数**．记作

$$y=f(x),$$

其中 x 为自变量，y 为因变量．自变量 x 的取值集合 A 叫做函数的**定义域**．对应的因变量 y 的取值集合叫做函数的**值域**．

由以上定义可以看到，函数关系实质上是表示两个数集的元素之间按照某种法则确定的一种对应关系．

有时，函数的对应关系也可以用 g，h 等字母表示．比如，可以将 y 是 x 的函数记为 $y=g(x)$，或者 $y=h(x)$，等等．

函数 $y=f(x)$ 也经常写成函数 $f(x)$ 或者函数 f．函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处对应的函数值，记作

$$f(a).$$

瑞士数学家约翰·伯努利（Johann Bernoulli，1667—1748）于1694年首次提出函数（function）概念．1734年，瑞士数学家欧拉（Euler，1707—1783）首次用“f”表示函数．

读一读

例如，函数 $f(x)=x^3+x$，当 x 分别取 0，3，-3，a，$-a$ 时，所对应的函数值分别是

$$f(0)=0^3+0=0;$$
$$f(3)=3^3+3=30;$$
$$f(-3)=(-3)^3-3=-30;$$
$$f(a)=a^3+a;$$
$$f(-a)=(-a)^3+(-a)=-a^3-a.$$

例 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，求 $f(1)$，$f(-2)$，$f(-x)$，$f(x+1)$．

解：分别用 1，-2，$-x$，$x+1$ 代替 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 中的 x，得

$$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2};$$

$$f(-2)=\frac{1}{(-2)^2+1}=\frac{1}{5};$$

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1};$$

$$f(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2+1}=\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

由于函数的值域被函数的定义域和对应法则完全确定，因此我们把函数的定义域和对应法则称为函数的两要素.

根据以上定义，我们要检验给定两个变量之间的关系是不是函数，只要检验：

(1) 定义域是否给出；

(2) 对应法则是否给出，并且根据这个对应法则，能否由自变量 x 的每一个值，确定唯一的函数值 y.

函数关系式中，函数的定义域有时可以省略，如果不特别指明一个函数的定义域，那么这个函数的定义域就是使函数有意义的全体实数构成的集合. 例如，函数

$$y=\frac{1}{x}$$

的定义域就是 $x\neq 0$ 的全体实数构成的集合，即 $\{x|\ x\neq 0\}$；再如，函数

$$y=\sqrt{x-1}$$

的定义域就是 $x\geqslant 1$ 的全体实数构成的集合，即 $\{x\ |\ x\geqslant 1\}$.

想一想　常值函数是一类特殊的函数，例如 $f(x)=10$，$x\in \mathbf{R}$. 你能理解吗？

练习 3-1

1. 口答下列各题：

(1) 已知函数 $y=3x$，$x\in[0,3]$，试指出这个函数表达式中的自变量、因变量和函数的定义域；

(2) 已知函数 $f(x)=x^2-1$，则 $f(0)$ 等于多少？

(3) 函数的两要素是什么？

2. 回答下面的问题，并指出式子中的自变量与因变量：

(1) 某种商品的价格为 4 元/件，试写出需要付款金额 y（元）与购买这种商品的数量 x（件）的关系式；

(2) 试写出圆的面积 S 与它的半径 r 的关系式.

3. 求下列函数的值：

(1) 设 $f(x)=2x^2-1$，求：$f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(b)$；

(2) 已知 $f(x)=\frac{x+1}{|x-2|}$，求：$f(0)$，$f(3)$，$f(-2)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$.

4. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2-4$，用计算器求 $f(-1.2)$，$f(3.7)$ 的值.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\frac{1}{x-5}$；

(2) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}$.

3.2 函数的表示方法

一个函数 $y=f(x)$ 除了直接用自然语言来表述外，常用的表示方法还有解析法、列表法和图象法三种.

1. 解析法

在上一节开始给出的两个函数 $s=100t\ (t\in[0, 2])$ 和 $V=15h\ (h\in[0, 10])$，都是用等式来表示两个变量间的函数关系，这种表示函数的方法叫做**解析法**. 例如，$y=x^2$，$y=2x$，$y=\sqrt{x}$等都是用解析法表示的函数.

用解析法表示函数关系的优点是：函数关系清楚，容易由自变量的值求出其对应的函数值，便于用解析式研究函数的性质.

2. 列表法

把两个变量之间的对应值列成表格来表示函数的关系，这种方法叫做**列表法**. 下表是一个例子，它记录了张超同学中学期间数学期末考试成绩.

表 3-1 张超同学 12 次数学考试成绩

学期序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
成绩	89	93	85	94	83	87	92	88	90	95	94	96

上表中，学期序号和成绩是两个变量．表中列出了不同学期序号对应的数学成绩．又如，下表也是用列表法来表示函数关系的．

表 3-2 我国国内生产总值 单位：亿元

年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
生产总值	78 973.1	84 402.3	89 677.1	99 214.6	109 655.2	120 332.7	135 822.8	159 878.3	183 867.9

用列表法表示函数关系的优点是：能够直接表明函数关系中的一些对应值，不必通过计算就可以知道当自变量取某些值时对应的函数值，使用比较方便．

3. 图象法

所谓图象法是指用图象来表示两个变量之间函数关系的方法．

你能从生活中或者是以前学过的知识中，找到用列表法来表示函数关系的例子吗？

例如，气象台应用自动记录器，描绘温度随时间变化的曲线就是用图象法表示函数关系的．

又如图 3-2 是我国人口出生率变化曲线，也是用图象法表示函数关系的．

图 3-2

用图象法表示函数关系的优点是：能够直观地表示出当自变量变化时相应函数值的变化趋势，使得我们可以通过图象来研究函数的性质.

例 1 某种笔记本每本 3 元，买 x（$x\in\{1, 2, 3, 4\}$）本笔记本的钱数记为 y（元）. 试写出以 x 为自变量的函数 y 的解析式，并画出这个函数的图象.

解：这个函数的定义域是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$，函数解析式为：

$$y=3x,\ x\in\{1, 2, 3, 4\}.$$

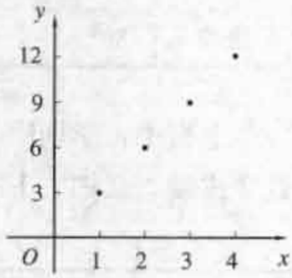


图 3-3

它的图象由 4 个离散的点组成，如图 3-3 所示，这些点的坐标分别是 $(1, 3)$，$(2, 6)$，$(3, 9)$，$(4, 12)$.

例 2 作函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象.

分析：函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是初中学过的反比例函数，图象是双曲线，它的定义域是 $\{x \mid x\neq 0\}$. 当 $x>0$ 时，$y>0$，这时函数的图象在第一象限，y 的值随着 x 的值的增大而减小；当 $x<0$ 时，$y<0$，这时函数的图象在第三象限，y 的值也是随着 x 的值的增大而减小.

你能用列表法表示出函数 $y=3x$ 中 y 与 x 的关系吗？

解：在这个函数的定义域内，适当地取若干个 x 的值：

$$\cdots,\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

计算出对应的函数值，列出函数的对应值表，见表 3-3：

表 3-3 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的对应值表

x	$\cdots$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	$\cdots$	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\cdots$

在直角坐标系中描出这些点并连成光滑曲线，这就是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象（图 3-4）.

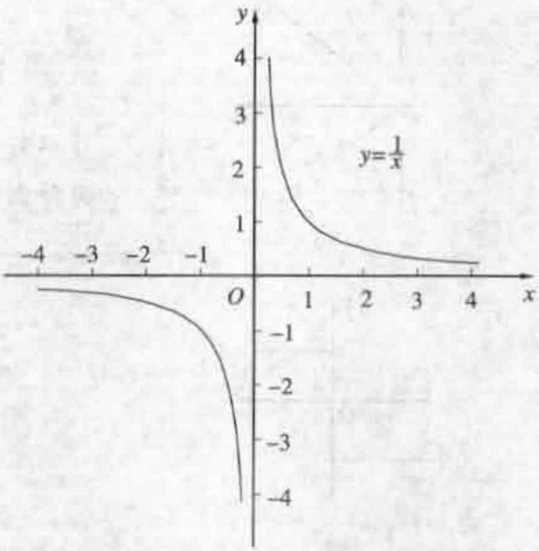


图 3-4

在作这种定义在无穷区间上的函数的图象时，我们不可能画出其完整的图象，只能画出它在有限区间上的图象，于是，我们可以先作出这种函数图象中的有限个点，并把这些点顺次用光滑的曲线连接起来即可.

例 3 作函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[0,3]\\ -x, & x\in[-3,0)\end{cases}$ 的图象.

解：如图 3-5 所示：

当 $x\in[0, 3]$ 时，$f(x)=x+1$，它的图象是一条线段；

当 $x\in[-3, 0)$ 时，$f(x)=-x$，它的图象是一条不含点 O 的线段.

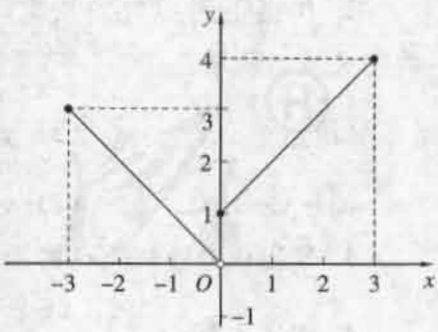


图 3-5

像例 3 这样的函数，在函数定义域内，对于自变量 x 的不同取值区间，有着不同的对应法则，这样的函数通常叫做**分段函数**.

说明：函数图象既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点，等等.

综上所述，函数只须有一个法则存在，使得在取值范围中的每一个 x 值，都有唯一确定的 y 值和它对应即可，不管这个法则是公式、图象、表格，还是其他形式.

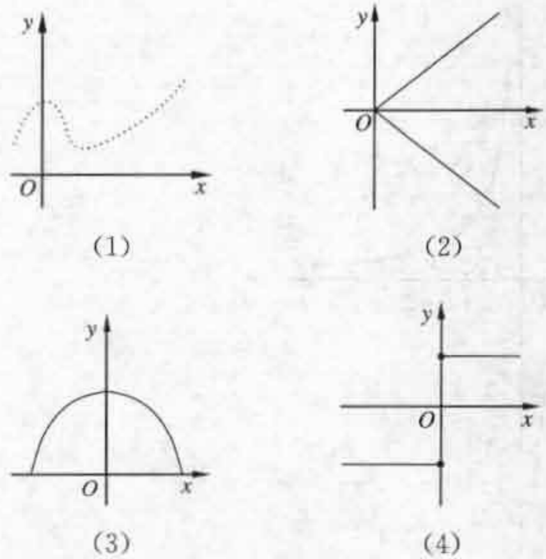


图 3-6

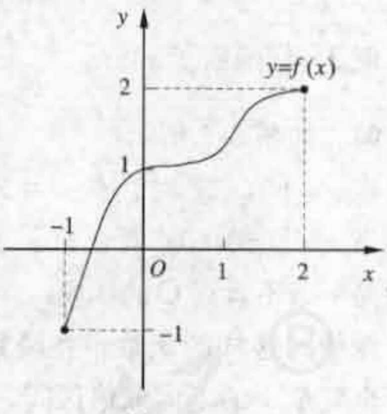
想一想 图 3-6 所示的图形哪些可以作为函数的图象？为什么？

练习 3-2

1. 口答下列各题：

(1) 函数的表示方法有哪几种形式？

(2) 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，说出函数的定义域、值域及 $f(0)$ 的值.



第 1 (2) 题

2. 作出下列函数的图象，并写出函数的定义域、值域：

(1) $y=3x$；　　(2) $y=\dfrac{2}{x}$；

(3) $y=x^2$；　　(4) $y=-2x+1$.

3. 作出函数 $y=|2x|$ 的图象.

4. 作出函数 $y=\begin{cases}1, & x\in[-1, 0) \\ 2, & x\in[0, 2]\end{cases}$ 的图象.

3.3 函数的单调性

考察函数 $y=2x$，$y=-2x$，$y=x^2$ 的图象（图 3-7）：

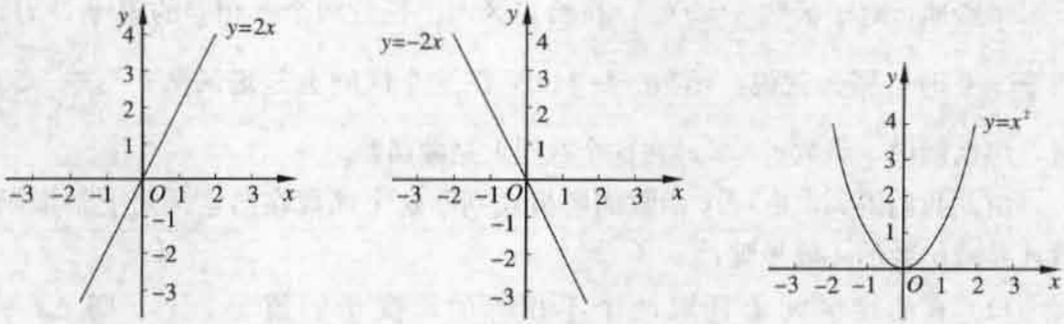


图 3-7

我们可以看到，当自变量 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上由小变大时，函数 $y=2x$ 的值也随着逐渐增大，函数 $y=-2x$ 的值反而减小；在区间 $(-\infty, 0]$ 上，函数 $y=x^2$ 的函数值随着自变量 x 的增大而逐渐减小，在区间 $[0, +\infty)$ 上，函数值又随自变量 x 的增大而逐渐增大. 为了刻画函数的这种增、减性质，我们引入增函数和减函数的概念.

议一议 观察图 3-7 中各个函数的图象，说出每个函数图象的变化趋势（上升或下降）.

在函数 $y=f(x)$ 的图象（如图 3-8）上任取两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，记

$$\Delta x=x_2-x_1,\ \Delta y=f(x_2)-f(x_1)=y_2-y_1.$$

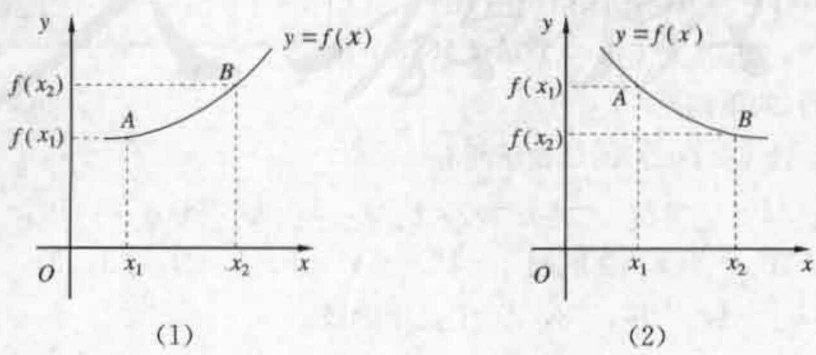


图 3-8

这里，Δx 表示自变量 x 的**增量或改变量**，相应地 Δy 表示函数值 y 的**增量或改变量**.

注：记号 Δx 并不表示 Δ 与 x 的乘积，而是一个整体符号，符号“Δ”是大写的希腊字母，读作“delta”. 增量既可以是正数，也可以为负数.

一般地，对于函数 $y=f(x)$ 在给定区间上任意两个不相等的值 x_1，x_2，当 $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ 时，那么就说，函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是**增函数**；当 $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ 时，那么就说，函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是**减函数**.

由此我们得到，由一个函数的解析式判断这个函数在给定区间上是增函数还是减函数的一般步骤：

(1) 在给定区间上任取两个不相等的自变量的值 x_1，x_2，则 $\Delta x=x_2-x_1$，从而计算出 Δy；

(2) 计算出 $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3) 判断：

当 $k>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是增函数（如图 3-8 (1)）；

当 $k<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是减函数（如图 3-8 (2)）.

如果一个函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或者是减函数，就说这个函数在这个区间上具有（严格的）**单调性**. 这个区间就叫做这个**函数的单调区间**.

函数的单调区间，一般是指保持函数单调性的最大区间.

> **想一想** 能说函数在某一点处有单调性吗？为什么？

例 1 如图 3-9，函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-10, 10]$，根据图象指出函数 $y=f(x)$ 的单调区间，并指出在每一个单调区间上函数 $y=f(x)$ 的单调性.

解：函数 $y=f(x)$ 的单调区间有

$$[-10, -4), [-4, -1), [-1, 2), [2, 8), [8, 10].$$

其中函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-10, -4)$，$[-1, 2)$，$[8, 10]$ 上是减函数；在区间 $[-4, -1)$，$[2, 8)$ 上是增函数.

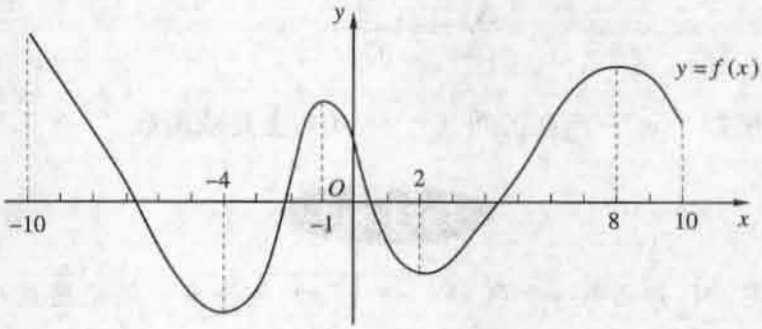


图 3-9

例 2 证明函数 $f(x)=2x+1$ 在（$-\infty$，$+\infty$）上是增函数.

证明：设 x_1，x_2 是任意两个不相等的实数.

因为 $\Delta x=x_2-x_1$，而且

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_2)-f(x_1)\\&=(2x_2+1)-(2x_1+1)\\&=2(x_2-x_1)\\&=2\Delta x.\end{aligned}$$

所以$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2>0$.

因此函数 $f(x)=2x+1$ 在（$-\infty$，$+\infty$）上是增函数.

例 3 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间（$-\infty$，0）上是减函数.

证明：设 x_1，x_2 是任意两个不相等的负实数.

因为 $\Delta x=x_2-x_1$，而且

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_2)-f(x_1)\\&=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\\&=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\\&=-\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\\&=-\frac{\Delta x}{x_1x_2}.\end{aligned}$$

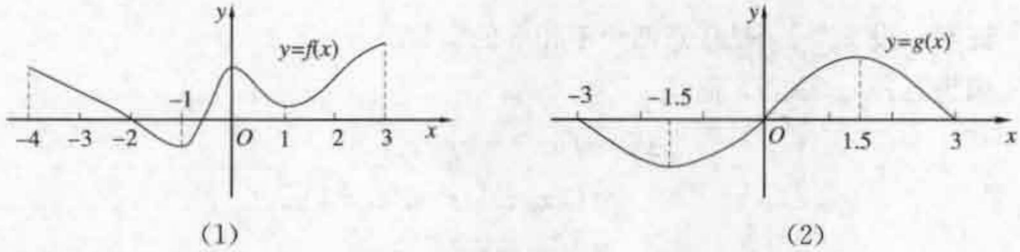
又因为 $x_1x_2>0$，所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_1x_2}<0.$$

因此，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间（$-\infty$，0）上是减函数.

练习 3-3

1. 如图，已知函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的图象（包括端点），根据图象说出函数的单调区间，以及在每一个区间上，函数是增函数还是减函数.



（第 1 题）

2. 下列函数在指定区间上是增函数还是减函数？

(1) $f(x)=x^2+1$，$x\in(0, +\infty)$；

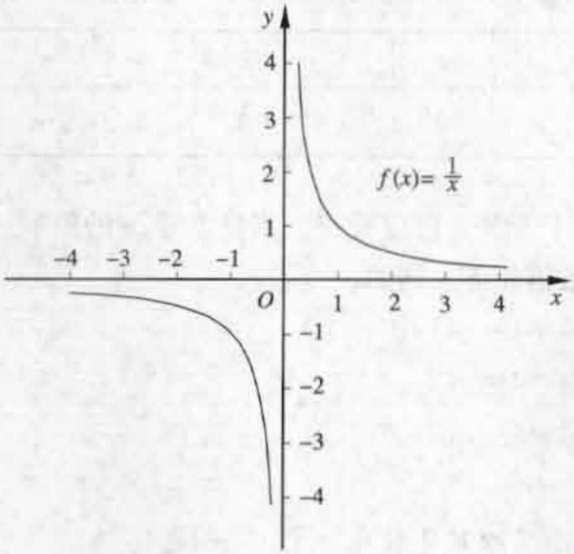
(2) $f(x)=-\frac{1}{x}$，$x\in(0, +\infty)$.

3. 证明函数 $f(x)=-\frac{1}{x}$在区间（$-\infty$，0）上是增函数.

3.4 函数的奇偶性

观察我们已经学过的两个函数 $f(x)=\frac{1}{x}$和 $g(x)=x^2$ 的图象（如图 3-10）：

我们会发现函数 $f(x)=\frac{1}{x}$的图象关于原点成中心对称；函数 $g(x)=x^2$ 的图象关于 y 轴成轴对称. 那么，如何用函数的数量关系来表述函数图象的这个特征呢？



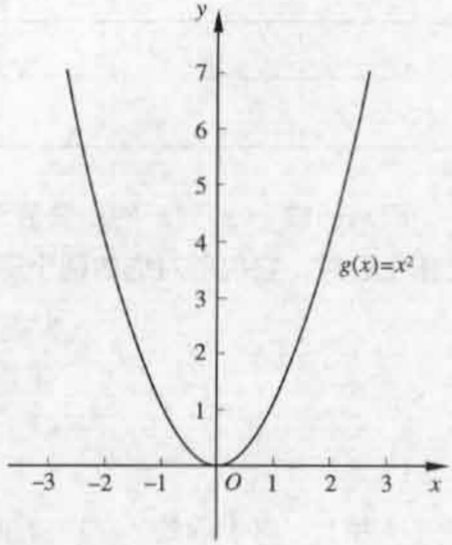


图 3-10

表 3-4

x	…	-3	-2	-1	…	1	2	3	…
$f(x)=\frac{1}{x}$	…	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	…	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…

从函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的函数值对应表 3-4 可以看出，当自变量 x 取一对相反数时，它们所对应的两个函数值互为相反数. 例如，

$$f(-1)=-1=-f(1);$$

$$f(-2)=-\frac{1}{2}=-f(2);$$

$$f(-3)=-\frac{1}{3}=-f(3);$$

……

实际上，对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 定义域 $\{x|x\neq0\}$ 中的任意一个 x，都有

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x).$$

这时我们就称 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为奇函数.

表 3-5

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$g(x)=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

而从函数 $g(x)=x^2$ 的函数值对应表 3-5 可以看出，当自变量 x 的值取一对相反数时，它们所对应的两个函数值相等．例如，

$$g(-1)=1=g(1);$$
$$g(-2)=4=g(2);$$
$$g(-3)=9=g(3);$$
$$\cdots\cdots$$

实际上，对于函数 $g(x)=x^2$ 的定义域 **R** 中任意一个 x，都有

$$g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x).$$

这时我们就称函数 $g(x)=x^2$ 为偶函数.

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 定义域中的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做**奇函数**；

如果对于函数 $f(x)$ 定义域中的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做**偶函数**.

> **想一想** 如果函数 $f(x)=x^2$，$x\in[-1,2]$，那么 $f(-2)$ 有意义吗？能说这个函数是偶函数吗？

例如函数 $f(x)=x$, $f(x)=x^3$ 均为奇函数；函数 $f(x)=-x^2+1$，$f(x)=|x|$ 均为偶函数.

一个函数是奇函数的充要条件是，它的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形；

一个函数是偶函数的充要条件是，它的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.

如果一个函数是奇函数或是偶函数，则称这个函数具有奇偶性．了解函数的奇偶性能简化函数性质的研究，如果知道一个函数是奇函数或偶函数，则只要把这个函数的定义域分成关于坐标原点对称的两部分，就可以由函数在其中一部分上的图象和性质，得出其在另一个部分上的图象和性质.

例 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x+x^3+x^5$；

(2) $f(x)=x^2+1$;

(3) $f(x)=x+1$;

(4) $f(x)=x^2$, $x\in[-1,\ 2]$.

解：(1) 函数 $f(x)=x+x^3+x^5$ 的定义域为 **R**.

因为对于定义域内的每一个 x，都有

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=-x+(-x)^3+(-x)^5\\
&=-x-x^3-x^5\\
&=-(x+x^3+x^5)=-f(x),
\end{aligned}
$$

所以，函数 $f(x)=x+x^3+x^5$ 是奇函数.

(2) 函数 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 **R**.

因为对于定义域内的每一个 x，都有

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2+1$ 是偶函数.

(3) 函数 $f(x)=x+1$ 的定义域为 **R**.

因为对于定义域内的每一个 x，

$$f(-x)=-x+1=-(x-1)，而 -f(x)=-x-1.$$

如 $f(-1)=0$，$f(1)=2$，$f(-1)\neq f(1)$，$f(-1)\neq -f(1)$.

因此 $f(x)=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(4) 因为 $2\in[-1,\ 2]$，但是 $-2\notin[-1,\ 2]$，所以函数 $f(x)=x^2$，$x\in[-1,\ 2]$ 既不是奇函数也不是偶函数.

从 (4) 可以看出，在判断一个函数的奇偶性时，如果这个函数的定义域关于坐标原点不对称，那么这个函数就失去了是奇函数或者偶函数的必要条件. 从图 3-11 也可以看出，函数 $f(x)=x^2$，$x\in[-1,\ 2]$ 的图象关于原点不对称，关于 y 轴也不对称，所以这个函数既不是奇函数也不是偶函数.

议一议　已知函数 $f(x)$ 在 **R** 上是奇函数，而且在 $(0,\ +\infty)$ 上是减函数，试说明函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上是增函数还是减函数.

想一想　函数 $f(x)=0$ 的奇偶性是怎样的？

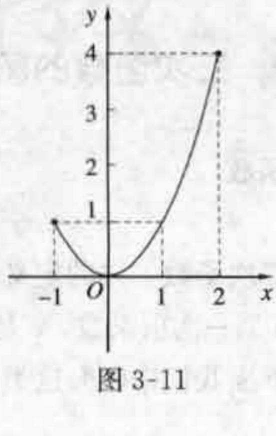


图 3-11

练习 3-4

1. 口答下列各题：

(1) 函数 $f(x)=x$ 是奇函数吗？

(2) 函数 $g(x)=2$ 是奇函数还是偶函数？

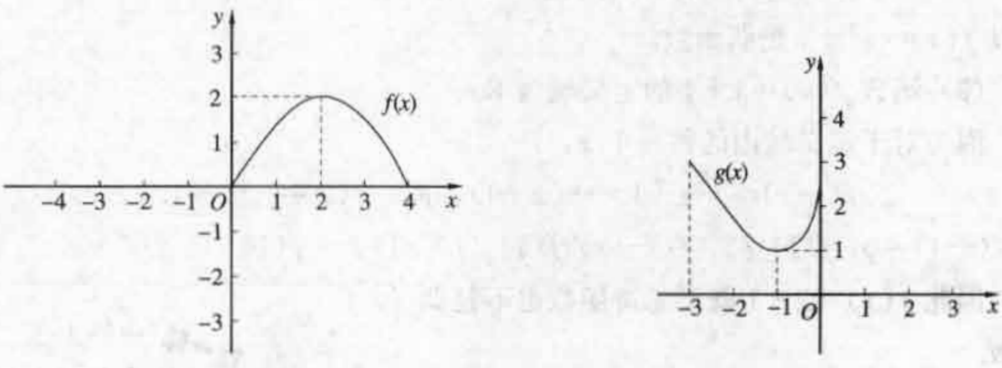
(3) 如果 $y=h(x)$ 是偶函数，当 $h(-1)=2$ 时，$h(1)$ 的值是多少？

2. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x$；　　(2) $f(x)=-x^2$；

(3) $f(x)=x^3+1$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，$x\in[-3,2]$.

3. 已知 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，如图 (1) (2) 分别是它们的局部图象，试求 $f(-2)$，$g(1)$，并把这两个函数的图象补充完整.



(1)　　(2)

(第 3 题)

3.5 二次函数的图象和性质

函数

$$y=ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c \text{ 是常数},\ a\neq 0)$$

叫做二次函数，它的定义域是 **R**，它的图象是一条抛物线. 其中 a 是二次项系数，b 是一次项系数，c 是常数项.

下面我们来研究这类函数的图象和性质.

例1 求作函数 $y=2x^2-4x-3$ 的图象.

解：$y=2x^2-4x-3$

$=2(x^2-2x+1)-2-3$

$=2(x-1)^2-5.$

由于对任意实数 x，都有 $2(x-1)^2\geqslant 0$，所以 $y\geqslant -5$，并且当 $x=1$ 时取等号. 说明该函数在 $x=1$ 时取得最小值 -5，记为 $y_{\min}=-5$. 以 $x=1$ 为中间值，对称地取 x 的一些值，列出这个函数的对应值表（表3-6）：

想一想 (1) 在二次函数的解析式中，为什么要求 $a\neq 0$? 一次项的系数与常数项可以等于0吗?

(2) 函数 $y=ax^2-2$（a 为常数）的图象什么时候是抛物线?

表 3-6

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	3	-3	-5	-3	3	…

在直角坐标系内描点画图（图 3-12）.

容易看出，关于直线 $x=1$ 对称的两个自变量的值所对应的函数值是相等的，也就是说该函数的图象是以过点（1，-5）且平行于 y 轴的直线 l 为对称轴的轴对称图形，可以简单地说成该抛物线关于直线 $x=1$ 对称.

读一读 y 的最大值(maximum)用符号“$y_{\max}$”表示；y 的最小值(minimum)用符号“$y_{\min}$”表示.

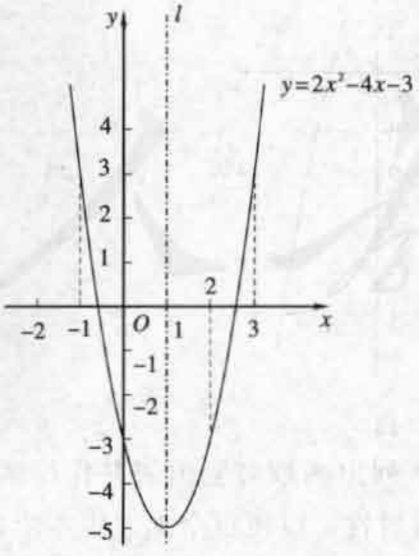


图 3-12

想一想 (1) 观察表3-6或图 3-12，关于 $x=1$ 对称的两个自变量的值对应的函数值有什么特点?

(2) $1-h$ 与 $1+h$ 关于 $x=1$ 对称吗? 分别计算$1-h$和 $1+h$ 处的函数值，你能发现什么?

(3) 你能说出这个函数在哪个区间上是增函数，哪个区间上是减函数吗?

一般地，通过点（m，0）且平行于 y 轴的直线上所有点的横坐标都是 m，通常把这条直线记为直线 $x=m$.

例 2 求作函数 $y=-x^2-2x+3$ 的图象.

解：
$$\begin{aligned} y&=-x^2-2x+3\\ &=-(x^2+2x)+3\\ &=-(x^2+2x+1)+4\\ &=-(x+1)^2+4. \end{aligned}$$

由于对任意实数 x，都有 $-(x+1)^2\leqslant 0$，所以 $y\leqslant 4$，并且当 $x=-1$ 时取等号. 说明该函数在 $x=-1$ 时取得最大值 4，记为 $y_{\max}=4$. 以 $x=-1$ 为中间值，对称地取 x 的一些值，列出这个函数的对应值表（表 3-7）：

表 3-7

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-5	0	3	4	3	0	-5	…

在直角坐标系内描点画图（图 3-13）.

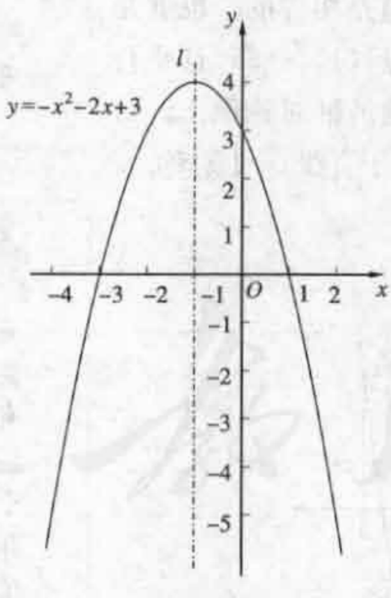


图 3-13

从以上两例，我们可以看到，为了列出函数对应值表并作出函数图象，应先对已知函数作适当的分析，克服盲目性，以便更全面、更本质地反应函数的性质.

下面我们来分析一下二次函数的性质.由配方法知，对任意一个二次函数

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0),$$

通过配方，可化为

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

由上式，我们就可得到二次函数如下的性质：

(1) 二次函数的图象是一条抛物线，抛物线顶点坐标是$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$；

> **想一想** (1) 你能说出图 3-13 中的函数的单调区间吗？
>
> (2) 你能通过函数 $y=-x^2-2x+3$ 的图象找到 $-x^2-2x+3\geqslant0$ 的解集吗？$-x^2-2x+3<0$ 的呢？

(2) 当 $a>0$ 时，函数图象开口向上；函数在 $x=-\frac{b}{2a}$处取最小值 $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；在区间$\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right]$上是减函数，在区间$\left[-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$上是增函数；

(3) 当 $a<0$ 时，函数图象开口向下；函数在 $x=-\frac{b}{2a}$处取最大值 $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；在区间$\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right]$上是增函数，在区间$\left[-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$上是减函数.

例 3 求函数 $y=3x^2+2x+1$ 的最小值及它的图象的对称轴，并说出它在哪个区间上是增函数，哪个区间上是减函数.

解法一：
$$\begin{aligned}y&=3x^2+2x+1\\&=3\left[x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]+1\\&=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+1\\&=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

所以 $y_{\min}=\frac{2}{3}$.

函数图象的对称轴是直线 $x=-\frac{1}{3}$，它在区间$\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right]$上是减函数，

在区间$\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$上是增函数.

解法二：函数 $y=3x^2+2x+1$ 中，$a=3$，$b=2$，$c=1$，则

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{3}, \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{2}{3},$$

所以函数图象的顶点坐标为$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

又因为 $a=3>0$，所以函数图象开口向上，函数有最小值$\frac{2}{3}$.

函数图象的对称轴是直线 $x=-\frac{1}{3}$，它在区间$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$上是减函数，在区间$\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$上是增函数.

例 4 已知二次函数 $y=x^2-x-6$，试问：

(1) x 取哪些值时，$y=0$？

(2) x 取哪些值时，$y>0$？x 取哪些值时，$y<0$？

分析：(1) 当 $y=0$ 时，二次函数 $y=x^2-x-6$ 可化为一元二次方程 $x^2-x-6=0$. 要求使 $y=0$ 的 x 值，即求一元二次方程 $x^2-x-6=0$ 的根.

(2) 当 $y>0$ 时，$y=x^2-x-6$ 可化为一元二次不等式 $x^2-x-6>0$；要求满足 $y>0$ 的 x 的取值范围，即求一元二次不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集.

同理可以求出当 $y<0$ 时 x 的取值范围.

解：(1) 令 $y=0$，则 $x^2-x-6=0$，解得

$$x_1=-2, x_2=3.$$

这就是说，当 $x=-2$ 或 $x=3$ 时，函数值 $y=0$.

(2) 画出二次函数 $y=x^2-x-6$ 的简图（图 3-14).

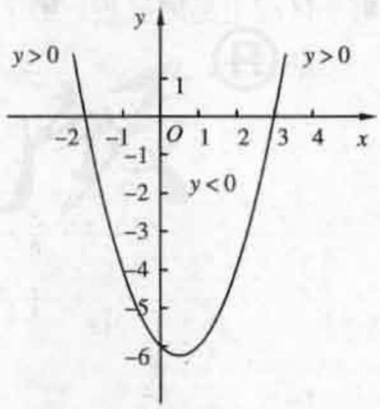


图 3-14

从图象上可以看出，它与 x 轴相交于两点 $(-2, 0)$，$(3, 0)$，这两个点把 x 轴分成 3 个区间，当 $x\in(-2, 3)$时，$y<0$，当 $x\in(-\infty, -2)\cup(3, +\infty)$ 时，$y>0$.

从上例我们可以看到，一元二次方程、一元

二次不等式与二次函数有密切的关系：

求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，就是求二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 当 $y=0$ 时的自变量的值；

求不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集，就是求使二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值小于零的自变量的取值区间；

求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集，就是求使二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值大于零的自变量的取值区间.

议一议 (1) 不等式

$(x+2)(x-3)>0$,

$(x+2)(x-3)<0$

的解集各是什么？

(2) 当 $x_1<x_2$ 时，不等式

$(x-x_1)(x-x_2)>0$,

$(x-x_1)(x-x_2)<0$

的解集各是什么？

练习 3-5

1. 判断下列各函数图象，哪些是直线？哪些是抛物线？

(1) $y=3x$；　　(2) $y=2x^2$；

(3) $y=\frac{1}{2}x-2$；　　(4) $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

2. 分别用配方法和公式法，求下列函数的最大值或最小值：

(1) $f(x)=3x^2-6x-1$；　　(2) $f(x)=-2x^2+x-1$.

3. 已知二次函数 $y=x^2-2x-3$：

(1) 求函数图象的对称轴、顶点坐标和函数的单调区间；

(2) 作出函数的图象；

(3) 求函数的自变量在什么范围内取值时，函数值大于零.

4. 解下列不等式：

(1) $(x+1)(x-2)<0$；　　(2) $(x-3)(x+4)\geqslant 0$.

3.6 函数的应用

在现实生活中，函数知识有着广泛的应用，下面我们应用两个变量之间的函数关系，来解决一些简单的实际问题.

例 1 某列火车从北京西站开往石家庄，全程 277 km. 火车出发 10 min 开出 13 km 后，以 120 km/h 匀速行驶. 试写出火车行驶的总路程 s 与匀速行驶的时间 t 之间的关系，并求火车离开北京 2 h 行驶的路程.

解：因为火车匀速运动的时间为

$$(277-13)\div 120=\frac{11}{5}(\text{h}),$$

所以 $0\leqslant t\leqslant\frac{11}{5}$.

因为火车匀速行驶 t h 所行驶路程为 $120t$ km，所以，火车行驶总路程 s 与匀速行驶时间 t 之间的关系是

$$s=13+120t,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{11}{5}.$$

而且，2 h 火车行驶的路程为

$$s=13+120\times\left(2-\frac{1}{6}\right)=233\ (\text{km}).$$

例 2 某农家旅游公司有客房 300 间，每间日房租 20 元，每天都客满. 公司欲提高档次，并提高租金. 如果每间客房日房租增加 2 元，客房出租数就会减少 10 间. 若不考虑其他因素，旅游公司将房间租金提高到多少元时，每天客房的租金总收入最高?

解：设客房租金每间提高 x 个 2 元，则将有 $10x$ 间客房空出，则客房租金总收入为

$$\begin{aligned}y&=(20+2x)(300-10x)\\&=-20x^2+600x-200x+6\,000\\&=-20(x^2-20x+100-100)+6\,000\\&=-20(x-10)^2+8\,000.\end{aligned}$$

由此得到，当 $x=10$ 时，$y_{\max}=8\,000$.

即每间房租金 $20+10\times2=40$ 元时，客房租金的总收入最高，每天为8 000元.

练习 3-6

1. 一辆汽车匀速行驶，1.5 h 行驶路程为 90 km，求这辆汽车行驶路程与时间之间的函数关系，以及汽车行驶 3 h 所行驶的路程.

2. 若某种商品每件 80 元，每天可售出 30 件，如果每件定价 120 元，则每天可售出 20 件. 如果售出件数是定价的一次函数，写出售出件数 y 关于定价 x 的函数.

3. 某个弹簧的长度 l 与悬挂在它下面的物体所受的重力 g 之间是一次函数关系. 已知 $g=0.02$ N 时，$l=8.9$ cm；$g=0.04$ N 时，$l=10.1$ cm，求这个函数的解析式.

4. 用长为 24 米的材料，围成一矩形场地，问长、宽各为多少时，围成的面积最大？最大面积是多少？

5. 如果某商人将进货单价为 8 元的商品按每件 10 元售出时，每天可销售 100 件. 已知这种商品每件涨价 1 元，其销售数量就减少 10 件，问他将每件的售价定为多少元时，所获利润最大？

习题三

1. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{3x-1}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x+4}$；　　(2) $y=\sqrt{x-1}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-9}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

3. 判断下列函数在指定区间上的单调性：

(1) $f(x)=-x^2+1$，$x\in(-\infty, 0)$；

(2) $f(x)=-2x+1$，$x\in(-\infty, +\infty)$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=5x+x^3$；　　(2) $f(x)=x^2+x$；

(3) $f(x)=(x-1)(x+1)$；　　(4) $f(x)=x^3$，$x\in(-5, 6)$.

5. 画出下列函数的图象：

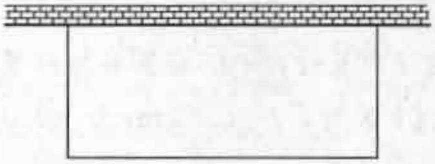
(1) $y=2x-3$，$x\in\{-1, 0, 1, 2, 3\}$；　　(2) $y=x^2-4x-5$.

6. 已知函数 $f(x)=x^2+2ax-3$：

（1）当 a 为何值时，函数有最小值 -4？

（2）当 a 为何值时，函数是偶函数？

7. 有 300 m 长的篱笆材料，如果利用已有的一面墙（设长度够用）作为一边，围成一块矩形菜地，问矩形的长、宽各为多少时，这块菜地的面积最大？



（第 7 题）

阅读与实践

数学英雄欧拉

欧拉作为历史上对数学贡献最大的四位数学家之一（另外三位是阿基米德、牛顿、高斯），被誉为“数学界的莎士比亚”.

欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家，据统计他那不倦的一生，共写下了 886 本书籍和论文，其中分析、代数、数论占 40%，几何占 18%，物理和力学占 28%，天文学占 11%，弹道学、航海学、建筑学等占 3%，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了 47 年.

尤其令人感动的是，欧拉有 400 多篇论文和许多数学著作，是在他双目失明的 17 年中完成的. 早在 1735 年，由于过度紧张地工作，欧拉得了一场病，导致了右眼失明. 1766 年以后，他的左眼也失明了. 欧拉默默地忍受着失明的痛苦，用惊人的毅力顽强拼搏，决心用自己闪光的数学思想，照耀他人深入探索的道路. 每年，他都以 800 页的速度，向世界呈献出一篇篇高水平的科

学论文和著作，还解决了一些数学难题.

下面是一个广为流传的故事.

小欧拉改羊圈

有一次，欧拉的父亲决定建造一个羊圈．他量出了一块长方形的土地，长 40 米，宽 15 米，面积是 600 平方米，平均每一头羊占地 6 平方米．打算动工时，他才发现材料只够围 100 米的篱笆，不够用．若要按原计划建造，就要再添 10 米长的材料；若要缩小面积，每头羊占地就会小于 6 平方米，父亲感到很为难.

这时在一旁的小欧拉却对父亲说，不用缩小羊圈，也不用担心每头羊的占地面积会小于原来的．父亲不相信小欧拉，听了没有理他．小欧拉着急地大声说，只要稍稍移动一下羊圈的桩子就行了.

父亲听了直摇头，心想："世界上哪有这样便宜的事情？"但是，小欧拉却坚持说，他一定能两全其美．父亲终于同意让儿子试试看.

小欧拉跑到准备动工的羊圈旁．他以一个木桩为中心，将原来的 40 米的边长截短，缩短到 25 米．父亲着急了，说："那怎么成呢？那怎么成呢？这个羊圈太小了！太小了！"小欧拉不回答，跑到另一条边上，将原来 15 米的边长延长，增加了 10 米，变成 25 米．这样一改，羊圈变成了一个 25 米边长的正方形．然后，小欧拉自信地对父亲说："现在，篱笆也够了，面积也够了."

父亲照着小欧拉设计的羊圈扎上了篱笆，100 米长的篱笆不多不少，全部用光．面积也足够，而且还稍稍大了一些．父亲非常高兴．孩子比自己聪明，真会动脑筋，将来一定会有出息.

父亲感到让这么聪明的孩子放羊实在是可惜了．后来，他想办法让小欧拉认识了一个大数学家伯努利．通过这位数学家的推荐，1720 年，小欧拉成了巴塞尔大学的大学生．这一年，小欧拉 13 岁，是这所大学最年轻的大学生.

请同学们想一想，如果建羊圈的场地足够大，而材料只够围 100 米长的篱笆，你有办法建出面积更大的羊圈吗？

第四章　指数函数与对数函数

细胞的分裂，形成了形态各异的个体生命，使大自然异彩纷呈、生机盎然.显微镜下的微观世界，细胞在悄无声息地进行着分裂.细胞分裂的个数与分裂次数之间有着一定的函数关系.你知道吗？

数学是最宝贵的研究精神之一.

——华罗庚

志大才疏事难成，志坚勤学虎添翼.

指数和对数是进行科学计算不可缺少的工具，指数函数、对数函数和幂函数都是基本的初等函数，它们在社会科学和自然科学中有着重要的作用．这一章我们将在学习指数和对数运算的基础上，学习指数函数、对数函数和幂函数的概念、图象与基本性质．

4.1 实数指数

问题　我国农业科学家在研究某农作物的生长状况时，得到该农作物的生长时间 x 周（从第 1 周到第 12 周）与植株高度 y cm 之间的关系

$$y=3^{\frac{x}{4}}.$$

当该农作物生长了 4 周、8 周、12 周时，植株的高度（单位：cm）分别是 3，3^2，3^3．像这样的数就是我们初中学过的整数指数幂．

当该农作物生长了 1 周、3 周、5 周时，植株的高度（单位：cm）分别是 $3^{\frac{1}{4}}$，$3^{\frac{3}{4}}$，$3^{\frac{5}{4}}$．像这样的数就是我们要学习的分数指数幂．我们规定**分数指数幂**的意义是

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N}_+,\ 且\ n>1);$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\ (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N}_+,\ 且\ n>1).$$

你能写出整数指数幂的三条运算法则吗？

试一试

我国古代数学家刘徽在《九章算术注》（263 年）内以“幂”字表示指数，并且延用至今．我国古代称“一数自乘”为“方”，而“乘方”一词则是在宋代以后才开始采用．

读一读

例如

$$7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7},\ 5^{\frac{4}{6}}=5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2},\ 3^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{3^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{3^4}}.$$

规定了分数指数幂的意义以后，整数指数幂就推广到了有理指数幂．

有理指数幂还可推广到实数指数幂，在 $a^{\alpha}(a>0)$ 中，α 可以为任意实数．

实数指数幂有如下三条运算法则：

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta},$$
$$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta},$$
$$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha},$$
其中 $a>0$，$b>0$，α，β 为任意实数.

例 1 计算：

(1) $8^{\frac{2}{3}}$；　(2) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$；　(3) $8^{\frac{3}{5}}\times8^{\frac{2}{5}}$；　(4) $3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}$.

解：(1) $8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$；

(2) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{4}$；

(3) $8^{\frac{3}{5}}\times8^{\frac{2}{5}}=8^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}=8^1=8$；

(4) $3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}=3\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}$

$=3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^2=9.$

议一议　请总结例 1 中运用了哪些幂的运算法则.

例 2 利用计算器计算下列各题（精确到 0.001)：

(1) $0.2^{1.52}$；　(2) 3.14^{-2}；

(3) $3.1^{\frac{2}{3}}$；　(4) $0.57^{-\frac{3}{4}}$.

解：(1)

按键	显示
0.2 $\boxed{y^x}$ 1.52 $\boxed{=}$	0.086609512

所以 $0.2^{1.52}\approx0.087$；

(2)

按键	显示
3.14 $\boxed{y^x}$ $\boxed{+/-}$ 2 $\boxed{=}$	0.101423992

所以 $3.14^{-2}\approx0.101$；

(3)

按键	显示
3.1 $\boxed{y^x}$ $\boxed{[}$ 2 $\boxed{a^b/c}$ 3 $\boxed{]}$ $\boxed{=}$	2.12605484

所以 $3.1^{\frac{2}{3}}\approx 2.126$；

(4)

按键	显示
0.57 $\boxed{y^x}$ $\boxed{[}$ $\boxed{+/-}$ 3 $\boxed{a^b/c}$ 4 $\boxed{]}$ $\boxed{=}$	1.524382162

所以 $0.57^{-\frac{3}{4}}\approx 1.524$.

练习 4-1

本练习题中出现的字母都为正实数.

1. 计算：

(1) $\sqrt[4]{4^4}$；　(2) $\left(-\frac{4}{3}\right)^0$；　(3) $x^2\cdot x^3$；

(4) $(a^{-\frac{1}{2}})^4$；　(5) $a^8\div a^5$；　(6) $(a^2\cdot b^3)^6$.

2. 计算：

(1) $27^{\frac{2}{3}}$；　(2) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$；

(3) $2\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}$；　(4) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}$.

3. 用分数指数幂表示下列各式：

(1) $\sqrt[3]{x^2}$；　(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$；　(3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$；　(4) $\sqrt[4]{(a+b)^3}$.

4. 化简：

(1) $(-4x^2)^3$；　(2) $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\div a^{-\frac{1}{2}}$；

(3) $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6$；　(4) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$.

5. 利用计算器计算下列各题（精确到 0.001）：

(1) $0.618^{0.23}$；　(2) $3^{\frac{8}{25}}$；

(3) $0.4012^{-\frac{1}{4}}$；　(4) $\sqrt[100]{5}$.

4.2 指数函数

先看一个具体的例子，研究问题中两个变量之间的依赖关系.

问题 某种细胞分裂时，每次每个细胞分裂为 2 个，即 1 个这种细胞经过 1 次分裂后得到 2 个细胞，经过 2 次分裂后得到 4 个细胞，经过 3 次分裂后得到 8 个细胞……问 1 个这样的细胞，经过 n 次分裂后，得到多少个细胞?

在这个问题中，分裂的次数是一个变量，用 n 表示. 每次分裂后，细胞的个数也是一个变量，用 w 表示. 如何由 n 来计算 w?

当 $n=0$ 时，$w=2^0=1$；

当 $n=1$ 时，$w=2^1=2$；

当 $n=2$ 时，$w=2^1\times2=2^2=4$；

当 $n=3$ 时，$w=2^2\times2=2^3=8$；

……

我们可归纳出，1 个细胞经过 n 次分裂后，细胞的个数 w 与分裂次数 n 的关系为

$$w=2^n.$$

由此可见，对任意一个 n 的值，都有唯一确定的 w 与 n 对应，根据函数的定义，可知细胞的个数 w 是分裂次数 n 的函数. 本节我们研究这种底数是常数，自变量在指数位置上的函数.

一般地，形如 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的函数叫做**指数函数**，其中 x 是自变量，函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

> 请根据指数函数的定义写出几个指数函数.
>
> 试一试

现在来研究指数函数的图象和性质. 先画出一些指数函数的图象. 例如，$y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象. 列出 x，y 的对应值表，如表 4-1 所示：

表 4-1

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

在同一坐标系中，用描点法画出图象(图 4-1).

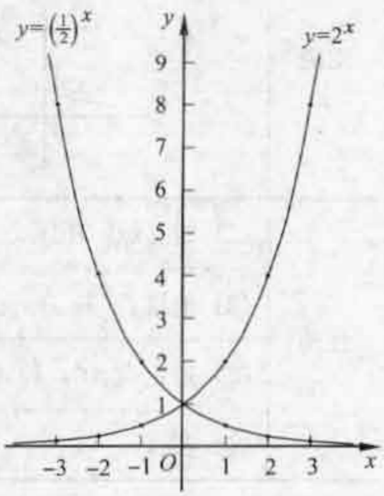


图 4-1

从这个函数的对应值表和图象，可以看到：

$y=2^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数，当 x 逐渐增大时，对应的函数值 y 逐渐增大；当 x 逐渐减小时，对应的函数值 y 逐渐减小，函数的图象从 x 轴上方逐渐趋近于 x 轴.

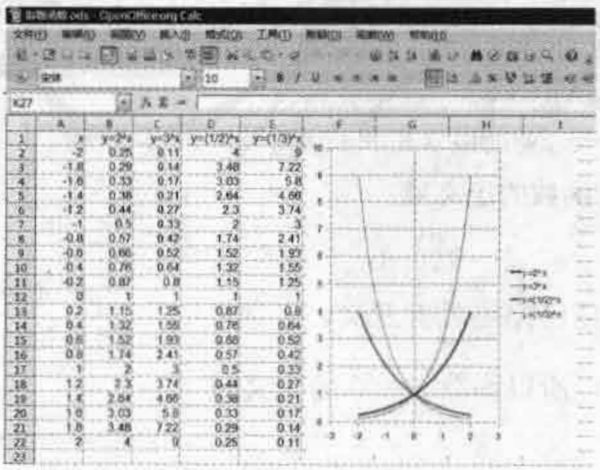
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数，当 x 逐渐增大时，对应的函数值 y 逐渐减小，函数的图象从 x 轴上方逐渐趋近于 x 轴；当 x 逐渐减小时，对应的函数值 y 逐渐增大.

这两个函数的图象都在 x 轴的上方，它们的函数值 y 都大于零，且它们的图象都通过点(0，1).

请同学们在计算机上作出其他指数函数的图象.

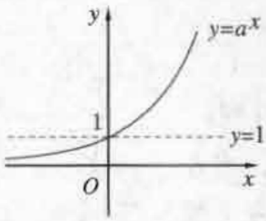
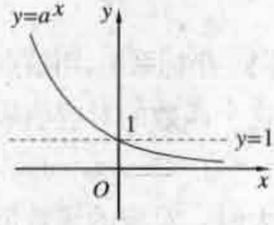
试一试

以下是用电子表格绘制的指数函数 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=3^x$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象.



由以上实例，我们可以归纳出指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，在底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图象和性质，如表 4-2 所示：

表 4-2 指数函数的图象与性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	(1) 定义域：**R**	
	(2) 值域：$(0, +\infty)$	
	(3) 过定点 $(0, 1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$	
	(4) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数	(4) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数

例 1 利用指数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

(1) $1.7^{2.5}$ 与 1.7^3；

(2) $0.8^{-0.1}$ 与 $0.8^{-0.2}$.

解：(1) 考察函数 $y=1.7^x$，它在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

因为 $2.5<3$，所以 $1.7^{2.5}<1.7^3$.

(2) 考察函数 $y=0.8^x$，它在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

因为 $-0.1>-0.2$，所以 $0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$.

> 想一想
>
> 指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$，若 $a>1$，当 x 取何值时，$y>1$？若 $0<a<1$ 呢？

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y=3^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $y=5^{\sqrt{x-1}}$.

解：(1) 要使已知函数有意义，必须 $\frac{1}{x}$ 有意义，即 $x\neq0$，所以函数 $y=3^{\frac{1}{x}}$ 的定义域是 $\{x \mid x\neq0\}$；

> 请同学们用计算器验证例 1 的结论.
>
> 做一做

(2) 要使已知函数有意义，必须$\sqrt{x-1}$有意义，即 $x\geqslant1$，所以函数 $y=5^{\sqrt{x-1}}$的定义域是 $[1, +\infty)$.

练习 4-2

1. 口答：

(1) 指数函数 $y=5^x$ 的底数是多少？这个函数的单调性如何？

(2) 一个指数函数的底数是$\frac{1}{5}$，则它的解析式是什么？它的定义域、值域各是什么？

2. 利用指数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小，并用计算器验证结果：

(1) $3^{0.8}$ 与 $3^{0.7}$；　　(2) $1.1^{-2.1}$ 与 1.1^{-2}；

(3) $0.7^{0.1}$ 与 $0.7^{-0.1}$；　　(4) $0.618^{1.8}$ 与 $0.618^{1.9}$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=3^{\sqrt{2x-1}}$；　　(2) $y=0.7^{\frac{1}{x}}$.

4.3 对数及其运算

4.3.1 对数

在上一节我们研究细胞分裂时，曾归纳出，一个细胞经过 n 次分裂后得到细胞的个数为

$$w=2^n.$$

如果知道细胞分裂若干次后的个数 w，怎样求出细胞分裂的次数 n 呢？为解决这类问题，我们引入一个新的概念——对数.

一般地，如果 $a^b=N$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)，那么数 b 叫做以 a 为底 N 的**对数**，记作

$$b=\log_a N.$$

其中 a 叫做对数的**底数**，N 叫做**真数**.

例如：

因为 $3^4=81$，所以 4 是以 3 为底 81 的对数，记作 $4=\log_3 81$；

因为 $2^3=8$，所以 3 是以 2 为底 8 的对数，记作 $3=\log_2 8$；

因为 $4^{\frac{1}{2}}=2$，所以 $\frac{1}{2}$ 是以 4 为底 2 的对数，记作 $\frac{1}{2}=\log_4 2$；

因为 $10^{-3}=0.001$，所以 -3 是以 10 为底 0.001 的对数，记作 $-3=\log_{10}0.001$.

> 对数是由英国人纳皮尔（John Napier，1550—1617）在 1594 年创立的，而对数（logarithm）一词也是他创造的. **读一读**

在细胞分裂的问题中，因为 $w=2^n$，所以 n 是以 2 为底 w 的对数，因此分裂次数 n 可表示为 $n=\log_2 w$，如分裂个数为 32 时，一个这样的细胞经过分裂的次数为 $n=\log_2 32$.

根据对数的定义，可以得到对数式与指数式间的关系：

当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，

$$\boxed{a^b=N \Leftrightarrow b=\log_a N.}$$

由此式可以得到对数恒等式

$$\boxed{a^{\log_a N}=N.}$$

> 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，请把 $a^1=a$，$a^0=1$ 化为对数式. **做一做**

利用对数式与指数式间的关系，我们可以把对数式化为指数式，也可以把指数式化为对数式.

例如：

指数式 $2^{-5}=\frac{1}{32}$ 化为对数式为 $\log_2\frac{1}{32}=-5$；

对数式 $\log_{10}0.01=-2$ 化为指数式 $10^{-2}=0.01$.

> **想一想** 根据对数式与指数式的关系指出为什么零和负数没有对数？

根据对数的定义，对数具有下列性质：

(1) **底的对数等于 1**，即 $\log_a a=1$；

(2) **1 的对数为零**，即 $\log_a 1=0$；

(3) **零和负数没有对数**，即 $N>0$.

通常我们把底数为 10 的对数叫做**常用对数**. $\log_{10}N$ 通常记作 $\lg N$. 以后，如果没有指出对数的底，都是指常用对数. 例如，100

> 瑞士数学家欧拉首先用 e 表示自然对数（natural logarithm）的底. **读一读**

的对数是 2，就是说 100 的常用对数是 2，记作 $\lg 100=2$.

另外，在科学技术的计算中，常常使用以无理数 $e=2.71828\cdots$为底的对数. 以 e 为底的对数叫做**自然对数**. $\log_e N$ 通常记作 $\ln N$.

例 1　利用计算器求对数（精确到 0.001）：

$\lg 2\,001$；　　$\ln 0.216$.

解：用计算器计算：

按　键	显　示
$\boxed{\log}$ 2001 $\boxed{=}$	3.301247089
$\boxed{\ln}$ 0.216 $\boxed{=}$	−1.532476871

所以 $\lg 2\,001\approx 3.301$，$\ln 0.216\approx -1.532$.

练习 4-3

1. 填空：

(1) 在对数式 $b=\log_a N$ 中，b 叫做________，a 叫做________，N 叫做________，a 的取值范围是________.

(2) $\log_2 2=$________；$\log_3 1=$________；$\lg 1=$________；

$\lg 10=$________；$\ln e=$________；$\log_4 16=$________；

$\log_3 \dfrac{1}{3}=$________；$\lg 10\,000=$________；$2^{\log_2 5}=$________；

$3^{\log_3 7}=$________.

2. 把下列指数式写成对数式：

(1) $6^2=36$；　　(2) $5^3=125$；

(3) $2^{-3}=\dfrac{1}{8}$；　　(4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=16$；

(5) $27^{\frac{1}{3}}=3$；　　(6) $7.6^0=1$；

(7) $81^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{27}$；　　(8) $10^{-3}=0.001$；

(9) $e^x=6$；　　(10) $4^x=y$.

3. 把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_3 9=2$；　(2) $\log_2 \frac{1}{8}=-3$；

(3) $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$；　(4) $\lg 1\,000=3$；

(5) $\log_2 32=5$；　(6) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$；

(7) $\log_8 16=\frac{4}{3}$；　(8) $\log_{\frac{1}{10}} 1\,000=-3$；

(9) $\ln 10=x$；　(10) $\lg 7=x$.

4. 利用计算器求对数（精确到 0.001）：

(1) $\lg 396.5$；　(2) $\lg 0.618$；

(3) $\ln 25.8$；　(4) $\ln 0.056$.

4.3.2 对数的运算

根据指数式与对数式的关系以及实数指数幂的运算法则，我们来研究对数的运算法则.

已知 $\log_a M$，$\log_a N$（$M>0$，$N>0$），求 $\log_a(MN)$，$\log_a \frac{M}{N}$，$\log_a M^\alpha$（α 为任意实数）.

设 $\log_a M=p$，$\log_a N=q$，根据对数的定义，可得

$$M=a^p，N=a^q.$$

因为 $MN=a^p a^q=a^{p+q}$，所以

$$\log_a(MN)=p+q=\log_a M+\log_a N.$$

同理，因为$\frac{M}{N}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$，所以

$$\log_a \frac{M}{N}=p-q=\log_a M-\log_a N.$$

因为 $M^\alpha=(a^p)^\alpha=a^{p\alpha}$，所以

$$\log_a M^\alpha=\alpha p=\alpha\log_a M.$$

总结以上结论，我们得到下面的对数运算法则：

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.

因为同底数的幂相乘，不论有多少个因数，都是底数不变，指数相加，所以这个性质可推广到若干个正因数的积

$$\log_a(N_1N_2\cdots N_k)=\log_a N_1+\log_a N_2+\cdots+\log_a N_k\ (k\in\mathbf{N},\ k\geqslant 2).$$

即正因数积的对数等于各因数对数的和.

(2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$.

即两个正数商的对数等于被除数的对数减去除数的对数.

(3) $\log_a M^{\alpha}=\alpha\log_a M$.

即正数幂的对数等于幂的指数乘以幂的底数的对数.

例 2　用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

(1) $\log_a \dfrac{xy}{z}$；　　　　(2) $\log_a(x^3y^5)$.

解：(1) $\log_a \dfrac{xy}{z}$

$=\log_a(xy)-\log_a z$

$=\log_a x+\log_a y-\log_a z$；

(2) $\log_a(x^3y^5)$

$=\log_a x^3+\log_a y^5$

$=3\log_a x+5\log_a y$.

例 3　求下列各式的值：

(1) $\log_2(4^2\times2^5)$；　　(2) $\lg\sqrt[5]{100}$；　　(3) $\log_6 2+\log_6 3$.

解：(1) $\log_2(4^2\times2^5)=\log_2(2^4\times2^5)=\log_2 2^4+\log_2 2^5=4+5=9$；

(2) $\lg\sqrt[5]{100}=\lg 100^{\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{5}\lg 100=\dfrac{2}{5}$；

(3) $\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\times3)=\log_6 6=1$.

在对数的运算中往往需要改变对数的底数，那么不同底数的对数之间该如何实现转化呢？

例 4　求 $\log_3 2$.

解：设 $\log_3 2=x$，写成指数式，得

$$3^x=2,$$

两边取常用对数，得

$$x\lg 3=\lg 2,$$

所以 $x=\dfrac{\lg 2}{\lg 3}$.

用计算器计算如下：

按　键	显　示
$\boxed{\log}$ 2 $\boxed{\div}$ $\boxed{\log}$ 3 $\boxed{=}$	0.630929753

即 $\log_3 2=\dfrac{\lg 2}{\lg 3}\approx 0.631$.

一般地，有下面的换底公式：

$$\boxed{\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.}$$

其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$；$b>0$ 且 $b\neq 1$；$N>0$.

例 5　化简：$\log_a b^2\cdot\log_{b^3} a^2$.

解：$\log_a b^2\cdot\log_{b^3} a^2=\dfrac{\lg b^2}{\lg a}\cdot\dfrac{\lg a^2}{\lg b^3}=\dfrac{2\lg b}{\lg a}\cdot\dfrac{2\lg a}{3\lg b}=\dfrac{4}{3}$.

练习 4-4

1. 填空：

(1) $\lg 5+\lg 2=$________；　(2) $\log_2 6-\log_2 3=$________；

(3) 用换底公式将 $\log_a N$ 换成以 10 为底的形式，则 $\log_a N=$________.

2. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

(1) $\lg(xyz)$；　(2) $\lg\dfrac{xy^2}{\sqrt{z}}$；

(3) $\lg(xy^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{2}{3}})$；　(4) $\lg\dfrac{\sqrt{x}}{y^2 z}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\log_3(27\times 9^2)$；　(2) $\lg 100^2$；

(3) $\log_{16}32$；　(4) $\log_5 4\times\log_8 5$；

(5) $\log_2(\sqrt[3]{32}\times\sqrt[6]{16})$；　(6) $\log_5 3+\log_5\dfrac{1}{3}$；

(7) $\log_3 5-\log_3 15$；　　　　(8) $\lg 4+\lg 25$.

4. 化简：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a$.

5. 利用计算器求对数（精确到 0.001）：

(1) $\log_3 0.223$；　　　　(2) $\log_5 21$.

6. 求证：

(1) $\log_{a^n} b^n=\log_a b$；　　　　(2) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$.

4.4 对数函数

在上一节，我们研究细胞分裂时，曾归纳出，由细胞分裂若干次后的个数 w 计算分裂次数 n 的关系式：

$$n=\log_2 w.$$

由这个关系式看出，对于分裂后的每个确定的细胞个数 w，都有唯一确定的分裂次数 n 与之对应，根据函数的定义可知，n 也是 w 的函数. 本节我们研究这种自变量在真数位置上的函数.

一般地，形如 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的函数叫做**对数函数**，其中 x 是自变量，函数的定义域是 $(0, +\infty)$.

作下面两个对数函数的图象：

(1) $y=\log_2 x$；　　　　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

首先列出 x，y 的对应值表，如表 4-3 所示：

表 4-3

x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\log_2 x$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	…	3	2	1	0	-1	-2	-3	…

在同一坐标系里，用描点法画出图象（如图 4-2）.

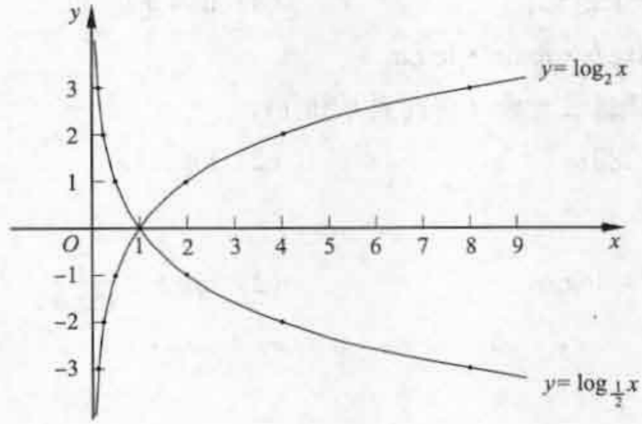
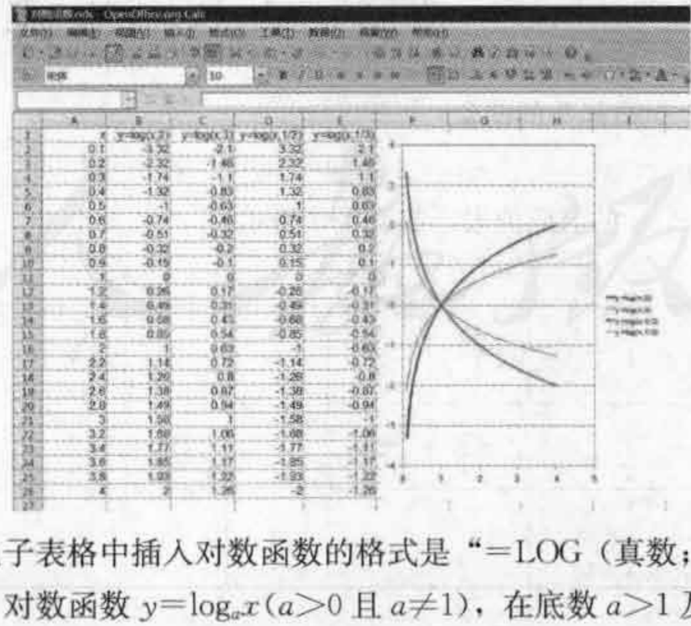


图 4-2

从这两个函数的对应值表和图象可看到，$y=\log_2 x$ 在区间（0，$+\infty$）上是增函数，而 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 在区间（0，$+\infty$）上是减函数．这两个函数的定义域都是（0，$+\infty$），值域都是 **R**，并且它们的图象都通过点（1，0）.

请同学们在计算机上作出其他对数函数的图象.

以下是用电子表格绘制的对数函数 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，$y=\log_3 x$，$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象.



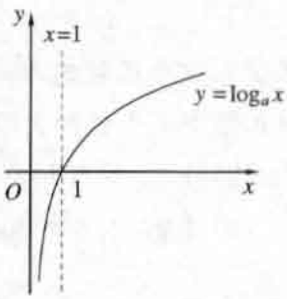
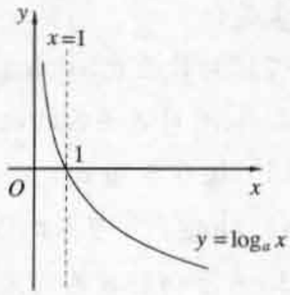
	A	B	C	D	E
1	x	y=log(x,2)	y=log(x,3)	y=log(x,1/2)	y=log(x,1/3)
2	0.1	-3.32	-2.1	3.32	2.1
3	0.2	-2.32	-1.46	2.32	1.46
4	0.3	-1.74	-1.1	1.74	1.1
5	0.4	-1.32	-0.83	1.32	0.83
6	0.5	-1	-0.63	1	0.63
7	0.6	-0.74	-0.46	0.74	0.46
8	0.7	-0.51	-0.32	0.51	0.32
9	0.8	-0.32	-0.2	0.32	0.2
10	0.9	-0.15	-0.1	0.15	0.1
11	1	0	0	0	0
12	1.2	0.26	0.17	-0.26	-0.17
13	1.4	0.49	0.31	-0.49	-0.31
14	1.6	0.68	0.43	-0.68	-0.43
15	1.8	0.85	0.54	-0.85	-0.54
16	2	1	0.63	-1	-0.63
17	2.2	1.14	0.72	-1.14	-0.72
18	2.4	1.29	0.8	-1.29	-0.8
19	2.6	1.38	0.87	-1.38	-0.87
20	2.8	1.49	0.94	-1.49	-0.94
21	3	1.58	1	-1.58	-1
22	3.2	1.68	1.06	-1.68	-1.06
23	3.4	1.77	1.11	-1.77	-1.11
24	3.6	1.85	1.17	-1.85	-1.17
25	3.8	1.93	1.22	-1.93	-1.22
26	4	2	1.26	-2	-1.26
27					

说明：电子表格中插入对数函数的格式是“$=$LOG（真数；底）”.

一般地，对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），在底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两

种情况下的图象和性质，如表 4-4 所示：

表 4-4　对数函数的图象与性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	(1) 定义域：$(0, +\infty)$	
	(2) 值域：$\mathbf{R}$	
	(3) 过定点 $(1, 0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	(4) 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数	(4) 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_2 x^2$；　　　　(2) $y=\log_{0.5}(4-x)$.

解：(1) 要使已知函数有意义，必须 $x^2>0$，即 $x\neq 0$，所以函数 $y=\log_2 x^2$ 的定义域是 $\{x \mid x\neq 0\}$；

(2) 要使已知函数有意义，必须有 $4-x>0$，即 $x<4$，所以函数 $y=\log_{0.5}(4-x)$的定义域是 $(-\infty, 4)$.

例 2　利用对数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

(1) $\log_2 3$ 与 $\log_2 3.5$；　　　　(2) $\log_{0.7}1.6$ 与 $\log_{0.7}1.8$.

解：(1) 考察函数 $y=\log_2 x$，它在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

因为 $3<3.5$，所以 $\log_2 3<\log_2 3.5$.

(2) 考察函数 $y=\log_{0.7}x$，它在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

因为 $1.6<1.8$，所以 $\log_{0.7}1.6>\log_{0.7}1.8$.

(请同学们自己用计算器验证结论.)

练习 4-5

1. 口答下列各题：

(1) 一个对数函数的底数是$\frac{1}{3}$，则它的解析式是什么？它的定义域、值域各是什么？

(2) 对数函数 $y=\log_4 x$ 的底数是多少？这个函数的单调性如何？

2. 利用对数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

(1) $\lg 6$ 与 $\lg 8$；　　(2) $\log_{0.5}6$ 与 $\log_{0.5}4$；

(3) $\log_{\frac{2}{3}}0.5$ 与 $\log_{\frac{2}{3}}0.6$；　　(4) $\log_{1.5}1.6$ 与 $\log_{1.5}1.4$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{0.8}(1+x)$；　　(2) $y=\log_7(x^2-2x)$.

4.5 幂函数

考察一下已经学过的函数

$$y=x，y=x^2，y=\frac{1}{x}，\cdots.$$

可以发现这些函数的表达式有着共同的特征：幂的底数是自变量，指数是常数.

一般地，形如

$$y=x^{\alpha}(\alpha \in \mathbf{R})$$

的函数称为幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数.

下面我们通过举例，来研究幂函数的一些性质.

例 作出下列函数的图象：

(1) $y=x$；　　(2) $y=x^{\frac{1}{2}}$；　　(3) $y=x^2$；　　(4) $y=x^{-1}$.

解：列出各函数的对应值表，如表 4-5 所示.

表 4-5

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=x$	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=x^{\frac{1}{2}}$	…	/	/	/	0	0.71	1	1.41	…
$y=x^2$	…	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	…
$y=x^{-1}$	…	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	/	2	1	$\frac{1}{2}$	…

在同一坐标系里，用描点法画出图象如图 4-3 所示.

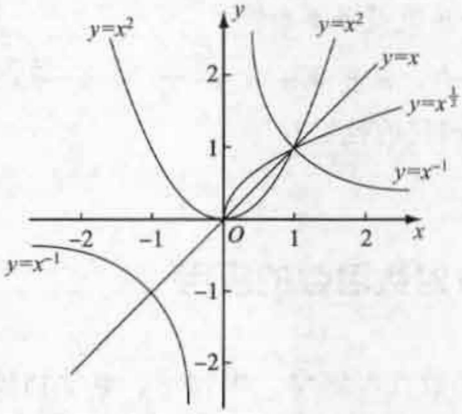
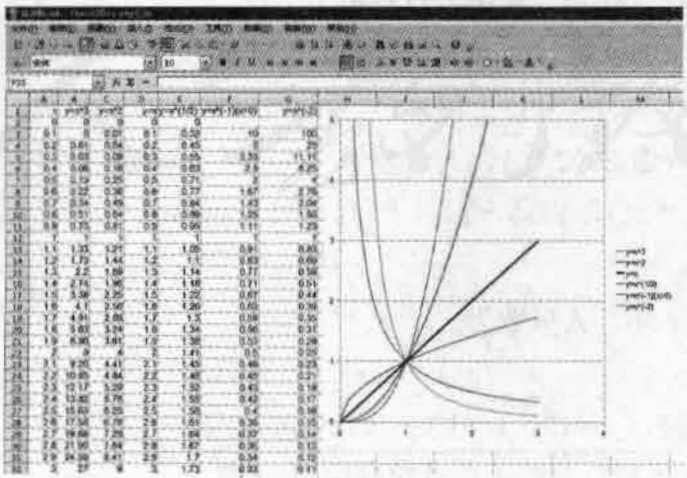


图 4-3

以下是用电子表格绘制的幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-1}$ 在第一象限的图象.



从这些函数的图象大家可以看到，幂函数随着 α 的取值不同，它们的定义域、性质和图象也不尽相同. 但它们也有一些共同的性质：

(1) 所有幂函数在 $(0, +\infty)$ 上都有定义，并且图象都通过点 $(1, 1)$；

(2) 当 $\alpha>0$ 时，幂函数的图象通过原点，并且在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数；

(3) 当 $\alpha<0$ 时，幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

练习 4-6

1. 在函数 $y=x^{-3}$；$y=3^x$；$y=x^{\frac{2}{3}}$；$y=\sqrt{x}$；$y=2x+1$；$y=\dfrac{1}{x^2}$；$y=x^2+x$ 中，哪几个函数是幂函数？

2. 在同一坐标系内，画出幂函数 $y=x^{-3}$，$y=\sqrt[3]{x}$ 的图象，试结合图象说出这些函数有哪些相同的性质？

4.6 指数函数与对数函数的应用

指数函数和对数函数在经济学、生物学、电学和核物理学中都有着广泛的应用. 下面举例说明.

例 1 2000 年我国人口总数约是 13 亿. 如果今后能将人口年平均增长率控制在 1%，那么经过 20 年后，我国人口总数将达到多少（精确到 1 亿）？

解：设经过 x 年后，我国人口总数为 y 亿.

经过 1 年（即 2001 年），人口数为

$$13+13\times1\%=13(1+1\%)；$$

经过 2 年（即 2002 年），人口数为

$$13(1+1\%)+13(1+1\%)\times1\%=13(1+1\%)^2；$$

$$\cdots\cdots$$

所以经过 x 年，人口数为

$$y=13(1+1\%)^x=13\times1.01^x.$$

当 $x=20$ 时，$y=13\times1.01^{20}\approx16$（亿）.

即经过 20 年后，我国人口总数将达到 16 亿.

例 2　一种放射性元素，最初的质量为 500 g，按每年 10%衰减：

(1) 求 t 年后，这种放射性元素质量 w 的表达式；

(2) 由求出的函数表达式，求这种放射性元素的半衰期（精确到 0.1）.

某物质经过衰减，剩留量为原来的一半所需要的时间叫做该物质的半衰期.

解：(1) 最初的质量为 500 g，经过 1 年后，

$$w=500(1-10\%)=500\times 0.9;$$

经过 2 年后，

$$w=500(1-10\%)^2=500\times 0.9^2;$$

$$\cdots\cdots$$

由此推知，经过 t 年后，$w=500\times 0.9^t$.

(2) 解方程

$$500\times 0.9^t=250,$$

即 $0.9^t=0.5$，可得

$$t=\log_{0.9}0.5=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.9}\approx 6.6.$$

即这种放射性元素的半衰期约为 6.6 年.

练习 4-7

1. 一种产品的年产量原来是 a 件，在今后的 m 年内，计划使年产量平均每年比上一年增加 $p\%$. 写出年产量随着年数变化的函数关系式.

2. 某市 2000 年国民生产总值 20 亿元，计划在今后的 10 年内，平均年增长 8%，预测该市 2010 年国民生产总值（精确到 0.1 亿元）？

3. 现有一种放射性物质，一年后残留量为原来的 84%，问该物质的半衰期是多少（结果保留整数）？

习题四

1. 计算：

(1) $2^{-1}\times 64^{\frac{2}{3}}$；　　　　(2) $(0.2)^{-2}\times(0.064)^{\frac{1}{3}}$；

(3) $\left(\frac{8a^{-3}}{27b^{6}}\right)^{-\frac{1}{3}}$；　　(4) $\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^{2}}}{x\sqrt[6]{x}}$；

(5) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$；　　(6) $\left(\frac{b}{2a^{2}}\right)^{3}\div\left(\frac{2b^{2}}{3a}\right)^{0}\times\left(-\frac{b}{a}\right)^{-3}$.

2. 把下列指数式写成对数式，或把对数式写成指数式：

(1) $4^{x}=2$；　　(2) $10^{x}=25$；

(3) $x=\log_{4}3$；　　(4) $x=\lg 0.3$.

3. 计算：

(1) $\log_{7}\sqrt[3]{49}$；　　(2) $\log_{a}2+\log_{a}\frac{1}{2}$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)；

(3) $\log_{3}18-\log_{3}2$；　　(4) $2\lg 2+\lg 25$；

(5) $\log_{64}32$；　　(6) $\log_{2}3\times\log_{27}16$.

4. 已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，试用 a，b 表示下列各数：

(1) $\lg 6$；　(2) $\lg\sqrt{3}$；　(3) $\lg 12$；　(4) $\lg 32$.

5. 已知 $\lg 2=0.3010$，$\lg 7=0.8451$，求 $\lg 35$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $y=2^{\frac{1}{2x+1}}$；　　(2) $y=2^{\sqrt{x}}$；

(3) $y=\log_{0.5}(4x-3)$；　　(4) $y=\sqrt{x-2}+\log_{2}3x$.

7. 比较下列各题中两个数学式值的大小：

(1) 1.7^{a+1}，1.7^{a}；　　(2) 0.9^{a-1}，0.9^{a}；

(3) $\log_{0.9}(a^{2}+1)$，$\log_{0.9}a^{2}$；　　(4) $\log_{1.2}a^{2}$，$\log_{1.2}(a^{2}-1)$.

8. 试比较下列不等式中 m，n 的大小：

(1) $2^{m}<2^{n}$；　　(2) $0.2^{m}>0.2^{n}$；

(3) $\log_{3}m<\log_{3}n$；　　(4) $\log_{0.3}m>\log_{0.3}n$.

9. 设函数 $f(x)=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq1$)，求证：$f(x_{1})\cdot f(x_{2})=f(x_{1}+x_{2})$.

10. 设函数 $f(x)=\log_{a}x$($a>0$ 且 $a\neq1$)，求证：$f(x_{1}\cdot x_{2})=f(x_{1})+f(x_{2})$.

11. 一种产品原来成本是 a 元，在今后的 m 年内，计划使成本每年比上一年降低 $p\%$. 写出成本随年数变化的函数关系式.

12. 仓库库存的某种商品价值是 50 万元，如果每年的消耗率是 4.5%（就是每年比上一年减少库存品价值的 4.5%），那么经过几年，它的价值降为 20 万元（结果保留整数）？

阅读与实践

对数的功绩

在一次数学竞赛中，有这样一个问题：说出 2^{500} 这个数的位数. 正当其他同学愁眉苦脸、茫然不知所措的时候，聪明的小梅马上拿出计算器，按 $\boxed{2}\boxed{y^x}\boxed{5}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{=}$，结果是计算器无法告诉她结果. 事后老师告诉她用对数来判断：

$$\lg 2^{500}=500\times\lg 2\approx150.515，则这个数有 151 位.$$

恩格斯曾经把对数的发明与解析几何的创始、微积分的建立并称为 17 世纪数学的三大成就，伽利略也说过："给我空间、时间及对数，我就可以创造一个宇宙."

那么，对数是怎样出现的呢?

早在公元前 200 多年，阿基米德就注意到 1，10，10^2，10^3，10^4，…与 0，1，2，3，4，…之间的对应关系. 这是关于对数的原始思想. 到 17 世纪初叶，商业、工业的兴起促进了天文学、力学等学科的发展，在航海、天文观测和透镜设计等实际工作中，出现了大量极繁杂的计算，耗去了工作人员的大量时间，提高计算效率成了当务之急. 苏格兰的纳皮尔在 1594 年产生了把乘、除计算归结为加减运算的想法. 经过研究他创立了对数，提出了对数的理论.

对数具有一种奇妙的性质：可以把高一级的乘、除、乘方、开方运算依次转化为低一级的加、减、乘、除运算. 进行大量的计算时，对数的这种功能可使计算的效率成倍地提高.

三百年来，世界科技界一直把对数作为不可缺少的工具，它把科学家们从繁杂的计算里解放出来，等于延长了科学家的生命，对数为人类劳动生产率的提高做出了巨大的贡献.

血 浓 于 水

人们常说"血浓于水"，那么血比水浓的程度到底是多少呢?

我们在初中学过，液体的酸碱浓度可以用化学上的 pH 来表示. 实际上液体的 pH 是液体中所含有的氢离子的浓度 $[H^+]$ 的倒数的常用对数值，即

$$pH=\lg [H^+]^{-1}.$$

由于纯水中氢离子的浓度 $[H^+]$ 是 1×10^{-7} mol/L（浓度单位），所以纯水的 $pH=-\lg [H^+]=-\lg (1\times10^{-7})=7$. 与纯水比较，液体的 pH 越高，表明液体的碱浓度越高；液体的 pH 越低，表明液体的酸浓度越高.

下面我们来计算血比水浓的程度.

相关资料表明，血液的 pH 若高过 7.5 或低于 7.3，人会有昏迷甚至死亡的危险，为了方便，我们认为血液的 pH 为 7.4.

所以

$$\text{血液 pH}-\text{纯水 pH}=\lg [H^+]^{-1}{}_{(\text{血})}-\lg [H^+]^{-1}{}_{(\text{水})},$$

$$7.4-7.0=\lg \frac{[H^+]^{-1}{}_{(\text{血})}}{[H^+]^{-1}{}_{(\text{水})}},$$

$$10^{0.4}=\frac{[H^+]^{-1}{}_{(\text{血})}}{[H^+]^{-1}{}_{(\text{水})}},$$

$$[H^+]^{-1}{}_{(\text{血})}=10^{0.4}[H^+]^{-1}{}_{(\text{水})}\approx2.5[H^+]^{-1}{}_{(\text{水})}.$$

由此可见，血液的碱浓度是纯水的 2.5 倍.

除了 pH 外，生活中遇到的分贝、地震的级别等都是与对数密切相关的. 如果你对这方面的知识有兴趣，请查阅有关的资料，写出相应的科普文章在报刊杂志上发表.

第五章　数　列

静静地放置在那里的国际象棋，棋盘就是厮杀的战场，你就像一位指挥千军万马的将军，运筹帷幄而决胜千里．千百年来，国际象棋给人们带来多少欢乐和愉悦，充实了多少人闲暇的时光．然而发明她的人，至今还未能实现一个已被允诺的愿望．

微石铺就千里路，努力能攀万丈峰．

哪里有数，哪里就有美．

——普洛克拉斯

本章将学习数列的基本概念和有关运算，研究等差数列和等比数列. 这些内容不仅在生产实践中有着广泛的应用，而且也是学习高等数学必备的基础知识.

5.1 数列

下面我们做一个游戏：用围棋子来排“T”字，如图 5-1：

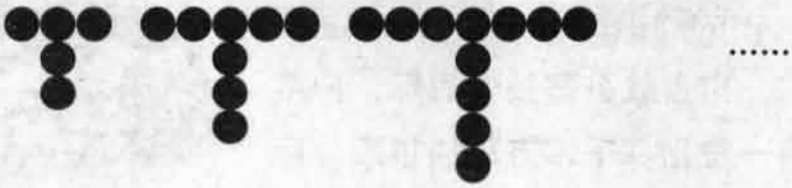


图 5-1

问题 1 列出图 5-1 中前 5 个“T”字中每个“T”字所用棋子的个数.

观察图形，我们容易发现，从第 2 个“T”字开始，后一个“T”字比前一个“T”字增加了 3 个棋子. 由此可知，前 5 个“T”字所用棋子的个数依次为

$$5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17. \qquad ①$$

像①这样按一定次序排列的一列数，叫做**数列**. 数列中的每一个数都叫做这个**数列的项**，各项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项……第 n 项……. 比如 5 是数列①的第 1 项，17 是数列①的第 5 项.

在一个数列中，某项在数列中的序号 n 一经确定，这一项就唯一确定了.

我们还可举出一些数列的例子.

例如，大于 3 且小于 11 的自然数从小到大排成一列

$$4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10; \qquad ②$$

正整数的倒数从大到小排成一列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots; \qquad ③$$

-1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，…依次排成一列

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots; \qquad ④$$

无穷多个 2 排成一列

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots; \qquad ⑤$$

$\sqrt{2}$精确到1，0.1，0.01，0.001，0.000 1，…的不足近似值依次排成一列

$$1，1.4，1.41，1.414，1.414\ 2，\cdots \quad ⑥$$

等都是数列.

试一试　你能举出几个数列的例子吗?

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**. 例如，前面的数列①②是有穷数列，数列③④⑤⑥是无穷数列.

数列从第1项开始，按顺序与正整数对应. 所以数列的一般形式可以写成

$$a_1，a_2，a_3，\cdots，a_n，\cdots，$$

其中a_n是数列的第n项，并且整个数列可记作$\{a_n\}$（在数列中，$n\in\mathbf{N}_+$).

问题2　写出图5-1中每个“T”字所用棋子数所构成的数列，并确定这个数列的第n项.

根据问题1，每个“T”字所用棋子数构成的数列$\{a_n\}$为：5，8，11，14，17，…. 为了看得更清楚，我们依次标出该数列的各项

$$\begin{array}{cccccc} 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & \cdots, \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdots, \end{array}$$

我们发现，这个数列的第1项为：$5=3\times1+2$，

第2项为：$8=3\times2+2$，

第3项为：$11=3\times3+2$，

……

可归纳出，第n项是$3\times n+2$，即$a_n=3n+2$.

在数列$\{a_n\}$中，用序号n来表示相应的项的公式，叫做该数列的**通项公式**. 例如，前面的数列③的通项公式是$a_n=\frac{1}{n}$，④的通项公式是$a_n=(-1)^n$等.

例1　用火柴按照图5-2的方式摆图形：

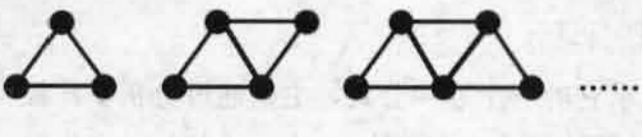


图5-2

想一想　你能写出数列①②⑤的通项公式吗?

(1) 依次写出前 5 个图形中每个图形所用火柴的根数；

(2) 摆第 n 个图形需用多少根火柴？

解：(1) 通过观察发现，从第一个图形开始，后一个图形比前一个图形多用 2 根火柴. 所以，前 5 个图形所用火柴的根数构成的数列为 3，5，7，9，11.

(2) 观察数列的前 5 项 3，5，7，9，11，每一项都等于序号的 2 倍加上 1，所以它的一个通项公式是 $a_n=2n+1$，因此摆第 n 个图形需 $2n+1$ 根火柴.

> 例 1 中，已知 $a_1=3$，如果以后各项由 $a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}_+)$ 给出，你能依次写出前 5 项吗？
>
> 试一试

例 2 根据下列公式，求出下面数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项：

(1) $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；　　(2) $a_1=1$，$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$.

解：(1) 在公式中依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$，得到数列的前 5 项为

$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3};$$

(2) $a_1=1$，

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}.$$

例 3 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下面各列数：

(1) 1，3，5，7；

(2) $\dfrac{2^2-1}{2}, \dfrac{3^2-1}{3}, \dfrac{4^2-1}{4}, \dfrac{5^2-1}{5}$；

(3) $-\dfrac{1}{1\times 2}, \dfrac{1}{2\times 3}, -\dfrac{1}{3\times 4}, \dfrac{1}{4\times 5}$.

分析：已知数列的前几项，求它的一个通项公式，主要通过分析、比较、归纳找到已知项与它对应的序号之间的关系，从而写出 a_n 与 n 之间的对应关系.

解：(1) 数列的前 4 项 1，3，5，7 都是相应的序号的 2 倍减去 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=2n-1;$$

(2) 数列前 4 项$\dfrac{2^2-1}{2}$，$\dfrac{3^2-1}{3}$，$\dfrac{4^2-1}{4}$，$\dfrac{5^2-1}{5}$的分母都等于相应的序号加上 1，分子都等于分母的平方减去 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列前 4 项$-\dfrac{1}{1\times2}$，$\dfrac{1}{2\times3}$，$-\dfrac{1}{3\times4}$，$\dfrac{1}{4\times5}$的绝对值都等于相应的序号与序号加上 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

想一想　由数列通项公式的定义可知，数列通项 $a_n=f(n)(n\in A, A\subseteq\mathbf{N}_+)$ 是否可以看成是一个定义域为正整数集的子集的函数?

练习 5-1

1. 按规律填空：

(1) 2，4，(　)，8，10，(　)，14；

(2) 2，4，(　)，16，32，(　)，128.

2. 填空：

(1) 数列 1，-1，1，-1，…的一个通项公式是________；

(2) 数列 10^1-1，10^2-1，10^3-1，10^4-1，… 的一个通项公式是________.

3. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=n^3$；　　(2) $a_n=5\times(-1)^{n+1}$；

(3) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$；　　(4) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$.

4. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的第 7 项与第 10 项：

(1) $a_n=n(n+2)$；　　(2) $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

5. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下面各列数：

(1) 3，6，9，12；　　(2) $\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{4}$.

5.2 等差数列

5.2.1 等差数列的概念

问题 1 我们做一个排积木的游戏：如图 5-3 所示，用正方体积木（棱长为 3 cm）垒台阶模型. 第一层用 6 块积木，第二层用 5 块积木……第六层用 1 块积木. 试写出从下到上每级台阶距地面的高度所构成的数列.

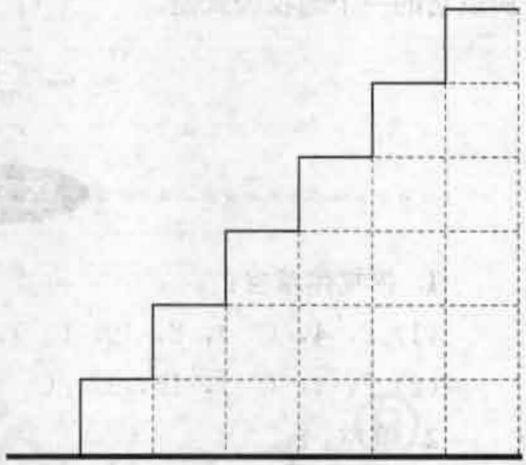


图 5-3

分析：由图 5-3 可知，相邻的两级台阶上一级比下一级高 3 cm，所以可从下至上列出每级台阶距地面的高度（单位：cm）所构成的数列为：3，6，9，12，15，18.

考察上面的数列，我们可以发现，这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于 3.

一般地，如果一个数列从它的第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一常数，则这个数列叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 来表示.

例如，数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots$$

是等差数列，它的公差 $d=2$.

特别地，数列

2，2，2，2，…

也是等差数列，它的公差为 0. 公差为 0 的数列叫做**常数列**.

> 你能举出几个等差数列的例子吗？
>
> 试一试

如果已知一个数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且它的首项为 a_1，公差为 d，由等差数列的定义可知

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots$$

由此可知，首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可表示为

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

例如，如果一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 1，公差是 2，那么将它们代入上面的公式，就得到这个数列的通项公式

$$a_n=1+(n-1)\times 2,$$

即

$$a_n=2n-1.$$

例 1　求等差数列 8，5，2，…的通项公式与第 20 项.

解：因为 $a_1=8$，$d=5-8=-3$，所以这个等差数列的通项公式是

$$a_n=8+(n-1)\times(-3),$$

即 $a_n=-3n+11$. 所以

$$a_{20}=-3\times 20+11=-49.$$

例 2　等差数列 -5，-9，-13，…的第几项是 -401？

解：因为 $a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$，$a_n=-401$，所以

$$-401=-5+(n-1)\times(-4).$$

解得 $n=100$.

即这个数列的第 100 项是 -401.

例 3　已知一个等差数列的第 3 项是 5，第 8 项是 20，求它的首项和公差.

解：因为 $a_3=5$，$a_8=20$，根据通项公式，得

$$\begin{cases}a_1+(3-1)d=5\\a_1+(8-1)d=20\end{cases}$$

想一想 例 3 还有其他解法吗?

整理，得

$$\begin{cases}a_1+2d=5\\a_1+7d=20\end{cases}$$

解此方程组，得 $a_1=-1$，$d=3$.

例 4 一个梯子的最高一级宽是 33 cm，最低一级宽是 89 cm，中间还有 7 级，各级的宽度成等差数列，求中间各级的宽度.

解：用 $\{a_n\}$ 表示题中各级宽度形成的等差数列. 已知

$$a_1=33,\ a_n=89,\ n=9,$$

则 $a_9=33+(9-1)d$，即

$$89=33+8d,$$

解得 $d=7$.

于是

$$a_2=33+7=40,$$
$$a_3=40+7=47,$$
$$a_4=47+7=54,$$
$$a_5=54+7=61,$$
$$a_6=61+7=68,$$
$$a_7=68+7=75,$$
$$a_8=75+7=82.$$

即梯子中间各级的宽从上到下依次是 40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm，75 cm，82 cm.

例 5 已知：一个直角三角形的周长是 24，它的三边的长度成等差数列，求这个直角三角形三边的长度.

分析：当已知三个数成等差数列时，可将这三个数表示为 $a-d$，a，$a+d$，其中 d 是公差. 由于这样表示具有对称性，运算时容易化简.

证明：根据题意可设这个直角三角形的三边长分别为

$$a-d,\ a,\ a+d.\ (\text{不妨设 } d>0)$$

因为它的周长是 24，所以

$$(a-d)+a+(a+d)=24,$$

解得 $a=8$.

根据勾股定理，得

$$(8-d)^2+8^2=(8+d)^2,$$

解得 $d=2$.

所以这个直角三角形的三边长分别是 6，8，10.

> **议一议** 假设 $d<0$ 时，你能求出这个三角形的三边长吗？

观察等差数列 6，8，10，可以发现 $8=\frac{6+10}{2}$，这时我们把 8 称为 6 和 10 的等差中项.

一般地，如果 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么

$$A-a=b-A,$$

即 $A=\frac{a+b}{2}$.

> **做一做** 3 和 7 的等差中项是______.

练习 5-2

1. 口答下列各题：

(1) 数列 0，0，0，0，…是等差数列吗？

(2) 等差数列 0，2，4，6，…的通项公式是什么？

(3) 等差数列 10，9，8，7，…的公差是多少？

(4) 5 与 -5 的等差中项是多少？

2. (1) 求等差数列 3，7，11，…的第 4，7，10 项；

(2) 求等差数列 10，8，6，…的第 20 项.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $d=-\frac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1；

(2) $a_1=12$，$a_6=7$，求 d；

(3) $a_1=3$，$a_n=21$，$d=2$，求 n；

(4) $d=-2$，$a_5=-2$，求 a_n.

4. 求下列各组数的等差中项：

(1) 732 与 -136;　　　　(2) $\frac{49}{2}$ 与 42.

5. (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 5.6, 第 6 项是 20.6, 求它的第 4 项;

(2) 一个等差数列的第 3 项是 9, 第 9 项是 3, 求它的第 12 项.

6. 三个数成等差数列, 它们的和等于 18, 平方和等于 116, 求这三个数.

5.2.2　等差数列的前 n 项和

问题 2　计算 5.2.1 节问题 1 中所用积木的块数.

分析: 怎样求得所用积木的块数呢? 显然积木的块数从上到下构成数列 1, 2, 3, 4, 5, 6, 这是一个等差数列, 直接相加就可得出结果是 21 块. 但如果垒的层数多了, 直接相加就很麻烦, 下面我们给出另外一种求法.

把图 5-3 上下倒置后放在原模型上, 得到图 5-4, 我们发现共有 6 层, 每一层的积木都是 7 块, 共有 42 块积木. 而倒置前后, 积木的块数不变, 所以, 问题 1 中所用积木的块数为 $S_6=42\div2=21$.

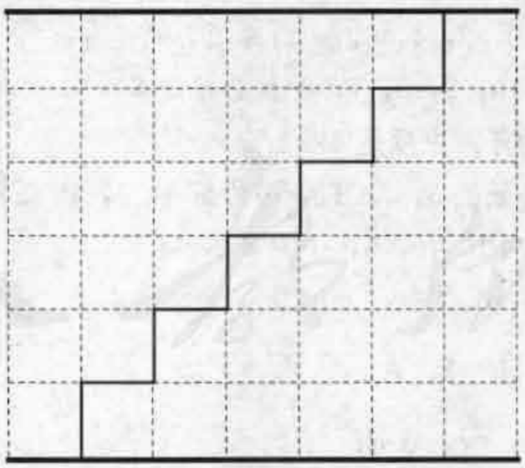


图 5-4

我们也可以把 S_6 看成数列

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$$

的前 6 项的和，即

$$S_6=1+2+3+4+5+6. \quad ①$$

根据加法的交换律，①式可以写为

$$S_6=6+5+4+3+2+1. \quad ②$$

①+②得

$$2S_6=(1+6)+(2+5)+(3+4)+(4+3)+(5+2)+(6+1).$$

即 $S_6=\frac{6\times(1+6)}{2}=21$.

一般地，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，即$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

> **试一试** 在等差数列 $\{a_n\}$ 中请验证：$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$.

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n, \quad ③$$

把③式等号右边部分顺序倒过来，改记为

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1. \quad ④$$

③+④可得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1),$$

在前面“试一试”中，我们已经验证

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots=a_n+a_1.$$

由此可得 $2S_n=n(a_1+a_n)$.

所以，等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

在这两个公式中，都涉及四个变量的关系，只要知道其中任意三个，就可求出第四个.

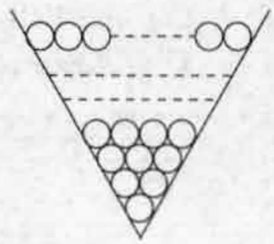


图 5-5

例 6 如图 5-5 所示，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一支，最上面放 120 支，这个 V 形架上共放多少支铅笔?

解：由题意可知，这个 V 形架上共放 120 层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，$d=1$，$a_{120}=120$.

易知，$n=120$. 根据等差数列前 n 项和公式，得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7\ 260.$$

即 V 形架上共放着 7 260 支铅笔.

例 7 在小于 100 的正整数的集合中，有多少个数是 7 的倍数？并求它们的和.

解：在小于 100 的正整数的集合中，7 的倍数是 7，14，21，…，构成等差数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=7$，$d=7$，因此 $a_n=a_1+(n-1)d=7n$. 又因为 $a_n\leqslant 100$，从而 $7n\leqslant 100$，即 $n\leqslant 14$. 因此共有 14 个数是 7 的倍数.

由等差数列的前 n 项和公式得

$$S_{14}=14\times 7+\frac{14\times(14-1)}{2}\times 7=735.$$

即在小于 100 的正整数的集合中，有 14 个数是 7 的倍数，它们的和等于 735.

练习 5-3

1. 口答下列各题：

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 中，若已知 a_1 和 a_{100}，S_{100} 的表达式是什么？

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 中，若已知 a_1 和公差 d，S_{100} 的表达式是什么？

(3) 等差数列 5，5，5，5，…的前 100 项和是多少？

(4) $1+2+3+\cdots+100$ 的值是多少？

2. 根据下列各题的条件，求相应等差数列 $\{a_n\}$ 中的 S_n：

(1) $a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$；

(2) $a_1=100$，$d=-2$，$n=50$.

3. 求正整数列中前 500 个偶数的和.

5.3 等比数列

5.3.1 等比数列的概念

小故事 古时候，在某个王国里有一位聪明的大臣，他发明了国际象棋，献给了国王，国王从此迷上了下棋．为了对聪明的大臣表示感谢，国王答应满足这个大臣的一个要求．大臣说："就在这个棋盘（如图 5-6）上放上一些麦粒吧，第一个格放 1 粒，第二个格放 2 粒，第三个格放 4 粒，然后是 8 粒，16 粒……一直到第六十四个格．""你真傻！就要这么一点麦粒？"国王哈哈大笑．大臣说："就怕您的国库里没有这么多麦子！"

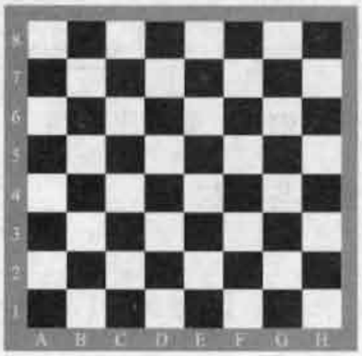


图 5-6

问题 1 试列出棋盘上从第一个格开始直到第六十四个格所放的麦粒数构成的数列．

分析：棋盘上的麦粒数构成的数列为

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots,\ 2^{63}.$$

这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它前面一项的比都是常数 2.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于同一个常数，则这个数列叫做**等比数列**，这个常数叫做等比数列的**公比**．公比通常用字母 $q(q\neq 0)$ 表示．例如，数列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{32}$$

就是等比数列，它的公比 $q=-\frac{1}{2}$.

(1) 等比数列中能否有某一项为 0?

(2) 数列 2，2，2，2，…是等比数列吗?

因为在一个等比数列里，从第 2 项起每一项与它前一项的比都等于公比，所以每一项都等于它的前一项乘以公比．这就是说，如果等比数列 a_1，a_2，a_3，a_4，…的公比是

q，那么

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3,$$
$$\cdots\cdots$$

由此可知，等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}.}$$

你能举出几个等比数列的例子吗？

例 1 求等比数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$ 的通项公式与第 10 项.

解：因为 $a_1=1$，$q=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$，所以这个等比数列的通项公式是

$$a_n=a_1q^{n-1}=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

所以

$$a_{10}=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}.$$

例 2 等比数列 $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, \cdots$ 的第几项是 625？

解：因为 $a_1=\frac{1}{25}$，$q=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{25}}=5$，$a_n=625$，所以

$$625=\frac{1}{25}\times5^{n-1}.$$

解得 $n=7$.

即这个数列的第 7 项是 625.

例 3 一个等比数列的第 3 项与第 4 项分别是 12 与 18，求它的第 1 项与第 2 项.

解：设这个数列的第 1 项是 a_1，公比是 q，则

$$a_1q^2=12, \qquad ①$$
$$a_1q^3=18. \qquad ②$$

解①②所组成的方程组，得

$$q=\frac{3}{2},\ a_1=\frac{16}{3},$$

从而求出

$$a_2=a_1q=\frac{16}{3}\times\frac{3}{2}=8.$$

即这个数列的第 1 项是$\frac{16}{3}$，第 2 项是 8.

议一议　例 3 还有其他解法吗？

例 4　在 2 和 32 之间插入 1 个数，使这 3 个数成等比数列，求这个数.

解：设这 3 个数构成的等比数列为 $\{a_n\}$，公比为 q，则

$$a_1=2,\ a_3=32,$$

所以 $32=2q^2$. 解得

$$q=\pm4.$$

当 $q=4$ 时，$a_2=a_1q=2\times4=8$；

当 $q=-4$ 时，$a_2=a_1q=2\times(-4)=-8$.

所以插入的这个数为 8 或 -8.

一般地，如果 a，G，b 成等比数列，则 G 叫做 a 与 b 的**等比中项**.

如果 G 是 a 与 b 的等比中项，那么$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$，即

$$G^2=ab\text{ 或 }G=\pm\sqrt{ab}.$$

例如，-2 与 -8 的等比中项是 ±4.

练习 5-4

1. 口答下列各题：

(1) 小明做折纸的游戏，一张纸第一次对折，得纸 2 层，第二次对折，得纸 4 层，如此下去，第五次对折得纸多少层？

(2) 等比数列 a_1，a_2，1，$\frac{1}{2}$，…的公比是多少？

(3) 若 3，x，3 三个数成等比数列，则 x 的值等于多少？

(4) 等比数列 1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，…的通项公式是什么？

2. 求下列等比数列的第 4 项与第 8 项：

(1) 5，-15，45，…；　　(2) 1.2，2.4，4.8，…；

(3) $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{8}$，…；　　(4) $\sqrt{2}$，1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，….

3. (1) 一个等比数列的第 9 项是$\frac{4}{9}$，公比是$-\frac{1}{3}$. 求它的第 1 项；

(2) 一个等比数列的第 2 项是 10，第 3 项是 20. 求它的第 1 项和第 4 项.

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=2$，$a_5=54$. 求 q.

5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n=256$，$q=2$. 求 n.

6. 求下列各组数的等比中项：

(1) 16，4；　　(2) 3，7.

7. 在 5 和 405 之间插入三个数，使这 5 个数成等比数列. 求这三个数.

5.3.2 等比数列的前 n 项和

问题 2 在 5.3.1 节问题 1 的小故事中，棋盘上需放多少麦粒才能满足大臣的要求呢?

我们先来研究等比数列

$$a_1，a_1q，a_1q^2，…，a_1q^{n-1}，…$$

的前 n 项和 S_n.

根据等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 可以写成

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}. \quad ①$$

我们知道，把等比数列的任一项乘以公比，就可得到它后面相邻的一项. 现将①式的两边分别乘以公比 q，得到

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \quad ②$$

比较①②两式，我们看到①式的右边从第 2 项到最后一项，与②式的右边的第 1 项到倒数第 2 项完全相同. 于是将①式的两边分别减去②式的两边，可以消去相同的项，得到

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

当 $q\neq1$ 时，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式为

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.}$$

因为 $a_1q^n=(a_1q^{n-1})q=a_nq$，所以上面的公式还可以写成

$$\boxed{S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}.}$$

很显然，当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$.

在问题 2 中，我们设棋盘上的麦粒数构成的等比数列为 $\{a_n\}$，则 $a_1=1$，$q=2$，$n=64$，所以

$$S_{64}=\frac{1\times(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1$$
$$=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

> 1 000 粒小麦约 40 克，$2^{64}-1$ 粒小麦约合 737 869 762 948 000 千克小麦. 若将这些麦粒铺在地面上，可将整个地球表面铺上3 cm厚，国王怎么能满足大臣的要求呢?
>
> 读一读

例 5　求等比数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…的前 8 项的和.

解：因为 $a_1=\frac{1}{2}$，$q=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，$n=8$，得

$$S_8=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}.$$

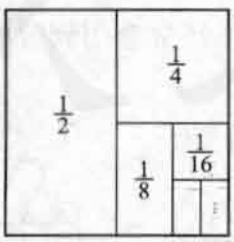


图 5-7

> 这里设计了一个求例 5 中等比数列和的模型：
>
> 如图 5-7 所示，把边长为 1 的正方形二等分，再把其中的一半二等分，依此进行下去. 你能猜出
>
> $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$
>
> 的计算结果吗?
>
> 你还能设计其他的分割法吗?
>
> 试一试

练习 5-5

1. 口答下列问题：

(1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若已知 a_1 和公比 q，则 S_{100} 的表达式是什么？

(2) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若已知 a_1、公比 q 和 a_{30}，则 S_{30} 的表达式是什么？

(3) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若已知 a_1 和公比 $q=1$，则 S_{20} 的表达式是什么？

(4) 数列 3，-3，3，-3，…前 8 项的和是多少？前 9 项的和是多少？

2. 根据下列各题的条件，求相应等比数列 $\{a_n\}$ 中的 S_n：

(1) $a_1=3$，$q=2$，$n=6$；

(2) $a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$n=5$.

3. (1) 求等比数列 1，2，4，…从第 5 项到第 10 项的和；

(2) 求等比数列$\frac{3}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{8}$，…从第 3 项到第 7 项的和.

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$，$a_1=36$，$a_5=\frac{9}{4}$，求 q 和 S_5.

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$，$a_n=\frac{1}{3^{n-1}}$，$S_n=\frac{40}{27}$，求 n.

5.4 等差数列与等比数列的应用

在科学研究、工农业生产和日常生活中，经常会用到等差数列与等比数列的知识. 下面举例说明它们的应用.

例 1 图 5-8 表示堆放的钢管，共堆了 7 层，求这堆钢管的数量.

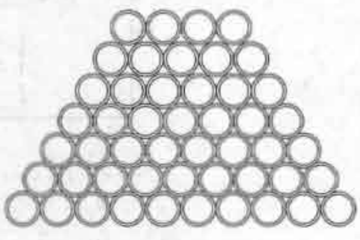


图 5-8

解：由图 5-8 可知，从上到下每层放的钢管数成等差数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=4，a_7=10，n=7，$$

所以

$$S_7=\frac{(4+10)\times 7}{2}=49.$$

即这堆钢管共49根.

例2 某林场计划第1年造林5 hm^2，以后每年比上一年多造林3 hm^2，问20年后林场共造林多少公顷?

解：依题意，林场每年造林的公顷数成等差数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=5$，$d=3$，$n=20$.

所以

$$S_{20}=20\times 5+\frac{20\times 19}{2}\times 3=670\ (hm^2).$$

即20年后林场共造林670 hm^2.

例3 某种电子产品自投放市场以来，经过三次降价，单价由原来的174元降到58元，这种产品平均每次降价的百分率大约是多少（精确到1%）?

解：设平均每次降价的百分率是 x，则每次降价后的单价是降价前的 $(1-x)$ 倍. 这样，将原单价与三次降价后的单价依次排列，就组成一个等比数列，记为 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=174,\ a_4=58,\ n=4,\ q=1-x.$$

由等比数列的通项公式，得

$$58=174\times(1-x)^{4-1}.$$

整理，得

$$(1-x)^3=\frac{1}{3},$$

$$1-x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\approx 0.693.$$

因此 $x\approx 1-0.693\approx 31\%$.

即上述电子产品平均每次降价的百分率大约是31%.

例4 一对夫妇为了给独生子女支付将来上大学的费用，从婴儿出生之日开始，每年孩子的生日都要到银行储蓄一笔钱. 设银行储蓄利息为年息2.25%，每年按复利计算，为使到孩子18岁生日时，本利和共有10万元，问他们每年需存多少钱（精确到1元）?

解：设每年他们存入 x 元，一年后存的本利和为

$$x(1+2.25\%),$$

两年后的本利和为

$$x(1+2.25\%)+x(1+2.25\%)^2,$$

……

这对夫妇从孩子出生到17岁，共存了18笔钱，他们的本利和为

$$x(1+2.25\%)+x(1+2.25\%)^2+\cdots+x(1+2.25\%)^{18}.$$

依题意，列方程得

$$x(1+2.25\%)+x(1+2.25\%)^2+\cdots+x(1+2.25\%)^{18}=100\ 000,$$

即

$$1.022\ 5x\times\frac{1.022\ 5^{18}-1}{1.022\ 5-1}=100\ 000.$$

解此方程，得 $x\approx 4\ 468$ 元.

他们每年约需存入4 468元.

注：复利是指经过一段时间（例如一年），将所生的利息和本金加在一起作为本金，再计算利息.

练习5-6

1. 一个剧场，设置了20排座位，第一排有38个座位，往后每一排都比前一排多2个座位，这个剧场一共设置了多少个座位？

2. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面的一层铺了瓦片21块，往下每层多铺一块，斜面上铺了19层，共铺瓦片多少块？

3. 某种产品，2005年每件成本是100元，计划到2008年使每件成本降低为51.20元，如果每年降低的百分率相同，求这种产品每次降价的百分率.

习题五

1. 写出一个通项公式，使它的前4项是下列各组数：

(1) $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{20}$；　　(2) 0，-2，-4，-6；

(3) $\frac{2}{1}$，$-\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$-\frac{5}{4}$；　　(4) $-\frac{1}{2\times1}$，$\frac{1}{2\times2}$，$-\frac{1}{2\times3}$，$\frac{1}{2\times4}$；

(5) 1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{16}$；　　(6) $\sqrt[3]{1}$，$-\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$-\sqrt[3]{4}$.

2. 已知无穷数列 1×2，2×3，3×4，4×5，…，$n(n+1)$，…：

(1) 求这个数列的第 10 项，第 31 项，第 48 项；

(2) 420 是这个数列的第几项?

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 1，第 2 项是 2，且以后各项均可由公式 $a_n=a_{n-2}-a_{n-1}$ 给出. 写出这个数列的前 5 项.

4. 求下列各组数的等差中项：

(1) 647 与 895；　　　　(2) -180 与 360.

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$，$a_6=5$，$a_3+a_8=5$. 求 a_9.

6. 根据下列条件，求各等差数列 $\{a_n\}$ 的有关未知数：

(1) $a_1=1$，$a_n=19$，$S_n=100$，求 d 与 n；

(2) $d=-2$，$n=8$，$S_n=0$，求 a_1 与 a_n；

(3) $a_1=1$，$d=4$，$S_n=45$，求 n 与 a_n；

(4) $d=2$，$n=15$，$a_n=-10$，求 a_1 与 S_n.

7. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 和 45，求其余各齿轮的齿数.

8. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $a_4=27$，$q=-3$，求 a_7；　　　　(2) $a_2=18$，$a_4=8$，求 a_1 及 q.

9. 求下列各组数的等比中项：

(1) 45 与 80；　　　　(2) $7+3\sqrt{5}$ 与 $7-3\sqrt{5}$.

10. 在 9 与 243 之间插入 2 个数，使这 4 个数成等比数列，求这 2 个数.

11. 三个数成等比数列，它们的和等于 14，积等于 64，求这三个数.

12. 成等差数列的三个正数的和等于 15，并且这三个数分别加上 1，3，9 就成等比数列，求这三个数.

阅读与实践

买　马

某人花 2 000 元买了一匹马，买后感觉买贵了，要把马退还给卖主，他说：“这匹马根本不值这么多钱.”

卖马的人提出了另外一种计算马价的方案说：“如果你嫌马太贵了，那么

就只买马蹄上的钉子好了，马就算白送给你. 每个马蹄铁上有 6 枚钉子，第一枚钉子只卖 1 分钱，第二枚卖 2 分钱，第三枚卖 4 分钱，后面每个钉子价格依此类推.”

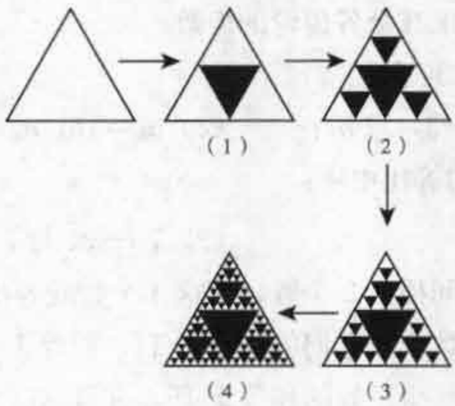
买马的人感觉这样太便宜了，大概花不了几个钱，就能得到一匹马，就欣然同意了. 而且还找来了公证人，约定双方决不再反悔.

当真正付款的时候，买马的人才知道上了大当了，真是：“从南京到北京，买的没有卖的精呀!”

请问同学们，他买这些马蹄上的钉子花了多少钱呢?

怪 物 图 形

下面一组图形，是谢尔宾斯基三角形（也称做谢尔宾斯基垫圈）的各个阶段，在 19 世纪保守的数学家们认为这些怪物是病态的，在蒙德尔布罗于 20 世纪 70 年代后期创造“分形”这个术语之前，这些图形一向被当作怪物.



图中从一个白色三角形开始，每个白色三角形需插入一个黑色三角形，从而一个白色三角形变为三个小的白色三角形，如此可以无限的进行下去，插入的黑色三角形的个数依次为：1，4，13，40，121，…构成一个数列. 你能接着写出这个数列的第六项吗?

设插入黑色三角形的个数构成数列 $\{a_n\}$，我们来观察这个数列，则

$$a_1=1,$$

$$a_2=4=a_1+3^1,$$

$$a_3=13=a_2+3^2,$$

$$a_4=40=a_3+3^3,$$

……

$$a_{n+1}=a_n+3^n,$$

……

因此，下一个图形中黑色三角形的个数为 364 个. 即这个数列的第六项为 364. 这个数列够怪的吧?

如果把黑色三角形部分挖去，我们可以发现剩余的白色部分的面积在不断减小，并且加速趋近于零，有兴趣的同学可以继续研究. 类似的图形一定还有，请上网去查阅“分形几何”吧.

第六章　空间几何体

多面体棱角分明，他使耸天的大楼气势磅礴，充满阳刚；旋转体曲线曼妙，她让建筑物柔情似水、秀丽端庄．正是这些几何体，打扮得世界风景如画，充满一派和谐的风光．

在数学这门科学里，我们发现真理的主要工具是归纳和类比．

——拉普拉斯

数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得极深．

——高斯

在初中，我们研究的几何图形主要是平面图形. 然而，我们在现实生活中所看到的物体，如文具盒、篮球、桌椅、楼房等，都是立体的. 在小学和初中，我们已经学习了一些简单的几何体，如图 6-1 所示.

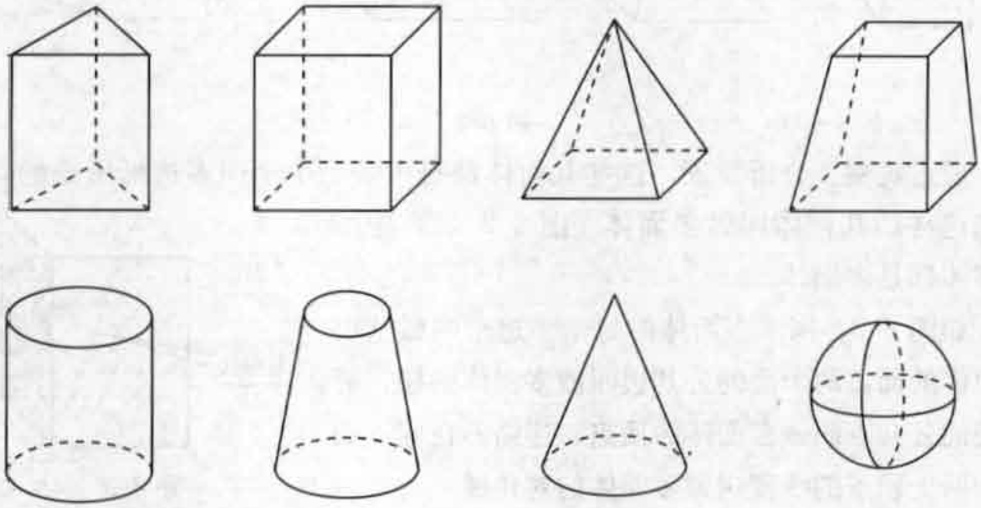


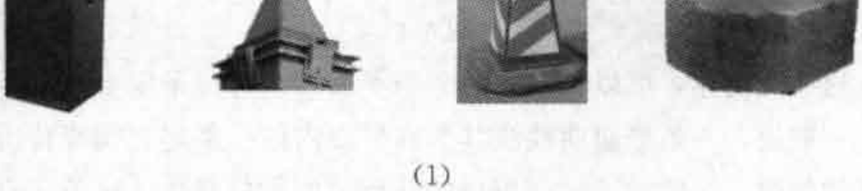
图 6-1

这一章我们将在初中几何的基础上，继续使用观察、推理等方法认识和研究立体图形的性质，以及求其表面积和体积.

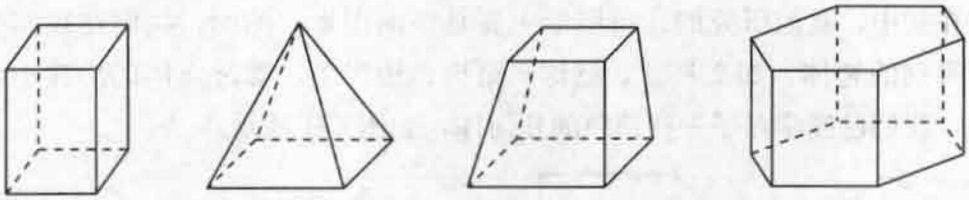
6.1 认识空间几何体

6.1.1 认识多面体与旋转体

问题 在现实生活中，我们的周围存在着许多如 6-2（1）图中的一些物体，它们的轮廓线如图6-2（2)所示，这些轮廓线表示的几何体有哪些共同特点呢?



(1)



(2)

图 6-2

通过观察、分析发现，这些几何体都是由若干个平面多边形围成的，我们把这样的几何体叫做**多面体**. 图 6-2（2）中的几何体都是多面体.

如图 6-3，围成多面体的每个多边形叫做这个多面体的**面**，两个面的公共边叫做多面体的**棱**，棱和棱的公共点叫做多面体的**顶点**，连结不在同一面上的两个顶点的线段叫做多面体的**对角线**.

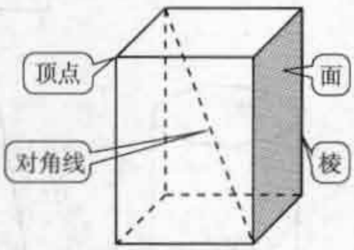
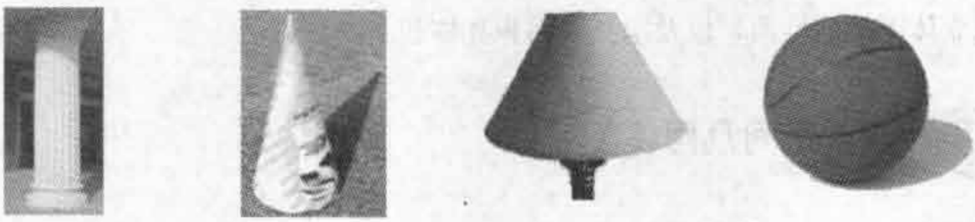
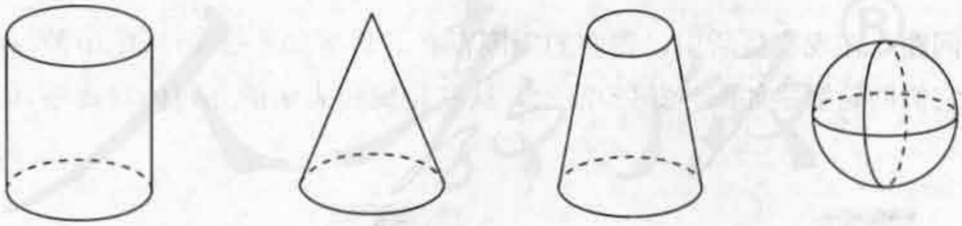


图 6-3

在现实生活中，我们还经常会遇到如图 6-4（1）中的一些物体，它们的轮廓线如图 6-4（2）所示，这些轮廓线表示的几何体又有哪些共同特点呢？



(1)



(2)

图 6-4

以上这些几何体，可以看成是由一条平面曲线绕一条定直线旋转一周所围成的. 一般地，一条平面曲线绕其所在平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫做**旋转面**，封闭的旋转面围成的几何体叫做**旋转体**. 这条定直线叫做

旋转体的**轴**．这条曲线叫做旋转体的**母线**．

图 6-4（2）中的几何体都是旋转体．旋转体也可以看做是由一封闭的平面图形（包括其内部）绕一条定直线旋转一周所围成的几何体．图 6-5 所示的旋转体中，曲线 l 是旋转体的母线．

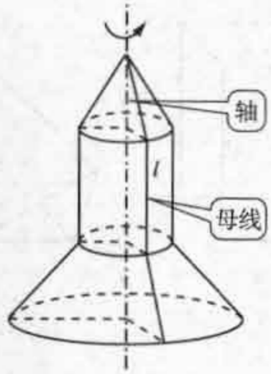


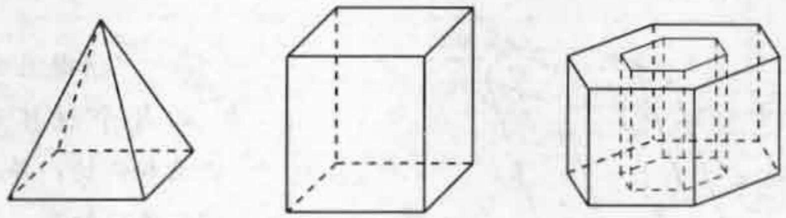
图 6-5

指出图 6-4（2）中旋转体的母线，并作出它们各自的轴．

试一试

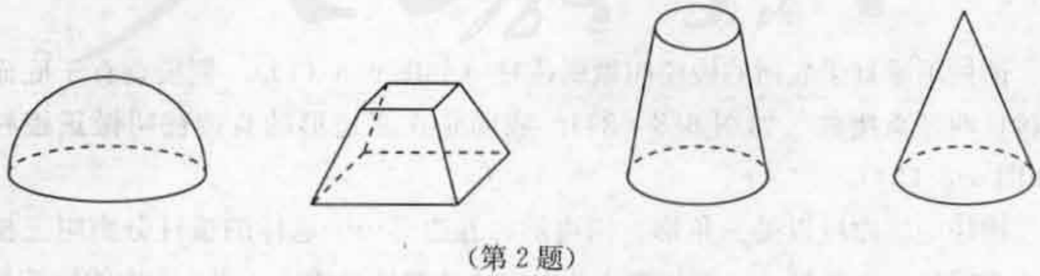
练习6-1

1. 说出下列多面体的顶点数、面数和棱数．



（第 1 题）

2. 下面的几何体中，哪些是多面体？哪些是旋转体？



（第 2 题）

6.1.2 棱柱、棱锥

1. 棱柱

问题 仔细观察图 6-6 中的多面体，说说它们有什么共同特点?

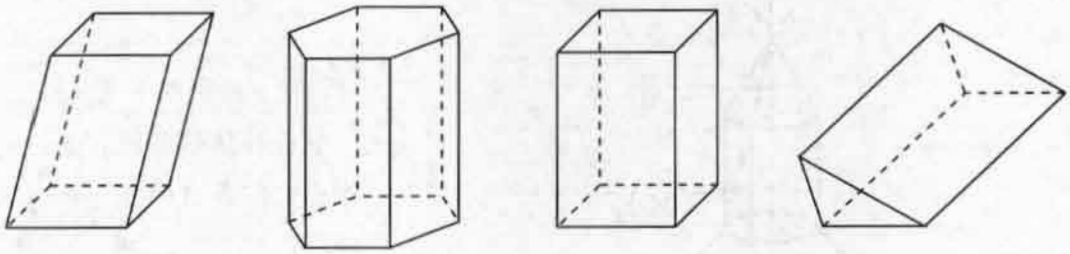


图 6-6

不难看出，它们都是柱形几何体.

一般地，在一个多面体中，如果有两个面互相平行，其余每相邻两个面的交线互相平行，则称这个多面体为**棱柱**. 如图 6-7 所示. 两个互相平行的面叫做棱柱的**底面**（简称**底**）；其余各面叫做棱柱的**侧面**；两侧面的公共边叫做棱柱的**侧棱**；如果棱柱的一个底面水平放置，则铅垂线与两底面所在水平面的交点之间线段的长度或距离，叫做棱柱的**高**.

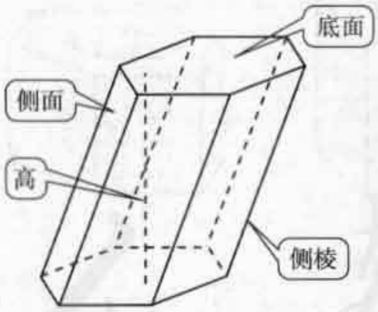


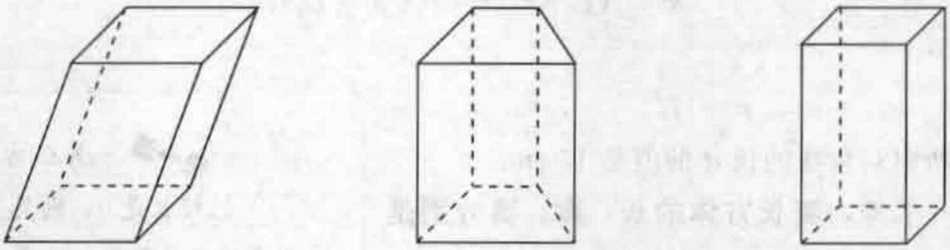
图 6-7

指出图 6-6 中的每个柱体的底面、侧面和侧棱，并画出它们各自的高.

试一试

侧棱不垂直于底面的棱柱叫做**斜棱柱**（如图 6-8（1））. 侧棱垂直于底面的棱柱叫做**直棱柱**（如图 6-8（2））. 底面是正多边形的直棱柱叫做**正棱柱**（如图 6-8（3））.

棱柱的底面可以是三角形、四边形、五边形……这样的棱柱分别叫三棱柱、四棱柱、五棱柱……例如图 6-8 中的棱柱都是四棱柱，图 6-7 中的棱柱是六棱柱.



(1)　　(2)　　(3)

图 6-8

底面是平行四边形的四棱柱是**平行六面体**．如图 6-9（1），记作平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$．侧棱与底面垂直的平行六面体叫做**直平行六面体**，底面是矩形的直平行六面体叫做**长方体**．如图 6-9（2），记作长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$．棱长都相等的长方体叫**正方体**．如图 6-9（3），记作正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，有时也简记成正方体 AC'．

> 你能举出生活中棱柱的实例吗？
>
> 试一试

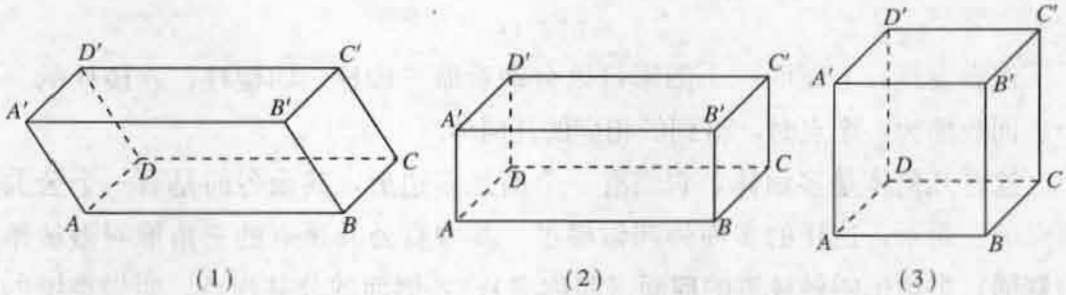


图 6-9

例 1　已知一个长方体的长是 12 cm，宽是 9 cm，高是 8 cm．求这个长方体对角线的长 d．

解：易知长方体的对角线都相等．

如图 6-10，连结 AC，$A'C$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$AC^2=AB^2+BC^2,$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle A'AC$ 中，

$$A'C^2=AC^2+A'A^2=AB^2+BC^2+A'A^2,$$

则

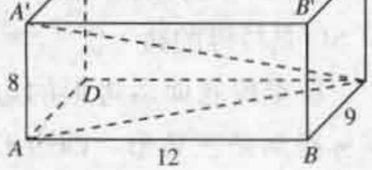


图 6-10

$$d^2=A'C^2=12^2+9^2+8^2=289,$$

解得

$$d=17.$$

所以对角线的长 d 的值是 17 cm.

一般地，**若长方体的长、宽、高分别是 a，b，c，则其对角线的长是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.**

即：长方体的一条对角线长的平方等于一个顶点上的三条棱长的平方和.

想一想 若正方体的棱长是 a，则其对角线的长是多少？

2. 棱锥

问题 如图 6-11，有一组几何体，把它们与棱柱进行比较，有什么不同？

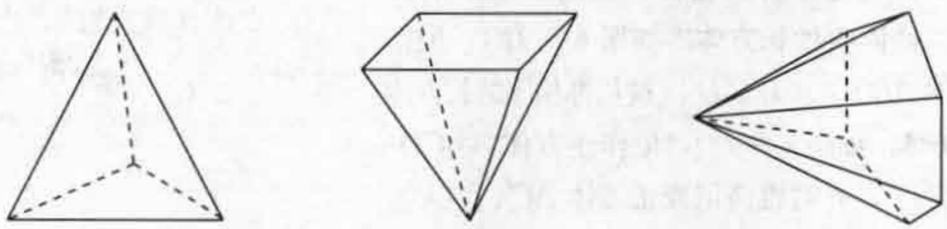


图 6-11

观察发现，上面的三个图形可以分别看做三棱柱、四棱柱、六棱柱的一个底面收缩为一个点时，得到的相应的几何体.

这些几何体是多面体，它们有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，这样的多面体叫做**棱锥**. 其中有公共顶点的三角形叫做棱锥的**侧面**；多边形叫做棱锥的**底面**（简称**底**）；各侧面的公共顶点，叫做棱锥的**顶点**；如果棱锥的底面水平放置，则过顶点的铅垂线与底面交点到顶点的距离，叫做棱锥的**高**.

棱锥用顶点和底面各顶点的字母，或用顶点和底面一条对角线端点的字母来表示. 如图 6-12 中的棱锥可表示为 S-$ABCDE$. 其中 SO 是棱锥的高.

试一试 指出图 6-11 中各棱锥的底面、侧面和顶点，并作出它们各自的高.

棱锥按底面多边形的边数分类，可以分别称底面是三角形，四边形，五边形……的棱锥为三棱锥，四棱锥，五棱锥……图 6-11 中的棱锥，可以依次称为三棱

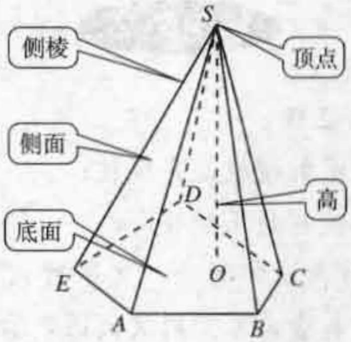


图 6-12

锥，四棱锥，六棱锥. 图 6-12 中的棱锥称为五棱锥.

底面是正多边形，顶点在底面上的射影是底面的中心的棱锥叫做**正棱锥**(图 6-13). 正棱锥的各侧面都是全等的等腰三角形，各等腰三角形底边上的高相等，叫做**正棱锥的斜高**.

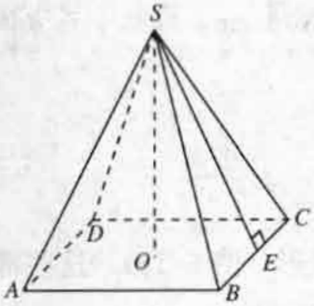
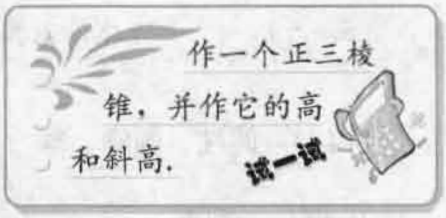


图 6-13



例 2 已知正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的底面边长是 4 cm，侧棱长是 8 cm. 求这个棱锥的高 SO 和斜高 SE.

解：如图 6-14.

过点 S 作 SE 垂直于 BC 于点 E，连结 OE，

在 Rt$\triangle SBE$ 中，

$$SE=\sqrt{SB^2-BE^2}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}.$$

在 Rt$\triangle SOE$ 中，

$$SO=\sqrt{SE^2-OE^2}=\sqrt{(2\sqrt{15})^2-2^2}=2\sqrt{14}.$$

所以这个棱锥的高 SO 的长是 $2\sqrt{14}$ cm，斜高 SE 的长是 $2\sqrt{15}$ cm.

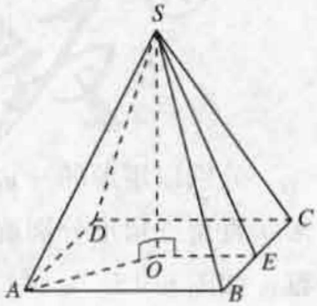


图 6-14

练习6-2

1. 判断下列命题是否正确：

(1) 有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱；

(2) 底面是正方形的棱柱是正棱柱.

2. 四棱柱集合、平行六面体集合、直平行六面体集合、长方体集合、正方体集合之间有怎样的包含关系？用文氏图表示出来.

3. 长方体的四条对角线都相等吗？证明你的结论.

4. 已知以长方体的一个顶点为端点的三条棱长 a，b，c，求它的对角线长：

(1) $a=3$，$b=4$，$c=5$；

(2) $a=7$，$b=11$，$c=4$.

5. 已知一个正方体的对角线的长度是 $3\sqrt{3}$ cm，求这个正方体的棱长.

6.1.3 圆柱、圆锥、球

1. 圆柱、圆锥

问题 圆钢呈现圆柱形，铅锤呈现圆锥形（图 6-15），这些都是旋转体. 那么这些旋转体分别是由什么平面图形旋转而成的？

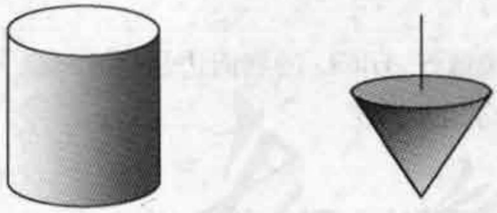


图 6-15

分别以矩形的一边、直角三角形的一直角边所在的直线为旋转轴，将矩形、直角三角形分别旋转一周形成的曲面所围成的几何体分别叫做**圆柱**、**圆锥**，如图 6-16.

上面的旋转轴叫做它们的**轴**，在轴上的这条边（或它的长度）叫做它们的**高**，垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做它们的**底面**，不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做它们的**侧面**，无论旋转到什么位置，这条边都叫做**旋转体的**

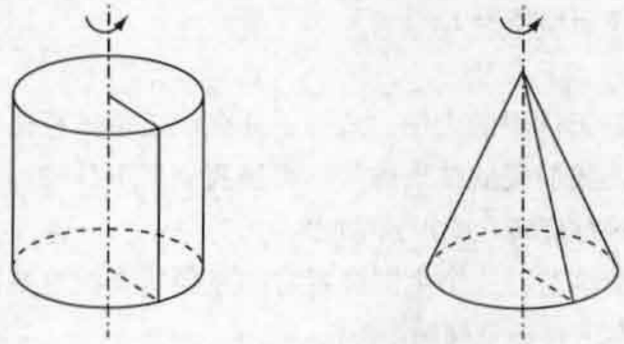


图 6-16

母线，如图 6-17.

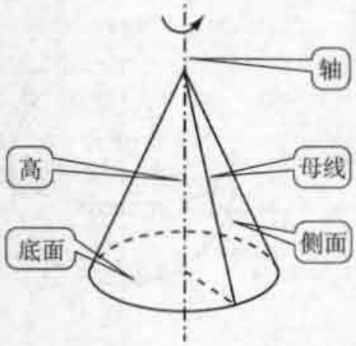


图 6-17

举出生活中圆柱、圆锥的实例.

试一试

例 3 如图，在底面半径为 2，母线长为 4 的圆锥中内接有一个高为$\sqrt{3}$的圆柱，求这个圆柱的底面半径.

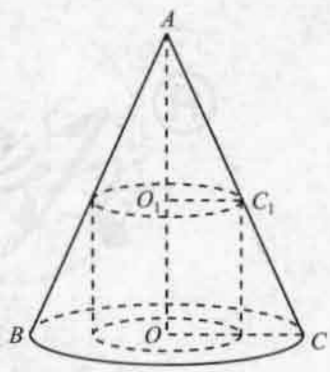


图 6-18

解：如图，连结 AO，交内接圆柱上底面于 O_1，连结 O_1C_1. 由题意知

$$OC=2,\ AC=4,\ OO_1=\sqrt{3}.$$

在 Rt$\triangle AOC$ 中，有

$$AO=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3},$$

$$AO_1=AO-OO_1=\sqrt{3}.$$

根据相似三角形的性质有$\dfrac{O_1C_1}{OC}=\dfrac{AO_1}{AO}$，即

$$\frac{O_1C_1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},$$

解得 $O_1C_1=1$.

所以圆柱的底面半径为 1.

2. 球

问题 无论是天体中的太阳、地球、月亮，还是体育比赛中的篮球、排球、乒乓球，以及我们玩的玻璃球等，都给我们留下球的印象. 那么，用什么样的平面图形进行旋转，能得到球呢？

让我们做一个试验：一个半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周，研究半圆运动的轨迹是怎样的空间图形.

通过观察可以发现，**球面**可以看做是一个半圆绕着它的直径所在直线旋转一周所形成的曲面. 球面围成的几何体，叫做**球体**，简称为**球**（图 6-19）.

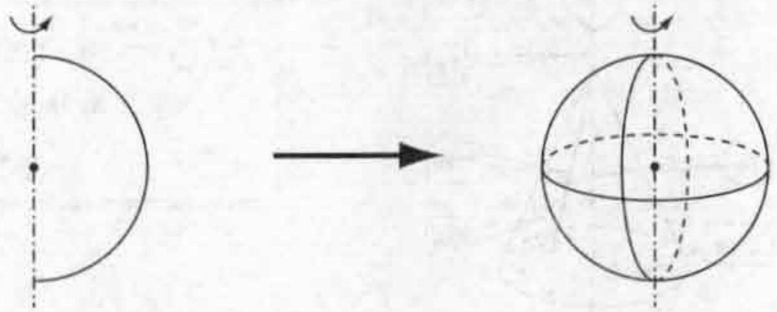


图 6-19

如图 6-20，形成球的半圆的圆心叫做**球心**，连结球面上一点和球心的线段叫做**球的半径**，连结球面上两点且通过球心的线段叫做**球的直径**. 一个球常用其球心对应的字母来表示，例如球 O.

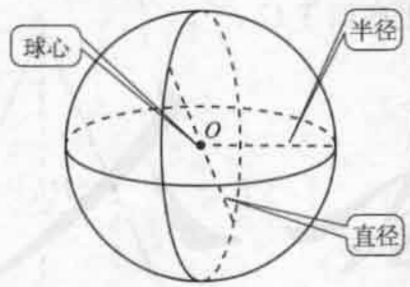


图 6-20

想一想 用一个平面去截球，截面是什么图形？

球面也可以看做是**空间中与定点距离等于定长的点的集合**，同样，球体也可以看做是**空间中与定点距离小于或等于定长的点的集合**.

如图 6-21，用平面 α 去截半径为 R 的球 O，不妨设平面 α 水平放置且不过球心，OO' 是平面 α 的铅垂线，并与平面 α 交于点 O'，且 $OO'=d$. 这时，对于

平面 α 与球面交线上的任意一点 P，都有 $O'P=\sqrt{OP^2-d^2}=\sqrt{R^2-d^2}$，这是一个定值．因此，截面与球面的交线是到定点 O' 距离等于定长 $\sqrt{R^2-d^2}$ 的点的集合．所以，一个平面截一个球面所得的交线是以 O' 为圆心，以 $r=\sqrt{R^2-d^2}$ 为半径的一个圆，截面是一个圆面（圆及其内部）．

球面被经过球心的平面截得的圆叫做**球的大圆**，被不经过球心的平面截得的圆叫做**球的小圆**（图 6-21）．球面上两点之间的最短距离，就是经过两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，我们把这个弧长叫做两点的**球面距离**（图 6-22）．

试一试 经过球面上两点 A，B，用不同的平面去截球面，截得的圆上的劣弧 AB 的长度都相等吗？

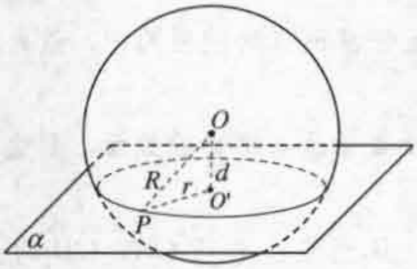


图 6-21

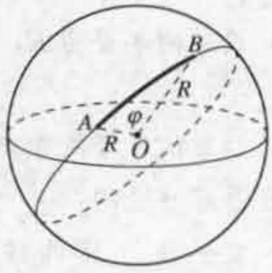


图 6-22

3. 组合体

观察图 6-23 的几个物体，可以发现这些几何体是由柱、锥、球等基本几何体组合而成的．这些几何体叫做**组合体**．组合体可以通过把它们分解为一些基本几何体来研究．


图 6-23

想一想 你能够看出图 6-23 中的物体分别含有哪些基本几何体吗？

练习6-3

1. 判断下列命题是否正确：

(1) 到定点的距离等于定长的所有点的集合是球面；

(2) 球的小圆的圆心与球心的连线垂直于这个小圆所在的平面；

(3) 经过球面上不同的两点只能作一个大圆.

2. 填空：

(1) 已知圆柱的底面半径为 8 cm，轴截面面积为 32 cm^2，则这个圆柱的母线长为________；

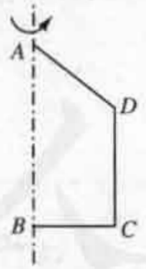
(2) 已知圆锥的母线长为 5 cm，高为 3 cm，则这个圆锥的底面半径为________；

(3) 设球的半径为 R，则过球面上任意两点的截面圆中，最大面积是________；

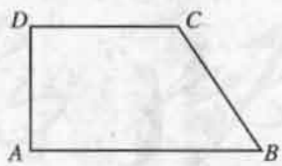
(4) 过球的半径的中点，作一个垂直于这条半径的截面，则这个截面圆的半径是球半径的________；

(5) 在半径为 R 的球面上有 A，B 两点，半径 OA，OB 的夹角是 $n°$ $(n°<180°)$，则 A，B 两点的球面距离是________.

3. 如图，将直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些基本几何体构成的？



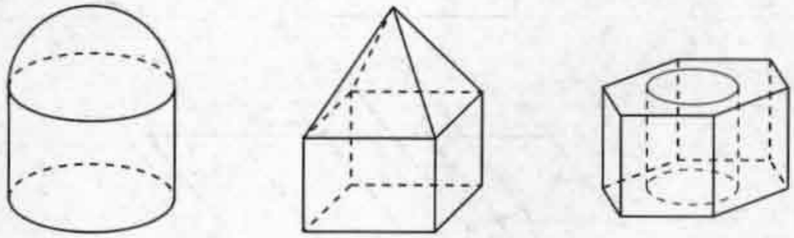
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知如图所示的直角梯形 $ABCD$，说出它分别绕直线 AD，AB，CD 旋转所形成的几何体的名称（或由哪些基本几何体构成的），并画出相应几何体的大致形状.

5. 指出下页图中的几何体是由哪些基本几何体构成的.



（第5题）

6. 已知圆锥的轴截面的面积为 12 cm²，底面半径为 3 cm，求圆锥的高.

7. 圆锥的底面半径为 2 cm，高为 4 cm，它的一个内接圆柱的底面半径为 1 cm，求这个内接圆柱的高.

6.2 空间几何体的表面积与体积

6.2.1 空间几何体的表面积

1. 多面体的表面积

问题 前面我们学习的一些多面体，能够沿着它的一些棱剪开（保持连接）而形成平面图形，这个平面图形就是该多面体的平面展开图. 在图 6-24 中，哪些图形是多面体的平面展开图？

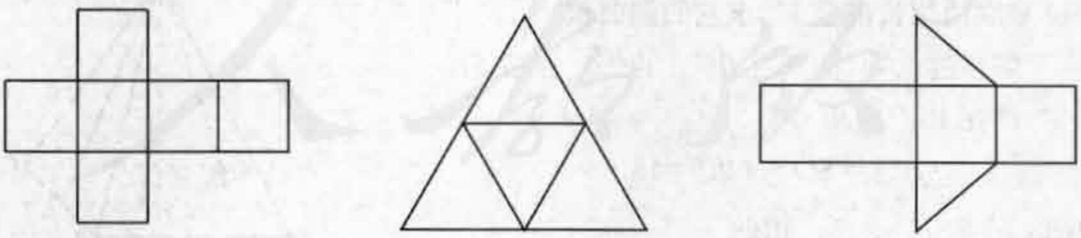


图 6-24

把直棱柱的侧面沿一条侧棱剪开后展在一个平面上，展开图的面积就是棱柱的侧面积. 如图 6-25，直棱柱的侧面展开图是矩形，这个矩形的长等于直棱柱的底面周长 c，宽等于直棱柱的高 h. 因此直棱柱的侧面积是

$$\boxed{S_{直棱柱侧}=ch.}$$

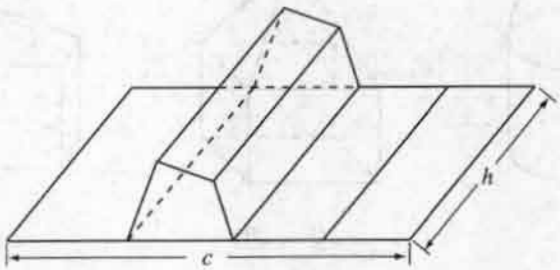


图 6-25

如果正棱锥的底面周长为 c，斜高为 h'，由图 6-26 可知它的侧面积是

$$\boxed{S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'.}$$

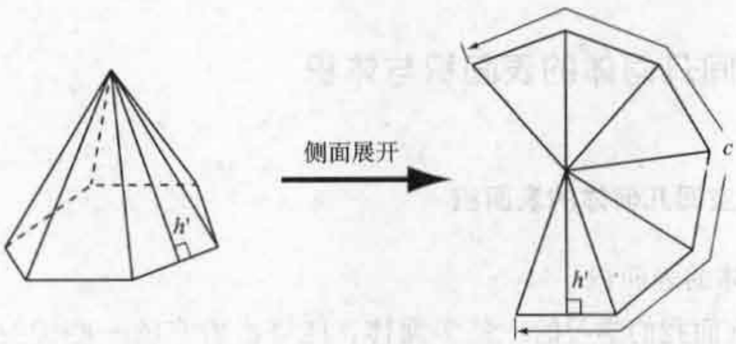


图 6-26

例 1　如图 6-27，一个正四棱锥 S-$ABCD$ 的高 SO 和底面边长都是 4. 求它的侧面积.

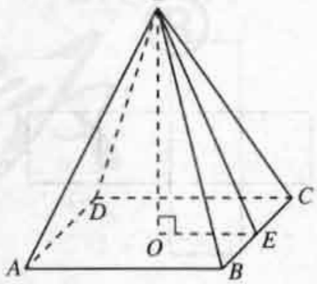


图 6-27

解：过点 O 作 $OE\perp BC$ 于点 E，连结 SE.

则在 $Rt\triangle SOE$ 中，

$$SE^2=SO^2+OE^2=16+4=20,$$

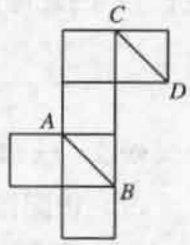
所以 $h'=SE=2\sqrt{5}$. 因此

$$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'=\frac{1}{2}\times4\times4\times2\sqrt{5}=16\sqrt{5}.$$

所以正四棱锥 S-$ABCD$ 的侧面积是 $16\sqrt{5}$.

练习6-4

1. 如图是正方体纸盒的展开图，直线 AB 和 CD 在原来正方体中的夹角是多少？



（第1题）

2. 一张长和宽分别为 8 cm 和 4 cm 的矩形硬纸板，以这张硬纸板为侧面，将它折成正四棱柱．求此四棱柱的对角线的长．

3. 已知一个正三棱锥的每个侧面都是等边三角形，而且侧棱长为4．求它的侧面积和全面积．

4. 设计一个正四棱锥型冷水塔塔顶，高是 0.85 m，底面的边长是 1.5 m．制造这种塔顶需要多少平方米铁板？（不考虑材料损失，保留两位有效数字）

2. 旋转体的表面积

问题　我们做以下实验：把一张矩形纸卷成圆柱形；把一张扇形纸卷成圆锥形．那么圆柱、圆锥的侧面展开图各是怎样的形状呢？

在做这两个旋转体的过程中，易知它们的侧面分别是用矩形纸和扇形纸卷成的．

圆柱、圆锥的侧面沿其母线剪开后展在平面上，这个展开图的面积就是它们的侧面积．通过将圆柱、圆锥的侧面展开，我们可以得到它们的侧面积公式．

如图 6-28 所示，圆柱的侧面展开图是矩形，这个矩形的长等于圆柱的底面周长 c，宽等于圆柱的母线长 l．因此圆柱的侧面积是

$$\boxed{S_{\text{圆柱侧}}=cl=2\pi rl.}$$

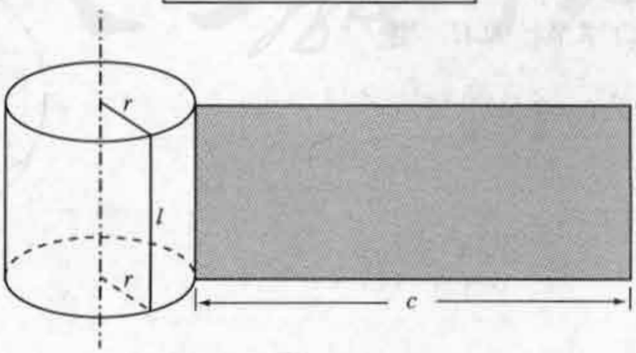


图 6-28

如图 6-29 所示，圆锥的侧面展开图是扇形，这个扇形的弧长等于圆锥的底面周长 c，半径等于圆锥的母线长 l，因此圆锥的侧面积是

$$\boxed{S_{\text{圆锥侧}}=\frac{1}{2}cl=\pi rl.}$$

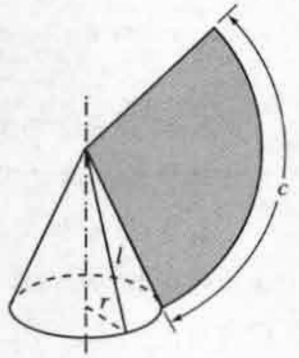


图 6-29

例 2 已知圆锥的底面半径为 2，母线长为 4. 求：

(1) 该圆锥的全面积；

(2) 侧面展开图的圆心角.

解：(1) 该圆锥的全面积是侧面积与它的底面积的和. 因此

$$S=\pi\times2\times4+\pi\times2^2=12\pi.$$

(2) 由弧长公式，有

$$\frac{360^\circ\times4\pi}{8\pi}=180^\circ,$$

所以它的侧面展开图的圆心角的大小为 180°.

3. 球的表面积

柱和锥的表面都可展开成平面图形，这样我们就可以根据平面图形的性质，求它们的表面积. 但球面不能展开成平面图形，我们可以用其他的方法求出它的表面积. 这里我们直接给出由球的半径 R 计算球表面积 S 的公式

$$\boxed{S=4\pi R^2.}$$

例 3 如图 6-30，已知过球面上 A，B，C 三点的截面和球心的距离为球半径的一半，且 $AB=BC=CA=2$. 求球的表面积.

解：设截面圆圆心为 O'，则点 O' 是 $\triangle ABC$ 的中心.

连结 $O'A$，设球半径为 R，则

$$O'A=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle O'OA$ 中，

$$R^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{1}{4}R^2,$$

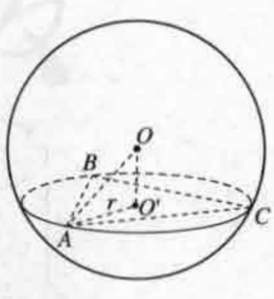


图 6-30

所以 $R=\frac{4}{3}$，因此

$$S=4\pi R^2=\frac{64\pi}{9}.$$

练习6-5

1. 已知圆柱的底面半径为 3，母线长为 6. 求该圆柱的全面积.

2. 已知圆锥的侧面展开图的圆心角的大小是 120°，半径为 4. 求该圆锥的全面积.

3. 将一个球形的气球的半径扩大到原来的 2 倍，它的表面积增大到原来的几倍?

4. 一个球的大圆周长为 8π cm. 求这个球的表面积.

5. 表面积为 324π 的球，其内接正四棱柱的高是 14. 求这个正四棱柱的表面积.

6.2.2 空间几何体的体积

1. 长方体的体积和祖暅原理

初中学过的计算长方体（图 6-31）的体积公式是

$$V_{长方体}=abc \text{ 或 } V_{长方体}=Sh.$$

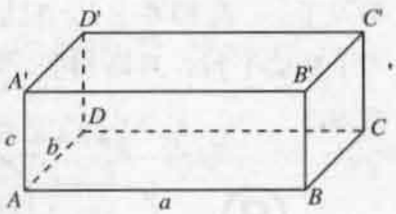


图 6-31

问题 两个底面积相等、高也相等的棱柱，它们的体积是否一样?

做一个试验：

取一摞书堆放在桌面上，组成一个长方体，然后改变一下形状，比较改变形状前后这摞书的体积，如图 6-32 所示.

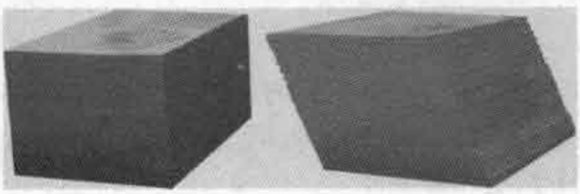


图 6-32

容易得到一个结论：改变形状前后这摞书的体积不变.

这个试验蕴含着祖暅原理.

祖暅原理：幂势既同，则积不容异.

这里的“幂”是截面积，“势”是几何体的高. 意思是：两个同高的几何体，如果与底面等距离的截面面积总相等，那么这两个几何体的体积相等. 这就是说：**夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等**（图 6-33）.

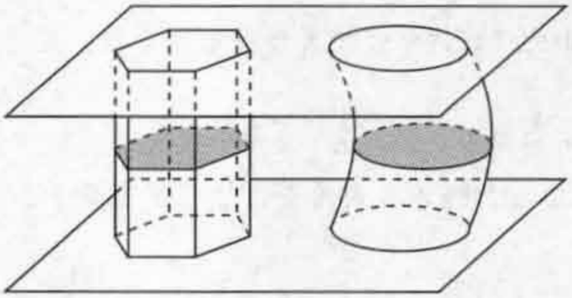


图 6-33

2. 棱柱和圆柱的体积

如图 6-34 所示，设有一个长方体、一个圆柱和一个棱柱. 它们的底面积都等于 S，高都等于 h，它们的下底面都在同一个平面上，因为它们的上底面和下底面平行，且高相等，所以它们的上底面都在和下底面平行的同一个平面内.

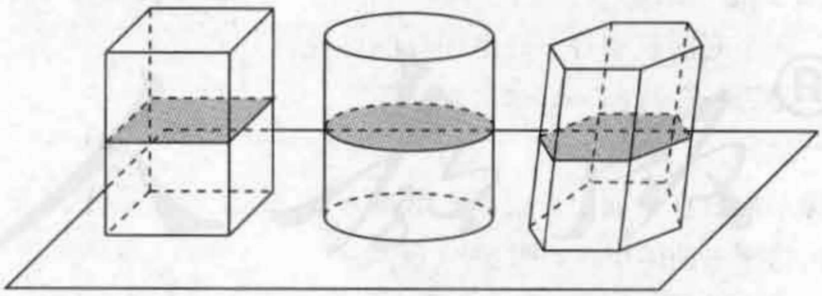


图 6-34

用与底面平行的任意平面去截它们时，所得到的截面面积都等于 S，根据祖暅原理，它们的体积相等. 由于长方体的体积等于它的底面积和高的乘积，于是我们得到柱体体积的计算方法.

柱体（棱柱、圆柱）的体积 $V_{柱体}$ 等于它的底面积 S 和高 h 的积，即

$$\boxed{V_{柱体}=Sh.}$$

例 4　如图 6-35 所示，有一堆相同规格的六角螺帽毛坯共重 5.8 kg. 已知底面六边形边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是 10 mm. 那么约有毛坯多少个?（铁的密度是 7.8 g/cm³）

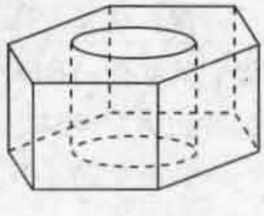


图 6-35

分析：六角螺帽毛坯的体积是一个正六棱柱体积与一个圆柱体积的差，再由铁的密度算出一个六角螺帽毛坯的重量即可.

解：因为

$V_{正六棱柱}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2\times6\times10\approx3\ 741$ (mm³)，

$V_{圆柱}=\pi\times5^2\times10\approx785$ (mm³)，

所以一个毛坯的体积为

$$V=3\ 741-785=2\ 956\ (\text{mm}^3)$$
$$=2.956\ (\text{cm}^3).$$

又因为 $5\ 800\div(7.8\times2.956)\approx251$.

因此这堆毛坯约有 251 个.

> 这个题目的第二种求解方法是：先求出六角螺帽毛坯的底面面积，再用公式 $V=Sh$ 求出螺帽毛坯的体积.
>
> 做一做

3. 棱锥和圆锥的体积

类似于柱体，底面积相等、高也相等的两个锥体，它们的体积也相等. 以三棱柱为例，如图 6-36 所示，可以把三棱柱分成三个体积相等的三棱锥. 一般地，由底面积为 S，高为 h 的棱柱的体积 $V_{柱体}=Sh$，可得棱锥的体积为

$$\boxed{V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.}$$

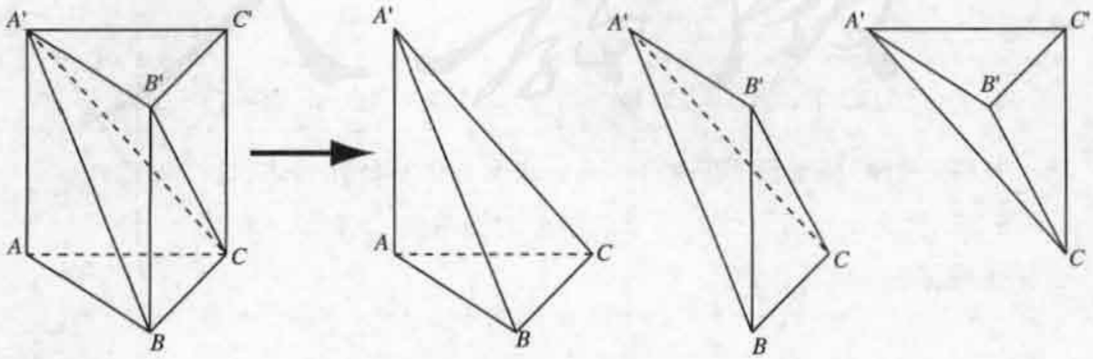


图 6-36

例 5 如图 6-37 所示，在长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中，可以截出一个棱锥 C-$A'DD'$. 求这个棱锥的体积与剩余部分的体积之比.

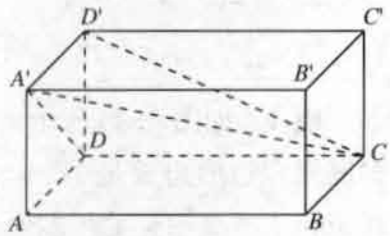


图 6-37

解：将长方体看成四棱柱 $ADD'A'$-$BCC'B'$，设它的底面 $ADD'A'$的面积为 S，高为 h，则它的体积为 $V=Sh$.

棱锥 C-$A'DD'$的底面积为$\frac{1}{2}S$，高为 h，

因此棱锥 C-$A'DD'$的体积 $V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Sh=\frac{1}{6}V$.

所以剩余部分的体积是 $V-V_1=\frac{5}{6}V$.

因此这个棱锥的体积与剩余部分的体积的比为 1∶5.

说明：棱柱的体积等于底面积与高的乘积，而长方体的各个面均可以作为底面，因此可以灵活“选底”.

想一想 三棱锥 C-$A'DD'$的体积是三棱柱 $B'CC'$-$A'DD'$的几分之几?

三棱柱$B'CC'$-$A'DD'$的体积是长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$的几分之几?

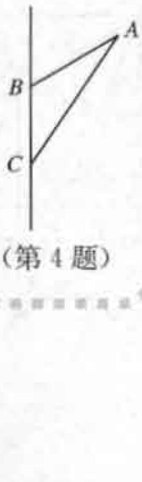
练习6-6

1. 长方体的三个面的面积分别为 2，6 和 9. 求这个长方体的体积.

2. 已知长方体形的铁块长，宽，高分别是 2，4，8，将它熔化后铸成一个正方体形的铁块（不计损耗）. 求铸成的铁块的棱长.

3. 已知正六棱柱底面边长为 4 cm，高为 6 cm. 求这个正六棱柱的体积.

4. 在△ABC 中，$AB=2$，$BC=\frac{3}{2}$，$\angle ABC=120°$，如图所示. 若将△ABC 绕直线 BC 旋转一周，求形成的旋转体的体积.



（第 4 题）

5. 正三棱锥的底面边长为 2，侧面均为直角三角形. 求此三棱锥的体积.

4. 球的体积

运用与祖暅原理类似的方法我们还能证实这样一个结论：一个底面半径和高都等于 R 的圆柱，挖去一个以上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥后，所得几何体的体积与一个半径为 R 的半球的体积相等. 如图 6-38 所示，由此得到

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以

$$\boxed{V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.}$$

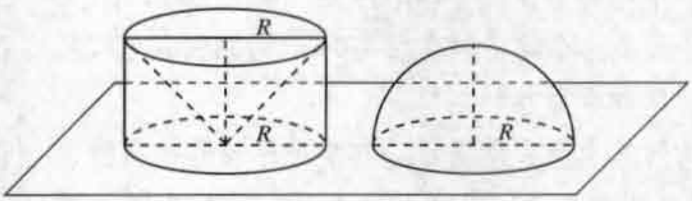


图 6-38

例 6　图 6-39 中所示的圆及其外切正方形绕图中由虚线表示的对称轴旋转一周生成的几何体称为圆柱容球. 求证：在圆柱容球中，球的体积是圆柱体积的$\frac{2}{3}$，球的表面积也是圆柱全面积的$\frac{2}{3}$.

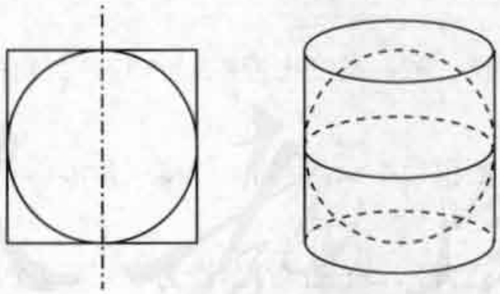


图 6-39

证明：设圆的半径为 R，球的体积与圆柱的体积分别为 $V_{球}$，$V_{柱}$，球的表面积与圆柱的全面积分别为 $S_{球}$，$S_{柱}$，则有

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$V_{柱}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3,$$

所以 $V_{球}=\frac{2}{3}V_{柱}$.

又因为

$$\begin{aligned}S_{柱}&=侧面积+上下底面积\\&=2\pi R\cdot 2R+2\pi R^2=6\pi R^2,\end{aligned}$$

所以 $S_{球}=4\pi R^2=\frac{2}{3}S_{柱}$.

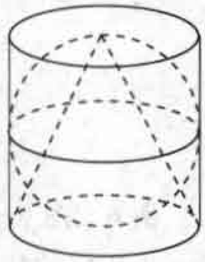
练习6-7

1. 已知一个球的半径是 3 cm，求这个球的体积.

2. 一个平面截一个球得到直径是 6 cm 的圆面，球心到这个圆面的距离是 4 cm. 求该球的表面积和体积.

3. 伟大的阿基米德去世以后，敌军将领马塞拉斯给他建了一块墓碑，以示纪念. 在墓碑上刻了一个球内切于圆柱的图案，还在图案中刻了一个圆锥（如图）. 这样，圆柱底面的直径与其高度相等，也与圆锥的高度相等.

试求圆锥、球、圆柱的体积比.



（第 3 题）

习题六

1. 已知长方体的长、宽、高之比为 4∶3∶12，对角线长为 26 cm，则长、宽、高分别为多少？

2. 正四棱锥的底面积为 4 cm^2，侧面等腰三角形面积为 2 cm^2，求正四棱锥侧棱和高.

3. 若圆柱底面半径为 2，轴截面对角线为 5，求这个圆柱的母线长.

4. 若一个圆锥的轴截面顶角为 60°，母线长为 4 cm，求这个圆锥的底面半径.

5. 圆柱侧面展开图是一个正方形，求证：这个圆柱的侧面积等于两底面面积和的 2π 倍.

6. 已知四棱锥 S-$ABCD$ 的底面为正方形，侧棱长均是边长为 2 的正三角形，求其表面积.

7. 将圆心角为 120°，面积为 3π 的扇形，作为圆锥的侧面，求圆锥的表面积.

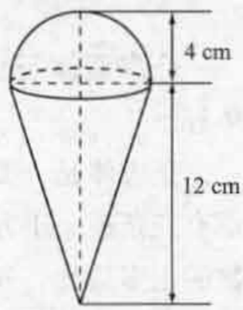
8. 一个圆柱和一个圆锥的母线相等，底面半径也相等，求它们的侧面积之比.

9. 求长为 4，宽为 3 的矩形绕其一边所在直线旋转一周所得圆柱的侧面积和体积.

10. 边长为 2 的正方形，绕其一对角线旋转一周所得几何体的表面积和体积分别是多少?

11. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，求这个圆锥的体积.

12. 如图，一个圆锥形的空杯子上面放着一个半球形的冰淇淋，如果冰淇淋融化了，会溢出杯子吗? 请用你的计算数据说明理由.



(第 12 题)

13. 一个正方体内接于半径为 R 的球内，求正方体的体积.

14. 圆柱形容器底面半径为 5 cm，两直径为 5 cm 的玻璃球都浸没在容器的水中，若取出这两个小球，则容器内的水面将下降多少厘米?

阅读与实践

欧 拉 定 理

观察图 1 中的两个多面体，它们有什么差异?

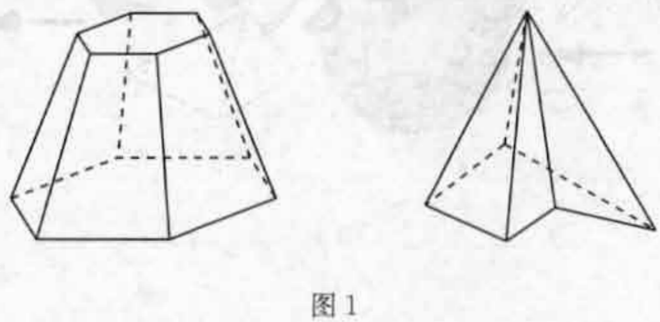


图 1

把多面体的任意一个面延伸成平面，如果其余的面都位于这个平面的同一侧，这样的多面体称为**凸多面体**. 如图 2 中的多面体是凸多面体，而图 3 中的多面体则不是凸多面体.

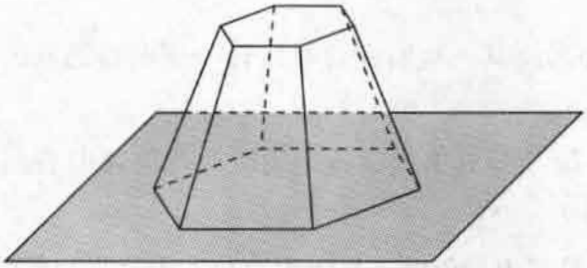


图 2

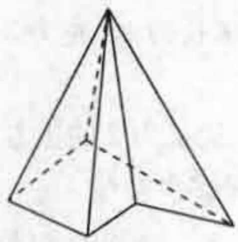
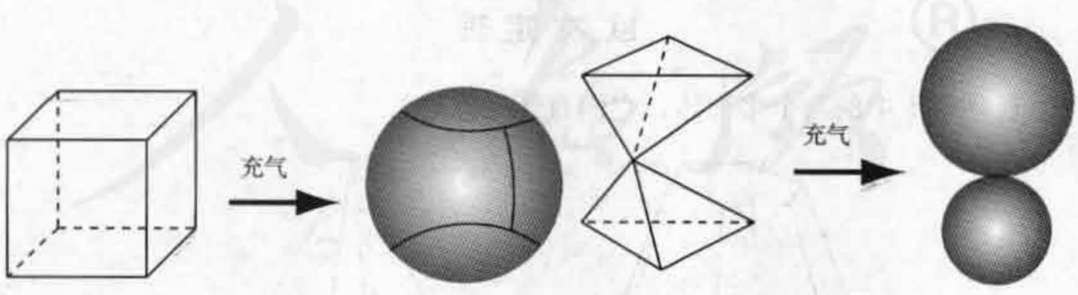


图 3

凸多面体至少有四个面，按照它的面数分别叫四面体、五面体、六面体等.

正方体是一类非常特别的多面体：它的六个面都是正方形，每个顶点处都有三条棱. 正方体我们也可以称为正六面体. 像这样每个面都是有相同边数的正多边形，每个顶点为端点都有相同棱数的凸多面体，叫做**正多面体**. 由定义可以知道：正多面体的各个面是全等的正多边形，各条棱是相等的线段.

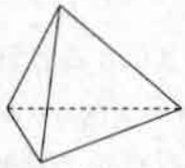
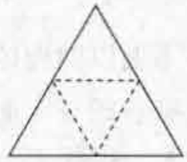
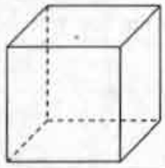
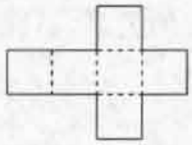
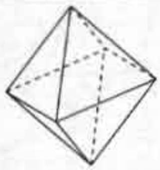
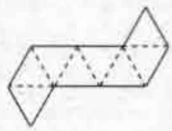
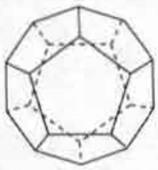
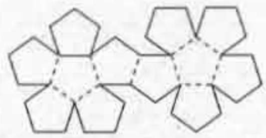
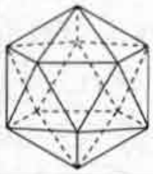
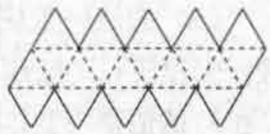
我们考虑一个多面体，例如正六面体，假定它的面是用弹性非常好的橡胶薄膜做成的，如果不断地充以气体，那么它就会连续地变形（不破裂），最后可变为一个球面. 如图 4（1），像这样，表面经过连续变形可变为球面的多面体，叫做**简单多面体**. 图 4（2）的多面体，就不是简单多面体.



(1)　　(2)

图 4

在简单多面体中，正多面体只有五种，列表如下：

正多面体	几何体	顶点数	面数	棱数	展开图
正四面体		4	4	6	
正六面体		8	6	12	
正八面体		6	8	12	
正十二面体		20	12	30	
正二十面体		12	20	30	

观察上表，我们可以发现每个正多面体的顶点数 V、面数 F 及棱数 E 有共同的关系式

$$V+F-E=2.$$

图 1 中的几何体都符合上面的公式吗？

试一试

事实上，上述关系式对简单多面体都成立.

1. 你能根据正多面体的展开图，制作出正多面体的模型吗？

2. 制作两个正四面体的模型，再把它们拼成一个六面体，观察一下这个六面体是否为正六面体，并说明理由.

做一做

欧拉定理（欧拉公式） **简单多面体的顶点数 V、面数 F 及棱数 E 有关系式**

$$V+F-E=2.$$

下面以四面体 $ABCD$ 为例来简要说明这个公式的正确性（图 5（1））.

将它的一个面 BCD 去掉，并使其变为平面图形（图 5（2）），四面体的顶点数 V、棱数 E 与剩下的面数（$F-1$）变形后都没有变. 因此，要研究 V，E 和 F 的关系，只要去掉一个面，将它变形为平面图形即可.

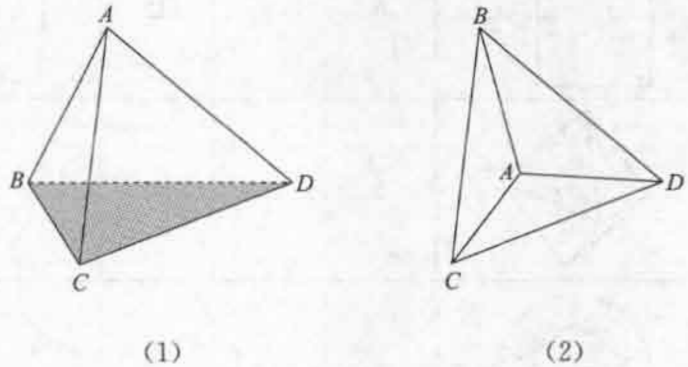


图 5

对平面图形（图 5（2）），我们来研究：

（1）去掉一条棱，就减少一个面. 例如去掉 BC，就减少一个面 ABC. 同理，去掉棱 CD 与 BD，也就各减少一个面 ACD 与 ABD（图 6）. 所以$(F-1)-E$ 和 V 的值都不变，因此 $V+(F-1)-E$ 的值也不变.

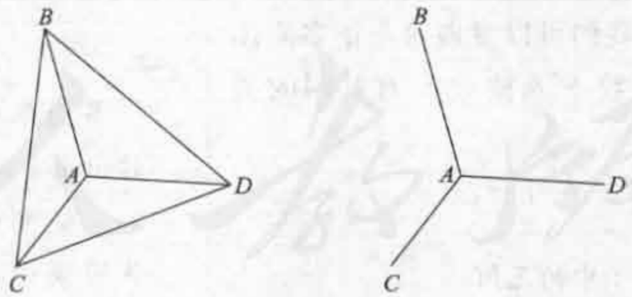


图 6

（2）再从剩下的树枝形中，去掉一条棱，就减少一个顶点. 例如去掉 CA，就减少一个顶点 C. 同理，去掉 DA 就减少一个顶点 D，最后剩下 AB（图 7）.

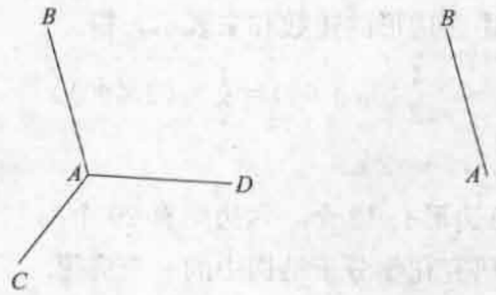


图 7

在此过程中 $V-E$ 的值不变，但这时面数 F 是 0，所以 $V+(F-1)-E$ 的值也不变．由于最后只剩下 AB，所以

$$V+(F-1)-E=2+0-1=1,$$

最后加上去掉的一个面，就得到

$$V+F-E=2.$$

因为对任意的简单多面体，运用这样的方法，最后都是只剩一条线段，因而都可以得到上面的结果．所以欧拉定理对任意简单多面体都是正确的．

1996 年诺贝尔化学奖授予对发现 C_{60} 有重大贡献的三位科学家．C_{60} 是由 60 个 C 原子构成的分子，它是形如足球的多面体（图 8）．这个多面体有 60 个顶点，以每一个顶点为一端点都有三条棱，面的形状只有五边形和六边形，如何计算 C_{60} 分子中五边形和六边形的数目呢？

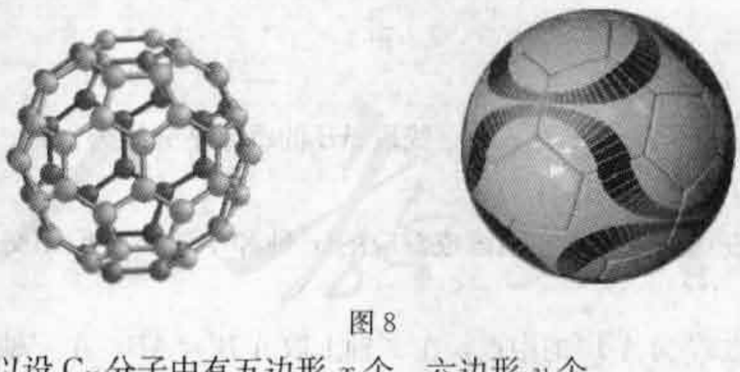


图 8

我们可以设 C_{60} 分子中有五边形 x 个，六边形 y 个．

C_{60} 分子这个多面体的顶点数 $V=60$，面数 $F=x+y$，棱数 $E=\frac{1}{2}\times(3\times60)$．

由欧拉定理得

$$60+(x+y)-\frac{1}{2}\times(3\times60)=2. \qquad ①$$

另一方面棱数可由多边形的边数和来表示，得

$$\frac{1}{2}(5x+6y)=\frac{1}{2}\times(3\times60). \qquad ②$$

由①与②得 $x=12$，$y=20$.

所以 C_{60} 分子中五边形有 12 个，六边形有 20 个.

这是欧拉定理在研究化学分子结构中的一个应用.

斜二测画法

你能在平面上作出直观的立体图形吗?

依据平行投影的性质画直观图的方法，国家规定了统一的标准，一种较为简单的画图标准是斜二测画法，下面举例说明.

例 1 画水平放置的正三角形的直观图.

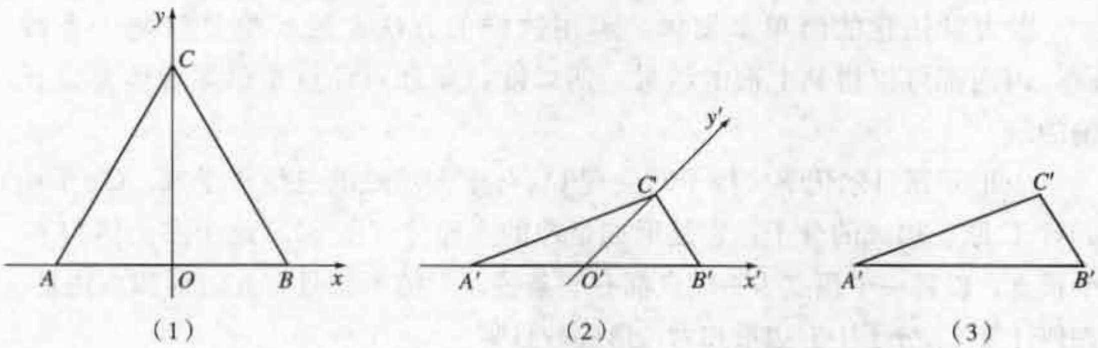


图 9

作法

(1) 以 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy（图 9 (1)）；

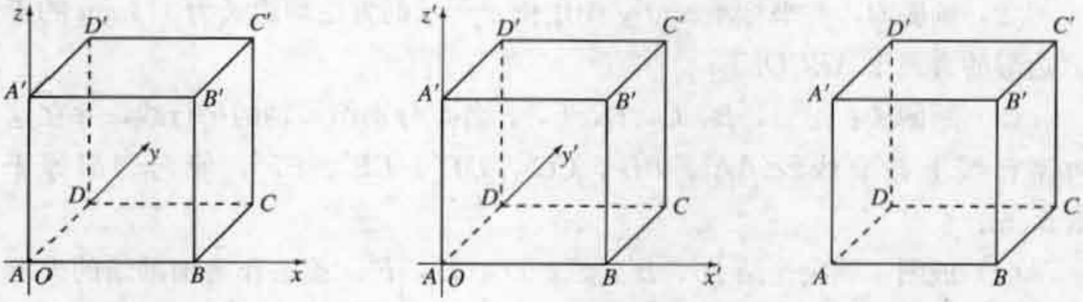
(2) 画直观图时，把它们画成对应的 x'轴和 y'轴，它们相交于 O'点，并使$\angle x'O'y'=45°$；

(3) 以点 O'为 $A'B'$的中点，在 x'轴上取 $A'B'=AB$，在 y'轴上取 $O'C'=\frac{1}{2}OC$，连结 $A'C'$，$B'C'$（图 9 (2)）；

(4) 擦去作为辅助线的坐标轴，则$\triangle A'B'C'$就是$\triangle ABC$ 的直观图（图 9 (3)）.

这种作直观图的方法就是**斜二测画法**.

用斜二测画法画简单几何体的直观图的规则是（以一个正方体的模型作为实例，如图 10）：



（1）　　（2）　　（3）

图 10

（1）在空间图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴交于 O 点，再取 z 轴，使 $\angle xOz=90°$，且 $\angle yOz=90°$（图 10（1））；

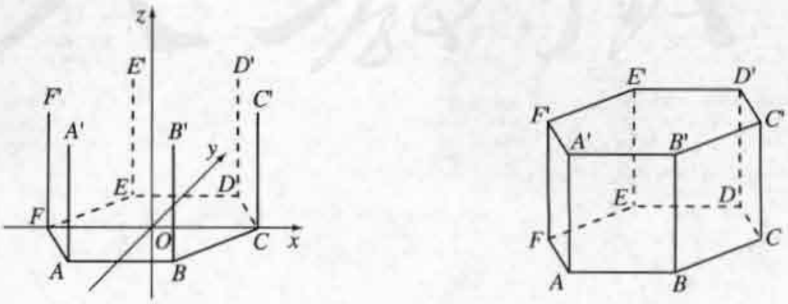
（2）画直观图时，把它们画成对应的 x' 轴、y' 轴和 z' 轴，它们相交于 O' 点，并使 $\angle x'O'y'=45°$（或 135°），$\angle x'O'z'=90°$，x' 轴和 y' 轴所确定的平面表示水平平面（图 10（2））；

（3）已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴、y' 轴或 z' 轴的线段；

（4）已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持原长度不变，平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半；

（5）画图完成后，擦去作为辅助线的坐标轴，就得到了空间图形的直观图（图 10（3））.

例 2　用斜二测画法画一个底面边长为 1.4 cm，高为 1.5 cm 的正六棱柱的直观图.



（1）　　（2）

图 11

作法

(1) 画轴：画 x'轴、y'轴和 z'轴，记坐标原点为 O'，如图 11 (1)；

(2) 画底面：在坐标系 $x'O'y'$中用例 1 所示的方法画边长为 1.4 cm 的正六边形的直观图 $ABCDEF$；

(3) 画侧棱：过 A，B，C，D，E，F 各点分别作 z'轴的平行线，并在这些平行线上截取线段 AA'，BB'，CC'，DD'，EE'，FF'，使它们都等于 1.5 cm；

(4) 成图：顺次连结 A'，B'，C'，D'，E'，F'. 擦去作为辅助线的坐标轴，并将被遮住的部分改为虚线，就得到正六棱柱的直观图（图 11 (2)).

你能用斜二测画法作出下面图形的直观图吗?

1. 水平放置的平行四边形；

2. 水平放置的等腰梯形；

3. 水平放置的边长为 2 cm 的正六边形；

4. 底面棱长为 2 cm，高为 4 cm 的正三棱柱；

5. 底面棱长为 2 cm，高为 4 cm 的正四棱锥.

附录一

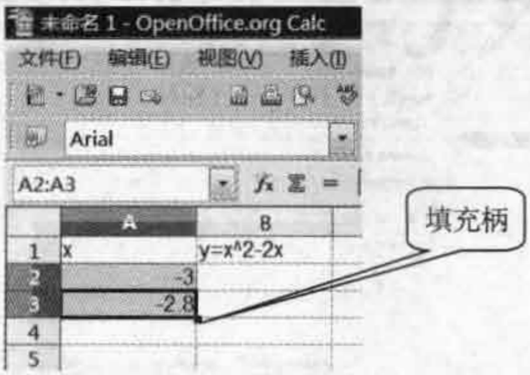
用电子表格画函数图象

随着科技的发展，计算机的应用日益广泛，例如，我们可以用计算机辅助数学学习. 下面我们用电子表格软件作有关函数的图象.

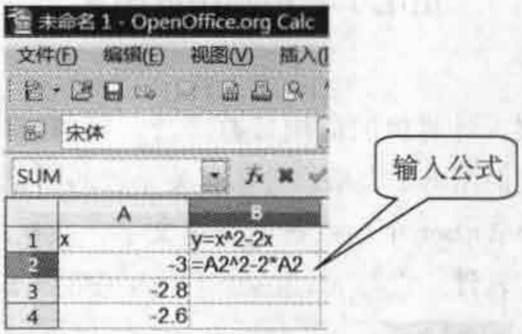
电子表格是 OpenOffice 中的一员，是集文字、数据、图形、图表以及其他媒体对象于一体的软件. 它与 Microsoft Office 中的 Excel 软件类似.

下面介绍在电子表格中绘制函数 $y=x^3+2x^2$，$x\in[-3,3]$ 的图象的方法.

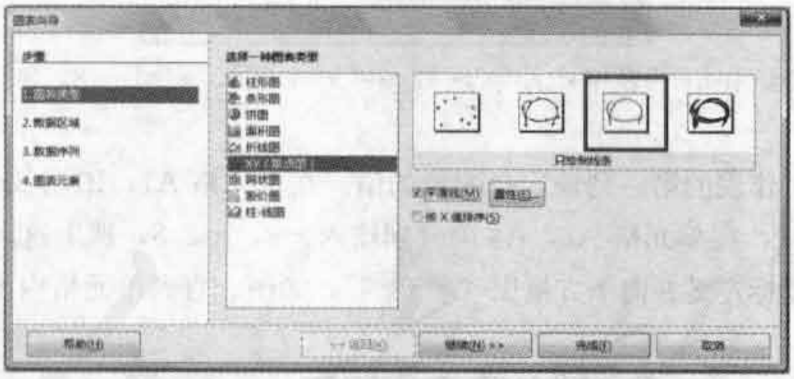
(1) 工作表的第一列输入自变量的值：在单元格 A1，B1 中分别输入 x，$y=x$^2 $-2x$，在单元格 A2，A3 中分别输入 -3，-2.8，选中这两个单元格后，按住鼠标左键并向下方拖曳“填充柄”，如图，直到单元格内出现填充值 3 时为止；

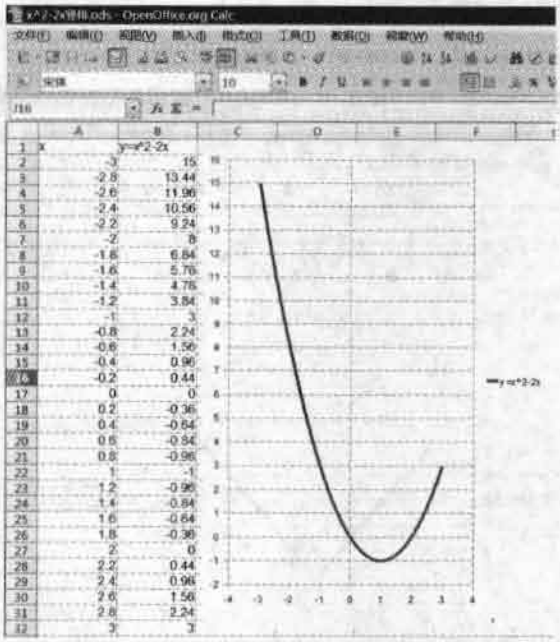


（2）第二列产生对应的函数值：如图所示，在 B2 格内输入公式“＝A 2^2－2 * A2”，然后按回车键，然后拖曳 B2 格的填充柄至 B32，得到与第一列相对应的函数值；



（3）生成相应的函数图象：选中 A1 到 B32 所有单元格，插入“图表”，选择“XY 散点图/平滑线/只绘制线条”，点击“继续”按钮，然后选中“列中数据序列”和“第一行作为标签”，点击“完成”按钮，得到函数 $y=x^2-2x$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的图象.

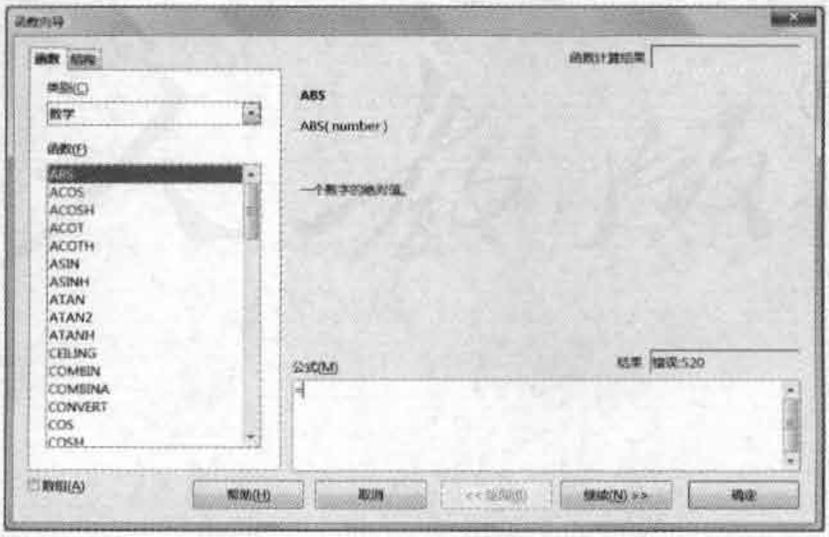




用电子表格作图的本质是描点画图. 公式中常用运算符号如下表所示:

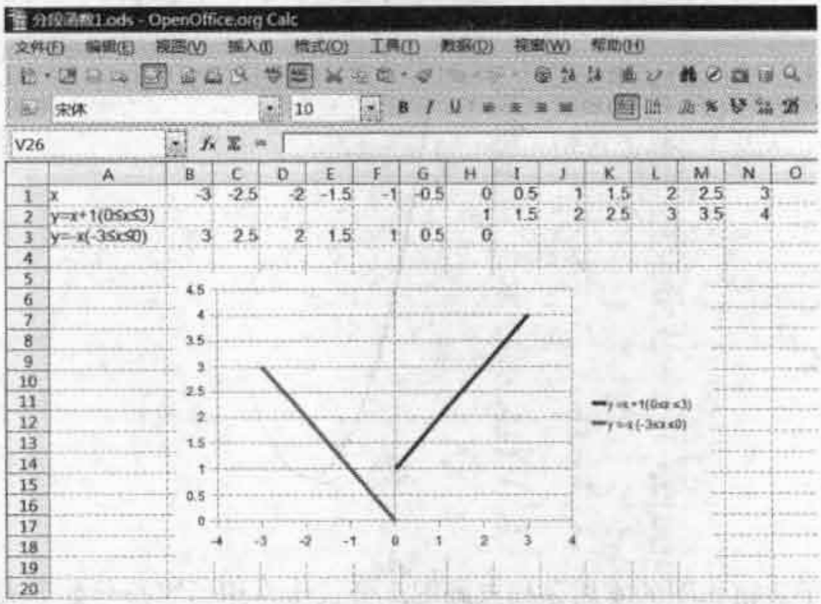
运算	加	减	乘	除	幂	算术平方根
运算符号	+	−	*	/	^	SQRT ()

其他数学函数可以选中“插入”菜单中的“函数…”, 选中相应的函数, 进行作图.



请同学们作出函数 $y=x^3-x$ 图象.

以下是分段函数的图象，你能写出函数的表达式吗?



附录二

几何画板简介

几何画板是研究数学的软件之一．几何画板操作简单，易于掌握；它的动画功能强大而制作简单，新版本比旧版本具有更好的计算、函数作图和参数设置等代数功能，这些功能与几何功能相辅相成，使几何画板的表现更为出色.

几何画板不仅可以应用于教与学，只要深入理解和研究它的功能，就可以使它发挥更广泛的作用.

一、几何画板的窗口

几何画板的窗口包括菜单栏、工具箱、工作区和状态栏四部分，如图 1 所示．下面以几何画板 4.06 版本为例进行介绍.

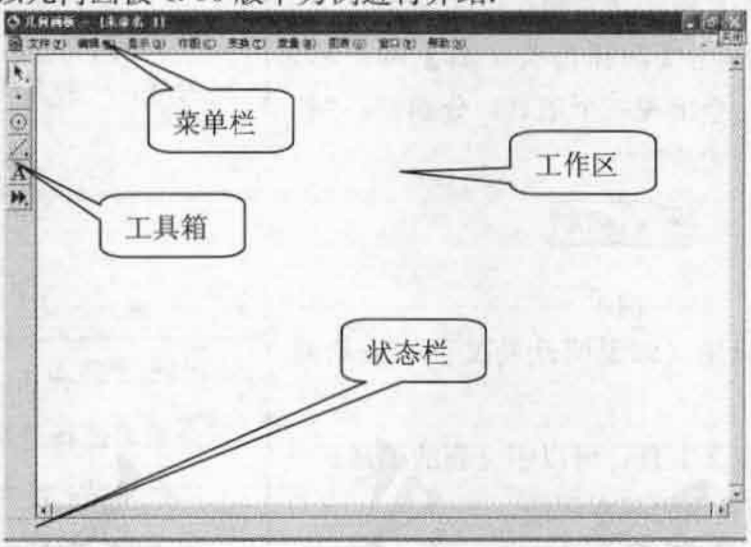


图 1

二、几何画板工具箱

(一) 观察工具箱

画板的左侧是工具箱，其中的工具分为三类：第一类是单一工具，包括【点工具】【圆规工具】和【文本工具】；第二类是含有子工具的复合工具，包括【选择箭头

观察工具箱，你能分别找出这三类工具的按钮吗？再用鼠标分别点击，你有什么发现吗？

试一试

工具】和【直尺工具】；第三类是自定义工具，即【自定义工具】.

（二）工具的基本功能

要使用某个工具时，只要用鼠标单击一下该工具的按钮即可.

：画点，可以在画板绘图区任何空白的地方或“线”上画点，“线”可以是线段、射线、圆、轨迹、函数图象；

> 滚动鼠标上的滚轮，观察工具箱有什么变化.
>
> 试一试

：画圆，只能画圆不能画椭圆；

：画线，可以用于画线段、射线和直线；

用鼠标按住【直尺工具】约一秒，能够看到三个工具，分别是：“线段”“射线”和“直线”，如图 2 所示.

图 2

：选择对象是它的主要功能，还可以用这个工具平移或旋转对象；

用鼠标按住【选择箭头工具】约一秒，如图 3 所示，会出现三个工具，分别是：“移动”“旋转”“缩放”.

> 你能分别画出一条线段、一条射线、一条直线吗?
>
> 做一做

图 3

：加标注（即说明性的文字）或给对象添加标签；

：自定义工具，可以定义新的工具.

> 作出一条线段，分别用选择箭头工具对其进行操纵，体会这三个工具的功能.
>
> 试一试

（三）工具箱的基本用法

1. 画点：单击【点工具】，然后将光标移动到几何画板的工作区中单击一下，就会出现一个点.

2. 画线：

（1）画线段：单击【直尺工具】，然后将光标移动到画板的工作区中，单击鼠标左键，将鼠标移动到另一位置，再单击鼠标左键，就会画出一条线段，并且它的两个端点均可以作为独立的对象存在.

（2）画射线：移动光标到【直尺工具】上，按住鼠标左键不放，继续移

动到射线工具上，松开鼠标，直尺工具变为. 然后在画板工作区单击鼠标左键，鼠标拖动到适当位置再单击左键，就画出一条射线.

> 按住键盘上的Shift键的同时画线，你发现有什么规律吗？
>
> 试一试

(3) 画直线：与画射线的方法类似.

3. 画圆：单击【圆规工具】，然后将光标移动到画板工作区中单击鼠标左键（确定圆心），并将鼠标拖动到另一位置（起点和终点间的距离就是半径），再单击鼠标左键，就会出现一个圆．并且圆周上有一个点，当拖动这个点时，圆的大小会发生变化.

> (1) 用圆规工具作一个圆，并用鼠标分别拖动圆心和圆周上的点，观察圆发生什么变化；(2) 用圆规工具作三个同心圆．
>
> 试一试

> (1) 作出两条相交直线，并构造它们的交点；(2) 作出两个相交的圆，并构造它们的交点.
>
> 试一试

4. 画交点：单击【选择箭头工具】，然后拖动鼠标将光标移动到线段和圆相交处（光标由变成横向←，状态栏显示的是“点击构造交点”）单击一下，就会出现交点．如图4所示.

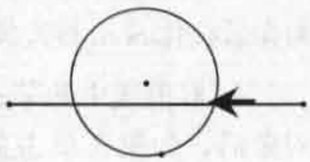


图4

交点只能在线与线、线与圆、圆与圆之间点击构造.

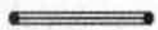
> 如果双击鼠标，会出现什么现象呢？如何修改标签内容呢？
>
> 试一试

5. 添加标签：单击文本工具，光标由箭头变为手形，然后移动鼠标，光标移到对象处时变为，单击鼠标，对象显示出标签.

三、对象的选取与删除

在进行所有选择（或不选择）之前，需要先单击【选择箭头工具】按钮，使鼠标处于选择箭头状态.

1. 选择一个对象：用鼠标对准工作区中的一个点、一条线、一个圆或其他图形对象，单击鼠标就可以选中这个对象．图形对象被选中时，会加重表示出来．如下图所示：

选择对象	过程描述	选前状态	选后状态
一个点	用鼠标指向要选中的点，待光标↖变成横向箭头←时，单击鼠标左键．		
一条线	用鼠标指向线段的端点之间部分（而不是线段的端点），待光标变成横向箭头←时，单击鼠标左键．射线和直线均类似．		
一个圆	用鼠标对准圆周（而不是圆心或圆上的点），待光标变成横向箭头←时，单击鼠标左键．		

2. 再选另一个对象：当一个对象被选中后，再用鼠标单击另一个对象，新的对象被选中，而原来被选中的对象仍被选中．

3. 选择多个对象：连续单击所要选择的对象或按住 Shift 键连续单击所要选择的对象．

4. 取消选中的某一个对象：当选中多个对象后，如果再单击某个对象，就取消了对这个对象的选择．

5. 取消所有选中的对象：在画板的空白处单击鼠标左键（或按 Esc 键）即可．

6. 选择所有对象：如果你选择了画板工具箱中的选择工具，这时在编辑菜单中就会有一个“选择所有”的项；如果当前工具是画点工具，这一项就变成选择“所有点”；如果是画线工具或圆规工具，这一项就变成“选择所有线段（射线、直线）”或“选择所有圆”．

在↖状况下，按住鼠标左键，拖动鼠标，观察工作区有什么变化？如果出现的虚框范围内有对象，对象又有什么变化？

试一试

先不按住 Shift 键，连续单击所要选择的对象，然后点击空白处；按住 Shift 键，连续单击所要选择的对象，然后点击空白处．比较两次操作的效果有什么不同．

试一试

7. 对象的删除：先选中要删除的对象，然后再选择“编辑”菜单中的“清除”项，或按键盘上的“Delete”键.

四、画函数图象

1. 画定义域为 **R** 的函数的图象

例 1　画函数 $y=x^2+3x-2$ 的图象.

在几何画板中选择“图表”菜单中的“绘制新函数”命令，然后在弹出的对话框（如图 5）中通过单击相应的按键，输入函数解析式“x^2+3x-2”，再按“确定”按钮，即可画出函数图象（如图 6）.

图 5

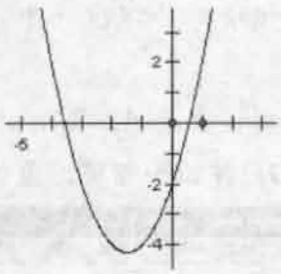


图 6

操作秘籍：你知道“x^2”是怎样输入的？

在图 5 中，用鼠标单击 $\boxed{x}$ 之后，单击 $\boxed{\wedge}$，然后点击 $\boxed{2}$，就得到 x^2. 这里的 $\boxed{\wedge}$ 就是代表“乘方”的含义.

2. 画定义域为限定区间的函数图象

例 2　画函数 $y=x^2+3x-2(-4\leqslant x\leqslant 1.5)$ 的图象.

将鼠标指针移动到上面画出的函数图象上，然后按鼠标右键，选择“属性”命令，在弹出的对话框（如图 7）中，单击“图像”标签，指定自变量 x 的取值范围．将 x 的取值范围改成 $-4\leqslant x\leqslant 1.5$ 后，相应的图象变为如图 8 所示的一段曲线.

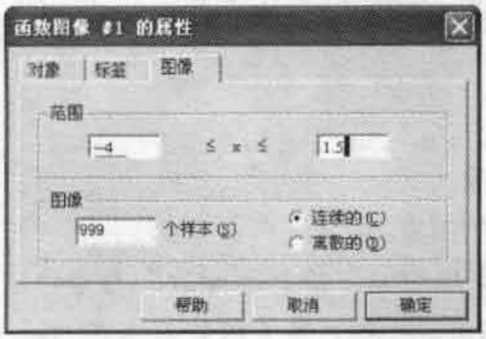


图 7

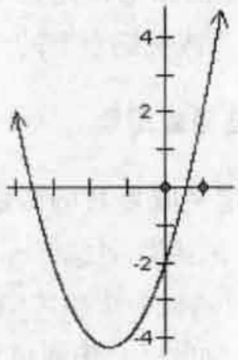
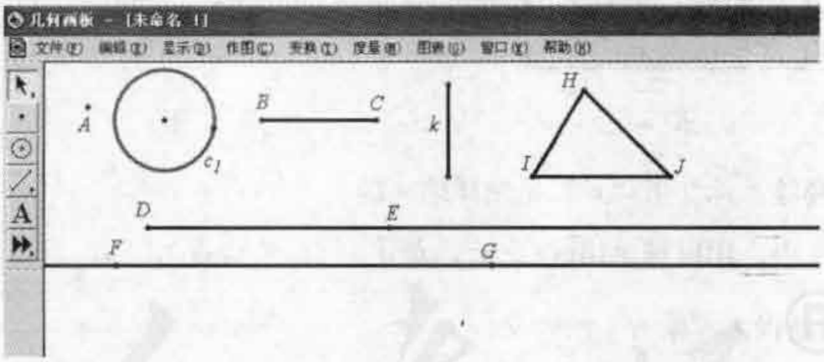


图 8

练习

1. 用线段工具作出一个三角形和一个四边形，用射线工具作出一个角.

2. 分别作出点 A，圆 c_1，线段 BC，线段 k，三角形 HIJ，射线 DE，和直线 FG，并添加相应对象的标签，如图所示.



（第 2 题）

五、几何画板应用举例

用几何画板可以画出许多美丽的图形，如：美丽的“树”（图 9），“魔鬼”三角（图 13）等.

（一）画美丽的“树”

1. 用线段工具作出线段 AB，双击点 A，将其标记为旋转中心，然后选中线段 AB 和端点 B，选择菜单“变换”中的“旋转”命令，旋转固定角度

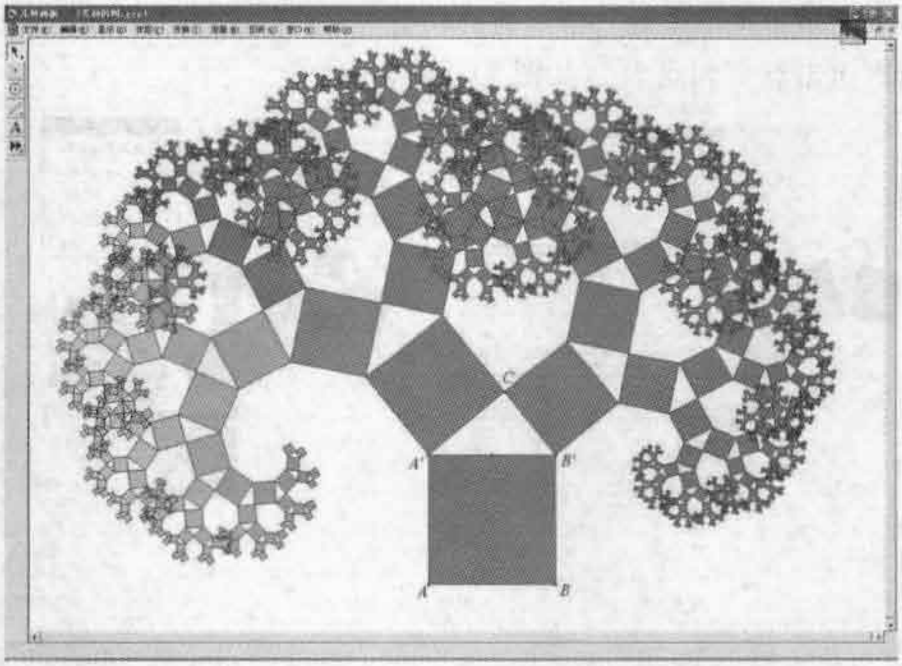


图 9

90°，得到线段 AA'（注：如果用标签工具标出的不是相应的字母，可以双击该字母，在出现的对话框中更改）．同样，双击点 B，将其标记为旋转中心，选中线段 AB 和端点 A，选择菜单“变换”中的“旋转”命令，旋转固定角度 $-90°$，得到线段 BB'．用线段工具连接 $A'B'$，构造一个正方形 $ABB'A'$．

2. 选中线段 $A'B'$，选择菜单“作图”中的“中点”命令，得到线段中点，然后依次选中线段的中点以及点 B'，选择菜单“作图”中的“以圆心和圆周上的点绘图”命令，构造出一个圆．选中该圆，再依次选中点 B' 和点 A'，选择菜单“作图”中的“圆上的弧”命令，构造圆上的弧，然后选择菜单“作图”中的“弧上的点”命令，得到弧上的一个点 C．单击圆，选择菜单“显示”中的“隐藏对象”命令，隐藏圆．用同样的方法隐藏圆上的弧．

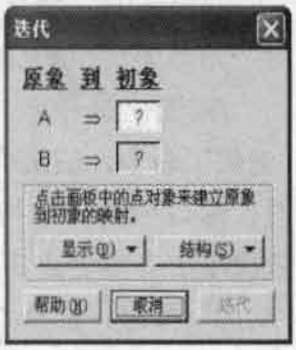
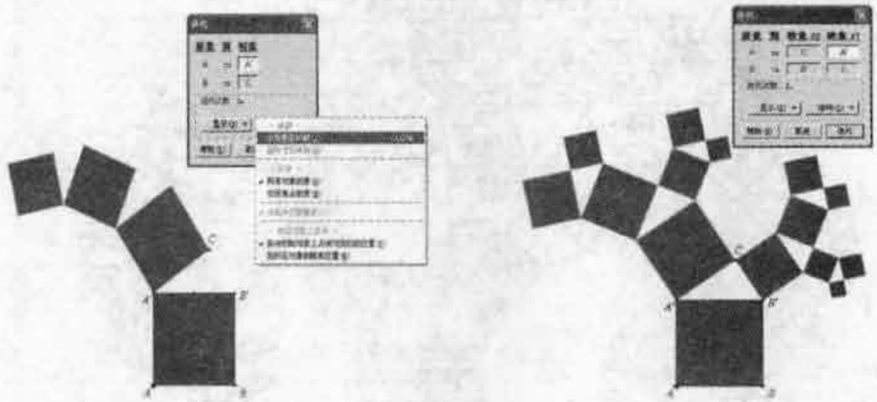


图 10

3. 选中点 A 和点 B，选择菜单“变换”中的“迭代”命令，呼出迭代窗口．如图 10 所示．依次单击点 A' 和点 C．然后单击迭代窗口中的“结构”按钮，

呼出菜单，单击菜单中的“添加新的映射”命令，如图 11（1）所示，然后再依次单击点 C 和点 B'（如图 11（2））.



（1） （2）

图 11

按键盘上的“+”号键，可以增加迭代次数，按键盘上的“-”号键可以减少迭代次数．单击迭代窗口的“迭代”按钮，完成迭代．得到一棵美丽的“树”.

4. 选中点 C，然后选择菜单“编辑”的“操纵类按钮”中的“动画”命令，建立点 C 的动画按钮．单击按钮后，“树”进行变形.

（二）画“魔鬼”三角

1. 用线段工具，首尾连接作出一个三角形 ABC. 选中三角形的三条边，选择菜单“作图”的“中点”命令，作出三边的中点．分别是 D，E，F.

2. 选中三个中点，选择菜单“作图”的“线段”命令，构造三角形 DEF. 再选中三个点 D，E，F，选择菜单“作图”的“三角形内部”命令，对三角形 DEF 填充颜色.

3. 依次选中点 A，B，C，选择菜单“变换”的“迭代”命令，依次单击对应的点 A，E，F；然后单击迭代窗口中的“结构”按钮，选择“添加新的映射”，依次单击对应的点 E，B，D；再次单击迭代窗口中的“结构”按钮，选择“添加新的映射”，依次单击对应的点 F，D，C. 如图 12 所示.

图 12

4. 按键盘上的“+”号键，增加迭代次数，按键

盘上的“—”号键，减少迭代次数．单击迭代窗口的“迭代”按钮，完成迭代．得到一个“魔鬼”三角．如图 13 所示．

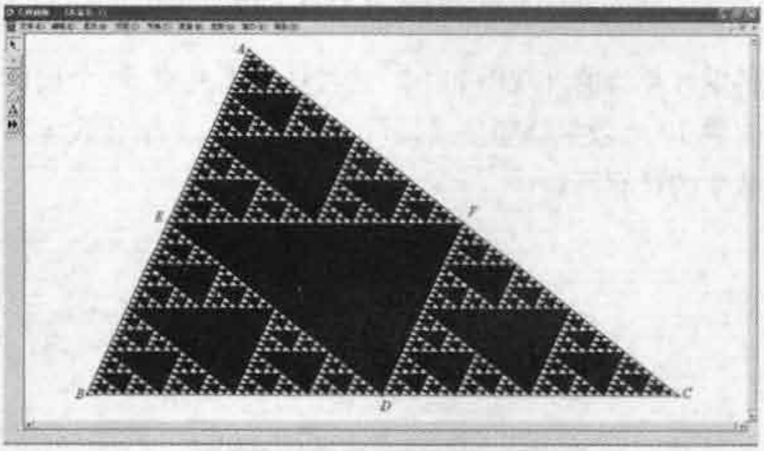
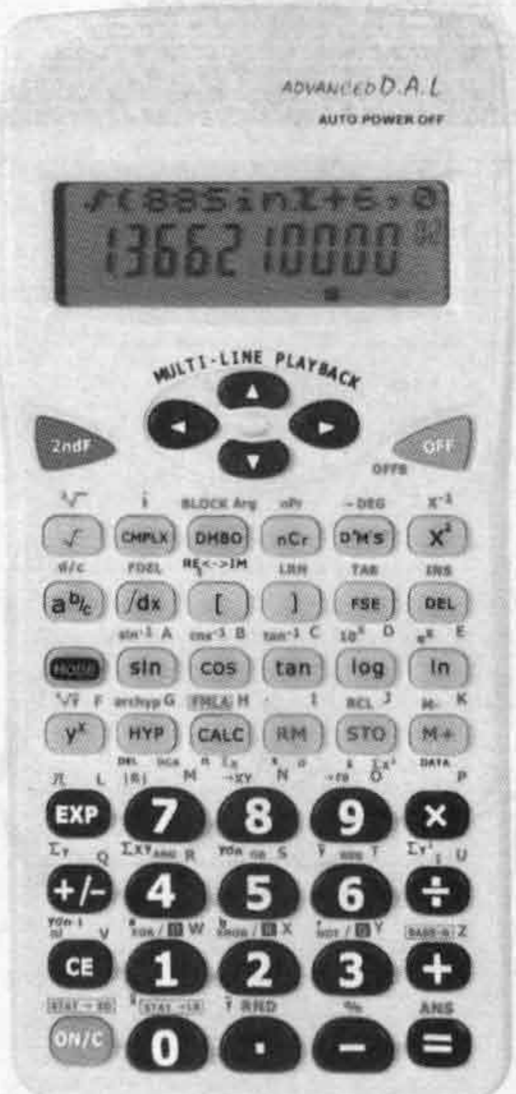


图 13

附录三

计算器使用方法简介

某品牌科学计算器的外观图如下．这种计算器共有 50 个按键，具有科学计算功能，内置 10 个数学物理公式，可以自行输入 5 个公式．双行显示，能够解决中学数学的计算问题．



计算器操作简介

1. 打开或关闭计算器

(1) 按下 ON/C ，打开计算器.

(2) 按下 OFF 关闭计算器，清除当前显示以及操作.

(3) 按下 2ndF OFF (OFFB)，将当前显示以及操作储存后关机.（注：OFFB 表示 OFF 的第二个功能，在计算器面板上标在 OFF 的左下方. 计算器按键的第二功能一般都标在按键的下方或上方.）

(4) 不进行任何操作，大约 8 分钟之后自动关闭.

2. 修改或编辑输入的内容

为叙述方便，我们把数字、符号（包括函数符号）统称为字符.

(1) 光标的移动. 用 ◀ 和 ▶ 移动光标. 可以看到光标在某一位置不断闪烁，我们把该字符称为当前字符.

(2) 删除、更改字符. 按 DEL 删除当前字符；按字符键更改当前字符.

(3) 插入字符. 按 2ndF DEL ，光标变成“[]”，再输入字符，则在当前字符前插入新的字符，并可以连续插入；取消办法是再移动光标.

3. 清除输入的内容

(1) 如果只是要清除显示的内容，则按 ON/C ，清零. 但独立储存器（M）内的内容和变量的内容没有清除.

(2) 如果要清除独立储存器（M）内的内容，则先按 RM ，显示独立储存器（M）内的值，然后按 2ndF M+ （M−），清除独立存储器和清除显示图标“M”.

(3) 如果要清除变量 A，B，C，D，…的内容，则按 0 STO 以及变量对应的按键，例如清除存储器 C，则按 0 STO C .

(4) 如果按 RESET（在计算器背面），则所有内容全部清除.

4. 调用以前输入的公式

用 ▲ ▼ 调用以前输入的公式，并可以对该公式进行编辑和运算.

5. 计算模式的转换

希望选择的计算模式	操作方法	屏幕显示
一般模式，用于算术运算和函数计算	连续按 2ndF ON/C 可实现计算模式的转换	无
单变量统计模式		SD
回归计算模式	按 2ndF 0 （STAT→LR）	LR

6. 角度单位的转换

希望选择的角度单位	操作方法	屏幕显示
角度制	2ndF 1 （XOR/D）	D
弧度制	2ndF 2 （XNOR/R）	R
梯度	2ndF 3 （NOT/G）	G

7. 数值记数法的转换

希望设定的记数法	操作方法	屏幕显示
固定小数点	连续按 FSE 可实现数值记数法的转换.	FIX
科学记数法		SCI
工程记数法		ENG

如果要清除数值记数法的显示，即屏幕显示 FIX，SCI 或 ENG，反复按 FSE，直到屏幕不再显示上面的字符.

8. 指定小数点的位数

操作方法是按 FSE 一次或多次，进入固定小数点记数模式 FIX 或 SCI 或 ENG 状态之一，然后再按 2ndF FSE （TAB） n （其中 n 是将要被设定的小数位数，它可以取 0 至 9 中的任意一个整数），则屏幕显示小数点后的位数是 n 位.

9. 科学记数法的输入方法

例如，输入 5×10^2，则操作方法是按 5 EXP 2. EXP 表示以 10 为底的幂.

10. 分数的输入，假分数和带分数的转换

（1）分数输入.

例如：输入分数$\frac{2}{5}$，操作方法是按$\boxed{2}\boxed{a^b/c}\boxed{5}$，则屏幕显示“2⌟5”，代表含义就是$\frac{2}{5}$.

输入分数$\frac{7}{5}$，操作方法是按$\boxed{7}\boxed{a^b/c}\boxed{5}$，则屏幕显示“7⌟5”，代表含义就是$\frac{7}{5}$.

输入分数$3\frac{2}{5}$，操作方法是按$\boxed{3}\boxed{a^b/c}\boxed{2}\boxed{a^b/c}\boxed{5}\boxed{=}$，则屏幕显示“3⌟2⌟5”，代表含义就是$3\frac{2}{5}$.

（2）假分数和带分数的转换.

操作方法是按$\boxed{\text{2ndF}}\boxed{a^b/c}$（d/c）进行转换.

例如：如果想把$3\frac{2}{5}$转换成假分数，则按$\boxed{3}\boxed{a^b/c}\boxed{2}\boxed{a^b/c}\boxed{5}\boxed{=}\boxed{\text{2ndF}}\boxed{a^b/c}$（d/c），屏幕显示“17⌟5”，代表含义就是$\frac{17}{5}$.

11. 公式记忆功能

此计算器可以存储5个自己编写的公式.

（1）存储公式.

第一步，输入公式. 要输入字母A，按$\boxed{\text{MODE}}\boxed{A}$，其他类似.

第二步，按$\boxed{\text{2ndF}}\boxed{)}$（LRN）存储公式.

例如：一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的求根公式之一：$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

按$\boxed{\text{ON/C}}$屏幕清零. 按$\boxed{(}\boxed{+/-}\boxed{\text{MODE}}\boxed{B}\boxed{+}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{(}\boxed{\text{MODE}}\boxed{B}\boxed{x^2}\boxed{-}\boxed{4}\boxed{\text{MODE}}\boxed{A}\boxed{\text{MODE}}\boxed{C}\boxed{)}\boxed{)}\boxed{\div}\boxed{(}\boxed{2}\boxed{\text{MODE}}\boxed{A}\boxed{)}$. 按$\boxed{\text{2ndF}}\boxed{)}$（LRN）存储公式.

（2）使用公式.

第一步，连续按$\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{CALC}}$（$\boxed{\text{FMLA}}$），直到屏幕上显示出要使用的公式.

第二步，按$\boxed{\text{CALC}}$，给第一个变量赋值，按$\boxed{=}$，再给第二个变量赋值，按$\boxed{=}$，直到给所有的变量赋完值后，显示出计算结果.

例：求方程 $x^2-173x+5\,760=0$ 的最大的根.

连续按$\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{CALC}}$（$\boxed{\text{FMLA}}$），直到屏幕上显示出求根公式. 按$\boxed{\text{CALC}}$后屏幕显示“B?”，输入-173，按$\boxed{=}$，屏幕显示“A?”，输入 1，按$\boxed{=}$，屏幕显示“C?”，输入5 760，按$\boxed{=}$，屏幕显示“128”，得到方程最大的根.

(3) 删除公式.

连续按$\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{CALC}}$（$\boxed{\text{FMLA}}$），直到屏幕上显示出要删除的公式，按$\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\int \text{dx}}$（FDEL）删除所编辑的公式.

注意：计算器内置的公式不能删除.

练习 1

计算并比较下列各组数的大小：

(1) 2^3与3^2；3^4与4^3；4^5与5^4；5^6与6^5；6^7与7^6；

(2) 你能比较 $2\,006^{2\,007}$ 与 $2\,007^{2\,006}$ 的大小吗?

(3) 由 (1) (2) 我们能归纳出 $n^{n+1}>(n+1)^n$（$n\geqslant 3$，且 $n\in\mathbf{N}$）的结论.

练习 2

数学中有一个以斐波那契（Leonardo Fibonacci，约 1175—约 1240）命名的著名数列

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\cdots$$

从第三项开始每一项都是其前两项之和. 这个数列是斐波那契在他的《算盘书》的“兔子问题”中提出的. 在问题中他假设如果一对兔子每月能生一对小兔（一雄一雌），而每对小兔在它出生后的第三个月，又能开始生小兔，如果没有死亡，由一对刚出生的小兔开始，一年后一共会有多少对兔子？将问题一般化后答案就是，第 n 个月时的兔子数就是斐波那契数列的第 n 项.

把斐波那契数列相邻两项之比作为一个新数列的项，我们得到

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \frac{89}{144},\ \frac{144}{233},\ \cdots,$$

请你用计算器分别计算出各项的近似值，精确到 0.001，你能发现随着项数的增加，它的值接近什么数吗？

答：发现接近 0.618. 这是非常有名的黄金分割比. 斐波那契数列和黄金分割比有很密切的联系. 1730 年法国数学家棣莫弗给出其通项表达式 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，19 世纪初另一位法国数学家比内首先证明这一表达式，现在称之为比内公式. 1963 年美国还创刊《斐波那契季刊》来专门研究斐波那契数列.

请你再用计算器计算一下$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，你又发现什么结论？是不是很神奇？

练习 3

我们定义一个运算规则：如果一个整数是偶数，我们将该数除以 2，得到下一个数，如果某个数是奇数，我们将该数乘以 3 加 1，得到下一个数.

现在你随意给出任意一个整数，用计算器按上面的运算规则进行计算，直到结果小于 5，再进行几次计算之后，你能发现什么规律？这可是迄今为止数学家都没有证明出来的结论呢.

比如说我们先取 5，首先我们得到 $3\times5+1=16$，然后是 $16\div2=8$，接下去，是 4，2 和 1，由 1 我们又得到 4，于是我们就陷在 $4\to2\to1$ 这个循环中了.

再举个例子，最开始的数取 7，我们得到下面的序列

$7\to22\to11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$，

这次复杂了一点，但是我们最终还是陷在 $4\to2\to1$ 这个循环中.

练习 4

猜年龄

有个人今年岁数的立方是个四位数，岁数的四次方是个六位数，这两个数，正好把十个数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 全都用上了，不重不漏.

你能猜出他的年龄吗？

解答：通过计算器计算不难发现，21 的立方是四位数，而 22 的立方已经

是五位数了，所以他的年龄最多是 21 岁；同样道理，18 的四次方是六位数，而 17 的四次方则是五位数了，所以他的年龄至少是 18 岁. 这样，他的年龄只可能是 18，19，20，21 这四个数中的一个.

我们把四个数按要求计算一下，20 的立方是 8 000，有 3 个重复数字 0，不合题意。同理，19 的四次方等于 130 321，21 的四次方等于 194 481，都不合题意。最后只剩下一个 18，验算一下，18 的立方等于 5 832，四次方等于 104 976，恰好“不重不漏”地用完了十个阿拉伯数字.

所以这个人的年龄是 18 岁.

附录四

本书常用的数学符号

数学符号	例子	读法以及含义
$\in$	$x\in A$	x 属于 A，x 是集合 A 中的一个元素
$\notin$	$y\notin A$	y 不属于 A，y 不是集合 A 中的一个元素
$\{,\cdots,\}$	$\{a, b, \cdots, n\}$	由各个元素 a，b，…，n 构成的集合
$\{\mid\}$	$\{x\in A \mid p(x)\}$	使命题 $p(x)$ 是真命题的 A 中各个元素构成的集合
$\varnothing$		空集
$\mathbf{N}$		自然数集，非负整数集
$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$		正整数集
$\mathbf{Z}$		整数集
$\mathbf{Q}$		有理数集
$\mathbf{R}$		实数集
$\subseteq$	$A\subseteq B$	A 包含于 B，A 是 B 的子集
$\nsubseteq$	$A\nsubseteq B$	A 不包含于 B，A 不是 B 的子集
$\subsetneqq$	$A\subsetneqq B$	A 真包含于 B，A 是 B 的真子集
$\cap$	$A\cap B$	A 和 B 的交集
$\cup$	$A\cup B$	A 和 B 的并集
$\complement$	$\complement_U A$	A 在 U 中的补集
$\Rightarrow$	$p\Rightarrow q$	p 推出 q，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件
$\Leftrightarrow$	$p\Leftrightarrow q$	p 与 q 等价，p 与 q 互为充要条件
$>$	$a>b$	a 大于 b
$<$	$a<b$	a 小于 b
$\geqslant$	$a\geqslant b$	a 大于或等于 b
$\leqslant$	$a\leqslant b$	a 小于或等于 b
$+\infty$		正无穷大
$-\infty$		负无穷大

续表

数学符号	例子	读法以及含义
$\lvert\ \rvert$	$\lvert a \rvert$	a 的绝对值
Δ	$\Delta=b^2-4ac$	Δ 是大写的希腊字母，读作"delta"，通常表示一元二次方程的判别式
$[,]$	$[a, b]$	$\mathbf{R}$ 中从 a 到 b 的闭区间
$(,)$	(a, b)	$\mathbf{R}$ 中从 a 到 b 的开区间
$[,)$	$[a, b)$	$\mathbf{R}$ 中从 a（含在内）到 b 的右半开区间
$(,]$	$(a, b]$	$\mathbf{R}$ 中从 a 到 b（含在内）的左半开区间
f	$f(x)$	对应关系 f 是集合 A 上的一个函数 $f(x)$，$x\in A$
Δx	$\Delta x=x_2-x_1$	表示自变量 x 的增量
Δy	$\Delta y=y_2-y_1$	表示函数值 y 的增量
$y_{\max}$		表示函数的最大值
$y_{\min}$		表示函数的最小值
$\log$	$\log_a N$	以 a 为底 N 的对数
$\lg$	$\lg N$	常用对数，底数为 10 的对数，即 $\log_{10} N$
$\ln$	$\ln N$	自然对数，以 $e=2.718\ 28\cdots$ 为底的对数，即 $\log_e N$
$\{a_n\}$		整个数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$，其中 $n\in\mathbf{N}_+$
a_n		数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项，其中 $n\in\mathbf{N}_+$
S_n		数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，即 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$