中等职业教育规划教材

数 学

第三册

教师教学用书

山东省职业教育教材编写组 编著

人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

中等职业教育规划教材数学第三册教师教学用书 / 山东省职业教育教材编写组编著．—3版．—北京：人民教育出版社，2012（2019.7重印）

ISBN 978-7-107-20454-8

Ⅰ．①中… Ⅱ．①山… Ⅲ．①数学课—中等专业学校—教学参考资料 Ⅳ．①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第036386号

中等职业教育规划教材 数学 第三册 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编：100081）

网 址 http://www.pep.com.cn

经 销 全国新华书店

印 刷 山东汇文印务有限公司

版 次 2010年6月第3版

印 次 2019年7月第12次印刷

开 本 787毫米×1 092毫米 1/16

印 张 11.5

字 数 233千字

定 价 15.90元

说　明

本册教师教学用书是根据《山东省中等职业教育数学课程标准》和《山东省中等职业教育数学教科书》第三册编写的. 本册教师教学用书由山东省教学研究室组织编写.

本套教师教学用书编写的原则是：

1. 努力体现中等职业教育数学教材编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

2. 明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成“课程标准”中规定的教学任务.

3. 指出相关内容的教学重点、难点，并对教学方法提出一些建设性的意见，帮助教师克服教学中的一些困难.

4. 努力吸取中等职业学校的数学教师优秀的教学经验，使本书能更好地为教学服务.

这本教学参考书每章包括知识框图；教学要求；教材分析和教学建议；参考教案；习题的答案、提示和解答等五部分.

知识框图，直观地揭示了各知识点之间的联系，主要是为了让教师在整体上对本章的知识结构以及各知识点之间的关系有一个整体的认识.

教学要求主要是依据《山东省中等职业学校数学课程标准》中的相关要求确定的. 教材编写时，充分考虑学生的不同需求，为学生学习不同专业的专业课、个性化发展提供了较为宽泛的选择空间. 本教材每章的卷首语、名人名言概述本章的主要内容及学习本章的意义，激励学生不断进取、不断创新；每节的引入问题，是本章知识的增长点，是本节核心内容或研究方法的出发点，激发学生探究新知的欲望、引发学生的思考；增加“想一想”“试一试”“议一议”等栏目来引导学生的思维，使之不断向深层次发展，达到较高的教学要求；习题、练习题的设置立足于“起点低、台阶密、坡度小、过程简、思想高”；每章最后的阅读与实践能够使学生了解数学发现的历程、品尝数学大师们的甘苦、体验做趣味数学题的乐趣.

在教材分析和教学建议中，首先分析了本章的内容结构和地位，以及知识间的递进关系，指出本章内容的重点、难点；其次，给出了本章总体的教学建议和课时分配建议，最后分节进一步分析教学内容，并针对各节内容给出了较为具体的教法与学法建议.

为了帮助教师理解教材的编写意图，更加卓有成效地进行教学，每章都给出了教学案例供教师参考.

每章给出了练习与习题的参考答案与提示：简单题只给答案；中等难度只给提示；难题给出解答——通常只给出常规解法.

第三册教材共分十章，是职业模块和拓展模块的主要内容．下面就本册中如何贯彻这套教材的指导思想加以说明，以帮助教师理解教材．

其中，第十二章学习三角计算及其应用，第十三章学习圆锥曲线与方程，第二十一章学习概率分布初步，这三章为拓展模块的内容，为学生进一步学习相关知识打下基础，同时为实际应用提供了数学工具；其余各章均为职业模块的内容，是学生学习相关专业知识的必要基础，不同的专业可以根据专业实际选择不同的章节来教学，为学生专业的发展和个性化发展提供有力的数学支撑．

这套教材，把学习数学的基本思想方法与数学知识放在同样重要的地位．第三册教材涉及的数学思想有：转化思想、函数与方程的思想、分类讨论的思想、数形结合的思想、化归思想等，涉及到的数学方法有：待定系数法、类比法、归纳法、发现探究法、函数关系的建立与研究方法等，教师在教学中要经常有意识地渗透这些基本思想方法，在练习过程中引导学生注意上述方法的应用，使之不断地得到强化与巩固．

在教学中，要贯彻"温故而知新"的原则．中等职业学校贯彻这一原则有一定的困难，但要使学生学好数学，教学中必须切实贯彻之．数学教学对基础知识的要求较高，而中等职业学校学生的数学基础往往较差，为了解决这个矛盾，教材编写主要采取循环上升的方式来贯彻这一原则．又由于单纯复习效果一般较差，对学生的心理也有不利影响，所以，教材采用了在讲新内容的同时，紧密结合新知识复习旧知识．教师在教学中还要根据学生的具体情况，灵活地设计教学方案，以旧引新，以新带旧，努力提高教学质量．

第三册教材知识内容决定了数形结合的思想的运用，三角计算及其应用、圆锥曲线与方程等都利用直角坐标系把数和形紧密结合在一起，基本上做到：有数必有形，有形必有数．华罗庚先生对数形结合在学习数学中的作用作了这样的阐述："数与形本是相倚依，焉能分作两边飞，数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事非，切莫忘，几何代数统一体，永远联系、切莫分离．"这段话精辟地阐述了数与形之间的密切关系和相互作用，为学生理解数学知识提供了良好的方法．

第三册教材的内容比较多，各地各学校可根据本地、本校、本专业的具体情况，有针对性地选择教学相关章节，亦可适当增加课时，拓宽、加深相关内容的学习．

本书由高存明、孙明红主编，副主编为：李励信，陆泽贵，参加编写的还有：王智海、付桂森、刘明远、刘学卫、刘爱武、闫桂明、祁志卫、杜红梅、李长林、李洪泉、李增华、杨杰、杨泽忠、徐刚、栾允、鹿继梅、彭晋顺．

责任编辑：龙正武．

由于编者水平所限，这本教学参考书难免存在一些缺点和错误，恳切希望广大教师、教研人员和有关专家提出宝贵意见，以便再版时修改、订正．

山东省中等职业学校数学教材编写组

2007年4月

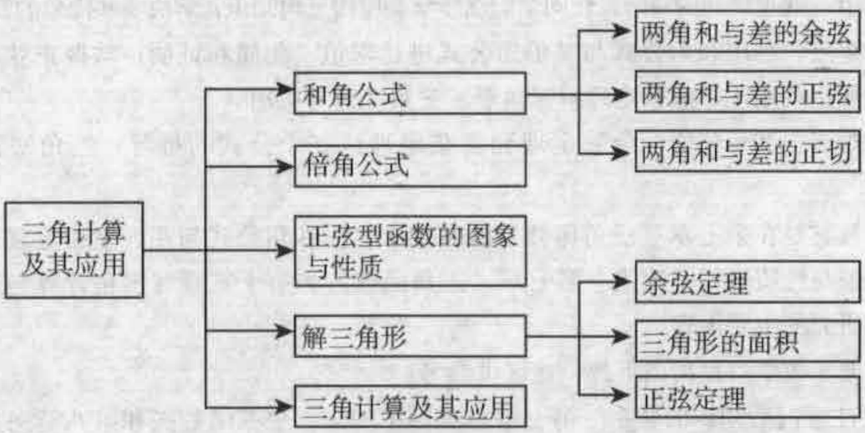
目　录

第十二章　三角计算及其应用

思想火花：

学习任何知识必须先学数学. 数学在科学的等级中是最高级的，不论对普通教育还是专门教育，数学教育乃是任何教育的起点.

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 了解两角和的余弦公式的推导，会用两角和（差）的余弦、正弦和正切公式求值、化简与证明.

2. 掌握二倍角公式，并能运用它们解决一些简单的问题.

3. 掌握正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质，会用“五点法”画出它的图象.

4. 了解余弦定理与正弦定理的推导，会用这两个定理解三角形，会求三角形的面积.

5. 逐步学会用三角知识解决实际应用问题.

III 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：和角公式、倍角公式、正弦型函数的图象与性质、余弦定理、正弦定理、三角形的面积公式及三角计算与应用. 本章共分五节.

第一节，首先利用向量的知识证明了两角和的余弦公式，接着推导出两角差的余弦公式；利用两角和的余弦公式推出两角和、差的正弦公式；利用同角三角函数关系式和两角和的正、余弦公式推导出两角和、差的正切公式.

第二节，利用两角和的正弦、余弦和正切公式推导出二倍角的正弦、余弦和正切公式；通过大量例题的讲解及练习题目，让学生掌握这些公式的简单应用.

第三节，在正弦函数的图象与性质的基础上，研究正弦型函数的图象和性质.

第四节，利用向量法推导出余弦定理. 利用三角函数的定义和坐标法，推导出三角形的面积公式. 利用三角形的面积公式推导出了正弦定理. 通过例题讲解，让学生逐步掌握利用正、余弦定理解三角形的方法，并学会用公式求三角形的面积.

第五节，通过例题的讲解，让同学们逐步学会应用三角知识，解决一些简单的实际问题.

本章重点：利用和角公式与二倍角公式进行求值、化简和证明；掌握正弦型函数的图象与性质；利用正、余弦定理解三角形；三角计算与应用.

本章难点：和角公式、余弦定理和正弦定理这三个公式的推导；三角知识的综合应用.

本章教材是在第七章《三角函数》的基础上，对和角公式与正、余弦定理、正弦型函数的图象与性质进行了阐述. 第七章《三角函数》和第十二章《三角计算与应用》是三角学所研究的主要内容.

为了便于教学，提出以下教学建议供参考：

1. 要注意前后知识的联系. 第七章单位圆中的正、余弦函数线和第八章向量内积的知识在本章多处用到. 例如，两角和的余弦公式推导与余弦定理推导等.

2. 本章所有公式与定理的推导都只作一般性的了解，不作过高的要求. 把公式与定理的应用作为教学重点，让学生在应用的过程中逐步掌握公式、定理和性质.

本章教学约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

12.1 和角公式	
12.1.1 两角和与差的余弦	2 课时
12.1.2 两角和与差的正弦	2 课时
12.1.3 两角和与差的正切	1 课时
12.2 倍角公式	1 课时
12.3 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质	2 课时
12.4 解三角形	

12.1　和角公式

和角公式也可以看作是广义的诱导公式．它解决的主要问题是，已知 α，β 的三角函数，如何求 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha-\beta$ 的三角函数．

12.1.1　两角和与差的余弦

1. 教材在证明两角和的余弦公式之前，设计了一个简单问题：验证 $\cos(60^\circ+30^\circ)$ 与 $\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$ 是否相等．通过学生自己验证，从而说明在一般情况下，$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$．而 $\cos(\alpha+\beta)$ 与 α 和 β 的三角函数之间存在怎样的关系？留下悬念，激发学生的求知欲望．

2. 因为两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 揭示了它们的长度、夹角及向量投影数量之间的内在关系，所以我们可以用向量的内积来证明和角公式．

3. 本节公式证明的难点是，如何让学生明白等式 $\alpha+\beta=\pm\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，教学中可以引导学生作如下分析．

分两种情况讨论：

(1) 如果将角 $-\beta$ 的终边按逆时针方向旋转到角 α 的终边位置时，所成的最小正角等于 $\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle$（如图 12-1），则

$$\alpha+\beta=\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle+2k\pi(k\in\mathbf{Z});$$

(2) 如果将角 $-\beta$ 的终边按逆时针方向旋转到角 α 的终边位置时，所成的最小正角等于 $2\pi-\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle$（如图 12-2），则

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=2\pi-\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle+2k\pi\\&=-\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle+2(k+1)\pi(k\in\mathbf{Z}).\end{aligned}$$

综合 (1)(2) 可知，$\alpha+\beta=\pm\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$．

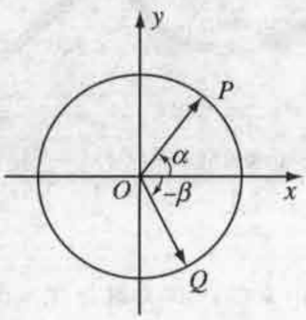


图 12-1

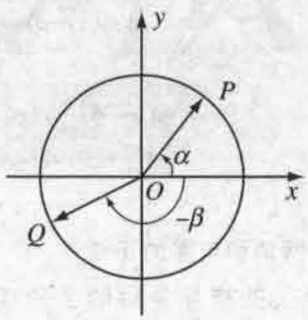


图 12-2

4. 公式 $C_{\alpha+\beta}$ 具有一般性，教材为了使学生容易理解，将角 α 和 $-\beta$ 都画上了箭头，事实上，公式适用于任意角. 这是因为等式 $\angle QOP=\angle QOx+\angle xOP$ 对于任意角 α，β 都成立，因此公式 $C_{\alpha+\beta}$ 具有一般性. 因而由公式 $C_{\alpha+\beta}$ 推导出的其他公式 $C_{\alpha-\beta}$，$S_{\alpha+\beta}$，$S_{\alpha-\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha-\beta}$，也具有一般性.

5. 下面给出公式 $C_{\alpha+\beta}$ 的另外两种证明方法，仅供教师参考.

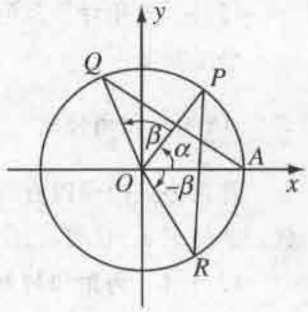


图 12-3

证法一：以坐标原点为圆心作单位圆，并设单位圆与 x 轴的正半轴交于点 $A(1, 0)$（如图 12-3）. 以 Ox 为始边作 $\angle xOP=\alpha$，$\angle xOQ=\alpha+\beta$，$\angle xOR=-\beta$. 则点 P 与单位圆的交点坐标是 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$OQ$ 与单位圆的交点坐标是 $Q(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$OR$ 与单位圆的交点坐标是 $R(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$.

易证 $\triangle QOA\cong\triangle POR$，则 $|QA|=|PR|$，于是，得

$$\sqrt{[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{[\cos\alpha-\cos(-\beta)]^2+[\sin\alpha-\sin(-\beta)]^2},$$

两边平方并整理，得

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta),$$

由此得到

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

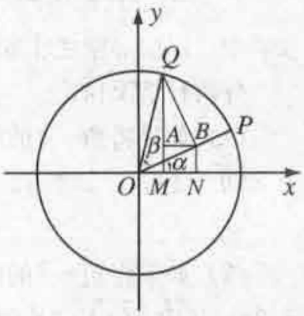


图 12-4

证法二：以坐标原点为圆心作单位圆（如图 12-4）. 作 $\angle xOP=\alpha$，$\angle POQ=\beta$，过点 Q 作 $QM\perp x$ 轴于点 M，$QB\perp OP$ 于点 B；过点 B 作 $BN\perp x$ 轴于点 N，作 $BA\perp QM$ 于点 A.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBQ$ 中，$|OB|=|OQ|\cos\beta=\cos\beta$，而且

$$|BQ|=|OQ|\sin\beta=\sin\beta.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle OMQ$ 中，$|OM|=|OQ|\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ONB$ 中，$|ON|=|OB|\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BAQ$ 中，$\angle AQB=\alpha$，又

$$|AB|=|BQ|\sin\alpha=\sin\alpha\sin\beta,$$

即 $MN=\sin\alpha\sin\beta$.

因为 $|OM|+|MN|=|ON|$，所以 $|OM|=|ON|-|MN|$，即

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

于是

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos[\alpha+(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

12.1.2 两角和与差的正弦

1. 公式 $S_{\alpha+\beta}$ 的推导是借助于公式 $C_{\alpha+\beta}$ 推导出来的，其关键是把 $\sin(\alpha+\beta)$ 化为

$-\cos\left[(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\right]$. 这里用到诱导公式 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$ 和 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$. 建议教师在证明公式 $S_{\alpha+\beta}$ 之前先复习这两个公式.

2. 例题分析：

例 4 说明，如果一个角可以化成两个特殊角的和（或差），就可直接应用这组公式求出这个角的正弦值.

例 5 证明：

(1) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$;　　　　(2) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

这两个公式也可以利用单位圆中的三角函数线证明. 设角 α，$\pi-\alpha$ 的终边与单位圆的交点分别是点 P，P'，则点 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 $P'(\cos(\pi-\alpha), \sin(\pi-\alpha))$. 又因为这两个角的终边关于 y 轴对称，所以 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

例 6 是和角公式的实际应用，它解决的是平面中的旋转问题. 解答此类题目应抓住以下两点：

(1) 旋转时，其旋转半径不变，即 $|OP'|=|OP|=r$;

(2) 旋转后，有向线段的终点坐标改变，而求旋转后有向线段的终点坐标 P' 的坐标 (x', y') 则是利用三角函数定义求得的：$\cos(\alpha+45^\circ)=\frac{x'}{5}$，$\sin(\alpha+45^\circ)=\frac{y'}{5}$. 因此可说，解答此题的关键是深刻理解三角函数的定义.

例 7 的 $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$ $\left(其中 \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ 可以当作公式运用. 函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值是 $\sqrt{a^2+b^2}$，最小值是 $-\sqrt{a^2+b^2}$，周期是 2π.

3. 导出两角和与差的三角函数后，应对各公式间的异同进行分析和对比，牢记其特点，并要求学生：

(1) 不但能熟练地把公式从左边化到右边，还要能熟练地把公式从右边化到左边，以培养学生的逆向思维能力.

例 1　化简　$\sin 20^\circ\cos 50^\circ-\cos 20^\circ\sin 50^\circ$.

解　$\sin 20^\circ\cos 50^\circ-\cos 20^\circ\sin 50^\circ$

$=\sin(20^\circ-50^\circ)$

$=\sin(-30^\circ)$

$=-\frac{1}{2}$.

(2) 通过练习，加深对公式中 α，β 的任意性的理解.

例 2　化简　$\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y$.

解　$\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y$

$=\sin[(x-y)+y]$

$=\sin x.$

（3）深刻理解和角公式与诱导公式之间的关系：一般地说，和角公式是诱导公式的推广，诱导公式是和角公式的特例.

12.1.3 两角和与差的正切

1. 两角和的正切公式 $T_{\alpha+\beta}$ 的教学，应启发学生将 $\tan(\alpha+\beta)$ 的结果怎样用 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 来表示. 如果联想到公式 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$，而 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$，就容易想到此式的分子和分母为什么要同除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 了.

公式 $T_{\alpha\pm\beta}$ 导出后，应使学生明确公式成立的条件：α，β 与 $\alpha\pm\beta$ 都不能等于 $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 但有的题目不能直接用 $T_{\alpha\pm\beta}$，却可以用其他方法去做.

例如，化简 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)$.

因为 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，$\tan\dfrac{\pi}{2}$ 不存在，所以不能用 $T_{\alpha+\beta}$ 来化简. 但可以转化为

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}=\frac{\cos\beta}{-\sin\beta}=-\cot\beta.$$

又例如求 $\tan 120°$ 的精确值. 一般把 $\tan 120°$ 化为 $\tan(180°-60°)$ 后再利用公式展开求值，而切不可把 $\tan 120°$ 化为 $\tan(90°+30°)$ 后利用和角公式展开求值，理由是 $\tan 90°$ 不存在.

2. 两角和与两角差的正弦、余弦和正切公式之间的内在联系如下表所示.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix}S_{\alpha+\beta}\\ C_{\alpha+\beta}\end{matrix}} \arrow[r, "\text{以}-\beta\text{代}\beta"] \arrow[d, "\text{相除}"'] & \boxed{\begin{matrix}S_{\alpha-\beta}\\ C_{\alpha-\beta}\end{matrix}} \arrow[d, "\text{相除}"'] \\
\boxed{T_{\alpha+\beta}} \arrow[r, "\text{以}-\beta\text{代}\beta"] & \boxed{T_{\alpha-\beta}}
\end{tikzcd}$$

12.2 倍角公式

1. 在和角公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$ 和 $T_{\alpha+\beta}$ 中，令 $\beta=\alpha$，就可得到 $S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$ 和 $T_{2\alpha}$. 这就是说，二倍角的三角函数公式是两角和的三角函数公式的特殊情况.

（1）在公式 $S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$ 中，角 α 可以取任意值，但在公式 $T_{2\alpha}$ 中，只有当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ 和 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时才成立，否则不成立. 因为当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\tan 2\alpha$ 不存在；当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\tan\alpha$ 不存在.

(2) 教学时，应通过练习，使学生理解“二倍角”概念的相对性，不单 2α 是 α 的二倍角，其他像 4α 与 2α，6α 与 3α，$\frac{\alpha}{2}$ 与 $\frac{\alpha}{4}$，α 与 $\frac{\alpha}{2}$ 等都是二倍的关系.

(3) 逆向运用二倍角公式是本节的难点之一，应加强这方面的训练，使学生熟练使用. 例如，可以进行如下练习：

$$\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\sin 4\alpha;$$

$$4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}=2\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\tan 30^\circ;$$

$$\cos^2 75^\circ-\sin^2 75^\circ=\cos 150^\circ.$$

(4) 凡是用单角 α 的三角函数来表示 3α，4α 等的三角恒等式都叫做倍角公式. 本教材既未涉及三倍角、四倍角公式的练习，也未涉及半角公式的练习，在教学过程中，不要补充这方面的练习题目.

2. 和（倍）角公式这两节主要例、习题类型：

(1) 直接用公式求两角和或两角差的三角函数，要求学生具有把一个非特殊角化为两个特殊角的和或差的能力.

(2) 逆用两角和或差（包括倍角）三角函数公式，将一个三角函数代数式化简成一个角的三角函数式.

(3) 和角（包括倍角）公式与同角三角函数关系式的综合运用.

12.3 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质

1. 通过作函数 $y=A\sin x$，$y=\sin\omega x$，$y=A\sin\omega x$，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，并与函数 $y=\sin x$ 的图象加以比较，帮助学生理解 A，ω，φ 的意义以及它们对函数图象的影响. 这样做也有利于学生学习函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

2. 为了充分利用图象，引导学生观察、比较和归纳，让学生信服函数 $y=A\sin x$，$y=\sin\omega x$，$y=A\sin\omega x$，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象之间的关系，讲解此小节的内容时，作图过程不要太快，作图数量不宜太少，以便提高学生画图象的能力.

3. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象在精确度要求不高的情况下，可用“五点法”画出，这里的五点是 $(x_1, 0)$，(x_2, A)，$(x_3, 0)$，$(x_4, -A)$，$(x_5, 0)$，其中 x_1 由 $\omega x_1+\varphi=0$ 求得，而 $x_i=x_{i-1}+\frac{T}{4}$ $(i=2, 3, 4, 5$，T 为周期). 要讲清 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象应由点 (x, y) 确定.

教材在用“五点法”作正弦型函数在长度为一个周期上的图象时，可直接列表如下.

x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi-\varphi}{\omega}$	$\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi-\varphi}{\omega}$
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	A	0	$-A$	0

要特别教给学生列表的方法与技巧．最好是先列第二行，再列第三行，最后列出第一行．第一行的对应值 $x_i(i=1,2,3,4,5)$，还可以通过分别解五个方程

$$\omega x_1+\varphi=0,\ \omega x_2+\varphi=\frac{\pi}{2},\ \omega x_3+\varphi=\pi,\ \omega x_4+\varphi=\frac{3\pi}{2},\ \omega x_5+\varphi=2\pi$$

而得到．从而，$x_1=-\frac{\varphi}{\omega}$，$x_2=\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$，$x_3=\frac{\pi-\varphi}{\omega}$，$x_4=\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$，$x_5=\frac{2\pi-\varphi}{\omega}$．

4. 比较函数 $y=\sin x$ 与 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的关系时，充分利用了平移变换知识，注意在这方面积累教学经验．

5. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质可结合图象，仿照 $y=\sin x$ 进行讲解，重点讲最大值、最小值和周期，其余的要求可以降低．

6. 例习题类型：

（1）会求正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最大值、最小值和周期．

（2）会用"五点法"作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象．

12.4 解三角形

余弦定理和正弦定理是欧氏空间度量几何的两个重要定理．余弦定理和正弦定理揭示了任意三角形中边和角之间的关系，它们是整个三角测量学的基础．

12.4.1 余弦定理

1. 余弦定理是勾股定理的推广．教材使用向量的知识来证明这个定理．用向量的知识证明这个定理的关键是把 $|\boldsymbol{a}|^2$ 表示成 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 的形式及把 $\boldsymbol{a}$ 表示成 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 的形式．该方法再一次体现了向量是研究数学问题的有利工具．

下面给出余弦定理的另一种证明方法，供教师参考．

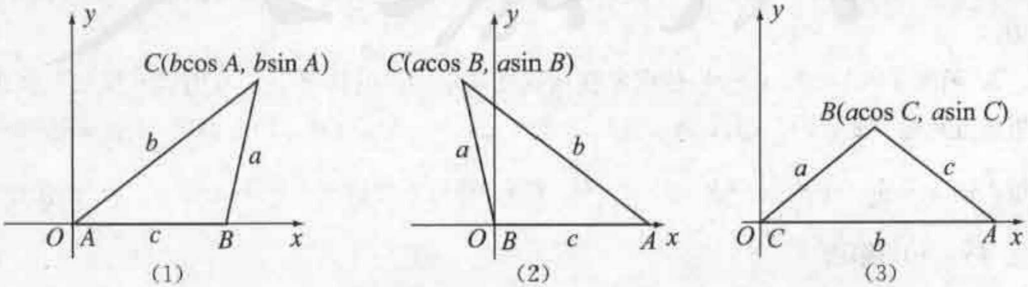


图 12-5

如图 12-5 (1)，以 A 为坐标原点，射线 AB 的方向为 x 轴的正方向建立直角坐标系 xOy，则点 B 的坐标是 $(c, 0)$，点 C 的坐标是 $(b\cos A, b\sin A)$.

因为 $|BC|=a$，所以

$$\sqrt{(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2}=a,$$

两边平方，得

$$(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2=a^2,$$

化简整理，得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

如果像图 12-5 (2)、12-5 (3) 那样建立直角坐标系，同样可证其他二式.

2. 本节例、习题分析：

(1) 直接应用公式解三角形；

(2) 求三角形的最大（小）角；

(3) 判断三角形的形状；

判断三角形的形状一般是指判断三角形是锐角三角形、直角三角形还是钝角三角形. 例如，已知三角形的三边，如何确定三角形的形状？解答这类题目的一般步骤是：ⅰ. 确定三角形的最大边；ⅱ. 设三角形的最大边所对的角为 α；ⅲ. 根据余弦定理，求出 $\cos\alpha$ 的值；ⅳ. 根据 $\cos\alpha$ 值的符号，确定 α 是锐角、直角还是钝角，从而断定三角形的形状. $\cos\alpha>0$，$\cos\alpha=0$ 和 $\cos\alpha<0$ 分别对应着 α 是锐角、直角和钝角，所对应的三角形是锐角、直角和钝角三角形. 这类题目实质上与“求三角形的最大角”是同一类题目，但它不一定要求出角 α 的具体值.

(4) 利用余弦定理证明恒等式.

以上各类题目都是比较简单的，要求学生会做. 教学过程中不要再补充难度较大的练习题.

12.4.2　三角形的面积

1. 三角形的面积公式是用坐标法证明的，其证明的关键是利用三角函数的定义确定 $C(b\cos A, b\sin A)$（图 12-5 (1)）. 让学生了解证明方法，要求学生熟练掌握三角形的面积公式.

2. 例、习题分析：

(1) 本节的例 4 及相应的练习题都是已知三角形的两边及其夹角求三角形的面积的基本题，直接套用三角形的面积公式即可求得面积.

(2) 本节的例 5 及相应的练习题是已知三角形的三边求面积的问题. 其计算方法是：ⅰ. 先根据余弦定理求出其中任意一个角的余弦值；ⅱ. 再根据同角的正、余弦值的关系式求出这个角的正弦值；ⅲ. 利用面积公式计算出三角形的面积.

(3) 本节练习 12-7 第 3 题是求平行四边形的面积. 其方法是把求平行四边形的面积转化为求两个全等三角形的面积和. 建议不要补充平行四边形的面积公式.

12.4.3 正弦定理

1. 本小节是利用上一节证明过的三角形面积公式来证明正弦定理的，这样证明比较简单.

2. 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

实际上可以写成三个等式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

它们不是独立的等式，从其中的任意两个等式，都能推出第三个等式. 上面的每一个等式都表示了三角形的两个角和它们所对的边之间的关系，因此，正弦定理可解决两类解斜三角形的问题：ⅰ. 已知两角和一边，求其他两边和一角，这种情况下三角形的解是唯一的；ⅱ. 已知两边和其中一边所对的角，求另一边所对的角，从而可进一步求出剩余的边和角. 应注意这种情况下解的情况：可能有一解，也可能有两解.

3. 本节例、习题分析：

(1) 本小节大部分的例、习题，都是直接利用正弦定理解三角形，要求同学熟练掌握.

(2) 本小节应用正弦定理来解三角形时，没有作一般性讨论，建议教学中不要增加此内容，但要求学生对已知两边和一角的情况，能根据具体的问题判断是一解或两解.

已知两边和其中一边所对的角，怎样判断三角形解的情况？ⅰ. 先根据正弦定理，求出另一边所对角的正弦值；ⅱ. 当正弦值等于 1 时，一解；当正弦值大于零而小于 1 时，求得另一边所对的两角中较大的角与已知角的和大于或等于 180°时有一解，小于 180°时有两解.

(3) 本小节的例 9 和练习 12-8 第 6 题是正弦定理与面积公式的综合应用题，教学时要引导学生仔细分析，找出解题思路.

(4) 利用正弦定理解题时，一般在正弦定理中，令比例系数等于 k，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k,$$

则有

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C,$$

或

$$\sin A=\frac{a}{k},\ \sin B=\frac{b}{k},\ \sin C=\frac{c}{k}.$$

12.5 三角计算及应用举例

1. 三角计算主要应用于解决两类问题：一是测量问题，二是描述和研究具有周期变

化的量.

2. 本节例、习题分析：

(1) 例 1 和本节练习题第 1 题是同种类型题目，就是应用正弦型函数的性质解决实际应用题. 解题的关键是先设置辅助角 θ，然后将矩形的长和宽都用含有 θ 的三角函数式表示，进而再将矩形的面积化成以 θ 为变量的正弦型函数，故可求出矩形面积的最大值. 本题还可应用二次函数或均值定理等知识求解，相比较而言，教材的解法比较简单.

(2) 例 2 是正弦型函数的性质在电工学中的具体应用，建议讲解之前先复习一下有关方面的知识.

(3) 例 3 是测量问题. 解决这类问题的方法是，先将已知条件归结到三角形中，然后根据已知条件，利用正弦定理、余弦定理和三角形面积公式解决所求问题.

(4) 正弦型函数的性质及解三角形的知识在实际生活当中应用比较广泛，教师也可根据本校专业特点，给学生补充一些与专业有关的简单应用题目，并使学生理解和掌握.

Ⅳ 参考教案

课题：12.1.1　两角和与差的余弦（第一课时）

教学目的：

1. 启发学生自己动手证明两角和与差的余弦公式，从而培养推导公式的能力.

2. 掌握公式，并能正确运用它们化简三角函数，求某些角的三角函数值；也为今后证明三角恒等式以及解决其他有关问题打好基础.

3. 培养学生利用旧知识推导、论证新知识的能力；通过估算明确特殊与一般的相互关系，增强灵活运用的能力.

教学重点：

利用两角和与差的余弦公式求值.

教学难点：

两角和与差的余弦公式的推导.

教学方法：

本节课采用归纳、启发探究相结合的教学方法，并运用现代化教学手段进行教学活动. 通过设置问题，引导学生归纳，得到公式，使学生在独立思考的基础上进行合作交流，在思考、探究和交流的过程中获得对公式的理解. 对于这组公式的运用，采取了“教师提出问题、学生积极思考、师生合作解答、共同归纳步骤”的方法进行，并使学生边学边练，及时巩固，深化对公式的理解.

教学过程：

一、提出问题，导入新课

师：第六章我们介绍的是三角函数的定义、图象和性质以及同角三角函数之间的关系. 本章开始讨论两角和的三角函数，如 $\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)$ 等.

现在请大家考虑，如果已知 α，β 的三角函数，怎样求 $\cos(\alpha+\beta)$？

师：请你验证 $\cos(60^\circ+30^\circ)=\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$ 是否成立.

生：以上等式不成立. 即 $\cos(60^\circ+30^\circ)$ 与 $\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$ 不相等.

师：把 $\cos(\alpha+\beta)$ 写成 $\cos\alpha+\cos\beta$ 是想错误地应用乘法对加法的分配律，可是 $\cos\alpha$ 是角 α 的余弦值，并不是“cos”乘 α，不能应用分配律.

这说明，在一般情况下，$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$.

师：$\cos(\alpha+\beta)$ 与 α，β 的三角函数有怎样的关系？

二、讲授新课，边讲边练

以坐标原点为中心作单位圆（图 12-1）. 以 Ox 为始边作角 α 和角 $-\beta$. 它们终边分别与单位圆相交于点 P，Q.

你能写出点 P 和点 Q 的坐标吗？$|\overrightarrow{OP}|$ 和 $|\overrightarrow{OQ}|$ 的大小各是多少？

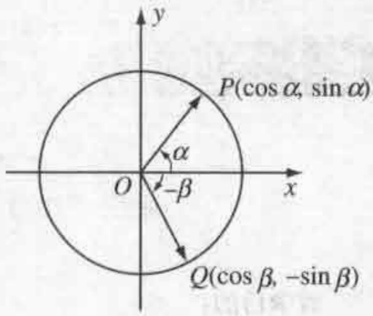


图 12-1

生：（口答点 P 和点 Q 的坐标及 $|\overrightarrow{OP}|$ 和 $|\overrightarrow{OQ}|$ 的大小.）

$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\ -\sin\beta)$，

$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=1$.

师：$\alpha+\beta=\pm\langle\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ}\rangle+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

根据这个结论，$\cos\langle\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ}\rangle$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 相等吗？

生：相等.

师：请教室右半侧的同学根据向量内积的定义计算 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$；请教室左半侧的同学根据向量内积的坐标表示计算 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$.

生：（分成两组分别计算 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的值，并分别选两个同学板书计算过程.）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}&=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\ -\sin\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\cos\langle\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ}\rangle=\cos(\alpha+\beta).$$

得到结论：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.（简记符号 $C_{\alpha+\beta}$）

师：这就是两角和的余弦公式.

同学们根据这个公式计算出 $\cos(60^\circ+30^\circ)$.

生：（学生演算）$\cos(60^\circ+30^\circ)=\cos 60^\circ\cos 30^\circ-\sin 60^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=0.$$

（目的是进一步巩固公式，并理解其中 α，β 的代号意义，掌握实质，为下面证明 $C_{\alpha-\beta}$

做准备.）

师：现在请大家利用 $C_{\alpha+\beta}$ 来推导两角差的余弦公式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\ (\text{简记符号 } C_{\alpha-\beta})$$

（教师提示，由同学自行完成，要求学生默记 $C_{\alpha+\beta}$ 和 $C_{\alpha-\beta}$ 这两个公式，并能总结一下这两个公式的记忆特征. 记忆的关键是其中的“+”，“-”符号.）

师：（讲解例题）

例 1　求 $\cos 150°$ 及 $\cos 15°$ 的精确值.

（教师讲解 $\cos 150°$ 的算法，对于 $\cos 15°$ 的讲解，学生集体口答，教师板书.）

解　(1)
$$\begin{aligned}\cos 150°&=\cos(90°+60°)\\&=\cos 90°\cos 60°-\sin 90°\sin 60°\\&=0\times1-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2};\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\cos 15°&=\cos(45°-30°)\\&=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

生：（做相应的练习，教师巡视，发现问题，当堂指正. 并请两名同学板演.）

求下列各式的精确值：

(1) $\cos 75°$；　　(2) $\cos(-15°)$；

(3) $\cos 80°\cos 20°+\sin 80°\sin 20°$；　　(4) $\cos 20°\cos 25°-\sin 20°\sin 25°$.

师：讲解例 2.

例 2　已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

解　因为 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

于是

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)&=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$=\frac{3-4\sqrt{3}}{10};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$$

$$=-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

生：（学生做相应的练习，教师巡视，发现问题，当堂指正．并请同学板演．）

已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$．

三、课堂总结，巩固提高

两角和与差的余弦公式为

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

并总结所做的题型．

四、布置作业，课外练习

教材习题十二　　1．(3)(4)　　5．

五、板书设计

12.1.1 两角和与差的余弦	
两角和与差的余弦公式：	例 1
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;	例 2
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.	
证明过程	练习

V 习题答案、提示和解答

练习 12-1

1. (1) $-\frac{1}{2}$；　(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$；　(4) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$；

(5) $\frac{1}{2}$；　(6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$．

2. 因为 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}.$$

3. 因为 $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$且 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，所以

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}.$$

因为 $\cos\beta=\frac{5}{13}$且 $\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，所以

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}.$$

于是

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{8}{17}\times\frac{5}{13}-\left(-\frac{15}{17}\right)\times\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$=-\frac{140}{221};$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{8}{17}\times\frac{5}{13}+\left(-\frac{15}{17}\right)\times\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$=\frac{220}{221}.$$

4. (1) 左边$=\cos(\alpha+\alpha)$

$=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$右边；

(2) 左边$=\cos[\alpha+(2k+1)\pi]$

$=\cos\alpha\cos(2k+1)\pi-\sin\alpha\sin(2k+1)\pi$

$=\cos\alpha\times(-1)-\sin\alpha\times 0$

$=-\cos\alpha.$

练习 12-2

1. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$；　(2) $\frac{1}{2}$；　(3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$；　(4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$；

   (5) $\frac{1}{2}$；　(6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. (1) 原式$=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin\beta$；

   (2) 原式$=\sin(\alpha-\beta+\beta)=\sin\alpha$.

3. 因为 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=-\frac{8}{17}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)&=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{8}{17}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{15}{17}\\&=\frac{15-8\sqrt{3}}{34};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)&=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{8}{17}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{15}{17}\\&=-\frac{15+8\sqrt{3}}{34}.\end{aligned}$$

4. $\sin\alpha=\frac{2}{3}$且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

   $\cos\beta=-\frac{3}{4}$且 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{7}}{4}\\&=-\frac{6+\sqrt{35}}{12};\end{aligned}$$

   $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$

$$=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{35}-6}{12}.$$

5. 设$\angle xOP=\alpha$，则$\angle xOP_1=\alpha+120^\circ$，$\angle xOP_2=\alpha-60^\circ$.

因为$|OP|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，所以

$$\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}.$$

设P_1，P_2的坐标分别为$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$.

因为$|OP_1|=|OP|=5$，所以

$$\cos(\alpha+120^\circ)=\frac{x_1}{5},\ \sin(\alpha+120^\circ)=\frac{y_1}{5}.$$

于是

$$\begin{aligned}x_1&=5\cos(\alpha+120^\circ)\\&=5(\cos\alpha\cos 120^\circ-\sin\alpha\sin 120^\circ)\\&=5\left[\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\\&=-\frac{4+3\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1&=5\sin(\alpha+120^\circ)\\&=5(\sin\alpha\cos 120^\circ+\cos\alpha\sin 120^\circ)\\&=5\left[\frac{3}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\\&=\frac{4\sqrt{3}-3}{2}.\end{aligned}$$

所以$P_1\left(-\frac{4+3\sqrt{3}}{2},\ \frac{4\sqrt{3}-3}{2}\right)$.

同理可求得$P_2\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. （1）$y=3\sin x+4\cos x=\sqrt{3^2+4^2}\sin(x+\theta)=5\sin(x+\theta)$.

$y_{\max}=5$，$y_{\min}=-5$，$T=2\pi$；

（2）$y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$

$$=2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

$y_{\max}=2$，$y_{\min}=-2$，$T=\pi$.

练习 12-3

1. (1) -1； (2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$； (3) $2-\sqrt{3}$；

(4) $-2-\sqrt{3}$； (5) 1； (6) 1.

2. $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{7}}{1-\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}}=1;$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{3}{7}}{1+\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}}=-\frac{1}{41};$$

3. (1) $$\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=\frac{\tan 45^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ-15^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

(2) $$\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 75^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 75^\circ}=\tan(45^\circ+75^\circ)=\tan 120^\circ=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}.$$

4. (1) 右边$=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=$左边；

也可从左边证到右边：

左边$=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=$右边.

(2) 的证明方法与 (1) 相同.

练习 12-4

1. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (5) 1; (6) $\frac{1}{4}$.

2. (1) $1-\sin 2\alpha$; (2) $\frac{1}{2}\sin\theta$; (3) $\cos 2\varphi$; (4) $\tan 2\theta$.

3. $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$.

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{12}{13}\right)^2-1=\frac{119}{169}$.

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{120}{169}$.

4. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times0.8^2=-0.28$.

$\sin\alpha=0.8$，且 $\alpha\in(0,\ \pi)$.

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-0.8^2}=\pm0.6$.

当 $\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$时，$\cos\alpha=0.6$.

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times0.8\times0.6=0.96$.

当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$时，$\cos\alpha=-0.6$.

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times0.8\times(-0.6)=-0.96$.

5. $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{3}$，$\cot 2\alpha=\frac{3}{4}$.

6. 证明：左边$=\frac{\sin 2\theta-\sin\theta}{1+\cos 2\theta-\cos\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta}{1+2\cos^2\theta-1-\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta(2\cos\theta-1)}{\cos\theta(2\cos\theta-1)}=\tan\theta=$右边.

练习 12-5

1. (1) $y_{\max}=\frac{3}{4}$，$y_{\min}=-\frac{3}{4}$，$T=2\pi$;

(2) $y_{\max}=8$，$y_{\min}=-8$，$T=\pi$;

(3) $y_{\max}=3$，$y_{\min}=-3$，$T=\pi$;

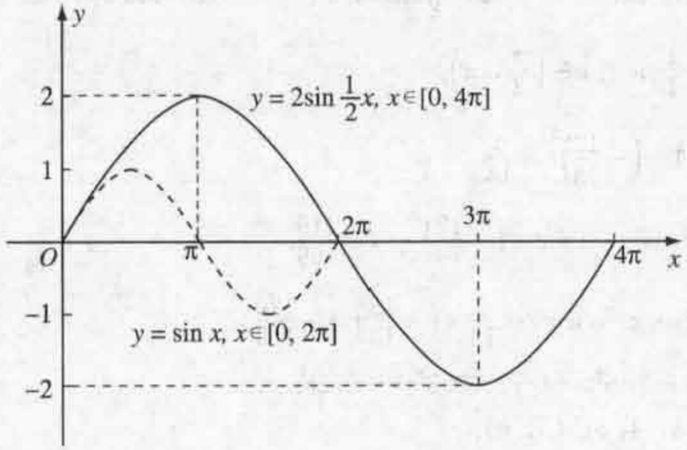
(4) $y_{\max}=8$，$y_{\min}=-8$，$T=8\pi$.

2.

(1) 列表.

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin\frac{1}{2}x$	0	2	0	-2	0

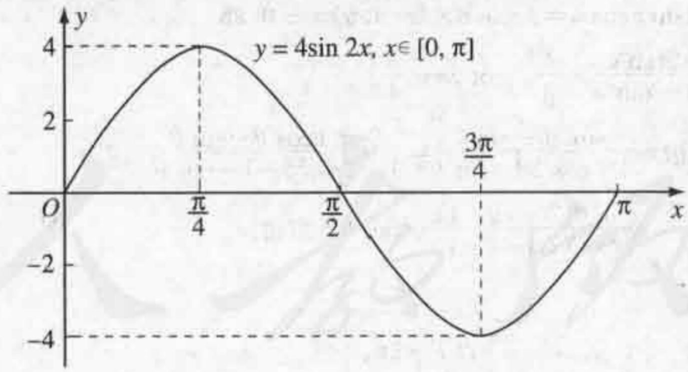
描点作图，得到函数 $y=2\sin\frac{1}{2}x$，$x\in[0, 4\pi]$ 的简图.



（2）列表.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$4\sin 2x$	0	4	0	-4	0

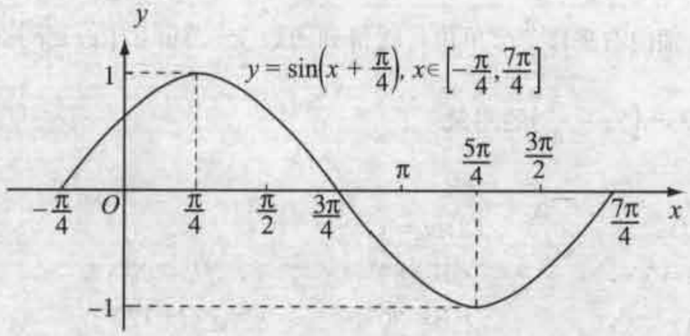
描点作图，得到函数 $y=4\sin 2x$，$x\in[0, \pi]$ 的简图.



（3）列表.

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$x+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	0	1	0	-1	0

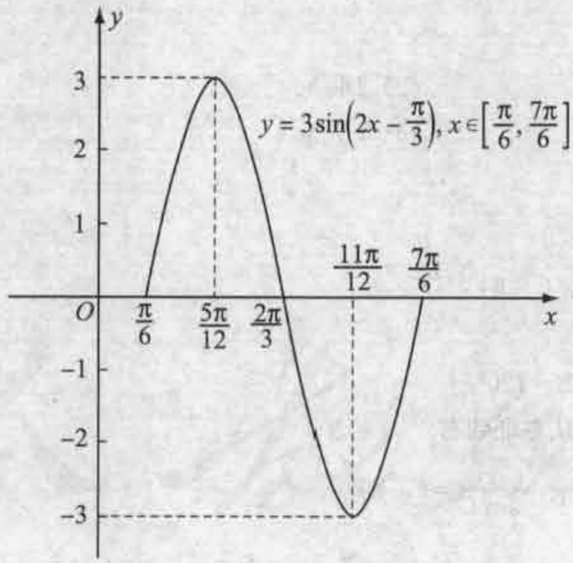
描点作图，得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right]$的简图.



（4）列表.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
$2x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	-3	0

描点作图，得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}\right]$的简图.



3. 先把函数 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，再把图象上各点的纵坐标变为原来的 2 倍，就可得到函数 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

4. 先把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），得到

函数 $y=\sin 2x$ 的图象；再把函数 $y=\sin 2x$ 图象上所有点的纵坐标变为原来的 3 倍（横坐标不变），就得到函数 $y=3\sin 2x$ 的图象；最后把函数 $y=3\sin 2x$ 的图象，沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，就得到函数 $y=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right]$ 的图象，也就是函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

练习 12-6

1. (1) $c=31$； (2) $b=7$.

2. (1) $\angle A=30°$， $\angle B=60°$， $\angle C=90°$；

(2) $\angle A=30°$， $\angle B=30°$， $\angle C=120°$；

(3) $\angle A=28°57'$， $\angle B=17°37'$， $\angle C=133°26'$.

3. (1) 锐角三角形； (2) 直角三角形； (3) 钝角三角形.

4. 当 $\angle AOD=60°$ 时：

$$AD=BC=2\sqrt{21}，AB=DC=2\sqrt{61}；$$

当 $\angle AOB=60°$ 时：

$$AB=DC=2\sqrt{21}，AD=BC=2\sqrt{61}.$$

5. 因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\cos 120°=b^2+c^2+bc$，

所以 $a^2-b^2=c(b+c)$.

练习 12-7

1. (1) 5； (2) $16\sqrt{3}$.

2. (1) 150； (2) $6\sqrt{11}$.

3. $180\sqrt{3}$.

练习 12-8

1. $\angle A=40°5'$，$\angle C=64°55'$.

2. $a=4\sqrt{3}$.

3. $\angle B=60°$ 或 $\angle B=120°$.

4. 证法 1：可以从左证到右.

令 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$$\sin A=\frac{a}{k}，\sin B=\frac{b}{k}，\sin C=\frac{c}{k}.$$

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{\frac{a}{k}+\frac{b}{k}}{\frac{c}{k}}=\frac{a+b}{c}.$$

证法 2：可以从右证到左.

令$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{k\sin A+k\sin B}{k\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}.$$

5. 令$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$$\sin A=\frac{a}{k},\ \sin B=\frac{b}{k},\ \sin C=\frac{c}{k}.$$

于是

$$\sin^2 A+\sin^2 B=\left(\frac{a}{k}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{k^2},$$

$$\sin^2 C=\left(\frac{c}{k}\right)^2=\frac{c^2}{k^2},$$

由 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，得

$$\frac{a^2+b^2}{k^2}=\frac{c^2}{k^2},$$

即 $a^2+b^2=c^2$.

所以$\triangle ABC$是直角三角形.

6. $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=75^\circ$. 因此

$$\begin{aligned}\sin C&=\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{6}.$$

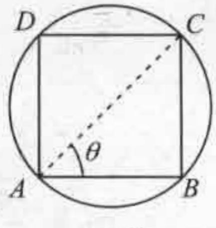
$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}ac\sin B\\&=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

练习 12-9

1. 连接 AC，并设$\angle CAB=\theta$.

因为$\angle B=90^\circ$，所以 AC 是圆的直径，即 $AC=2R$.

在 Rt△CBA 中，$BC=2R\sin\theta$，$AB=2R\cos\theta$.



（第 1 题）

矩形 $ABCD$ 的面积

$$\begin{aligned} S&=BC\cdot AB=2R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta \\ &=2R^2\sin 2\theta. \end{aligned}$$

因为 $\sin 2\theta$（θ 为锐角）有最大值 1，所以矩形面积 S 有最大值 $2R^2$，此时 $2\theta=90°$，即 $\theta=45°$.

而当 $\theta=45°$时，$BC=2R\sin 45°=\sqrt{2}R$，$AD=2R\cos 45°=\sqrt{2}R$.

因此，当矩形的长是$\sqrt{2}R$，宽是$\sqrt{2}R$ 时，矩形有最大面积，最大面积是 $2R^2$.

2. (1) $P=50\sin 20\pi t$ 瓦； (2) 50 瓦； (3) $\frac{1}{10}$秒.

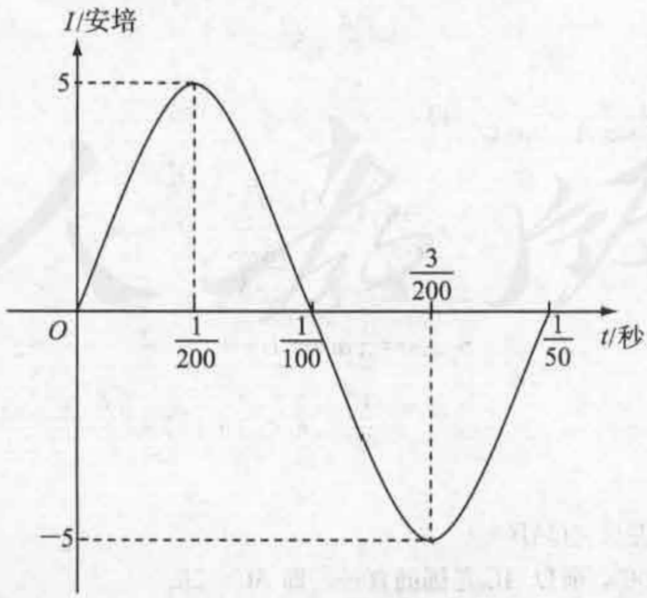
3. (1) $I=5\sin 100\pi t$，$T=\frac{1}{50}$秒；

(2) $I_{\max}=5$ 安培；

(3) 因为正弦型函数 $I=5\sin 100\pi t$ 的周期是$\frac{1}{50}$，所以我们作出它在闭区间$\left[0,\ \frac{1}{50}\right]$上的简图，列表如下.

$100\pi t$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	0	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{200}$	$\frac{1}{50}$
$5\sin 100\pi t$	0	5	0	-5	0

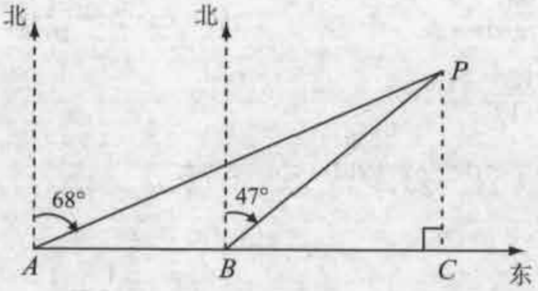
描点作图，得到函数 $I=5\sin 100\pi t$，$t\in\left[0,\ \frac{1}{50}\right]$的图象.



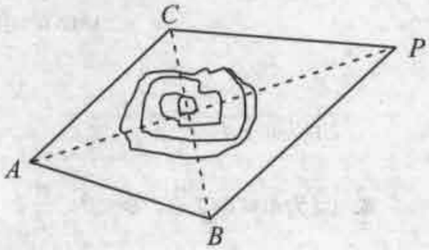
4. 过点 P 作 $PC\perp AB$，垂足为 C. 在 $\triangle ABP$ 中，利用正弦定理求得 $BP\approx37.6$ 海里；在 $\mathrm{Rt}\triangle BPC$ 中，求得

$$PC\approx26\text{ 海里}.$$

因为 $26>25$，所以没有触礁危险.



5. 连接 BC，AP.



因为 $AB=AC=50$ m，$\angle BAC=60°$，

所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 于是

$$\angle BCP=135°-60°=75°,$$
$$\angle CBP=125°-60°=60°,$$
$$\angle BPC=180°-(75+60°)=45°.$$

由正弦定理，得

$$\frac{CP}{\sin\angle CBP}=\frac{CB}{\sin\angle BPC},$$
$$CP=\frac{CB\cdot\sin\angle BPC}{\sin\angle CPB}$$
$$=\frac{50\times\sin 60°}{\sin 45°}=25\sqrt{6},$$

由余弦定理，得

$$AP^2=AC^2+CP^2-2AC\cdot CP\cos\angle DAB$$
$$=50^2+(25\sqrt{6})^2-2\times50\times25\sqrt{6}\cos 135°$$
$$=6\ 250+2\ 500\sqrt{3},$$

利用计算器计算，得

$$AP\approx103\ (\mathrm{m}).$$

习题十二

1. (1) $\sqrt{3}\sin\alpha$；　(2) $\sqrt{3}\cos\alpha$；　(3) $-\sqrt{2}\sin\varphi$；

(4) $\frac{1}{2}$；　(5) $\sin 2\alpha$；　(6) 1.

2. $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，$\cos\alpha=\frac{12}{13}$；

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{12\sqrt{3}-5}{26}$； (2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{12\sqrt{3}+5}{26}$；

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$； (4) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{12-5\sqrt{3}}{26}$；

(5) $\sin 2\alpha=-\frac{120}{169}$； (6) $\cos 2\alpha=\frac{119}{169}$；

(7) $\tan 2\alpha=-\frac{120}{119}$.

3. 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$.

又因为

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1.$$

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

4. 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以

$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，且 $0<\alpha+\beta<\pi$.

因为 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

5. 因为 $\cos A=\frac{4}{5}>0$，$\cos B=\frac{12}{13}>0$，$\angle A$，$\angle B$ 为锐角.

$\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{5}{13}$.

$$\begin{aligned}\cos C&=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)\\&=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\\&=-\left(\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}\right)=-\frac{33}{65}.\end{aligned}$$

6. (1) 左边$=-2\sin\alpha(-\cos\alpha)=\sin 2\alpha=$右边；

(2) 左边$=\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\cos x=$右边；

(3) 左边$=1+2\cos^2\theta-(2\cos^2\theta-1)=2=$右边；

(4) 左边$=\tan(45^\circ+\theta)=\frac{\tan 45^\circ+\tan\theta}{1-\tan 45^\circ\tan\theta}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=$右边；

(5) 左边 $=\tan 20°+\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°$

$=\tan(20°+40°)(1-\tan 20°\tan 40°)+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°$

$=\sqrt{3}(1-\tan 20°\tan 40°)+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°$

$=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°$

$=\sqrt{3}=$ 右边.

7. (1) $T=\frac{\pi}{2}$；　　(2) $T=4\pi$.

8. (1) $\{x \mid x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z\}$；

(2) $\{x \mid 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\ k\in Z\}$.

9. 将函数 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（而纵坐标不变），就可得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象；将函数 $y=\sin 2x$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，就可得到函数 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$，即函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上各点的纵坐标变为它的 3 倍（而横坐标不变），就可得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

10. (1) 当 $x\in\left\{x\,\middle|\,x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\max}=4$；

当 $x\in\left\{x\,\middle|\,x=-\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\min}=-4$；

(2) 当 $x\in\{x \mid x=\frac{\pi}{2}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{2}$；

当 $x\in\{x \mid x=-\frac{3\pi}{2}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 时，$y_{\min}=-\frac{1}{2}$.

11. (1) $y=1-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

$y_{\max}=1+\sqrt{2}$，$y_{\min}=1-\sqrt{2}$，$T=2\pi$；

(2) $y=1-\sin 2x$，

$y_{\max}=2$，$y_{\min}=0$，$T=\pi$.

(3) $y=-5\sin 2x-12\cos 2x$

$=-13\sin(2x+\theta)$（其中 θ 为辅助角），

$y_{\max}=13$，$y_{\min}=-13$，$T=\pi$.

12. (1) $c=4\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，$\angle B=90°$，$S_{\triangle ABC}=8\sqrt{3}$；

(2) $\angle B=45^\circ$，$\angle C=75^\circ$，$c=1+\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

13. c 为最大边，$\angle C$ 为最大角.

因为 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{3+4-5}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}>0$，$\angle C$ 为锐角，所以$\triangle ABC$ 为锐角三角形.

14. 因为$\sqrt{m^2+mn+n^2}>\sqrt{m^2}=m$，$\sqrt{m^2+mn+n^2}>\sqrt{n^2}=n$，所以$\sqrt{m^2+mn+n^2}$是最大边.

设它所对的角是 α，则

$$\cos\alpha=\frac{m^2+n^2-(m^2+mn+n^2)}{2mn}=-\frac{1}{2}.$$

$\alpha=120^\circ$.

$\triangle ABC$ 的最大角是 120°.

15. 由$\dfrac{a^2-(b-c)^2}{bc}=1$，得 $b^2+c^2-a^2=bc$.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2},$$

所以$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$.

16. 设$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}=k$，则 $a=3k$，$b=4k$，$c=5k$，且 c 为最大边.

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(3k^2)+(4k)^2-(5k)^2}{2\times 3k\times 4k}=0$，$\angle C=90^\circ$，所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

17. 将

$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A,$$
$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C,$$
$$c^2+a^2-b^2=2ca\cos B$$

三式相加，得

$$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ab\cos C+ca\cos B).$$

18. $\angle A:\angle B=1:2\Rightarrow\angle B=2\angle A$.

由$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，得$\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，即

$$\frac{\sin A}{\sin 2A}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

也就是

$$\frac{\sin A}{2\sin A\cos A}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

解得 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$\angle A=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=90^\circ$.

19. $\angle ACB=78^\circ$，因此

$$AC=\frac{50\sin 62^\circ}{\sin 78^\circ}\approx 45.1\ (\text{m}),$$

$$BC=\frac{50\sin 40^\circ}{\sin 78^\circ}\approx 32.9\ (\text{m}).$$

20. 在$\triangle ABC$中，利用正弦定理，可得 $AC\approx 55.3$ m.

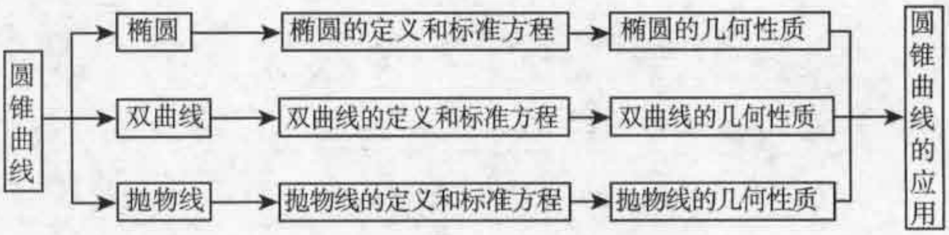
在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，求得 $CD\approx 26$ m.

第十三章　圆锥曲线与方程

思想火花：

教育之于心灵，犹如雕刻之于大理石.

I 知识框图



II 教学要求

1. 了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界中的作用.

2. 通过从具体情境中抽象出椭圆模型的过程，掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质.

3. 了解抛物线和双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道它们的简单几何性质.

4. 通过圆锥曲线与方程的学习，应用类比的学习方法，进一步体会数形结合的思想.

5. 了解圆锥曲线的简单应用.

6. 通过本章的学习，使学生进一步认识解析几何的基本思想，从而掌握用坐标法研究几何问题的方法.

III 教材分析和教学建议

本章是在学生学习了直线和圆的方程的基础上，进一步学习用坐标法研究曲线. 这一章主要学习椭圆、双曲线、抛物线的定义，推导了椭圆、双曲线和抛物线方程，研究了它们的几何性质.

本章研究的椭圆、双曲线和抛物线的方程，主要是它们在直角坐标系中的标准方程，所谓标准方程就是曲线在标准位置时的方程，即曲线的中心或顶点在坐标原点，对称轴是坐标轴时的方程，通过对这种方程的讨论得到的曲线的性质，可以利用图形平移推广到其他位置上去，所以，曲线的标准方程及它们在标准位置上的性质是本章的重点.

我们知道，曲线可以看成是符合某种条件的点的轨迹，在解析几何里用坐标法研究曲线的一般程序是：建立适当的平面直角坐标系；求出曲线的方程；利用曲线的方程讨论曲线的几何性质. 在前面学生已经通过学习直线与圆的方程，初步学习了这种方法，但是在本章中，这种研究曲线的方法和过程以及它的优势体现得更加突出. 所以，本章内容一直是解析几何的重点内容，特别是在对学生掌握坐标法的训练方面有着不可替代的作用.

本章的重点是：

椭圆、双曲线和抛物线的标准方程及几何性质.

本章的难点是：

利用圆锥曲线的标准方程研究它们的几何性质及其应用.

在本章教学中注意以下几点：

1. 在引入圆锥曲线时，应通过丰富的实例（如行星运行轨道、热电厂散热塔的外形、抛物运动轨迹、探照灯的镜面），使学生了解圆锥曲线的背景与应用. 教师应向学生展示平面截圆锥得到曲线的过程，使学生加深对圆锥曲线的理解. 有条件的学校应充分发挥现代教育技术的作用，利用计算机演示平面截圆锥所得的圆锥曲线.

2. 注意数形结合思想的渗透，解析几何的特点就是数形结合，而数形结合的思想是一种重要的数学思想，是教学大纲中要求学生形成的数学思想之一，所以在这一章的教学过程中，要时刻注意对学生这种数学思想的培养.

3. 注意训练学生将几何图形的特征，用数或式表达出来，反过来，要使他们能根据点的坐标或曲线的方程，确定点的位置或曲线的性质，使学生能比较顺利地将形的问题转化为数或式的问题，将数或式的问题转化为形的问题.

4. 注意在解决问题的过程中，充分利用图形. 学生在解解析几何的题目时，往往把图形抛到一边，不能充分利用图形，忽视了图形对启发思路的直观作用. 在解决圆锥曲线的问题时，充分利用图形，有时不仅简单，而且能开阔思路. 所以本章的教材，比较强调画图，教学中也要注意强调图形的作用.

5. 在教学过程中，要注意引导学生运用“类比法”研究圆锥曲线的几何性质. 如类比椭圆几何性质的研究思路，研究双曲线、抛物线的几何性质.

6. 为了使学生在学习解析几何的过程中，以及今后的实际工作中能顺利地画出圆锥曲线的草图，教材结合圆锥曲线几何性质的教学，突出了圆锥曲线标准方程中 a，b，c，p，e 的几何意义，根据它们的几何意义来画草图就比较方便.

本章教学约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

13.1 椭圆

13.1.1 椭圆的标准方程

1. 本节教学的主要内容是椭圆的定义及椭圆的标准方程.

2. 本节的教学重点是椭圆的定义和椭圆的标准方程，难点是椭圆标准方程的推导.

3. 椭圆是常见的图形，学生对椭圆已有一定的感性认识．教材从汽车油罐的横截面、行星和卫星的轨道引入椭圆，使学生进一步明确学习椭圆的重要性和必要性．学生对椭圆的定义是不熟悉的，因此讲课时可依照教材中所介绍的方法，边讲边作图，然后再总结定义．这样讲比较直观，学生印象较深，容易掌握．要启发学生注意为什么定义中强调常数大于$|F_1F_2|$，因为三角形两边之和必大于第三边，否则画不出椭圆．由此推出$a>c$在椭圆问题的讨论中起重要作用.

4. 讲解椭圆标准方程的推导，首先通过椭圆的对称性启发学生建立适当的坐标系．然后设椭圆上任意一点坐标为$P(x, y)$，椭圆的焦距为$2c(c>0)$，椭圆上任意一点到两焦点距离之和为$2a(a>0)$，这样可避免用分数形式表示焦点及长轴两端点的坐标，使导出的椭圆方程形式简单.

5. 推导椭圆的标准方程的化简过程中，会遇到无理方程，授课时可边讲边计算，边复习无理方程变形的要点，指出将两个根式分散在等号两边的好处.

6. 在推导椭圆标准方程的过程中，用到关系$a>c$，$a^2>c^2$和$a^2-c^2=b^2\ (b>0)$等，应向学生阐明为什么要设$a^2-c^2=b^2$，在这里只告诉学生引入b的作用是为了使方程的形式简单，以后在研究椭圆的性质，明确b的几何意义时，可再说明引入b的必要性.

7. 在给出中心在原点，焦点在y轴上的椭圆标准方程

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

以后，应通过小结向学生强调以下两点：

(1) 在椭圆的两种标准方程中，总是$a>c>0$，并且焦点总是在长轴上；

(2) 公式 $c^2=a^2-b^2$ 非常重要，它揭示了椭圆中三个基本常量之间的内在关系，在解题时经常要用到.

8. 求椭圆的标准方程，要注意定义的作用，同时注意焦点所在的坐标轴，选择标准方程形式. 利用待定系数法求解时，要特别注意隐含条件 $c^2=a^2-b^2$.

13.1.2　椭圆的几何性质

1. 本节的主要内容是椭圆的几何性质.

2. 本节的教学重点是椭圆的几何性质，难点是利用椭圆的标准方程来研究几何性质的方法.

3. 本小节通过对椭圆标准方程的讨论，一方面要使学生掌握椭圆的几个性质，掌握标准方程中的 a，b，c 以及 e 的几何意义，a，b，c 和 e 之间的相互关系；同时，要通过对椭圆的标准方程的讨论，使学生知道在解析几何中是怎样用代数方法研究曲线的性质的. 对学生来说，本节是第一次接触系统地利用方程来研究曲线的几何性质，除了要求学生掌握有关的基本知识外，更重要的是让学生掌握讨论曲线的范围、对称性和顶点的方法.

4. 讨论曲线的范围，实际上就是确定方程中两个变量允许值的范围，教材是通过不等式组来解决的.

5. 关于曲线的对称性，讲解时应注意结合图形讲清当把 x 换成 $-x$ 或把 y 换成 $-y$ 或把 x，y 同时换成 $-x$，$-y$ 时，若方程不变，为什么图形关于 y 轴或 x 轴或原点对称. 还可以向学生指出，如果曲线具有上述对称性中的任意两种，那么它一定还具有另一种对称性.

6. 求椭圆的顶点时，教师应首先引导学生观察图形，让学生有一个直观印象，再利用椭圆的标准方程，求曲线与坐标轴的交点.

7. 椭圆的离心率是反映椭圆形态的一个重要概念. 要掌握它的定义 $e=\frac{c}{a}$，以及 e 值的变化对椭圆形状的影响.

8. 因为这是第一次系统地用代数方法研究曲线，本节教学进度可以适当放慢.

13.2　双曲线

13.2.1　双曲线的标准方程

1. 本节的主要内容是双曲线的定义及双曲线的标准方程.

2. 本节的教学重点是双曲线的定义和双曲线的标准方程，难点是对双曲线标准方程的推导.

3. 求双曲线的标准方程和研究它的性质的方法和思路都与研究椭圆相类似. 在讲解双曲线的定义，标准方程的推导，a，b 和 c 的关系等内容时，要注意与椭圆作对比，并指出它们的异同.

4. 教材通过类比椭圆的定义，提出问题，然后介绍了画双曲线的一种方法，从而给出了双曲线的定义. 用教材中介绍的方法来画双曲线时，应当注意拉链截去的部分长度应小于两定点 F_1，F_2 间的距离. 所以在讲解定义时，应当强调"差的绝对值等于常数"小于"$|F_1F_2|$"这一条件，应当给学生仔细分析这一条件的必要性.

5. 双曲线标准方程的推导，要进一步类比椭圆标准方程的推导过程，利用方程结构的特点，简化计算量.

6. 学生在学习了椭圆及其标准方程的基础上，已初步具备了探究圆锥曲线的数学思想和方法，对坐标法求曲线方程已初步掌握. 教师在讲授本节内容时，应注意体现知识间的相互联系，体现数学的整体性.

7. 从教材特点看，本节是椭圆基础上知识的后续，因此，在教学中要注意发展学生用类比的方法探究事物运动规律的能力，让类比思想贯穿整个教学过程.

8. 在推导双曲线标准方程的过程中，用到关系 $c>a>0$，$c^2>a^2$ 和 $c^2-a^2=b^2\ (b>0)$ 等，应向学生阐明为什么要设 $c^2-a^2=b^2$，在这里只告诉学生引入 b 的作用是为了使方程的形式简单，以后在研究双曲线的性质，明确 b 的几何意义时，可再说明引入 b 的必要性.

9. 求双曲线的标准方程，要注意定义的作用，同时注意焦点所在的坐标轴，选择标准方程的形式. 利用待定系数法求解时，要特别注意隐含条件 $c^2=a^2+b^2$.

13.2.2 双曲线的几何性质

1. 本节的主要内容是双曲线的几何性质.

2. 本节的教学重点是双曲线的几何性质，难点是对双曲线的渐近线概念的理解.

3. 类比椭圆的几何性质研究思路，来研究双曲线的几何性质是本节教学的关键.

4. 教材所研究的几种圆锥曲线中，渐近线是双曲线特有的性质. 要讲清双曲线标准方程与其渐近线方程之间的关系，以防止学生在计算中发生错误. 明确双曲线的渐近线是哪两条直线，过双曲线实轴的两个端点与虚轴的两个端点分别作对称轴的平行线，它们围成一个矩形，其两条对角线所在的直线即为双曲线的渐近线.

5. 理解"渐近线"中"渐近"两字的含义. 当双曲线的各支向外延伸时，与这两条直线逐渐接近，接近的程度是无限的. 也可以这样理解：当双曲线的动点 M 沿着双曲线无限远离双曲线的中心时，点 M 到这条直线的距离逐渐变小而无限趋近于 0.

掌握根据双曲线的标准方程求出它的渐近线方程的方法. 最简单且实用的方法是：把双曲线标准方程中等号右边的 1 改成 0，就得到了此双曲线的渐近线方程.

例如：求 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程，先将方程变为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，所以 $y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}$，所以得 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

6. 等轴双曲线是一类特殊的双曲线，其主要性质有：$a=b$，离心率 $e=\sqrt{2}$，渐近线

方程 $y=\pm x$，两条渐近线互相垂直.

13.3 抛物线

13.3.1 抛物线的标准方程

1. 本节的主要内容是抛物线的定义及抛物线的标准方程.

2. 本节的教学重点是抛物线的标准方程，难点是区分抛物线的标准方程的四种形式.

3. 抛物线是学生已知的图形，但学生对抛物线的几何性质并不了解，还是陌生的. 本节的重点是，由抛物线的几何定义推导它的方程. 抛物线有 4 种标准方程，要求学生能准确地画出图形，写出焦点坐标和准线方程.

4. 在推导抛物线方程时，要强调“p”的几何意义. 记住 p 的几何意义及定义，在解决由方程画出图形，或由已知条件求抛物线方程等问题时，学生一般就不会发生困难了.

5. 在教学中，要适当地把抛物线方程 $x^2=2py$，$x^2=-2py$ 与二次函数相联系，并指出它们的区别.

6. 求抛物线的标准方程，要注意抛物线的开口方向，从抛物线的四种标准方程中，选择恰当的标准方程求解.

13.3.2 抛物线的几何性质

1. 本节的主要内容是抛物线的几何性质.

2. 本节的教学重点是掌握抛物线的几何性质，难点是抛物线的几何性质的应用.

3. 本节教学目标是让学生掌握抛物线的几何性质，能运用抛物线的方程推导出它的几何性质，掌握抛物线的简单画法. 进一步理解坐标法中根据曲线的方程研究曲线的几何性质的一般方法.

4. 例 2 是要求学生掌握利用待定系数法求抛物线的标准方程，利用教材中所用的方法，应强调 $p>0$ 这一隐含条件. 该例还可以用如下方法求解.

因为抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点，并且经过点 $M(2,\ -2\sqrt{2})$，所以可设它的标准方程为

$$y^2=mx,$$

因为点 M 在抛物线上，所以

$$(-2\sqrt{2})^2=m\times2,$$

即

$$m=4.$$

因此所求方程是

$$y^2=4x.$$

5. 待定系数法是求函数或曲线方程的一种重要方法，对于待定系数法这一内容的编排，教材在第九章先从求直线方程入手，让学生初步了解待定系数法的应用，在圆的一般方程一节中正式介绍了它的概念. 在本章，在求椭圆、双曲线及抛物线方程时，又使

这一方法得到了进一步的深化.

6. 例 3 是求直线与抛物线的交点，应向学生说明，求两条曲线的交点即是求方程组的解. 进而可求两点间的距离.

Ⅳ 参考教案

课题：13.1.1 椭圆的标准方程

教学目标：

1. 掌握椭圆的定义，掌握椭圆标准方程的两种形式及其推导过程；

2. 能根据条件确定椭圆的标准方程，掌握运用待定系数法求椭圆的标准方程；

3. 通过对椭圆概念的引入教学，培养学生的观察能力和探索能力；

4. 通过椭圆的标准方程的推导，使学生进一步掌握求曲线方程的一般方法，并渗透数形结合和等价转化的思想方法，提高运用坐标法解决几何问题的能力；

5. 通过让学生大胆探索椭圆的定义和标准方程，激发学生学习数学的积极性，培养学生的学习兴趣和创新意识.

教学重点：

椭圆定义的形成和标准方程的推导.

教学难点：

椭圆标准方程的推导.

教学用具：

多媒体.

教学方法：

探究发现法、启发式.

教学过程：

一、创设情景、引入概念

1. （多媒体演示）地球绕太阳旋转运行的录像，描绘出运行轨迹图.

问题 1：地球绕太阳旋转的轨迹是什么图形？

2. 学生回答后，教师点明主旨并书写课题.

问题 2：你能列举一些实际生活中所见到的椭圆形的例子吗？

3. 教师指出：由此可见，椭圆在实际生活中是很常见的，学习椭圆有关知识也是非常必要的. 我们知道，动点按照某种规律运动形成的轨迹叫曲线，那么椭圆是满足什么条件的点的轨迹呢？

二、尝试探究、形成概念

1. 先用多媒体演示椭圆的画法，再提出以下问题：

问题3：在绳长不变的条件下，改变两个图钉之间的距离，画出的椭圆有何变化？

问题4：在绳长不变的条件下，当两个图钉重合在一点时，画出的图形是什么？

问题5：当两图钉固定时，能使绳长小于两图钉之间的距离吗？能画出图形吗？

实践得出：当绳长大于两图钉间距离时，无论图钉之间的距离如何变化，得到的是椭圆；不能使绳长小于两图钉之间的距离，此时不能画出图形.

问题6：根据上面作图的实践回答：椭圆是满足什么条件的点的轨迹？

2. 启发、提问、师生归纳出椭圆的定义.

定义：平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫椭圆. 这两个定点叫椭圆的焦点，两焦点的距离叫椭圆的焦距.

教师指出：由于椭圆形的例子在实际生活中随处可见，因此对椭圆的研究十分重要，现在，我们就来推导椭圆的标准方程.

三、椭圆标准方程的推导

教师指出：在前面我们学习了直线与圆的方程的知识，大家对用变量的观点研究几何图形的方法——坐标法已经有了初步的认识，在推导直线和圆的方程时，我们认识到，图形与方程之间存在一种对应关系. 要推导椭圆的方程，我们首先应当建立直角坐标系.

问题7：类比圆的标准方程，当圆心在坐标原点时，圆的方程更为简单. 观察椭圆的形状，我们如何建立坐标系，才能使求出的方程更为简单？

(1) 建系：以 F_1，F_2 所在的直线为 x 轴，线段 $|F_1F_2|$ 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系.

(2) 设点：设 $M(x, y)$ 是椭圆上任意一点，设 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，M 到 F_1 和 F_2 的距离的和等于常数 $2a(a>0)$，则 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$（注意引导学生思考为什么要设 $|F_1F_2|=2c$，而不是 c 或其他）.

(3) 列式：让学生自己列出 $|MF_1|+|MF_2|=2a(2a>2c)$. 因此

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

(4) 化简：

问题8：这个方程的形式复杂，应该化简，那么，应该如何化简？

教师引导学生一起化简，得到：$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ 后让学生思考问题9.

问题9：此方程的形式虽然具有数学形式上的对称美，但仍然不够简洁，还有变形的必要，你认为应如何变形，使之更为简洁？

学生思考回答后，师生共同得出结论：

因为 a，c 均为定值，且 $a>c$，所以令 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，则方程变形为

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

可整理成

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

问题10：椭圆方程中 a，b，c 三者大小如何？关系如何？

($a>b$，$a>c$，且 a，b，$c>0$，且 $a^2+b^2=c^2$.)

教师指出：我们推导的椭圆的标准方程是

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).}$$

它所表示椭圆的焦点在 x 轴上，焦点是 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$，这里 $c^2=a^2-b^2$.

问题11：如果我们在建立直角坐标系时，以 F_1，F_2所在的直线为 y 轴，以线段$|F_1F_2|$的垂直平分线为 x 轴，建立直角坐标系，会得到怎样的方程？

教师指出：当焦点在 y 轴上时，得到方程

$$\sqrt{(y+c)^2+x^2}+\sqrt{(y-c)^2+x^2}=2a.$$

与方程$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ 比较，把方程中的 x，y 互换即可. 所以焦点在 y 轴上的椭圆方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

问题12：两个椭圆方程的焦点坐标分别是什么？在哪一条坐标轴上？其判断的依据是什么？

(方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点坐标是 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$，在 x 轴上；方程$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 的焦点坐标是 $F_1(0,\ -c)$，$F_2(0,\ c)$，其判断依据是：a^2 与 b^2 中，a^2 与谁对应，焦点坐标就在哪条坐标轴上.)

四、椭圆标准方程的应用

例1　平面内两个定点的距离是 8，求到两个定点的距离的和是 10 的点的轨迹方程.

例2　分别求椭圆 A：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 与椭圆 B：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点.

例3　已知椭圆的焦点在 x 轴上，$a=5$，经过点 $A\left(4,\ -\frac{3}{5}\right)$，求椭圆的标准方程.

在黑板上板书例子来示范解题步骤，教师要适时引导学生做好总结归纳. 可让学生设计求解的方案，并根据学生提供的解题方案，点评方案的可行性，并比较其优劣.

通过例题解决以下问题：

(1) 进一步深化椭圆的概念；

(2) 进一步让学生掌握椭圆标准方程焦点位置的判断方法；

(3) 求椭圆的方程的方法除了运用定义来求外，还可以利用待定系数法来求解.

五、课堂反馈

1. 椭圆$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$上一点 P 到一个焦点的距离等于 4，则它到另一个焦点的距离为________.

2. 求椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$的焦点坐标和焦距.

3. 如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，求实数 k 的取值范围.

4. 设 F_1，F_2为定点，$|F_1F_2|=6$，动点 M 满足$|MF_1|+|MF_2|=8$，求动点 M 的轨迹.

六、归纳小结

(1) 本节课我们了解了椭圆的概念和椭圆的形成过程.

(2) 给出了椭圆的准确定义并推导出椭圆的标准方程.

(3) 椭圆的标准方程有两种，一种焦点在 x 轴，另一种焦点在 y 轴.

(4) 给出了椭圆标准方程焦点位置的判断方法.

(5) 求椭圆标准方程的方法还可以利用待定系数的方法求解出 a 和 b.

七、课外作业

练习 13-1　2 (2)，3 (2) (4)，4.

V　习题答案、提示和解答

练习 13-1

1. (1) x，(4，0)，(−4，0)；(2) y，(0，4)，(0，−4).

2. (1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$；(2) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$.

3. (1) 焦点 $(\sqrt{2}，0)$ 和 $(-\sqrt{2}，0)$，焦距 $2\sqrt{2}$；

(2) 焦点 (3，0) 和 (−3，0)，焦距 6；

(3) 焦点 $(0，\sqrt{7})$ 和 $(0，-\sqrt{7})$，焦距 $2\sqrt{7}$；

(4) 焦点 $(0，\sqrt{5})$ 和 $(0，-\sqrt{5})$，焦距 $2\sqrt{5}$.

4. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

练习 13-2

1. (1) (−5，0)，(5，0)，(0，−3) 和 (0，3)；

(2) (0，5)，(0，−5)，(3，0) 和 (−3，0)；

(3) (4，0)，(−4，0)，(0，2) 和 (0，−2)；

(4) (0，4)，(0，−4)，(2，0) 和 (−2，0).

2. (1) 18，6，$\frac{2\sqrt{2}}{3}$；(2) 2，1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. (1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$；(2) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$.

4. $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$.

练习 13-3

1. (1) x，(5，0) 和 (−5，0)；(2) y，(0，4) 和 (0，−4).

2. (1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$；(2) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$.

3. (1) 焦点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 和 $(-2\sqrt{2}, 0)$，焦距 $4\sqrt{2}$；

(2) 焦点 $(0, \sqrt{2})$ 和 $(0, -\sqrt{2})$，焦距 $2\sqrt{2}$；

(3) 焦点 (0，5) 和 (0，−5)，焦距 10；

(4) 焦点 $(\sqrt{13}, 0)$ 和 $(-\sqrt{13}, 0)$，焦距 $2\sqrt{13}$.

4. $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$.

练习 13-4

1. (1) (−5，0) 和 (5，0)；　　(2) (0，5) 和 (0，−5)；

(3) (−4，0) 和 (4，0)；　　(4) (0，4) 和 (0，−4).

2. (1) 18，6，$\frac{\sqrt{10}}{3}$；(2) 2，1，$\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. (1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$；(2) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$.

4. $\frac{6\sqrt{10}}{5}$，$\frac{2\sqrt{10}}{5}$，$\frac{\sqrt{10}}{3}$.

5. $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{18}=1$，$y=\pm x$.

练习 13-5

1. (1) 2，(1，0)，$x=-1$；(2) $y^2=-4x$.

2. (1) $y^2=12x$；(2) $y^2=x$；(3) $y^2=-8x$；(4) $x^2=-8y$.

3. (1) (5，0)，$x=-5$；(2) $\left(0, \frac{1}{8}\right)$，$y=-\frac{1}{8}$；(3) $\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$，$x=\frac{5}{8}$；

(4) (0，−2)，$y=2$.

练习 13-6

1. (1) 向右，(2，0)，$x=-2$，(0，0)，x；(2) 向上，(0，1)，$y=-1$，(0，0)，y.

2. (1) $y^2=\frac{16}{5}x$；(2) $x^2=20y$；(3) $y^2=-16x$；(4) $x^2=-32y$.

习题十三

1. 14.

2. (1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; (2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

3. $\frac{24}{7}$.

4. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

5. $\sqrt{2}$.

6. 7或23.

7. $4<k<9$, $(0, -\sqrt{5})$, $(0, \sqrt{5})$.

8. $4\sqrt{3}$.

9. $-\frac{3}{4}$.

10. $(6, 6\sqrt{2})$ 或 $(6, -6\sqrt{2})$.

11. $y^2=x$.

12. (1) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$; (2) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; (3) $2\sqrt{2}$.

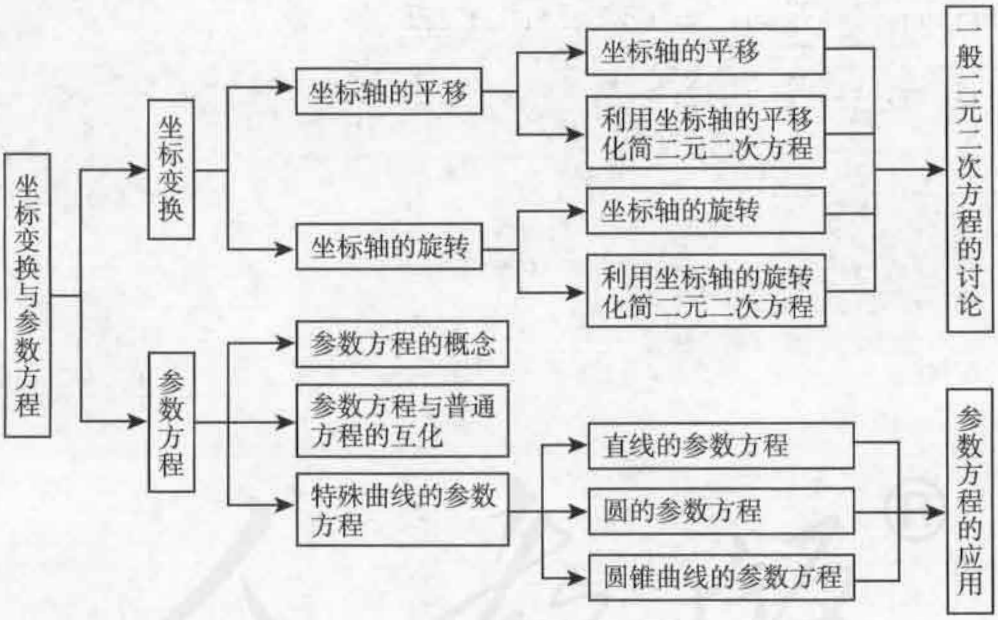
13. (1) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$; (2) $-\frac{1}{7}$.

第十四章　坐标变换与参数方程

思想火花：

教育的艺术不在于传授本领，而在于极力唤醒和鼓舞.

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 理解并掌握坐标轴的平移公式，并能应用它化简二元二次曲线方程.

2. 理解坐标轴的旋转公式，并能应用它化简二元二次曲线方程.

3. 利用坐标变换公式化简一般的二元二次方程，利用二元二次方程判别曲线的类型.

4. 理解曲线的参数方程的概念，掌握曲线的参数方程与普通方程间的互化.

5. 理解并掌握直线与圆的参数方程以及参数的几何意义，并能运用它解决简单的问题.

6. 了解圆锥曲线的参数方程及简单应用.

7. 会用参数方程的知识解决实际问题.

III 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：坐标轴的平移公式和旋转公式以及它们的应用，曲线的参数方程的概念，曲线的参数方程与普通方程的互化，特殊曲线（圆、直线与圆锥曲线）的参数方程及其简单应用.

本章教材共分两大部分.

第一部分是坐标变换，包含了坐标轴的平移与旋转. 坐标变换是解析几何的一种重要工具. 在本节里，介绍了直角坐标系的坐标轴平移变换，给出了变换公式，并研究了利用移轴化简缺 xy 项的二元二次方程. 作为选学内容，介绍了坐标轴旋转变换，利用移轴和转轴化简一般二元二次方程，并通过对一般二元二次方程的讨论，总结出利用判别式 B^2-4AC 判别方程类型的一种方法. 一方面，在坐标变换下，点的坐标或曲线的方程一般都发生了变化，但点或曲线本身并不变，即曲线的形状和大小与坐标系的选择无关；另一方面，经过移轴和转轴，方程的次数没有变，并且经过适当的转轴，可使变换前后二元二次方程的二次项系数之间满足等式 $B^2-4AC=-4A'C'$. 因此，我们可以利用坐标变换化简方程，研究曲线，也可以通过判别式，直接判别一般二次曲线的类型. 对于每个二元二次方程，都可以用先转轴后移轴的方法化简，但学过一般二元二次方程类型的判别式后，可以先判别方程的类型，对有心曲线也可以用先移轴后转轴的方法化简，这样有时比较简单.

第二部分是参数方程. 通过单位圆上的点坐标说明参数方程的概念，借助例题让学生明确参数方程与普通方程互化的方法；分析圆、直线的几何性质，选择适当的参数写出它们的参数方程，举例说明某些问题用参数方程解决比用普通方程更方便，感受参数方程的优越性. 以学生熟悉的圆锥曲线为载体，加深对参数方程的理解，体会参数法的应用. 参数方程是以参变量为中介来表示曲线上点的坐标的方程，是曲线在同一坐标系下的又一种表示形式. 它弥补了普通方程表示曲线的不足，为研究复杂的曲线提供了有利的工具，同时它还是“形”与“数”的又一次完美而有机的结合. 通过对参数方程的学习，使学生掌握参数方程的基本概念，了解曲线方程的多种表现形式，体会从实际问题中抽象出数学问题的过程，培养探究数学问题的兴趣和能力，体会数学在实际中的应用价值，提高应用意识.

本章的重点是：坐标轴的平移公式，圆与直线的参数方程.

本章的难点是：坐标轴的旋转公式，应用坐标变换化简二元二次方程；直线参数方

程的应用.

本章教学约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

14.1 坐标变换	
14.1.1 坐标轴的平移	1 课时
14.1.2 利用坐标轴的平移化简二元二次方程	1 课时
*14.1.3 坐标轴的旋转	1 课时
*14.1.4 利用坐标轴的旋转化简二元二次方程	1 课时
*14.2 一般二元二次方程的讨论	
*14.2.1 化一般二元二次方程为标准式	1 课时
*14.2.2 一般二元二次方程的讨论	1 课时
14.3 参数方程	
14.3.1 曲线的参数方程	1 课时
14.3.2 圆的参数方程	1 课时
14.3.3 直线的参数方程	1 课时
14.3.4 圆锥曲线的参数方程	1 课时
14.4 参数方程的应用举例	1 课时
小结与复习	1 课时

14.1 坐标变换

14.1.1 坐标轴的平移

1. 坐标变换是化简曲线方程，以便于讨论曲线的性质和画出曲线的一种重要方法. 这一节教材主要讲坐标轴的平移，要求学生在正确理解新旧坐标之间关系的基础上掌握平移公式；并能利用平移公式对新旧坐标系中点的坐标和曲线的方程进行互化.

2. 为了阐明“同一个点，在不同的坐标系中有不同的坐标；同一条曲线，在不同的坐标系中有不同的方程”，教材从圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=5^2$ 化为 $x'^2+y'^2=5^2$ 引入，通过这个例子说明虽然点的位置没有改变，曲线的位置、形状和大小没有改变，但是由于坐标系的改变，点的坐标和曲线的方程也随着改变. 从第二个例子还可看出，适当地变换坐标系，曲线的方程就可以化简，以此指明平移坐标轴的意义和作用. 并由此引出平移的定义，导出平移公式.

3. 教材上给出平移公式

$$x'=x-h,\ y'=y-k \qquad ①$$

后，还给出公式

$$x=x'+h,\ y=y'+k. \qquad ②$$

公式①是从点的旧坐标求它的新坐标时用的. 平移公式一般用在从曲线的旧方程求它的新方程，这时以采用公式②为主. 对①式只要简单说明一下它的作用和它与②式的联系

即可，以免记忆混淆.

4. 移轴公式反映了同一个点在坐标轴的平移过程中，其坐标的变化规律. 在公式中有三组量，(x, y) 是点的原坐标，(x', y') 是点的新坐标. (h, k) 是新坐标系中原点的原坐标. 已知这三组坐标中的两组，即可求出另一组（即"知二求一"）. 这就是移轴公式在点的坐标变换中的作用.

5. 例 2 是利用平移公式，把旧坐标系的方程化为新坐标系的方程. 教学中要说明为什么用 $x'+h$ 代换 x，$y'+k$ 代换 y 后，所得的方程就是曲线在新坐标系中的方程. 事实上，一条曲线关于旧坐标系的方程，是这条曲线上所有各点的旧坐标 x、y 所要适合的关系. 如果把方程中的 x 代以 $x'+h$，y 代以 $y'+k$，就得到曲线上所有各点的新坐标 x'，y'所要适合的关系，这就是这条曲线关于新坐标系的方程.

6. 在坐标轴平移的过程中，曲线的方程也会发生变化. 但无论怎么变，同一条曲线的原方程与新方程通过移轴公式联系在一起，总是可以互相转化的. 也就是说，我们可以通过移轴公式将曲线的原方程 $F(x, y)=0$ 化成新方程 $F(x', y')=0$，也可以通过与移轴公式等价的公式$\begin{cases}x'=x-h\\y'=y-k\end{cases}$将新方程 $F(x', y')=0$ 化成原方程 $F(x, y)=0$.

14.1.2　利用坐标轴的平移化简二元二次方程

1. 课本中通过例题说明怎样利用平移公式化简方程. 例 3 是由平移公式带入原方程，然后再令一次项系数为零，从而确定 h，k 的值. 这种用待定系数法化简方程的方法具有普遍性. 教学中要使学生掌握这种方法的一般步骤.

2. 对于缺 xy 项的二元二次方程，利用配方法化简方程比较简单. 如果原方程中有 x 或 y 的二次项和一次项，可用配方法化成 $(x-h)^2$ 或 $(y-k)^2$，使新方程没有 x'或 y'的一次项. 如果原方程中，x 或 y 只有一次项，可将该一次项和常数项结合起来，化成 $(x-h)$或 $(y-k)$，使新方程没有常数项. 一般地说，通过坐标轴的平移，不能改变原方程最高项的次数，但能消去原方程中某一变量的较低次项.

3. 例 4 中的方程是 $y=ax^2+bx+c$ 通过配方化成 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，学生在初中课本中学习二次函数时是通过移图来作图的，而现在通过移轴来作图，虽然方法不同，所得的结果完全一样.

所谓移图是先作 $y=ax^2$ 的图象，然后将抛物线的顶点从原点移到点$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，图形上其他各点也做同样的位移，从而得到求作的图形.

现在是先把原点移到 $O'\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，得到新坐标系 $x'O'y'$，在新坐标系中，作 $y'=ax'^2$的图形.

两种方法所得的图形、位置、形状和大小完全一样. 移图的方法，主要不是用它来画出函数的图象，而是通过它将函数 $y=ax^2$的图象与函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象联系起

来，从而可以利用函数 $y=ax^2$ 的图象的性质去说明函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的性质，实际画图时，用现在的方法，比较简捷．因此在解析几何中化简各种类型的曲线方程并作出它们的图象时，一般都采用移轴的方法，而不用移图的方法．

4. 最后通过实例向学生说明，坐标变换后，点的坐标和曲线的方程一般都发生了变化，但点的位置或曲线的形状、大小和位置关系等性质都不改变，而且方程的次数也不改变，因此，我们可以通过坐标变换化简方程，然后研究曲线的性质和画图．

*14.1.3 坐标轴的旋转

1. 本节的重点是转轴公式的推导和初步应用．

2. 要注意区别坐标轴旋转的两个公式：

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,$$
$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

和

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta,$$
$$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta.$$

如果前一个公式能正确牢固的掌握，那么后一个公式就不必强求记忆，因为将第一个公式中的换成它可以根据前一个公式的形式推演．

为了帮助学生记忆这两组公式，可把上述公式合并为右表，这表横着念就是第一个公式，而竖着念就是后一个公式．

	x'	y'
x	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
y	$\sin\theta$	$\cos\theta$

3. 例 5，例 6 说明在已知旋转条件下，平面上的点的坐标、曲线的方程的变化．可以用作图的方法检验这类题是否正确．

*14.1.4 利用坐标轴的旋转化简二元二次方程

1. 本节主要是应用旋转公式去化简二元二次方程，从而判别方程式表示什么曲线，以及作出这些曲线的草图．

2. 针对坐标轴的旋转公式，要重点理解旋转角 θ 的范围：在含有 xy 项的二次方程，总可以从公式 $\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}$ 解得 θ 的值．这里本应是多值的，但由于目的只是消去 xy 项，因此只要取其中的一个值．但为了应用公式的方便，故限定 θ 取最小的正值．也就是取 $0\leqslant 2\theta<\pi$，$0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 就可以．因为在这个范围内 $\cos 2\theta$ 与 $\cot 2\theta$ 同符号，且 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 都是正值，因此便于由 $\cot 2\theta$ 求 $\cos 2\theta$，进而由 $\cos 2\theta$ 求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$．

3. 例 7 化简就是要化掉 xy 项，得到我们熟悉的标准形式．其中 $x'y'$ 的系数可以不算，因为 $\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}$，则 $x'y'$ 项系数必为零（当然，算一算是否为零，也是一个检验方法）．作图时抓住新的对称轴关于原坐标系的位置这一关键，作图就容易了．像例 8 这种题目，由于 θ 很容易算出，所以先算出 $\sin\theta$，$\cos\theta$，再代入公式，这样可使化简更简单．

*14.2 一般二元二次方程的讨论

*14.2.1 化一般二元二次方程为标准式

1. 本节是坐标轴的平移公式和旋转公式的综合应用.

2. 例1，例2解题的步骤是一样的. 第一步，旋转. 第二步，平移. 如果先平移再旋转也可以得到标准方程，但要麻烦得多.

3. 如果给定的二次方程不含 xy 项，用坐标轴的平移公式，能消去一次项或常数项，化为圆锥曲线的标准方程；如果给定的二次方程含有 xy 项，且一次项和常数项不是同时皆有时，用轴的旋转公式也能化为圆锥曲线的标准方程.

4. 在坐标变换下，方程的次数保持不变，其图形也不变. 事实上，对一般二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，或先平移后旋转或先旋转后平移，把平移公式或旋转公式代入方程，可以知道，二次方程的次数仍为2. 这就说明，二次方程经过坐标变换后，其图形不会改变.

5. 在本节可以总结，坐标轴的旋转变换与平移变换的异同点：

(1) 从定义上看：

坐标轴的平移——坐标轴方向不变，原点改变；

坐标轴的旋转——原点不变，坐标轴方向改变.

(2) 从目的上看：

坐标轴的平移或坐标轴的旋转同是为了一个目的，那就是通过变换把复杂的一般方程化为最简单的标准方程. 因此，它们同是化简方程研究曲线的重要工具.

(3) 从效果上看：

就一般二元二次曲线的方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 来说，坐标轴的旋转可以使方程不含 $x'y'$ 项，坐标轴的平移可以使方程不含某个一次项或常数项，两者结合起来使用就能把一般方程化成标准形式.

*14.2.2 一般二元二次方程的讨论

1. 本节是综合应用平移公式和旋转公式解决既含有 xy 项，又有一次项和常数项的一般二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的化简问题. 通过对一般二元二次方程的讨论，总结出利用判别式判别方程类型的一种方法. 由此，我们可以利用坐标变换化简方程，研究曲线，也可以通过判别式，直接判断一般二次曲线的类型.

2. 若 $B^2-4AC<0$ 或 $B^2-4AC>0$，一般二次方程表示椭圆或双曲线. 对于这类有心二次曲线，化简方程时，要先平移消去一次项，再旋转消去 xy 项；若 $B^2-4AC=0$，一般二次方程表示抛物线. 对于这类无心二次曲线，化简方程时，要先旋转消去 xy 项，再平移. 在学习完本节以后，化简二元二次方程时，就可以先根据判别式判别方程的类型，再合理安排平移或旋转的顺序. 所以本节的结论对上节课的学习也有实际的指导意义.

14.3 参数方程

14.3.1 曲线的参数方程

1. 本节的主要内容是参数方程的概念，参数方程与普通方程的互化. 重点是参数方程与普通方程的互化.

2. 教学中，对于为什么学习参数方程，可以从以下几个方面适当给予说明.

第一，在求曲线方程时，会遇到一些很难直接确定 x，y 之间关系的问题，有时甚至不可能建立直接联系，但利用参数建立它们的间接联系会比较容易. 实际上，引入一个参数就等于多了一个解决问题的拐杖，就有了连接曲线上点的坐标 x，y 的桥梁，这对于解决诸如炮弹射程、飞行时间、命中确定目标的发射角或投放物质的时机等都有实际意义.

第二，参数方程能够明确地揭示质点的运动规律，是描述“运动”“变化”的有效工具.

第三，有时参数方程的形式比普通方程简单，而且所选择的参数也有明确的物理或几何意义，可以给研究问题带来方便.

3. 针对单位圆的参数方程

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}\ (0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$$

可以引导学生对它作一定的分析.

(1) 方程中有 3 个变量，其中的 x，y 表示点的坐标，变量 θ 叫做参变量. 而且 x，y 分别是 θ 的函数，这样的方程才叫做参数方程.

(2) 平面内，每一个点的位置都可由它的坐标 (x, y) 来确定，而 x，y 的值则由 θ 唯一确定. 这样，当 θ 在容许值范围内连续变化时，x，y 的值也随之连续地变化，于是就可以连续地描绘出点的轨迹.

(3) 要向学生指出单位圆上的点与满足方程的有序实数对 (x, y) 之间有一一对应关系，但不要求证明.

4. 参数方程与普通方程的异同点.

曲线 C 的普通方程 $F(x, y)=0$ 直接给出了点的坐标 x，y 之间的关系，由于方程中含有 x 与 y 两个变量，给定其中任意一个变量的值，都可以由方程确定另一个变量的值. 曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$（$t$ 为参数）借助参数 t 间接给出了曲线上点的坐标 x，y 之间的关系，由于两个方程中含有 x，y，t 三个变量，给定参数 t 的一个值，就可以由方程组 $\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$（$t$ 为参数）求出唯一对应的 x，y 的值.

5. 参数方程概念涉及参数的意义，在建立参数方程时又要用到平面向量、三角、几

何等多方面知识，这些都给本节内容的学习带来一定的困难.

6. 例 1 给出了把参数方程化为普通方程的方法：通过利用代数或三角函数中的恒等式消去参数. 另外，练习 14-7 第 2 题中，涉及到了利用代入法把参数方程化为普通方程的方法，教师可以适当补充. 需要注意的是，并不是所有的参数方程都能化为普通方程. 另外，在化参数方程为普通方程时，坐标 x，y 的变化范围不能扩大或缩小，即对应曲线上点的坐标不能有增减.

7. 例 2 是由普通方程化为参数方程. 同一个普通方程，由于选择的参数不同，得到的参数方程也不相同.

第（1）小题中，从 $y^2=4\sin^2\varphi$ 得到的应该是 $y=\pm 2\sin\varphi$，进一步再由参数的任意性而得到简化形式 $y=2\sin\varphi$，这是学生在以往的学习经验中较少遇到的情况；

第（2）小题中，从 $x^2=9(1-t^2)$ 得到 $x=\pm 3\sqrt{1-t^2}$，需要考虑 x 的两种取值情况，实际上它们分别对应了椭圆在 y 轴的左、右两部分，因此参数方程是由两部分组成的. 这也是学生在过去的学习中较少遇到的.

14.3.2　圆的参数方程

1. 圆的参数方程的建立，与匀速圆周运动、三角函数等知识都有密切的联系. 圆的参数方程的探求过程比较简单，且参数的几何意义较明确，这对学生体会如何根据问题的几何特点或物理意义选择适当的参数比较有利.

2. 教材以匀速圆周运动为引子，目的是引导学生从“旋转”而想到用“旋转角”为参数. 当然，学生如果能够联系到三角函数定义，也能够想到圆周上点 M 的坐标 x，y 可以用任意角的余弦和正弦来表示.

3. 在求得参数方程 $\begin{cases}x=r\cos\omega t\\ y=r\sin\omega t\end{cases}$ 后，应指出 r，ω 都是定值，t 是参数. 参数 t 的实际意义是时间，取值范围是 $t\geqslant 0$.

如果取 θ 为参数，而将参数方程表示为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

那么参数 θ 的几何意义是半径 OM 绕原点 O 逆时针旋转所转过的角度.

因此，选择不同的参数可以得到不同形式的圆的参数方程. 到底选择怎样的参数，应当根据问题中的条件以及实际需要来决定.

4. 圆的参数方程 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 对应的普通方程是 $x^2+y^2=r^2$.

圆的参数方程也可以直接由圆的普通方程转化得出.

设方程 $x^2+y^2=r^2$，则

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1,$$

令$\frac{x}{r}=\cos\theta$，则$\left(\frac{y}{r}\right)^2=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$. 取$\frac{y}{r}=\sin\theta$，则得其参数方程.

圆心在点$M_0(x_0,\ y_0)$，半径为r的圆的参数方程可让学生自己探究. 不难得出，这时圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\\ y=y_0+r\sin\theta\end{cases}$$

与它对应的圆的普通方程是$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

5. 例4的条件表明，点M的运动是由点P的运动引起的，而点P绕圆心O作圆周运动，所以点M的运动是由点P绕圆心O的“旋转角”θ决定的. 这样选择θ作参数是合适的. 教学中，可以先让学生独立分析问题的条件，引导他们思考如何选择参数更有利于问题的解决. 由于例题难度不大，所以在分析后可以让学生独立完成解答.

6. 在教学中，教师可根据圆的参数方程的推导过程，引导学生总结求曲线参数方程的主要步骤：

(1) 画出轨迹草图，设$M(x,\ y)$是轨迹上任意一点的坐标. 画图时要注意根据几何条件选择点的位置，以利于发现变量之间的关系.

(2) 选择适当的参数. 参数的选择要考虑以下两点：一是曲线上每一点的坐标x，y与参数的关系比较明显，容易列出方程；二是x，y的值由参数唯一确定. 例如，在研究运动问题时，通常选时间为参数；在研究旋转问题时，通常选旋转角为参数；此外，离某一定点的距离、直线的倾斜角、斜率、截距也常常被选为参数.

(3) 根据已知条件、图形的几何性质、问题的物理意义等，建立点的坐标与参数的函数关系式.

14.3.3 直线的参数方程

1. 本节主要内容为直线的参数方程及简单应用.

2. 在本节讨论直线的参数方程时是用“向量方法”推导的，它也可以从直线的普通方程转化而来.

设直线的点斜式方程为$y-y_0=k(x-x_0)$.

其中$k=\tan\alpha$，α为直线的倾斜角，代入上式，得

$$y-y_0=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-x_0),\ \alpha\neq\frac{\pi}{2},$$

即

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}.$$

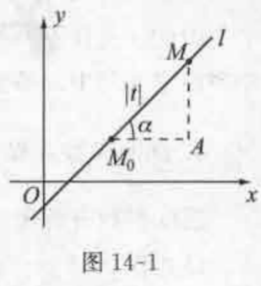


图 14-1

记上式的比值为t，整理后得

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$$

这就是经过点 $M_0(x_0, y_0)$，倾斜角为 α 的直线的参数方程. 其中参数 t 有明显的几何意义. 如图 14-1 所示，在直角三角形 M_0AM 中，$|M_0A|=|x-x_0|$，$|MA|=|y-y_0|$，$|M_0M|=|t|$，即 $|t|$ 表示直线上任一点 M 到定点 M_0 的距离.

两种思路中，参数 t 的几何意义是一致的. 另外，在练习 14-9 的第 2 题，由质点的匀速运动形成直线，得到直线的另一种参数方程（一般形式），在本节教材中不做过多讨论.

3. 用"向量方法"推导直线的参数方程时，平行向量基本定理起关键作用. 教学中要引导学生回顾平面向量的知识，并注意向量关系式与实数关系式之间的等价转化.

4. 在推导出直线的参数方程（标准形式）为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}（t\text{ 为参数}）$$

后，应当注意：

(1) 其中的 α，x_0，y_0 都是常数，t 是参数.

(2) 强调参数 t 的几何意义：$|t|$ 表示参数 t 对应的动点 $M(x, y)$ 与直线上的定点 $M_0(x_0, y_0)$ 之间的距离. 当 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向时，t 取正数；当 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向时，t 取负数. 参数 t 可以理解为直线 l 上有向线段 $\overrightarrow{M_0M}$ 的数量. 它的几何意义可以与数轴上点 A 的坐标 a 的意义作类比，即：$a=\pm|OA|$，当 A 在 O 的右侧时取"+"；当 A 在 O 的左侧时取"−". 所以，数轴上点 A 的坐标就是有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 的数量.

(3) 当要解决与距离有关的几何问题时，常用直线方程的这一形式.

5. 本节有两个例题，它们都能较好的体现直线的参数方程的优越性.

例 5 是直接应用直线参数方程中的参数的几何意义来解题的，教学中应结合图形详细分析，使学生逐步理解和掌握参数在解题中的用法.

例 6 是求直线与曲线交点的距离问题，这样的问题用直线的参数方程解决比较方便. 本题的解答中，为了将普通方程化为参数方程，先判定点 $M(-1, 2)$ 在直线上，并求出直线的倾斜角，这样才能用参数 t 的几何意义求相应的距离. 这样的求法比用普通方程求出交点，再用距离公式求交点间的距离简便.

14.3.4　圆锥曲线的参数方程

1. 本节内容以学生熟悉的圆锥曲线为载体，进一步学习建立参数方程的基本步骤，加深对参数方程的理解，体会参数法的应用，同时引导学生从不同角度认识圆锥曲线的几何性质. 椭圆的参数方程在今后的学习中常用，它是本节的重点内容，而对于双曲线和抛物线的参数方程，只要求了解就可以了.

2. 对椭圆、双曲线、抛物线的参数方程，教材只是通过纯粹的代数和三角变换得到的，参数的几何意义并不明确. 实际上，圆锥曲线的参数方程中的参数都有确定的几何意义，但它们的几何意义不像圆的参数方程中的参数那样明确，为降低难度，教材不作详细介绍.

3. 圆锥曲线的参数方程的探求和应用，与代数变换、三角函数及向量等都有密切联系，教学中应适当引导学生复习这些知识.

4. 教材中的 2 个例题都是圆锥曲线的参数方程的应用，教师可先让学生尝试用普通方程来做，让学生深刻体会参数方程的优点.

14.4 参数方程的应用举例

例题是用直线的参数方程解决实际问题的一个例子. 解决它的关键是将实际问题转化为数学问题. 由“距台风中心以内的地方都属于台风侵袭的范围”可知，只要台风中心进入以 O 为圆心，250 km 为半径的圆内，城市 O 就会受影响. 又台风中心在过点 $P(300, 0)$，倾斜角为 $135°$ 的直线方向 l 上运动，所以台风影响城市 O 的时间范围对应于直线 l 在圆内的部分. 这就是教材给出的解法的依据. 本例中的参数 t 表示时间，是一个物理量.

Ⅳ 参考教案

课题：14.3.3 直线的参数方程

教学目标：

1. 理解并掌握直线的参数方程以及参数的几何意义，并能运用它解决简单的问题.
2. 了解向量法推导直线的参数方程的方法.
3. 学习用参数方程解决问题的方法，进一步体会参数法的优点.

教学重点：

直线的参数方程与参数的几何意义.

教学难点：

理解直线参数方程的推导过程，运用直线参数方程解决问题.

教学方法：

讲练结合.

教学过程：

教学过程

环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习： 1. 直线的点斜式方程； 2. 向量平行基本定理.	师：经过点 $M_0(x_0, y_0)$，倾斜角为 α 的直线 l 的普通方程是 $y-y_0=k(x-x_0)$， 其中 $k=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$，怎样建立直线 l 的参数方程呢？	回顾向量平行基本定理，为导出直线的参数方程做准备.

续表

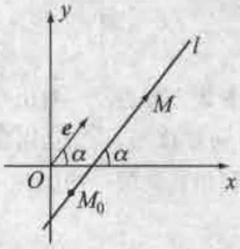
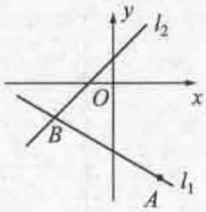
<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>新课</td>
<td>
如图 14-2，在直线 l 上任取一点 $M\ (x,\ y)$，则
$\overrightarrow{M_0M}=(x,y)-(x_0,\ y_0)$
$=(x-x_0,\ y-y_0)$.
设 e 是直线 l 的单位方向向量（单位长度与坐标轴的单位长度相同），则 $e=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.


图 14-2
因为 $\overrightarrow{M_0M}\parallel e$，所以存在实数 $t\in\mathbf{R}$，使 $\overrightarrow{M_0M}=te$，即
$(x-x_0,\ y-y_0)=t(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，
$x-x_0=t\cos\alpha$，$y-y_0=t\sin\alpha$，
$x=x_0+t\cos\alpha$，$y=y_0+t\sin\alpha$.
所以，经过点 $M_0(x_0,\ y_0)$，倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程为
$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）
因为 $e=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，所以 $\lvert e\rvert=1$. 由 $\overrightarrow{M_0M}=te$，得到 $\lvert M_0M\rvert=\lvert t\rvert$. 所以，直线上的动点 M 到定点 M_0 的距离，等于参数 t 的绝对值.
当 $0<\alpha<\pi$ 时，$\sin\alpha>0$，所以，直线 l 的单位方向向量 e 的方向总是向上. 此时，若 $t>0$，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 的方向向上；若 $t<0$，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 的方向向下；若 $t=0$，则点 M 与点 M_0 重合.
</td>
<td>
师：(1) $\overrightarrow{M_0M}$ 如何用坐标表示？
(2) l 的单位方向向量 e 的坐标用倾斜角 α 如何表示？
(3) $\overrightarrow{M_0M}$ 与 e 有什么关系？
(4) $\overrightarrow{M_0M}$ 与 e 的关系用坐标怎么表示？
师：直线的参数方程中，哪些是变量？哪些是常量？参数 t 的几何意义是什么？
师：由 $\overrightarrow{M_0M}=te$ 这个式子，看出，类比向量在数轴上的坐标，有什么联系？
</td>
<td>
让学生自己推导直线的参数方程难度较大，在老师的问题引导下，带领学生发现参数的选择方法.
类比向量在数轴上的坐标，帮助学生理解 t 的几何意义.
</td>
</tr>
</table>

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	练习：写出下列直线的参数方程： (1) 点 $M_0(0,\ 1)$，倾斜角为$\frac{\pi}{4}$； (2) 点 $M_0(2,\ 0)$，倾斜角为$\frac{\pi}{6}$； (3) 点 $M_0(-1,\ 3)$，倾斜角为 $60°$； (4) 点 $M_0(1,\ 5)$，倾斜角为 $0°$.	学生练习.	通过简单练习熟练直线的参数方程.
	例 5　设直线 l_1 过点 $A(2,\ -4)$，倾斜角为$\frac{5\pi}{6}$： (1) 求 l_1 的参数方程； (2) 设直线 l_2：$x-y+1=0$，l_2 与 l_1 的交点为 B，求点 B 与点 A 的距离.  图 14-3 **解**　(1) 由直线的参数方程得 $\begin{cases} x=2+t\cos\frac{5\pi}{6} \\ y=-4+t\sin\frac{5\pi}{6} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=-4+\frac{1}{2}t. \end{cases}$	例 5 先让学生不用参数方程进行求解，让学生体会到难度后，教师引导学生分析如何用直线的参数方程解题. 学生写出直线 l_1 的参数方程后，教师应引导学生关注以下问题： (1) 如何求出交点 B 所对应的参数 t？ (2) $\|AB\|$ 与 t 有什么关系？	对比两种解法，体会运用参数方程解题的优点.
	(2) 如图 14-3 所示，B 点在 l_1 上，只要求出 B 点对应的参数值 t，则 $\|t\|$ 就是 B 到 A 的距离. 把 l_1 的参数方程代入 l_2 的方程中，得		运用直线参数方程中参数 t 的几何意义解题时，教师要一步步引导学生分析解题思路.

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>新课</td>
<td>$\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\left(-4+\frac{1}{2}t\right)+1=0$,

$\frac{\sqrt{3}+1}{2}t=7$,

$t=\frac{14}{\sqrt{3}+1}=7\left(\sqrt{3}-1\right)$.

由 t 为正值知 $\lvert AB\rvert=7\left(\sqrt{3}-1\right)$.

例 6 已知直线 l: $x+y-1=0$ 与抛物线 $y=x^2$ 交于 A, B 两点，求线段 AB 的长和点 $M(-1, 2)$ 到 A, B 两点的距离之积.

解 因为直线 l 过定点 M, 且 l 的倾斜角是 $\frac{3\pi}{4}$，所以它的参数方程是
$$\begin{cases}x=-1+t\cos\frac{3\pi}{4}\\ y=2+t\sin\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$
即
$$\begin{cases}x=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$$
把它代入抛物线方程，得
$$t^2+\sqrt{2}t-2=0,$$
解得
$$t_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2},$$
$$t_2=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}.$$
由参数 t 的几何意义得
$\lvert AB\rvert=\lvert t_1-t_2\rvert=\sqrt{10}$,
$\lvert MA\rvert\cdot\lvert MB\rvert=\lvert t_1t_2\rvert=2$.</td>
<td>教师引导学生分析：
(1) 如何写出直线 l 的参数方程?
(2) 如何求出交点 A, B 所对应的参数 t_1, t_2?
(3) $\lvert AB\rvert$ 与 t_1, t_2 有什么关系?

教师小结例 5 和例 6 的解题思路：根据直线的参数方程中参数的几何意义，求直线上两点间的距离或直线被曲线所截得的弦的长度时宜用直线的参数方程.</td>
<td>讲明白例 5 后，由易到难，带领学生分析例 2.

强调直线的参数方程中参数的几何意义，明确解题思路.</td>
</tr>
</table>

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	1. 直线的参数方程； 2. 参数 t 的几何意义.	师生共同回顾本节主要内容.	教师再次强调参数 t 的几何意义.
作业	练习 14-9 第 3 题.	学生标记作业.	巩固本节知识点.

Ⅴ 习题答案、提示和解答

练习 14-1

1. $A(-1, -11)$，$B(3, -5)$，$C(-8, 0)$，$D(-4, -13)$.（图略）

2. $x'^2+y'^2=16$.（图略）

练习 14-2

1. 作平移变换 $x=x'+3$，$y=y'-6$，得新方程 $x'^2+y'^2=49$.

2. 作平移变换 $x=x'-1$，$y=y'+2$，得新方程 $x'^2=2y'$.（图略）

练习 14-3

1.（1）点（3，4）在新坐标系中的坐标是$\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

（2）新坐标系中点（3，4）在原坐标系中的坐标$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$；

（3）曲线 $x^2+3xy+y^2=1$ 在新坐标系中的方程是 $5x'^2-y'^2=2$.

2.（1）$x'+y'=0$；（2）$9x'^2+4y'^2=36$；（3）$3x'^2-5y'^2+6=0$；（4）$x'y'+4=0$.

练习 14-4

1. $\cot 2\theta=1$，解得 $2\theta=\frac{\pi}{4}$，$\theta=\frac{\pi}{8}$. 因此旋转公式是 $x=x'\cos\frac{\pi}{8}-y'\sin\frac{\pi}{8}$，$y=x'\sin\frac{\pi}{8}+y'\cos\frac{\pi}{8}$. 代入原方程，整理后，得

$$\frac{x'^2}{3+\sqrt{2}}+\frac{y'^2}{3-\sqrt{2}}=1.$$

2. $\cot 2\theta=0$，解得 $2\theta=\frac{\pi}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{4}$. 因此旋转公式是 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$，代入原方程，整理后，$y'^2=1$.

练习 14-5

1. $\cot 2\theta=\frac{16-9}{-24}=-\frac{7}{24}$，$\cos 2\theta=\frac{-\frac{7}{24}}{\sqrt{1+\frac{49}{576}}}=-\frac{7}{25}$. $\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$.

因此旋转公式是

$$x=\frac{3x'-4y'}{5},\ y=\frac{4x'+3y'}{5}.$$

代入原方程化简，得 $y'^2-4x'+16=0$. 即 $y'^2=4(x'-4)$.

再作平移变换，设 $x''=x'-4$，$y''=y'$. 得 $y''^2=4x''$.

2. $\cot 2\theta=\frac{3}{4}$，$\cos 2\theta=\frac{3}{5}$. $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

因此旋转公式是

$$x=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}},\ y=\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}.$$

代入原方程化简，得

$$y'^2-4x'-2y'-7=0.$$

即 $(y'-1)^2=4(x'+2)$

再作平移变换，设 $x''=x'+2$，$y''=y'-1$.

因此 $y''^2=4x''$.

练习 14-6

1. (1) 因为 $B^2-4AC=(-7)^2-4\times3\times5<0$，所以方程是椭圆型；

(2) 因为 $B^2-4AC=12^2-4\times5\times5>0$，所以方程是双曲线型；

(3) 因为 $B^2-4AC=2^2-4\times2\times10$，所以方程是椭圆型；

(4) 因为 $B^2-4AC=2^2-4\times1\times1=0$，所以方程是抛物线型.

2. 因为 $B^2-4AC=\lambda^2-4\times2\times4=\lambda^2-32$：

(1) $\lambda^2-32<0$，即 $-4\sqrt{2}<\lambda<4\sqrt{2}$ 时，方程是椭圆型；

(2) $\lambda^2-32>0$，即 $\lambda<-4\sqrt{2}$ 或 $\lambda>4\sqrt{2}$ 时，方程是双曲线型；

(3) $\lambda^2-32=0$，即 $\lambda=-4\sqrt{2}$ 或 $\lambda=4\sqrt{2}$ 时，方程是抛物线型.

练习 14-7

1. (1) 点 M_1 在曲线 C 上，点 M_2 不在曲线 C 上；

(2) $a=9$.

2. (1) $x^2+y^2=1$；(2) $y^2=2px$；(3) $2x-y-7=0$；(4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

3. (1) $\begin{cases}x=a\tan\theta\\ y=a\cot\theta\end{cases}$ (θ 为参数) (2) $\begin{cases}x=a\sec\theta\\ y=b\tan\theta\end{cases}$ (θ 为参数)

练习 14-8

1. (1) $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-2+3\cos\theta\\ y=1+3\sin\theta\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=-2+\sqrt{5}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$

2. (1) 圆心在原点，半径为 3 的圆（第一象限部分）；

(2) 圆心在原点，半径为 2 的下半个圆；

(3) 圆心在点 (3，2)，半径为 15 的圆.

3. 设点 P 的坐标为 (x, y)，则圆 $x^2+y^2=25$ 上的动点 M 坐标为 $(5\cos\theta, 5\sin\theta)$，由题意知点 N 的坐标为 $(0, 5\sin\theta)$，由中点公式得

$$x=\frac{5\cos\theta+0}{2}=\cos\theta,\ y=\frac{5\sin\theta+5\sin\theta}{2}=5\sin\theta.$$

所以，点 M 的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\cos\theta\\ y=5\sin\theta\end{cases}$$

练习 14-9

1. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=-1+\dfrac{1}{2}t\\ y=3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=1-\dfrac{1}{2}t\\ y=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$

2. $\begin{cases}x=2+3t\\ y=1+4t\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t\\ y=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$

(2) 将直线 l 的参数方程中的 x，y 代入 $x-y-2\sqrt{3}=0$，得 $t=-(10+6\sqrt{3})$. 所以直线 l 和直线 $x-y-2\sqrt{3}=0$ 的交点到点 M_0 的距离为 $|t|=10+6\sqrt{3}$.

(3) 将直线 l 的参数方程中的 x，y 代入 $x^2+y^2=16$，得

$$t^2+(1+5\sqrt{3})t+10=0.$$

设上方程的两根为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=-(1+5\sqrt{3})$，$t_1t_2=10$.

可知 t_1，t_2 均为负值，所以 $|t_1|+|t_2|=-(t_1+t_2)=1+5\sqrt{3}$.

所以两个交点到点 M_0 的距离的和为 $1+5\sqrt{3}$，积为 10.

练习 14-10

1. (1) $\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=4\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=3\sec\theta\\ y=2\tan\theta\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=6t^2\\ y=6t\end{cases}$

2. 点 P 的坐标为 $\left(3\cos\frac{\pi}{6}, 2\sin\frac{\pi}{6}\right)$，即 $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, 1\right)$，则直线 OP 的斜率为

$$k=\frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

3. 设 $P(x, y)$ 为抛物线 $y^2=2x$ 上的动点.

则由抛物线的参数方程$\begin{cases}x=2t^2\\y=2t\end{cases}$可知 P 的坐标为 $(2t^2, 2t)$.

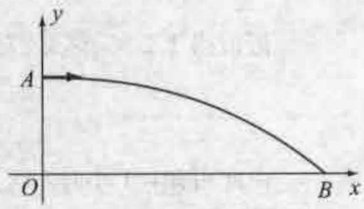
由 P 点作 y 轴的垂线段，假设交 y 轴于点 Q，则点 Q 的坐标为 $(0, 2t)$.

设线段 PQ 的中点为点 $M(X, Y)$，由中点公式，得

$$\begin{cases}X=t^2\\Y=2t\end{cases}$$

练习 14-11

1. 如图所示，A 为投弹点，坐标为 $(0, 588)$，B 为目标，坐标为 $(x_0, 0)$. 记炸弹飞行的时间为 t，在 A 点 $t=0$. 设 $M(x, y)$ 为飞行曲线上的任一点，它对应时刻 t. 炸弹初速度 $v_0=150$ m/s，用物理学知识，分别计算水平、竖直方向上的路程，得 ($g=9.8$ m/s^2)



(第 1 题)

$$\begin{cases}x=v_0t\\y=588-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=150t\\y=588-4.9t^2\end{cases}$$

这是炸弹飞行曲线的参数方程.

(2) 炸弹飞行到地面目标 B 处的时间 t_0 满足方程 $y=0$，即

$$588-4.9t^2=0,$$

解得 $t_0=2\sqrt{30}$.

由此得

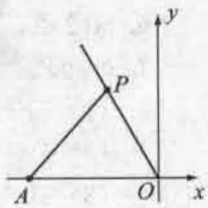
$$x_0=150\times2\sqrt{30}=300\sqrt{30}\approx1\ 643\ (\mathrm{m}).$$

即飞机在离目标 1 643 m（水平距离）处投弹才能命中目标.

2. 如图建立坐标系. 直线 OP 的参数方程为

$$\begin{cases}x=u\cos 120^\circ\\y=u\sin 120^\circ\end{cases}$$

其中参数 u 表示点 P 到点 O 的距离.



(第 2 题)

设风暴中心位于点 O 时，时间 $t=0$，而到达点 P 的时间为 t(h)，则 $u=40t$. 代入 OP 的参数方程，得

$$\begin{cases}x=-20t\\y=20\sqrt{3}t\end{cases}$$

记点 $A(-220, 0)$ 到点 P 的距离为 $|AP|$，则

$$|AP|^2=(-220+20t)^2+(-20\sqrt{3}t)^2$$
$$=20^2(4t^2-22t+121).$$

当 $|AP|\leqslant 200$ 时，城市就会受到风暴侵袭，即

$$20^2(4t^2-22t+121)\leqslant 200^2,$$
$$4t^2-22t+21\leqslant 0,$$

解得

$$\frac{11-\sqrt{37}}{4}\leqslant t\leqslant\frac{11+\sqrt{37}}{4}.$$

近似得 $1.23\leqslant t\leqslant 4.27$. 而

$$1.23\ \text{h}\approx 1\text{ 小时 }14\text{ 分},$$
$$4.27\ \text{h}\approx 4\text{ 小时 }16\text{ 分}.$$

由此可知，1 小时 14 分后城市就受到侵袭，侵袭时间要持续约 3 小时 2 分.

习题十四

1. (1) $O'(-3, -3)$，$O'(0, 7)$；

(2) $A(3, 0)$，$B(0, -2)$，$C(2, 1)$，$D(4, -1)$.

2. (1) $y'=2$；(2) $3x'-4y'+3=0$；(3) $x'^2+y'^2=5$；(4) $x'^2=y'$.

3. (1) $x'^2+y'^2=25$；(2) $\dfrac{x'^2}{17}+\dfrac{y'^2}{\frac{17}{2}}=1$；(3) $\dfrac{y'^2}{4}-\dfrac{x'^2}{9}=1$；(4) $y'^2=4x'$.

4. (1) 焦点坐标 $\left(1, \dfrac{\sqrt{6}}{2}+1\right)$，$\left(1, -\dfrac{\sqrt{6}}{2}+1\right)$，对称轴方程 $x=1$，$y=1$；

(2) 焦点坐标 $(\sqrt{6}+3, 1)$，$(-\sqrt{6}+3, 1)$，对称轴方程 $x=3$，$y=1$；

(3) 焦点坐标 $(2, 0)$，对称轴方程 $x=2$.

5. (1) $\dfrac{(x+2)^2}{100}+\dfrac{(y-1)^2}{64}=1$；

(2) $\dfrac{(y+2)^2}{9}-\dfrac{(x-2)^2}{16}=1$；

(3) $(x-3)^2=-8(y+1)$.

***6.** $A(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$，$B(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

***7.** $\theta=90°$.

***8.** (1) $7x'^2-3y'^2+2=0$；

(2) $5x'^2+y'^2=14$；

(3) $11y'^2-1=0$.

9. $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}t \\ y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$

10. $\begin{cases}x=1+6t\\y=2+8t\end{cases}$

11. 把直线的参数方程代入圆的方程，得 $(1+t)^2+(1-t)^2=4$，$t^2=1$，得

$$t_1=-1,\ t_2=1.$$

分别代入直线方程，得

$$\begin{cases}x_1=0\\y_1=2\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=2\\y_2=0\end{cases}$$

所以交点为 $A(0,\ 2)$ 和 $B(2,\ 0)$.

12. $\begin{cases}x=1+3\cos\theta\\y=-2+3\sin\theta\end{cases}$

13. (1) $t=1$ 时，θ 为参数，方程为$\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\y=2+2\sin\theta\end{cases}$

表示圆，普通方程是 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$；

(2) $\theta=\frac{\pi}{4}$时，t 为参数，方程为$\begin{cases}x=t+\sqrt{2}\\y=2t+\sqrt{2}\end{cases}$

表示直线，普通方程是 $y=2x-\sqrt{2}$.

14. 由圆的参数方程得，圆心在点 $(4,\ 0)$，半径为 2.

又圆与直线 $y=kx$ 相切，所以圆心 $(4,\ 0)$ 到直线 $kx-y=0$ 的距离等于半径. 即

$$\frac{|4k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=2,$$

解得 $k^2=\frac{1}{3}$，$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线的倾斜角等于$\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.

15. 由题意得，$2a=15\ 565$，$2b=15\ 443$，则 $a=\frac{15\ 565}{2}$，$b=\frac{15\ 443}{2}$.

椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{15\ 565}{2}\cos\theta\\y=\dfrac{15\ 443}{2}\sin\theta\end{cases}$$

16. 设 $M(x,\ y)$ 为圆上动点，$P(X,\ Y)$ 为线段 MN 的中点.

圆的参数方程为$\begin{cases}x=3\cos t\\y=3\sin t\end{cases}$由中点公式，得

$$\begin{cases}X=3\cos t\\Y=\dfrac{3}{2}\sin t\end{cases}$$

它表示一个椭圆.

17. 设 $P(x, y)$ 为直线上的动点，由题设得

$$|PA|^2=(x-4)^2+\left(y+2\sqrt{3}\right)^2=t^2+\left(\sqrt{3}t\right)^2=4t^2,$$

由 $|PA|=4$，得 $|2t|=4$，$t_1=2$，$t_2=-2$，得直线上的对应点为

$$P_1(2, 0), P_2\left(6, -4\sqrt{3}\right).$$

18. (1) 落地时，$y=0$，即 $2t\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}gt^2=0$，解得 $t=\frac{2}{g}$；

(2) $x=2t\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}t$，把 $t=\frac{x}{\sqrt{3}}$ 代入 y 的表达式，得

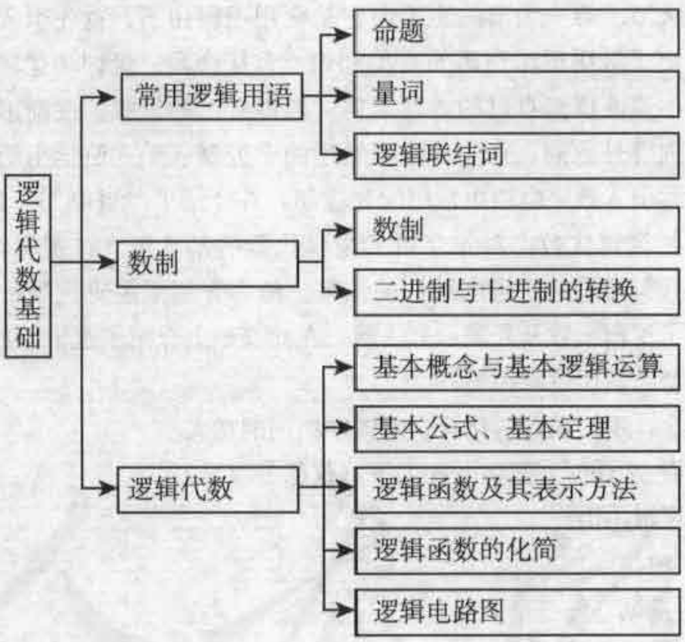
$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=-\frac{g}{6}\left(x^2-\frac{6}{\sqrt{3}g}x\right)=-\frac{g}{6}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{g}\right)^2+\frac{1}{2g}.$$

知炮弹的最大高度为 $\frac{1}{2g}$.

第十五章　逻辑代数基础

> 思想火花：
>
> 使学生对一门学科有兴趣的最好办法是必须使他知道这门学科是值得学习的.
>
> ——布鲁纳

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 使学生了解命题的有关概念.

2. 了解全称量词和存在量词的意义，会使用相应的符号表示之.

3. 了解逻辑联词“且（∧）”“或（∨）”“非（¬）”的含义及其简单应用.

4. 理解数制，了解进位计数制的三个要素.

5. 会把二进制数与十进制数按权展开，会把二进制数与十进制数相互转换.

6. 理解“与”“或”“非”三种基本逻辑运算，及其与相应的逻辑联结词的关系.

7. 了解逻辑运算的先后顺序.

8. 熟练掌握基本公式和基本定理，并能利用它们化简逻辑代数式和证明一些恒等式.

9. 会用真值表、逻辑代数式、卡诺图和逻辑图表示逻辑函数.

10. 掌握代数化简法、卡诺图化简法简化逻辑函数.

III 教材分析和教学建议

数理逻辑用语对于学生准确地使用数学语言进行表达起着非常重要的作用，而逻辑代数又为人们使用计算机代替一些人脑的工作打下了坚实的理论基础. 数理逻辑是计算机软件理论技术和硬件逻辑设计、人工智能等学科的重要理论基础，而本章介绍了数理逻辑的一些较为浅显的基础知识，希望对学生有一个启蒙的作用.

本章的主要内容包括：常用逻辑用语、数制、逻辑代数等.

本章共分三大节. 第一大节的主要内容是常用逻辑用语，首先引入逻辑、数理逻辑的概念，然后介绍了常用逻辑用语的有关知识：包括命题、量词和逻辑联结词，通过大量的例子引导学生逐渐规范自己的数学语言，梳理自己的思维，逐渐形成良好的思维品质. 第二大节的内容是数制，首先从学生熟悉的十进制入手，使学生明白数制的概念和有关的规定，然后引入数字电路中常用的二进制，并介绍了二进制与十进制的转换方法. 第三大节的内容是逻辑代数，首先介绍了逻辑代数的基本概念：逻辑常量、逻辑变量、基本逻辑运算及其与相应的逻辑联结词的关系，然后介绍了逻辑代数的基本公式和基本定理，并在介绍了逻辑函数及其表示方法后，在此基础上介绍了逻辑函数的化简方法.

本章的重点是：常用逻辑用语.

本章的难点是：逻辑函数的化简、逻辑联结词的意义.

本章教学约需 22 课时，具体分配如下（仅供参考）：

15.1 常用逻辑用语	
15.1.1 命题	1 课时
15.1.2 量词	1 课时
15.1.3 逻辑联结词	3 课时
15.2 数制	
15.2.1 十进制与二进制	1 课时
15.2.2 十进制与二进制之间的转换	1 课时
15.3 逻辑代数	
15.3.1 基本概念与基本逻辑运算	2 课时
15.3.2 逻辑代数的运算律和基本定理	2 课时

15.1　常用逻辑用语

本节拟通过常用逻辑用语的教学，使学生学会使用常用的逻辑用语准确地表达数学内容，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，逐渐形成利用逻辑知识对一些命题间的逻辑关系进行分析和推理的意识和习惯，发展学生利用数学语言准确贴切地描述问题、规范简洁地阐述论证过程的能力，从而能够更好地进行交流.

注意引导学生在使用常用逻辑用语的过程中，掌握常用逻辑用语的用法，纠正出现的逻辑错误，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性. 避免对逻辑用语的机械记忆和抽象解释.

15.1.1　命题

1. 本节内容主要包括命题、命题的真值以及判断语句是否为命题的方法. 这部分内容是基础，非常重要，要求学生熟练掌握. 但对于学生来说这部分内容较为抽象，在理解上尚有一定难度，需要结合具体实例来进行教学.

2. 教材对于命题的定义为：命题是可以判断真假的语句. 这里的真假，主要是指正确和错误而言，与一般的“真话”和“假话”有区别. 可以判断真假的语句主要是陈述句，但陈述句不一定是命题. 如“他是高个子”是陈述句，但在没有明确告诉身体多高算是高个子以前，是无法判断这句话的真假的. 同样，语句“$x>0$”在不知道 x 代表什么数以前，也无法判断其真假. 当然，感叹句、疑问句、祈使句等都不能成为命题.

3. 教材中也指出：“命题代表人们思维时的一种判断，它总是肯定或否定某事物的某种性质（或者事物之间的某种关系）.”

实际上，**命题**是一个陈述句的意义，是一种可以判断或真或假的思想. 它与“判断”和“语句”是三个具有密切联系又有细微差别的概念，分属三个不同的领域.“命题”是逻辑学概念，“判断”是认识论概念，“语句”是语言学概念.

判断是认识主体在一定时空下对命题的认识，它断言这个命题是真的还是假的. 而语句是命题或判断的语言形式，命题或判断是语句的思想内容. 语句有时具有一种模糊性和不确定性，同一语句在不同的语境中可以表达不同的命题. 因此，教材中力求避免使用这种模糊的、不确定的语句，但这样也就牺牲了教材的趣味性和可读性. 教学过程中，教师可以使用这类与生活联系紧密的语句，只要在特定的语境中不被学生误解即可.

4. 命题可分为简单命题和复合命题. 简单命题是不含逻辑联结词的命题，与此相对应，复合命题是含逻辑联结词“且”“或”“非”的命题.

15.1.2 量词

1. 量词包括全称量词和存在量词. 全称量词包括“全部”“所有”“一切”“任意”“每一个”等词语，含有全称量词的命题称为全称命题. 存在量词包括“存在着”“有”“有些”“某个”“至少有一个”等词语，含有存在量词的命题称为存在性命题. 学习量词的主要目的是把开句（条件命题）变为命题，因为数学中大量的语句都是开句，引入量词概念是非常必要的.

2. 对于量词的教学，重在理解它们的含义，应通过对具体实例的探究，加强学生对于全称量词和存在量词的理解. 不要过分追求它们的形式化定义.

3. 在不引起歧义的情况下，全称量词可以省略不写，教学时，要引导学生注意辨别这样的命题. 例如：“质数是奇数”是“所有质数都是奇数”的简写；“有理数的绝对值是正数”，它是“所有的有理数的绝对值都是正数”的简写；“等腰三角形的两底边相等”，也是“任意一个等腰三角形的两底边都相等”的简写.

15.1.3 逻辑联结词

1. 本节主要学习三个逻辑联结词：“且（$\wedge$）”“或（$\vee$）”“非（$\neg$）”，这些联结词都是学生学习数学时常用到的，应通过具体实例，使学生明确它们的精确含义，学会用它们正确地表述相关的数学内容，避免只进行抽象的讨论、记忆.

2. 本节重点是三个逻辑联结词，难点是理解联结词“非”的含义，能正确地写出含有一个量词的命题的非.

3. 教学中，应千方百计地帮助学生记住“且（$\wedge$）”“或（$\vee$）”“非（$\neg$）”的真值表，并养成根据它们来帮助判断所写出的复合命题是否正确的习惯. 为了便于记忆，$p\wedge q$的真值表可以简单地归纳为“真真才真，其他全假”，$p\vee q$的真值表可以简单地归纳为“假假才假，其他都真”，p与$\neg p$的真值可简记为“p与$\neg p$，一真一假”.

4. 这三个逻辑联结词和集合的运算有如下对应关系：

(1) 且（$\wedge$）——交（$\cap$）；

(2) 或（$\vee$）——并（$\cup$）；

(3) 非（$\neg$）——补（$\complement$）.

教学过程中，这些内容可以作为帮助学生理解逻辑联结词意义的辅助手段.

5. 关于“或”. “或”作为数理逻辑联结词与日常生活语言中的“或”意义不完全相同. 前者是“可兼的”，即当p和q中有一个为真时，确认$p\vee q$为真. 后者却是“不可兼的”（p和q只有一个为真时，p或q才真，两者都真时，p或q为假）. 例如，人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛”. 其中的“或”就是不可兼的，“不可兼的或”联结的两个命题事实上不可能同时为真. 教学过程中，首先应借助于真值表来理解数学中“或”的含义，不要过多地用自然语言解释，以防止因为自然语言的歧义性，引起学生理解上的混乱. 作为逻辑联结词教学时，这是应该特别注意的.

6. 关于“且（$\wedge$）”“或（$\vee$）”的使用. 复合命题“$p\wedge q$”与“$p\vee q$”是用逻辑联结

词联结的两个命题，而不能用“且（$\wedge$）”与“或（$\vee$）”去联结两个命题的条件，也不能用它们去联结两个命题的结论.

例 已知下列各组命题，试分别写出复合命题“$p\vee q$”与“$s\wedge t$”：

p：方程$(x-1)(x-2)=0$的根是$x=1$；

q：方程$(x-1)(x-2)=0$的根是$x=2$；

s：四条边相等的四边形是正方形；

t：四个角相等的四边形是正方形.

错解

$p\vee q$：方程$(x-1)(x-2)=0$的根是$x=1$或$x=2$；

$s\wedge t$：四条边相等且四个角相等的四边形是正方形.

分析 p，q，s，t都是假命题，所以“$p\vee q$”与“$s\wedge t$”也都是假命题，而上述解答中写出的两个命题却都是真命题．错误原因：前者只联结了两命题的结论；后者只联结了两命题的条件.

正解

$p\vee q$：方程$(x-1)(x-2)=0$的根是$x=1$或方程$(x-1)(x-2)=0$的根是$x=2$.

$s\wedge t$：四条边相等的四边形是正方形且四个角相等的四边形是正方形.

7. 关于“非（$\neg$）”.“非”命题是对原命题结论的否定．为避免歧义，教材没有用太多的自然语言说明“非”的含义．主要靠真值表来给出“非（$\neg$）”的定义，然后指出：p与$\neg p$不能同假或同真，其中一个为假，另一个必定为真．这部分内容是学生学习的难点，为了突破这个难点，教师教学时应注意以下几点：

(1) 对于简单命题，可直接用否定词否定其结论即可．常用的互为否定的词有：“是”与“不是”；“一定是”与“一定不是”；“都是”与“不都是”；“等于”与“不等于(大于或小于)”；“大于”与“不大于（小于或等于)”；“小于”与“不小于（大于或等于)”等等.

(2) 对于含有量词的复合命题，教材主要是通过例子进行讲解的，这里再举几个“公式化”的例子：

“对任意实数x，x具有性质p”与“存在一个实数x，x不具有性质p”.

这两个命题也是互为否定的关系．类似的互否关系还有：

“所有x成立”与“存在一个x不成立”；

“所有x不成立”与“存在一个x成立”；

“必有一个”与“一个也没有”；

“至少有n个”与“至多有$n-1$个”；

“至多有一个”与“至少有两个”；

……

教学时，可以结合本班、本校、本地的实际情况，有针对性地举例子，便于学生

理解.

(3) 关于“$p \wedge q$”与“$p \vee q$”的非，教材没有涉及，主要是为了降低难度，如果有的学生问及这样的问题，可参照下列公式给予答复

$$\neg(p \wedge q)=\neg p \vee \neg q, \neg(p \vee q)=\neg p \wedge \neg q,$$

并与学生一起用真值表进行验证. 由公式可以看出：命题“$p \wedge q$”和“$p \vee q$”的否定，既否定命题 p 和 q，又改变联结词（“且”和“或”互变）. 可见原命题与其非命题必是一对矛盾命题. 这部分内容也可从“15.3.2 逻辑代数的基本公式和定理”中的反演律（$\overline{A \cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$，$\overline{A+B}=\overline{A} \cdot \overline{B}$）得到印证.

(4) 命题的否定与学生在初中学习的否命题是完全不同的概念：Ⅰ. 任何命题均有否定，无论是真命题还是假命题；而否命题仅针对命题“若 p 则 q”提出来的. Ⅱ. 命题的否定是原命题的矛盾命题，两者必然是一真一假，一假一真；而否命题与原命题可能是同真同假，也可能是一真一假. Ⅲ. 命题“若 p 则 q”的否定为“虽然 p，却非 q”，非命题只是对原命题结论的否定；而它的否命题为“若非 p，则非 q”，既否定条件又否定结论.

“若 p 则 q”型命题的否定，教材上并未涉及，对学生不作要求，但教师一定要掌握.

15.2 数制

计算机之所以能够极快地进行运算，因为其使用只包含 0 和 1 两个数值的二进制. 在具体运算时，人们输入计算机的十进制被转换成二进制进行计算，计算后的结果又由二进制转换成十进制，这都由操作系统自动完成，并不需要人们手工去做，学习汇编语言，就必须了解二进制. 为了降低难度，本节所涉及的数均为正数.

在本节主要学习数制的概念，学习十进制与二进制表示形式之间的转换方法，转换时要特别注意要分整数部分和小数部分分别进行转换.

15.2.1 十进制与二进制

1. 本节的重点是了解数制的概念，掌握十进制数及按权展开式和二进制数及按权展开式.

2. 教材实例引入数制的概念，并以十进制数“555”为例介绍了按权展开式和权的概念. 十进制数、二进制数等，都是以“位置记数法”来记数的. 它们以各自的“基数”的整数幂作为数字的“权”，并乘以相应的“系数”组合而成. 同一个数，可以由不同的数制加以表达.

3. 对于进位计数制的理解要从三个要素入手：数码符号、进位规律和基数，如表 15-1.

表 15-1

数制	数码符号	进位规律	基数
十进制	0，1，2，3，4，5，6，7，8，9	逢十进一	10
二进制	0，1	逢二进一	2

4. 教材给出了二进制的实际应用背景，用二进制的 0 和 1 表示两种对立的物理状态，有利于对二进制的理解．对于本节内容的讲解，教师可补充一些实例，如让学生感受二进制在生活中的应用，加强学生对二进制的理解．

5. 对二进制数的按权展开，应特别重视，因为十进制数转换为二进制数需要用到这个内容．

15.2.2 十进制与二进制之间的转换

1. 本节的重点是数制间的转换，难点是把十进制数转换为二进制数．

2. 二进制数转换为十进制数比较简单，在上一节学习了二进制的按权展开式的基础上，只要采用“按权相加”的方法，即可得到相应的十进制数．

3. 对于十进制数转换为二进制数，由于整数和纯小数的转换方法是不同的，因此教材首先介绍了把十进制整数转换为二进制数的方法，再介绍了十进制纯小数的转换方法，最后把两种转换进行合并，至此得到了十进制正数转换为二进制的方法．

4. 应当注意的是，任何正的十进制整数都可表示为一个二进制数，但并不是任何正的纯小数都可以完全表示为一个二进制数，这一点应当向学生讲清楚．为此，教材在总结十进制纯小数转换成二进制时，要求“直到积中的小数部分为零或者达到所要求的精度为止”．

5. 关于例 3 和例 4 的说明．

例 3 把十进制数 25 转换成二进制数．

解

		余数
2	25	
2	12	1
2	6	0
2	3	0
2	1	1
	0	1

自下向上读数

所以，$(25)_{10}=(11001)_2$．

为了便于学生理解十进制整数转换为二进制整数采用“除 2 取余，逆序排列”法，可以把 $(11001)_2$ 的按权展开式写出来加以对照：

$$(11001)_2=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=(25)_{10}.$$

引导学生观察余数与系数的关系，从而理解把所有余数按逆序排列的原因．

例 4 把十进制数 0.7 转换成二进制数（保留 4 位小数）．

解

$$\begin{array}{r c}
0.7 & \\
\underline{\times\quad 2} & \text{整数} \\
1.4 & 1 \\
0.4 & \\
\underline{\times\quad 2} & \\
0.8 & 0 \\
\underline{\times\quad 2} & \\
1.6 & 1 \\
0.6 & \\
\underline{\times\quad 2} & \\
1.2 & 1
\end{array}
\Bigg\downarrow \text{自上向下读数}$$

所以 $(0.7)_{10}\approx(0.1011)_2$.

为了便于学生理解十进制纯小数转换成二进制数采用“乘 2 取整，顺序排列”法. 可以把 $(0.01011)^2$的按权展开式写出来加以对照：

$$(0.1011)_2=1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}+1\times2^{-4}\approx0.7.$$

引导学生观察整数与系数的关系，从而理解把取出的整数部分按顺序排列的原因.

15.3 逻辑代数

15.3.1 基本概念与基本逻辑运算

1. 本节的主要内容是逻辑代数的基本概念以及三种基本逻辑运算，重点是三种基本逻辑运算与、或、非的定义. 难点是逻辑运算与、或、非和三个逻辑联结词的联系.

2. 通过一个实际问题引入逻辑变量和逻辑常量的概念，目的是为了让学生平稳地由普通代数过渡到逻辑代数，更好地理解逻辑代数的思想.

3. 虽然逻辑代数与普通代数都能进行运算，但是它们之间的区别是明显的，在逻辑代数中，任意一个变量只能取 0，1 两个数值，而普通代数的变量通常可以取更多的值.

4. 需要特别注意的是，两个变量的与、或逻辑运算只有四种状态，因此它们的真值表只有四个状态下的定义. 变量的非运算只对两种状态定义. 在教学中，教师可以根据学生的实际情况，利用排列组合的知识分析多个变量的逻辑运算真值表的不同状态的个数.

5. 为了便于学生更好地理解三个基本逻辑运算的定义，教师可以利用开关控制电路进行演示试验，以增强学生对逻辑运算的理解，为以后的学习打下基础.

6. 教学中，要始终将逻辑运算与、或、非和三个逻辑联结词联系，进行对比教学.

在讲解逻辑运算法则时，可以类比普通代数运算法则进行讲解，利于学生记忆.

15.3.2　逻辑代数的运算律和基本定理

1. 本节的主要内容是逻辑代数的九组运算律和四个基本定理. 重点是在理解的基础上，熟记运算律和基本定理，难点是灵活运用运算律和基本定理化简逻辑表达式.

2. 逻辑代数的运算律直接呈现出来，并没有进行严格的推导证明. 在教学中，教师可以根据实际情况，用开关控制电路试验对基本公式进行解释，引导学生用真值表进行验证，这些过程有利于学生理解和记忆基本公式. 为了便于学生记忆，教学中也可以采用类比普通代数运算的方法，辅助学生记忆基本公式. 教师一定要重视本节的教学，这是以后学好逻辑代数的前提.

3. 对于基本定律的证明，最直接的方法是用真值表法，在列出变量所有取值的情况下，计算等号两边的逻辑值，相等则等式成立. 例如验证反演律（摩根定律）$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$和$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$. 列出表达式等号两边的真值表，如表15-2.

表15-2　证明反演律的真值表

A	B	$A\cdot B$	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

可以看出，在A，B所有取值情况下，等号两边的值均相等，则摩根定律成立.

4. 逻辑代数的逻辑运算规律是在运算律之后呈现的，目的是为了用基本公式证明基本定理，在证明基本定理过程中，让学生初步体会逻辑化简运算，为后面的逻辑函数的化简打基础.

5. 在学习四个基本定理的基础上还要注意这些定理的推广形式，在今后的逻辑化简过程中，经常采用推广形式. 教学时，可以增加几个练习，让学生对定理的推广形式进行练习.

6. 由于学生初次接触逻辑化简，感觉既熟悉又陌生. 对于例1，例2的讲解，教师可以适当的补充部分简单的逻辑化简例题，使学生能够逐步适应逻辑的化简运算. 为了更好的应用基本公式和定理，必须让学生把基本公式和基本定理理解背诵熟练之后，再进行逻辑化简. 在化简过程中，一定要注意与普通代数的区别和联系.

15.3.3　逻辑函数

1. 本节的主要内容是逻辑函数的概念、逻辑函数的最小项以及其逻辑相邻. 重点是逻辑函数的最小项及其逻辑相邻. 难点是逻辑最小项的理解.

2. 本节的逻辑函数是多元变量的函数，而学生在以前只接触到一元函数，可以先举

几个多元普通函数的例子，例如 $f(x,y,z)=3x+2y-z$，然后再多举几个二元、三元、四元逻辑函数辅助学生理解. 教学过程中一定强调逻辑函数的自变量取值和函数值只能是 0 和 1 两个值.

3. 函数最小项是本节的难点，也是重点，这是以后化简逻辑函数表达式和使用卡诺图化简的基础. 教材中以三个变量的逻辑函数为例讲解函数最小项，在讲解之前，建议教师复习二进制数与十进制数的转换，并熟练掌握表 15-3 中的对应关系，为学习函数最小项扫除一个障碍.

表 15-3

二进制	00	01	10	11				
十进制	0	1	2	3				
二进制	000	001	010	011	100	101	110	111
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7
二进制	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7
二进制	1 000	1 001	1 010	1 011	1 100	1 101	1 110	1 111
十进制	8	9	10	11	12	13	14	15

4. 写出逻辑函数的所有最小项用到分步计数原理的知识. 建议教师教学生列出所有最小项的方法，使学生不重不漏地写出所有最小项.

5. 对于逻辑函数的逻辑相邻，学生较难理解，教师可以多举例，也可以采用让学生相互提问回答的形式进行练习，使学生真正体会逻辑相邻的含义.

15.3.4 逻辑函数的表示方法

1. 本节的主要内容是逻辑函数表达式的概念，常用的逻辑函数表达式及其运算，卡诺图及其与逻辑函数表达式的互化. 重点是逻辑函数表达式的运算及其与卡诺图的互化. 难点是逻辑函数表达式与卡诺图的互化.

2. 本节所列出的常用的逻辑函数表达式不要求学生掌握，但要使学生了解各种常用逻辑函数表达式的运算过程，以及函数的取值情况.

3. 对于求逻辑函数的函数值，给出两类情况，一类是指给定逻辑变量取值（0 或 1），求函数值. 需要用到三个基本逻辑运算（与、或、非）的运算法则，建议在复习逻辑运算的运算法则的基础上，讲解例 3. 另一类是写出逻辑函数的真值表. 需要用到三个基本逻辑运算（与、或、非）的真值表，学生在开始练习时，要强调注意三种逻辑运算的优先级.

4. 例 5 和例 6 讲解的是逻辑函数不同表达方式的相互转换，这是难点. 例 5 是将逻辑函数表达式表示为最小项表达式. 首先教师要进一步强调逻辑函数最小项的概念，并

要注意在转换过程中的"配项"思想，强调只是对缺变量的项用公式 $A+\overline{A}=1$ 进行配项. 例 6 是将逻辑函数的真值表转换成逻辑函数"与－或"表达式. 这里要注意函数最小项与二进制数的对应.

5. 卡诺图的引入是为了下一节逻辑函数表达式的化简提供一个简捷的工具. 在本节中，教师要让学生能够熟练地进行逻辑函数表达式、真值表、最小项表达式以及卡诺图的相互转换. 其关键在于会写逻辑函数的最小项. 教师可以多加例题和练习，使学生掌握逻辑函数这四种表示方法，并熟练地进行转换，否则在以后学习中将造成运算的混淆.

6. 在讲解卡诺图的立体几何相邻时，教师可以让学生制作卡诺图的卡片，自己进行试验，便于学生对卡诺图更好的理解.

7. 注意卡诺图中小方格中的最小项必须是逻辑相邻的. 例如在教材图 15-7 中，m_0，m_1，之后不是 m_2，而是 m_3，这在教学中，要提醒学生注意.

15.3.5　逻辑函数的化简

1. 本节的重点是逻辑函数的代数化简法和卡诺图化简法，难点是这两种化简方法的灵活应用.

2. 在实际应用中，进行逻辑设计时，由逻辑问题归纳出来的逻辑函数式往往不是最简逻辑函数式，并且可以有不同的形式，因此，实现这些逻辑函数就会有不同的逻辑电路. 对逻辑函数进行化简，可以得到最简的逻辑函数式，设计出简洁的逻辑电路. 这对于节省元器件，优化生产工艺，降低生产成本和提高系统的可靠性，提高产品在市场的竞争力是非常重要的.

3. 教材主要介绍几种基本公式的化简方法，即并项法、吸收法、消去法和配项法. 对于各种方法都适合"代入规则"，也就是说，在各种方法中所涉及的变量也可以代表任何复杂的逻辑函数表达式，这一点应当向学生讲清楚.

4. 公式法化简逻辑函数的优点是简单方便，对逻辑函数式中的变量个数没有限制，它适用于变量较多，较复杂的逻辑函数的化简. 它的缺点是需要熟练掌握和灵活运用逻辑代数的基本定律和基本公式，而且还需要有一定的化简技巧. 另外，公式法化简也不易判断所得到的逻辑函数是不是最简式. 只有通过多做练习，积累经验，才能做到熟能生巧，较好地掌握公式法化简方法.

5. 相比代数化简法，运用卡诺图对逻辑函数进行化简显得直观. 卡诺图是真值表的一种变换，比真值表更明确地表示出了逻辑函数的内在联系，使用卡诺图可以避免繁琐的代数运算.

6. 卡诺图的化简原理是通过把卡诺图上表征相邻最小项的相邻小方格"圈"在一起进行合并，达到用一个简单"与"项代替若干最小项的目的. 通常把用来包围那些能由一个简单"与"项代替的若干最小项的"圈"称为卡诺圈.

7. 在作卡诺圈时，对于注意事项中"有些方格可以被圈，但是每个圈都要有新的方

格，否则该圈所表示的'与'项是多余的"这一要求在教材中没有给出具体的例子，教师可酌情处理. 例如：用卡诺图化简函数

$$F(A,B)=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B.$$

如图 15-1 可知，$F(A,B)=\overline{A}+\overline{B}$.

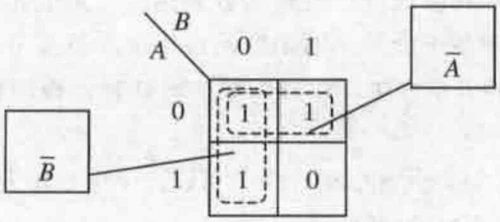


图 15-1

15.3.6 逻辑图

1. 逻辑图是采用规定的图形符号，来构成逻辑函数运算关系的网络图形，也就是用逻辑符号表示变量逻辑关系或基本单元电路的符号图，其特点是接近实际电路.

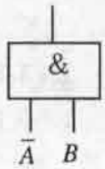


图 15-2

2. 本节的重点是熟悉与非、或非、与或非、异或和异或非等对应的门电路，能进行逻辑图与相应的逻辑函数表达式的转换.

3. 对于含有反变量的逻辑图，有时我们可以用一种简单记法表示，例如：$\overline{A}B$ 的逻辑图可以用下面的符号（图 15-2）来表示.

Ⅳ 参考教案

课题：15.2.2 二进制与十进制之间的转换

教学目标：

1. 复习数制的概念，以及把二进制数按权展开的方法；

2. 熟练掌握二、十进制间相互转换的方法.

教学重点：

二、十进制间相互转换.

教学难点：

十进制转化为二进制.

学情分析：

经过上一节的学习，学生对十进制数与二进制数的按权展开已经比较熟悉，本节首先把二进制数按权展开后，再按十进制加法规则求和，得到相应的十进制数. 这是学生

比较容易理解和掌握的. 但是，十进制数转换成二进制数相对比较难，需要分三步进行：首先把十进制整数转换成二进制数，然后把十进制纯小数转换成二进制数，最后把一般的十进制数转换成二进制数，这个过程力求充分利用学生已经会把二进制数的按权展开，引导他们逆向思考，理解十进制整数转换为二进制整数采用“除 2 取余，逆序排列”法，以及十进制纯小数转换成二进制小数采用“乘 2 取整，顺序排列”法的根据. 最终学会把十进制数转换成二进制数的方法. 这样由浅入深，便于学生更好地理解接受、消化吸收本节课的知识.

教学方法：

以旧引新法、引导探索法、讲练结合法.

教学过程

（一）引入

1. 复习数制的概念，以及进位计数制的三个要素：数码符号、进位规律和基数.

2. 引导学生复习十进制的权、二进制的权的概念，并举例子让学生逐一说出二进制数各位数上的权.

3. 把下列数按权展开（分组、分层次进行）：

(1) $(10)_2$，　(2) $(101)_2$，　(3) $(11.01)_2$，

(4) $(0.01011)_2$，　(5) $(11001)_2$，　(6) $(10011.001)_2$.

引导学生把展开式求和，自然地引入把二进制数转化为十进制数.

（二）新课讲授与课堂练习

1. 引导学生发现：所求出的和已经是十进制数，并总结出把二进制数转化为十进制数的方法.

2. 课堂练习：练习 15-6 第 1 题.

3. 提出问题：如何把十进制数转化为二进制数？引导学生观察二进制整数 $(10)_2$，$(101)_2$，$(11001)_2$的展开式：

$$(10)_2=2^1=2,$$

$$(101)_2=2^2+2^0=5,$$

$$\begin{aligned}(11001)_2&=2^4+2^3+2^0\\&=16+8+1\\&=(25)_{10}.\end{aligned}$$

学生分组讨论：上述式子如果从结果开始往前看，那就应该是把十进制数转化为二进制数的过程. 这个过程如何实现呢？

4. 根据学生讨论情况，师生共同研究：以 $(25)_{10}$ 为例，既然二进制的权是 2^i，因此只需要把十进制数 25 变成一些 2^i的和即可，这样只需用短除法把 25 不断地除以 2，并在相应的行记下余数（余数为 0 时，也作记录），直到商为零时止. 此时特别注意引导学生观察：把所得余数怎样排列才是所求的二进制数？为什么？

5. 总结十进制整数转换为二进制整数方法（“除 2 取余，逆序排列”法）后，进行课堂练习（练习 15-6 第 2 题（1）～（5）小题）.

6. 观察 $(0.010\ 11)_2$ 的按权展开式，引导学生想一想，十进制纯小数转换成二进制数，能否继续用“除 2 取余，逆序排列”法？为什么？

$$(0.010\ 11)_2=1\times2^{-2}+0\times2^{-3}+1\times2^{-4}+1\times2^{-5}=0.37.$$

7. 讲解例 4，总结方法：十进制小数转换成二进制小数采用“乘 2 取整，顺序排列”法. 具体做法是：用 2 乘十进制小数，可以得到积，将积的整数部分取出，再用 2 乘余下的小数部分，又得到一个积，再将积的整数部分取出，如此进行，直到积中的小数部分为零（或者达到所要求的精度）为止. 然后把取出的整数部分按顺序排列起来（先取的整数作为二进制小数的高位有效位，后取的整数作为低位有效位）即可.

8. 课堂练习：练习 15-6 第 2 题（6）～（7）小题.

9. 提出问题：观察十进制整数转换成二进制数的过程，把它与二进制数转换成十进制数的过程相比较，你能说出“除 2 取余，逆序排列”法的道理吗？给学生留出比较观察的时间.

10. 课堂练习：例 5 和练习 15-6 第 2 题（8）小题.

（三）小结

本节课主要讲了二进制与十进制间的相互转换，这节课重点要求掌握二进制和十进制之间的相互转换方法，难点是十进制数转化为二进制数. 本节课学习的转化方法有：二进制转化成十进制用“按权相加法”；十进制转化成二进制时，整数部分用“除 2 取余，逆序排列”法，小数部分用“乘 2 取整，顺序排列”法. 请学生回去比较、观察，看能不能用自己的话把这些规则表达出来，使之成为自己的东西.

（四）作业

1. 练习 15-6 第 2 题（8）～（10）小题.

2. 用自己的语言叙述二进制数转换成十进制数的方法.

（五）板书设计

15.2.2 二进制与十进制之间的转换

一、二进制数转换成十进制数	四、小结
例 2	1. 二进制数转换成十进制数：“按权相加”法；
二、十进制数转换成二进制数	2. 十进制整数转换为二进制数：“除 2 取余，逆序排列”法；
例 3　　例 4	3. 十进制小数转换为二进制数：“乘 2 取整，顺序排列”法.
三、课堂练习（分批投影练习 15-6 的有关题目）	

V　习题答案、提示和解答

练习 15-1

1. (1) 不是；(2) 不是；(3) 不是；(4) 是；(5) 不是；
(6) 不是；(7) 是；(8) 是；(9) 不是；(10) 是.

2. (1) 真命题；(2) 假命题；(3) 假命题；(4) 假命题；(5) 真命题；
(6) 真命题；(7) 假命题；(8) 真命题；(9) 假命题；(10) 真命题.

练习 15-2

1. (1) 是；$\forall x\in\mathbf{N}$，$x^2>0$；(2) 是；$\forall x\in\mathbf{R}$，$5x-12=0$；(3) 是；$\exists x\in\mathbf{N}$，x 是奇数；(4) 是；$\forall x\in\mathbf{R}$，x 可以用数轴上的点表示.

2. (1) 假命题；(2) 真命题；(3) 假命题；(4) 真命题；(5) 真命题；(6) 假命题.

3. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 真命题；(4) 假命题；(5) 假命题；(6) 假命题.

4. 略.

练习 15-3

1. (1) 真命题；(2) 假命题；(3) 真命题；(4) 真命题；(5) 真命题；(6) 假命题；(7) 假命题；(8) 真命题.

2. (1) $2+3=8$ 且 $12-9=1$；假命题.
(2) 24 是 3 的倍数且 24 是 7 的倍数；假命题.
(3) 1 730 能被 5 整除且 5 是 2 680 的约数；真命题.
(4) $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$ 且 $\pi\notin\mathbf{R}$；假命题.
(5) $\sin\frac{\pi}{2}=1$ 且 $\cos\frac{\pi}{2}=0$；真命题.
(6) $\tan\frac{\pi}{4}=1$ 且 $\cot\frac{\pi}{4}=2$；假命题.

3. (1) $2+3=8$ 或 $12-9=1$；假命题.
(2) 24 是 3 的倍数或 24 是 7 的倍数；真命题.
(3) 1 730 能被 5 整除或 5 是 2 680 的约数；真命题.
(4) $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$ 或 $\pi\notin\mathbf{R}$；真命题.
(5) $\sin\frac{\pi}{2}=1$ 或 $\cos\frac{\pi}{2}=0$；真命题.
(6) $\tan\frac{\pi}{4}=1$ 或 $\cot\frac{\pi}{4}=2$；真命题.

4. 略.

练习 15-4

1. (1) 假命题；(2) 假命题；(3) 假命题；(4) 真命题.

2. (1) 假命题；(2) 假命题；(3) 假命题；(4) 假命题.

3. (1) $\neg p$：$\exists a\in M$，$a\leqslant 0$；真命题.　(2) $\neg q$：$\exists b\in M$，b 为奇数；真命题.

   (3) $\neg r$：$\forall c\in M$，c 不是质数；真命题. (4) $\neg s$：$\forall d\in\{$奇数$\}$，$d\notin M$；假命题.

练习 15-5

1. 略.

2. 略.

练习 15-6

1. (1) 2；(2) 4；(3) 5；(4) 2.5；(5) 5.25；(6) 59.625.

2. (1) 11； (2) 101； (3) 1000； (4) 1100； (5) 1111101； (6) 0.01001；

   (7) 0.11；(8) 1000.11；(9) 100101.01.

练习 15-7

1. (1) 与；(2) 或；(3) 非.

2. 略.

3. 设 A 为光控开关，B 为声控开关，F 为灯，于是 $F=\overline{A}B$. 如右表.

A（光）	B（声）	F
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

（第 3 题）

练习 15-8

1. C.

2. $\overline{A}\,\overline{B}$.

3. $\overline{C}$.

4. $A+B$.

5. $\overline{C}$.

6. 0.

练习 15-9

1. (1) 是；不是；(2) 8；32.

2. 略.

3. 有 4 个最小项，分别是：$m_0=\overline{A}\,\overline{B}$，$m_1=\overline{A}B$，$m_2=A\overline{B}$，$m_3=AB$.

4. $m_0=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$，$m_1=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$，$m_2=\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$，$m_3=\overline{A}\,\overline{B}CD$，$m_4=\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$，

   $m_5=\overline{A}B\overline{C}D$，$m_6=\overline{A}BC\overline{D}$，$m_7=\overline{A}BCD$，$m_8=A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$，$m_9=A\overline{B}\,\overline{C}D$，

   $m_{10}=A\overline{B}C\overline{D}$，$m_{11}=A\overline{B}CD$，$m_{12}=AB\overline{C}\,\overline{D}$，$m_{13}=AB\overline{C}D$，$m_{14}=ABC\overline{D}$，

   $m_{15}=ABCD$；m_7 的逻辑相邻项为 $m_3=\overline{A}\,\overline{B}CD$，$m_5=\overline{A}B\overline{C}D$，$m_6=\overline{A}BC\overline{D}$，

   $m_{15}=ABCD$.

练习 15-10

1.

A	B	C	$\bar{A}\bar{B}+\bar{A}C$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

2. $F(A, B)=\bar{A}B+AB+\bar{A}\bar{B}$.

3. (1) 略.

(2)

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	1
1			1	

4. (1) 卡诺图略；$F(A,B)=m_1+m_3$；

(2) 卡诺图略；$F(A,B,C)=m_0+m_3+m_6$.

练习 15-11

1. 略.

2. $F(A,B,C,D)=m_0+m_5+m_6+m_9+m_{14}$.

3. 略.

4. (1) $F(A,B,C,D)=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}BC\bar{D}+AB\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}D+ABCD+ABC\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D=\bar{B}\bar{C}+A\bar{C}+AB+BC\bar{D}$；

(2) $F(A,B,C,D)=\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BC\bar{D}+AB\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}D+ABC\bar{D}+A\bar{B}CD=B\bar{C}+B\bar{D}+\bar{B}CD$.

5. (1) 卡诺图略；$F(A,B,C,D)=AB+CD+AC+\bar{B}\bar{C}\bar{D}$.

(2) 卡诺图略；$F(A,B,C,D)=AD+AC+BC$.

练习 15-12

1. 略.

2. (1) $Y=(A+B)+B\bar{C}=A+B$；

(2) $Y=(A+B)(A+C)(B+\overline{C})$.

习题十五

1. (1) p 或 q：$\sqrt{5}>2$ 或$\sqrt{5}$是无理数. 是真命题.

p 且 q：$\sqrt{5}>2$ 且$\sqrt{5}$是无理数. 是真命题.

非 p：$\sqrt{5}\leqslant 2$. 是假命题.

(2) p 或 q：平行四边形对角线相等或互相平分. 是真命题.

p 且 q：平行四边形对角线相等且互相平分. 是真命题.

非 p：平行四边形对角线不相等. 是假命题.

(3) p 或 q：10 是自然数或是奇数. 是真命题.

p 且 q：10 是自然数且是奇数. 是假命题.

非 p：10 不是自然数. 是假命题.

2. (1) "p 或 q". p：$x=2$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根，q：$x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$的根.

(2) "p 且 q". p：π 大于 3，q：π 是无理数.

(3) "非 p". p：直角等于 $90°$.

(4) "p 或 q". p：$x+1>x-3$，q：$x+1=x-3$.

(5) "p 且 q". p：垂直于弦的直径平分这条弦，q：垂直于弦的直径平分这条弦所对的两条弧.

3. (1) 11001；　(2) 1111111；　(3) 100111.11.

4. (1) 53.5；　(2) 37；　(3) 178.687 5.

5. (1) $AC+\overline{A}B$；　(2) $AC+BC$.

6. (1) 右边$=AB+AC+AC+AC+AB+BC+ABC+BC=AB+BC+AC$

$=$左边.

原题得证.

(2) 左边$=A(B+\overline{B})+\overline{A}B=A+\overline{A}B=A+B=$右边.

原题得证.

(3) 左边$=\overline{\overline{A}B}\cdot\overline{A\overline{B}}=(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=$右边.

原题得证.

(4) 右边$=\overline{A\overline{B}}\cdot\overline{B\overline{C}}\cdot\overline{C\overline{A}}$

$=(\overline{A}+B)(\overline{B}+C)(\overline{C}+A)$

$=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}A+\overline{A}C\overline{C}+\overline{A}CA+B\overline{B}\overline{C}+B\overline{B}A+BC\overline{C}+BCA$

$=ABC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}=$右边.

原题得证.

7. (1) $A+BC=(A+B)(A+C)$；

A	B	C	$A+BC$	$(A+B)(A+C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

(2) $ABC+\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=1$.

A	B	C	$ABC+\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

8. (1) $A\overline{B}\overline{C}$, ABC, $\overline{A}\overline{B}C$；　(2) $A\overline{B}C\overline{D}$, $A\overline{B}\overline{C}D$, $ABCD$, $\overline{A}\overline{B}CD$.

9. $F(A,B,C)=\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

10. (1) $F(A,B,C,D)=A\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{B}\overline{C}D+BC\overline{D}$；

(2) $F(A,B,C,D)=\overline{B}\overline{C}+\overline{B}\overline{D}$.

11. (1)

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1				

$F(A, B, C)=\overline{A}$；

(2)

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1	1	1	
11				
10				

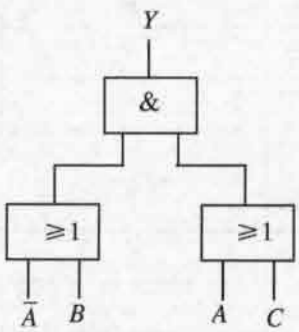
$F(A,B,C,D)=\bar{A}\bar{C}+\bar{A}D$；

(3)

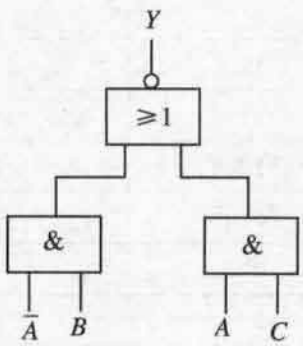
$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

$F(A,B,C,D)=\bar{B}\bar{D}$.

12. (1)



(2)



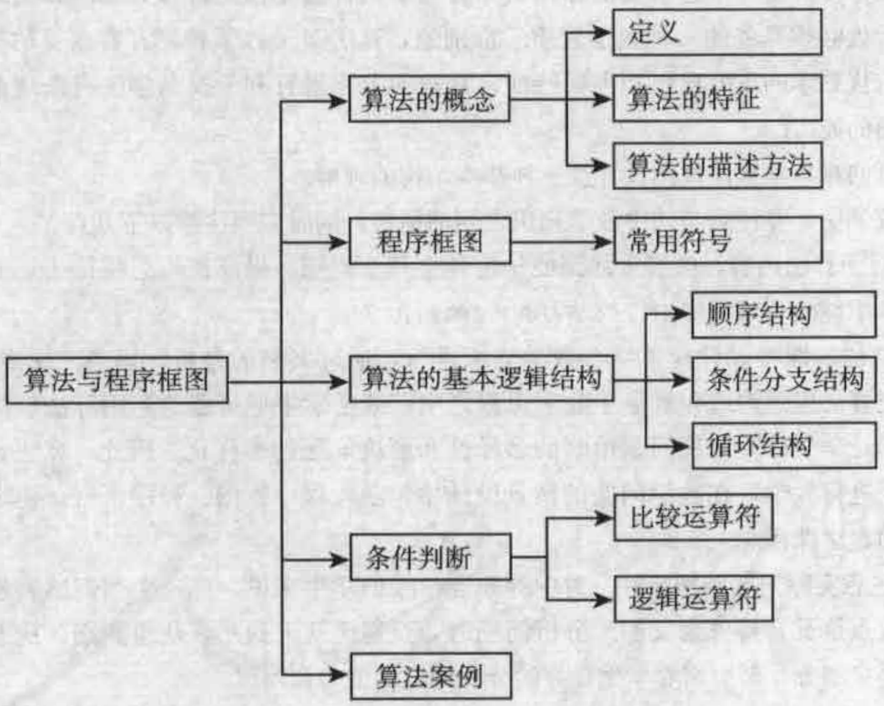
13. (1) $Y=AB\bar{C}D+\overline{AB\bar{C}D}$；

(2) $Y=(A+B)+AC+B\bar{C}$.

第十六章　算法与程序框图

> 思想火花：
>
> 最有价值的知识是关于方法的知识.
>
> ——达尔文

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 通过日常生活中的实例了解算法的概念，了解算法的五大特征.

2. 了解算法的描述方法，会用自然语言描述算法的过程.

3. 掌握程序框图的基本图例，理解用程序框图描述的算法.

4. 掌握算法的三种基本逻辑结构，能用程序框图描述算法.

5. 理解条件运算符及逻辑运算符的作用及运算规则.

III 教材分析和教学建议

本章主要内容包括算法的概念及其描述方法、程序框图及算法的基本逻辑结构.

本章共分四节内容. 第一节是算法的概念，是本章最重要的基本概念. 本节通过日常生活中的实例，给出了算法的概念；第二节是程序框图与算法的基本逻辑结构，重点讲述了算法描述最常用的一种方法. 教材通过实例介绍了算法的程序框图的画法及基本结构；第三节是条件判断，结合实例讲述了条件表达式和逻辑表达式的构成及运算方法；第四节是算法案例，用大量的实例说明了如何利用程序框图进行算法设计，目的在于使学生能够运用数学和计算机解决实际问题，培养学生创新能力.

本章的重点是对算法概念的理解. 随着现代信息技术的飞速发展，算法在科学技术、社会发展中发挥着越来越重要的作用，并日益融入社会生活的许多方面. 算法思想已经成为现代人必须具备的一种数学素质. 特别地，算法对于数学教育有着重要的作用，它是中国古代数学的重要思想和主要特征，算法学习非常有利于提高学生有条理地处理和解决问题的能力.

本章的难点是程序框图设计及三种基本结构的理解.

在教学中，要注意与初中数学知识之间的衔接，同时应当注意以下几点：

1. 对于算法内容，应着重强调使学生体会算法思想、提高逻辑思维能力，而不应将算法内容单纯处理成程序语言的学习和程序设计.

2. 算法的课程设计应该结合数学知识进行，通过案例的分析、模仿、探索、设计、操作，把算法思想渗透和贯穿于数学课程之中，鼓励学生尽可能地运用算法解决相关问题，提倡让学生体验解决问题策略的多样性和解决问题的多样化. 因此，算法必须围绕具体案例进行教学，在数学问题的情景设计中，融入程序框图、程序语言，使之成为系统有效的算法课程.

3. 注意实际问题的趣味性. 对中等职业学校的学生来说，把一个他们感兴趣的问题作为切入点是具有特殊意义的. 分析问题时，要遵循从大到小，从粗到细，从上到下的原则，逐步细分，努力培养学生良好的分析问题的能力和习惯.

本章教学约需 16 课时，具体安排如下（仅供参考）：

16.1 算法的概念	2 课时
16.2 程序框图与算法的基本逻辑结构	
16.2.1 程序框图的基本图例	0.5 课时
16.2.2 顺序结构及其框图	0.5 课时
16.2.3 条件分支结构及其框图	1 课时

16.1　算法的概念

1. 本小节的重点是在理解算法的基础上，了解算法的特征及算法的表示方法，难点是算法的表示．本节通过例子让学生理解算法的概念，通过列举实际生活中的常见的问题，说明解决问题要一步一步的完成，从而总结出算法的概念，然后用具体实例进一步阐述算法的思想．在这一小节，教师可适当引导学生举一些实际例子，让学生用自然语言进行描述，不要苛求非常精确，但要有条理，以帮助学生充分理解算法的概念．

2. 由于学生生活背景和思考角度不同，他们设计的算法必然是多样的．传统数学教学习惯于把现成的思维模式和方法强加给学生，使学生过早地拘泥于思维模式的统一性或规范性，因而学生只学会用一种解法去解决某一个问题，这样既省力又“见效”，但从建构主义学习观来看，这种学习只是一种被动的、非主动建构的过程．教师应该尊重学生的想法，提倡算法的多样化，鼓励学生开发和使用不同的途径来实现算法，选取具有多种算法解答的问题开展教学，同时鼓励学生主动设计、使用和讨论所开发的算法，论证哪种方式最适合解决问题，体验算法的积极与灵活．对于学生的各种独特的算法，甚至不着边际的想法都不应该加以阻挠，要让他们充分发展，充分享有“再创造”的自由．

3. 算法的概念不像数学概念那样精确，所以在教学过程中不要特别强调算法的定义．

4. 算法的五个特征中最重要的是有穷性、确定性和有效性．要让学生理解，一个算法应包含有限的步骤，而不能是无限的．事实上，有穷性也应在一个合理的范围内，若一个算法让计算机执行 100 万年才结束，虽然也是有穷的，但这样的算法也是没有用的．所以有穷性只是个模糊的要求．算法的确定性是指算法中的每一步骤中的每个操作都是具体、明确的，而不能含糊或模棱两可．如在菜谱中有一个操作是放适量的盐，操作者就不知道到底应放多少盐，所以这个操作就是不确定的．有效性是指算法中的操作可以实现，例如当 $b=0$ 时计算 a/b 就不是一个有效的操作．另外注意，不同的教材对算法的特征的说明有所不同，但大同小异．

5. 算法的描述方法有很多，本教材主要介绍了三种，主要让学生了解每种方法的特点，自然语言是学生比较容易接受的一种方法，所以开始可以让学生用自然语言描述算法，但同时也应让学生了解这种方法的缺点，以后在描述算法时一般不用这种方法，当然这种方法在开始设计算法时还是比较有用的．本章的第二节主要介绍用程序框图来描述算法，也是本章的重点和难点．程序框图也称为流程图，是用一些图形符号和文字来描述算法，本节只是简单介绍描述方法的种类，不用细讲．

16.2 程序框图与算法的基本逻辑结构

本节介绍的内容是本章的重点，也是难点，主要介绍用流程图来描述算法，以及构成算法的三种基本结构：顺序结构、条件分支结构和循环结构.

程序框图是描述算法最常用的方法，用这种方法描述的算法结构更清晰，步骤更直观、更精确，不容易产生歧义.

画程序框图时常用到一些基本的图形符号，在掌握这些常用图形符号的功能和作用的前提下，要熟练掌握三种基本逻辑结构.

16.2.1 程序框图的基本图例

1. 本小节内容主要包括画程序框图时所用到的图形符号和流程线，并强调了在画程序框图时应注意的问题，重点是框图的画法和作用.

2. 图形符号是最基本的内容，在教学中，首先要把各种符号的作用和使用方法讲清楚，达到图形、名称、作用三者的统一，要让学生掌握一些基本的东西，例如，一般情况下，什么操作选择什么符号，并要举一些简单例子加以说明，其中判断框不要过多介绍，可以放在 16.2.3 中详细介绍.

3. 实际上，这几个符号的用法非常明确. 起止框只能用于表示算法的开始和结束；输入输出框只能用于输入输出数据；而当需要根据条件的成立与否选择不同的操作时；只能用判断框。除了上述情况外，大部分的操作都用处理框.

4. 在画程序框图时，一定要在图形符号内加注文字说明，如输入输出框要写清楚要求输入或输出的是哪些常量或变量的值，判断框内要写清楚判断的条件（一般是等式或不等式），处理框内一般是计算的公式（或者是给变量赋值的式子）.

16.2.2 顺序结构及其框图

1. 本小节内容主要介绍三种基本逻辑结构中的顺序结构.

2. 顺序结构是三种基本结构中最简单的一种，讲解时要从排队、串糖球等日常生活中的一些现象开始导入，这种结构所描述的算法，其操作是按照先后次序依次进行的，并且在顺序结构中的所有操作都将被执行. 一般来说，任何一个算法从结构上看都是一个顺序结构，如图 16-1 所示.

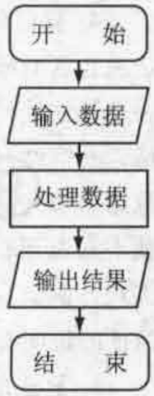


图 16-1

3. 在使用变量时，必须做到：先赋值，后使用. 需说明的是：在顺序结构中的赋值，有的可以交换赋值的顺序，如教材 16.2.2 例 3 中：先对 p 赋值，后对 q 赋值，也可以改为：先对 q 赋值，后对 p 赋值；有的是不能交换顺序的，如教材 16.2.2 例 2 中：先对 s 赋值，再对 S 赋值，这里就不能先对 S 赋值，后对 s 赋值.

16.2.3 条件分支结构及其框图

1. 本小节的内容主要介绍条件分支结构的特点和执行过程，学生在设计算法时应学会正确使用条件分支结构. 其重点是掌握分支结构框图的画法.

2. 条件分支结构也称为选择结构，这种算法的结构特点是只有一个入口，却有两个出口．在日常生活中经常会遇到这样的问题，如从济南到北京可以乘飞机也可以坐火车，你可以选择一种方式；在这种结构中，关键的问题是根据什么条件进行选择，也就是判断的条件．这种结构就像你走到一个三岔路口，需要选择走哪条路，但只能选择其中之一．

3. 关于判断的条件在 16.3 专门进行介绍，因为条件分支结构是根据条件的计算结果来决定执行哪个操作，所以在讲授时还应强调条件的计算结果只能有两种值，如对、错，或者真、假等．

16.2.4　循环结构及其框图

1. 本小节的内容主要介绍循环结构的特点和执行过程，学生在设计算法时应学会正确使用循环结构．其重点是掌握循环框图的画法．

2. 在三种基本结构中，循环结构是最复杂、最难掌握的．在教学过程中，首先应通过大量实例使学生理解什么是循环，让学生感受机械重复操作的过程，从而产生建立处理循环问题的算法结构的需求；如一年四季春、夏、秋、冬周而复始．

3. 循环结构通常分"当型"循环结构和"直到"型循环结构两种，前者先判断再执行，后者先执行再判断（即直到型循环结构至少执行一次）．考虑到学生的接受能力，对两种循环结构的区别与联系，可待学生有了一定的认识和算法设计的基础之后，教师再作适当的回顾和补充．

4. 在教学过程中，要让学生学会循环结构的执行过程，什么时候重复执行循环体，什么时候退出循环．用循环结构实现算法的难点是如何把解决问题的方法转化为循环的方式，可通过一些常见问题如求和、求最大值等例题，使学生逐步掌握转化的方法．

16.3　条件判断

1. 本节的内容是与算法的条件分支结构和循环结构密切相关的，并且与命题逻辑也有关系．重点是让学生掌握条件的转化和表示．

2. 在条件的表示中，最常用的符号是比较运算符，这些符号和数学中的意义是一样的，所以学生还是比较容易接受和理解的．但有一点要注意，如果算法让计算机执行时，等号运算一般不能比较两个实数，这是因为实数在计算机中存储的时候是不太精确的．这一点在教学时可以提一下，两个实数比较是否相等要通过比较两个实数之差是否小于一个非常小的数来实现，但不要深讲．

3. 逻辑运算符与命题逻辑中的逻辑运算是相同的，因此这部分内容主要让学生多加练习即可．

16.4　算法案例

1. 本节内容主要通过大量的案例使学生掌握算法概念及用程序框图设计算法的方法．重点是分析问题和解决问题的能力培养．

2. 在教学中，对每个案例首先要分析其输入的数据和输出的数据，也就是已知和求解，然后再考虑解决问题的方法和基本思路，比较常用的算法思想有穷举法、二分法等，在分析时不要考虑的太细，主要是算法的基本框架. 在确定了算法的基本思想和基本框架后再考虑算法中的细节，培养学生算法的设计能力.

3. 例 3 中的解答是错误的，忽视了条件"不足 10 元按 10 元计算手续费"，原题及正确的解答如下：

例 3 火车站对乘客退票收取一定的费用，具体办法是：2 元以下的票不退，票价不小于 2 元的，按票价每 10 元（不足 10 元按 10 元计算）核收 2 元. 试写出计算票价为 x 元的车票退掉后，返还的金额 y 元的算法的程序框图.

解 首先对票价小于 2 元的票进行处理，对大于 2 元的票要计算出包含几个 10，可以采用将 x 除以 10 取整数的方法，具体算法的程序框图如图 16-2 所示.

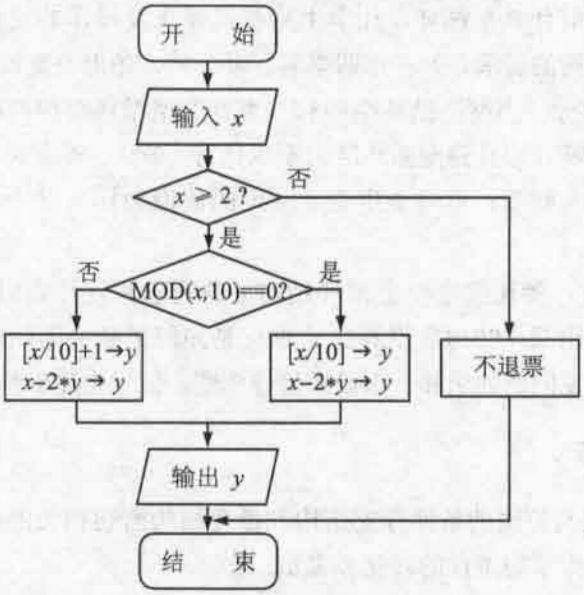


图 16-2

Ⅳ 参考教案

课题：16.2.1 程序框图的基本图例

教学目标：

1. 理解并掌握程序框图的基本图形符号，初步运用程序框图描述算法.

2. 通过设置问题情境，培养学生观察分析归纳解决问题的能力，培养学生严谨的逻辑思维能力.

教学重点：

程序框图的基本图形符号及其简单应用；

教学难点：

综合运用基本图形符号正确地画出程序框图.

教学方法：

本节课采用观察、归纳、启发探究相结合的教学方法，运用现代化多媒体教学手段，进行教学活动. 设置由易到难的问题引导学生观察、分析、归纳，教师总结知识，形成图表；针对例题，学生在独立思考的基础上进行合作交流，在思考、探究和交流的过程中获得对程序框图与算法的全面的体验和理解.

教学过程：

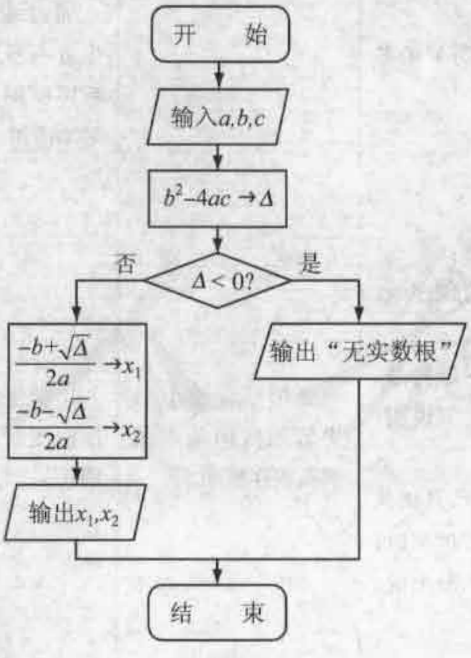
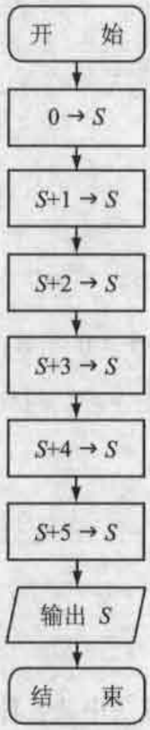
<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>引入</td><td>1. 复习前面所学的算法的概念.
2. 多媒体展示用公式法解一元二次方程的程序框图，如图 16-1 所示.
3. 简介程序框图的优点——直观、形象，容易理解.</td><td>让学生观察程序框图 16-1，并叙述算法的执行步骤.</td><td>让学生初步形成程序框图的基本概念，为学生理解程序框图做准备.</td></tr>
<tr><td>新授</td><td>1. 引导学生分析程序框图 16-1（下图）中所用的图形符号及其特点.


图 16-1</td><td>教师提问学生：程序框图 16-1 中都有哪些符号？它们各是什么形状？它们各自的作用是什么？</td><td>学生通过观察，总结出程序框图所用的图形符号.</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td></td><td>2. 总结形成程序框图中的基本图例，如下表所示.
<table>
<tr><th>图形</th><th>名称</th><th>作用</th></tr>
<tr><td></td><td>起止框</td><td>表示算法的开始和结束</td></tr>
<tr><td></td><td>输入输出框</td><td>表示要输入数据或输出数据</td></tr>
<tr><td></td><td>判断框</td><td>根据一个条件，选择一个操作执行</td></tr>
<tr><td></td><td>处理框</td><td>表示赋值、计算等操作</td></tr>
<tr><td></td><td>流程线</td><td>表示下一步执行哪个操作</td></tr>
</table></td><td>对表 16-1，教师一边逐行显示一边讲解，仔细说明每个图形符号的名称和作用. 特别要强调什么操作应选择什么图形.</td><td>通过讲解，让学生掌握程序框图所使用的基本图例.</td></tr>
<tr><td></td><td>3. 练习：观察图 16-1，说出各图形符号的名称及作用.</td><td></td><td>通过练习，使学生进一步熟练掌握程序框图所使用的基本图例.</td></tr>
<tr><td></td><td>4. 介绍画程序框图应注意的几个问题：
(1) 程序框图一般按照从上到下的顺序画，先画开始框，最后画结束框.
(2) 要根据算法中的操作来选择图形符号，不能用错. 在图形符号内还要加注文字说明，不能只画一个图形符号.
(3) 用流程线连接两个图形符号表示算法执行的先后顺序，在连接输入输出框和处理框时，只能有一个入口和一个出口；在连接判断框时，则必须有一个入口和两个出口.</td><td>老师结合图 16-1 讲解如何用基本图例画程序框图.</td><td>让学生掌握画程序框图时的基本规则.</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	5. 例 1 画出计算 1＋2＋3＋4＋5 和的程序框图.  6. 把例 1 改为求 1 到 100 的自然数的和，你将如何设计算法？	（1）首先让学生用自己的语言叙述例 1 的算法； （2）学生尝试用程序框图表达上述算法； （3）学生展示自己设计的框图并用语言叙述算法的执行步骤，其他学生加以补充. 鼓励学生设计解决该问题的其他算法.	引导学生初步尝试用程序框图表示自己的算法，体验成功的喜悦. 鼓励学生积极探索解决重复计算的方法，为循环结构的学习做铺垫.
总结	从知识、方法两个方面来对本节课的内容进行归纳总结.	让学生谈本节课的收获.	关注学生的自主体验.
作业	练习 16-2 第 3 题.		巩固程序框图的画法.

V 习题答案、提示和解答

练习 16-1

1. 算法就是为解决某个问题而采取的方法和步骤.

2. S1：农夫带羊到北岸；

S2：农夫独自回到南岸；

S3：农夫带白菜到北岸；

S4：农夫带羊到南岸；

S5：农夫带狼到北岸；

S6：农夫独自回到南岸；

S7：农夫带羊到北岸.

3. 用消元法解这个方程组，步骤是：

S1：方程①不动，将方程②中 x 的系数除以方程①中 x 的系数，得到乘数 $m=\frac{4}{2}=2$；

S2：方程②减去 m 乘以方程①，消去方程②中的 x 项，得到

$$\begin{cases}2x+y=7\\3y=-3\end{cases}$$

S3：将上面的方程组自下而上回代求解，得到 $y=-1$，$x=4$. 所以原方程组的解为

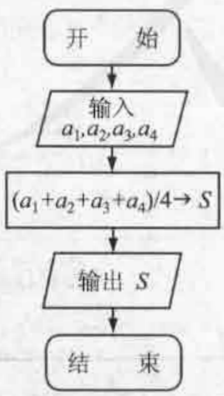
$$\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}$$

练习 16-2

1. 程序框图也称为流程图，是用一些图形来表示算法中的各种操作. 基本图例有起止框、输入输出框、判断框、处理框和流程线. 起止框表示算法的开始和结束；输入输出框表示要输入数据或输出数据；判断框表示根据一个条件，选择一个操作执行；处理框表示赋值、计算等操作；流程线表示下一步执行哪个操作.

2. 一个入口中，两个出口.

3.

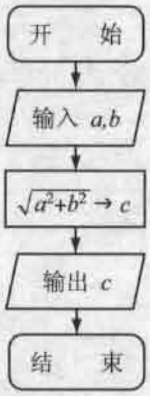


4.

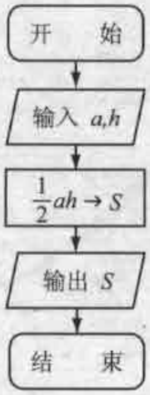

开　始
两个小孩同船过河去
一个小孩划船回来
大人独自划船过河去
对岸的小孩划船回来
两个小孩同船渡过河去
结　束

练习 16-3

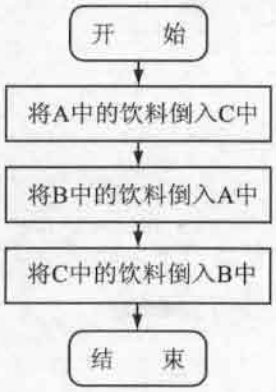
1.


开　始
输入 a,b
$\sqrt{a^2+b^2} \to c$
输出 c
结　束

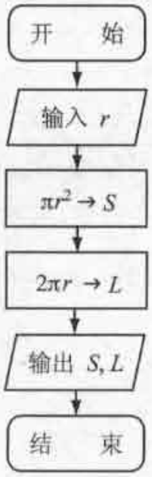
2.


开　始
输入 a,h
$\frac{1}{2}ah \to S$
输出 S
结　束

3.

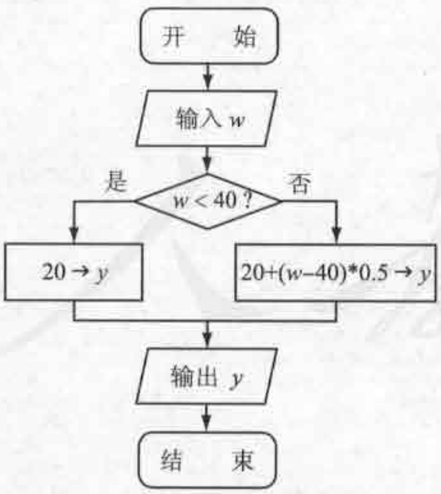

开 始
将A中的饮料倒入C中
将B中的饮料倒入A中
将C中的饮料倒入B中
结 束

4.

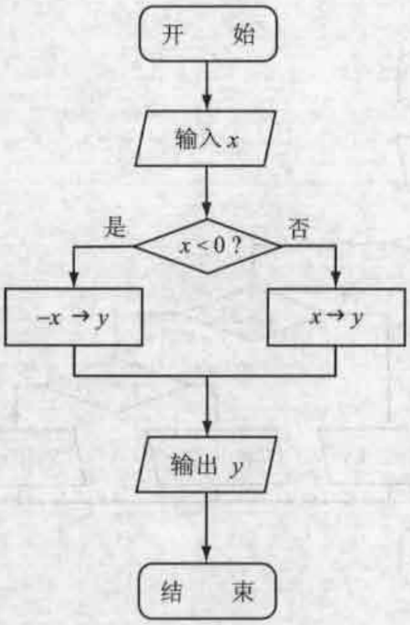

开 始
输入 r
$\pi r^2 \to S$
$2\pi r \to L$
输出 S, L
结 束

练习 16-4

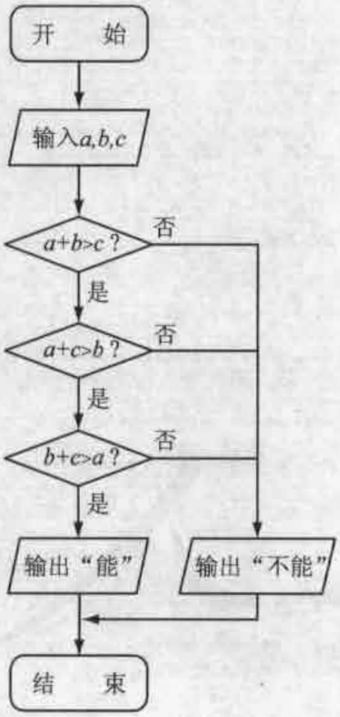
1.


开 始
输入 w
是
$w < 40$?
否
$20 \to y$
$20+(w-40)*0.5 \to y$
输出 y
结 束

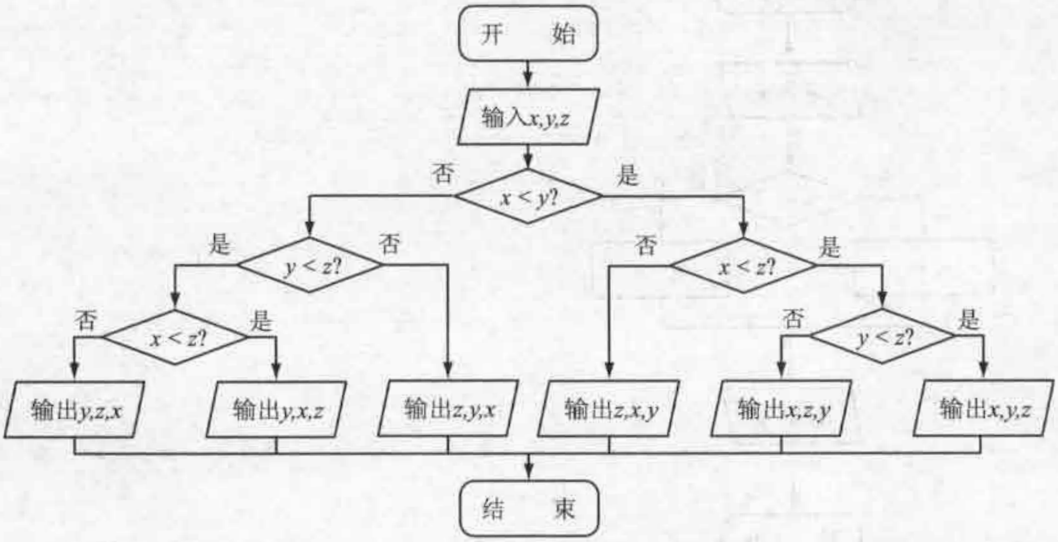
2.



3.

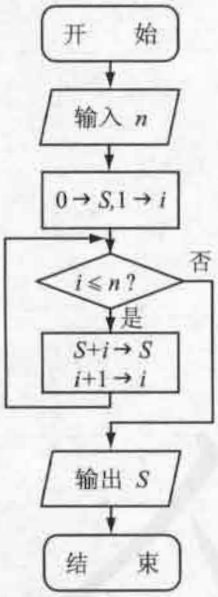


4.

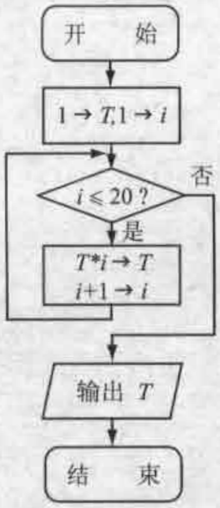

开 始
输入x,y,z
否
是
x < y?
是
y < z?
否
否
x < z?
是
否
x < z?
是
否
y < z?
是
输出y,z,x
输出y,x,z
输出z,y,x
输出z,x,y
输出x,z,y
输出x,y,z
结 束

练习 16-5

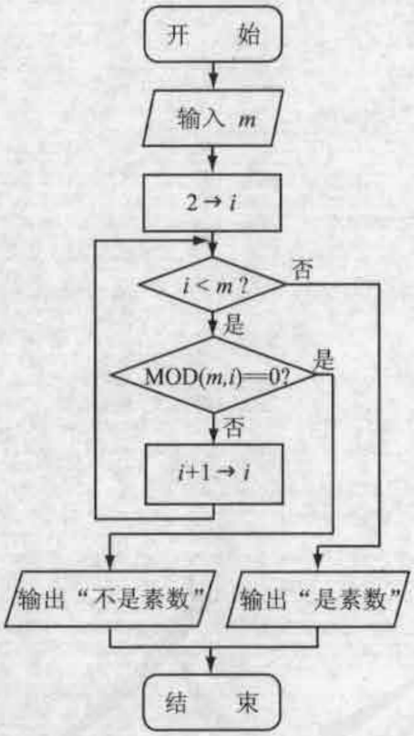
1.


开 始
输入 n
0 → S,1 → i
否
i ≤ n ?
是
S+i → S
i+1 → i
输出 S
结 束

2.



3.



练习 16-6

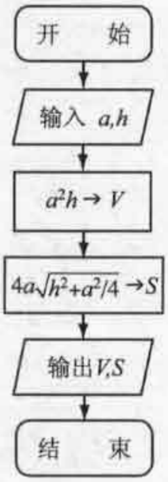
1. (1) MOD(x, 2)==1; (2) $x>10$; (3) $x==y$.

2. (1) $(a>b)$AND$(b>c)$; (2) $(x==y)$AND(NOT $x=0$); (3) $(x>z)$OR$(y>z)$.

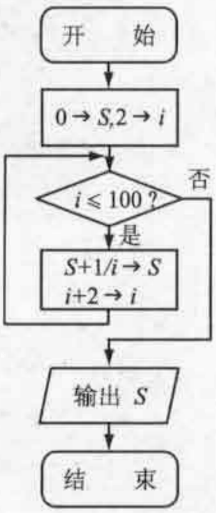
3. $n>20$; 结束.

练习 16-7

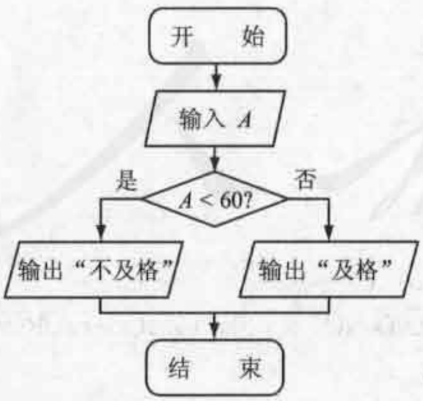
1.


开 始
输入 a,h
$a^2h\to V$
$4a\sqrt{h^2+a^2/4}\to S$
输出V,S
结 束

2.


开 始
$0\to S,2\to i$
$i\leqslant 100$?
否
是
$S+1/i\to S$
$i+2\to i$
输出 S
结 束

3.


开 始
输入 A
是
$A<60$?
否
输出“不及格”
输出“及格”
结 束

习题十六

1. S1：输入 a，b，c；

S2：计算 b^2-4ac 的值，并判断值是否小于零；

S3：如果 b^2-4ac 的值小于 0，则方程无解；否则 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2. S1：先计算 2+4 的值，和为 6；

S2：用 S1 得到的和再加上 6，得和为 12；

S3：用 S2 得到的和再加上 8，得和为 20；

S4：用 S3 得到的和再加上 10，得和为 30；

S5：用 S4 得到的和再加上 12，得和为 42.

3. S1：人带两只狼过河，并自己返回；

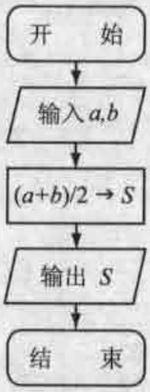
S2：人带一只狼过河，自己返回；

S3：人带两只羊过河，并带回两只狼返回；

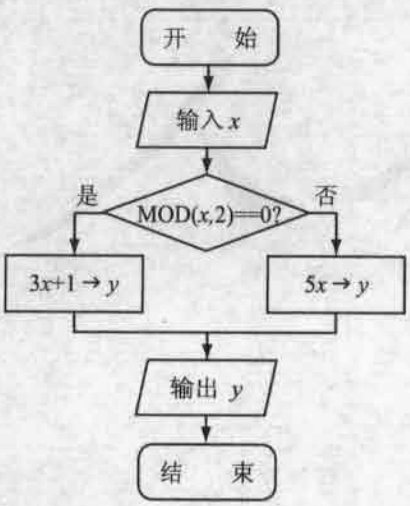
S4：人带一只羊过河，自己返回；

S5：人带两只狼过河.

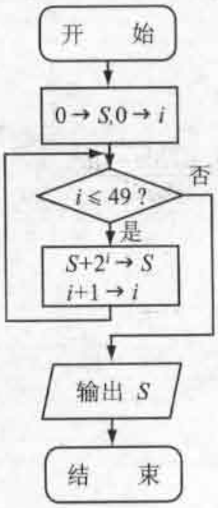
4.



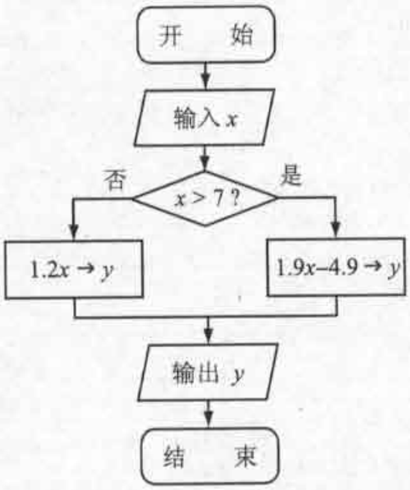
5.



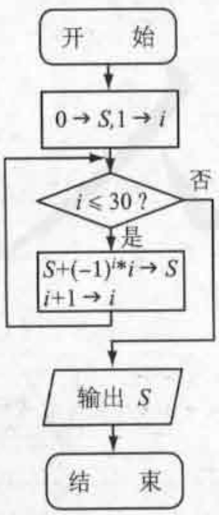
6.


开 始
0 → S,0 → i
i ≤ 49 ?
否
是
S+2^i → S
i+1 → i
输出 S
结 束

7.


开 始
输入 x
否
是
x > 7 ?
1.2x → y
1.9x−4.9 → y
输出 y
结 束

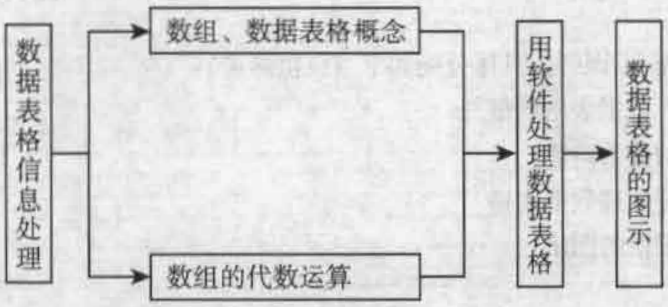
8.


开 始
0 → S,1 → i
i ≤ 30 ?
否
是
S+(−1)^i*i → S
i+1 → i
输出 S
结 束

第十七章　数据表格信息处理

> 思想火花：
>
> 中国教育之通病是教用脑的人不用手，不教用手的人用脑，所以一无所能. 中国教育革命的对策是手脑联盟，结果是手与脑的力量都可以大到不可思议.
>
> ——陶行知

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 了解数组、数据表格的概念；掌握用数组表示数据表格的方法.
2. 掌握数组的代数运算.
3. 掌握柱形图、条形图、饼图和折线图的表示方法.
4. 学会用电子表格处理数据的方法.

Ⅲ 教材分析和教学建议

本章主要内容包括数组、数据表格的概念和数组简单特点，数组的线性运算，基于

计算机平台用电子表格处理数据表格，并着重讲解了数据表格的图示.

数组是数据结构中的重要组成部分. 由于数据表格广泛存在于生活、生产、科学技术等的各个领域，因此本章所介绍的数据表格信息方法广泛地应用于各个方面，尤其在计算机应用日益普及的今天，本章的地位与作用更显得重要. 通过教学，要求学生能够初步了解数组的基本概念以及代数运算，掌握数据表格信息处理的基本方法，培养学生的信息处理能力，运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力，为学习相关课程及进一步扩大数学知识面奠定必要的基础.

本章重点是数组的相关概念及运算，数据表格的信息处理.

本章难点是理解数组与数据表格的关系.

为了便于教学，提出以下建议供参考：

1. 在本章的教学中要重视计算机软件的使用，培养学生的计算工具使用技能，数据处理技能，观察问题，分析问题与解决问题的能力.

2. 要基于计算机平台进行教学，加强练习，加深学生对数据表格的理解和记忆.

3. 要注意对学生的要求不要过高，只有通过今后不断地应用，才能逐步地掌握相关知识. 随着计算机的发展和广泛应用，电子表格软件已逐渐成为人们在实际生活中的重要工具，在学生工作之后就会逐步认识到这一点. 因此学好本章内容对提高学生信息素养及今后参加工作都有重要作用，希望教师要教育学生重视本章的学习，为今后的学习打好基础.

本章教学约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

17.1　数组、数据表格的概念	1 课时
17.2　数组的代数运算	2 课时
17.3　用软件处理数据表格	4 课时
17.4　数据表格的图示	2 课时
小结和复习	1 课时

17.1 数组、数据表格的概念

1. 本节主要内容是数组和数据表格的有关概念. 本节是为学习本章的内容作铺垫，是学习本章的基础. 重点是 n 维数组的有关概念.

2. 本节课可以采用学生身边的实例进行引入，例如：为什么使用数组？我们身边堆放着许多杂乱无章的书籍，我们要对它们进行归类整理：文学类的、音乐类的、计算机类的等等，把它们归放到书橱的相应位置.

3. 多个 n 维数组可以组合成矩阵，教师可以根据情况，适当的引入矩阵的知识.

4. 本节教学要注意与计算机编程中的数组区别对待，计算机编程中的数组则是计算机为了更好的进行数据存储，对数据进行分类整理放置.

17.2 数组的代数运算

1. 本节主要内容是 n 维数组的代数运算. 本节是本章的重点内容之一，是数据表格信息处理的基础. 重点是数组的三种线性运算.

2. 在讲解数组的代数运算时，可以与矩阵的运算加以比较，以便进一步理解它们之间的联系.

3. 教师可以从学生已经学习的向量的坐标运算入手，进行导入，启发引导学生自己总结出数组运算的加法、减法、数乘和内积.

17.3 用软件处理数据表格

1. 本节主要内容是掌握用电子表格进行相关的数据处理. 重点是让学生掌握公式、函数、排序、筛选四种数据处理方法.

2. 电子表格软件有早期的 CCED，微软 OFFICE 系列中的 Excel，金山 WPSOFFICE 中的电子表格，还有 OPENOFFICE 中的电子表格都有强大的数据表格信息处理功能. 并且求平均值、求和只是数据计算中的一个内容，还有很多内容，不可能一一讲明，为了培养学生知识迁移的能力，可以设计例如学习用品统计表、学生日消费统计表等实际统计表，让学生自主探索，掌握其他计算的方法.

3. 建议本节内容安排两个连堂，在计算机实训室内让学生自行操作计算机，在教师的指导下完成，可以请计算机教师协助完成本节课的教学.

4. 教师根据学生的实际情况，增加其他的数据处理方法. 例如数据的汇总等等.

17.4 数据表格的图示

1. 本节主要内容是掌握柱形图、条形图、饼图和折线图四种图示. 本节是把数据表格的数据信息直观化.

2. 在大量的数据下进行手工作图非常麻烦，建议教师把数学课调成连堂，在计算机实训室中完成本节课的教学内容. 如果条件有限，可以不用学生操作计算机，而用多媒体教室进行教学.

3. 数据表格的图示方法有很多种，教师可以根据学生的情况适当的进行内容延伸.

4. 教师不必局限于教材中的例子，可以自行查找与本地区经济、环境、社会等息息相关的数据让学生练习分析，提高学生的兴趣.

5. 本节课的重点不是学生的计算机操作和软件的使用，而是帮助学生用适当的图示分析所得到的数据.

Ⅳ 参考教案

课题：17.3 用软件处理数据表格

教学目标：

1. 掌握利用公式、函数在电子表格中进行计算的方法，掌握对大量数据进行批量运算的技巧；

2. 培养学生运用电子表格进行数据处理的能力以及对已有知识的整合能力；

3. 感受运用信息技术解决身边实际问题后所得到的乐趣，培养学生探究性学习、自主性学习和协作性学习的能力.

教学重点：

(1) 电子表格中公式的输入方法及应用技巧；

(2) 电子表格中函数的使用方法；

(3) 电子表格中批量运算功能的使用方法；

(4) 用电子表格解决数学中较复杂的运算问题.

教学难点：

利用公式和函数进行运算时单元格的引用.

教法分析：

任务驱动教学法

教学过程：

一、复习提问

教师给出下面表格

	A	B	C	D	E	F
1	姓名	数学	语文	政治	总分	平均分
2	赵大伟	87	98	80		
3	王志强	65	77	66		
4	张小华	98	84	87		
5	李建军	86	80	87		
6	刘爱洁	84	88	78		

问题一

1. 表格是由几行几列组成的，其中“65”分这条数据在第几行第几列？

2. 第 5 行第 4 列单元格中的数据是多少？

学生回答，教师点评. 让学生更深刻的理解，为进行下面学习数据的处理铺路.

二、新课导入

问题二：如何计算上述表格中的总分，平均分？

学生用计算器进行计算，教师用电子表格软件进行计算．比一比谁快．

教师小结：利用电子表格进行处理数据的优点．

三、新课讲授

回顾数学中是如何运用公式和函数进行数据计算的．

如 $\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 等．

而在 Excel 中的数据又是如何运用公式或函数进行运算的呢？

（一）电子表格中的公式

例 1　在电子表格中计算 $234+567+2^{24}$ 的值．

学生活动：让学生自行在电子表格的 A1 单元格内输入公式进行体验，并让学生试误：

如果在单元格中输入公式时，没有以等号开头将是什么结果？

教师小结：在单元格中输入公式时，必须以等号开头．

例 2　如下表所示，请在电子表格中计算某家庭五月的存款数额和月结余现金数．

某家庭五月支出表

月收入	存款（收入的 60%）	电话费	水电费	伙食费	其他	月结余
2 600		60	105	670	260	

学生活动：

1. 学生完成后，由一名同学用教师机进行演示并讲解步骤：

（1）在单元格 B3 中，输入公式“=A3*60%”，然后回车，得到存款金额．

（2）在单元格 G3 中，输入公式“=A3－B3－C3－D3－E3－F3”，然后回车，得到月结余现金数．

2. 学生试误：

如果在 Excel 中在 A7 单元格中输入公式=A7+B7 将出现什么结果？

教师总结：

1. 公式运算的语法：

所有的公式必须以符号“=”开始．一个公式是由运算符和参与计算的元素（操作数）组成的，操作数可以是常量、单元格地址、名称、函数．

2. 公式运算的输入方法：

第一步，选择要输入公式的单元格；

第二步，在编辑栏的输入框中输入一个等号（=），然后输入要计算的一个公式的表达式；

第三步，单击确认按钮或按回车键就可以得到计算结果.

练习一：利用公式进行求和运算和平均值运算.

	A	B	C	D	E	F
1	姓名	数学	语文	政治	总分	平均分
2	赵大	87	98	80		
3	王二	65	77	66		
4	张三	98	84	87		
5	李四	86	80	87		
6	刘五	84	88	78		

学生回答练习一中求和运算的具体操作步骤：

第一步：选中单元格 E2，输入公式“=B2+C2+D2”，然后回车；

第二步：选中单元格 E2，用鼠标选中句柄，向下拖拽，填充到 E6；

求平均值运算的具体步骤：

第一步：选中单元格 F2，输入公式“=(B2+C2+D2)/3”，或者“=E2/3”，然后回车；

第二步：选中单元格 F2，用鼠标选中句柄，向下拖拽，填充到 F6；

练习二：如下图所示，求出每人的总分.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	姓名	数学	语文	政治	体育	专业课1	专业课2	总分
2	赵大	87	98	80	99	86	95	
3	王二	65	77	66	91	74	67	
4	张三	98	84	87	88	94	90	

问题三：如果练习二中的课程更多，公式会更长，那么用什么简便的方法完成任务呢？

（二）电子表格中的函数：

Excel 软件引入了函数，使用函数可以方便的解决上述问题，上面的问题可以用 SUM 函数来解决.

1. 教师演示，学生同步完成：在 H2 单元格中输入函数：=SUM(B2：G2)，然后回车即可.

2. 教师引导学生完成求平均数：如果要求平均数，可以在 I2 单元格中输入函数：=AVERAGE(B2：G2)，然后回车.

3. 让学生尝试用求最大值的函数 MAX 和求最小值的函数 MIN 找出上表中的最大值和最小值.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	姓名	数学	语文	政治	体育	专业课1	专业课2	总分	平均分
2	赵大	87	98	80	99	86	95	545	90.83
3	王二	65	77	66	91	74	67	440	73.33
4	张三	98	84	87	88	94	90	541	90.17
5	李四	86	80	87	75	84	90	502	83.67
6	刘五	84	88	78	85	83	91	509	84.83

练习三：教师让学生自行输入一些数据，达到10行8列，然后进行数据信息处理.

练习四：选择巧妙的计算方法，完成上述给定的任务.

四、学生展示

当学生们完成电子表格的计算之后，展示部分学生的作品，对学生的劳动成果给予充分的肯定，同时，其他同学就可以针对其计算方法、计算技巧等进行评价，利用附表一所给出评价的内容，在学生和老师相互评价与讨论中，找出优点和有待改进的地方.

五、小结

让学生自行总结出用公式和函数处理数据的步骤.

V 习题答案、提示和解答

练习 17-1

1. (1) 8维数组 (3, 6, 4, 7, 2, 5, 6, 7)；

(2) 4维行数组 (165, 88, 63, 316), (58, 53, 82, 193), (50, 71, 77, 198), (23, 19, 43, 85), (13, 15, 26, 54).

2. -4, 2.

3. $x=5$, $y=10$, $z=-4$.

练习 17-2

1. (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,-3,4)$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,-7,0)$, $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-1,-19,2)$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$;

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,8,4,1)$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(6,2,2,1)$, $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(16,9,7,3)$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-3,1,1,3,1)$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-5,-1,-1,1,-1)$, $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-14,-2,-2,4,-2)$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$;

(4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,-3,6,5,8,-4)$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(9,-7,2,-1,-2,6)$, $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(25,-19,8,0,-1,13)$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

2. $x=-2$.

3. (1) (5, 9, 4, 7); (2) (-6, -9, 0, 9); (3) (4, 28, 8, -12).

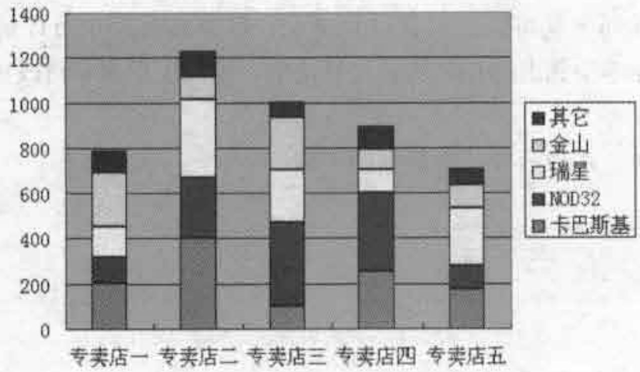
练习 17-3

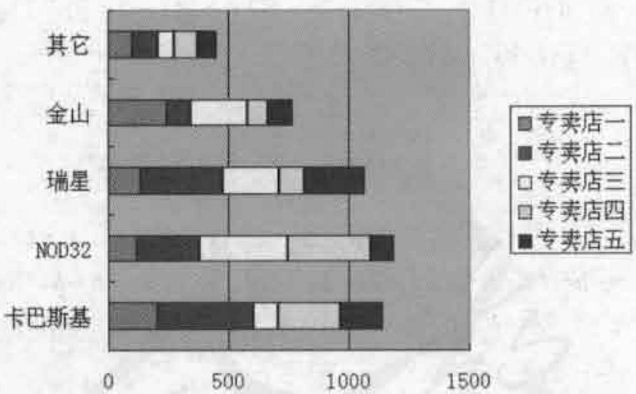
1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		卡巴斯基	NOD32	瑞星	金山	其它	合计	销售额
2	专卖店一	204	115	132	241	96	788	130864
3	专卖店二	402	265	345	105	112	1229	225756
4	专卖店三	103	366	233	234	65	1001	171428
5	专卖店四	256	345	104	86	103	894	135826
6	专卖店五	178	98	254	104	77	711	136228
7	单价/元	188	126	288	166			
8	合计	1143	1189	1068	770	453		
9	销售额	214884	149814	307584	127820			
10								

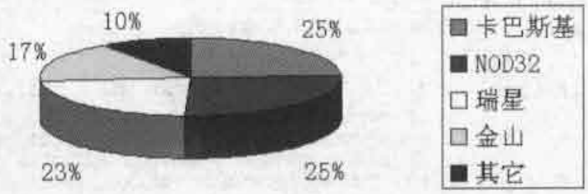
练习 17-4

1. (1)

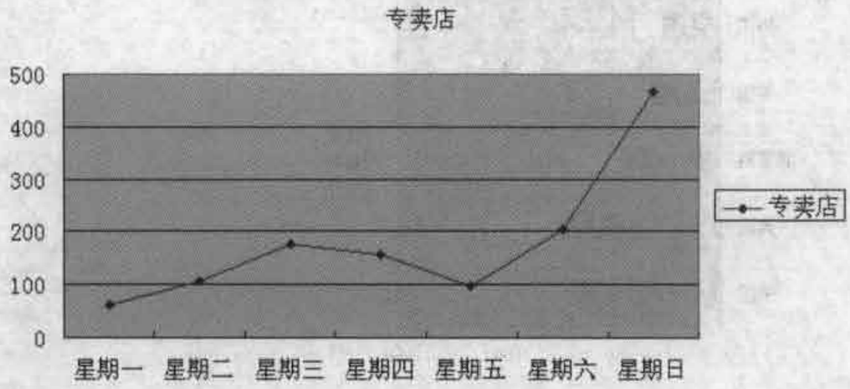




(2)



2.



习题十七

1. 6 维数组（2，3，4，4，3，4）.

2. (1) $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(13,-3,-4)$，$4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2,-14,8)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$；

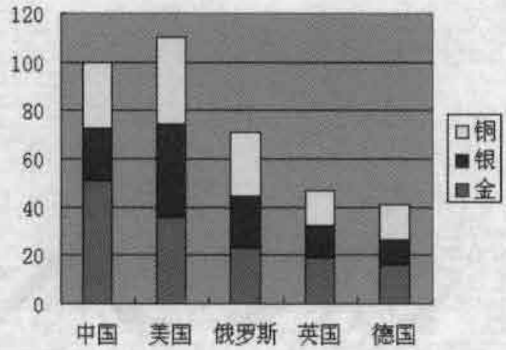
(2) $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(-12,21,-1,8)$，$4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(8,2,12,0)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=15$.

3. $x=0$，$y=2$，$z=8$.

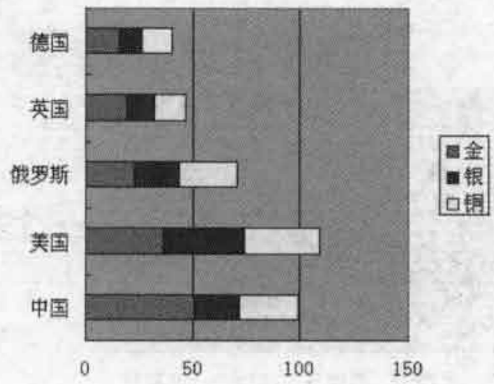
4. (1) $(-6, 12, -3, -8)$；(2) $(28, -7, 14, 21)$；(3) -5.

5. (1) 三维行数组：(51，21，28)，(36，38，36)，(23，21，27)，(19，13，15)，(16，10，15)；

(2) 柱形图：



条形图：



（3）

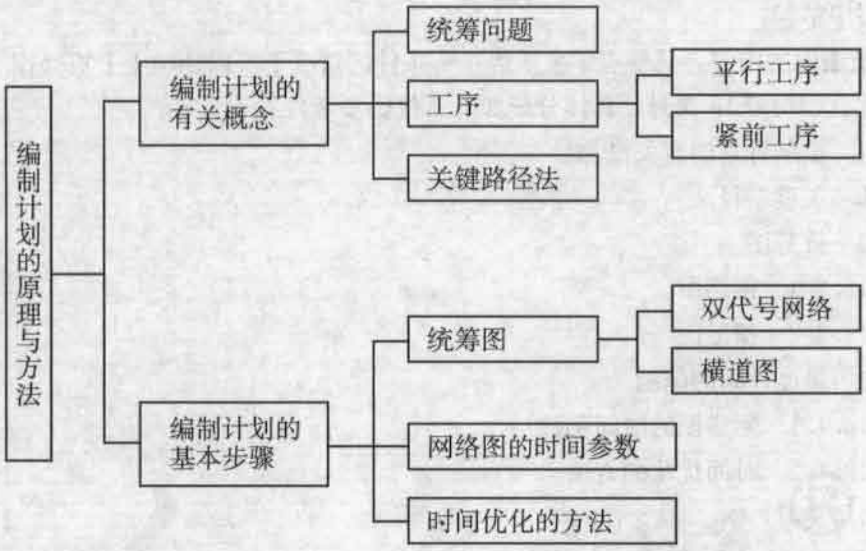
第十八章　编制计划的原理与方法

思想火花：

教师不替学生说学生自己的话，不替学生做学生自己能做的事，学生能讲明白的知识尽可能让学生讲.

——魏书生

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 了解编制计划的有关概念，理解路径及相关概念，掌握关键路径法的应用.

2. 掌握双代号网络图的画法，会根据工作邻接表画双代号网络图.

3. 了解用横道图来编制计划的方法.

4. 理解双代号网络图的时间参数的意义，会通过时间参数找出计划网络图中的关键路径.

5. 理解计划的调整与优化，能根据要求进行简单的时间优化.

Ⅲ 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：编制计划的有关概念；关键路径法；统筹图及进度计划的编制.

本章先由日常生活的实际问题引入了编制计划的有关概念. 通过产品研制的实例，介绍了编制计划中常用的一种方法——关键路径法. 在学生对网络图的画法有了一定了解的基础上，进一步介绍了双代号网络图及横道图的画法. 通过双代号网络图的时间参数的介绍，给出了利用工作时差来寻求关键路径的方法，最后介绍了双代号网络图的时间优化.

本章的重点是：关键路径法、双代号网络图及其时间参数.

本章的难点是：双代号网络图及其时间参数.

在教学中建议如下：

1. 要注意在教学中从具体实例出发，关注学生兴趣，引导学生逐渐发现数学知识.

2. 为较好地解决难点，建议在讲解双代号网络图时，应由浅入深，边讲边练，让学生在练习中掌握.

3. 横道图的内容，只要求学生了解，有条件的情况下可以让学生上机操作.

本章教学约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）：

18.1 编制计划的有关概念	1 课时
18.2 关键路径法	2 课时
18.3 统筹图	
18.3.1 网络图	3 课时
18.3.2 横道图	1 课时
18.4 进度计划的编制	
18.4.1 网络图的时间参数	4 课时
18.4.2 时间优化的方法	1 课时
小结与复习	2 课时

18.1 编制计划的有关概念

1. 本节的重点是编制计划的有关概念，难点是各工作间的邻接关系的分析及对虚工作的理解. 对本节中所涉及的双代号网络图的画法，可以引导学生自己动手，以使学生初步了解双代号网络图的画法.

2. 在本章中，我们把统筹问题、工程、项目作为“同义词”来运用. 在现行的项目管理学中，人们把在特定条件下有明确目标的一次性组织活动称为统筹问题，也称为项目或工程. 所谓“一次性”指的是有明确的开始时间和结束时间，且不是一个重复的过程.

计划是指工作之前拟定的方案，它包括要实现的具体目标、内容、方法和步骤等. 是为

解决统筹问题而确定的未来的行动方案．简单地说，计划就是人们对未来行动的规划．

计划工作通常是指制定计划，也就是通过一定的科学方法，确定组织的目标和实现目标的途径．要做好计划工作，必须解决“5W1H 问题”，即预先决定做什么（what）、论证为什么要做（why）、确定何时做（when）、何地做（where）、何人做（who）以及如何做（how）．

我们可以这样认为，计划是解决统筹问题的方案，计划工作是解决统筹问题的途径，而统筹问题是计划与计划工作的前提．

3. 教材先通过分析日常生活中常遇到的泡茶待客的活动，给出了两个活动方案，通过双代号网络图的分析，得出第二个方案能节省时间，可以向学生指明，时间也是一种资源，节省时间也就是节省了资源．

4. 教材结合问题分析的过程，给出了工作明细表、工作、工时等有关概念．工作间的邻接关系的确定，是计划工作的一个难点，需要人们结合实践活动来确定．本节所提到的网络图是双代号网络图，即用两个节点代号来表示一项工作，与双代号网络图相对应，还有一种单代号网络图，本章主要介绍双代号网络图．

5. 本节通过例题的讲解，使学生进一步理解编制计划的有关概念．在讲授本节例题时，可让学生先进行讨论，以确定各工作间的邻接关系，为下一步画网络图打下基础．在绘制网络图中，引入了虚工作的概念，这也是本节的一个重点和难点，教师可以进一步强调，双代号网络图中要保持同一对有序节点只能对应一个工作这一原则．

6. 对于虚工作，一般有以下三种情形：

（1）平行工作．当从某个点出发有两道以上的平行工作，并且它们均要在完工后才能进行下道工作时，则必须引用虚工作．如本节例题中，“烧饭”同“打扫房间”就是这种情况．

（2）交叉工作．对需要较长时间完成的相邻几道工作，只要条件允许，可不必等待紧前工作全部完工后再转入后一道工作，而是分批分期地将紧前工作完成的部分工作转入下一道工作，这种方法称为交叉作业．

例如，加工三个零件经过 A，B 两道工作，如果 A 工作三个零件全部完工后再转到 B 工作，网络图如图 18-1 所示．

图 18-1

交叉作业的网络图如图 18-2 所示．

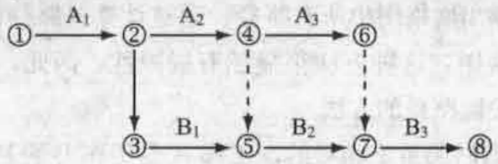


图 18-2

(3) 工作 A，B 并进作业，当工作 A 完工后，工作 C 开始；而当工作 B，C 完工后，工作 D 开始．如图 18-3 所示．

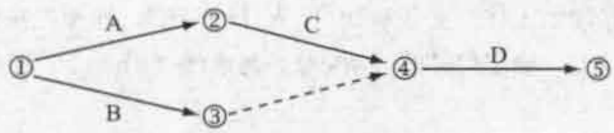


图 18-3

18.2 关键路径法

1. 本节的重点和难点是关键路径法．

2. 关键路径法是编制计划常用的一种方法，一般分为三个步骤：

(1) 首先在分析的基础上将项目进行分解，确定项目工作明细表．任何一项工作都是由很多具体的工序或活动组成，绘制网络图首先应根据对工作任务的性质、目标和内容的了解，把整个工作分解为一定数目的工序，并确定每道工序的具体要求和内容，特别是完成工序所需要的时间．工作分解的繁简程度，应视管理的需要而定．对于高层管理部门来说，需要通过网络图纵观全局，掌握关键，组织协调，工序可以分解得粗一些；对于基层单位来说，需要运用网络图来具体组织和指挥，就需要把工序分解得比较细一些．

分析工序间的逻辑，并作各工作间的邻接表．任务分解以后，还必须对各道工序逐一进行分析．包括工序的先后次序，每道工序的紧前工序和紧后工序，哪些工序可以平行作业，哪些工序可以交叉作业，以及完成每道工序所需要的时间等等．在上述分析的基础上，列出工序关系明细表．

(2) 依据工作邻接表作出网络图．在列出工序关系明细表以后，就可以按明细表着手画图．画图可以采用顺推法，即从第一道工序开始，以一条箭线代表一道工序，依照先后顺序和绘制原则，由左向右一箭接着一箭画下去，直到最后一道工序为止．画图也可以采用逆推的方法，即从最后一道工序开始，由右向左沿着紧前工序退着画，直到第一道工序为止．同一项任务，用上述两种方法画出的网络图是相同的．需要说明的是，一般机器制造企业习惯采用逆推法；而建筑安装等企业则大多采用顺推法．

(3) 找到网络图中的关键路径，从而得到所编制计划的时间进程．本节通过编制某公司新产品研制的计划，揭示了关键路径法的整个步骤．当网络图中的路径较少时，我们一般采用列举法，列举出网络图中所有路径，通过计算各路径的路长来确定关键路径，但是，对于较复杂的网络图，这种方法很显然有局限性，因此，在第四节中，我们介绍了通过计算时差来确定关键路径的方法．

3. 工作间的紧前与紧后关系是相对的，工作 A 是工作 B 的紧前工作，那么工作 B 就是 A 的紧前工作．在绘制网络图时，要进一步强调引入虚工作的必要性．从“自制零部

件”同“外购零部件”所用工时来看，“自制零部件”所用工时要多，所以这两个平行工作我们要画成图 18-4 的样子.

图 18-4

4. 要从如下几个方面来理解关键路径及关键工作.

(1) 关键路径上的活动持续时间决定了项目的工期，关键路径上所有活动的持续时间总和就是项目的工期.

(2) 关键路径上的任何一个活动都是关键活动，其中任何一个活动的延迟都会导致整个项目完工时间的延迟. 在关键路径上如果改变其中某个活动的耗时，可能使关键路径发生变化. 在采取一定的技术组织措施之后，关键路径有可能变为非关键路径，而非关键路径也有可能变为关键路径.

(3) 关键路径上的总工期是可以完工的最短时间量，若缩短关键路径的总工期，会缩短项目工期；反之，则会延长整个项目的总工期. 但是如果缩短非关键路径上的各个活动所需要的时间，也不至于影响工程的完工时间.

(4) 可以存在多条关键路径，它们各自的时间总量肯定相等，都等于总工期.

18.3 统筹图

18.3.1 网络图

1. 本节的重点是双代号网络图的画法，难点是双代号网络图画法规则的应用.

2. 由箭线所表示的工作分为三类：一是需要消耗时间和资源的工作；二是只消耗时间而不消耗资源的工作；三是不需要消耗时间和资源、不占有空间的工作.

节点不消耗时间和资源，是工作结束和开始的瞬间标志，节点编号不允许重复，且箭尾编号必须小于箭头编号.

路径不仅包括关键路径，还包括非关键路径，在网络图中路长最长的路径就是关键路径，关键路径上的工作称为关键工作. 需要说明的是，一个大型网络图，有时关键线路可能有多条而不仅仅有一条.

3. 在绘图的过程中，要尽量避免箭线之间出现交叉情况，如果出现交叉情况，我们一般用“过桥法”或“断线法”表示，如图 18-5 所示.

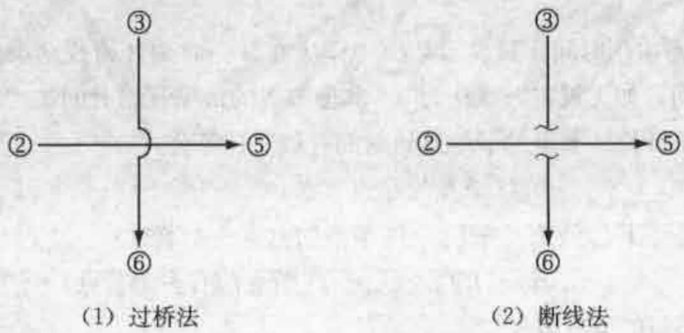


图 18-5

4. 对于双代号的时标网络图，本书只做简单介绍，教师可根据实际情况选择本内容进行讲解. 时标网络图中的非关键工作画成实线与波浪线的组合形状，其中实线部分的长度对应着工作的实际工期，而波浪线部分则代表着后面要讲的时差.

5. 人们利用网络图来表示计划任务的进度安排，而且能反映其中各项作业（工序）之间的相互关系；在此基础上进行网络分析，计算网络时间，确定关键路线和关键工序；并且可以不断改进网络计划，以求得工期、资源和成本的优化方案.

18.3.2 横道图

1. 本节重点是了解横道图的编制方法，难点是利用所给条件绘制一个工程的横道图. 在横道图中，用一条水平线来表示一个工作，线的开始表示工作的开始，线的结束表示工作的结束.

2. 相比网络图来讲，横道图比较简单，只能表示各工作的开始和结束时间，以及较简单的工作制约关系，主要关注时间（进程）管理，如果一个工程太大时很难把工作间的逻辑关系表达清楚. 横道图除了简单的特点以外，在工程中人们还常利用横道图比较法把项目神话过程中检查实际进度收集到的数据，经加工整理后直接用横道线平行绘于原计划的横道线处，从而把实际进度与计划进度进行比较. 可以形象、直观地反映实际进度与计划进度的比较情况，从而使管理人员对进度的偏差进行纠正或适当地调整工程计划. 一般情况下，我们可以用网络图来绘制横道图，但是不能通过横道图来绘制网络图.

3. 教材中给出了一种利用 EXEL 来绘制横道图的方法，供教师上课时选用.

18.4 进度计划的编制

18.4.1 网络图的时间参数

1. 本节的重点是网络图的时间参数的意义，难点是利用时差来找关键路径及关键工作.

2. 本节涉及的时间参数有节点的最早开始时间、节点的最迟开始时间，以及某项工作的自由时差和总时差. 其中节点的最早开始时间和节点的最迟开始时间的求法是本节的关键.

3. 节点本身不占用时间，只表示某项工作应在某一时刻开始或结束的瞬间. 起点节点的最早开始时间，如无规定，默认为 0. 其他节点的最早开始时间按“顺箭头相加，箭头相碰取大值”来计算. 节点的最早开始时间有如下计算公式：

$$ET_i=\begin{cases}0 \text{（}i\text{ 节点为起点节点）}\\ ET_h+D_{h,i} \text{（}i\text{ 节点前只有一个节点）}\\ \max\{ET_h+D_{h,i}\} \text{（}i\text{ 节点前有多个节点）}\end{cases}$$

其中 h 是 i 节点前面的节点编号.

4. 终点节点的最迟开始时间等于终点节点的最早开始时间，其他节点的最迟时间按

“逆箭头相减，箭尾相碰取小值”来计算．节点的最早开始时间有如下计算公式：

$$LT_i=\begin{cases}LT_i=ET_i\ (i\text{ 节点为终点节点})\\ LT_j+D_{i,j}\ (i\text{ 节点后面有一个节点})\\ \max\{LT_j+D_{i,j}\}\ (i\text{ 节点后面有多个节点})\end{cases}$$

其中 j 是 i 节点后面的节点编号.

5. 总时差是指在不影响总工期的前提下，本工作可以利用的机动时间．自由时差是指在不影响其紧后工作最早开始时间前提下，本工作可以利用的机动时间．对同一个工作，自由时差不会超过总时差.

6. 在双代号的时标网络图中，非关键路径上的波浪线长度就是该工作的自由时差，但不一定是该工作的总时差.

18.4.2　时间优化的方法

1. 本节的重点、难点是时间优化的一般方法，即通过把某项关键工作分解成并进的工作，或分解成交叉工作以达到优化时间的目的.

2. 计划的优化一般分为时间优化、时间—成本优化和时间—资源优化等．本书中主要介绍了时间优化.

3. 本节通过粉刷三个房间的例子，比较了三个方案的优缺点．在讲解交叉安排时，要通过例题的讲解让学生理解交叉工作的实质．在交叉安排中同时解析了交叉作业（工作）的实质.

Ⅳ　参考教案

课题：18.1　编制计划的有关概念

教学目标：

1. 知识目标：

掌握编制计划的有关概念，初步学会简单双代号网络图的画法.

2. 能力目标：

通过对“泡茶”工作的分析、解决，进一步提高学生分析、比较等思维能力.

3. 情感与价值目标：

通过学生的主动参与，教师与学生、学生与学生之间的合作交流，提高学生的学习兴趣，激发其求知欲，培养学生的探索精神.

教学重点：

编制计划的有关概念.

教学重点：

虚工作的意义.

教学方法：

本节课采用讨论式教学法，并运用现代化教学手段进行教学活动，通过讨论解决教材中的问题，使同学们在合作交流的基础上掌握本节内容.

教学过程：

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>引入</td><td>问题　某公司来了位客人，老板让秘书泡茶招待客人. 假设完成这件事情的步骤及完成各步骤所需要的时间如表 18-1 所示.
<table>
<tr><th>序号</th><th>工作名称</th><th>持续时间
分钟</th><th>工作内容</th></tr>
<tr><td>1</td><td>洗茶杯</td><td>2</td><td>清洗茶杯</td></tr>
<tr><td>2</td><td>放茶叶</td><td>1</td><td>取适量茶叶并放入茶杯内</td></tr>
<tr><td>3</td><td>烧水</td><td>5</td><td>打开饮水机烧水</td></tr>
<tr><td>4</td><td>泡茶</td><td>1</td><td>泡茶后端给客人</td></tr>
</table>
你能设计出几种方案呢？</td><td>师出示问题，学生完成，并相互交流各自设计的方案.</td><td>以学生熟悉的生活问题引发思考.</td></tr>
<tr><td>新课</td><td>一、定义
结合上面所提出的问题给出统筹问题、工作明细表、工作等各定义.
二、分析解决问题的两种方案
方案一：先洗茶杯，放茶叶，然后再打开饮水机烧水，等水开后泡茶端给客人. 方案一可以用图 18-1 表示.

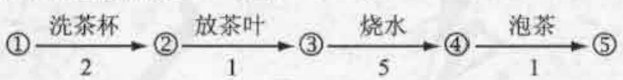



图 18-1
方案二：打开饮水机烧水的同时洗茶杯，洗完茶杯后取适量茶叶放入杯中，然后等水开后泡茶并端给客人. 方案二可以用图 18-2 表示.

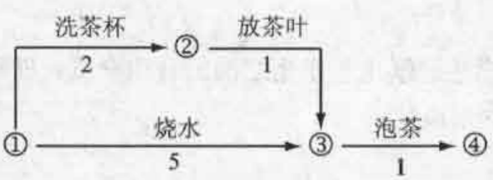
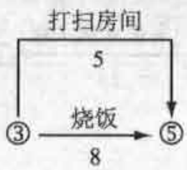



图 18-2</td><td>让学生比较两个方案的优劣，让学生算出实施这两个方案各用的时间，指出方案二更省时.</td><td>从生活实际中引出定义，便于学生理解掌握.
在两种方案对比中体会编制计划的意义.</td></tr>
</table>

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	三、定义 在上面的活动中，放茶叶依赖于洗茶杯结束才得以开始，我们称这两项工作是**相互邻接的**，简称是**邻接的**．茶杯不洗，就不能放茶叶，所以洗茶杯可以叫做放茶叶的**紧前工作**（**紧前工序**），放茶叶叫做洗茶杯的**紧后工作**（**紧后工序**）．为了节省时间，有的工作可以同时开始，如“烧开水”与“洗茶杯、拿茶叶”可以同时展开，我们称它们为**平行工作**（**平行工序**）． 像图 18-1 和 18-2 这样的图我们称为**双代号网络图**，简称**网络图**．图中小圆圈叫做**节点**，圆圈中的数字是节点的编号，网络图中第一个节点称网络的**起始节点**，表示一项计划或工程的开始；网络图中最后一个节点称网络的**终止节点**，表示一项计划的完成；网络图中其余节点叫做**中间节点**，它既表示前一项工作的完成，又表示后一项工作的开始．两个节点间的**箭线**表示一项工作，如图 18-1 中，节点“①”和“②”之间的箭线表示“洗茶杯”工作，记作〈1，2〉．网络图中工作的名称与工期一般分别标在箭线的上方与下方． 四、例题讲解 **例** 佳佳每天早晨的活动如下：起床用 2 分钟，洗脸、刷牙用 4 分钟，烧饭用 8 分钟，打扫房间用 5 分钟，吃饭用 5 分钟．试分析上列各项工作之间的邻接关系，并画出整个活动的网络图． **解** 分析以上各项工作，容易知道，先起床，再洗脸、刷牙，然后在烧饭的同时可以打扫房间，最后吃饭．其中烧饭与打扫房间是平行工作．整个活动的网络图如图所示．  五、注意事项 应当注意的是，在绘制网络图时，要保持同一对节点之间只能对应一个工作．在图 18-3 中将工作“打扫房间”和“刷牙”要画成图（1）的方式，而不是（2）的链接方式．  图（1）  图（2）	让学生对上述方案分析相邻两项工作的关系．然后引出紧前工作、紧后工作、平行工作等各定义． 以图 18-1 和 18-2 为例，定义节点、起始节点、终止节点、中间节点、箭线等概念． 针对例题，让学生尝试分析各个工作间的关系，并画出网络图． 学生对各自画出的网络图相互交流、小组评价．	紧扣一个实例讲解各个定义． 用例子巩固各定义，使学生在练习的基础上加深对网络图的理解． 让学生亲自动手画网络图，比教师讲解更容易调动学生积极性．

续表

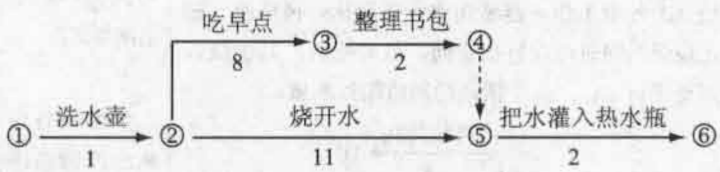
环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	因为在图（2）中，同一对节点〈3，5〉之间对应着两个工作，而图（1）中采用不同的工作与不同的一对节点对应，避免了工作间各关系的混乱．为了保持工作间的逻辑关系，只能借助于虚箭线表示的虚工作．在网络图中，虚工作只是为了表述工作间的逻辑关系，它是既不消耗时间也不消耗资源的工作．	展示学生作品中错误的网络图，提示学生画图的注意事项．	讲解学生网络图中的错误，从正误两方面巩固所学的知识．
小结	结合课堂上的两个例子，回顾本节各个定义．	师生共同回顾本节主要内容．	
作业	练习 18-1 第 2 题．		巩固本节知识点．

V 习题答案、提示和解答

练习 18-1

1. 略．

2. （1）

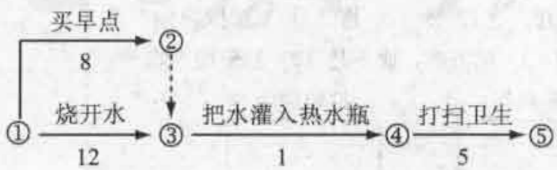


（2）最少用 14 分钟．

练习 18-2

1. （1）略；

（2）

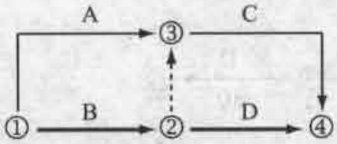


（3）最少用 18 分钟．

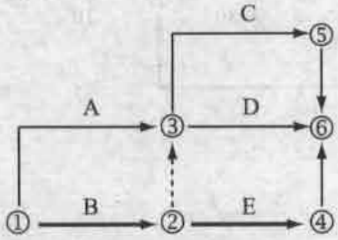
2. 略．

练习 18-3

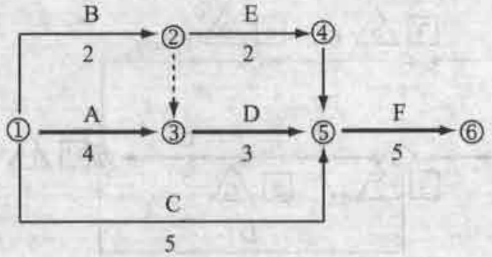
1. (1)



(2)



2. (1)

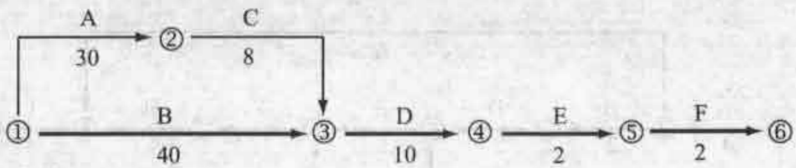


(2) 总工期是 12 天.

3. 略.

4.

工序名称	工序代号	工时/分钟	紧前工序
做作业	A	30	—
烧饭	B	40	—
打扫院子	C	8	—
吃饭	D	10	B
洗碗	E	2	D
整理桌凳	F	2	E

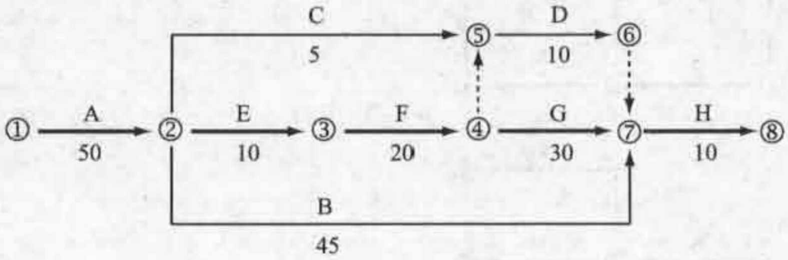


共需 54 分钟.

练习 18-4

1. 略.

2. (1)

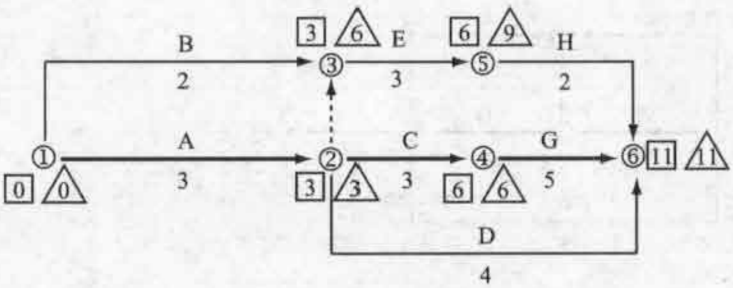


(2) 略.

练习 18-5

1. 略.

2. (1) (2)



(3) 需要 11 天完工.

练习 18-6

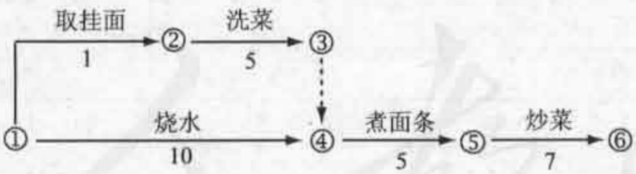
略.

练习 18-7

略.

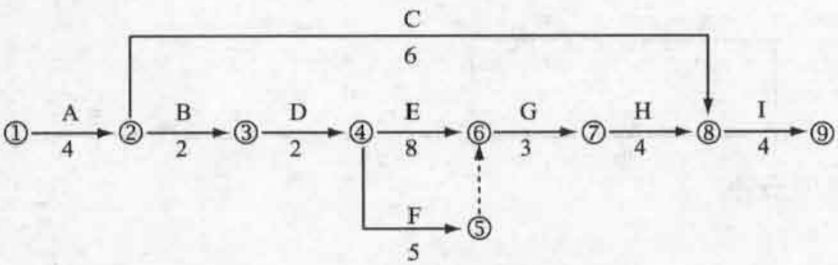
习题十八

1.



最少需要 22 分钟.

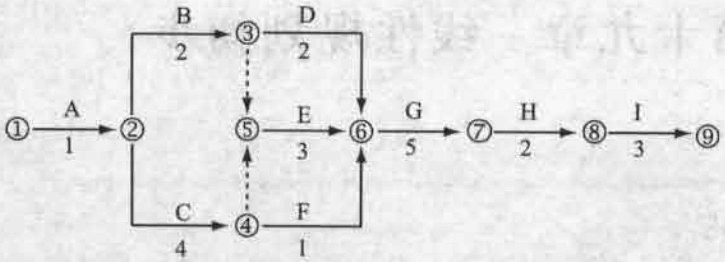
2. (1)



共需 27 天.

（2）略.

3.



4. 略.

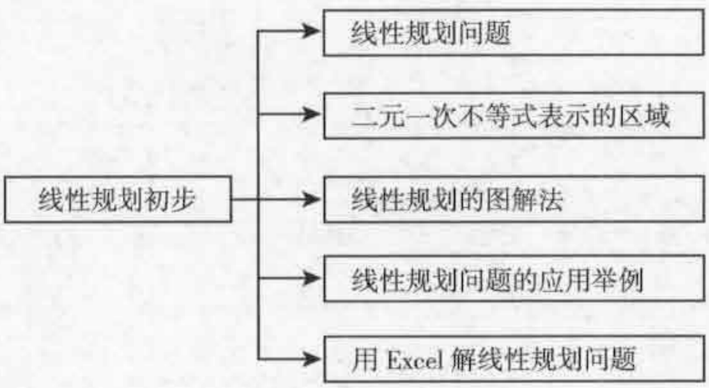
第十九章　线性规划初步

思想火花：

世界上没有才能的人是没有的．问题在于教育者要去发现每一位学生的禀赋、兴趣、爱好和特长，为他们的表现和发展提供充分的条件和正确引导。

——苏霍姆林斯基

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 理解线性规划的有关概念，能熟练设出实际问题的变量并列出线性约束条件，能准确找出线性目标函数.

2. 理解二元一次不等式表示的平面区域，能规范地画出二元一次不等式表示的平面区域.

3. 理解线性规划问题的图解法原理，掌握线性规划问题的图解法，会利用图解法求线性规划问题的整数解.

4. 能在具体的实际问题情境中，发现线性规划问题的线性约束条件、线性目标函数，进而用图解法解决实际问题.

5. 掌握用 Excel 的“规划求解”功能解决线性规划的实际问题.

Ⅲ 教材分析和教学建议

本章主要内容是线性规划的初步，即二元线性规划. 线性规划是运筹学的一个基本分支，其应用极其广泛，其作用已为越来越多的人所重视，从线性规划诞生至今的几十年中，随着计算机的逐渐普及，它越来越急速地渗透于农业生产、商业活动、军事行动和科学研究的各个方面，为社会节省的财富、创造的价值无法估量. 因此，本章既是将数学知识应用于实际生活问题的典例，又是培养学生分析问题、解决问题能力，培养数形结合能力，培养学生计算机的应用意识，提高数学综合能力的重要题材. 同时，也是将来进一步学习运筹学知识的基础.

本章分为五小节：在第一节中通过工厂生产的实例，引出了线性约束条件的概念，再通过问题情景的深入，给出了目标函数、线性目标函数的概念，进而定义了线性规划. 在第二节中为了通过画图解决线性规划问题，首先在直角坐标平面上画出二元一次不等式表示的平面区域，接着介绍了二元一次不等式组表示的平面区域. 在第三节中，以第二节的知识为基础，重点介绍了线性规划的图解法原理，给出了可行解、可行域和最优解的概念. 在第四节中主要列举生产、生活遇到的实际问题，熟悉线性规划这一数学模型及其图解法的求解过程. 在第五节中，为强化学生现代信息技术的应用意识，借助计算机中 Excel 的“规划求解”功能，便捷地解决线性规划的简单问题.

本章教材的重点是：实际问题中线性规划问题数学模型的建立，即给出线性约束条件、线性目标函数，画出可行域，在可行域上通过图解法，找到最优解. 借助计算机中 Excel 的“规划求解”功能，解决线性规划问题. 建议在教学中要逐步培养学生分析问题的能力，通过分析变量之间的关系建立起解决问题的数学模型，通过模型转化解决线性规划问题. 要关注学生理解问题的能力，引导学生逐渐发现数学知识及其应用.

本章教材的难点是：线性约束条件的建立，线性目标函数的给出，规范地画出二元一次不等式表示的平面区域，图解法的原理，在可行域上整数解的寻找，计算机中 Excel 的“规划求解”功能的应用. 为较好地解决难点，建议在讲解线性规划的图解法时，讲清作图的原理，而图解法是以规范画出可行域为基础的，所以作图时要求学生严格进行尺规作图，配合代数方程来找到正确的最优解. 计算机中 Excel 的“规划求解”功能的应用，要让学生真正上机反复演练，熟能生巧，达到掌握这种方法的目的.

本章教学约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）：

19.1	线性规划问题	2 课时
19.2	二元一次不等式表示的平面区域	2 课时
19.3	线性规划问题的图解法	3 课时
19.4	线性规划问题的应用举例	3 课时

19.1 线性规划问题

1. 本节教学中，由一个实际生产的例子，逐步关注各种制约条件，形成二元一次不等式组的约束条件，然后再围绕所获得的利润，形成利润 z 关于变量 x 和 y 的二元一次函数，接着给出了线性约束条件、目标函数和线性目标函数的定义. 为巩固以上知识，教材中又给出了一个例题. 教学中，要注意引导学生通过阅读熟悉问题情景，围绕所求问题的实际，恰当的设出变量，合理分析数量之间的关系，形成不同的约束条件，最后形成线性约束条件. 例如：

(1) 该厂每天所有可能的生产安排如何？这句话转化为：生产的安排就是看生产了甲、乙两种产品各多少件，从而设甲、乙两种产品分别生产 x，y 件.

(2) 从一个工作日的工作时间进行分析，需满足的条件是：$x+2y\leqslant 8$.

(3) 从原料加工车间的日产量进行分析，需满足的条件是：$4x\leqslant 16$ 且 $4y\leqslant 12$.

(4) 从工厂生产的实际意义进行分析，应满足的条件是：$x\geqslant 0$ 且 $y\geqslant 0$.

(5) 从 $x+2y\leqslant 8$，$4x\leqslant 16$ 且 $4y\leqslant 12$，$x\geqslant 0$ 且 $y\geqslant 0$ 只有同时具备，才有可能进行有效的生产这个角度考虑，最后形成不等式组

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 8 \\ 4x\leqslant 16 \\ 4y\leqslant 12 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

这是一个二元一次不等式组.

以上过程要让学生通过反复阅读问题，逐步熟悉问题情景，通过教师的引导让学生自己总结出每一个条件是如何形成和建立的.

2. 要强调只有每一个约束条件同时成立，生产才是有效的. 这时，教师可以列举反例，加深学生的认识. 例如：从一个工作日的工作时间进行分析，当 $x+2y>8$ 时，超出正常的工作时间就不符合题中“每天工作 8 小时计算”的条件；从原料加工车间的日产量进行分析，当 $4x>16$ 或 $4y>12$ 时，生产甲、乙两种产品的原料不具备，也是无法生产的，等等.

3. 要注意目标函数中，所求的目标是关于变量的等式，因而才是函数. 不要直接根据问题形成不等式. 例如，本节教材的问题中，尽管提出“采用哪种生产安排所获得的利润最大?”这样的问题，我们要将首先形成利润 $z=2x+3y$ 的函数关系，然后寻找满足条件的 (x, y) 使 z 取得最大值. 而不要直接形成 $z\leqslant 2x+3y$.

4. 在例 1 的讲解时，要让学生模仿实例的分析方法，逐步完成，不要操之过急，以免产生思维跨越的障碍.

5. 针对中职学生的实际知识水平，对于线性规划的实际问题，必要时教师要引领学生共同分析，帮助学生逐渐提高分析问题的能力.

6. 为了让学生熟练掌握本节知识，教师可以引领学生对一个问题改变其中的条件，做适当的变形练习.

7. 线性约束条件不一定都是不等式，根据具体问题情境，有的约束条件可以是等式.

19.2　二元一次不等式表示的区域

1. 本节教材的重点是二元一次不等式表示的区域、二元一次不等式组表示的平面区域，二元一次不等式表示的区域是形成二元一次不等式组表示的平面区域的基础，因此，教学中要从引导学生规范的画出二元一次不等式表示的区域入手展开教学.

2. 教学中要突出以下几点：

(1) 让学生深刻理解以下结论的推导过程：

$$\overrightarrow{P_0P}\text{与 } \boldsymbol{n} \text{ 方向相同} \Leftrightarrow Ax+By+C>0;$$

$$\overrightarrow{P_0P}\text{与 } \boldsymbol{n} \text{ 方向相反} \Leftrightarrow Ax+By+C<0.$$

(2)) 让学生牢固识记以下结论：

直线 l：$Ax+By+C=0$ 将直角坐标平面内不在 l 上的点分为两部分，直线 l 的一个法向量 (A, B) 指向的那一侧半平面内所有的点坐标都满足不等式

$$Ax+By+C>0;$$

而在直线 l 的另一侧，所有点的坐标都满足不等式

$$Ax+By+C<0.$$

(3) 让学生熟练掌握：

$Ax+By+C>0$ 和 $Ax+By+C\geqslant 0$ 的区别，前者表示的平面区域不包含直线 $Ax+By+C=0$ 上的点，而后者包含直线 $Ax+By+C=0$ 上的点，表示平面区域时前者画成虚线，而后者画成实线.

3. 要引导学生规范作图，教师板演时，要注意尺规作图，边作图边提醒学生注意：

(1) 根据直线与 x 轴和 y 轴的交点，确定直角坐标系的布局（原点位置，x 轴和 y 轴所画的长度）.

(2) 将直角坐标系的三要素标识完整，即要标识坐标原点 O，单位长度，x 轴和 y 轴的正方向.

(3) x 轴和 y 轴的单位长度要相等.

4. 二元一次不等式组表示的平面区域是不等式组中各个不等式表示的平面区域的公共部分，画图时要提醒学生注意找准确，防止画出错误的区域，必要时可以试点检验.

5. 画二元一次不等式表示的平面区域时，教师可以帮助学生总结规律：

画出相应直线看虚实，看法向量方向找区域.

6. 有条件的学校，教师可以引导学生利用计算机软件进行作图，如可以利用几何画

板作图，提高作图的快速性和准确性.

19.3 线性规划问题的图解法

1. 本节教材的重点是：在线性规划的问题中，画出线性约束条件所表示的平面区域，在平面区域上找出线性目标函数的最值.

2. 在本节教学中，应突出以下几点：

（1）画线性约束条件所表示的平面区域要规范准确.

（2）让学生理解线性目标函数 $z=f(x, y)$ 转化为 $y=f(x)$，寻找直线 $y=f(x)$ 满足可行域时在 y 轴上的截距，从而推出 z 的最值的原理.

（3）让学生理解首先画出 $f(x, y)=0$，然后平移直线 $f(x, y)=0$ 使之通过可行域寻找目标函数最值的原理.

（4）当线性目标函数表示的直线通过某两条直线的交点能确定是最优解时，由于几何作图的误差，在直角坐标系中很难准确找出最优解的点坐标，要借助代数解方程组的办法，求出准确的最优解.

3. 本节教材的难点是：寻找可行域内的整数最优解（横纵坐标都是整数）. 当画图无法看出某两个点谁是最优解时，可以代入目标函数进行检验，作出正确的判断和找到正确的结论.

4. 线性目标函数 $z=f(x, y)$ 转化为 $y=f(x)$，寻找直线 $y=f(x)$ 满足可行域时在 y 轴上的截距，要注意并不是随着直线向上的平移，目标函数的值都是增大的. 例如，目标函数若是 $z=x-y$，将其转化为直线 $y=x-z$，随着直线向上的平移，截距 $-z$ 在变大，而 z 却在变小.

教师可以补充若直线 $f(x, y)=0$ 沿直线的法向量方向平移，可以确保线性目标函数的值越来越大，沿直线的法向量反方向平移，可以确保线性目标函数的值越来越小.

5. 学习本节知识无论是理解原理还是画图，都需要一定的时间，教师要注意培养学生的耐心、细心和信心，切忌贪多求快而让学生吃夹生饭.

19.4 线性规划问题的应用举例

1. 本节教材的重点是：总结前面 19.1 和 19.3 两节的知识，借助图解法解决线性规划的实际问题. 本节教材的难点，一是熟悉实际问题的情景正确理解题意，准确找出线性约束条件；二是规范画出可行域，在可行域上找出最优解.

2. 在教学中，应突出以下几点：

（1）温故知新，注意引导学生复习 19.1 和 19.3 两节的内容，使学生对于线性规划的实际问题，既能熟练准确地找出线性约束条件和线性目标函数，又能规范地画出可行域并在可行域上找到最优解，从而突破教学难点.

（2）通过熟悉问题情景，让学生理解实际问题中的变量要求，是否所求最优解为整数解.

3. 本节教材中的两个例题，例 1 所求的是非整数最优解，例 2 所求的是整数最优解，

在审题过程中，教师要给予学生适当的引导，帮助学生理解题意，把握实际问题中准确的约束条件.

4. 本节教材中所解决的都是实际问题，要注意培养学生规范的解题表达，提醒学生最后一定要作答.

19.5　用 Excel 解线性规划问题

1. 本节教材的重点是：借助计算机中 Excel 的“规划求解”工具，解决线性规划问题.

2. 在教学中，应突出以下几点：

(1) 让学生在机房上课，每个学生面前都要有计算机，让学生亲自动手演练，切忌纸上谈兵.

(2) 让学生熟悉 Excel 的中“规划求解”工具，按教材所述的步骤，逐步完成.

(3) 尽可能让学生理解每一个操作步骤的原理，以加深学生的印象.

3. 本节教材限于篇幅，只讲了一个例子来表述用 Excel 求解线性规划的过程，教师可以适当补充例题，以达到让学生熟悉的目的.

4. 本节的例子，在教师的指导下，可以让学生自己独立完成至教材图 19-17，然后讲述添加其他条件的步骤.

5. 当学生应用熟练以后，用 Excel 求解线性规划的步骤可以省略．例如，线性规划条件可以直接输入 Excel 工作表，变量 x，y，计算值、限制值、条件 1、条件 2 等字样可以不输入，这一点要学生真正熟悉以后告诉学生，以免学生在思路不清晰的状态下，将问题解答错误.

Ⅳ　参考教案

课题：19.3　线性规划问题的图解法（第一课时）

教学目的：

1. 让学生理解线性规划问题图解法的原理.

2. 使学生掌握利用图解法求可行域内的最优解.

教学重点：

利用图解法求可行域内的最优解.

教学难点：

图解法的作图原理，在可行域内求整数最优解.

教学方法：

讲练结合.

教学过程：

一、复习巩固

1. 重温 19.1 节的线性规划问题，给出线性约束条件和目标函数.

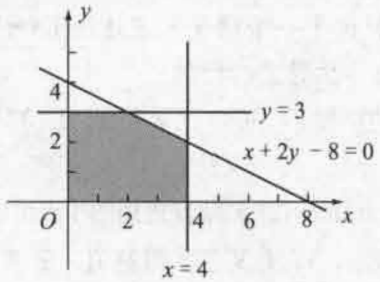
线性目标函数为

$$z=2x+3y,$$

满足线性约束条件

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 8 \\ 4x\leqslant 16 \\ 4y\leqslant 12 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases} \quad ①$$

2. 让学生独立画出不等式组①表示的平面区域：



二、新授

（一）作图原理

1. 将二元目标函数 $z=2x+3y$ 变形为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$，这是斜率为 $-\frac{2}{3}$，在 y 轴上截距为 $\frac{z}{3}$ 的直线.

2. 师生共同探究：当 z 变化时，可以得到一组互相平行的直线. 由于这些直线的斜率是确定的，因此只要给定一个点，就能确定一条直线. 这说明，截距 $\frac{z}{3}$ 可以由平面内的一个点的坐标唯一确定. 从而不难看出，当直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ 经过不等式组①表示的平面区域内的一个点时，截距 $\frac{z}{3}$ 也能被唯一确定，z 也就被唯一确定.

3. 得出结论：问题可以转化为当直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ 与不等式组①表示的平面区域有公共点时，在区域内找一个点 P，使直线经过点 P 时在 y 轴上的截距 $\frac{z}{3}$ 最大.

（二）寻找最优解

1. 可以令 $z=0$，先画出直线 $2x+3y=0$.

2. 然后平移这条直线，在阴影区域内寻找使截距 $\frac{z}{3}$ 最大的点. 由图 19-5 可以看出，当直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ 经过直线 $x=4$ 与直线 $x+2y-8=0$ 的交点 $M(4,\ 2)$ 时，截距 $\frac{z}{3}$ 的值最大，最大值为 $\frac{14}{3}$.

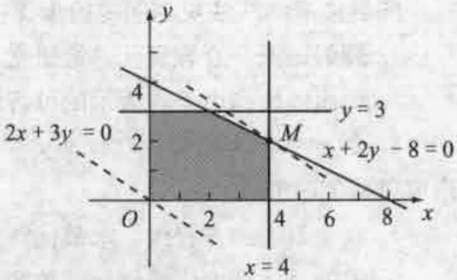


图 19-5

3. 结论：当 $x=4$，$y=3$ 时，目标函数值 $z=2\times4+3\times2=14$ 是最大值，从而在前面 19.1 中的问题中，每天生产甲产品 4 件、乙产品 2 件时，工厂可获得最大利润 14 万元.

（三）概念介绍

一般地，满足线性约束条件的解 $(x,\ y)$ 叫做**可行解**（feasible solution），由所有可行解组成的集合叫做**可行域**（feasible region）. 在可行域中，使目标函数取得最大值或最小值的可行解叫做这个问题的**最优解**.

（四）教师引导，学生探究例 1

例 1　已知线性约束条件为 $\begin{cases}x-y-1\leqslant0\\2x+y-5\geqslant0\\x-4y+11\geqslant0\end{cases}$ 求线性目标函数 $z=x+2y$ 满足线性约束条件的最优解及最值.

解　在直角坐标系中，画出可行域（图 19-6 阴影部分）.

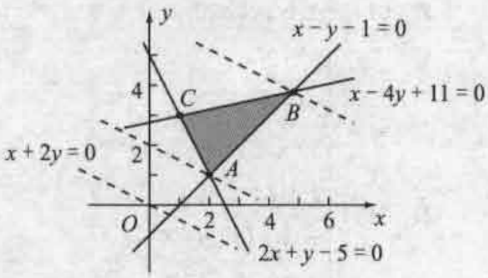


图 19-6

将目标函数变形为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$，当 $\frac{z}{2}$ 取得最大值时，z 取得最大值；当 $\frac{z}{2}$ 取得最小值时，z 取得最小值.

令 $z=0$，画出直线 $x+2y=0$，然后平移这条直线，可知当直线经过点 A 时，$\frac{z}{2}$ 取得最小值，当直线经过点 B 时，$\frac{z}{2}$ 取得最大值，如图 19-6 所示.

因为点 A 是直线 $x-y-1=0$ 与直线 $2x+y-5=0$ 的交点，点 B 是直线 $x-y-1=0$ 与直线 $x-4y+11=0$ 的交点，所以

解方程组 $\begin{cases}x-y-1=0\\2x+y-5=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 此时 $A(2,\ 1)$，$z_{\min}=2+2\times1=4$；

解方程组 $\begin{cases}x-y-1=0\\x-4y+11=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$ 此时 $B(5,\ 4)$，$z_{\max}=5+2\times4=13$.

三、课堂小结

图解法求解线性规划问题的步骤：

1. 理解题意，合理设元，给出变量的线性约束条件和线性目标函数；

2. 画出线性约束条件表示的可行域；

3. 令 $z=0$，作出直线 $f(x, y)=0$，并将直线平移，观察直线截距和 z 的关系，找出取得最值时的点；

4. 联立直线的方程组，求最优解；

5. 根据最优解求线性目标函数的最值，并给出结论；

6. 作答.

四、课堂练习

练习 19.3 的第 1 题.

五、作业

练习 19.3 的第 2 题，第 3 题.

V 习题答案、提示和解答

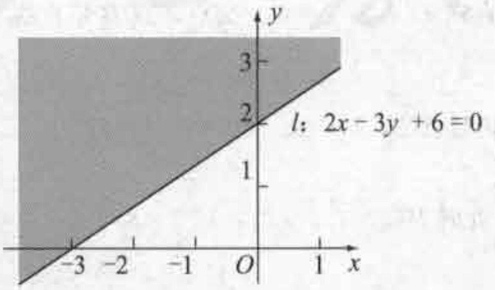
练习 19-1

1. (1) $\begin{cases}2x+y\geqslant 10\\x+2y\geqslant 20\\x+3y\geqslant 30\\x\in\mathbf{N}\\y\in\mathbf{N}\end{cases}$ (2) $z=100x+120y$.

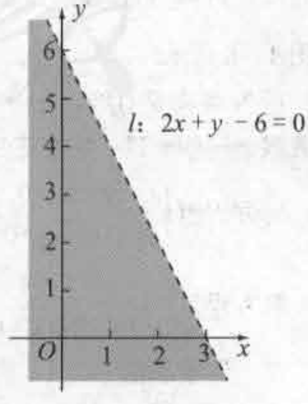
2. (1) $\begin{cases}3x+2y\leqslant 1\,200\\x+2y\leqslant 800\\x\geqslant 0 \text{ 且 } x\in\mathbf{Z}\\y\geqslant 0 \text{ 且 } y\in\mathbf{Z}\end{cases}$ (2) $z=30x+40y$.

练习 19-2

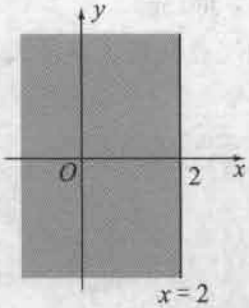
1. (1)



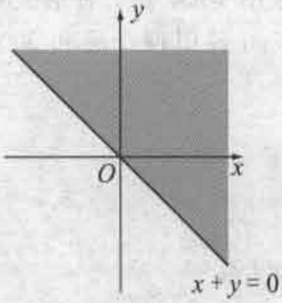
(2)



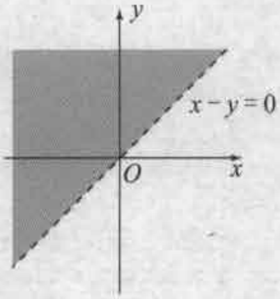
2. (1)



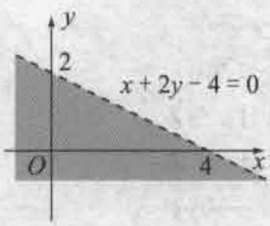
(2)



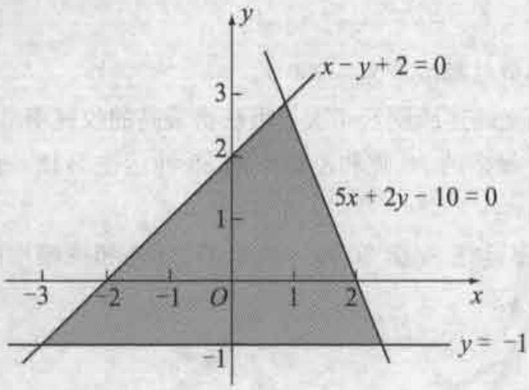
(3)



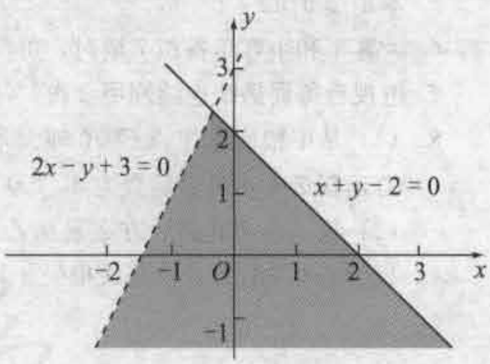
(4)



3. (1)



(2)



练习 19-3

1. 最优解（4，2），$z_{\max}=18$.

2. 最优解（3.6，2.4），$z_{\min}=22.8$.

3. 最优解（3，0），$z_{\max}=12$；最优解（−2，−1），$z_{\min}=-10$.

练习 19-4

1. 买桌子 25 张，凳子 37 个是最好的选择.

2. 生产甲产品 200 件，生产乙产品 100 件，可使收入最大为 800 000 元.

3. 生产 A 桌子 33 张，B 桌子 23 张，生产的桌子数最多为 56 张.

4. 第一种钢板用 4 张，第二种钢板用 8 张，总成本 $z_{\min}=1\ 360$ 元.

5. 计划生产 200 件甲种产品和 300 件乙种产品能使利润总额最大，最大利润是 18 000元.

练习 19-5

略

习题十九

1. (1) $\begin{cases} x-y+3\geqslant 0 \\ 2x+5y-1\geqslant 0 \\ 4x+3y-23\leqslant 0 \end{cases}$ (2) $z_{\max}=36$，$z_{\min}=-14$； (3) $z_{\max}=26$，$z_{\min}=-2$.

2. 略.

3. 略.

4. (1) $\begin{cases} 2x+y\leqslant 80 \\ x+3y\leqslant 90 \\ x\geqslant 0 \text{ 且 } x\in \mathbf{Z} \\ y\geqslant 0 \text{ 且 } y\in \mathbf{Z} \end{cases}$

(2) $z=40x+30y$；

(3) 当 $x=30$，$y=20$ 时，最大值 $z_{\max}=1\ 800$.

5. 甲、乙两种食品分别取 3 百克、2 百克，既能满足营养要求又使成本最低，最低成本是 2.9 元.

6. 大客车和小客车各租 7 辆时，可使租金总额最少为 4 900 元.

7. 电视台每周播映连续剧甲 2 次，每周播映连续剧乙 4 次，可获得最高的收视率.

8. (1) 从甲粮库运往 A 镇 70 吨大米，剩余的 30 吨和乙粮库的 80 吨运往 B 镇，使总运费最少，最少运费为 37 100 元；

(2) 最不合理的调运方案是从乙粮库运往 A 镇 70 吨，剩余的 10 吨和甲粮库的 110 吨运往 B 镇，它造成损失 2 100 元.

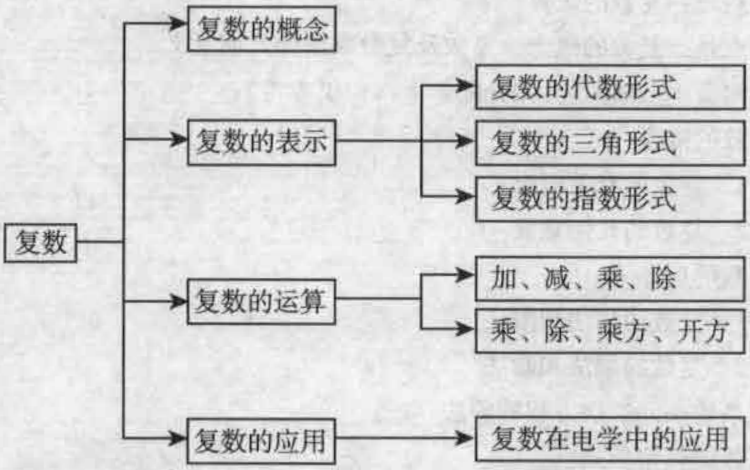
第二十章　复　　数

思想火花：

好的先生不是教书，不是教学生，乃是教学生学.

——陶行知

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 使学生认识引入复数的必要性，理解复数的有关概念.
2. 理解复数的代数表示法及其几何意义.
3. 掌握复数代数形式的运算法则，能熟练进行复数代数形式的四则运算.
4. 掌握复数集中实系数一元二次方程的解法.
5. 理解复数的三角形式，熟练掌握复数代数形式与三角形式的互化.
6. 掌握复数三角形式的乘法、除法、乘方、开方运算，理解其几何意义.
7. 理解复数的指数形式，掌握复数指数形式的乘法、除法、乘方、开方的运算.
8. 会应用复数的知识对电学中的物理量进行定量分析.

Ⅲ 教材分析和教学建议

复数的引入是中学阶段数系的又一次扩充，这不仅可以使学生对于数的发展有一个初步的认识，也为进一步学习数学、力学和电学打下了基础.

本章的主要内容包括：复数的概念、复数的代数形式及其运算、复数集中实系数一元二次方程的解法、复数的三角形式及其运算、复数的指数形式及其运算等.

本章共分六大节. 第一大节讲复数的概念，教材首先由解方程 $x^2+1=0$ 的需要引入虚数单位 i，然后讲解复数的有关概念，并介绍了复数的几何意义. 第二大节讲复数的运算，分别给出了复数代数形式的加法、减法、乘法、乘方、除法的运算法则. 第三大节讲了在复数集中实系数一元二次方程的解法. 第四大节介绍复数的三角形式及其乘法、除法、乘方、开方运算. 第五大节介绍复数的指数形式及其运算. 第六大节介绍复数在电学中的简单应用.

本章的重点是：复数的运算.

本章的难点是：复数的概念、复数及复数乘法的几何意义.

本章教学约需 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

20.1 复数的概念	
20.1.1 复数的有关概念	1 课时
20.1.2 复数的几何意义	2 课时
20.2 复数的运算	
20.2.1 复数的加法和减法	1 课时
20.2.2 复数的乘法和除法	3 课时
20.3 实系数一元二次方程的解法	1 课时
20.4 复数的三角形式	
20.4.1 复数的三角形式	2 课时
20.4.2 复数三角形式的乘法与乘方运算	1 课时
20.4.3 复数三角形式的除法运算	1 课时
20.4.4 复数的开方运算	2 课时
20.5 复数的指数形式	1 课时
20.6 复数的应用	1 课时
小结与复习	2 课时

20.1 复数的概念

20.1.1 复数的有关概念

1. 本节内容主要包括复数、复数的实部与虚部、虚数、纯虚数等概念和复数相等的

条件等内容，它们是学习本章的基础. 重点是复数的概念，难点是复数相等的条件.

2. 学习新知识时，要使学生初步了解学习的目的和意义，以激发他们的学习兴趣和求知欲. 本教材是从解方程的需要引入复数的，然后再说明复数所表达的几何意义.

3. 复数的概念是在引入虚数单位 i，并同时规定它的两条性质之后，自然地得出的. 实数集扩充到复数集后，方程 $x^2+1=0$ 的解才存在，这样从一开始就使学生明确学习复数的必要性.

在 i 的第二条性质中，只说明 i 可与实数一起进行四则运算，对于加法与乘法的运算律仍成立，这一点在后面讲复数的四则运算时再进行讲解.

4. 引入复数后，对形如 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）的数，规定了虚数单位、复数的代数形式、实部、虚部等名称. 应注意 b 称为虚部而不称为虚部系数.

5. 虚数、纯虚数的概念是在研究复数集与实数集的关系时引入的概念，它们与复数的实部、虚部是否为零的讨论相联系，揭示了复数的分类.

6. 两个复数相等的充要条件实际上就是两个复数相等的定义. 教学中应使学生明确，这里不仅给出了判断两个复数是否相等的依据，也给出了求复数值的依据，即利用复数相等的条件，可以得到关于实数的方程（组），通过解方程（组）得到 a，b 的值.

7. 在讲“两个复数，如果不全是实数就不能比较大小”时，只向学生讲结论，其他的不要多讲. 但在讲完相等概念之后，可适当讲解两个复数不相等的概念，即在 $a=c$ 和 $b=d$ 中，只要有一个不成立，那么 $a+bi\neq c+di$.

20.1.2 复数的几何意义

1. 本节的主要内容是复数的几何意义、复数的模和共轭复数，重点是复数的几何意义，难点是复数 $z=a+bi$、点 $Z(a,b)$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ 三者之间的一一对应关系.

2. 由于已学过用数轴上的点表示实数、平面向量的直角坐标表示，这样用点或向量来表示复数就比较容易了. 教学时应引导学生回顾这些知识.

3. 引入复平面时，不强调复平面与一般坐标平面的区别. 规定了 y 轴叫做虚轴，但在说明虚轴上的点都表示纯虚数时，需要指出“除原点外”，因为原点表示实数 0.

4. 复数 $z=a+bi$ 用复平面内的点 $Z(a,b)$ 表示，复平面内的点的坐标是 (a,b)，而不是 (a,bi)，也就是说，复平面内的虚轴上的单位长度是 1，而不是 i. 由于 $i=0+1\cdot i$，所以用复平面内的点 $(0,1)$ 表示 i 时，该点与原点的距离为 1，等于虚轴上的单位长度.

5. 在讲“复数与复平面内以坐标原点为起点的向量是一一对应的”时，要向学生强调对应的必须是以坐标原点为起点的向量 $\overrightarrow{OZ}$. 因为由向量相等的定义，复平面内与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 相等的向量有无数多个，所以对于复数集内任何一个复数 $a+bi$（$a\neq0$，$b\neq0$，a，$b\in\mathbf{R}$），在复平面内有无数多个与 $\overrightarrow{OZ}$ 相等的向量与其对应，不能构成一一对应关系.

6. 复数 $z=a+bi$ 的模或绝对值的计算公式 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，要让学生在理解的基础上熟练掌握. 当 $b=0$ 时，复数 $z=a+bi$ 是一个实数，它的模 $|z|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|$. 这

与初中所学实数的绝对值及算术平方根的规定是一致的. 由此可见，复数的模就是实数绝对值概念的扩充，它也是非负实数.

7. 讲解共轭复数时，要强调：

(1) 一个实数的共轭复数是它本身；

(2) 在复平面内，表示两个互为共轭复数的点关于实轴对称；

(3) 共轭复数的模相等.

第三个结论可引导学生自己证明：

因为

$$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$|\bar{z}|=|a-b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+(-b^2)}=\sqrt{a^2+b^2},$$

所以 $|z|=|\bar{z}|$.

20.2 复数的运算

20.2.1 复数的加法和减法

1. 本节的重点是复数的加法与减法运算，难点是复数的减法运算.

2. 对复数的加法运算，可以让学生把复数的代数形式 $a+b\mathrm{i}$ 看成是由 a 和 $b\mathrm{i}$ 两个非同类项组成的多项式. 这样，复数的加法可以类比学生熟悉的多项式的加法法则进行运算.

3. 教科书规定的复数加法的运算法则的合理性可从以下两个方面认识：

(1) 当 $b=0$，$d=0$ 时，与实数加法法则一致；

(2) 实数加法的交换律、结合律在复数集 **C** 中仍然成立.

4. 复数加法满足交换律、结合律. 证明如下：

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，$z_3=a_3+b_3\mathrm{i}$（a_1，b_1，a_2，b_2，a_3，b_3 均为实数）.

(1) 因为

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})\\&=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i},\\z_2+z_1&=(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})\\&=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\mathrm{i},\end{aligned}$$

又因为 $a_1+a_2=a_2+a_1$，$b_1+b_2=b_2+b_1$，所以

$$z_1+z_2=z_2+z_1.\text{（交换律）}$$

(2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

证明（略）.

5. 学习复数的减法，首先可以类比实数的减法，规定复数的减法是加法的逆运算，即用加法定义两个复数的差，然后只要依据复数的加法、复数相等的条件就可以得到复数减法的法则.

6. 强调两个共轭复数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 的和是一个实数，当 $b\neq 0$ 时，它们的差是一个纯虚数，当 $b=0$ 时，它们的差是实数 0.

7. 复数加、减法的几何意义是利用复数与向量的对应关系，转化为向量加、减法的几何表示. 教学时还应强调在图 14-5 中点 P 对应的复数是 z_1+z_2，作 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{P_2P_1}$，则点 Q 表示复数 z_1-z_2.

20.2.2 复数的乘法和除法

1. 本节的重点是复数的乘法、除法运算，难点是复数的除法运算法则.

2. 复数代数形式的乘法运算法则也是直接规定的，它与复数的加、减法一样，可按多项式相乘类似的办法进行，而不必专门记公式.

3. 复数乘法满足交换律、结合律及乘法对加法的分配律. 乘法对加法的分配律证明如下：

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，$z_3=a_3+b_3\mathrm{i}$（a_1，b_1，a_2，b_2，a_3，b_3 均为实数）.

因为

$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3)&=(a_1+b_1\mathrm{i})[(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_3+b_3\mathrm{i})]\\ &=(a_1+b_1\mathrm{i})[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\mathrm{i}]\\ &=[a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)]+[b_1(a_2+a_3)+a_1(b_2+b_3)]\mathrm{i}\\ &=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)\mathrm{i},\\ z_1z_2+z_1z_3&=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})(a_3+b_3\mathrm{i})\\ &=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)\mathrm{i}+(a_1a_3-b_1b_3)+(b_1a_3+a_1b_3)\mathrm{i}\\ &=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+(b_1a_2+a_1b_2+b_1a_3+a_1b_3)\mathrm{i}\\ &=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

所以 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

4. 例 4 给出“两个共轭复数的乘积是一个实数，这个实数等于这两个共轭复数中任何一个复数模的平方”这一重要结论，即 $(a+b\mathbf{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2$ 或 $z\,\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$. 这一结论可使 a^2+b^2 分解因式，也为学习复数的除法作点准备.

5. 复数的乘方运算教材没有作过多的叙述，教学中只要指出它与实数的乘方意义一样，并具有实数乘方相同的运算法则就可以了.

6. i 的乘方的周期性要求学生熟练掌握，即

$$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\ \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{4n}=1,\ n\in\mathbf{N}_+.$$

其实，这一规律可推广到一切整数，即对任意的整数上述结论都成立. 例如

$$\mathrm{i}^{-1}=\mathrm{i}^{4\times(-1)+3}=-\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{-2}=\mathrm{i}^{4\times(-1)+2}=-1,\ \mathrm{i}^{-3}=\mathrm{i}^{4\times(-1)+1}=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{-4}=\mathrm{i}^{4\times(-1)}=1.$$

这个结论不要求学生了解.

7. 对于复数的除法，教材规定它是乘法的逆运算，教学时不要求学生死记法则的结论，只要掌握除法的运算步骤，会进行运算即可.

8. 复数的除法法则概括起来就是“分母实数化”，最后结果一定要写成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式，

不要写成$\frac{a+bi}{c}$的形式．因为，$\frac{a+bi}{c}$不是复数的代数形式，也不是复数的三角形式，而是两个复数 $a+bi$ 和 c 的商，因此结果应化成$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\mathrm{i}$ 的形式．

20.3 实系数一元二次方程的解法

1. 本节的重点是当 $\Delta<0$ 时，实系数一元二次方程的解法；难点是当 $\Delta<0$ 时，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 求根公式的推导．

2. 教材从最简单的方程 $x^2=-1$ 开始，通过替换，最后得出当 $\Delta<0$ 时，一般实系数一元二次方程的解法．教学中，关键是讲好方程 $x^2=-a(a>0)$ 的解是 $x=\pm\sqrt{a}\,\mathrm{i}$．课堂上可多举具体例子，使学生掌握解题规律．

3. 教材只介绍在复数集中研究实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法，未涉及虚数系数的一元二次方程．教学时一定要强调一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数必须是实数，并且它的虚数根是成对出现的，互为共轭复数．

4. “根与系数的关系”可以让学生自己证明．可先复习 $\Delta\geqslant0$ 时根与系数的关系，然后让学生由求根公式自己得出结论．

20.4 复数的三角形式

20.4.1 复数的三角形式

1. 本节的重点是将复数的代数形式转化为复数的三角形式，难点是理解复数的辐角及辐角主值的概念．

2. 由复数辐角的定义可知辐角的多值性，如果不等于零的复数 $a+bi$ 有一个辐角为 θ，则 $\theta+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）都是 $a+bi$ 的辐角．复数零没有确定的辐角．与以往教材相比，本教材添加了复数辐角和辐角主值的求法，目的是让学生为熟练掌握复数的代数形式转化为三角形式作好准备．

为了便于研究问题，教材引进了复数辐角主值的概念，规定适合 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的复数的辐角值，叫做复数的辐角主值，记作 $\arg z$，即 $0\leqslant\arg z<2\pi$．

下列几类特殊复数的辐角主值，要求学生要熟记：

设 $a\in(0,\ +\infty)$，则 $\arg a=0$；$\arg(a\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$；$\arg(-a)=\pi$；$\arg(-a\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}$．

3. 复数的三角形式，实质上是用一个有序实数对（r，θ）来确定一个复数，可由 r 和 θ 在复平面上作出复数所对应的向量．

复数的三角形式 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 必须满足三个条件：

（1）$r>0$；

（2）同一个辐角 θ 的余弦和正弦；

（3）$\cos\theta$ 与 $\mathrm{i}\sin\theta$ 之间用“+”连接．

教学中要提醒学生注意，这三个条件同时具备才能表示一个复数的三角形式，特别是其中的第(3)条，它常被学生所忽视．当 $\cos\theta$ 与 $\mathrm{i}\sin\theta$ 之间用减号连接时，要利用三角函数的性质将其中的减号化为加号．

4. 要求学生熟练掌握复数的代数形式与三角形式的互化．

将复数的代数形式化为三角形式的一般方法，教材中是先求出 r，再由 $\cos\theta$，$\sin\theta$ 确定辐角 θ 的值，最后写成复数的三角形式．

对于特殊的复数（如所对应的向量在坐标轴上），可由其辐角主值直接写出它的三角形式．

5. 将复数的代数形式化为三角形式时，应注意，辐角 θ 可以是这个复数的任意一个辐角值，不一定要求它是复数辐角的主值．

例 化复数 $1-\mathrm{i}$ 为三角形式．

解 $r=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，对应的点在第四象限，所以

$$\theta=-\frac{\pi}{4}.$$

所以 $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

有时复数的辐角取非主值可使复数的计算更简便．

20.4.2 复数三角形式的乘法与乘方运算

1. 本节的重点是复数三角形式的乘法与乘方运算，难点是复数乘法的几何意义．

2. 复数三角形式的乘法、乘方运算法则是根据复数代数形式的乘法、乘方法则和三角公式推导出来的，教学中要注意引导学生进行推理，避免死记硬背公式．

3. 复数的乘法、乘方用三角形式来作运算，不仅其结果比较简单易记，更重要的是它明确了复数乘法的几何意义，即复数的积相当于向量旋转与伸缩的结果．与以往的教材不同的是，本教材中复数乘法的几何意义是分两步进行的，第 1 步：模为 1 的复数的旋转；第 2 步：模在 1 的基础上伸缩 r_1r_2 倍．教学中要让学生弄清楚这两个过程步骤．

4. 复数按三角形式进行乘法和乘方运算时，反映出的复数的模与辐角间的关系在解题中常常用到．如本节中例 5 就是用它来解决问题的，教学中要引起学生的重视．

5. 复数三角形式的乘法、乘方运算法则是对复数的三角形式而言的，所以下面的计算

$$(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)=\cos 5\theta-\mathrm{i}\sin 5\theta,$$

尽管最终结果是正确的，但运算过程是错误的．这是因为，式中的复数并不是复数的三角形式．解题过程中，要注意先把 $\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta$ 化为 $\cos(-3\theta)+\mathrm{i}\sin(-3\theta)$，把 $\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta$ 化为 $\cos(-2\theta)+\mathrm{i}\sin(-2\theta)$，然后再利用复数乘法的运算法则进行计算．

20.4.3 复数三角形式的除法运算

1. 本节的重点是复数三角形式的除法运算，难点是理解复数三角形式的除法法则．

2. 由于除法运算可以转化为乘法运算，因此以上对复数乘法的注意事项也适用于除法.

3. 复数三角形式的除法法则，更直观地揭示了复数的乘法与除法之间的本质联系. 一个复数乘以或除以另一个复数的几何意义，是把表示这个复数的向量绕原点旋转后再伸长或缩短. 复数乘法的几何意义使复数成为研究平面内相似及旋转的重要数学工具.

4. 要求学生熟练掌握一个复数乘以或除以 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，以及特殊复数 i 与 $-\mathrm{i}$ 的几何意义.

20.4.4 复数的开方运算

1. 本节的重点是复数三角形式的开方运算，难点是理解并掌握复数三角形式的开方法则.

2. 复数的开方运算，一般采用复数的三角形式计算比较简便. 复数的开方法则是在复数相等的概念基础上推导出来的. 非零复数的 n 次方根有且只有 n 个不同的值，这个结论可以通过例题让学生多取几个 k 值进行检验，形成直观认识. 然后指出：由于正弦、余弦是以 2π 为周期的周期函数，所以 k 可以取 0，1，…，$n-1$ 这 n 个值；而当 k 取 n，$n+1$，…，$2n-1$ 时，将重复 k 取 0，1，…，$n-1$ 时的结果；当 k 取 $2n$，$2n+1$，…，$3n-1$时，也将重复 k 取 0，1，…，$n-1$ 时的结果，这种情况周期性出现. 这样做，可以帮助学生理解开方法则.

3. 复数的开方运算是教学的难点，教学中要注意引导学生理解开方法则的推导过程，解题时要严格注意格式，同时要总结复数的开方运算与复数的加、减、乘、除、乘方运算的区别，后五种运算的结果都是唯一的，而非零复数开 n 次方的值有 n 个.

4. 复数 $a+b\mathrm{i}$（a，b 不同时为 0）开 n 次方的几何意义是，n 个根表示的点是均匀分布在以原点为圆心，以$\sqrt[n]{a^2+b^2}$ 为半径的圆上的，当 $n\geqslant3$，$n\in\mathbf{N}$ 时，这 n 个点是此圆的一个正 n 边形的顶点. 教材中没有涉及这一点，是否向学生补充，视学生的学习情况而定.

5. 复数的开方运算主要应用于解形如 $x^n=a$ 的方程，其他复杂的题型不宜再拓展.

20.5 复数的指数形式

1. 本节的重点是复数指数形式的运算，难点是理解复数指数形式与三角形式的关系.

2. 我们知道，复数的指数形式 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 是复变函数研究得到的一个重要结果，但在这里只是作为一种记号向学生介绍，并通过例题向学生指出，复数的指数形式与三角形式的运算结果完全相同，但符号 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$的引进，大大简化了复数三角形式的书写与计算.

3. 既然复数的指数形式是复数的三角形式的简便记法，复数指数形式也主要用于乘、除、乘方、开方的运算.

20.6 复数的应用

1. 本节的重点是复数在电学中的应用，难点是具备一定的电学知识及运算能力.

2. 由于一个复数在复平面上对应着一个向量，并且复数的加减法、实数乘以一个复数，分别与向量的加法、倍积运算结果相同，于是，应用向量加法、倍积运算能解决的问题，用复数运算同样可以解决. 另外，复数运算在研究旋转问题时，更是方便有力的工具. 关于这一点，教材没有涉及它的数学应用，教学中也不作要求.

3. 本小节的例题为突出数学为专业课服务的宗旨，例题选用“交流电路”中的问题也只是套用公式类型的，教师可结合学生的专业选用其他例题进行教学.

Ⅳ 参考教案

课题：20.3 实系数一元二次方程的解法

教学目标：

1. 复习巩固当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法；

2. 掌握当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法；

3. 理解当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根的关系.

教学重点：

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法.

教学难点：

当 $\Delta<0$ 时，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 求根公式的推导.

教学方法：

探究、启发式，讲练结合.

教学过程：

一、新课引入

1. 复习在实数集 **R** 中实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法：配方法，公式法等.

2. 引导学生总结在实数集 **R** 中实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的情况：

(1) 当根的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程在实数集 **R** 中有两个不相等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

(2) 当根的判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程在实数集 **R** 中有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

3. 复习虚数单位 i 的两点规定，考察方程 $x^2=-1$ 的解.

（学生回顾：因为 $i^2=-1$，$(-i)^2=-1$，所以，i 和 $-i$ 都是 -1 的平方根，即方程 $x^2=-1$ 的解是 $x=\pm i$.）

二、知识传授

1. 启发学生讨论 $x^2=-5$ 的解，方程 $x^2=-5$ 的解是 $x=\pm\sqrt{5}i$. 进而让学生讨论方程 $x^2=-a$（$a>0$）的解是 $x=\pm\sqrt{a}i$.（设计意图是由浅入深，自主发现探究）

2. 学生练习：求方程 $x^2=-2$；$x^2=-3$；$x^2+8=0$ 的解.

3. 师生共同研究：在复数集 **C** 中，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$b^2-4ac<0$）的解. 通过配方方程可变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

由 $b^2-4ac<0$，可知 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，所以

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}.$$

因此，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 在复数集 **C** 中的解是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}\ (\text{其中 } b^2-4ac<0).$$

4. 学生独立完成：

例 1 在复数集 **C** 中，解方程 $x^2-4x+5=0$.

5. 教师引导学生观察例 1 中两个根的特点：它们是一对共轭复数.

进而观察 $x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$（其中 $b^2-4ac<0$），形成规律认识.

引导学生思考：在复数集中，任一个实系数一元二次方程的两个根是否互为共轭复数.

6. 引导学生探究根与系数的关系：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

7. 启发学生完成：

例 2 已知实系数一元二次方程 $x^2+mx+n=0$ 的一个根是 $1+\sqrt{3}i$，求它的另一个根和 m，n 的值.

8. 教师板演、讲解：

例 3 在复数集 **C** 中，解方程 $x^3-1=0$.

解 因为 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，所以

$$x-1=0 \text{ 或 } x^2+x+1=0,$$

解得 $x_1=1$ 或 $x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

所以原方程的解为

$$x_1=1 \text{ 或 } x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \text{ 或 } x_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

通常，这三个根分别记作 1，ω，$\overline{\omega}$.

三、课堂练习

练习 20-5，1.

四、课堂小结

1. 在复数集 **C** 中，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$\Delta\geqslant 0$，$\Delta<0$）的解；

2. 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一对共轭复根，满足根与系数的关系.

五、作业

练习 20-5，3，4；习题二十，11，12.

六、板书设计

20.3 实系数一元二次方程的解法	
一、引入：	三、例 3 在复数集 **C** 中，解方程 $x^3-1=0$.
二、新授：	
	四、小结：

V 习题答案、提示和解答

练习 20-1

1. (1) 实部分别是：-3，3，$\frac{1}{2}$，$\sqrt{2}$，0，0，-7.

虚部分别是：2，7，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，-1，$-\sqrt{3}$，1，0.

(2) 实数：$2+\sqrt{2}$，0.618，0，i^2，$\frac{2}{3}$.

虚数：$\frac{1}{2}\mathrm{i}$，i，$5+2\mathrm{i}$，$3-\sqrt{2}\mathrm{i}$，$(1+\sqrt{3})\mathrm{i}$，$-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$.

纯虚数：$\frac{1}{2}\mathrm{i}$，i，$(1+\sqrt{3})\mathrm{i}$.

复数：$2+\sqrt{2}$，0.618，$\frac{1}{2}\mathrm{i}$，0，i，i^2，$5+2\mathrm{i}$，$3-\sqrt{2}\mathrm{i}$，$(1+\sqrt{3})\mathrm{i}$，$-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$，$\frac{2}{3}$.

(3) 3i 不是正数；$-2\mathrm{i}$ 不是负数；$\sqrt{5}\mathrm{i}$ 不是无理数.

(4) 实数集中的数之间，可以比较大小；虚数集中的数之间和实数集与虚数集中

的数之间不能比较大小.

2. (1) 并集；(2) 空集；(3) 真子集；(4) 虚数集.

3. (1) $x=\frac{3}{7}$，$y=-\frac{9}{7}$；(2) $x=0$，$y=-3$；(3) $x=2$，$y=1$.

4. 当 $x=-2$ 时，原复数是实数；当 $x\neq-2$ 时，原复数是虚数；当 $x=1$ 时，原复数是纯虚数.

练习 20-2

1. A：$4+3\mathrm{i}$；B：$3-3\mathrm{i}$；C：$-4+2\mathrm{i}$；D：$-5-2\mathrm{i}$；E：6；F：-3；G：$5\mathrm{i}$；H：$-4\mathrm{i}$；K：$2-\mathrm{i}$.

2. 以原点为起点分别作向量：

(1) $\overrightarrow{OA_1}=(2, 5)$；　(2) $\overrightarrow{OA_2}=(-3, 2)$；　(3) $\overrightarrow{OA_3}=(3, -2)$；

(4) $\overrightarrow{OA_4}=(-4, -2)$；　(5) $\overrightarrow{OA_5}=(3, 0)$；　(6) $\overrightarrow{OA_6}=(0, -3)$；

(7) $\overrightarrow{OA_7}=(0, 4)$；　(8) $\overrightarrow{OA_8}=(-2, 0)$.

3. (1) $b=0$；(2) $a=0$；(3) $b>0$；(4) $a>0$；(5) $a>0$，$b>0$；(6) $a<0$，$b<0$.

4. (1) 5，$4+3\mathrm{i}$；　(2) 13，$5-12\mathrm{i}$；　(3) $\frac{5}{2}$，$\frac{3}{2}+2\mathrm{i}$；

(4) $\sqrt{3}$，$-1-\sqrt{2}\mathrm{i}$；　(5) 7，$7\mathrm{i}$；　(6) 3，3.

5. (1) $2-\mathrm{i}$；(2) $-2-\mathrm{i}$.

6. (1) 第一、三象限的角平分线（或直线 $y=x$）；

(2) 以坐标原点为圆心，半径为 1 的圆周；

(3) 以坐标原点为圆心，以 1 为半径的圆和以 2 为半径的圆所夹的圆环内部（不包括两圆周).

练习 20-3

1. 略.

2. (1) $9+10\mathrm{i}$；　(2) $-2-\mathrm{i}$；　(3) 0；　(4) $1+3\mathrm{i}$；

(5) $-7+7\mathrm{i}$；　(6) 8；　(7) $-4+10\mathrm{i}$；　(8) $3+4\mathrm{i}$.

练习 20-4

1. (1) $19+17\mathrm{i}$；　(2) $-17-6\mathrm{i}$；　(3) $8+4\mathrm{i}$；　(4) $-18-21\mathrm{i}$；

(5) 2；　(6) -5；　(7) $7+6\sqrt{2}\mathrm{i}$；　(8) $-117+44\mathrm{i}$；

(9) 5；　(10) $-20-15\mathrm{i}$.

2. (1) $\overline{z}=3-6\mathrm{i}$；　(2) $\overline{z}=-3-6\mathrm{i}$；　(3) $\overline{z}=5-2\sqrt{6}\mathrm{i}$；

(4) $\overline{z}=-5-2\sqrt{6}\mathrm{i}$.（验证略）

3. $-\mathrm{i}$，　1，　1，　$-\mathrm{i}$，　1，　i.

4. (1) $\frac{18}{65}-\frac{1}{65}\mathrm{i}$；　(2) $\frac{8}{13}-\frac{1}{13}\mathrm{i}$；　(3) $\frac{9}{17}-\frac{2}{17}\mathrm{i}$；　(4) $-1+\mathrm{i}$；

(5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}i$;　(6) $-i$;　(7) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$;　(8) $-\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}i$.

5. 0.

练习 20-5

1. (1) $x=\pm 3i$;　(2) $x=\pm 2\sqrt{2}i$;　(3) $x=\pm\frac{5}{2}i$;

(4) $x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$;　(5) $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{23}}{2}i$;　(6) $x=-2\pm i$;

(7) $x=-1\pm 3i$;　(8) $x=-\frac{1}{4}\pm\frac{3\sqrt{7}}{4}i$;　(9) $x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$;

(10) $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$x_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. $3+4i$，　$b=-6$，　$c=25$.

3. $7+3i$，　$7-3i$.

练习 20-6

1. (1) (3) 是复数的三角形式.

2. (1) 辐角 $\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 辐角主值为$\frac{3\pi}{4}$；

(2) 辐角 $\theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 辐角主值为$\frac{5\pi}{6}$；

(3) 辐角 $\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 辐角主值为$\frac{2\pi}{3}$；

(4) 辐角 $\theta=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 辐角主值为$\frac{11\pi}{6}$.

3. (1) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;　(2) $\cos 0+i\sin 0$;　(3) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$;

(4) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

4. (1) $2\sqrt{3}+2i$;　(2) $-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$.

练习 20-7

1. (1) 6;　(2) $\frac{\pi}{2}$.

2. (1) $16\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;　(2) $8\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;　(3) $-i$;　(4) -30.

3. (1) $243i$;　(2) $-8i$;　(3) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

(4) $8i$.

4. $\overrightarrow{OZ_1}$ 所表示的复数为：$-b+ai$；$\overrightarrow{OZ_2}$ 所表示的复数为：$b-ai$.

练习 20-8

1. (1) $\frac{2}{3}$； (2) $\frac{11\pi}{6}$.

2. (1) $2\mathrm{i}$； (2) $\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}$；

(3) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$或$\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$；

(4) $\frac{1}{2}(\cos 150^\circ+\mathrm{i}\sin 150^\circ)$ 或$-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}\mathrm{i}$.

3. 略.

4. 根据复数乘法的几何意义可知，$z_1=3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的向量按顺时针方向旋转 60°，即后得到新向量对应的复数为 $z_2=z_1[\cos(-60^\circ)+\mathrm{i}\sin(-60^\circ)]=(3-\sqrt{3}\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-2\sqrt{3}\mathrm{i}$. 所以

$$z_1z_2=(3-\sqrt{3}\mathrm{i})(-2\sqrt{3}\mathrm{i})=-6-6\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=(3-\sqrt{3}\mathrm{i})\div(-2\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

练习 20-9

1. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$; $-\mathrm{i}$.

(2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$; i; $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

(3) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{18}\right)$; $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{18}\right)$; $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{18}\right)$.

2. (1) 因为 $z^3=8\mathrm{i}=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$，所以

$$z=2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\ (k=0,\ 1,\ 2).$$

所以

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+\mathrm{i},$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+\mathrm{i},$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2\mathrm{i}.$$

(2) 因为 $z^4=-9=9(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$，所以

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

所以

$$z_1=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i},$$

$$z_2=\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i},$$

$$z_3=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i},$$

$$z_4=\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}.$$

(3) 因为 $z^5=-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$，所以

$$z=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

所以

$$z_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{20}\right),$$

$$z_3=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{21\pi}{20}\right),$$

$$z_4=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{29\pi}{20}\right),$$

$$z_5=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{37\pi}{20}\right).$$

3. 因为 $-16=16(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$，所以 -16 的立方根为

$$z=2\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\ (k=0,\ 1,\ 2),$$

所以

$$z_1=2\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$z_2=2\sqrt[3]{2}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi),$$

$$z_3=2\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

4. 因为 $z^6=-64=64(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$，所以

$$z=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),$$

所以

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+\mathrm{i},$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\mathrm{i},$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+\mathrm{i},$$

$$z_4=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-\mathrm{i},$$

$$z_5=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2\mathrm{i},$$

$$z_6=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-\mathrm{i}.$$

练习 20-10

1. (1) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$； (2) $2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. (1) $e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}=\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}$； (2) $2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(3) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}=\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}$； (4) $4e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}=4\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

3. (1) $-8e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$； (2) $4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$； (3) $5e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$，$5e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$； (4) $\sqrt[6]{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}$，$\sqrt[6]{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{24}}$，$\sqrt[6]{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}}$.

练习 20-11

1. (1) 因为 $Z=R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$，所以

$$\begin{aligned}Z&\approx 90+\mathrm{j}\left(2\times3.14\times60\times0.4-\frac{10^6}{2\times3.14\times60\times25}\right)\\&\approx 90+\mathrm{j}(150.72-106.16)\\&\approx 90+44.56\mathrm{j}.\end{aligned}$$

(2) 因为 $Z=R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$，所以

$$\begin{aligned}Z&\approx 30+\mathrm{j}\left(2\times3.14\times60\times0.5-\frac{10^6}{2\times3.14\times60\times2}\right)\\&\approx 30+\mathrm{j}(188.4-1326.96)\\&\approx 30-1138.56\mathrm{j}.\end{aligned}$$

2. $f=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\approx\dfrac{1}{2\times3.14\times\sqrt{0.5\times3\times10^{-6}}}\approx 130\ \mathrm{Hz/s}.$

3. 因为 $Z_1=75+38\mathrm{j}$，$Z_2=12-32\mathrm{j}$，$Z_3=26+34\mathrm{j}$，所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z}&=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\\&=\frac{1}{75+38\mathrm{j}}+\frac{1}{12-32\mathrm{j}}+\frac{1}{26-34\mathrm{j}}\\&\approx(0.011-0.005\mathrm{j})+(0.010+0.027\mathrm{j})+(0.014\,2-0.018\,6\mathrm{j})\\&=0.035\,2-0.003\,4\mathrm{j}.\end{aligned}$$

所以 $Z\approx14.7+14.24\mathrm{j}$.

即为所求的复阻抗 Z 约为 $14.7+14.24\mathrm{j}$.

习题二十

1. (1) $x=1$，$y=7$； (2) $x=4$，$y=-1$.

2. (1) $m=\pm\sqrt{3}$； (2) $m\neq\pm\sqrt{3}$； (3) $m=2$ 或 $m=3$.

3. (1)（略）；

(2) $\sqrt{34}$，$\sqrt{2}$，$\frac{3}{2}$，5，13，$\sqrt{181}$，$\sqrt{3}$；

(3) $3-5\mathrm{i}$；$-1-\mathrm{i}$；$\frac{3}{2}\mathrm{i}$；5；$-5+12\mathrm{i}$；$10-9\mathrm{i}$；$1-\sqrt{2}\mathrm{i}$.（图略）

4. (1) 以坐标原点为圆心，半径为 5 的圆周；

(2) 以坐标原点为圆心，半径为 1 的圆及其外部；

(3) 以原点为圆心，半径为 2 和半径为 5 的两个圆所夹的圆环内部和以 2 为半径的圆周，但不包括以 5 为半径的圆周上的点.

5. (1) $3-7\mathrm{i}$； (2) $\frac{7}{6}-\frac{5}{12}\mathrm{i}$； (3) $-2\sqrt{2}\mathrm{i}$； (4) $2b-2b\mathrm{i}$.

6. (1) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$； (2) $-19-43\mathrm{i}$；

(3) $a+b$； (4) $(a^2+b^2)^2$.

7. (1) $(x+2\mathrm{i})(x-2\mathrm{i})$； (2) $(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})(a+b)(a-b)$.

8. (1) $-\mathrm{i}$； (2) $(a^3+3ab^2)-(3a^2b+b^3)\mathrm{i}$.

9. (1) 略； (2) 略.

10. (1) $-1-8\mathrm{i}$； (2) $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$； (3) $\frac{3}{25}+\frac{4}{25}\mathrm{i}$； (4) $-2-9\mathrm{i}$.

11. (1) $x=\pm\frac{3}{2}\mathrm{i}$； (2) $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$；

(3) $x=-2\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$； (4) $x=\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{23}}{4}\mathrm{i}$.

12. $-3-2\mathrm{i}$， $p=12$， $q=26$.

13. (1) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$； (2) $6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$；

(3) $4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$； (4) $\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$.

14. (1) $9i$； (2) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$；

(3) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$； (4) $2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

15. (1) $729(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$； (2) $64i$；

(3) $-8-8\sqrt{3}i$； (4) $-128+128\sqrt{3}i$.

16. 因为

$$(1+\sqrt{3}i)^n=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right),$$

要使之成为实数，则 $\sin\dfrac{n\pi}{3}=0$，即$\dfrac{n\pi}{3}=k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$)，所以 $n=3k$ ($k\in\mathbf{Z}$).

17. 所求的复数为

$$\begin{aligned}z&=(3-\sqrt{3}i)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\\&=2\sqrt{3}\,[\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)](\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\\&=2\sqrt{3}(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\\&=3+\sqrt{3}i.\end{aligned}$$

18. (1) $x_1=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{10}+i\sin\dfrac{\pi}{10}\right)$；

$x_2=\sqrt[5]{2}i$；

$x_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{10}+i\sin\dfrac{9\pi}{10}\right)$；

$x_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{10}+i\sin\dfrac{13\pi}{10}\right)$；

$x_5=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{17\pi}{10}+i\sin\dfrac{17\pi}{10}\right)$.

(2) $x_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{18}+i\sin\dfrac{\pi}{18}\right)$；

$x_2=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{18}+i\sin\dfrac{7\pi}{18}\right)$；

$x_3=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{18}+i\sin\dfrac{13\pi}{18}\right)$；

$x_4=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{18}+i\sin\dfrac{19\pi}{18}\right)$；

$x_5=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{25\pi}{18}+i\sin\dfrac{25\pi}{18}\right)$；

$x_6=\sqrt{2}\left(\cos\frac{31\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{31\pi}{18}\right)$.

(3) $x_1=1$；

$x_2=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；

$x_3=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；

$x_4=-1$；

$x_5=\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；

$x_6=\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

(4) $x_1=1$；

$x_2=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$；

$x_3=\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}$；

$x_4=\cos\frac{3\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{5}$；

$x_5=\cos\frac{4\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{5}$；

$x_6=-1$；

$x_7=\cos\frac{6\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{5}$；

$x_8=\cos\frac{7\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{5}$；

$x_9=\cos\frac{8\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{5}$；

$x_{10}=\cos\frac{9\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{5}$.

19. (1) $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}=\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)$；

(2) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$；

(3) $8=8(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$；

(4) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$.

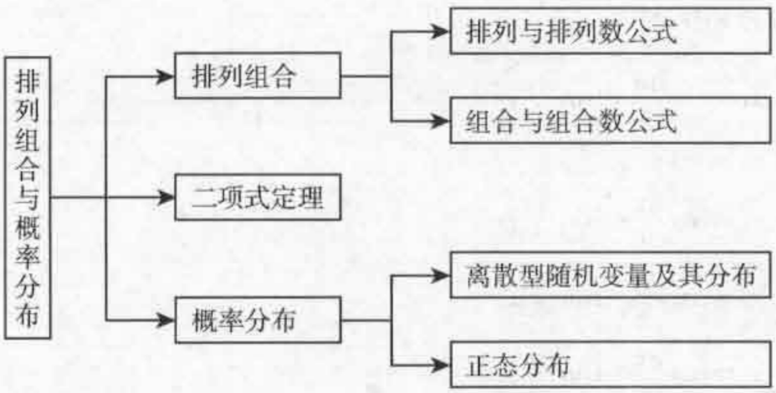
第二十一章　概率分布初步

思想火花：

教是为了不需要教．就是说咱们当教师的人要引导他们，使他们能够自己学，自己学一辈子，学到老．

——叶圣陶

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 理解排列和排列数的概念，会用排列数公式计算简单的排列问题.

2. 理解组合和组合数的概念，会用组合数公式计算简单的组合问题.

3. 掌握二项式定理和二项式系数的性质，能运用它们作简单计算和证明简单的问题.

4. 理解离散型随机变量及其分布的概念，能应用超几何分布列解决一些简单的产品抽样检验问题.

5. 掌握二项分布列，能解决一些简单的产品抽样检验问题.

6. 掌握正态曲线的特点与 3σ 原则，并能对其进行简单实际应用.

III 教材分析和教学建议

本章教材共有三部分. 第一部分是排列、组合，教材中首先提出了排列的概念，再利用分步计数原理导出了排列数公式，在排列的基础上给出了组合概念和组合数计算公式，通过排列与组合的对比，阐明了排列与组合的联系与区别，最后给出了组合数的两个性质. 排列与组合是学习二项式定理的预备知识. 本章的第二部分是二项式定理，二项式定理揭开了二项式正整数次幂展开式的规律. 教材从学生已有的知识入手，从中找出规律，归纳出二项式正整数次幂展开式的一般形式，即二项式定理，接着给出了二项式展开式的通项公式、二项式系数的概念，最后是二项式系数的性质. 本章的第三部分是概率分布，首先由实例引出离散型随机变量及其分布，并介绍了分布列的两个性质. 以此为基础，从实际问题引出超几何分布，并介绍了其简单的应用. 然后由 n 次独立重复试验事件 A 恰好发生 k 次的概率公式，引出二项分布及其在产品抽样检验中的简单应用. 最后借助正态变量的概率密度函数的图像直观认识正态分布曲线的性质及 3σ 原则.

排列与组合是初等代数中比较独特的内容，它研究的对象以及研究问题的方法都与学生已掌握的数学知识有较大的不同. 这部分内容虽少，与旧知识的联系也不多，但处理问题的方法灵活，有利于对学生进行逻辑思维能力的训练，有利于学生分类、分步思想的形成. 二项式定理安排在排列组合之后来学习，一方面因为学习过程中要用到组合知识，可以把它看做排列组合的一个应用；另一方面也为学习随机变量及其分布做准备；再就是，由于二项式系数是一些特殊的组合数，由二项式定理可导出一些组合数的恒等式，这对深化组合数的认识有好处. 总之，二项式定理是综合性较强的知识，它具有联系不同内容的作用. 在当前，概率与统计在工农业生产和科学技术中都得到越来越广泛的应用，成为研究自然现象和规律，处理工程乃至公众事业问题的有利工具. 随机变量和分布的概念是研究各种分布和数理统计的基础. 对于离散型随机变量、二项分布、正态分布等概念，对中学生不能给予严格的定义. 在超几何分布的应用中，产品抽样检验所用到的批次品率越小，抽到次品数较大的可能性也越小，在二项分布的应用中，对产品抽样检验要用到的“抽到 k 件次品的概率随着批次品概率的增大而增大”的结论，正态分布曲线的性质，只须给以形象的描述性的说明即可，不要求追求严密性、系统性，更不要脱离课本加以延伸，增加难度.

本章重点是排列与组合的概念及其计算；二项式定理及二项式系数的性质；离散型随机变量与超几何分布的简单应用；二项分布及其简单应用；正态分布及其简单应用.

本章难点是排列与组合的应用题；二项式定理及二项式系数性质的应用；运用概率知识解决实际问题.

本章学习的关键是正确理解排列与组合的概念及其区别，掌握有关排列与组合计算的基本思想方法；理解并掌握二项式展开式的排列规律；理解二项分布与正态分布的

概念.

为了便于教学，提出以下教学建议：

1. 在学习排列、组合问题时，要注意引导学生体会两个计数原理的作用，同时要利用树图和框图，使学生牢固掌握排列与组合的区别，排列与顺序有关，组合与顺序无关.熟记排列数和组合数公式，了解公式的变形及各种用法. 要使学生掌握无附加条件的排列、组合问题；理解有附加条件的排列、组合问题；弄清排列、组合综合问题的解题思路.

2. 在二项式定理的教学过程中，要尽量使学生弄清二项展开式、二项展开式系数及通项公式等概念，使学生掌握二项式系数的性质. 得到二项式定理的猜想完全依赖于对4个展开式的分析，因此要舍得花些时间让学生观察和思考.

3. 概率的教学要坚持从具体到抽象的思路和方法. 对每一个新概念要努力做到用学生熟悉的例子顺理成章的引入，以克服教学内容的抽象给学生学习带来的困难.

4. 在离散型随机变量及其分布与二项分布的教学中，要充分利用实际问题，让学生弄清其中所涉及的基本概念是什么，而正态分布则要充分利用正态曲线，加强直观教学.

5. 关于概率方面的内容，教师可以参看有关书籍，扩充自己这方面的知识，以便更好、更准确地指导学生运用它解决实际应用问题，但不要求给学生扩充.

本章教学约需14课时，具体分配如下（仅供参考）：

21.1 排列与组合	
21.1.1 排列与排列数公式	2课时
21.1.2 组合与组合数公式	2课时
21.2 二项式定理	
21.2.1 二项式定理	2课时
21.2.2 二项式系数的性质	1课时
21.3 离散型随机变量及其分布	
21.3.1 离散型随机变量	2课时
21.3.2 二项分布	1课时
21.4 正态分布	1课时
小结与复习	3课时

21.1 排列与组合

21.1.1 排列与排列数公式

1. 本节的主要内容是排列的概念、排列数公式及排列的应用. 重点是排列的应用.难点是排列的概念及排列数公式的推导.

2. 排列的定义是在分析问题实例的基础上归纳抽象出来的，在分析实例的过程中，要注意把握如下问题：

（1）给学生一定的感性认识，使他们对排列的实质有初步的感受.

（2）注意舍去实例的具体内容，抽象出数学模型的思想方法的教学，重点是指出做事的“顺序”.

（3）分步计数原理是研究排列问题的基础.

3. 教材在研究实例之后，引出了排列的定义. 排列的定义包含两个基本点：一是“取出元素”，二是“按一定顺序排列”. 在这里顺序是关键. 应向学生强调指出，只有当元素完全相同，并且排列顺序也完全相同时，才能确认是同一排列.

4. 本节所涉及的排列是元素不重复的，重复元素的排列问题本节不研究.

5. 本节的第二个问题是排列数公式，即排列的种数问题. 关于排列数公式的推导要注意以下几点：

（1）紧扣分步计数原理；

（2）从最简单的问题入手；

（3）必要时，可以利用框图进行直观解释.

6. 在应用排列知识解决实际应用时，初学者常会出现重复和遗漏的错误. 教学时要注意引导学生紧密结合两个计数原理，同时要注意引导学生总结“特殊元素优先安排”、“集团排列”、“间隔排列”等处理问题的方法，而有关问题放在课后的练习中，正文中没有涉及. 较大的排列数的计算可以使用计算器.

7. 教材在分析实例的基础上直接归纳出排列数公式，并未对公式做严格推导. 教师可以根据学生的实际情况适当增加实例，让学生知道排列问题实质就是分步计数原理.

21.1.2　组合与组合数公式

1. 本节的主要内容是组合的概念、组合数公式及组合的应用. 重点是组合的应用. 难点是组合的概念、组合数公式的推导.

2. 组合的概念是在研究实例的基础上，通过与上一节问题的比较得出的. 这种通过与旧概念（排列）的对比引入新概念（组合）的处理方法，对学生理解新概念，弄清新旧概念的区别与联系是十分有利的. 排列的两个要素是“取元素”与“排顺序”；组合的两个要素是“取元素”与“并一组”，组合与排列既有内在联系又有本质区别. 教学中只要抓住“顺序”这个关键，就能使学生更深刻地理解排列组合的概念.

3. 相同的组合是指在组合中所有元素相同，但不管元素的顺序. 相同的排列不仅要求排列中所有元素相同，而且元素的排列顺序也必须一样. 由此可见，相同的排列一定是相同的组合，反之则不然.

4. 排列与组合的概念及分步计数原理是推导组合数公式的基础，而讲清教材引例则是推导组合数公式的关键.

5. 组合数的两个性质是由例题直接归纳得到的，性质的证明有一定的难度，教学过程中视学生的能力，教师可以灵活处理. 为帮助同学们掌握两个性质可以结合如下两个实例：

(1) 组合数的性质1：一个口袋内有 n 个不同的小球. 若从中任取 m 个的不同取法是 C_n^m 种；口袋内留下的 $n-m$ 个小球，则不同的留法有 C_n^{n-m} 种.

分析：因为每一种不同的取法对应着一种“留法”，所以 $C_n^m=C_n^{n-m}$.

(2) 组合数的性质2：一个口袋内有 n 个不同的白球和1个黑球，共 $n+1$ 个不同的小球，从中任取 m 个不同的小球，有多少种不同的取法？

思路一：从 $n+1$ 个不同的小球中任取 m 个，有 C_{n+1}^m 种不同的取法.

思路二：分两类来取，第一类：不含黑球，有 C_n^m 种不同的取法；第二类：含有黑球，有 C_n^{m-1} 种不同的取法. 由分类计数原理，共有不同的取法 $C_n^m+C_n^{m-1}$ 种.

思路一的取法和思路二的取法相等，所以 $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

6. 组合数公式的应用，关键是弄清给出的问题与顺序无关，属于组合问题. 教学时要注意引导学生紧密结合两个计数原理，同时要注意引导学生总结“至少”、“至多”等问题的分类规律，同时注意间接法的使用. 较大的组合数的计算可以使用计算器.

7. 关于排列与组合的综合应用，教材中涉及的问题较简单，目的在于使学生掌握这类问题的解题思路：“先分类后分步”、“先分组后排列”. 教学时，可以适当补充一些例题，逐步引导学生形成正确的解题思路.

21.2 二项式定理

21.2.1 二项式定理

1. 教材结合组合知识，以研究 $(a+b)^5$ 的展开式为突破口，采用不完全归纳法对二项展开式的规律进行了探索. 在此基础上，归纳出二项式定理，接着引进了二项展开式、二项式系数、通项等概念. 最后介绍了“杨辉三角”及其构造规律.

2. 教学中应通过归纳出 $(a+b)^n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 的展开式的教学，培养学生通过具体的分析、归纳发现事物一般规律的能力. 这种由“特殊到一般”的思考方法，对于培养学生的创造思维有着重要意义.

3. 教学二项展开式的结构时，要从项数、次数、系数三个方面进行剖析，使学生掌握其形式特征：

(1) 项数为 $n+1$；

(2) 次数：对于 a 为降幂排列，即 a^n，a^{n-1}，…，a^0；对于 b 为升幂排列，即 b^0，b^1，…，b^n. 每一项中 a，b 的次数之和都是 $(n-r)+r=n(r=n, n-1, \cdots, 1, 0)$；

(3) 系数：二项式系数为组合数 C_n^0，C_n^1，…，C_n^n. 考虑到学生的接受程度，系数的特征只是从各项系数与组合数值相等的角度来说明，没有从理论上推导.

教师也可尝试如下推导二项式定理的方法：

在初中，我们学习过完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 结合我们学过的两个计数原理，$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$ 展开式中的项共有三类，可以这样展开：

第一类是从两个因式中取0个 b（即取2个 a，0个 b）相乘，得 $C_2^0a^2$；

第二类是从两个因式中取 1 个 b（即取 1 个 a，1 个 b）相乘，得 C_2^1ab；

第三类是从两个因式中取 2 个 b（即取 0 个 a，2 个 b）相乘，得 $C_2^2b^2$.

于是

$$(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2. \qquad ①$$

同理$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$，用两个计数原理展开，可知

$$(a+b)^3=C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3. \qquad ②$$

引导学生观察②式与完全立方公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 是否相同.

我们不难发现 $(a+b)^2$ 的展开式有 3 项，其系数对应关系为

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \end{array}$$

$(a+b)^3$ 的展开式有 4 项，其系数对应关系为

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \end{array}$$

引导学生据此尝试写出 $(a+b)^4$ 的展开式，并用多项式的展开法则展开验证.

一般地，有

$$\boxed{(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^nb^n,\ n\in \mathbf{N}_+.}$$

4. 教学通项公式 $T_{m+1}=C_n^ma^{n-m}b^m$，应注意以下几点：

(1) 它是 $(a+b)^n$ 的展开式的第 $m+1$ 项，这里 $m=0, 1, 2, \cdots, n$；

(2) $(a+b)^n$ 展开式的第 $m+1$ 项与 $(b+a)^n$ 展开式的第 $m+1$ 项是不同的，$(b+a)^n$ 的展开式的第 $m+1$ 项为 $C_n^mb^{n-m}a^m$；

(3) $(a-b)^n$ 可变形为 $[a+(-b)]^n$，其二项展开式的通项公式为

$$T_{m+1}=C_n^ma^{n-m}(-b)^m=(-1)^mC_n^ma^{n-m}b^m.$$

教学二项式系数时，应向学生讲清楚：二项式系数是指 C_n^0，C_n^1，…，C_n^n，二项展开式中第 $m+1$ 项的二项式系数 C_n^m 与第 $m+1$ 项的系数是两个不同的概念.

教学二项展开式特例 $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^mx^m+\cdots+x^n$ 时，应指出：

(1) 该展开式在解题时可直接应用；

(2) 此公式的推导可作为作业由学生独立完成.

5. 通项公式 $T_{m+1}=C_n^ma^{n-m}b^m$ 在解决问题时常常用到，应让学生重视.

21.2.2　二项式系数的性质

1. 因为 $(a+b)^n$ 的展开式有 $n+1$ 项，所以它有 $n+1$ 个二项式系数：即 C_n^0，C_n^1，…，C_n^n. 教材给出了关于二项式系数的三个性质：

(1) 系数的规律；

(2) 系数的增减性；

（3）最大系数.

2. 三个性质是通过对杨辉三角的观察得出的，只要求学生掌握结论.

3. 教学杨辉三角时，要使学生掌握杨辉三角的规律. 在二项式次数较低时，可直接用它求出展开式的系数.

4. 例 7 说明：如果集合 S 含有 n 个元素，那么这个集合共有 2^n 个子集（包括空集）.

21.3 离散型随机变量及其分布

21.3.1 离散型随机变量

1. 本节的主要内容是离散型随机变量的概念和它的概率分布及其性质. 由于学生初次遇到随机变量、概率分布的概念，而且在以往的数学知识中又没有适当的概念可以类比，因而在教学中可能会遇到一些困难. 而这两个概念又是本章后面教学的基础，需要使学生掌握. 对此，教学中要引起足够的重视.

2. 对于例题的样本空间可以这样理解，一方面用“任取 10 件检查”作为试验，则它的样本空间有 C_{100}^{10} 个基本事件，且是古典概型. 这样才能求“取到的次品件数分别为 0，1，2，3，4，5”这 6 个随机事件的概率. 另一方面，如果把“任取 10 件检查，看其中有几件次品”作为随机试验，根据样本空间的定义，它的样本空间 $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，即教材中所设的有 6 个基本事件. 这个试验不是古典概型. 在求这 6 个基本事件的概率时，必须用第一种理解下的样本空间来解决，这 6 个基本事件是一般的随机事件. 这也说明了“选择样本空间是建立概率模型的第一步”.

3. 本节是用对例题的分析，来引入离散型随机变量的既通俗又粗略的描述性定义. 实际上随机变量是随机试验结果的函数. 也就是说，可以这样定义：

若一个随机试验的每一个可能的结果 ω 都与唯一的实数值 $X(\omega)$ 对应，则称实数值变量 $X(\omega)$ 为一个随机变量. 随机变量的定义域为样本空间. 这一定义不必教给学生. 但要通过对例题的分析，使学生领会随机变量具有以下两个特征：

（1）随机性　随机变量的取值是随机的，即试验结果不同时，它的取值也不同. 在试验结果确定前，我们不知道它取什么值，但是预先可以知道它的所有可能值.

（2）规律性　随机变量的取值依赖于试验结果，而试验的结果是有统计规律的，所以随机变量的取值也是有一定规律的.

因此，研究随机变量时，重点是要弄清以下两个问题：

（1）随机变量的所有可能取值；

（2）随机变量取值的概率规律.

4. 教材把离散型随机变量 ξ 的取值及相对应概率的全体，叫做离散型随机变量的概率分布，其中“全体”的含义是指分布列必须满足概率和等于 1 的条件. 因为只有这样才能明确地表达出随机变量概率分布的整体状态.

5. 由于离散型随机变量 ξ 的每一个可能取值都与其概率的取值相对应着，因此人们

常常把它的概率分布写成表格的形式，并且把它叫做随机变量 ξ 的分布列．实际上，离散型随机变量的概率分布有三种表达方式，即解析式、表格和图像，教材中均给予了介绍．这三种表达方式同函数的三种表示法一样，各有其优缺点，也各有其用处，可以根据实际需要加以选用．

6. 超几何分布是离散型随机变量的一种概率分布．服从这种分布的随机变量取各个值的概率只须用排列、组合知识便可求出，而且它在小批量产品的抽样检验中有着重要应用，因此我们首先让学生学习这种分布，并以这种分布为例介绍随机变量概率分布的分布列、分布图和解析式，研究概率分布的性质．

本节也是对古典概率学习的复习巩固和再提高．求超几何分布的分布列方法不难，但是计算概率相当麻烦，必须要求学生认真去做．当把组合数用计算公式化成算术运算后，引导学生先约分，然后便可用简单的计算器去求值．如用函数型计算器可以直接计算．

7. 本节举了两个超几何分布在产品抽样检验中应用的例子．这种检验也叫“成批产品次品数的检验”．“成批产品次品数的检验”是用抽得的样本的次品数（数字特征）去检验对总体（这批产品）次品数所做的假设是否正确．通过检验，如果证实对总体次品数所做的推测是不合理的，就应该放弃这个推测．也就是说，“成批产品次品数的检验”是从对总体次品数所做的一个假设开始，然后作抽样，检查样本中的次品数，进而运用这个信息测定对总体次品数的假设在多大程度上是可靠的．

检验的目的不是去研究样本的次品数到底是多少，而是在于判断样本次品数和假设的总体次品数的差异是否显著．为了断定这个显著（拒绝假设）还是不显著（接受假设），需要选取一个标准，这个标准就是检验水平也称显著性水平 α．它就是该问题中给小概率规定的标准，“不大于 α（检验水平）的概率为小概率”．

8. 一个事件是不是小概率事件是由它的概率来判断．多小的概率算是小概率并没有统一的规定，这要根据随机事件的性质和重要程度来定，但通常的取值多采用 0.1，0.05，0.01，0.001 等数值．

小概率原理是说“小概率事件在一次试验中几乎不可能发生”．在假设检验中应用它，实质上是承认它在一次试验中不会发生．它是这样被应用的：在假设检验中，一方面在假设的前提下，计算出某事件的概率，根据检验水平，这个事件的概率为小概率．另一方面在所做的一次试验中，看某事件是否发生，如果发生了，根据小概率原理则否定原来的假设，如果没有发生则不能否定原来的假设．

必须指出，小概率事件的概率不论多么小，总是有可能发生的．因此小概率原理仅适用于个别的、单独的试验，当试验次数很多时就不适用了．例如，某种产品的次品率为 0.01，若从中任取一件检查，由于这种产品的次品概率是 0.01，可以认为这是个小概率事件．但如果对这批产品逐个检查下去，总有一次会发现次品的，这是小概率原理就不适用了．

9. 教材里说到产品抽样检验，其实与抽样检验不同的还有全数检验．而抽样检验又有多种类型：按质量标准分，可分为计数抽样检验和计量抽样检验；按抽样的程序来分，可分为一次、二次或多次抽样检验；按检验的方式来分，可分为标准型和调整型．但不论哪种检验，其基本原理都是类似的，都要同时考虑到生产方和使用方的利益．当犯“弃真”性质错误的概率（即把合格批判为不合格批的概率）α越小时，对生产方越有利，因此“弃真”性质错误也称生产方风险，当犯“取伪”性质错误的概率（即把不合格批判为合格批的概率）β越小时，则对使用方越有利，因此“取伪”性质的错误也称使用方风险．这两者是相关的，α变小，β就会变大．教材中的例题涉及了最简单的一种抽样检验——一次计数抽样检验，借以介绍计数抽样检验的原理．实际上，我国目前使用的是国家标准局制定的“逐批检查计数抽样程序及抽样表”（GB－2828－87）和“周期检查计数抽样程序及抽样表”（GB－2829－87）．这是两种调整型抽样方案表，调查型抽样方案是根据产品批质量的变化情况，按照规定的规则进行调整的一种抽样方案，它对产品质量的提高有一定的促进作用，而且还可节约检验费用．目前世界上各工业国家大多数都采用调整型抽样方案，因此这两个表的制定对我国抽样检验工作是一大促进．

21.3.2 二项分布

1. 独立重复试验是研究随机现象的重要途径之一，很多概率模型的建立都是以独立重复试验为背景，二项分布就是来自于独立重复试验的一个模型．由于前面教材没有介绍概率的加法公式与乘法公式，所以对 n 次独立重复试验中事件 A 发生次数的概率公式，没有推导，而是直接给出，不必向学生补充，可直接应用结论．教师可阅读相关资料做知识的扩充．

2. 教材通过对 n 次独立重复试验中事件 A 发生次数及其对应概率的介绍，得出事件 A 发生次数的分布列，由此引出二项分布的概念．二项分布中有两个参数，一个是独立重复试验模型的总次数 n，另一个是每次试验事件 A 发生的概率 p．二项分布是一类很重要的概率分布，是应用最广泛的离散型随机变量概率模型，服从二项分布的随机变量在社会实际中广泛的存在着，同时它也是在理论上被研究得最早，且较深入的一类分布．教材介绍了二项分布在产品抽样检验中的应用．

3. 由于中等职业学校学生接受能力的限制，不可能从理论上推导二项分布的一些性质，因此教材只是利用对例题中具体数字变化的观察、分析，引导学生得到：“当被抽到的次品数 k 大于样本容量 n 与批次品率 p 的乘积时，抽到 k 件次品的概率随次品率 p 的增大而增大.”简单地说，即“批次品率 p 越大，抽到 k 件次品的概率也越大”．并以此作为大批量产品验收和制定产品验收方案的一个根据．

21.4 正态分布

1. 正态分布是统计中很常有的分布，它能刻画很多随机现象．由中心极限定理知一

个随机变量如果众多的、互不相干的、不分主次的偶然因素作用之结果，它就服从或近似服从正态分布．服从正态分布的随机变量是一种连续型随机变量．我们知道，离散型随机变量最多取可列个不同值，人们感兴趣的是它取某些特定值的概率，即感兴趣的是其分布列．连续型随机变量可能取某个曲间上的任何值，通常感兴趣的是它落在某个区间上的概率．离散型随机变量的概率分布规律用分布列描述，而连续型随机变量的概率分布规律用分布密度函数（曲线）表示．

正态随机变量是概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbf{R}$$

的随机变量，其中参数 a，$\sigma(\sigma>0)$ 分别是该随机变量的数学期望和标准差．

2. 关于正态随机变量的产生背景，由于学生没有学中心极限定理，所以教材的表述为“它们是有一些相互独立的偶然因素引起的，而每一个这种偶然因素在总体的变化中都只是起着均匀、微小的作用”．表示这类随机现象的随机变量一般是本节要学习的正态分布．只须给以形象的描述性的说明，不要脱离学生实际不适当地追求严密性、系统性，增加难度．

3. 正态分布在概率论与数理统计中占有十分重要的地位．为体现正态分布的重要性，教材列举了许多服从正态分布的随机变量的例子，例如，测量时的误差；一批产品的长度、强度等质量指标；当调查对象是很多人时，身高、体重及人体的某些生理、生化指标；当考生很多时，全体考生的成绩等等，它们都近似服从正态分布．教师可引导学生分析一下为什么它们都近似服从正态分布，以加强学生对随机变量产生背景的印象．比如某一地区同龄人群身高的分布，就可以看成近似服从正态分布．因为一个人的身高受许多因素的影响，包括遗传基因、饮食习惯、每天锻炼的时间、学习的时间、生活习惯、气候条件、周围环境等．

人们对正态分布的研究已经达到很高水平。标准正态分布（$a=0$，$\sigma=1$）的概率分布已经列成表，一般叫正态分布数值表，用起来犹如平方根、立方根表一样方便，问题也就可以用查表计算解决了，所以关于标准正态分布问题很容易解决．

4. 教学中，要解释参数 a，σ 含义，以及复习如何用样本来估计它们．

可以引导学生利用几何画板研究参数 a，σ 对正态曲线的影响．操作步骤如下：

（1）做一条垂直于 x 轴的直线，并在此直线上任取一个点 A，用点 A 的纵坐标来控制参数 a 的变化；

（2）以 x 轴上的一点为端点，做一条垂直于 x 轴的射线，并在此射线上任取一点 B，用点 B 的纵坐标来控制参数 σ 的变化；

（3）输入函数解析式 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$，作出函数 $f(x)$ 的图象；

（3）拖动点 A 和点 B，便可观察随着参数 a 和 σ 取值的变化，正态曲线变化的情况．

5. 本节的重点是正态曲线的性质与 3σ. 教学中只需通过图形直观使学生认识了解即可.

Ⅳ 参考教案

课题：21.1.1 排列与排列数公式（第一课时）

教学目标：

1. 知识传授目标：正确理解排列和排列数的意义，掌握排列数公式，能利用树形图写出简单问题的所有排列.

2. 能力培养目标：培养学生的抽象思维能力和观察归纳能力；

3. 思想教育目标：通过概念的学习和公式的推导，让学生体会特殊与一般的辩证关系.

教学重点：

排列的概念、排列数公式及排列的应用.

教学难点：

排列的概念及排列数公式的推导.

教学方法：

采用发现、探究和讲练结合的教学方法.

教学过程：

一、复习引入

分类计数原理与分步计数原理的共同点和区别.

二、探索新知

1. 排列的概念

问题 1 甲、乙、丙三个足球队，要进行主、客场双循环比赛，共需比赛多少场?

教师引导梳理思路：

(1) 完成一件什么样的事情?

将三个队按“主场队在前客场队在后”的顺序排成一列，共有多少种排法.

(2) 完成这件事情是分类还是分步?

学生思考，小组讨论，解决问题，分享结论.

① 用加法原理设计方案.

首先确定主场队，如果是甲，客场队是乙或丙，需要 2 种排法，若主场队是乙，客场队是甲或丙，又需要 2 种排法，若主场队是丙，客场队是甲或乙，又需要 2 种排法，共需要 $2+2+2=6$ 种排法.

② 用乘法原理设计方案.

首先确定主场队，在三个队中，任选一个队为主场队，有 3 种方法. 即甲、乙、丙任意一个队为主场队，当选定主场队后，再确定客场队，由于已经选了主场队，客场队只能在其余两个队去选，有两种方法. 那么，根据乘法原理，在三个队中，每次取两个，按主场队在前、客场队在后的顺序排列，不同的方法共有 $3\times2=6$ 种.

根据以上分析由教师引导学生写出所有排法：

主场	客场	赛事
甲	乙	甲—乙
	丙	甲—丙
乙	甲	乙—甲
	丙	乙—丙
丙	甲	丙—甲
	乙	丙—乙

教师给出：我们把每一个研究的对象叫做**元素**. 那么上面的问题就是从 3 个不同的元素中，任取 2 个元素，按照一定的顺序排成一列，求一共有多少个不同的排列个数.

教师引导学生得到排列概念：

一般地，从 n 个不同的元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

排列的定义包含两个基本点：一是“取出元素”，二是“按一定顺序排列”. 在这里顺序是关键.

如果 $m<n$，这样的排列叫做**选排列**. 如果 $m=n$ 时（也就是每次取出所有元素的排列），这样的排列叫做**全排列**. 全排列中所有不同的排法所含有的元素完全一样，只是元素排列的顺序不完全相同.

学生写出问题 1 中，所有双循环比赛的场次，即从甲、乙、丙三个足球队中任取两个球队的所有排列，并确定该排列是选排列还是全排列：

甲乙、甲丙、乙甲、乙丙、丙甲、丙乙（前者为主场球队）.

教师提醒学生注意：只有当元素完全相同，并且排列顺序也完全相同时，才能确认是同一排列. 例如甲乙与乙甲元素完全相同，但却不是同一排列.

请同学们举几个排列问题的例子.

教师给出排列数概念：

我们把从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做**排列数**，用符号 A_n^m 表示.

教师引导学生写出问题 1 中，所有比赛场数为

$$A_3^2=3\times2=6.$$

问题 2　从 10 名参加集训的乒乓球运动员中，任选 3 名运动员，排好出场的先后顺

序去参加比赛，有多少种不同的出场顺序？

教师引导学生分析：

(1) 这是一个怎样的排列问题？

把每一个集训的运动员看作不同的元素，这个问题就是从10个不同的元素中取出3个元素，按照一定的顺序排成一列，求共有多少排法的排列问题.

(2) 这个排列的个数用排列数怎么表示？A_{10}^{3}.

下面我们研究这个问题.

运动员出场的顺序分别为第1个出场，第2个出场，第3个出场，因此可以分成三步来完成：

第一步，考虑第1个出场人选，有10种方法；

第二步，考虑第2个出场人选，因为第1个出场的人选已经确定，所以还有9种方法；

第三步，考虑第3个出场人选，因为第1个、第2个出场的人选已经确定，所以还有8种方法.

根据分步计数原理，参赛的方法共有

$$\begin{aligned}A_{10}^{3}&=10\times 9\times 8\\&=720\ (种).\end{aligned}$$

教师引导学生思考：

(1) 计算从10个不同元素中取出4个元素的排列数，根据分步计数原理，要分成多少个步骤？完成每个步骤的方法种数是多少？

$$A_{10}^{4}=10\times 9\times 8\times 7$$

(2) 计算从10个不同元素中取出5个元素的排列数，根据分步计数原理，要分成多少个步骤？完成每个步骤的方法种数是多少？

$$A_{10}^{5}=10\times 9\times 8\times 7\times 6$$

(3) 计算从n个不同元素中取出m个元素的排列数，根据分步计数原理，要分成多少个步骤？完成每个步骤的方法种数是多少？

一般地，有如下**排列数公式**

$$\boxed{A_{n}^{m}=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1),}$$

其中m，$n\in\mathbf{N}_{+}$，且$m\leqslant n$.

例1　计算A_{18}^{5}的值.

解法一　由排列数公式

$$\begin{aligned}A_{18}^{5}&=18\times 17\times 16\times 15\times 14\\&=1\ 028\ 160.\end{aligned}$$

解法二　用计算器计算，

按键	显示
18 $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ 5 $\boxed{=}$	1 028 160

所以，$A_{18}^5=1\ 028\ 160$.

如果 $m=n$，即为全排列时，排列数公式变为

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots\times3\times2\times1,$$

也就是说，全排列的排列数等于自然数 1 到 n 的连乘积，这个连乘积叫做 n 的阶乘，用 $n!$ 表示，即 $A_n^n=n!$.

例 2　计算 A_5^5 的值.

解　$A_5^5=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

因为 $(n-m)(n-m-1)\cdots\times3\times2\times1=(n-m)!$，所以，排列数公式还可以写成

$$\boxed{A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.}$$

我们规定 $0!=1$，所以，当 $m=n$ 时，$(n-m)!=1$，上述公式也成立.

三、课堂练习

教材练习 1，2，3.

四、课堂小结

1. 排列概念；
2. 排列数概念；
3. 排列数公式.

五、作业

习题二十一　4 (1) (2).

六、板书设计

21.1.1　排列与排列数公式	
1. 排列	3. 排列数公式
2. 排列数	

V　习题答案、提示和解答

练习 21-1

1. ab，ac，ad，ba，bc，bd，ca，cb，cd，da，db，dc.

2. (1) 210；(2) 1 680；(3) 210；(4) 970 200.

3. 2；6；24；120；720；5 040；40 320.

4. (1) $A_7^7=5\ 040$；(2) $A_1^1A_6^6=720$.

(3) 相邻问题的排列通常称为"集团排列"，它的解题思路是：首先把相邻的元素看成一个元素与其他元素进行全排列，然后再排相邻的元素，即先排集团外、再排集团内.

$$A_6^6A_2^2=1\ 440;$$

(4) 不相邻的问题通常称为"间隔问题"，它的解题思路是：首先对其他元素进行全排列，然后把不相邻的元素插到排定元素的间隙进行排列，即采用插空法.

$$A_5^5A_6^2=3\ 600;$$

此题还可以考虑间接法，从 7 个人的全排列数中去掉其中甲、乙两人相邻的排列数，即

$$A_7^7-A_6^6A_2^2=3\ 600;$$

(5) 方法一：按乙是否在排头分为两类. 第一类，乙在排头，有 A_6^6 种排法；第二类，乙不在排头，这时需分三步：第一步排乙有 A_5^1 种排法，第二步排甲 A_5^1 种排法，第三步排其他元素有 A_5^5 种排法，所以第二类共有 $A_5^1A_5^1A_5^5$ 种排法.

$$A_6^6+A_5^1A_5^1A_5^5=3\ 720.$$

方法二：间接法. 从所有的排列数 A_7^7 中，减去甲在排头的排列数 A_6^6，再减去乙在排尾的排列数 A_6^6，这时甲在排头且乙在排尾的排列数 A_5^5 被减掉了两次，而实际这种情况只需减去一次.

$$A_7^7-2A_6^6+A_5^5=3\ 720.$$

5. $A_9^1A_9^1=81$.

6. 用 1～5 这 5 个数字组成没有重复数字的四位数，基本事件总数$=A_5^4$，且这些结果出现的可能性都相等，记"用 1～5 这 5 个数字组成没有重复数字的四位偶数"为事件 A，则事件 A 包含的基本事件总数$=2A_4^3$，所以

$$P(A)=\frac{2A_4^3}{A_5^4}=\frac{2}{5}.$$

练习 21-2

1. ab，ac，ad，bc，bd，cd.

2. (1) 161 700；(2) 0；(3) 1 820；(4) 63.

3. $C_5^2+C_4^2=16$.

4. $C_5^1C_6^1=30$.

5. (1) $C_7^3=35$；(2) $C_7^4=35$.

6. $\frac{4}{11}$.

7. (1) $C_{100}^2=4\ 950$； (2) $C_{95}^2=4\ 465$； (3) $C_{100}^2-C_{95}^2=485$；

(4) $C_{95}^{2}+C_{95}^{1}C_{5}^{1}=4\ 940$；　(5) $\frac{893}{990}$.

练习 21-3

1. $(p+q)^6=p^6+6p^5q+15p^4q^2+20p^3q^3+15p^2q^4+6pq^5+q^6$；

2. $T_4=C_7^3\ (3a)^4b^3=2\ 835a^4b^3$；

3. 展开式第二项和第三项系数分别为 10，40；

4. $T_5=C_6^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{6-2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=15x^{-\frac{7}{3}}$.

练习 21-4

1. $T_5=2\ 016x^5y^4$，$T_6=4\ 032x^4y^6$.

2. $T_7=109\ 375a$.

3. $-(C_{13}^{1}+C_{13}^{3}+C_{13}^{5}+\cdots+C_{13}^{13})=-2^{13-1}=-4\ 096$.

4. 因为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^m+\cdots+C_n^n=2^n,$$
$$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots,$$

所以

$$C_n^0+C_n^2+\cdots=\frac{1}{2}\cdot 2^n=2^{n-1}.$$

5. 1 024.

练习 21-5

1. 是随机变量的分布列.

2. 不是，理由是有一个 $p<0$.

3. 这一批产品中共有 4 件次品，设：任取 10 件，抽得的次品数为 ξ，则 ξ 所可能取的值是 0，1，2，3，4，分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	0.651 63	0.299 60	0.045 96	0.002 76	0.000 05

4. (1) $P(\xi=3)=0.23$；

(2) $P(\xi>3)=0.16+0.13+0.10=0.39$；

(3) $P(\xi\geqslant 4)=0.39$；

(4) $P(2.5\leqslant\xi\leqslant 5)=0.52$；

(5) $P(1<\xi<2)=0$；

(6) $P(\xi\leqslant 6)=1$.

5. 假设这 30 件中只有 3 件不合格，那么设从 30 件中任取 3 件所含的不合格件数为 X，则 X 可能取的值为 0，1，2，3. 则

$$P(X=0)=0.720\ 44,$$
$$P(X=1)=0.259\ 36,$$
$$P(X=2)=0.019\ 95,$$
$$P(X=3)=0.000\ 25.$$

于是有次品数为 3 时，$P(X\geqslant 2)=0.020\ 20<0.05$，即从中发现 2 件次品是小概率事件. 若次品数小于 3，则 $P(X\geqslant 2)$ 会更小，但是一次抽查便发生了事件"$X\geqslant 2$"，根据小概率原理，不能认为该批产品合格.

6. (1)

ξ	0	1	2	3	4
P	0.811 88	0.176 49	0.011 39	0.002 024	0.000 00

(2) 由分布列得 $P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)<0.05$，所以

$$k=1.$$

练习 21-6

1.

ξ	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.411	0.343

2.

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

3.

X	0	1	2	3	4
P	0.922 370	0.075 295	0.002 304	0.000 031	0.000 000

4. 假设次品率 $p=0.05$，$n=5$，则有

X	0	1	2	3	4	5
P	0.733 78	0.203 63				

不能否定这批产品符合规定.

练习 21-7

1. (1) 约为 683；(2) 约为 954.

2. (131.774，154.436)；(126.096，160.104).

习题二十一

1. (1) 210；(2) 348；(3) 15 504；(4) $\dfrac{n^3-n}{2}$.

2. $C_{10}^1 \cdot C_{10}^1=100$.

3. $C_5^2=10$，$A_5^2=20$.

4. $A_8^5=6\ 720$.

5. $C_5^3 \cdot C_4^2 \cdot A_5^5=7\ 200$.

6. $C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$.

7. $2+20a+10a^2$.

8. $T_3=6\ 048x^2$；$T_6=-20\ 412x^5$.

9. -252.

10. $T_6=191\ 362\ 500x^5y^5$.

11. 假设此批有 3 件次品，X 表示取出的 5 件中所含次品数. 由次品数的分布列可知 $P(X)=0.138\ 06>0.05$，所以不能认为该批产品不合格，即认为合格.

若 5 件中发现 2 件次品，因为 $P(X\geqslant 2)=0.006<0.05$，小概率事件居然在一次试验中发生了，所以可认为该批产品不合格.

12. (1) 9 540；(2) 9 970.