山东省职业教育教材
审定委员会审定

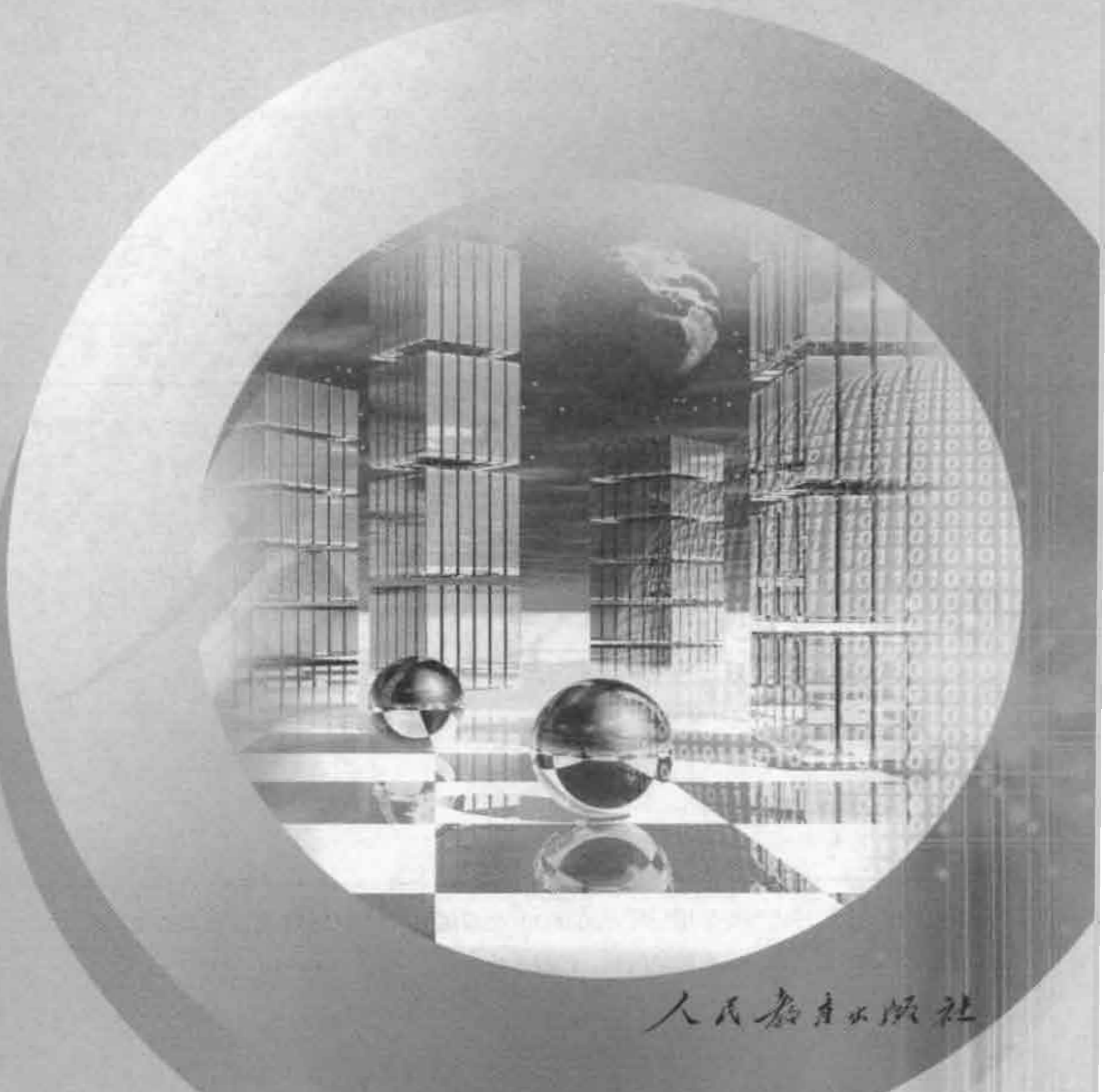
中等职业教育规划教材

数学

第三册

SHUXUE

山东省职业教育教材编写组 编著



人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学. 第3册/山东省职业教育教材编写组编著. —3版. —北京: 人民教育出版社, 2012 (2019.12 重印)

中等职业教育规划教材

ISBN 978-7-107-20402-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①山… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教材 Ⅳ. ① G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 036365 号

中等职业教育规划教材　数学　第三册

出版发行　人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

网　址　http://www.pep.com.cn

经　销　全国新华书店

印　刷　山东汇文印务有限公司

版　次　2010 年 6 月第 3 版

印　次　2019 年 12 月第 23 次印刷

开　本　787 毫米 ×1 092 毫米　1/16

印　张　19.5

字　数　405 千字

定　价　24.30 元

如发现内容质量问题，印装质量问题，请与本社联系。电话：400-810-5788

主　　编　高存明

副 主 编　孙明红　李励信　陆泽贵

编写人员　王智海　付桂森　刘明远　刘学卫

刘爱武　闫桂明　祁志卫　杜红梅

李长林　李增华　杨　杰　杨泽忠

徐　刚　栾　允　鹿继梅　彭晋顺

责任编辑　龙正武

出版说明

FOREWORD

为了贯彻全国、全省职业教育工作会议精神，落实《面向21世纪教育振兴行动计划》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划，按照《中共山东省委山东省人民政府关于大力发展职业教育的决定》要求，山东省教育厅组织力量对中等职业教育文化基础课程、专业课程教材进行了规划和编写，以适应职业教育改革与发展的需要．本套教材经山东省职业教育教材审定委员会审定通过，从2006年秋季开学起，陆续提供给全省职业院校使用．

本套教材贯彻“以服务为宗旨、以就业为导向”的教学指导思想，以经济和社会发展对高素质劳动者和各种专门人才的需要为出发点，并充分考虑到中等职业学校学生的实际水平，注重对学生职业素质、创新精神和实践能力的培养，体现了“以人为本、以能力为本”的教育教学理念，在教材体系、知识结构和内容阐述方面均作了一些新的尝试，努力满足不同类别、不同学制、不同专业和不同办学条件的学校教学需要，供中等职业学校和其他类型的职业学校、各种职业培训机构选用．

希望各地、各有关职业院校在使用山东省职业教育规划教材过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高．

山东省职业教育教材编写领导小组

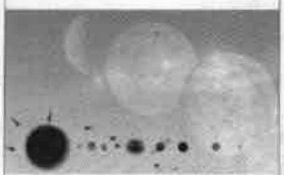
二〇〇六年五月

目 录

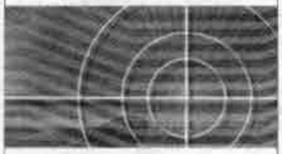
CONTENTS

12 第十二章 三角计算及其应用

13 第十三章 圆锥曲线与方程



14
第十四章 坐标变换与参数方程



15
第十五章 逻辑代数基础

16

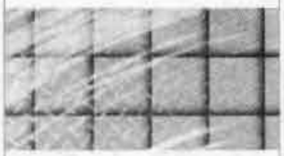
第十六章 算法与程序框图

17

第十七章 数据表格信息处理

18

第十八章 编制计划的原理与方法



19

第十九章 线性规划初步

20

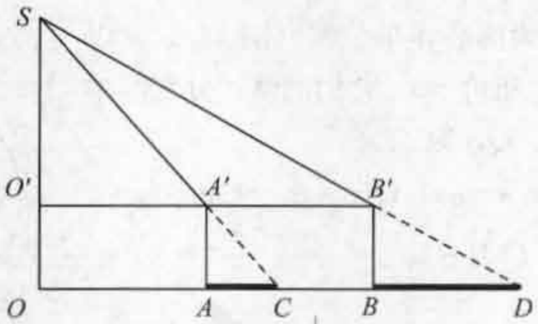
第二十章
复数

21

第二十一章
概率分布初步

第十二章　三角计算及其应用

没有先进的工具，却能测地量天，古代科学之花启迪我们浮想联翩……地球赤道长度的第一次推出、地球与月亮距离的第一次测算，无不显示了三角计算的威力。



宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁等各个方面，无处不有数学的重要贡献.

——华罗庚

早晨醒来，想的第一件事就是数学，我的生活就是数学，终生不倦的追求就是数学，数十年如一日，从没有懈怠过，现在依然如此.

——陈省身

前面我们学习了任意角三角函数的定义、三角函数的图象与性质等. 本章我们将进一步研究在三角恒等变换中经常用到的和角公式以及解三角形等数学知识，通过本章的学习，使同学们对三角学有一个比较完整的认识，为进一步学习其他数学知识和专业课打下良好的基础.

12.1 和角公式

问题　如果知道了 α，β 的三角函数值，如何计算 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha-\beta$ 的三角函数值？

12.1.1　两角和与差的余弦

判断 $\cos(60^\circ+30^\circ)$ 与 $\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$ 是否相等.

通过计算可知，$\cos(60^\circ+30^\circ)\neq\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$，并且一般情况下，$\cos(\alpha+\beta)$ 与 $\cos\alpha+\cos\beta$ 是不相等的.

那么，$\cos(\alpha+\beta)$ 与 α 和 β 的三角函数值之间有怎样的关系呢？

以坐标原点为圆心作单位圆（图 12-1），以 Ox 为始边作角 α 和角 $-\beta$，它们的终边分别与单位圆相交于点 P，Q，则

$$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ Q(\cos\beta,\ -\sin\beta),$$
$$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=1.$$

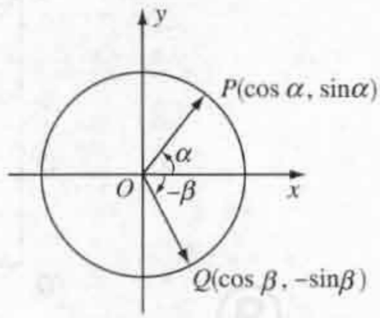


图 12-1

且

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\alpha-(-\beta)\\&=\pm\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

则有

$$\cos\langle\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ}\rangle=\cos(\alpha+\beta).$$

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}&=(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\ -\sin\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

而且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\cos\langle\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ}\rangle=\cos(\alpha+\beta)$，所以

> $\cos(60^\circ+30^\circ)$ 与 $\cos 60^\circ\cos 30^\circ-\sin 60^\circ\sin 30^\circ$ 是否相等？
>
> 试一试

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

因为

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos[\alpha+(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

所以我们得到两角和与差的余弦公式如下.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,	$C_{\alpha+\beta}$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.	$C_{\alpha-\beta}$

这组公式的主要作用有：

(1) 已知α，β的正弦值和余弦值，可以直接求出$\alpha+\beta$和$\alpha-\beta$的余弦值；

(2) 化简某些三角函数式；

(3) 证明某些三角恒等式.

例1　求下列各式的精确值：

(1) $\cos 150^\circ$；　　　　(2) $\cos 15^\circ$.

解　(1) $$\begin{aligned}\cos 150^\circ&=\cos(90^\circ+60^\circ)\\&=\cos 90^\circ\cos 60^\circ-\sin 90^\circ\sin 60^\circ\\&=0\times\frac{1}{2}-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2};\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\cos 15^\circ&=\cos(45^\circ-30^\circ)\\&=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

例2　已知$\cos\alpha=-\frac{4}{5}\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$，求$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

解　因为$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

于是

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$$

$$=\frac{3-4\sqrt{3}}{10};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$$

$$=-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

例 3 利用公式 $C_{\alpha+\beta}$证明：

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha.$$

证明 因为

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha$$

$$=0\times\cos\alpha-1\times\sin\alpha$$

$$=-\sin\alpha,$$

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$.

练习12-1

1. 求下列各式的精确值：

(1) $\cos 120^\circ$； (2) $\cos 135^\circ$；

(3) $\cos 75^\circ$； (4) $\cos(-15^\circ)$；

(5) $\cos 80^\circ\cos 20^\circ+\sin 80^\circ\sin 20^\circ$；

(6) $\cos 20^\circ\cos 25^\circ-\sin 20^\circ\sin 25^\circ$；

(7) $\cos 22.5^\circ\cos 22.5^\circ-\sin 22.5^\circ\sin 22.5^\circ$；

(8) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$.

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

3. 已知 $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，$\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，求 $\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

4. 利用公式 $C_{\alpha+\beta}$ 证明：

(1) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$；

(2) $\cos[\alpha+(2k+1)\pi]=-\cos\alpha\ (k\in\mathbf{Z})$.

12.1.2　两角和与差的正弦

求证

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, & S_{\alpha+\beta}\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. & S_{\alpha-\beta}\end{array}}$$

证明　$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=-\cos\left[(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\right]\\&=-\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\beta\right]\\&=-\left[\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta\right]\\&=-(-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

在上式中，以 $-\beta$ 代替 β，得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin[\alpha+(-\beta)]\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

如果知道 α，β 的正弦值和余弦值，利用这组公式就可直接求出 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha-\beta$ 的正弦值. 另外利用这组公式还可以化简某些三角函数式，也可以证明某些三角恒等式.

例 4　求下列各式的精确值：

(1) $\sin 135^\circ$；　　　　(2) $\sin 15^\circ$.

解 （1）$\sin 135^\circ=\sin(90^\circ+45^\circ)$

$$=\sin 90^\circ\cos 45^\circ+\cos 90^\circ\sin 45^\circ$$

$$=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+0\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

（2）$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

> 将 $\sin 135^\circ$ 变形为 $\sin(180^\circ-45^\circ)$ 后进行计算，结果与（1）是否相同？
>
> 做一做

例 5 利用 $S_{\alpha-\beta}$ 和 $C_{\alpha-\beta}$ 证明：

（1）$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$；　　　　（2）$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

证明 （1）因为

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha$$
$$=0\times\cos\alpha-(-1)\times\sin\alpha$$
$$=\sin\alpha,$$

所以 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$；

（2）因为

$$\cos(\pi-\alpha)=\cos\pi\cos\alpha+\sin\pi\sin\alpha$$
$$=(-1)\times\cos\alpha+0\times\sin\alpha$$
$$=-\cos\alpha,$$

所以 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

例 6 如图 12-2，已知点 P 的坐标是(3，4)，将有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 绕原点 O 旋转 45° 到 $\overrightarrow{OP'}$ 的位置．求点 P' 的坐标（x'，y'）.

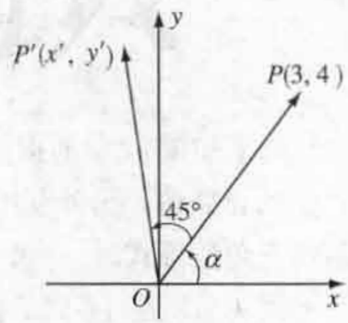


图 12-2

解 设 $\angle xOP=\alpha$，则 $\angle xOP'=\alpha+45^\circ$．因为

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}.$$

因为

$$|\overrightarrow{OP'}|=|\overrightarrow{OP}|=5,$$

所以

$$\cos(\alpha+45^\circ)=\frac{x'}{5},\ \sin(\alpha+45^\circ)=\frac{y'}{5}.$$

于是

$$\begin{aligned}x'&=5\cos(\alpha+45^\circ)\\&=5(\cos\alpha\cos 45^\circ-\sin\alpha\sin 45^\circ)\\&=5\left(\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\y'&=5\sin(\alpha+45^\circ)\\&=5(\sin\alpha\cos 45^\circ+\cos\alpha\sin 45^\circ)\\&=5\left(\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=\frac{7\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

所以 $P'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 7　求函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值、最小值和周期，其中 a，b 是不全为零的实数.

解　如图 12-3，考察以 $(a,\ b)$ 为坐标的点 $P(a,\ b)$，则

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

设以 OP 为终边的一个角为 θ，由三角函数的定义可知

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

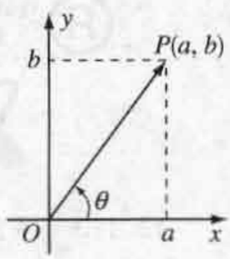


图 12-3

于是

$$\begin{aligned}y&=a\sin x+b\cos x\\&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)\end{aligned}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta).$$

所以函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值是$\sqrt{a^2+b^2}$，最小值是$-\sqrt{a^2+b^2}$，周期是 2π.

练习12-2

1. 求下列各式的精确值：

(1) $\sin 120°$；　　(2) $\sin 150°$；

(3) $\sin 105°$；　　(4) $\sin 165°$；

(5) $\sin 13°\cos 17°+\cos 13°\sin 17°$；

(6) $\sin 70°\cos 25°-\cos 70°\sin 25°$.

2. 化简：

(1) $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$；

(2) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$.

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{4}$，且 α，β 都是第二象限角，求 $\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ 的值.

5. 已知点 P 的坐标是 (4，3)，将有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 绕原点分别旋转 $120°$，$-60°$到 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ 的位置，求点 P_1，P_2 的坐标.

6. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

(1) $y=3\sin x+4\cos x$；

(2) $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$.

12.1.3 两角和与差的正切

我们知道

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta},$$

把后一个分式的分子、分母分别除以 $\cos\alpha\cos\beta$ ($\cos\alpha\cos\beta\neq0$)，得

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}. \qquad \mathrm{T}_{\alpha+\beta}}$$

把公式中的 β 换成 $-\beta$，得

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}. \qquad \mathrm{T}_{\alpha-\beta}}$$

以上就是两角和与差的正切公式，但其中 α，β 的取值应使分母不为零.

如果已知 α，β 的正切值，应用上面两个公式就可直接求出 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha-\beta$ 的正切值. 另外，应用上面两个公式还可化简某些三角函数式和证明某些三角恒等式.

例 8　求下列各式的精确值：

(1) $\tan 75^\circ$；　　(2) $\dfrac{\tan 17^\circ+\tan 43^\circ}{1-\tan 17^\circ\tan 43^\circ}$.

解　(1) $$\begin{aligned}\tan 75^\circ&=\tan(45^\circ+30^\circ)\\&=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}\\&=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}\\&=2+\sqrt{3};\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\frac{\tan 17^\circ+\tan 43^\circ}{1-\tan 17^\circ\tan 43^\circ}&=\tan(17^\circ+43^\circ)\\&=\tan 60^\circ\\&=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

练习12-3

1. 求下列各式的精确值：

(1) $\tan 135^\circ$；　　(2) $\tan 150^\circ$；

(3) $\tan 15^\circ$；　　(4) $\tan 105^\circ$；

(5) $\dfrac{\tan 12^\circ+\tan 33^\circ}{1-\tan 12^\circ\tan 33^\circ}$；　　(6) $\dfrac{\tan\frac{5\pi}{12}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{\pi}{6}}$.

2. 已知 $\tan\alpha=\frac{2}{5}$，$\tan\beta=\frac{3}{7}$，求 $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$.

3. 求下列各式的精确值：

(1) $\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}$； (2) $\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}$.

4. 求证：

(1) $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$； (2) $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$.

12.2 倍角公式

在公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$中，令 $\beta=\alpha$，即可得到二倍角的正弦、余弦和正切公式

$$\boxed{\begin{aligned}\sin 2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha,\\ \cos 2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &=2\cos^2\alpha-1\\ &=1-2\sin^2\alpha,\\ \tan 2\alpha&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.\end{aligned}}$$

二倍角公式给出了 2α 的三角函数值与 α 的三角函数值之间的关系，我们可以应用这组公式进行求值、化简与证明.

例 1 已知 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

解 因为 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，且 $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13},$$

因此

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\frac{5}{13}\right)\times\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{120}{169},$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{12}{13}\right)^2-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{119}{169},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{120}{169}\div\frac{119}{169}=\frac{120}{119}.$$

例 2　求证恒等式

$$\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{2\cos 2\theta+2\sin^2\theta+\cos\theta}=\tan\theta.$$

证明　左边$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2\sin^2\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}$

$=\tan\theta=$右边.

练习12-4

1. 求下列各式的精确值：

(1) $2\sin 67°30'\cos 67°30'$；　(2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$；

(3) $2\cos^2\dfrac{\pi}{12}-1$；　(4) $1-2\sin^2 75°$；

(5) $\dfrac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$；　(6) $\sin 15°\cos 15°$.

2. 化简：

(1) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$；　(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$；

(3) $\cos^4\varphi-\sin^4\varphi$；　(4) $\dfrac{1}{1-\tan\theta}-\dfrac{1}{1+\tan\theta}$.

3. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$，且 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$.

4. 已知 $\sin\alpha=0.8$，且 $\alpha\in(0,\pi)$，求 $\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$.

5. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，求 $\tan 2\alpha$.

6. 求证：$\dfrac{\sin 2\theta-\sin\theta}{1+\cos 2\theta-\cos\theta}=\tan\theta$.

12.3 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质

在物理和工程等学科的研究中，经常会遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（其

中 A，ω，φ 都是常数）的函数，这种函数通常叫做**正弦型函数**. 从解析式来看，当 $A=1$，$\omega=1$，$\varphi=0$ 时，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 就是 $y=\sin x$. 因此，下面我们根据正弦函数的图象与性质来研究这类函数的作图方法和有关性质.

因为正弦函数 $y=\sin x$ 的最大值是 1，最小值是 -1，所以函数 $y=3\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的最大值是 3，最小值是 -3，值域是 $[-3, 3]$.

一般地，函数 $y=A\sin x(A>0)$ 的最大值是 A，最小值是 $-A$，值域是 $[-A, A]$.

例 在同一坐标系中作出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

(1) $y=\sin 2x$； (2) $y=3\sin 2x$； (3) $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

分析 我们知道函数 $y=\sin x$ 的周期是 2π. 在函数 $y=\sin 2x$ 当中，令 $2x=0$，得 $x=0$；令 $2x=2\pi$，得 $x=\pi$. 因此，当 x 由 0 变到 π 时，$2x$ 由 0 变到 2π，函数 $y=\sin 2x$ 取到一个周期内的所有值. 由此可见，函数 $y=\sin 2x$ 的周期是 π.

同理可知，函数 $y=3\sin 2x$ 和函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期也是 π.

解 (1) 为了作出函数 $y=\sin 2x$，$x\in[0, \pi]$ 的简图，先列表如下.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0

描点作图，得到函数 $y=\sin 2x$，$x\in[0, \pi]$ 的简图（图 12-4）.

(2) 为了作出函数 $y=3\sin 2x$，$x\in[0, \pi]$ 的简图，先列表如下.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\sin 2x$	0	3	0	-3	0

描点作图，得到函数 $y=3\sin 2x$，$x\in[0,\ \pi]$ 的简图（图 12-4）.

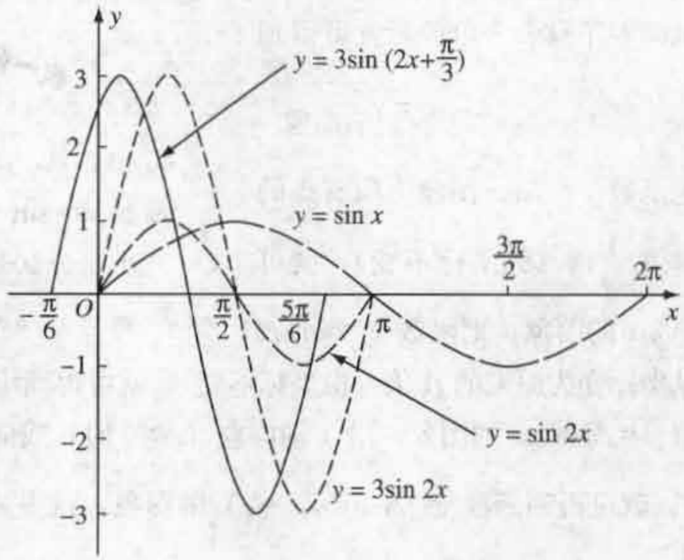


图 12-4

(3) 令 $2x+\frac{\pi}{3}=0$，得 $x=-\frac{\pi}{6}$；$2x+\frac{\pi}{3}=2\pi$，得 $x=\frac{5\pi}{6}$. 为了作出函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$的简图，先列表如下.

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	-3	0

描点作图，得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$的简图（图 12-4）.

因为以上三个函数的周期都是 π，所以利用函数的周期性，把以上每个函数在一个周期上的简图，沿 x 轴分别向左、向右平移 π，2π，…，就可得出这些函数在定义域 **R** 上的简图.

观察图 12-4，可以看到这些函数图象之间有如下关系.

把函数 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），就可得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象；把函数 $y=\sin 2x$ 图象上各点的纵坐标变为

原来的 3 倍（横坐标不变），就可得到函数 $y=3\sin 2x$ 图象；把函数 $y=3\sin 2x$ 的图象，沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，就可得到函数 $y=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

一般地，把函数 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），就可得到函数 $y=\sin \omega x$ 的图象；把函数 $y=\sin \omega x$ 图象上各点的纵坐标变为原来的 A 倍（横坐标不变），就可得到函数 $y=A\sin \omega x$ 的图象；把函数 $y=A\sin \omega x$ 的图象，沿 x 轴向左（$\varphi>0$ 时）或向右（$\varphi<0$ 时）平移 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位，就可得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，这里 $A>0$，$\omega>0$.

议一议 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中，A，ω，φ 分别对函数 $y=\sin x$ 的图象产生了什么影响？

由此，我们可以得到正弦型函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)\ (A>0,\ \omega>0)$$

的一些主要性质.

定义域：实数集 **R**.

值域：$[-A,\ A]$，最大值 A，最小值 $-A$.

周期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$.

正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0)$ 的图象，可用“五点法”作出，也可由函数 $y=\sin x$ 的图象经过变换（沿 x 轴或 y 轴进行压缩或伸长，以及沿 x 轴平移）而得到.

练习12-5

1. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

(1) $y=\frac{3}{4}\sin x$；　　(2) $y=8\sin 2x$；

(3) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$；　　(4) $y=8\sin\left(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{5}\right)$.

2. 作下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

(1) $y=2\sin\frac{1}{2}x$；　　(2) $y=4\sin 2x$；

(3) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$； (4) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 函数 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

4. 函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 与 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

12.4 解三角形

在生产实践和科学实验中，经常会遇到由三角形已知的边和角求未知的边和角的问题. 余弦定理和正弦定理揭示了任意三角形中边和角之间的关系.

12.4.1 余弦定理

在△ABC 中，我们用 a，b，c 分别表示∠A，∠B，∠C 的对边及其长度（图 12-5）. 三角形的三条边和三个内角都叫做**三角形的元素**.

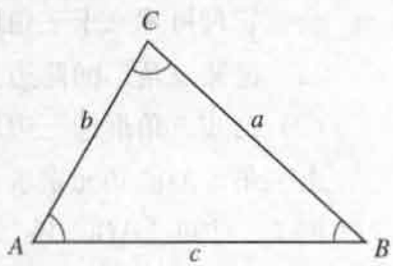


图 12-5

余弦定理　三角形任何一边长的平方等于其他两边长的平方和减去这两边的长与它们的夹角的余弦乘积的 2 倍. 即

$$\boxed{\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A, &①\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B, &②\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C. &③\end{aligned}}$$

证明　如图 12-6，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},$$

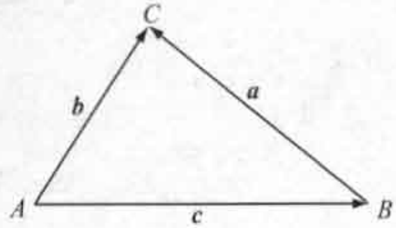


图 12-6

因此

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|^2&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\\ &=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

$$=|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\rangle+|\boldsymbol{c}|^2$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

用同样的方法证明其他两式.

试一试

余弦定理也可变形为

$$\boxed{\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\\ \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.\end{aligned}}$$

在余弦定理的公式③中，如果$\angle C=90^\circ$，则$c^2=a^2+b^2$，这就是勾股定理. 由此可见余弦定理是勾股定理的推广，而勾股定理是余弦定理的特例.

余弦定理可用来求三角形的未知元素. 主要有以下两种情形：

(1) 已知三角形的两边及其夹角，求其他元素；

(2) 已知三角形的三边求其他元素.

由三角形的已知元素求未知元素的过程叫做**解三角形**.

例 1 已知$\triangle ABC$中，$a=6$，$b=3$，$\angle C=120^\circ$，求三角形的其他元素.

分析 先找出三角形的未知元素c，$\angle A$和$\angle B$. 已知两边a，b及它们的夹角C，由余弦定理的公式③可求出c，然后可求出$\angle A$和$\angle B$.

解 因为

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\ &=6^2+3^2-2\times6\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &=63,\end{aligned}$$

所以$c=3\sqrt{7}$.

由

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9+63-36}{2\times3\times\sqrt{63}}$$
$$=\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

利用计算器计算，可得$\angle A\approx 40°54'$.

由

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{63+36-9}{2\times 6\times\sqrt{63}}$$

$$=\frac{5\sqrt{7}}{14},$$

利用计算器计算，可得$\angle B\approx 19°6'$.

根据以上数据，可知该三角形的三个内角和为

$$\angle A+\angle B+\angle C=120°+19°6'+40°54'$$
$$=180°.$$

例 2　已知$\triangle ABC$的三边$a=5$，$b=7$，$c=4$，求$\triangle ABC$的三个内角.

解　由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{49+16-25}{2\times 7\times 4}=\frac{5}{7},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{16+25-49}{2\times 4\times 5}=-0.2,$$

利用计算器计算，可得

$$\angle A\approx 44°25',\ \angle B\approx 101°32',$$

所以

$$\angle C=180°-\angle A-\angle B\approx 34°3'.$$

例 3　已知在$\triangle ABC$中，$\angle B=60°$，求证：

$$b^2-c^2=a(a-c).$$

议一议　在$\triangle ABC$中，如果$b^2-c^2=a(a-c)$，能否求出$\angle B$?

分析　要证明$b^2-c^2=a(a-c)$，只需证明$b^2=a^2+c^2-ac$.

证明　由余弦定理，得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$=a^2+c^2-2ac\cos 60°$$
$$=a^2+c^2-ac,$$

所以

$$b^2-c^2=a(a-c).$$

练习12-6

1. 求下列三角形中未知的一边：

(1) $a=35$，$b=24$，$\angle C=60°$；

(2) $a=3\sqrt{3}$，$c=2$，$\angle B=150°$.

2. 在$\triangle ABC$中，已知三边，求三个内角：

(1) $a=\sqrt{3}$，$b=3$，$c=2\sqrt{3}$；

(2) $a=1$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$；

(3) $a=8$，$b=5$，$c=12$.

3. 判断$\triangle ABC$是锐角三角形、直角三角形还是钝角三角形：

(1) $a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$；

(2) $a=13$，$b=12$，$c=5$；

(3) $a=2$，$b=\sqrt{3}+1$，$c=\sqrt{2}$.

（提示：根据$\triangle ABC$中最大边所对角的余弦值大于、等于或小于零，来判定该角为锐角、直角或钝角.）

4. 已知平行四边形$ABCD$的对角线$AC=16$，$BD=20$，且它们所夹的锐角为$60°$，求这个四边形各边的长.

5. 已知在$\triangle ABC$中，$\angle A=120°$，求证：

$$a^2-b^2=c(b+c).$$

12.4.2 三角形的面积

如图12-7（1），以$\triangle ABC$的顶点A为坐标原点，射线AB的方向为x轴的正方向建立平面直角坐标系xOy，则点B的坐标是$(c，0)$，点C的坐标是$(b\cos A，b\sin A)$. 此时$\triangle ABC$的AB边上的高就是点C的纵坐标$b\sin A$. 设S表示$\triangle ABC$的面积，于是

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

如果分别建立如图12-7（2）（3）所示的平面直角坐标系，同理可证

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

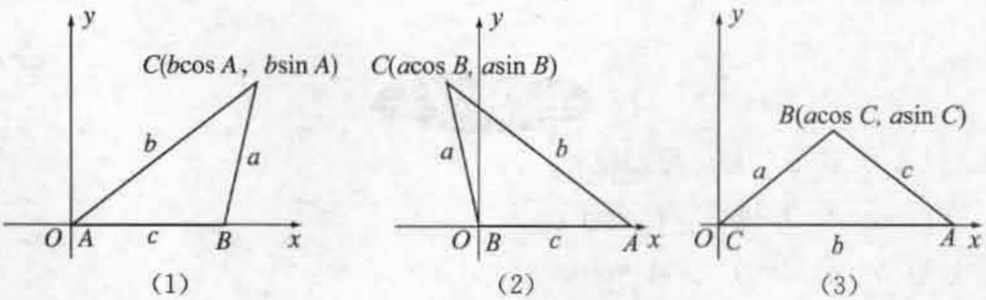


图 12-7

因此，$\triangle ABC$ 的面积

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B.}$$

这就是说，三角形的面积，等于它的任意两边及其夹角的正弦乘积的一半.

例 4　在$\triangle ABC$中，已知 $a=6$，$b=3\sqrt{2}$，$\angle C=45°$，求$\triangle ABC$的面积 S.

解　由三角形的面积公式可知

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=9.$$

例 5　在$\triangle ABC$中，已知 $a=20$，$b=15$，$c=10$．求 $S_{\triangle ABC}$.

分析　如果用公式 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ 求面积，则需求 $\sin A$．由余弦定理可先求出 $\cos A$，从而可求出 $\sin A$.

解　由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{15^2+10^2-20^2}{2\times 15\times 10}=-\frac{1}{4}.$$

因为 $0°<\angle A<180°$，所以

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4},$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\times 15\times 10\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

> 你能利用公式 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$ 或 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 解答此题吗？
>
> 试一试

$$=\frac{75\sqrt{15}}{4}.$$

练习12-7

1. 求下列各三角形的面积 S：

（1）$a=4$，$b=5$，$\angle C=30°$；

（2）$b=8$，$c=8$，$\angle A=60°$.

2. 求下列各三角形的面积 S：

（1）$a=15$，$b=20$，$c=25$；

（2）$a=8$，$b=5$，$c=9$.

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=30$，$AD=12$，$\angle A=60°$，求这个平行四边形的面积.

12.4.3 正弦定理

由三角形的面积公式

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

可以得到

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

即

$$b\sin A=a\sin B,$$

这就得到

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

同理可证

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

正弦定理　在一个三角形中，各边和它所对的角的正弦的比值相等．即

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.}$$

如果$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle C=90^\circ$，这时$\sin C=1$．于是正弦定理化为

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=c.$$

即

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c}.$$

这就是直角三角形中的边角关系．

正弦定理可以用来求解三角形中的未知元素．主要有下面两种情形：

(1) 已知两角和一边，求其他元素；

(2) 已知两边和其中一边所对的角，求其他元素．

例 6　在$\triangle ABC$中，已知$a=5$，$\angle A=30^\circ$，$\angle C=65^\circ$，求b，c（精确到0.01）．

解　因为$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，所以

$$\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C=85^\circ.$$

由正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

得

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{5\sin 85^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 9.96.$$

同理，得

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{5\sin 65^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 9.06.$$

例 7　已知$\triangle ABC$中，$b=2\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{3}$，$\angle B=45^\circ$，求$\angle C$．

解　因为$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以

$$\begin{aligned}\sin C&=\frac{c\sin B}{b}\\&=\frac{2\sqrt{3}\sin 45^\circ}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

由单位圆中的正弦线可知，在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 范围内，正弦值等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$的角有两个，它们是 60° 和 120°，并且两者互为补角.

又因为 $0^\circ < \angle C < 180^\circ$，所以

$\angle C = 60^\circ$ 或 $\angle C = 120^\circ$（图 12-8）.

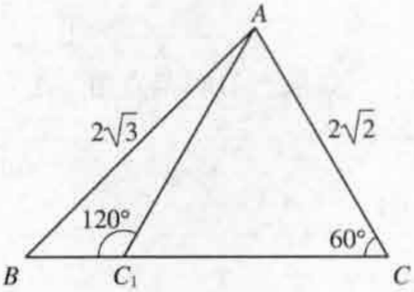


图 12-8

例 8 已知 $\triangle ABC$ 中，$b=10$，$c=6$，$\angle B=60^\circ$，求 $\angle C$.

解 因为$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}$$
$$=\frac{6\sin 60^\circ}{10}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{10}.$$

利用计算器可求得锐角 $\angle C \approx 31^\circ 18'$.

又因为

$$\sin(180^\circ - 31^\circ 18') = \sin 31^\circ 18',$$

所以还有可能 $\angle C = 180^\circ - 31^\circ 18' = 148^\circ 42'$.

但 $148^\circ 42' + 60^\circ > 180^\circ$，$\angle C = 148^\circ 42'$ 应舍去，所以

$\angle C = 31^\circ 18'$（图 12-9）.

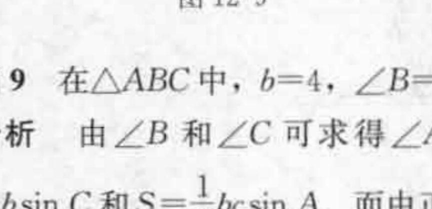


图 12-9

想一想 由例 7、例 8 可知，已知两边和其中一边所对的角解三角形时，有时有一解，有时有两解，试问在什么情况下只有一解，在什么情况下有两解？

例 9 在 $\triangle ABC$ 中，$b=4$，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=45^\circ$，求 $S_{\triangle ABC}$ 的精确值.

分析 由 $\angle B$ 和 $\angle C$ 可求得 $\angle A$. 因为与 b 有关的面积公式有两个：$S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 和 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$. 而由正弦定理可求出 a 和 c.

解　显然$\angle A=180°-\angle B-\angle C=105°$．所以

$$\begin{aligned}\sin A&=\sin 105°\\&=\sin(60°+45°)\\&=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得

$$\begin{aligned}a&=\frac{b\sin A}{\sin B}\\&=\frac{4}{\sin 30°}\sin 105°\\&=8\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\&=2(\sqrt{6}+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}ab\sin C\\&=\frac{1}{2}\times2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=4\sqrt{3}+4.\end{aligned}$$

你能用公式$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$求出$\triangle ABC$的面积吗？

试一试

练习12-8

1. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2$，$b=3$，$\angle B=75°$，求$\angle A$，$\angle C$.
2. 在$\triangle ABC$中，已知$b=12$，$\angle A=30°$，$\angle B=120°$，求a.
3. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$\angle A=45°$，求$\angle B$.
4. 在$\triangle ABC$中，求证$\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\dfrac{a+b}{c}$.（提示：在正弦定理中令比例系数等于$k$.）
5. 在$\triangle ABC$中，已知$\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$，求证$\triangle ABC$是直角三角形.
6. 在$\triangle ABC$中，$c=1+\sqrt{3}$，$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，求$S_{\triangle ABC}$的精确值.

12.5 三角计算及应用举例

三角计算广泛应用于电工学、力学、测量学和工程建筑学等许多学科．下面通过例题，了解它的具体应用．

例1 矩形 $ABCD$ 内接于半径为 R 的半圆（如图12-10），问矩形的长和宽各为多少时，矩形的面积最大？最大面积是多少？

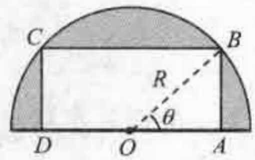


图 12-10

解 连接 OB，并设 $\angle AOB=\theta$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中，$AB=R\sin\theta$，$OA=R\cos\theta$，由此得到

$$AD=2OA=2R\cos\theta,$$

矩形 $ABCD$ 的面积

$$S=AB\cdot AD=R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta=R^2\sin 2\theta.$$

因为 $\sin 2\theta$（θ 为锐角）有最大值 1，所以面积 S 有最大值 R^2，此时 $2\theta=90°$，即 $\theta=45°$．而当 $\theta=45°$时，有

$$AB=R\sin 45°=\frac{\sqrt{2}R}{2},\ AD=2R\cos 45°=\sqrt{2}R.$$

因此，当矩形的长是 $\sqrt{2}R$，宽是 $\frac{\sqrt{2}R}{2}$时，矩形有最大面积，最大面积是 R^2.

例2 在纯电容电路中，瞬时功率 P（瓦）等于瞬时电压 U（伏特）与瞬时电流 I（安培）的乘积．已知电容器两端的瞬时电压为 $U=220\sqrt{2}\sin 100\pi t$，通过它的瞬时电流为 $I=0.04\sqrt{2}\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$．求：

(1) 瞬时功率 P；

(2) 瞬时功率 P 的最大值；

(3) 瞬时功率 P 的周期.

解 (1) 由已知得

$$\begin{aligned}P&=UI=220\sqrt{2}\sin 100\pi t\times 0.04\sqrt{2}\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\\&=17.6\sin 100\pi t\times\cos 100\pi t\end{aligned}$$

$=8.8\sin 200\pi t$；

(2) 由正弦型函数的性质可知，瞬时功率 P 的最大值为 8.8 瓦；

(3) 由正弦型函数的性质可知，瞬时功率 P 的周期为 $\frac{1}{100}$秒.

例 3　某城市欲利用城中的一块四边形空地进行草坪绿化（如图 12-11）．经测量，$AB=350$ m，$AD=240$ m，$\angle DAB=60°$，$\angle ABC=125°$，$\angle ADC=105°$，还已知草坪绿化每平方米需投入 6 元人民币：

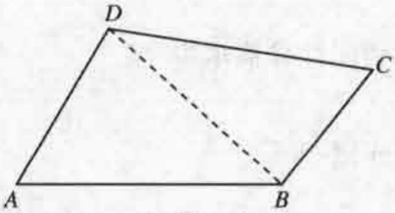


图 12-11

(1) 求四边形 $ABCD$ 的面积（精确到 1 m^2）；

(2) 全部绿化这块空地，共需投入多少元人民币？

分析　解题的关键是求出四边形的面积.

连接 BD，将求四边形的面积转化为求两个三角形的面积之和.

第一步：在$\triangle ABD$ 中，利用余弦定理求出 BD；

第二步：在$\triangle ABD$ 中，利用正弦定理（或余弦定理）求出$\angle ADB$（或$\angle ABD$）；

第三步：求出$\angle BDC$，$\angle C$ 和$\angle DBC$；

第四步：在$\triangle BCD$ 中，利用正弦定理求出 BC（或 DC）；

第五步：分别求出$\triangle ABD$ 和$\triangle BCD$ 的面积，从而求得四边形 $ABCD$ 的面积.

解　(1) 连接 BD.

因为

$$\begin{aligned}BD^2&=AB^2+AD^2-2AB\times AD\cos\angle DAB\\&=350^2+240^2-2\times350\times240\cos 60°\\&=96\,100,\end{aligned}$$

所以

$$BD=310(\text{m}).$$

又因为

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle DAB},$$

所以

$$\sin\angle ADB=\frac{AB\sin\angle DAB}{BD}$$

$$=\frac{350\sin 60^\circ}{310}$$

$$\approx 0.977\ 8,$$

利用计算器求得

$$\angle ADB\approx 77.90^\circ,$$

所以

$$\angle BDC=105^\circ-77.90^\circ=27.10^\circ.$$

由四边形内角和定理，得

$$\angle C=360^\circ-(60^\circ+125^\circ+105^\circ)=70^\circ.$$

由三角形内角和定理，得

$$\angle DBC=180^\circ-(70^\circ+27.10^\circ)=82.90^\circ.$$

由

$$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle C}$$

得

$$BC=\frac{BD\sin\angle BDC}{\sin\angle C}$$

$$=\frac{310\sin 27.10^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$\approx 150.3\ (\mathrm{m}).$$

因此

$$S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle DBC}$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin A+\frac{1}{2}BD\cdot BC\sin\angle DBC$$

$$=\frac{1}{2}\times 350\times 240\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 310\times 150.3\times\sin 82.90^\circ$$

$$\approx 59\ 491\ (\mathrm{m}^2).$$

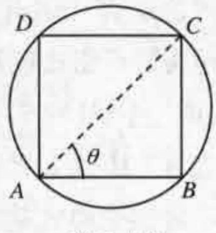
即四边形 $ABCD$ 的面积是 59 491 m^2.

(2) 59 491×6=356 946 (元).

即全部绿化这块空地，共需投入 356 946 元人民币.

练习12-9

1. 矩形 $ABCD$ 内接于半径为 R 的圆（如图所示），问矩形的长和宽各为多少时，矩形的面积最大？最大面积是多少？（提示：连接 AC，并设 $\angle CAB=\theta$.）



（第 1 题）

2. 在纯电容电路中，任一瞬间电容器的两端的电压 U（伏特）与通过其中的电流的瞬时值 I（安培）的关系式分别是 $U=5\sqrt{2}\sin 10\pi t$ 和 $I=10\sqrt{2}\sin\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$. 求：

(1) 瞬时功率 P；

(2) 瞬时功率 P 的最大值；

(3) 瞬时功率 P 的周期.

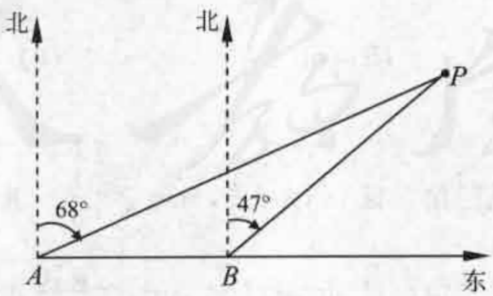
3. 已知某段电路的电流强度 I 随时间 t 变化的函数关系是 $I=A\sin \omega t$. 设 $A=5$ 安培，$\omega=100\pi$ 弧度/秒：

(1) 求电流强度 I 变化的周期；

(2) 求出电流强度 I 的最大值；

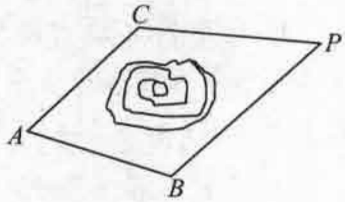
(3) 在长度为一个周期的闭区间上，作出 I 随时间 t 变化的简图.

4. 海中灯塔 P 的周围 25 海里内有暗礁. 某轮船在海中的 A 处测得灯塔 P 在北偏东 68°方向上，并且该轮船正以 18 海里/小时的速度匀速由西向东航行，两小时后，轮船航行到 B 处，此时测得灯塔 P 在北偏东 47°方向上. 如果继续航行，轮船是否有触礁的危险？



（第 4 题）

5. 某职业学校数学兴趣小组的同学欲测量被障碍物隔开的 A 和 P 两点之间的距离（如图），他们采用了下面的方法：在障碍物的两侧选取两点 B 和 C，并测得 $AB=AC=50$ m，$\angle BAC=60°$，$\angle ABP=120°$，$\angle ACP=135°$，这里 A，B，C，P 四点在同一平面内. 根据以上数据，请你帮助计算出 A 和 P 两点之间的距离（精确到 1 m）.（提示：连接 BC，AP.）



（第 5 题）

习题十二

1. 化简：

(1) $\sin(30°+\alpha)-\sin(30°-\alpha)$；

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$；

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$；

(4) $\cos(27°+\alpha)\cos(33°-\alpha)-\sin(27°+\alpha)\sin(33°-\alpha)$；

(5) $\sin(\alpha-15°)\cos(\alpha+15°)+\cos(\alpha-15°)\sin(\alpha+15°)$；

(6) $\dfrac{\tan(22°+\alpha)+\tan(23°-\alpha)}{1-\tan(22°+\alpha)\tan(23°-\alpha)}$.

2. 已知 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，且 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，求：

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$；　(2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$；　(3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$；

(4) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$；　(5) $\sin 2\alpha$；　(6) $\cos 2\alpha$；

(7) $\tan 2\alpha$.

3. 如果 α，β 都是锐角，且 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，求证 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

4. 如果 α，β 都是锐角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，求证 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{12}{13}$，求 $\cos C$.

6. 证明下列恒等式：

(1) $2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$;

(2) $\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}=\cos x$;

(3) $1+2\cos^2\theta-\cos 2\theta=2$;

(4) $\tan(45^\circ+\theta)=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$;

(5) $\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ=\sqrt{3}$.

7. 求下列函数的周期：

(1) $y=\sin 2x$;　　(2) $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

8. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1+\sin x}$;　　(2) $y=\sqrt{\sin x}$.

9. 试说明函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换可得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

10. 求下列函数的最大值、最小值，并求使函数取得这些值的 x 的集合：

(1) $y=4\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$;　　(2) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

11. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

(1) $y=1+\cos x-\sin x$;

(2) $y=(\sin x-\cos x)^2$;

(3) $y=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+12\cos(2x+\pi)$.

12. 根据下列条件求$\triangle ABC$ 的未知元素和 $S_{\triangle ABC}$.

(1) $a=4$，$b=8$，$\angle C=60^\circ$;

(2) $a=\sqrt{6}$，$b=2$，$\angle A=60^\circ$.

13. 已知 $a=\sqrt{3}$，$b=2$，$c=\sqrt{5}$，试判定$\triangle ABC$ 的形状.

14. 已知$\triangle ABC$ 的三边分别为 m，n，$\sqrt{m^2+mn+n^2}$，求$\triangle ABC$ 的最大角.

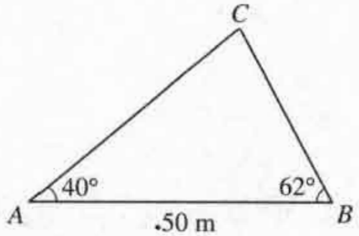
15. 已知$\triangle ABC$ 的三边满足条件$\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}=1$，求$\angle A$.

16. 已知$\triangle ABC$ 中，$a:b:c=3:4:5$，试判定$\triangle ABC$ 的形状.

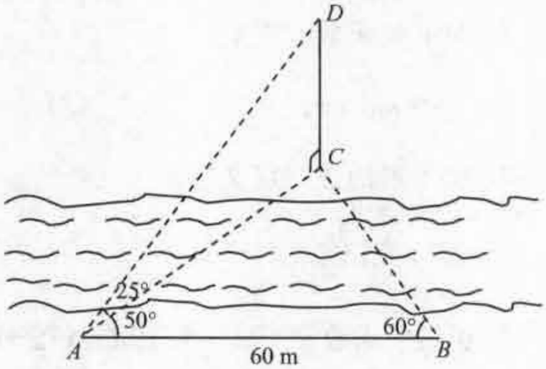
17. 求证在$\triangle ABC$中，$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ab\cos C+ca\cos B)$.

18. 已知$\triangle ABC$中，$\angle A:\angle B=1:2$，$a:b=1:\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的三个内角.

19. 为了测量目标C的位置，选择基线$AB=50$ m，在测量点A，B分别测得$\angle CAB=40°$，$\angle CBA=62°$，求测量点A，B分别到目标C的位置（结果保留一位小数）.



（第 19 题）



（第 20 题）

20. 某职业学校二年级的小明同学为测河对岸的通讯铁塔CD的高度，他在河的这岸选取两个观测点A和B（A，B，C三点同在地面上），并测得$AB=60$ m，$\angle CAB=50°$，$\angle ABC=60°$，仰角$\angle DAC=25°$，求通讯铁塔CD的高度是多少（精确到 1 m）？

阅读与实践

亚历山大时期的三角测量

公元前 332 年，亚历山大征服了埃及. 为了庆祝这个胜利，他在当时称为圣河的尼罗河入海处，建立一座以他的名字命名的城市——亚历山大城. 那时的亚历山大城是世界文化中心，有世界第一的图书馆、博物馆和大学，可惜这样伟大的图书馆最后毁于战火之中.

利用三角知识进行天文和地理测量的例子，在亚历山大时期不胜枚举. 我们在这里只介绍其中的两个例子.

当时在亚历山大任教的欧几里得已经完成了不朽的巨著《几何原本》，藏于亚历山大城的世界第一的大图书馆中. 图书馆管理员埃拉托色尼（Eratosthenes，约公元前 284—前 192）有机会接触到这些文化结晶，细心的埃拉托色尼发现，离亚历山大城约 800 公里的塞恩城（今埃及阿斯旺附近），夏日正午的阳光可以一直照到井底，因而这时候所有地面上的直立物都应该没有影子. 但是，亚历山大城地面上的直立物却有一段很短的影子. 他认为，直立物的影子是由亚历山大城的阳光与直立物形成的夹角所造成. 从地球是圆球和阳光直线传播这两个前提出发，从假想的地心向塞恩城和亚历山大城引两条直线，其中的夹角应等于亚历山大城的阳光与直立物形成的夹角，如图 1 所示. 按照相似三角形的比例关系，已知两地之间的距离，便能测出地球的赤道长. 埃拉托色尼测出夹角约为 7.5°，大约是地球赤道的圆周角（360°）的五十分之一，由此推算地球赤道的长大约为 4 万公里，这与实际地球赤道的长（40 076 公里）相差无几. 他还算出太阳与地球间距离为 1.47 亿公里，和实际距离 1.49 亿公里也惊人地相近. 这充分反映了埃拉托色尼的学识和智慧.

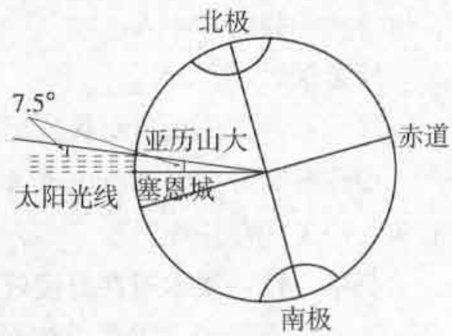


图 1

另外一个例子是古希腊的希帕科斯（Hipparchos，约公元前 190—前 120）对地球和月球间距离的测量. 那时没有先进的测量仪器，他假设一个人站在赤道 A 处看到月亮恰好在他头顶上方的 C 处（图 2），另一个人站在赤道 B 处，则看到月亮刚刚升起.

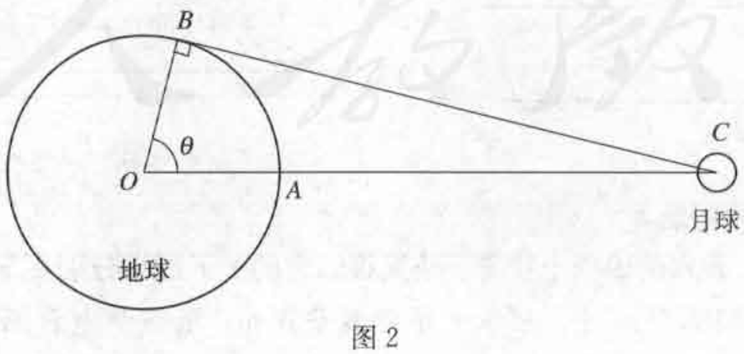


图 2

这时 BC 和圆 O 相切，构成了直角$\triangle OBC$，弧 AB 所对的圆心角 θ 恰为 A 与 B 两地的经度差. 希帕科斯测到 $\theta=\left(89\dfrac{1}{16}\right)^{\circ}$，他利用自己编制的世界第一张正弦函数值表计算，得

$$\sin(90^{\circ}-\theta)=\frac{OB}{OC},$$

$$OC=\frac{OB}{\cos\theta}=250\ 000\ (\text{海里}).$$

这个数据与实际值相差并不大.

古代科学之花无不启迪我们浮想联翩，而古希腊的精美绝伦的天文测量，又是那么淳朴无华. 这一切虽然已经逝去，但我们坚信，数学史上最壮观的日出将属于我们青年人.

问题探讨：

(1) 不等宽的板材对接成定角时的下料问题

现在有宽分别是 20 cm 和 40 cm 的两条木板，如图 3 所示. 要对接成 60° 的角，应怎样制作呢?

分析 设一块木板在对接处的角度是 α，则另一块木板在对接处的角度就是 $60^{\circ}-\alpha$. 有人说，需要用到两角和与差的正弦公式；也有人说，需要用到两角和与差的余弦公式. 你能解决这个问题吗? 你能给出更一般的计算公式吗?

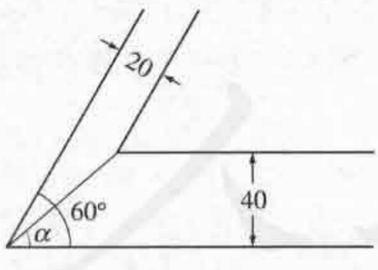


图 3

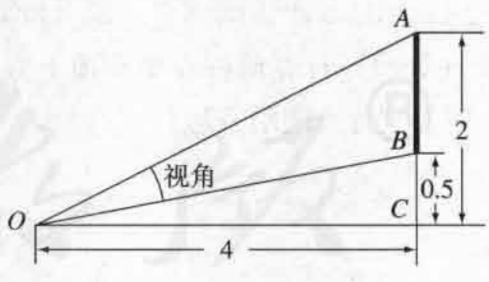


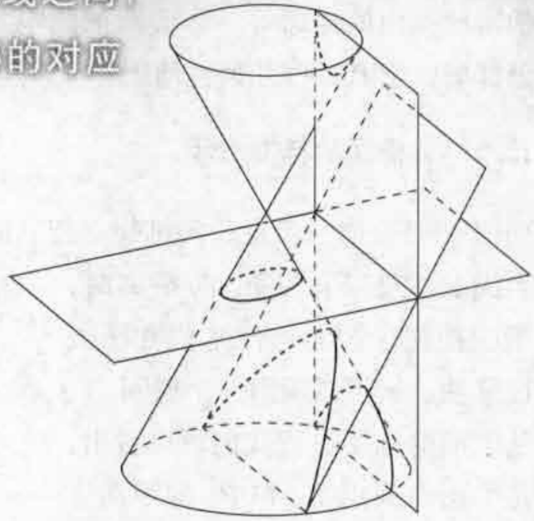
图 4

(2) 视角问题

如图 4，教室的墙壁上挂着一块黑板，它的上下边缘分别在学生的水平视线上方 2 m 和 0.5 m 处，某学生距离墙壁 4 m，求该学生看黑板的视角是多少?

第十三章　圆锥曲线与方程

我们生活的地球运行在环绕太阳的椭圆轨道上．天体运行的轨迹和圆锥曲线之间，究竟存在着怎样神秘的对应关系？



数学是打开科学大门的钥匙……轻视数学将造成对一切知识的危害．

——培　根

新的数学方法和概念，常常比解决数学问题本身更重要．

——华罗庚

我们知道，用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，截口曲线（截面与圆锥侧面的交线）是一个圆．当改变平面与圆锥底面的夹角时，会得到不同的截口曲线，它们分别是椭圆、抛物线和双曲线．我们通常把圆、椭圆、抛物线和双曲线统称为圆锥曲线．

本章我们继续采用第九章中研究直线与圆所用的坐标法，在定义了圆锥曲线的基础上，建立它们的方程，并根据它们的方程来研究圆锥曲线的性质．

13.1 椭圆

问题 宇宙中，许多星体的运行轨迹是椭圆，生活中也常见到椭圆，如汽车油罐横截面的轮廓等．你会画椭圆吗？在平面直角坐标系中，椭圆的方程是怎样的？它有哪些几何性质呢？

13.1.1 椭圆的标准方程

如图 13-1，取一条定长的细绳，把它的两端固定在画板上的 F_1 和 F_2 两点，当绳长大于 F_1 和 F_2 的距离时，用铅笔尖把绳子拉紧，使笔尖在图板上慢慢移动，就可以画出一个椭圆．

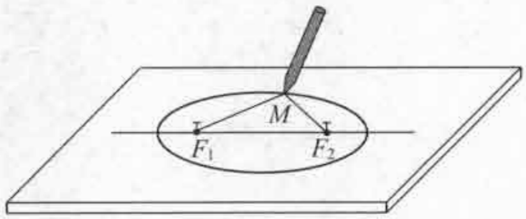


图 13-1

从上面的画图过程我们可以看出，椭圆是平面内到点 F_1 和 F_2 的距离之和等于定长（这条绳长）的点的集合组成的图形．

我们把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做**椭圆**．这两个定点叫做椭圆的**焦点**，两焦点间的距离叫做**焦距**．

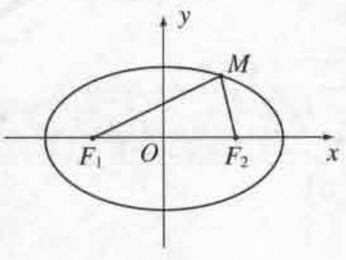


图 13-2

观察图 13-2，你能说出图中的平面直角坐标系是怎样建立的吗？

试一试

如图 13-2，取过焦点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系.

设 $M(x, y)$ 是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，M 与 F_1 和 F_2 的距离之和等于常数 $2a(a>c)$，则 F_1，F_2 的坐标分别是 $(-c, 0)$，$(c, 0)$. 由椭圆的定义，得

$$|MF_1|+|MF_2|=2a.$$

又因为

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

于是得方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

将这个方程移项，两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

化简，得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边再平方，得

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

整理，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

由椭圆定义可知 $2a>2c$，即 $a>c$，所以 $a^2-c^2>0$. 设 $a^2-c^2=b^2$ $(b>0)$，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

两边同时除以 a^2b^2，得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).}\qquad ①$$

想一想 如果取 F_1F_2 所在的直线为 y 轴，以线段 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴，椭圆的方程是怎样的？

由上可知，椭圆上任意一点的坐标都满足方程①；反之，以方程①的解为坐标的点到椭圆两焦点 $(-c, 0)$，$(c, 0)$ 的距离之和为 $2a$，即以方程①的解为坐标的点都在椭圆上. 通常把这个方程称为**椭圆的标准方程**. 它所表示的椭圆焦点在 x 轴上，

焦点坐标为 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$，这里

$$c^2=a^2-b^2.$$

如图 13-3，如果椭圆的焦点在 y 轴上，焦点是 $F_1(0,\ -c)$，$F_2(0,\ c)$，只要将方程①中的 x，y 互换，就可以得到它的方程．这时方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).}$$

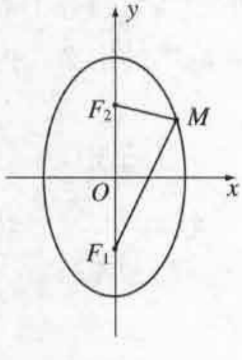


图 13-3

这个方程也是椭圆的标准方程．

例 1　平面内两个定点的距离是 8，求到这两个定点的距离的和是 10 的点的轨迹方程．

解　这个轨迹是一个椭圆，两个定点是焦点，用 F_1，F_2 表示．取过点 F_1 和 F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴．

因为

$$2a=10,\ 2c=8,$$

所以

$$a=5,\ c=4,$$
$$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9,$$

因此，这个椭圆的标准方程是

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

> 过椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点 F_2 作 x 轴的垂线，交椭圆于 A，B 两点，F_1 是椭圆的左焦点，你能求出 $\triangle AF_1F_2$ 的周长吗？$\triangle ABF_1$ 的周长呢？
>
> 试一试

例 2　分别求椭圆 A：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 与椭圆 B：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点．

解　因为 $4>3$，所以椭圆 A 的焦点在 x 轴上，椭圆 B 的焦点在 y 轴上．

因为 $a^2=4$，$b^2=3$，所以

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1,$$

因此椭圆 A 的两个焦点分别为 $(-1,\ 0)$ 和 $(1,\ 0)$．椭圆 B 的两个焦点分别为 $(0,\ -1)$ 和 $(0,\ 1)$．

例 3　已知椭圆的焦点在 x 轴上，$a=5$，而且椭圆经过点 $A\left(4,\ -\frac{3}{5}\right)$，求

椭圆的标准方程.

解 设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

因为椭圆经过点 $A\left(4,\ -\frac{3}{5}\right)$，所以

$$\frac{4^2}{5^2}+\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{b^2}=1,$$

即

$$\frac{16}{25}+\frac{9}{25b^2}=1,$$

解得

$$b^2=1.$$

所以这个椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{25}+y^2=1.$$

练习13-1

1. 口答下列各题：

(1) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点在____轴上，焦点坐标是______，______；

(2) 椭圆$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$ 的焦点在____轴上，焦点坐标是______，______.

2. 写出适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) $a=5$，焦点为 $F_1(-3,\ 0)$，$F_2(3,\ 0)$；

(2) $a=5$，焦点为 $F_1(0,\ -3)$，$F_2(0,\ 3)$.

3. 求下列椭圆的焦点坐标与焦距：

(1) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$； (2) $16x^2+25y^2=400$；

(3) $9y^2+16x^2=144$； (4) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

4. 已知椭圆的焦点在 x 轴上，$a=2\sqrt{5}$，而且椭圆经过点 $A(2,\ -2)$，求椭圆的标准方程.

13.1.2 椭圆的几何性质

下面我们根据椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

来研究椭圆的几何性质.

> **议一议** 观察椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的形状，你能从图形中看出它的范围吗？它具有怎样的对称性？椭圆上哪些点比较特殊？

(1) 范围

由标准方程可知，椭圆上点的坐标(x, y)都满足不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

即

$$x^2\leqslant a^2,\ y^2\leqslant b^2,$$

所以

$$|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b.$$

这说明椭圆位于直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形里，如图 13-4 所示.

(2) 对称性

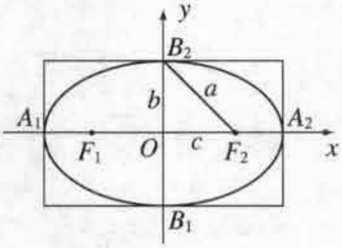


图 13-4

在标准方程中，把 x 换成 $-x$，方程并不改变，这说明当点 $P(x, y)$ 在椭圆上时，它关于 y 轴的对称点 $P_1(-x, y)$ 也在椭圆上，所以椭圆关于 y 轴对称；同理，把 y 换成 $-y$，方程也不变，所以椭圆关于 x 轴对称；把 x 换成 $-x$，同时把 y 换成 $-y$，这个方程也不变，所以椭圆关于坐标原点成中心对称. 也就是说，坐标轴是椭圆的对称轴，坐标原点是椭圆的对称中心. 椭圆的对称中心叫做**椭圆的中心**.

(3) 顶点

在标准方程中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，则 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$ 是椭圆和 x 轴的两个交点. 同理，令 $x=0$，得 $y=\pm b$，则 $B_1(0, -b)$，$B_2(0, b)$ 是椭圆和 y 轴的两个交点.

因为 x 轴和 y 轴都是椭圆的对称轴，所以椭圆和它的对称轴有四个交点，这四个交点，叫做**椭圆的顶点**.

线段 A_1A_2 和 B_1B_2 分别叫做椭圆的**长轴**和**短轴**．它们的长分别等于 $2a$ 和 $2b$，a 和 b 分别叫做椭圆的**长半轴长**和**短半轴长**．

（4）离心率

椭圆的焦距与长轴长的比 $e=\frac{c}{a}$ 叫做**椭圆的离心率**．

因为 $a>c>0$，所以 $0<e<1$．e 越趋近于 1，则 c 越趋近于 a，从而 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 越小，因此椭圆越扁；反之，e 越趋近 0，c 越趋近于 0，从而 b 越趋近于 a，这时椭圆就越趋近于圆．

如果 $a=b$，则 $c=0$，两个焦点重合，这时椭圆的标准方程就变为圆的方程

$$x^2+y^2=a^2.$$

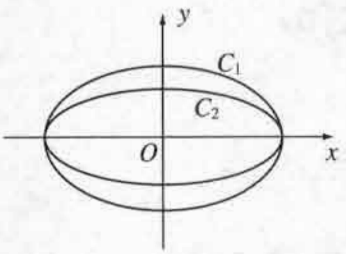


图 13-5

想一想　图 13-5 中的两个椭圆，哪个椭圆的离心率较大？

例 4　求椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标，并用描点法画出它的图形．

解　把已知方程化为标准方程

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1,$$

从而有

$$a=5,\ b=4,$$

$$c=\sqrt{25-16}=3.$$

因此，椭圆的长轴和短轴的长分别是 $2a=10$ 和 $2b=8$，离心率 $e=\frac{3}{5}$，两个焦点分别是 $F_1(-3,\ 0)$ 和 $F_2(3,\ 0)$，椭圆的四个顶点是 $A_1(-5,\ 0)$，$A_2(5,\ 0)$，$B_1(0,\ -4)$ 和 $B_2(0,\ 4)$．

将这个方程变形为 $y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$．根据

$$y=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2},$$

在 $0\leqslant x\leqslant 5$ 的范围内算出几个点的坐标 (x, y) 如下.

x	0	1	2	3	4	5
y	4	3.9	3.7	3.2	2.4	0

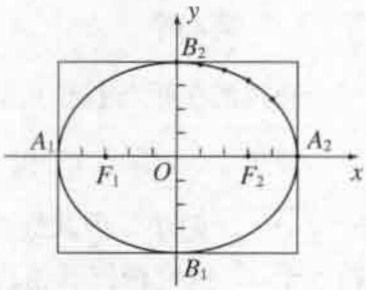


图 13-6

根据上表，描点画出椭圆在第一象限内的图形，再利用椭圆的对称性画出整个椭圆，如图 13-6 所示.

练习13-2

1. 说出下列椭圆的顶点坐标：

(1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$；　　(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$；

(3) $x^2+4y^2=16$；　　(4) $4x^2+y^2=16$.

2. 求下列椭圆的长轴、短轴的长和离心率：

(1) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$；　　(2) $4x^2+y^2=1$.

3. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 长轴长为 12，离心率 $e=\frac{1}{3}$，焦点在 x 轴上；

(2) 焦距为 6，离心率 $e=\frac{3}{5}$，焦点在 y 轴上.

4. 椭圆的长轴长是短轴长的 3 倍，且经过点 $P(3, 0)$，求椭圆的标准方程.

13.2 双曲线

问题 我们知道，平面内与两定点的距离之和为常数（大于两个定点间的距离）的点的轨迹是椭圆. 那么，平面内与两个定点的距离之差为非零常

数（小于两个定点间的距离）的点的轨迹是什么呢？

13.2.1　双曲线的标准方程

如图 13-7，取一条拉链，先拉开一部分，将一支剪短，把长的一支的端点固定在 F_1 处，短的一支的端点固定在 F_2 处，把笔尖放在 M 处，笔尖随拉链的拉开或合上，就画出一条曲线，再把短的一支的端点固定在 F_1 处，把长的一支的端点固定在 F_2 处，同样画出另一条曲线，这两条曲线合起来叫做双曲线，每一条叫做双曲线的一支.

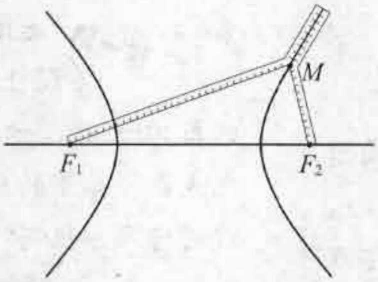


图 13-7

类比椭圆方程的推导过程，应当怎样建立坐标系，推导双曲线的方程？

平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$ 且不等于零）的点的轨迹叫做**双曲线**. 这两个定点叫做**双曲线的焦点**，两个焦点之间的距离叫做**焦距**.

如图 13-8，取过焦点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系.

设 $M(x,\ y)$ 是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距是 $2c$（$c>0$），那么 F_1，F_2 的坐标分别是 $(-c,\ 0)$，$(c,\ 0)$. 又设点 M 与 F_1 和 F_2 的距离之差的绝对值等于常数 $2a$（$c>a>0$），则点 M 适合条件

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a.$$

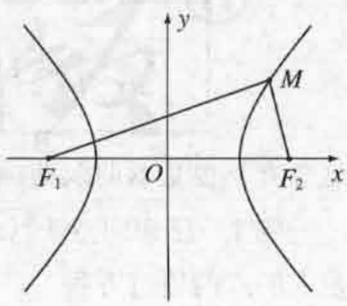


图 13-8

又因为

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

于是得方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

化简，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

由双曲线的定义可知 $2c>2a>0$，即 $c>a$，所以 $c^2-a^2>0$. 设 $c^2-a^2=b^2$ $(b>0)$，代入上式得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

两边同时除以 a^2b^2，得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).} \qquad ①$$

想一想 类比焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程，你能说出焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程吗？

因此，双曲线上任意一点的坐标都满足方程①；反之，我们可以证明，如果点 $M(x, y)$ 的坐标满足方程①，那么点 M 一定在双曲线上. 因此，方程①是双曲线的方程. 通常把方程①叫做**双曲线的标准方程**. 它所表示的双曲线的焦点在 x 轴上，焦点是 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$，这里 $c^2=a^2+b^2$.

如图 13-9，如果双曲线的焦点在 y 轴上，焦点是 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$，则只要将方程①中的 x，y 互换，就可以得到它的方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).}$$

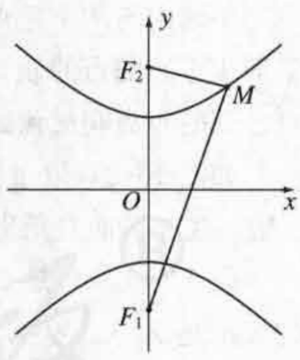


图 13-9

这个方程也是双曲线的标准方程.

例 1 已知两点 $F_1(-5, 0)$，$F_2(5, 0)$，求与它们的距离之差的绝对值是 6 的点的轨迹方程.

解 所求点的轨迹是双曲线，因 $c=5$，$a=3$，所以

$$b^2=c^2-a^2=5^2-3^2=4^2.$$

因此所求方程是

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1,$$

即

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

例 2　已知双曲线的焦点在 x 轴上，$a=2$，并且双曲线经过点 $A\left(-\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$，求双曲线的标准方程.

解　因为双曲线的焦点在 x 轴上，且 $a=2$，因此可设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

又因为双曲线经过点 $A\left(-\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$，所以

$$\frac{(-\sqrt{5})^2}{4}-\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{b^2}=1,$$

解得

$$b^2=5,$$

所以这个双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

练习13-3

1. 口答下列各题：

(1) 双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点在______轴上，焦点坐标是__________，__________；

(2) 双曲线 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{8}=1$ 的焦点在______轴上，焦点坐标是__________，__________.

2. 写出适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) $a=2$，焦点为 $F_1(-3,\ 0)$，$F_2(3,\ 0)$；

(2) $a=2$，焦点为 $F_1(0,\ -3)$，$F_2(0,\ 3)$.

3. 求下列双曲线的焦点坐标与焦距：

(1) $x^2-y^2=4$； (2) $y^2-x^2=1$；

(3) $9y^2-16x^2=144$； (4) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

4. 已知双曲线的焦点在 y 轴上，$a=2\sqrt{5}$，并且双曲线经过点 $A(2,\ -5)$，求双曲线的标准方程.

13.2.2 双曲线的几何性质

类比研究椭圆几何性质的方法，我们根据双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$$

来研究它的几何性质.

想一想 类比椭圆几何性质的研究，你认为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 有哪些性质？如何研究这些性质？

(1) 范围

由标准方程可知，双曲线上的点的坐标 $(x,\ y)$ 都满足不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1，即\ x^2\geqslant a^2，$$

所以

$$x\geqslant a\ 或\ x\leqslant -a.$$

这说明双曲线在两条直线 $x=a$，$x=-a$ 的外侧.

(2) 对称性

类比研究椭圆对称性的方法，容易得到，双曲线关于坐标轴和坐标原点都是对称的. 这时，坐标轴是双曲线的对称轴，坐标原点是双曲线的对称中心. 双曲线的对称中心叫做**双曲线的中心**.

(3) 顶点

在标准方程中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，因此双曲线和 x 轴有两个交点 $A_1(-a,\ 0)$，$A_2(a,\ 0)$. 因为 x 轴是双曲线的对称轴，所以双曲线和它的对称轴有两个交点，它们叫做**双曲线的顶点**.

令 $x=0$，得 $y^2=-b^2$，这个方程没有实数根，说明双曲线和 y 轴没有交点，但我们也把 $B_1(0,\ -b)$，$B_2(0,\ b)$ 画在 y 轴上，如图 13-10 所示.

线段 A_1A_2 叫做**双曲线的实轴**，它的长等于 $2a$，a 叫做双曲线的**实半轴长**. B_1B_2 叫做**双曲线的虚轴**，它的长等于 $2b$，b 叫做双曲线的**虚半轴长**.

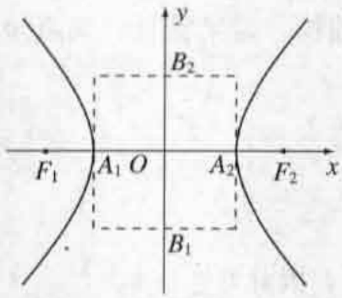


图 13-10

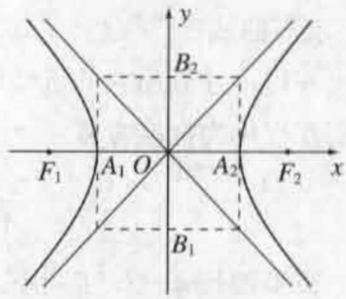


图 13-11

（4）渐近线

如图 13-11，经过点 A_1，A_2 分别作 y 轴的平行线 $x=\pm a$，经过点 B_1，B_2 分别作 x 轴的平行线 $y=\pm b$，四条直线围成一个矩形. 矩形的两条对角线所在直线的方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$，从图 13-11 中可以看出，双曲线的各支向外延伸时，与这两条直线逐渐接近但不相交.

我们把这两条直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的**渐近线**.

（5）离心率

双曲线的焦距与实轴长之比 $e=\frac{c}{a}$，叫做**双曲线的离心率**. 因为 $c>a>0$，所以双曲线的离心率 $e>1$.

由等式 $c^2-a^2=b^2$ 可得

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\sqrt{e^2-1}.$$

因此 e 越大，$\frac{b}{a}$ 也越大，即渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值越大，这时双曲线的形状就从扁狭逐渐变得开阔. 由此可知，双曲线的离心率越大，它的开口就越开阔.

想一想　椭圆的离心率刻画了椭圆的扁平程度，双曲线的离心率刻画了双曲线的什么几何特征？

在方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，如果$a=b$，那么双曲线方程为$x^2-y^2=a^2$，它的实轴和虚轴长都等于$2a$，这时，四条直线$x=\pm a$，$y=\pm a$围成正方形，渐近线方程为$y=\pm x$，它们互相垂直，并且平分双曲线实轴和虚轴所成的角. 像这样实轴和虚轴等长的双曲线叫做**等轴双曲线**. 它的离心率为$e=\sqrt{2}$.

例 3 求双曲线$5x^2-4y^2=20$的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、离心率和渐近线方程，并画出它的近似图形.

解 把方程化为标准方程

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

由此可知，实半轴长$a=2$，虚半轴长$b=\sqrt{5}$，因此

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3,$$

所以两焦点的坐标是$F_1(-3, 0)$，$F_2(3, 0)$.

离心率

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}.$$

渐近线方程为

$$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

双曲线的图形如图 13-12 所示.

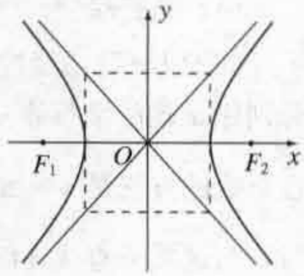


图 13-12

练习13-4

1. 说出下列双曲线的顶点坐标：

(1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$；　(2) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$；

(3) $x^2-4y^2=16$；　(4) $y^2-4x^2=16$.

2. 求下列双曲线的实轴、虚轴的长和离心率：

(1) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{9}=1$；　(2) $y^2-4x^2=1$.

3. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 实轴长等于 12，离心率$e=\sqrt{2}$，焦点在x轴上；

(2) 焦距等于 10，离心率 $e=\frac{5}{3}$，焦点在 y 轴上.

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距等于 8，渐近线的斜率等于 $\pm\frac{1}{3}$，求 a，b，e 的值（其中 a 为实半轴长，b 为虚半轴长，e 为离心率）.

5. 中心在原点的等轴双曲线的一个焦点 $F_1(-6, 0)$，求它的标准方程和渐近线方程.

13.3 抛物线

问题　我们知道二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的图象是一条抛物线，而且研究过它的顶点坐标、对称轴等问题. 那么，抛物线有怎样的几何特征？它有哪些几何性质？

13.3.1　抛物线的标准方程

平面内与一个定点 F 和一条不过 F 的定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做**抛物线**. 定点 F 叫做**抛物线的焦点**，定直线 l 叫做**抛物线的准线**.

> **想一想**　类比椭圆、双曲线的标准方程的推导，你认为应怎样建立平面直角坐标系，推导抛物线的标准方程？

如图 13-13，取经过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 x 轴，x 轴与 l 相交于点 K，以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 设 $|KF|=p$，则焦点 F 的坐标为

$$\left(\frac{p}{2}, 0\right),$$

准线 l 的方程为

$$x=-\frac{p}{2}.$$

设点 $M(x, y)$ 到 l 的距离为 d. 则点 M 在抛物线上的充要条件是

$$|MF|=d.$$

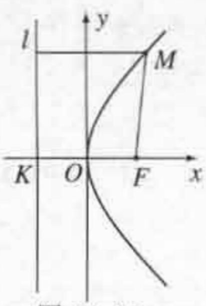


图 13-13

因为

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

$$d=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

所以

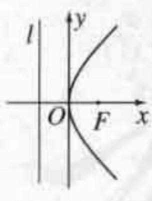
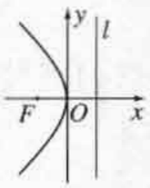
$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方，并化简得

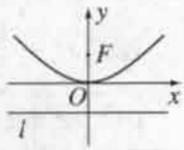
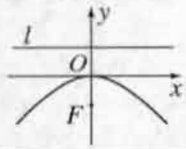
$$\boxed{y^2=2px\ (p>0).} \qquad ①$$

从上述过程可以看出，抛物线上任意一点的坐标都满足方程①；反之，以方程①的解为坐标的点都在抛物线上，即以方程①的解(x, y)为坐标的点到抛物线焦点的距离与它到准线的距离相等. 这样，我们把方程①叫做**抛物线的标准方程**，它所表示的抛物线的焦点在x轴的正半轴上，焦点坐标是$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，准线方程是$x=-\frac{p}{2}$.

抛物线的标准方程还有其他几种形式：$y^2=-2px$，$x^2=2py$，$x^2=-2py$. 它们的焦点、准线方程以及图形列表如下.

方程	图形	焦点	准线
$y^2=2px\ (p>0)$		$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$
$y^2=-2px\ (p>0)$		$F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$x=\frac{p}{2}$

续表

方程	图形	焦点	准线
$x^2=2py\ (p>0)$		$F\left(0,\ \dfrac{p}{2}\right)$	$y=-\dfrac{p}{2}$
$x^2=-2py\ (p>0)$		$F\left(0,\ -\dfrac{p}{2}\right)$	$y=\dfrac{p}{2}$

例 1　(1) 已知抛物线的标准方程是 $y^2=6x$，求它的焦点坐标和准线方程；

(2) 已知抛物线的焦点坐标是 $F(0,\ -2)$，求它的标准方程.

解　(1) 因为 $p=3$，所以焦点坐标是 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，准线方程是

$$x=-\frac{3}{2};$$

(2) 因为焦点在 y 轴的负半轴上，并且 $\dfrac{p}{2}=2$，$p=4$，所以它的标准方程是

$$x^2=-8y.$$

议一议　怎样由抛物线的标准方程，判断出其所对应图形的开口方向？

你能把抛物线方程 $y=ax^2\ (a\neq0)$ 化为标准方程吗？能说出它的焦点坐标和准线方程吗？　试一试

练习 13-5

1. 口答下列各题：

(1) 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点到准线的距离是________，焦点坐标是________，准线方程是________；

(2) 抛物线的焦点在 x 轴的负半轴上，焦点到准线的距离是 2，则它的标准方程是________.

2. 根据下列所给的条件，写出抛物线的标准方程：

(1) 焦点是 $F(3,\ 0)$；　　(2) 准线方程是 $x=-\dfrac{1}{4}$；

(3) 焦点为 $F(-2, 0)$；　　(4) 准线方程是 $y=2$.

3. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2=20x$；　　(2) $x^2=\frac{1}{2}y$；

(3) $2y^2+5x=0$；　　(4) $x^2+8y=0$.

13.3.2 抛物线的几何性质

我们根据抛物线的标准方程

$$y^2=2px\ (p>0)$$

来研究它的几何性质.

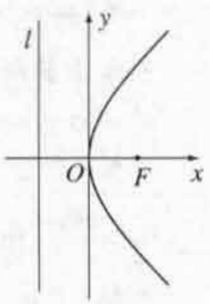


图 13-14

议一议 如图 13-14，类比椭圆、双曲线的几何性质，我们可以讨论抛物线的哪些几何性质？

(1) 范围

因为 $p>0$，由标准方程可知，对于抛物线上的任意一点 $M(x, y)$，都有 $x\geqslant 0$，所以这条抛物线在 y 轴的右侧，当 x 的值增大时，$|y|$ 也增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸.

(2) 对称性

以 $-y$ 代 y，方程不变，所以这个抛物线关于 x 轴对称，我们把抛物线的对称轴叫做抛物线的**轴**.

(3) 顶点

抛物线和它的轴的交点叫做抛物线的**顶点**. 在方程中，当 $y=0$ 时，$x=0$，因此抛物线的顶点就是坐标原点.

通过类比，你能得到抛物线其他三种形式的几何性质吗？ 试一试

(4) 离心率

抛物线上的点 M 到焦点和准线的距离之比，叫做**抛物线的离心率**，用 e 表示．由抛物线的定义可知 $e=1$．

例 2　已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点，并且抛物线经过点 $M(2,\ -2\sqrt{2})$，求它的标准方程，并用描点法画出它的图形．

解　因为抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点，且过点 $M(2,\ -2\sqrt{2})$，所以可设它的标准方程为

$$y^2=2px(p>0),$$

因为点 $M(2,\ -2\sqrt{2})$ 在抛物线上，所以

$$(-2\sqrt{2})^2=2p\cdot 2,$$

得

$$p=2.$$

因此所求方程是

$$y^2=4x.$$

将这个方程变形为 $y=\pm 2\sqrt{x}$，根据 $y=2\sqrt{x}$ 计算抛物线上的几个点的坐标如下．

x	0	1	2	3	4	…
y	0	2	2.8	3.5	4	…

描点画出抛物线在第一象限内的部分，再利用对称性，就可以画出整条抛物线，如图 13-15 所示．

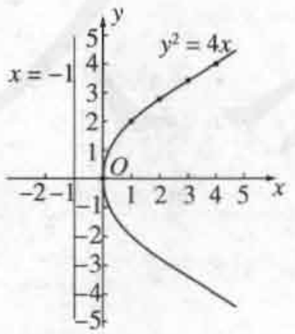


图 13-15

想一想　满足顶点在坐标原点，对称轴是坐标轴，并且经过点 $M(2,\ -2\sqrt{2})$ 的抛物线的标准方程还是 $y^2=4x$ 吗？

例 3　如图 13-16，求曲线 $y=x^2$ 与直线 $x-y+2=0$ 的交点坐标.

分析　这两条曲线的交点坐标，就是两条曲线方程所组成的方程组的解.

解　解方程组

$$\begin{cases} x-y+2=0 & ① \\ y=x^2 & ② \end{cases}$$

把②代入①，并整理得

$$x^2-x-2=0,$$

解得

$$x_1=-1,\ x_2=2,$$

分别代入①得

$$y_1=1,\ y_2=4.$$

所以，它们的交点为 $(-1,\ 1)$ 和 $(2,\ 4)$.

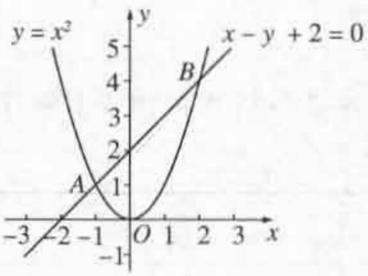


图 13-16

> 把上例中的直线换成 $x-y+b=0$，当 b 为何值时它们只有一个交点？当 b 为何值时，它们无交点？
>
> 试一试

练习13-6

1. 口答下列各题：

(1) 抛物线 $y^2=8x$ 的开口方向________，焦点坐标是________，准线方程是________，顶点坐标________，对称轴是________轴；

(2) 抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 的开口方向________，焦点坐标是________，准线方程是________，顶点坐标________，对称轴是________轴.

2. 求适合下列条件的抛物线方程：

(1) 顶点在坐标原点，关于 x 轴对称并且经过点 $M(5,\ -4)$；

(2) 顶点在坐标原点，焦点是 $F(0,\ 5)$；

(3) 顶点在坐标原点，准线是 $x=4$；

(4) 焦点是 $F(0,\ -8)$，准线是 $y=8$.

习题十三

1. 如果椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离是 6，求点 P 到另一个焦点 F_2 的距离.

2. 根据下列条件求椭圆的标准方程：

(1) 椭圆经过两点 $A(-4,\ 0)$，$B(0,\ 2\sqrt{3})$；

(2) 焦距为 2，离心率 $e=\frac{1}{2}$，焦点在 x 轴上.

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过椭圆的左焦点且平行于向量 $\boldsymbol{v}=(1,\ 1)$ 的直线交椭圆于 A，B 两点，求弦 AB 的长.

4. 设 P 点是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的一点，F_1 和 F_2 是焦点，且 $\angle F_1PF_2=60°$，求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

5. 求椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的点到直线 l：$x+y-7=0$ 的最短距离.

6. 双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上一点 P 到它的一个焦点的距离等于 15，求点 P 到另一个焦点的距离.

7. 若方程 $\frac{x^2}{k-9}-\frac{y^2}{4-k}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线，求实数 k 的取值范围并写出其焦点坐标.

8. 设直线 $y=x-2$ 与双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 交于 A，B 两点，求 $|AB|$.

9. 过抛物线 $y^2-2x=0$ 的焦点且倾斜角为 45°的直线交抛物线于 A，B 两点，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

10. 在抛物线 $y^2=12x$ 上求一点 P，使点 P 到焦点的距离等于 9.

11. 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 与直线 $y=x-1$ 相交于 A，B 两点，若

AB 的中点在圆 $x^2+y^2=5$ 上，求抛物线的方程.

12. 已知双曲线的中心在原点，焦点 F_1，F_2 在坐标轴上，离心率为$\sqrt{2}$，且双曲线过点（2，$-\sqrt{2}$）：

（1）求双曲线的方程；

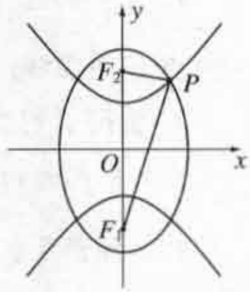
（2）若点 M 在第一象限而且是渐近线上的点，又 $MF_1\perp MF_2$，求点 M 的坐标；

（3）求$\triangle MF_1F_2$ 的面积.

13. 如图，已知双曲线与椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 有公共焦点 F_1，F_2，它们的离心率之和为$\dfrac{14}{5}$：

（1）求双曲线的标准方程；

（2）设 P 是双曲线与椭圆的一个交点，求$\cos\angle F_1PF_2$ 的值.



（第 13 题）

阅读与实践

（一）圆锥曲线的起源与发展

平面解析几何中的圆、椭圆、双曲线以及抛物线又称为圆锥曲线，它们的背景、地位及其研究价值如何呢?

历史上第一个考查圆锥曲线的是希腊著名学者门奈赫莫斯（公元前 375 年—前 325 年）. 当时为了解决著名的难题“倍立方问题”（即用直尺和圆规把立方体体积扩大一倍），他把直角三角形 ABC 的直角 A 的角平分线 AO 作为轴，旋转三角形 ABC 一周，得到圆锥曲面 $ABECE'$，如图 1. 用垂直于 AC 的平面去截此曲面，可得到曲线 EDE'，门奈赫莫斯称它为“直角圆锥曲线”. 他想以此在理论上解决“倍立方问题”，但未获成功.

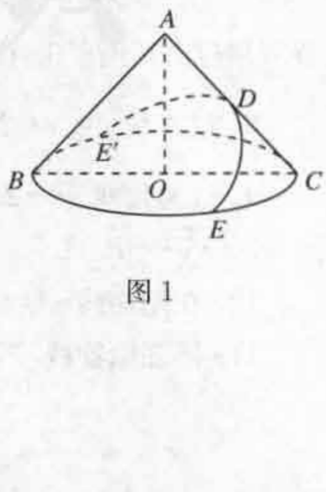


图 1

而后，他便抛开“倍立方问题”，把圆锥曲线作

为专有概念进行研究. 若以直角三角形 ABC 的较长的直角边 AC 为轴旋转一周，得到曲面 $CB'EBE'$，如图 2. 用垂直于 BC 的平面去截此曲面，其切口为一曲线，称之为“锐角圆锥曲线”；若以直角三角形 ABC 中的较短的直角边 AB 为轴旋转一周，可得到曲面 $BC'ECE'$，如图 3. 用垂直于 BC 的平面去截此曲面，其切口曲线 EDE' 称为“钝角圆锥曲线”. 当时，希腊人对平面曲线还缺乏认识，上述三种曲线需以“圆锥曲面”为媒介得到. 因此，被称为圆锥曲线的“雏形”.

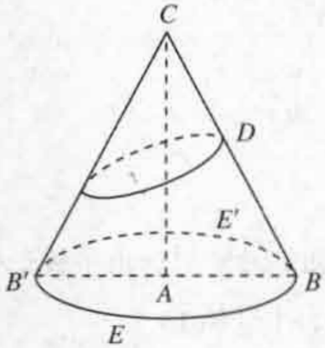


图 2

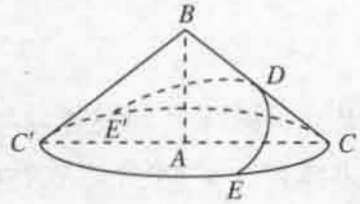


图 3

大约 100 年后，希腊数学家阿波罗尼奥更详尽、系统地研究了圆锥曲线. 如图 4 所示，考察不同倾斜角的平面截圆锥的切口所得到的曲线，可知如果切口与底面所夹的角小于母线与底面所夹的角，则切口呈现椭圆；若两角相等，则切口呈现抛物线；若前者大于后者，则切口呈现双曲线. 并且，阿波罗尼奥还进一步研究了这些圆锥曲线的光学性质. 比如椭圆，他发现如果把椭圆焦点 F_1 一侧做成镜面，并在 F_1 处放置光源，那么经过椭圆镜反射的光线全部通过另一个焦点 F_2. 热也和光一样发生反射，所以这时便会被烤焦，这也就是“焦点”名称的由来. 据说这一发现是他在研究椭圆的作法（也就是现行教材中一开始介绍的作法）时得出的. 如果我们回过头来审视今天的教材，为了完成传承知识的需要，把研究、叙述的路子正好反过来了，数学味十足，形式抽象的东西不少，但离实际似乎远了一点.

而圆锥曲线真正从后台走上前台，从学术的象牙塔中进入现实生活的世界里，应归功于德国天文学家开普勒（Kepler，1571—1630)，开普勒在长期的天文观察及对记录数据的分析中，发现了著名的“开普勒行星运动三定律”，其中第一定律（椭圆定律）是：“行星在包含太阳的平面内运动，画出

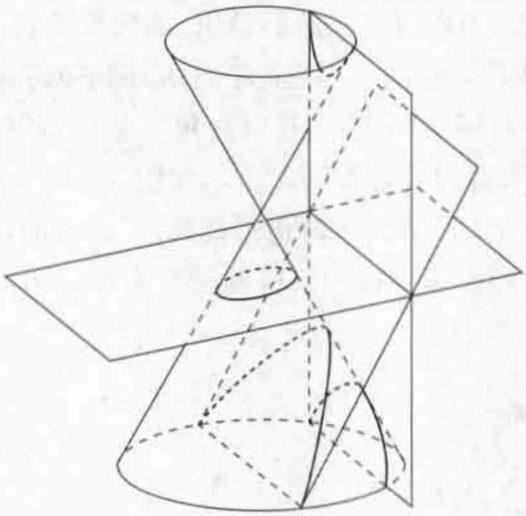


图 4

以太阳为焦点的椭圆.”就这样，门奈赫莫斯和阿波罗尼奥出于数学爱好而研究的圆锥曲线在近 2 000 年之后于天文学的舞台上登场了.

后来英国天文学家、数学家哈雷（Halley，1656—1742），又利用圆锥曲线理论及计算方法准确地预测到哈雷彗星与地球最近点的时刻，1758 年在哈雷逝世 16 年之后，哈雷彗星与地球如期而遇，这引起了整个欧洲乃至全世界的轰动，也进一步推动了人们对圆锥曲线的研究兴趣.

这段史料表明，圆锥曲线源于现实、融入生活、贴近客观实际，它是数学与现实关系的一个生动范例.

（二）折纸得到的圆锥曲线

我们大部分人都折过纸，你能想到我们可以通过折纸来折出圆锥曲线吗?

一、折抛物线

如图 5 所示，取一张纸，在离纸张一边 3 厘米的地方，设置一个定点. 按照如图 6 所示的方法，将纸折 20—30 次. 所形成的一系列折痕，便是抛物线的切线，将折痕用笔画上颜色. 它们整体就勾画出了抛物线的轮廓（如图 7）. 设置的定点是抛物线的焦点，你能找到抛物线的准线吗?

图 5

图 6

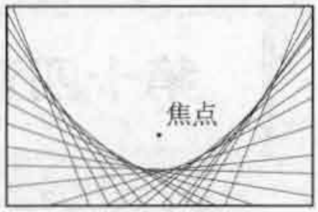


图 7

二、折椭圆

准备一张圆形纸片（如图 8），其中点 O 表示圆心，F 点表示圆内除 O 点以外的任意一点.

将圆形纸片翻折，使翻折上去的圆弧通过 F 点（如图 9），继续上述过程，绕圆心一周，折痕就围成了椭圆（如图 10）.

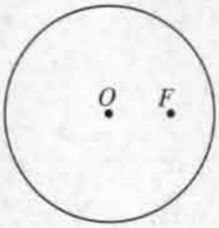


图 8

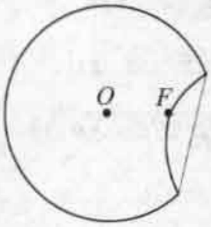


图 9

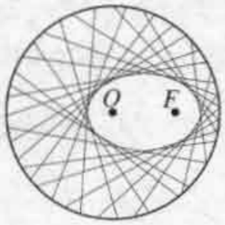
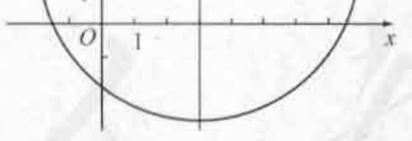


图 10

以上我们用折纸的方法，折出了抛物线和椭圆的轮廓，你能折出双曲线吗？

第十四章　坐标变换与参数方程

跨越江河可以架设桥梁，寻找目标需要调整位置和方向.参数的引入、坐标轴的变换，为研究曲线的性质导航.



数学是人类知识活动留下来最具威力的知识工具，是一些现象的根源.

——笛卡儿

数学对观察自然做出重要的贡献，它解释了规律结构中简单的原始元素，而天体就是用这些原始元素建立起来的.

——开普勒

本章包括坐标变换和参数方程两部分.

坐标变换是解析几何中的一种重要工具，在坐标变换下，通过坐标轴的平移和旋转，可以变换点的坐标，化一般的二元二次方程为曲线的标准方程，使我们既容易判断方程所表示的曲线，又便于研究曲线的性质.

参数方程是曲线方程的另一种形式，由于曲线上点的坐标 (x, y) 借助了中间变量——参数，使得方程的形式更加丰富，一些较复杂的曲线的给出更加简便，同时，也便于发现曲线与方程之间的相互联系，因而在实际生产中有着广泛的应用.

14.1 坐标变换

14.1.1 坐标轴的平移

点的坐标和曲线的方程是对一定的坐标系来说的，例如，图 14-1 中，$\odot O'$ 的圆心 O'，在坐标系 xOy 中的坐标是 $(3, 2)$，$\odot O'$ 的方程是 $(x-3)^2+(y-2)^2=5^2$；如果取坐标系 $x'O'y'$ $(O'x' /\!/ Ox,\ O'y' /\!/ Oy)$，那么在这个坐标系中，它们就分别变成 $(0, 0)$ 和 $x'^2+y'^2=5^2$. 这就是说，对于同一点或者同一曲线，由于选取的坐标系不同，点的坐标或曲线的方程也不同. 从这个例子我们可以看出，把一个坐标系变换为另一个适当的坐标系，可以使曲线的方程简化，便于我们研究曲线的性质.

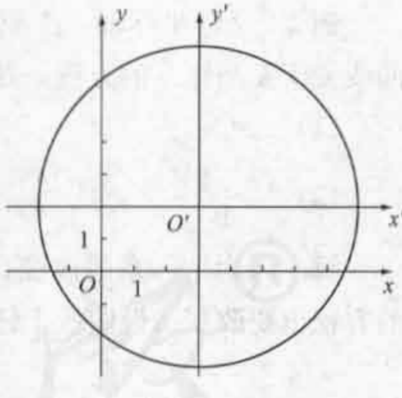


图 14-1

坐标轴的方向和长度单位都不改变，只改变原点的位置，这种坐标系的变换叫做**坐标轴的平移**，简称**移轴**.

下面研究在平移情况下，同一个点在两个不同的坐标系中坐标之间的关系.

在坐标系 xOy 中，设 O' 的坐标为 (h, k)，M 点的坐标为 (x, y)，则

$$\overrightarrow{OO'}=(h,\ k),\ \overrightarrow{OM}=(x,\ y).$$

因为 $\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OO'}$，所以

$$\overrightarrow{O'M}=(x-h,\ y-k).$$

如图 14-2 所示，以 O' 为原点平移坐标轴，建立新的坐标系 $x'O'y'$. 设 M 在新坐标系中的坐标为 $(x',\ y')$，则 $\overrightarrow{O'M}=(x',\ y')$，由上可知

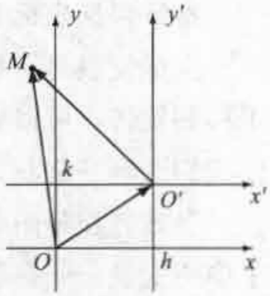


图 14-2

$$\boxed{x'=x-h,\ y'=y-k.} \quad ①$$

也可以写成

$$\boxed{x=x'+h,\ y=y'+k.} \quad ②$$

公式①和②叫做**平移（移轴）公式**.

例 1 平移坐标轴，把原点移到 $O'(3,\ -4)$，如图 14-3 所示，求下列各点的新坐标：

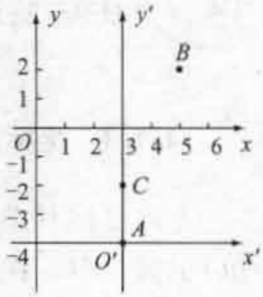


图 14-3

$O(0,\ 0)$，$A(3,\ -4)$，$B(5,\ 2)$，$C(3,\ -2)$.

解 把已知各点的原坐标分别代入

$$x'=x-3,\ y'=y+4$$

便得到它们的新坐标

$O(-3,\ 4)$，$A(0,\ 0)$，$B(2,\ 6)$，$C(0,\ 2)$.

例 2 平移坐标轴，把原点移到 $O'(2,\ -1)$，求下列曲线关于新坐标系的方程，并且画出新坐标轴和曲线：

(1) $x=2$；　　(2) $y=-1$；

(3) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$.

解 因为坐标系的改变，曲线上每一点的坐标都相应的改变，所以曲线的方程也要改变. 设曲线上任意一点的新坐标为 $(x',\ y')$，那么

$$x'=x-2,\ y'=y+1,$$

代入原方程，就得到新方程：

(1) $x'=0$；

(2) $y'=0$；

(3) $\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$.

新坐标轴和曲线如图 14-4.

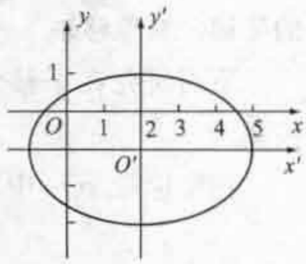


图 14-4

练习14-1

1. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(4, 5)$，求下列各点的新坐标，并画出新坐标轴和各点：

$$A(3, -6), B(7, 0), C(-4, 5), D(0, -8).$$

2. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(2, -3)$，求 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 在新坐标系中的方程，并画出新坐标轴和方程表示的曲线.

14.1.2　利用坐标轴的平移化简二元二次方程

在前一小节我们已经看到，适当地平移坐标轴可以化简曲线的方程. 现在，我们研究如何选择新坐标系来化简方程. 先看下面的例子.

例 3　平移坐标轴，化简方程

$$x^2-y^2+8x-14y-133=0,$$

并画出新坐标轴和方程表示的曲线.

解　把 $x=x'+h$，$y=y'+k$ 代入方程，得

$$(x'+h)^2-(y'+k)^2+8(x'+h)-14(y'+k)-133=0,$$

整理，得

$$x'^2-y'^2+(2h+8)x'-(2k+14)y'+h^2-k^2+8h-14k-133=0, \qquad ①$$

令

$$2h+8=0, 2k+14=0,$$

解得 $h=-4$，$k=-7$. 代入方程①，得

$$x'^2-y'^2=100.$$

这是等轴双曲线，新坐标轴和方程表示的曲线如图 14-5 所示.

上面的例子说明，对于缺 xy 项的二元二次方程 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$（A 和 C 不同时为零），利用坐标轴平移，可以使新方程没有一次项（或没有一个一次项和常数项），从而化成圆锥曲线的标准方程. 但上面的待定系数法，往往不如从原方程配方开始简单.

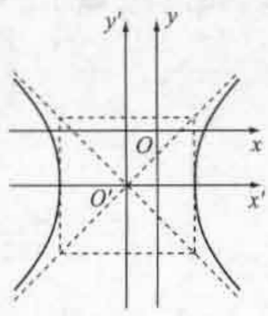


图 14-5

例如，在例 3 中，原方程经过配方得

$$(x+4)^2-(y-7)^2=100.$$

令 $x'=x+4$，$y'=y-7$，即可将方程化简为

$$x'^2-y'^2=100.$$

例 4 求证：二次函数

$$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$$

的图象是一条抛物线.

证明 把原方程化简，如果能化成抛物线的标准方程，就可以证明它是抛物线.

因为方程缺 xy 项和 y^2 项，我们将原方程按 x 配方，得

$$\begin{aligned} y&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a} \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}, \end{aligned}$$

将上式变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}\left(y-\frac{4ac-b^2}{4a}\right). \qquad ②$$

设

$$x'=x+\frac{b}{2a},\ y'=y-\frac{4ac-b^2}{4a},$$

代入方程②，得

$$x'^2=\frac{1}{a}y'.$$

因此，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是以 $O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 为顶点，对称轴平行于 y 轴的抛物线，当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下. 图象如图 14-6 所示.

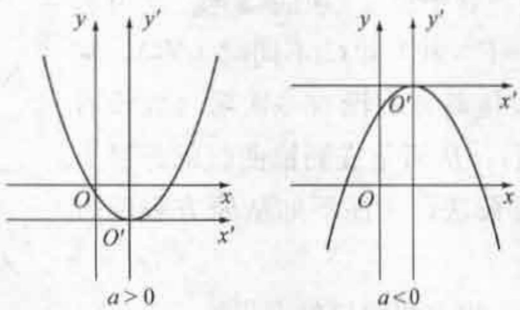


图 14-6

注意，在初中研究二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象时，为使画图方便，我们是先画 $y=ax^2$ 的图象，然后将图象平移，使它的顶点移到 $O'\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，得到 $y=ax^2+bx+c$ 的图象．这里则正好相反，在利用坐标法研究图形性质时，为使方程简单，不移动图形，而是把坐标原点移到 $O'\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，得到新方程 $x'^2=\frac{1}{a}y'$，从而容易知道它的性质．

练习14-2

1. 经过怎样的平移变换，可以把方程 $x^2+y^2-6x+12y-4=0$ 化为没有一次项的新方程？

2. 利用移轴，化简方程 $y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}$，并画出它的图象．

*14.1.3　坐标轴的旋转

前面我们学过坐标轴的平移，现在来讨论坐标轴旋转时，点的坐标在原坐标系和新坐标系中的关系．

如果坐标轴的原点和长度单位都不变，只是坐标轴按同一方向绕原点旋转了一个角度，这种坐标系的变换叫做**坐标轴的旋转**，简称**转轴**，旋转的角度叫做旋转角．

我们来求转轴时的坐标变换公式．

设坐标轴的旋转角为 θ．在平面内任取一点 M，它在坐标系 xOy 和 $x'O'y'$ 中的坐标分别为 (x, y) 和 (x', y')，如图 14-7 所示．

因为 $\angle xOx'=\theta$，设 $\angle x'OM=\alpha$．则 $\angle xOM=\theta+\alpha$，由三角函数的定义得

$$x'=|OM|\cos\alpha,$$
$$y'=|OM|\sin\alpha,$$

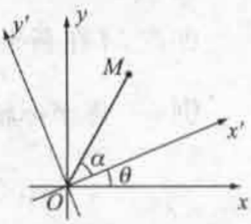


图 14-7

所以

$$\begin{aligned}x&=|OM|\cos(\theta+\alpha)\\&=|OM|(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)\\&=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\y&=|OM|\sin(\theta+\alpha)\\&=|OM|(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\\&=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{aligned}$$

也就是说

$$\boxed{\begin{aligned}x&=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\y&=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{aligned}}\qquad ①$$

由①解出 x'，y'，得

$$\boxed{\begin{aligned}x'&=x\cos\theta+y\sin\theta,\\y'&=-x\sin\theta+y\cos\theta.\end{aligned}}\qquad ②$$

公式①是用新坐标表示原坐标的旋转变换公式，公式②是用原坐标表示新坐标的旋转变换公式，统称为**旋转（转轴）公式**.

例 5 把坐标轴旋转$\frac{\pi}{6}$，求点 $P(-1,\sqrt{3})$ 在新坐标系中的坐标.

解 把 $\theta=\frac{\pi}{6}$，$x=-1$，$y=\sqrt{3}$，代入公式②，得

$$\begin{aligned}x'&=-\cos\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=0,\\y'&=-(-1)\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2.\end{aligned}$$

即点 M 在新坐标系中的坐标是 $(0,2)$.

例 6 将坐标轴旋转$\frac{\pi}{3}$，求曲线

$$2x^2-\sqrt{3}xy+y^2=10$$

在新坐标系中的方程，并画图.

解　把 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入公式①，得

$$x=x'\cos\frac{\pi}{3}-y'\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y',$$

$$y=x'\sin\frac{\pi}{3}+y'\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'.$$

代入方程，得新坐标系的方程为

$$2\left(\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)+$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)^2=10,$$

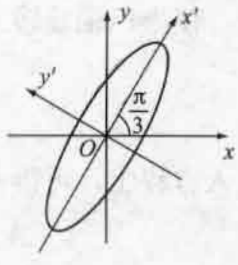


图 14-8

整理得

$$\frac{x'^2}{20}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

这是一个椭圆，画出图形如图 14-8 所示.

练习14-3

1. 将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$，求：

(1) 点 (3，4) 在新坐标系中的坐标；

(2) 新坐标系中点 (3，4) 在原坐标系中的坐标；

(3) 曲线 $x^2+3xy+y^2=1$ 在新坐标系中的方程.

2. 按所给的角 θ 旋转坐标轴，求下列各曲线的新方程：

(1) $x-y=0\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $13x^2+10xy+13y^2=72\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$；

(3) $3x^2-4\sqrt{3}xy-y^2=6\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right)$；

(4) $x^2-y^2=8\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$.

* 14.1.4 利用坐标轴的旋转化简二元二次方程

从上一节的例 6 我们看到，把坐标轴旋转一个适当的角度，可以化简二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0(B\neq 0), \quad ①$$

使新方程没有 $x'y'$ 项. 如何选择旋转角呢？下面我们来研究这个问题.

使坐标轴旋转 θ 角，这时

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,$$
$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

代入方程①，可得

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0, \quad ②$$

其中

$$A'=A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta,$$
$$B'=-2A\sin\theta\cos\theta+B\cos^2\theta-B\sin^2\theta+2C\sin\theta\cos\theta,$$
$$C'=A\sin^2\theta-B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta,$$
$$D'=D\cos\theta+E\sin\theta,$$
$$E'=-D\sin\theta+E\cos\theta.$$

为了使 $B'=0$，应有

$$-2A\sin\theta\cos\theta+B\cos^2\theta-B\sin^2\theta+2C\sin\theta\cos\theta=0,$$

即

$$B\cos 2\theta=(A-C)\sin 2\theta,$$

因此 θ 满足

$$\boxed{\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}.} \quad ③$$

由上可知，取满足公式③的角 θ，作旋转变换，就可以使方程②中没有 $x'y'$ 项.

由于旋转公式里只用到 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值，因此不一定要求出 θ 角的度数，可直接利用下列三角恒等式来计算 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 即可.

$$\cos 2\theta=\frac{\cot 2\theta}{\sqrt{1+\cot^2 2\theta}},$$

$$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{1-\cos 2\theta}}{2}, \qquad ④$$

$$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}}{2}. \qquad ⑤$$

要使新方程不含 $x'y'$ 项，只要取 2θ 的最小正值即可，也就是取 $0<2\theta<\pi$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，这时 $\cos 2\theta$ 和 $\cot 2\theta$ 的符号相同，$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都是正值，因此，④⑤中根号前都取正号即可.

例如上节的例 6，对于方程 $2x^2-\sqrt{3}xy+y^2=10$，如果事先不给出 θ，而要把它化简，我们可利用公式③求出

$$\cot 2\theta=\frac{2-1}{-\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

代入公式④⑤，得

$$\cos 2\theta=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\frac{1}{2}.$$

这样就可直接写出旋转公式

$$x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y',\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'.$$

例 7　利用坐标轴的旋转化简方程

$$2x^2+4xy+5y^2-22=0,$$

并画出它的图形.

解　由已知有

$$\cot 2\theta=\frac{2-5}{4}=-\frac{3}{4},$$

$$\cos 2\theta=\frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=-\frac{3}{5}.$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

因此旋转公式是

$$x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}},\ y=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}.$$

代入原方程，得

$$2\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)+5\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)^2-22=0,$$

化简得

$$6x'^2+y'^2=22.$$

即

$$\frac{y'^2}{22}+\frac{x'^2}{\frac{11}{3}}=1.$$

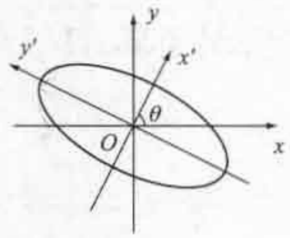


图 14-9

根据 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，得旋转角 $\theta\approx 63°26'$. 方程表示的曲线是长轴长为 $2\sqrt{22}$，短轴长为$\frac{2}{3}\sqrt{33}$的椭圆，画出图形如图 14-9 所示.

例 8 利用坐标轴的旋转，化简方程

$$x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0,$$

使它不含 $x'y'$项.

解 由已知得

$$\cot 2\theta=\frac{1-1}{2}=0,$$

$$2\theta=\frac{\pi}{2},\ \theta=\frac{\pi}{4}.$$

因此旋转公式是

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y').$$

代入原方程，整理后，得

$$x'^2+2y'=0.$$

练习14-4

利用转轴化简下列方程，并画图形：

1. $x^2-xy+2y^2=\frac{7}{2}$.

2. $x^2-2xy+y^2=2$.

*14.2　一般二元二次方程的讨论

*14.2.1　化一般二元二次方程为标准式

我们已经知道，坐标轴旋转适当的角度，可以化简二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0(A,\ B,\ C\text{不全为零}),$$

使新方程中没有 $x'y'$ 项．对于不含 $x'y'$ 项的二次方程，通过平移还可以继续化简．在一般情况下，最后能够化成圆锥曲线的标准方程．

例 1　利用旋转和平移，把方程

$$x^2+2xy+y^2+3x+y=0$$

化成圆锥曲线的标准方程，并画出图形．

解　因为

$$\cot 2\theta=\frac{1-1}{2}=0,$$

$$2\theta=\frac{\pi}{2},\ \theta=\frac{\pi}{4},$$

所以 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$．因此

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y').$$

代入原方程，化简得

$$2x'^2+2\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'=0,$$

配方，得

$$2\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\sqrt{2}\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

再作平移变换，设

$$x''=x'+\frac{\sqrt{2}}{2},\ y''=y'+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

代入上式得 $2x''^2=\sqrt{2}y''$，即

$$x''^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y''.$$

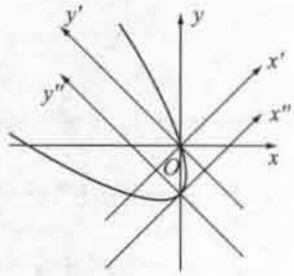


图 14-10

由此可知，原方程表示的图形是抛物线，画出图形如图 14-10 所示.

例 2 求证：二元二次方程

$$x^2+2xy+y^2+2x+2y-3=0$$

表示两条平行直线.

证明 化简方程. 因为 $B\neq 0$，所以先转轴，因为

$$\cot 2\theta=\frac{1-1}{2}=0,$$

$$\theta=\frac{\pi}{4},$$

因此旋转公式是

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y').$$

代入原方程，化简得

$$2x'^2+2\sqrt{2}x'-3=0.$$

配方得

$$2\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4,$$

所以

$$\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2,$$

从而

$$x'+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\text{或}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2},$$

即

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{或}x'=-\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

这是平行于y'轴的两条平行直线，所以方程$x^2+2xy+y^2+2x+2y-3=0$表示两条平行直线.

例 2 还可以用下面的方法证明.

把方程左边变形得

$$(x+y)^2+2(x+y)-3=0,$$

$$(x+y+3)(x+y-1)=0,$$

因此

$$x+y+3=0\text{或}x+y-1=0.$$

这是两条斜率相等，但截距不同的直线，所以方程表示两条平行直线.

练习14-5

1. 利用旋转和平移，化简方程$16x^2-24xy+9y^2-60x-80y+400=0$.
2. 利用旋转和平移，化简方程$x^2-4xy+4y^2-6\sqrt{5}x-8\sqrt{5}y-35=0$.

*14.2.2　一般二元二次方程的讨论

我们知道，一般的二元二次方程，经过坐标轴的旋转和平移，可以化成圆锥曲线的标准方程，从而知道它所表示的曲线的形状和位置. 但是，化简过程常常是很烦琐的. 现在，我们研究一下化简前后方程的系数之间的关系，找出直接由方程的系数判断方程类型的方法.

设二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad ①$$

是某曲线的方程，这里A，B，C不全为零.

首先，我们把坐标轴旋转θ角，使新方程没有$x'y'$项. 这时方程①变成

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0. \quad ②$$

由 14.1.4 节知道，其中

$$A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta=A', \quad ③$$

$$-(A-C)\sin 2\theta+B\cos 2\theta=0, \quad ④$$

$$A\sin^2\theta-B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta=C', \quad ⑤$$

把等式③⑤的两边相加，得

$$A+C=A'+C', \quad ⑥$$

等式③⑤的两边相减，得

$$(A-C)\cos 2\theta+B\sin 2\theta=A'-C', \quad ⑦$$

等式④⑦两边平方后相加，得

$$(A-C)^2+B^2=(A'-C')^2, \quad ⑧$$

从等式⑧的两边减去⑥的两边的平方，得

$$B^2-4AC=-4A'C'.$$

这就是坐标变换前后方程的二次项系数之间的关系．下面我们研究如何利用这个关系式判别方程的类型．

1．如果 $B^2-4AC\neq 0$，那么 $A'C'\neq 0$，即 A'，C' 都不等于零．这时，把方程②配方，得

$$A'(x'-h)^2+C'(y'-k)^2=F',$$

经过平移变换，方程可写成

$$A'x''^2+C'y''^2=F'.$$

（1）如果 $B^2-4AC<0$，那么 $A'C'>0$，所以 A'，C' 符号相同，方程的曲线是椭圆（A'，C' 的符号和 F' 相同时）、或者是一个点（$F'=0$ 时）、或者没有轨迹（A'，C' 的符号和 F' 相反时）．

$B^2-4AC<0$ 时的二元二次方程通常叫做椭圆型方程．

（2）如果 $B^2-4AC>0$，那么 $A'C'<0$，所以 A'，C' 符号相反，方程的曲线是双曲线（$F'\neq 0$ 时）、或者两条相交直线（$F'=0$ 时）．

$B^2-4AC>0$ 时的二元二次方程通常叫做双曲线型方程．

2．如果 $B^2-4AC=0$，那么 $A'C'=0$．

由转轴过程我们看到，经过变换，方程的次数并不改变，方程②仍是二次方程，所以 A'，C' 不能同时为零．

（1）当 $A'=0$，$C'\neq 0$ 时，方程②变为

$$C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0.$$

如果 $D'\neq0$，把上式配方，可变为

$$C'(y'-k')^2+D'(x'-h')=0.$$

再经过平移变换，得

$$C'y''^2=-D'x'',$$

这是一条抛物线.

如果 $D'=0$，方程②可变成

$$C'y'^2+E'y'+F=0,$$

这是两条平行直线（方程有两个不相同的实数解时）、或者两条重合的直线（方程有两个相同的实数解时）、或者没有轨迹（方程没有实数解时）.

(2) 当 $A'\neq0$，$C'=0$ 时，讨论过程同 (1) 类似.

$B^2-4AC=0$ 时的二元二次方程通常叫做抛物线型方程.

一般地，B^2-4AC 叫做二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的判别式. 根据判别式，不需要化简方程，就能够判别二元二次方程表示的曲线的类型，如下表所示.

方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$			
判别式	类型	一般情形	特殊情形（退缩圆锥曲线）
$B^2-4AC<0$	椭圆型	椭圆或圆	一点或没有轨迹
$B^2-4AC>0$	双曲线型	双曲线	两条相交直线
$B^2-4AC=0$	抛物线型	抛物线	两条平行直线、两条重合直线或没有轨迹

对于方程 $A'x''^2+C'y''^2=F'$，用 $-x''$ 代替 x''，同时 $-y''$ 代替 y''，方程不变，所以椭圆型和双曲线型方程的曲线是有一个对称中心的中心对称图形，这样的曲线叫做**有心曲线**. 抛物线型方程的曲线没有对称中心（特殊情况下没有确定的对称中心），这样的曲线叫做**无心曲线**.

化简有心曲线的方程时，也可以先移轴，将坐标原点移到曲线的对称中心再转轴；而对于无心曲线，由于无法确定新坐标的原点，所以化简方程时要先转轴后移轴.

例 3 判别下列方程的类型：

(1) $5x^2+12xy-22y^2-12y-19=0$；

(2) $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$.

解 (1) 因为 $B^2-4AC=12^2+4\times5\times22>0$，所以方程是双曲线型；

(2) 因为 $B^2-4AC=2^2-4=0$，所以方程是抛物线型.

例 4 利用转轴和平移化简方程

$$2x^2+4xy+5y^2+4x+16y+14=0.$$

解 因为 $B^2-4AC<0$，所以方程是椭圆型，化简方程时可以先移轴后转轴.

先移轴. 把 $x=x'+h$，$y=y'+k$ 代入方程，得

$$\begin{aligned}&2(x'+h)^2+4(x'+h)(y'+k)+5(y'+k)^2+4(x'+h)+\\&\quad 16(y'+k)+14=0,\\&2x'^2+4x'y'+5y'^2+(4h+4k+4)x'+(4h+10k+16)y'+\\&\quad 2h^2+4hk+5k^2+4h+16k+14=0.\end{aligned}$$

令一次项系数等于零，得

$$\begin{cases}4h+4k+4=0\\4h+10k+16=0\end{cases}$$

解方程组，得 $h=1$，$k=-2$. 把原点移到 $O'(1, -2)$，得新方程

$$2x'^2+4x'y'+5y'^2=0.$$

再转轴. 因为

$$\cot 2\theta=\frac{2-5}{4}=-\frac{3}{4},$$

$$\cos 2\theta=\frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}}=-\frac{3}{5},$$

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

因此旋转公式是

$$x'=\frac{1}{\sqrt{5}}(x''-2y''),$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x''+y'').$$

代入新方程，化简后得

$$6x''^2+y''^2=0.$$

适合这个方程的 x'' 和 y'' 只有

$$\begin{cases}x''=0\\y''=0\end{cases}$$

所以这个方程表示的图形是一个点，就是移轴后的坐标原点 O'. 对于原坐标系来说，方程表示的图形是点 $O'(1, -2)$.

练习14-6

1. 判别下列方程的类型：

(1) $3x^2-7xy+5y^2+x-3y-3=0$;

(2) $5x^2+12xy+5y^2-18x-18y+9=0$;

(3) $2x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$;

(4) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$.

2. 方程 $2x^2+\lambda xy+4y^2-7x+\lambda^2y+3=0$ 中，λ 取什么值时，方程是：

(1) 椭圆型？

(2) 双曲线型？

(3) 抛物线型？

14.3 参数方程

14.3.1 曲线的参数方程

1. 参数方程的概念

前面我们所研究过的曲线方程 $F(x, y)=0$，都是表示曲线上任意一点 x，y 之间的直接关系的. 但是在解决某些问题时，对于曲线上任意一点，它们的坐标 x，y 的这种关系是通过另一个变数间接地表示出来的.

一般地，在取定的坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 x，y 都是某个变数 t 的函数，即

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=\varphi(t)\end{cases} \quad ①$$

并且对于 t 的每一个允许值，由方程组①所确定的点 $M(x, y)$ 都在这条曲线

上，那么方程组①叫做这条曲线的**参数方程**，联系 x，y 之间关系的变数称为**参变数**，简称**参数**. 参数方程中的参数可以是有物理或几何意义的变数，也可以是没有明显意义的变数.

例如，我们在三角一章中学过单位圆与角 θ 终边交点的坐标是（$\cos\theta$，$\sin\theta$），实际上我们可以认为单位圆上的任意点 M 从初始位置 M_0 出发，按逆时针方向在圆 O 上运动（如图 14-11），点 M 的坐标是（x，y），那么单位圆的参数方程就是

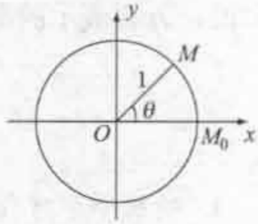


图 14-11

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$$

其中参数 θ 有明显的物理意义，表示点 M 转过的角度.

相对于参数方程来说，前面学过的直接给出曲线上点的坐标关系的方程，叫做曲线的**普通方程**.

> **想一想** $\theta=30^\circ$ 时，点 M 的坐标是什么？
>
> 若点 M 的坐标是 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\theta$ 是多少度？

2. 参数方程和普通方程的互化

参数方程和普通方程是曲线方程的不同形式，它们都是表示曲线上点的坐标之间的关系的. 一般情况下，我们可以通过消去参数方程中的参数，得出直接表示 x，y 之间关系的普通方程；也可以选择一个参数将普通方程变成参数方程的形式，如果参数选择得适当，方程可能比较简单或者较明显地反映出物理或几何意义.

例 1 把参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}\quad(a>b>0，\theta\text{ 为参数})$$

化为普通方程.

解 分别将两方程变形得

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\cos\theta\\[2ex]\dfrac{y}{b}=\sin\theta\end{cases}$$

再将两方程的两边平方后相加，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这是中心在原点，焦点在 x 轴上的椭圆方程.

例 2　根据条件，分别求椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的参数方程：

(1) 设 $x=3\cos\theta$，θ 为参数；

(2) 设 $y=2t$，t 为参数.

解　(1) 把 $x=3\cos\theta$ 代入椭圆方程，得到

$$\frac{9\cos^2\theta}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$$

所以

$$y^2=4(1-\cos^2\theta)=4\sin^2\theta,$$

即

$$y=\pm2\sin\theta.$$

由参数的任意性，可取 $y=2\sin\theta$.

所以此时椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的参数方程是

$$\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$$

(2) 把 $y=2t$ 代入椭圆方程，得

$$\frac{x^2}{9}+\frac{4t^2}{4}=1,$$

于是 $x^2=9(1-t^2)$，即

$$x=\pm3\sqrt{1-t^2}.$$

所以此时椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的参数方程是

$$\begin{cases}x=3\sqrt{1-t^2}\\ y=2t\end{cases}\text{和}\begin{cases}x=-3\sqrt{1-t^2}\\ y=2t\end{cases}$$

例 2(2) 中，参数方程中需要考虑 x 的两种取值情况，实际上它们分别对应了椭圆在 y 轴的左右两部分.

读一读

练习14-7

1. 已知曲线 C 参数方程是

$$\begin{cases}x=3t\\y=2t^2+1\end{cases}$$

(1) 判断点 $M_1(0,\ 1)$，$M_2(5,\ 4)$ 与曲线 C 的位置关系；

(2) 已知点 $M_3(6,\ a)$ 在曲线 C 上，求 a 的值.

2. 把下列参数方程化成普通方程，并说明它们各表示什么曲线：

(1) $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$ ($p>0$，t 为参数)

(3) $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1-4t\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x=5\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$

3. 根据所给条件，把下列各方程化成参数方程：

(1) $xy=a^2$，设 $x=a\tan\theta$，θ 是参数；

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，设 $y=b\tan\theta$，θ 是参数.

14.3.2 圆的参数方程

圆周运动是生活中常见的，如图 14-12 所示为一个旋转的圆盘. 当物体绕定轴作匀速转动时，物体中各个点都作匀速圆周运动. 那么，怎么刻画运动中点的位置呢？

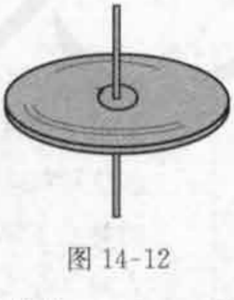


图 14-12

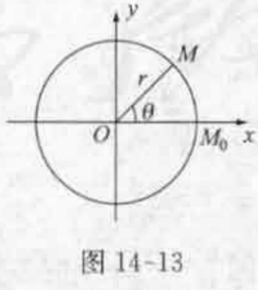


图 14-13

假设圆的半径是 r，点 M 从初始位置 M_0 ($t=0$ 时的位置) 出发，按逆时针方向在圆 O 上作匀速圆周运动，点 M 绕点 O 转动的角速度为 ω. 以圆心 O

为原点，OM_0所在的直线为 x 轴，在圆所在的平面上建立直角坐标系，如图14-13所示. 显然，点 M 的位置由时刻 t 唯一确定.

如果在时刻 t，点 M 转过的角度是 θ，坐标是（x，y），那么 $\theta=\omega t$. 设 $|OM|=r$，那么由三角函数定义，有

$$\cos \omega t=\frac{x}{r},\ \sin \omega t=\frac{y}{r},$$

即

$$\begin{cases}x=r\cos \omega t\\ y=r\sin \omega t\end{cases}\ (t\text{ 为参数})$$

> 角速度：连接运动质点和圆心的半径在单位时间内转过的弧度叫做"角速度"，角速度的单位是弧度/秒.
>
> **读一读**

这就是圆心在原点 O，半径为 r 的圆的参数方程，其中参数 t 有明确的物理意义，即质点作匀速圆周运动的时间.

考虑到 $\theta=\omega t$，也可以取 θ 为参数，于是有

$$\begin{cases}x=r\cos \theta\\ y=r\sin \theta\end{cases}\ (\theta\text{ 为参数}) \quad ①$$

这也是圆心在原点 O，半径为 r 的圆的参数方程，其中参数 θ 的几何意义是 OM_0绕点 O 逆时针旋转到 OM 的位置时，OM_0转过的角度.

由上可以看出，由于选取的参数不同，圆有不同的参数方程. 一般地，同一条曲线，可以选取不同的变数为参数，因此得到的参数方程也可以有不同的形式. 形式不同的参数方程，它们表示的曲线可以是相同的. 另外，在建立曲线的参数方程时，在容易混淆的时候，要注明参数及参数的取值范围.

若圆心在点 $M_0(x_0,\ y_0)$，半径为 r，则圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+r\cos \theta\\ y=y_0+r\sin \theta\end{cases}\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi) \quad ②$$

> **想一想**　(1) ②式对应的圆的普通方程是什么？你能直接由圆的普通方程推导出②式吗？
>
> (2) 由①式，如何用坐标平移公式得出②式？

例 3　写出圆心在点（-1，2），半径为 3 的圆的参数方程.

解　由②式知圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=-1+3\cos\theta\\y=2+3\sin\theta\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

例 4 如图 14-14 所示，已知圆 O 的半径为 2，P 是圆上的动点，$Q(6,0)$ 是 x 轴上的定点，M 是 PQ 的中点. 当点 P 绕点 O 作匀速圆周运动时，求点 M 的轨迹的参数方程.

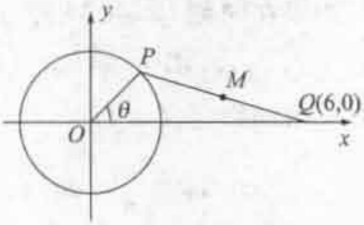


图 14-14

分析 取 $\angle xOP=\theta$ 为参数，则圆 O 的参数方程是

$$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$$

当 θ 变化时，动点 P 在定圆 O 上运动，线段 PQ 也随之变动，从而点 M 也在变动. 所以，点 M 的变动可以看成是由角 θ 决定的. 于是，可选 θ 为参数.

解 设点 M 的坐标是 (x, y)，$\angle xOP=\theta$，则点 P 的坐标是 $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$. 由中点坐标公式可得

$$x=\frac{2\cos\theta+6}{2}=\cos\theta+3,$$

$$y=\frac{2\sin\theta}{2}=\sin\theta.$$

所以，点 M 的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases}x=\cos\theta+3\\y=\sin\theta\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

想一想 例 4 中的定点 Q 在圆 O 外，你能判断这个轨迹表示什么曲线吗？如果定点 Q 在圆 O 上，轨迹是什么？如果定点 Q 在圆 O 内，轨迹又是什么？

练习14-8

1. 写出下列圆的参数方程：

(1) 圆心在原点，半径为 2；

(2) 圆心在点 $(-2, 1)$，半径为 3；

(3) 圆心在点 $(-2, 1)$，半径为 $\sqrt{5}$；

(4) 圆心在点 $(0, 1)$，半径为 1.

2. 指出下列参数方程表示的曲线：

(1) $\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

(2) $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$ $(\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi)$

(3) $\begin{cases}x=3+15\cos\theta\\y=2+15\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$

3. 由圆 $x^2+y^2=25$ 上动点 M 作 y 轴的垂线，交 y 轴于点 N，设线段 MN 的中点为 P，求点 P 的轨迹的参数方程.

14.3.3 直线的参数方程

已知直线 l 经过点 $M_0(x_0, y_0)$，倾斜角为 α，怎样建立直线 l 的参数方程呢？

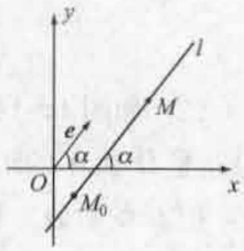


图 14-15

如图 14-15，在直线 l 上任取一点 $M(x, y)$，则

$\overrightarrow{M_0M}=(x, y)-(x_0, y_0)=(x-x_0, y-y_0)$.

设 $\boldsymbol{e}$ 是直线 l 的单位方向向量（单位长度与坐标轴的单位长度相同)，则

$$\boldsymbol{e}=(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

因为 $\overrightarrow{M_0M}/\!/\boldsymbol{e}$，所以存在实数 $t\in\mathbf{R}$，使 $\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{e}$，即

$$(x-x_0, y-y_0)=t(\cos\alpha, \sin\alpha),$$

$$x-x_0=t\cos\alpha,\ y-y_0=t\sin\alpha,$$

$$x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\sin\alpha.$$

所以，经过点 $M_0(x_0, y_0)$，倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}\ (t\text{ 为参数})$$

因为 $|\boldsymbol{e}|=1$. 由 $\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{e}$，得到 $|M_0M|=|t|$. 所以，直线上的动点 M 到定点 M_0 的距离等于参数 t 的绝对值.

> 当 $0<\alpha<\pi$ 时，$\sin\alpha>0$，所以，直线 l 的单位方向向量 $\boldsymbol{e}$ 的方向总是向上. 此时，若 $t>0$，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 的方向向上；若 $t<0$，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 的方向向下；若 $t=0$，则点 M 与点 M_0 重合.
>
> 读一读

例 5 设直线 l_1 过点 $A(2, -4)$，倾斜

角为$\frac{5\pi}{6}$：

(1) 求 l_1 的参数方程；

(2) 设直线 l_2 的方程为 $x-y+1=0$，且 l_2 与 l_1 的交点为 B，求点 B 与点 A 的距离.

解 (1) 由直线的参数方程得

$$\begin{cases} x=2+t\cos\frac{5\pi}{6} \\ y=-4+t\sin\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=-4+\frac{1}{2}t \end{cases}$$

(2) 如图 14-16 所示，B 点在 l_1 上，只要求出 B 点对应的参数值 t，则 $|t|$ 就是 B 到 A 的距离.

把 l_1 的参数方程代入 l_2 的方程中，得

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\left(-4+\frac{1}{2}t\right)+1=0,$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}t=7,$$

$$t=\frac{14}{\sqrt{3}+1}=7(\sqrt{3}-1).$$

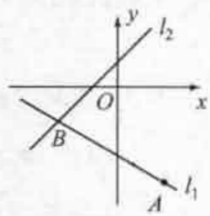


图 14-16

因为 t 为正值，从而知 $|AB|=7(\sqrt{3}-1)$.

例 6 已知直线 l：$x+y-1=0$ 与抛物线 $y=x^2$ 交于 A，B 两点，求：

(1) 线段 AB 的长；

(2) 点 $M(-1, 2)$ 到 A，B 两点的距离之积.

解 (1) 因为直线 l 过定点 M，且 l 的倾斜角是$\frac{3\pi}{4}$，所以它的参数方程是

$$\begin{cases} x=-1+t\cos\frac{3\pi}{4} \\ y=2+t\sin\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$$

把它代入抛物线方程，得

$$t^2+\sqrt{2}t-2=0,$$

解得

$$t_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}, \ t_2=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}.$$

由参数 t 的几何意义得 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{10}$.

(2) 由上有

$$|MA||MB|=|t_1t_2|=2.$$

练习14-9

1. 写出下列直线的参数方程：

(1) 过点 $M_0(0, 1)$，倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$；

(2) 过点 $M_0(2, 0)$，倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$；

(3) 过点 $M_0(-1, 3)$，倾斜角为 $60°$；

(4) 过点 $M_0(1, 5)$，倾斜角为 $0°$.

2. 动点 M 作匀速直线运动，它在 x 轴和 y 轴方向的分速度分别为 3 m/s和 4 m/s，直角坐标系的长度单位是 1 m，点 M 的起始位置在点 $(2, 1)$处，求点 M 的轨迹的参数方程.

3. 设直线 l 经过点 $M_0(1, 5)$，倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$：

(1) 求直线 l 的参数方程；

(2) 求直线 l 和直线 $x-y-2\sqrt{3}=0$ 的交点到点 M_0 的距离；

(3) 求直线 l 和圆 $x^2+y^2=16$ 的两个交点到点 M_0 的距离的和与积.

14.3.4 圆锥曲线的参数方程

我们已经学过椭圆、抛物线和双曲线的标准方程，在某些研究领域中，它们的参数方程应用更广泛一些.

1. 椭圆的参数方程

设椭圆的普通方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),$$

即

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

令$\frac{x}{a}=\cos\theta$，则

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta.$$

取$\frac{y}{b}=\sin\theta$，则得椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}\ (\theta\text{ 为参数})$$

这是中心在原点 O，焦点在 x 轴上的椭圆的参数方程.

例 7 在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$中作内接矩形，问内接矩形的最大面积是多少？

解 椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=5\cos\theta\\y=4\sin\theta\end{cases}$$

设第一象限内椭圆上一点 $M(x, y)$ 为内接矩形的顶点，由椭圆的对称性，知内接矩形的面积为

$$\begin{aligned}S&=4xy\\&=4\times5\cos\theta\times4\sin\theta\\&=40\sin2\theta.\end{aligned}$$

由上知当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，面积 S 取得最大值 40，此时

$$x=5\cos\frac{\pi}{4}=\frac{5}{2}\sqrt{2}，\ y=4\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}.$$

因此，矩形在第一象限内的顶点为$\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}，2\sqrt{2}\right)$时，内接矩形的面积最大为40.

2. 双曲线的参数方程

设双曲线的普通方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)，$$

即

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

令$\frac{x}{a}=\sec\theta$，则

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^2-1=\sec^2\theta-1=\tan^2\theta.$$

取$\frac{y}{b}=\tan\theta$，则得双曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}(\theta\text{ 为参数})$$

这是中心在原点O，焦点在x轴上的双曲线的参数方程.

3. 抛物线的参数方程

设抛物线的普通方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

要选一个参数把它化为参数方程十分简单，例如，可选y自身为参数t，则$x=\frac{t^2}{2p}$，得抛物线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2p}t^2\\y=t\end{cases}(t\text{ 为参数})$$

通常令$t=\frac{1}{2p}y$，则$x=\frac{y^2}{2p}=2pt^2$，此时抛物线的参数方程为

$$\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}(t\text{ 为参数})$$

例 8 设 M 为抛物线 $y^2=2x$ 上的动点，定点 $M_0(-1, 0)$，点 P 为线段 M_0M 的中点，求点 P 的轨迹方程.

解 令 $y=2t$，则 $x=\frac{y^2}{2}=2t^2$，得抛物线的参数方程

$$\begin{cases}x=2t^2\\y=2t\end{cases}$$

设抛物线上动点为 $M(2t^2, 2t)$，由中点坐标公式，得线段 M_0M 的中点 P 点的坐标 (x, y) 满足

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(-1+2t^2)\\y=\frac{1}{2}(0+2t)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}+t^2\\y=t\end{cases}$$

这就是 P 点的轨迹的参数方程，可化为普通方程

$$y^2=x+\frac{1}{2},$$

这是以 x 轴为对称轴，顶点在$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$的抛物线.

练习14-10

1. 写出下列圆锥曲线的参数方程：

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；　　(2) $x^2+4y^2=16$；

(3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$；　　(4) $y^2=6x$.

2. 椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$$

点 P 为椭圆上对应 $t=\frac{\pi}{6}$ 的点，求直线 OP 的斜率.

3. 由抛物线 $y^2=2x$ 上各点作 y 轴的垂线段，求各线段中点连线的参数方程.

14.4 参数方程的应用举例

例　已知当前台风中心 P 在某海滨城市 O 的正东 300 km 处，并以 40 km/h 的速度向西偏北 45°方向移动. 而且距台风中心 250 km 以内的地方都属于台风侵袭的范围，那么经过多长时间后城市 O 开始受到台风袭击（精确到 0.1 h）？

解　如图 14-17，取 O 为原点，OP 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系，则点 P 的坐标是 (300，0). 以 O 为圆心，250 km 为半径作圆 O，当台风中心移动后的位置 M 在圆内或圆 O 上时，城市 O 将受到台风侵袭.

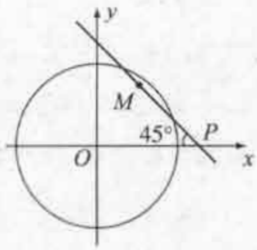


图 14-17

圆 O 的方程为

$$x^2+y^2=250^2.$$

设经过 t 小时后，台风中心 M 的坐标为 (x, y)，根据条件知台风中心 M 移动形成的直线 l 的方程为

$$\begin{cases}x=300+40t\cos 135^\circ\\ y=40t\sin 135^\circ\end{cases}\quad (t\text{ 为参数，}t\geqslant 0)$$

即

$$\begin{cases}x=300-20\sqrt{2}t\\ y=20\sqrt{2}t\end{cases}\quad (t\text{ 为参数，}t\geqslant 0)$$

当点 $M(300-20\sqrt{2}t, 20\sqrt{2}t)$ 在圆 O 内或圆 O 上时，有

$$(300-20\sqrt{2}t)^2+(20\sqrt{2}t)^2\leqslant 250^2,$$

即 $16t^2-120\sqrt{2}t+275\leqslant 0$，解得

$$\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4}\leqslant t\leqslant\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4}.$$

由计算器计算可得，t 的范围约为

$$2.0\leqslant t\leqslant 8.6.$$

所以大约在 2 h 后城市 O 开始受到台风侵袭.

> **想一想**　海滨城市受台风侵袭大概持续多长时间？如果台风侵袭的半径也发生变化（比如：当前半径为 250 km，并以 10 km/h 的速度不断增大），那么问题又该如何解决？

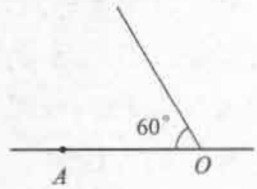
练习14-11

1. 设飞机以 150 m/s 的速度大小作水平飞行，若在飞行高度 $h=588$ m 处投弹（设炸弹的初速度等于飞机的速度）：

（1）求炸弹离开飞机后的轨迹方程；

（2）试问飞机在离目标多远（水平距离）处投弹才能命中目标.

2. 如图所示，当前热带风暴中心位于点 O 处，某海滨城市在它的西面 220 km 点 A 处. 风暴正以 40 km/h 的速度向西偏北 60°方向运动. 已知距风暴中心 200 km 以内的地方都会受风暴侵袭，计算经过多长时间该城市会受风暴侵袭，侵袭会持续多长时间.



（第 2 题）

习题十四

1. （1）平移坐标轴，把原点分别移到何处，点的坐标变化如下？

$A(1, 0)\to A(4, 3)$；　　　　$B(2, 4)\to B(2, -3)$.

（2）经过坐标轴平移，把原点移到 $O'(3, -2)$ 后，A，B，C，D 各点的新坐标分别是 $(0, 2)$，$(-3, 0)$，$(-1, 3)$，$(1, 1)$，求它们的原坐标，并画出新坐标轴和各点.

2. 平移坐标轴，把原点移到 O'，求下列各曲线的新方程，并画出新坐标轴和图形：

（1）$y=3$，$O'(-2, 1)$；

（2）$3x-4y=6$，$O'(3, 0)$；

（3）$x^2+y^2-4x-2y=0$，$O'(2, 1)$；

（4）$x^2+6x-y+11=0$，$O'(-3, 2)$.

3. 平移坐标轴化简方程：

（1）$x^2+y^2+4x+8y-5=0$；

（2）$x^2+2y^2-4x+8y-5=0$；

（3）$4x^2-9y^2+16x-54y-29=0$；

（4）$y^2-4y-4x+16=0$.

4. 求下列各曲线的焦点坐标和对称轴方程：

(1) $2x^2+y^2-4x-2y=0$；

(2) $x^2-2y^2-6x+4y+3=0$；

(3) $x^2-4x+4y=0$.

5. 求适合下列条件的曲线方程：

(1) 中心为$O'(-2, 1)$，长半轴长为10，焦距为12，焦点在平行于x轴的直线上的椭圆；

(2) 虚轴的长是8，两顶点是$A(2, 1)$和$A'(2, -5)$的双曲线；

(3) 焦点是$F(3, -3)$，准线是$y=1$的抛物线.

***6.** 将坐标轴旋转$\frac{\pi}{4}$，求下列各点的新坐标：

$$A(1, 3), B(3, -1).$$

***7.** 点$P(1, 3)$经过转轴（旋转角为θ）后，新坐标为$P(3, -1)$，求旋转角θ.

***8.** 利用坐标轴旋转，化简下列方程，并画出图形：

(1) $x^2-3xy-3y^2=1$；

(2) $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2-7=0$；

(3) $9x^2-6\sqrt{2}xy+2y^2-1=0$.

9. 写出经过点$(0, 1)$，倾斜角是$\frac{2\pi}{3}$的直线的参数方程.

10. 动点M作匀速直线运动，它在x轴和y轴方向的分速度分别为6和8，运动开始时，点M位于$P(1, 2)$，求点M的轨迹的参数方程.

11. 设直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\end{cases}$$

求它与圆$x^2+y^2=4$的交点.

12. 写出圆心在点$(1, -2)$，半径为3的圆的参数方程.

13. 设方程

$$\begin{cases}x=t+2\cos\theta\\y=2t+2\sin\theta\end{cases}$$

(1) $t=1$时，θ为参数，此时方程表示什么曲线？把参数方程化为普通

方程；

(2) $\theta=\frac{\pi}{4}$时，t 为参数，此时方程表示什么曲线？把参数方程化为普通方程.

14. 设圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=4+2\cos t\\y=2\sin t\end{cases}$$

直线 $y=kx$ 与圆相切，求该直线的倾斜角.

15. 一颗人造地球卫星的运行轨道是一个椭圆，长轴长为 15 565 千米，短轴长为 15 443 千米，取椭圆中心为坐标原点，求卫星轨道的参数方程.

16. 由圆 $x^2+y^2=9$ 上动点 M 作 x 轴的垂线，交 x 轴于 N 点，设线段 MN 的中点为 P，求点 P 的轨迹方程.

17. 设直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=4-t\\y=-2\sqrt{3}+\sqrt{3}t\end{cases}$$

在直线上求点 P，使点 P 到点 $A(4,\ -2\sqrt{3})$ 的距离为 4.

18. 已知弹道曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=2t\cos\frac{\pi}{6}\\y=2t\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

(1) 求炮弹从发射到落地所需的时间；

(2) 求炮弹在运动中达到的最大高度.

阅读与实践

圆的渐开线与摆线

把一条没有弹性的细绳绕在一个圆盘上，在绳的外端系上一支铅笔，将绳子拉紧，保持绳子与圆相切而逐渐展开，那么铅笔会画出一条曲线，如图 1

所示. 我们把笔尖画出的曲线叫做圆的**渐开线**，相应的定圆叫做渐开线的**基圆**.

在机械工业中，广泛使用齿轮传递动力. 由于渐开线齿形的齿轮磨损少，传动平稳，具有省力、耐用和噪音小的特点，制造安装较为方便，因此大多数齿轮采用这种齿形. 设计加工这种齿轮，需要借助圆的渐开线的参数方程.

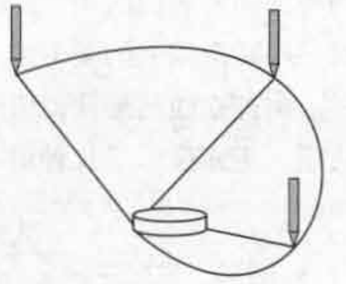


图 1

如果在自行车的轮子上喷一个红色印记，那么自行车在笔直的道路上行驶时，红色印记会画出的曲线叫做**平摆线**，简称**摆线**，又叫**旋轮线**，如图 2 所示.

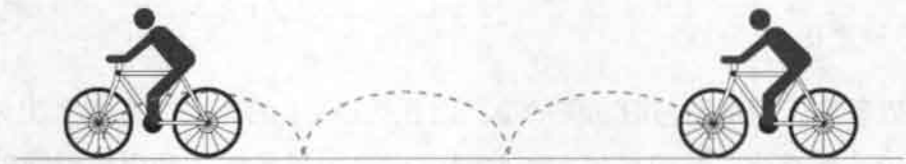


图 2

在数学史上，发现圆锥曲线后，受到科学家关注最多的曲线是摆线. 伽利略是最早注意到摆线的科学家之一，他曾经尝试以操作的方法计算摆线的一拱与其底线间的面积；后来，笛卡儿、费马、帕斯卡、伯努利等人都研究过摆线，获得了关于摆线的一些性质和应用.

摆线的种类丰富，轨迹优美，应用广泛. 下面，我们介绍其中几种美丽的、有用的摆线.

在商场中有一种绘制曲线的工具，它包含一个在圆周上刻满锯齿的小圆板，以及一个在内外圆周上都刻有锯齿的大圆环板（图 3）. 使用时，将小圆板放在大圆环板内部并让锯齿套和，将笔插入小圆板上的一个小洞，当小圆板沿着大圆环板滚动时，铅笔就会描绘出一条曲线. 这曲线是什么形状呢？

小圆板在大圆环板内部滚动，用数学语言表示，就是一个小圆沿着一个大圆的内部无滑动的滚动. 滚动时，小圆圆周上的某个定点所描绘的曲线成为**内摆线**.

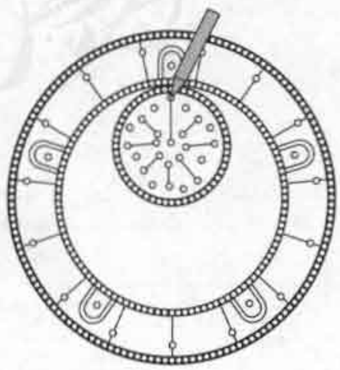
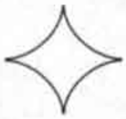
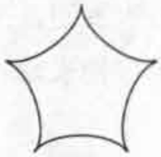
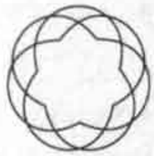
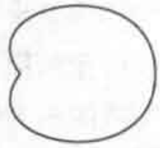


图 3

图 3 中的小圆板，自然也可以与大圆环板

的外圆周套合而滚动，即一个小圆沿着一个大圆的外部无滑动的滚动．滚动时，小圆圆周上的某个定点所描绘的曲线成为**外摆线**.

内外摆线的形状，由固定圆（即大圆）与滚动圆（即小圆）的半径之比决定．下面展示了几种由不同半径比得到的内、外摆线.

图形				
摆线种类	内摆线	内摆线	外摆线	外摆线
固定圆与滚动圆的半径之比	4∶1	5∶1	7∶3	1∶1

可以看到，固定圆与滚动圆的半径之比为 4∶1 的内摆线有四个尖角，就像夜空中一颗光芒四射的星星，因此我们称之为**星形线**．利用星形线的参数方程可以算出公共汽车车门节省的活动面积.

普通的房门是完整的一扇，大门是对开的两扇．而公共汽车采用折叠式的车门，这种门明显的优点是车门开、关所需的活动范围比较小，因而在乘车高峰时能够多载运乘客．利用星形线及有关数学知识，我们可以算出，相同宽度的折叠式车门所需的活动面积仅为普通门的$\frac{5}{16}$.

除了我们已经了解的平摆线、内外摆线，还有各种各样的摆线，它们已被应用在图案设计、摆线齿轮、少齿差行星减速器、摆线转子油泵、旋转活塞发动机的缸体曲线以及多边形切削等方面.

第十五章　逻辑代数基础

窥一斑而见全豹，见一叶而知深秋．我们思维的常用方式是逻辑推理．逻辑代数承担起简化推理的重任，使繁杂的推理回到最简单的0和1．

逻辑与数学之不同，就像孩子和大人一样．逻辑是数学的初期，而数学是逻辑的成年期．

——罗素

逻辑是不可战胜的，因为要反对逻辑还得使用逻辑．

——爱因斯坦

逻辑是研究人们思维过程的一门学科，而数理逻辑是用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律的数学学科. 它的显著特征是符号化和形式化，即把逻辑学所涉及的“概念、判断、推理”用符号来表示，用公理体系（形式系统）来刻画，并基于符号形式的演算来描述推理过程的一般规律. 它与数学的其他分支、计算机科学、人工智能、语言学等学科均有密切的联系，并且日益显示出它的重要作用和更加广泛的应用前景.

本章我们主要学习数理逻辑用语、逻辑代数等基础知识，同时，为配合对计算机及数字电路等知识的学习，本章也涉及了一部分数制的内容.

15.1 常用逻辑用语

问题 1 住在同一房间的 A，B，C 三个人中，有一个人在洗衣服，一个人在写信，另一个人在看书：

(1) A 不在洗衣服，也不在看书；

(2) B 不在洗衣服.

A，B，C 各自在做什么？

这是典型的逻辑推理问题，本节内容是解决此类问题的基础.

15.1.1 命题

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是命题. 因此，本节先学习命题. **命题**就是可以判断真假的语句. 例如，下面的语句都是命题：

(1) 2 是偶数；

(2) 所有的整数都是有理数；

(3) 有的三角形是等腰三角形；

(4) 曲阜是孔子的故乡.

下面的语句也是命题：

(5) $2\in \mathbf{Z}$；

(6) 自然数 3 比 7 大；

(7) 所有的有理数都是整数.

而下面的语句就不是命题：

(8) 这里的风景多美啊！

(9) 2 是无理数吗？

(10) 请仔细想一想！

(11) $x-1=0$；

(12) x^2+3 是整数.

那么，怎样辨别一个语句是否为命题呢？

命题代表人们思维时的一种判断，它是对某事物的某种性质给出肯定或否定的明确陈述．因此，凡是命题给出的判断均有真、假之分．当命题给出的判断正确或符合客观实际时，称该命题**真**（True），否则称该命题**假**（False）．“真、假”常被称为命题的**真值**，其中，“真”常用 1 表示，“假”常用 0 表示.

显然，前面的语句（1）给出的判断是正确的，所以命题（1）真，即命题（1）的真值为“真”；而语句（7）给出的判断是错误的，所以命题（7）假，即命题（7）的真值为“假”.

> 请指出命题（2）～（6）的真值.
>
> 试一试

注 没有真假意义的语句都不是命题．例如，感叹句、疑问句、祈使句等等.

我们约定：命题要么真，要么假，但不能既真又假，也不能模棱两可．例如，语句（11）和（12）的真值都需要根据 x 的取值来确定，而这里并没有给出 x 的取值，所以无法判断它们的真假，因此都不是命题.

需要说明的是，有的语句，尽管现在或将来也未必能判断真假，但它们所作判断是否符合客观实际这一点是确定的，我们也把它们算作命题．例如：

(13) 明年国庆节北京天晴；

(14) 大于等于 6 的偶数均可分解为两个奇质数的和（哥德巴赫猜想）.

一个命题，一般可以用一个小写的英文字母表示，例如

p：2 是偶数且 2 是质数；

q：$7>3$ 或 $7=3$；

r：2 不是无理数.

练习15-1

1. 判断下列语句是不是命题：

(1) $a+b+c$；

(2) $x>0$；

(3) 请进！

(4) 数理逻辑研究的中心问题是推理；

(5) 2008 年 8 月我们去北京旅游吗？

(6) 河水真清啊！

(7) 平行四边形是中心对称图形；

(8) 等腰三角形的两底角相等；

(9) 小于 10 的自然数的全体；

(10) 平方等于 1 的实数构成一个集合.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $1\in\mathbf{N}$；　　(2) $0\notin\mathbf{N}$；

(3) $-7\notin\mathbf{Z}$；　　(4) $0.3\in\mathbf{Z}$；

(5) $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$；　　(6) $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$；

(7) $\{a\}\in\{a, b, c\}$；　　(8) $\varnothing\subsetneqq\{1, 2, 3\}$；

(9) $\{0, 1\}\in\mathbf{N}$；　　(10) $\{x \mid x$ 是矩形$\}\supsetneqq\{x \mid x$ 是正方形$\}$.

15.1.2　量词

前面我们已经知道，“$x-1=0$”和“x^2+3是整数”都不是命题，在数学中经常可以见到这样一些含有变量的语句，只要赋予变量某个值或者一定的条件，这些含有变量的语句就可以变成命题.

以下是一位同学对上述语句添加限制条件后形成的新语句

p_1：对所有的整数 x，$x-1=0$；

议一议　请给语句“$x-1=0$”和“x^2+3 是整数”分别增加限制条件组成新语句，并判断所形成的新语句是否是命题，你还能由此给出更多的命题吗？

q_1：对所有的整数 x，x^2+3 是整数.

易知它们都是命题，并且 p_1 是假命题，q_1 是真命题.

这里的“所有”在陈述中表示所述事物的全体，逻辑中通常叫做**全称量词**，并用符号“$\forall$”表示. 常用的全称量词还有“一切”“每一个”“任何”“都”等等. 含有全称量词的命题，叫做**全称命题**.

> 试一试　请举出几个全称命题的例子，并说出它们的真值.

事实上，全称命题就是陈述某集合所有元素都具有某种性质的命题，用符号表示上述两个全称命题就是

$$p_1:\ \forall x\in \mathbf{Z},\ x-1=0;$$

$$q_1:\ \forall x\in \mathbf{Z},\ x^2+3\in \mathbf{Z}.$$

一般地，设 $p(x)$ 是 x 具有的某种性质，那么，全称命题就是形如

“对集合 M 中的所有 x，$p(x)$”

的命题. 用符号简记为

$$\forall x\in M,\ p(x).$$

> 想一想　“$\forall x\in \mathbf{R}$，$2^x>0$”用语言如何叙述？“$\forall x\in\{$四边形$\}$，$x\in\{$正方形$\}$”呢？

例 1　判断下列全称命题的真假：

(1) $\forall x\in \mathbf{N}$，$x^2+3>2$；

(2) $\forall x\in \mathbf{Q}$，$7x+10\neq 0$；

(3) 任意矩形都是平行四边形；

(4) $\forall a$，$b\in \mathbf{R}$，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

分析　要判定一个全称命题是真命题，必须对限定集合 M 中的每一个元素 x，验证 $p(x)$ 都成立；但要判定一个全称命题是假命题，只要指出限定集合 M 中的一个元素 $x=x_0$，使得 $p(x_0)$ 不成立即可（这就是通常所说的“举一个反例”）.

解　(1) 由于 $\forall x\in \mathbf{N}$，都有 $x^2\geqslant 0>-1$，因而有

$$x^2+3>2,$$

所以命题“$\forall x\in \mathbf{N}$，$x^2+3>2$”是真命题.

(2) 由于 $-\frac{10}{7}\in \mathbf{Q}$，当 $x=-\frac{10}{7}$ 时，$7x+10\neq 0$ 不成立，所以命题“$\forall x\in \mathbf{Q}$，$7x+10\neq 0$”是假命题.

(3) 矩形就是有一个角是直角的平行四边形，所以原命题是真命题.

(4) 由于$\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，都有$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$，所以原命题"$\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$"是真命题.

以下是另外一位同学添加限制条件后形成的新语句

p_2：有一个有理数x，$x-1=0$；

q_2：至少有一个有理数x，x^2+3是整数.

易知它们都是命题，并且命题的真值均为"真".

短语"有一个""至少有一个"在陈述中表示所述事物的个体或者一部分，逻辑中通常叫做**存在量词**，并用符号"$\exists$"表示. 常用的存在量词还有"有些""存在"等等. 含有存在量词的命题，叫做**存在性命题**.

> 试一试
>
> 请举出几个存在性命题的例子，并说出它们的真值.

事实上，存在性命题就是陈述某集合中有（存在）一些元素具有某种性质的命题，用符号表示上述两个存在性命题就是

p_2：$\exists x\in\mathbf{Q}$，$x-1=0$；

q_2：$\exists x\in\mathbf{Q}$，x^2+3是整数.

一般地，设$q(x)$是x具有的某种性质，那么，存在性命题就是形如"集合M中存在元素x，$q(x)$"的命题. 用符号简记为

$$\exists x\in M,\ q(x).$$

> 想一想
>
> "$\exists x\in\mathbf{R}$，$\lg x>1$"用语言如何叙述？你还能举出其他例子吗？

例 2 判断下列存在性命题的真假：

(1) $\exists x\in\mathbf{Z}$，$5x^2+1=21$；

(2) $\exists x\in\mathbf{R}$，$2x^2+9\leqslant 0$；

(3) 有的三角形三条边都相等；

(4) $\exists a$，$b\in\mathbf{R}$，$(a+b)^2=a^2+b^2$.

分析 要判定一个存在性命题是真命题，只要能在限定集合M中找到一个元素$x=x_0$，使得$q(x_0)$成立即可；否则，这一存在性命题就是假的.

解 (1) 由于$x\in\mathbf{Z}$，当$x=2$时，$x^2=4$，因而有

$$5x^2+1=21,$$

所以命题“$\exists x\in \mathbf{Z}$，$5x^2+1=21$”是真命题.

(2) 由于$\forall x\in \mathbf{R}$，都有$x^2\geqslant 0$，因而有

$$2x^2+9\geqslant 9,$$

所以命题“$\exists x\in \mathbf{R}$，$2x^2+9\leqslant 0$”是假命题.

(3) 由于等边三角形的三条边都相等，所以命题“有的三角形三条边都相等”是真命题.

(4) 由于当$a=0$，$b=0$时，$(a+b)^2=a^2+b^2$成立，所以命题“$\exists a$，$b\in \mathbf{R}$，$(a+b)^2=a^2+b^2$”是真命题.

注　一般情况下，$(a+b)^2=a^2+b^2$不成立，事实上，当且仅当$ab=0$时，该等式才成立.

练习15-2

1. 判断下列语句是不是全称命题或存在性命题，如果是，用相应的量词符号表示出来：

(1) 所有自然数的平方是正数；

(2) 任何实数x都是方程$5x-12=0$的根；

(3) 有些自然数是奇数；

(4) 有理数可以用数轴上的点表示.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in \mathbf{N}$，$(x-3)\in \mathbf{N}$；

(2) $\forall x\in \mathbf{Q}$，$x^2-2x\geqslant -1$；

(3) $\forall a$，$b\in \mathbf{R}$，$(a-3)^2+(2-b)^2>0$；

(4) $\exists x\in \mathbf{Z}$，$\frac{1}{5}x$为自然数；

(5) $\exists x\in \mathbf{R}$，x的一个平方根是2.1；

(6) $\exists a$，$b\in \mathbf{R}$，$(a-5)^2+(8-b)^2<0$.

3. 判断下列命题的真假：

(1) 所有无理数都可以用数轴上的点表示；

(2) 实数与数轴上的点一一对应；

(3) 在平面直角坐标系中，任意有序实数对 (x, y)，都有一个点与其对应；

(4) 每一条线段的长度都能用有理数表示；

(5) 两个向量的夹角可以大于 $180°$；

(6) 任意角的度数都小于零.

4. 仿照例 2 (3)，改写第 3 题中的各个命题.

例：有的三角形三条边都相等.

解：$\exists x \in \{x \mid x$ 是三角形$\}$，x 的三条边都相等.

15.1.3 逻辑联结词

在自然语言中，我们经常使用连词“并且”“或者”“非”等. 在数学或者逻辑中我们也经常用到类似的词语：“且”“或”“非”，我们把“且”“或”“非”叫做**逻辑联结词**，用它们来联结命题，构成新命题——复合命题.

两名同学一组，由两人各自秘密写出一个命题（不管真假），再一起分别用“且”与“或”把它们联结起来读一读. 有趣吗？此过程可反复进行数次.

试一试

逻辑联结词“且”“或”“非”均有相应的符号和精确的含义，那么，它们的意义各是什么呢？

1. 且 ($\wedge$)、或 ($\vee$)

对于任意的两个命题 p 和 q，分别用“且”“或”联结这两个命题，得到的复合命题分别记为

$p \wedge q$，读作“p 且 q”；

$p \vee q$，读作“p 或 q”.

例如，设命题

$$p：7>3；$$

$$q：7=3.$$

则复合命题

$$p \wedge q：7>3 \text{ 且 } 7=3；$$

$$p \vee q：7>3 \text{ 或 } 7=3.$$

显然，两个新命题的真值不同：$p\wedge q$ 假，$p\vee q$ 真．造成这种现象的原因就是联结词“且（$\wedge$）”和“或（$\vee$）”意义不同，下面从复合命题与构成它的两个命题的真值关系来分析它们各自的含义．

联结词“且（$\wedge$）”的意义和命题 $p\wedge q$ 的真值状况可由表 15-1 来刻画．

表 15-1

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

表 15-1 叫做 $p\wedge q$ 的**真值表**．由 $p\wedge q$ 的真值表可以看出，**当且仅当** p **和** q **都为真时，**$p\wedge q$ **为真；否则，**$p\wedge q$ **为假．**

例 3　判断下列复合命题的真假：

（1）2 是合数，且 2 是奇数；

（2）四边形四条边相等，且 5 是整数；

（3）菱形的对角线互相垂直平分；

（4）3.8 是正整数．

当 $p\wedge q$ 为假时，p 和 q 的真值情况可能是怎样的呢？

解　（1）因为“2 是合数”为假命题，“2 是奇数”为假命题，所以所给命题为假命题．

（2）因为“四边形四条边相等”为假命题，“5 是整数”为真命题，所以所给命题为假命题．

（3）因为“菱形的对角线互相垂直”为真命题，“菱形的对角线互相平分”为真命题，所以“菱形的对角线互相垂直平分”为真命题．

（4）因为“3.8 是正数”为真命题，“3.8 是整数”为假命题，所以“3.8 是正整数”为假命题．

由例 3 可以看出，在不引起歧义的情况下，逻辑联结词可以省略．判断这类复合命题的真假时，应首先正确地把复合命题表述完整，然后再根据真值表进行判断．

例 4　把下列各组命题用“且”联结成复合命题，并判断其真假：

(1) p：$25>3$，　　　　　q：$y=\lg x$ 为增函数；

(2) p：$\lg 25>\lg 3$，　　　q：$\lg 3<0$；

(3) p：$\lg 25<\lg 3$，　　　q：$\lg 3>1$.

解　(1) $p\wedge q$：$25>3$ 且 $y=\lg x$ 为增函数.

因为"$25>3$"为真命题，"$y=\lg x$ 为增函数"为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

(2) $p\wedge q$：$\lg 25>\lg 3$ 且 $\lg 3<0$.

因为"$\lg 25>\lg 3$"为真命题，"$\lg 3<0$"为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题.

(3) $p\wedge q$：$\lg 25<\lg 3$ 且 $\lg 3>1$.

因为"$\lg 25<\lg 3$"为假命题，"$\lg 3>1$"为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题.

联结词"或（$\vee$）"的意义和命题 $p\vee q$ 的真值状况可由表 15-2 来刻画.

表 15-2

p	q	$p\vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

表 15-2 叫做 $p\vee q$ 的真值表. 由 $p\vee q$ 的真值表可以看出，**当且仅当 p 和 q 都为假时，$p\vee q$ 为假；否则，$p\vee q$ 为真.**

议一议 当 $p\vee q$ 为真时，p 和 q 都为真吗？为什么？

例 5　判断下列复合命题的真假：

(1) 7 是质数或 7 是奇数；

(2) 四边形四条边相等或 8 是整数；

(3) 平行四边形对角线相等或互相平分；

(4) $2\leqslant 5$.

解　(1) 因为"7 是质数"为真命题，"7 是奇数"为真命题，所以"7 是质数或 7 是奇数"为真命题.

(2) 因为“四边形四条边相等”为假命题，“8 是整数”为真命题，所以“四边形四条边相等或 8 是整数”为真命题.

(3) 因为“平行四边形对角线相等”为假命题，“平行四边形对角线互相平分”为真命题，所以“平行四边形对角线相等或互相平分”为真命题.

(4) “$2\leqslant5$”的含义是“$2<5$ 或 $2=5$”，因为“$2<5$”是真命题，“$2=5$”是假命题，所以“$2\leqslant5$”是真命题.

例 6　把下列各组命题用“或”联结成复合命题，并判断其真假：

(1) p：$25>3$，　　　　q：$y=\lg x$ 为增函数；

(2) p：$\lg 25>\lg 3$，　　q：$\lg 3<0$；

(3) p：$\lg 25<\lg 3$，　　q：$\lg 3>1$.

解　(1) $p\vee q$：$25>3$ 或 $y=\lg x$ 为增函数.

因为“$25>3$”为真命题，“$y=\lg x$ 为增函数”为真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

(2) $p\vee q$：$\lg 25>\lg 3$ 或 $\lg 3<0$.

因为“$\lg 25>\lg 3$”为真命题，“$\lg 3<0$”为假命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

(3) $p\vee q$：$\lg 25<\lg 3$ 或 $\lg 3>1$.

因为“$\lg 25<\lg 3$”为假命题，“$\lg 3>1$”为假命题，所以 $p\vee q$ 为假命题.

练习15-3

1. 判断下列命题的真假：

(1) 2 是 6 的约数且是 8 的约数；

(2) 2 是 6 的约数且是 9 的约数；

(3) 3 是奇数或 4 是奇数；

(4) 存在一个函数，它既是奇函数又是偶函数；

(5) $\sqrt{2}$ 是有理数或无理数；

(6) $\{a\}\in\{a, b, c\}$ 或 $\{a\}\supsetneqq\{a, b, c\}$；

(7) 一组对边平行，且另一组对边相等的四边形是等腰梯形；

(8) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

2. 把下列各组命题用“且”联结成复合命题，并判断其真假：

(1) p：$2+3=8$，　　q：$12-9=1$；

(2) p：24 是 3 的倍数，　　q：24 是 7 的倍数；

(3) p：1 730 能被 5 整除，　　q：5 是 2 680 的约数；

(4) p：$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$，　　q：$\pi\notin\mathbf{R}$；

(5) p：$\sin\frac{\pi}{2}=1$，　　q：$\cos\frac{\pi}{2}=0$；

(6) p：$\tan\frac{\pi}{4}=1$，　　q：$\cot\frac{\pi}{4}=2$.

3. 把第 2 题中的各组命题用“或”联结成复合命题，并判断其真假.

4. 根据所给的符号，分别写出 2～3 组相应的命题：

(1) $p\wedge q$；　　(2) $p\vee q$.

2. 非（¬）

问题 2　古时候，有一个人到某国的首都去，在一个三岔路口不知该向左走还是右转. 守卫路口的共有两个士兵：一个永远说真话，一个永远说假话. 现在士兵只准你问一个问题，而且他只答“是”或“不是”. 在你不知道哪个士兵只说真话，哪个士兵只说假话的情况下，你应该如何发问，才能从士兵处获知去首都的道路呢？

这需要合理运用逻辑联结词——“非”.

逻辑联结词“非”（也称为“否定”）就是由自然语言中的“并非”“不是”等抽象而来的，用符号 ¬ 表示.

设 p 表示一个命题，那么 $\neg p$ 表示命题 p 的否定，读作“非 p”. $\neg p$ 也简称命题 p 的非. 例如

p：2 是 6 的约数；

$\neg p$：2 不是 6 的约数.

显然，p 与 $\neg p$ 不能同假或同真，当其中一个为真时，另一个必定为假. 另外，p 与 $\neg p$ 是互为否定的. 即

$$\neg(\neg p)=p.$$

联结词“非（¬）”的意义和命题 $\neg p$ 的真值状况可由表 15-3 来刻画. 如果用数 1 表示真值“真”，用数 0 表示真值“假”，表 15-3 就可以简化

成表 15-4.

表 15-3

p	$\neg p$
真	假
假	真

表 15-4

p	$\neg p$
1	0
0	1

由表 15-3 也可以看出，**p 与 $\neg p$ 不能同假或同真，其中一个为假，另一个必定为真.**

例 7　写出下列命题的非（否定），并判断其真假：

(1) p：π 是无理数；

(2) q：$0.1^3>0.2$；

(3) r：指数函数 $y=2^x$ 过 (0，1) 点；

(4) s：指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数.

解　(1) $\neg p$：π 不是无理数. $\neg p$ 为假.

(2) $\neg q$：$0.1^3\leqslant 0.2$，即

$$\neg q\text{：}0.1^3<0.2 \text{ 或 } 0.1^3=0.2.$$

$\neg q$ 为真.

(3) $\neg r$：指数函数 $y=2^x$ 不过 (0，1) 点. $\neg r$ 为假.

(4) $\neg s$：指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 不是减函数. $\neg s$ 为假.

注　由真值表 15-3 可知，本题(2)中，命题 q 的非不能写成 $(0.1)^3<0.2$，也不能写成 $(0.1)^3=0.2$.

由例 7 可以看出，命题的非是对原命题结论的否定. 那么，对于含有量词的全称命题和存在性命题，应该怎样进行否定呢？

这要从全称命题和存在性命题的意义来看.

全称命题判断的是所述事物的全体具有（或不具有）某种性质，因此对其进行否定时，只需指出所述事物中存在一个不具有（或具有）这种性质即可. 如

p：所有实数的平方都是正数，

$\neg p$：有的实数的平方不是正数；

q：所有的整数都是无理数，

$\neg q$：有的整数不是无理数.

可见，全称命题的否定是存在性命题. 而根据命题与命题的非是互为否定的，可知存在性命题的否定是全称命题.

存在性命题判断的是所述事物的个体或者一部分具有（或不具有）某种性质，因此对其进行否定时，只需指出所述事物的全体都不具有（或具有）这种性质即可.

例 8 写出下列命题的非（否定），并判断其真假：

(1) p：所有的菱形都是正方形；

(2) q：有些平行四边形是矩形；

(3) r：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>0$；

(4) s：$\exists x\in\mathbf{N}_+$，$\lg x<0$.

解 (1) $\neg p$：至少存在一个菱形不是正方形.（真）

(2) $\neg q$：所有的平行四边形都不是矩形.（假）

(3) $\neg r$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2\leqslant 0$.（真）

(4) $\neg s$：$\forall x\in\mathbf{N}_+$，$\lg x\geqslant 0$.（真）

现在，我们来回答问题 2. 问两个人中的任意一个：“那位士兵会说去首都往右转吗?”如果答案为“是”，就应该向左转；如果答案为“不是”，就应该向右转. 你知道其中的原因吗?

我们已经学习了“且”“或”“非”三个主要的逻辑联结词，其实，还有“如果……那么……”“当且仅当”两个逻辑联结词，也是数学学习过程中常用到的. 感兴趣的同学，可以查阅有关资料，并自学之.

练习15-4

1. 写出下列命题的非，并判断其真假：

(1) p：三角函数 $y=\sin x$ 是周期函数；

(2) q：三角函数 $y=\sin x$ 的周期是 2π；

(3) r：2π 是三角函数 $y=\cos x$ 的周期；

(4) s：三角函数 $y=\sin x$ 是减函数.

2. 写出下列命题的非，并判断其真假：

(1) p：一切有理数都可以用分数来表示；

(2) q：所有的无理数都是实数；

(3) r：有些三角形是直角三角形；

(4) s：有的梯形是四边形.

3. 设集合 $M=\{0,1,4,8,16,32\}$. 写出下列命题的非，并判断其真假：

(1) p：$\forall a\in M$，$a>0$；　　(2) q：$\forall b\in M$，b 为偶数；

(3) r：$\exists c\in M$，c 为质数；　　(4) s：$\exists d\in\{奇数\}, d\in M$.

15.2 数制

在人们的生产、生活和学习中，计算机正发挥着越来越重要的作用. 我们知道，计算机对数据的处理非常精确，因此要求人们给计算机的指令也必须是精确的，那么，人们是怎样与计算机进行交流的呢?

15.2.1 十进制与二进制

你知道古人是怎样计数的吗？从初期用 2 块石子表示“二只羊”，用 3 个绳结表示“三只兔子”，发展到现在这样科学的计数方法，人类经过了漫长的探索过程. 在这个过程中，数制是人类的一个重要研究对象. 那么，什么是数制呢?

数制是用一组数码符号和统一的规则来表示数的一种方法，也称为**计数制**. 十进制是众多数制中最常用的一种，十进制中采用了 0，1，2，3，…，9 共 10 个数码符号，进位规律是“逢十进一”. 当用若干个数码符号并在一起表示一个数时，处在不同位置上的数码符号，其代表的值是不同的. 如

$$555$$

$$5\times10^2 \qquad 5\times10^1 \qquad 5\times10^0$$

从左到右的三个“5”所代表的值依次为 500，50，5. 即

$$555=5\times10^2+5\times10^1+5\times10^0.$$

同样地，

$$123.45=1\times10^2+2\times10^1+3\times10^0+4\times10^{-1}+5\times10^{-2}.$$

其中的 10^2，10^1，10^0，10^{-1}，10^{-2} 称为十进制的**权**，每一位上的数码乘以相应的权就是该位数的值. 上面的表达式称为十进制的**按权展开式**.

任意写出一个十进制的整数或者有限小数，请相邻的同学写出它的按权展开式.

试一试

一般地，按照进位方式实现计数的一种方法，称为**进位计数制**. 例如，十进制，二进制，八进制等.

由十进制可以看出，进位计数制应有三个要素：**数码符号**、**进位规律**和**基数**. 基数就是计数制中所用到的数码符号的总数.

与十进制类似，二进制有 0，1 两个数码符号，基数是 2，采用“逢二进一”的进位规律.

两种对立的物理状态可以用 1 和 0 表示，例如，可用电灯开关的闭合状态表示 1，用断开状态表示 0；晶体管的导通表示 1，截止表示 0；电容器的充电和放电、电脉冲的有和无、电位的高与低等一切只有两种对立稳定状态的器件，都可以用二进制的 1 和 0 表示.

观察路口的交通信号灯，如果规定灯亮用 1 表示，灯灭用 0 表示，红绿灯的各种状态见表 15-5.

表 15-5 用二进制数表示交通信号灯的各种状态

红灯	黄灯	绿灯	车辆通行状态
1	0	0	禁止通行
0	1	0	禁止通行
0	0	1	通行

此时可以用二进制数 100，010，001 中的某一个数来描述任意一个十字路口的车辆通行状态.

如果这里的 1011.01 是十进制数，写出它的按权展开式.

做一做

与十进制数类似，二进制数也可以按权(二进制的权是 2^i，其中 i 为整数）展开，例如

$$(1011.01)_2=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}.$$

为了区别各种不同的进位制的数，在每个数的右下角加一个数字（或英文字母）下标来表示相应的数制. 例如

二进制数：$(101.1)_2$，$(1101.01)_B$；

十进制数：$(369.83)_{10}$，$(69.57)_D$.

例 1 将下列各数按权展开：

$$(369.83)_{10}, \qquad (1101.01)_2.$$

解 $(369.83)_{10}=3\times10^2+6\times10^1+9\times10^0+8\times10^{-1}+3\times10^{-2}$.

$(1101.01)_2=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}$.

对比二进制数与十进制数的按权展开式，可以发现，展开式的形式完全相同，所不同的只是它们的权：二进制的权是 2^i，十进制的权是 10^i，其中 $i\in\mathbf{Z}$.

为便于比较和观察，我们把十进制与二进制对照列表，如表 15-6 所示.

表 15-6 十进制与二进制对照表

进制	表示符号	数码符号	进位规律	基数
二进制	B	0，1	逢二进一	2
十进制	D	0，1，2，3，4，5，6，7，8，9	逢十进一	10

练习15-5

1. 将下列十进制数按权展开：

$(123)_{10}$，$(2\ 345)_{10}$，$(34\ 567)_{10}$，$(21.56)_{10}$，$(581.03)_{10}$，

$(25\ 809.064)_{10}$，$(80\ 600\ 321.02)_{10}$，$(90\ 000\ 500.002)_{10}$.

2. 将下列二进制数按权展开：

$(10)_2$， $(11)_2$， $(101)_2$， $(110)_2$，

$(1000)_2$， $(101.1)_2$， $(1010.01)_2$， $(11101.0001)_2$.

15.2.2 十进制与二进制之间的转换

计算机的数据处理采用的是二进制，但用计算机解决实际问题时，对数值的输入输出通常使用的是十进制，这就有一个二进制与十进制相互转换的

过程. 将数由一种数制转换成另一种数制称为**数制间的转换**.

1. 二进制数转换成十进制数

将二进制数转换成十进制数采用“按权相加”法：把二进制数按权展开后，再按十进制加法规则求和，即可得到相应的十进制数.

例 2 把二进制数 10111.101 转换成十进制数.

解
$$
\begin{aligned}
(10111.101)_2 &= 2^4+2^2+2^1+2^0+2^{-1}+2^{-3}\\
&=16+4+2+1+0.5+0.125\\
&=(23.625)_{10}.
\end{aligned}
$$

所以 $(10111.101)_2=(23.625)_{10}$.

2. 十进制数转换成二进制数

十进制数转换为二进制数时，整数和小数的转换方法是不同的，一般先把十进制数的整数部分和小数部分分别转换后，再加以合并.

例 3 把十进制数 25 转换成二进制数.

解 除 2 取余，得

$$
\begin{array}{r|l c c}
2 & \underline{25} & & 余数 \\
2 & \underline{12} & & 1 \\
2 & \underline{\ \ 6} & & 0 \\
2 & \underline{\ \ 3} & & 0 \\
2 & \underline{\ \ 1} & & 1 \\
 & \ \ 0 & & 1
\end{array}
\uparrow 自下向上读数
$$

因此 $25=2^4+2^3+2^0$，所以 $(25)_{10}=(11001)_2$.

由例 3 可以看出：十进制整数转换为二进制整数采用“除 2 取余，逆序排列”法. 即不断地用 2 去除十进制整数，直到商为 0 时为止，然后把所有余数按逆序排列，即把最后得到的余数作为最高位，先得到的余数作为最低位，依次排列起来，便可得到相应的二进制数.

想一想 观察十进制整数转换成二进制数的过程，把它与二进制数转换成十进制数的过程相比较，你能说出“除 2 取余，逆序排列”法的道理吗?

例 4 把十进制数 0.7 转换成二进制数(保留 4 位小数).

解 乘 2 取整，得

$$
\begin{array}{r c c}
 & \text{整数} & \\
0.7 & & \\
\underline{\times\ 2} & & \\
1.4 & 1 & \\
0.4 & & \\
\underline{\times\ 2} & & \text{自} \\
0.8 & 0 & \text{上向下} \\
\underline{\times\ 2} & & \text{读数} \\
1.6 & 1 & \\
0.6 & & \\
\underline{\times\ 2} & & \\
1.2 & 1 & \downarrow
\end{array}
$$

因此 $0.7\approx2^{-1}+2^{-3}+2^{-4}$，所以 $(0.7)_{10}\approx(0.1011)_2$.

由例 4 可以看出：十进制纯小数转换成二进制小数采用“乘 2 取整，顺序排列”法. 具体做法是：用 2 去乘十进制纯小数，将积的整数部分取出，再用 2 去乘余下的小数部分，再将积的整数部分取出，如此进行，直到积中的小数部分为零或者达到所要求的精度为止. 然后把取出的整数部分按顺序排列起来，先取的整数作为二进制小数的高位，后取的整数作为低位即可.

想一想 观察十进制小数转换成二进制数的过程，把它与二进制数转换成十进制数的过程相比较，你能说出“乘 2 取整，顺序排列”法的道理吗？

例 5 把十进制数 19.125 转换成二进制数.

解 分别将整数部分与小数部分转换.

整数部分	余数		小数部分	整数	
2 | 19		自下向上读数	0.125		自上向下读数
2 | 9	1		× 2		
2 | 4	1		0.250	0	
2 | 2	0		× 2		
2 | 1	0		0.500	0	
0	1		× 2		
			1.000	1	

所以 $(19.125)_{10}=(10011.001)_2$.

计算机程序附件中的计算器可以将一些数在不同的数制之间转换，另外，计算器也可以帮助我们完成这方面的一些工作. 感兴趣的同学课外研究一下吧.

练习15-6

1. 将下列二进制数转换成十进制数：

(1) 10；　(2) 100；　(3) 101；

(4) 10.1；　(5) 101.01；　(6) 111011.101.

2. 将下列十进制数转换成二进制数：

(1) 3；　(2) 5；　(3) 8；

(4) 12；　(5) 125；　(6) 0.3；

(7) 0.76；　(8) 8.76；　(9) 37.25.

15.3 逻辑代数

自然界中事物的发展变化总是有一定的因果关系. 比如，通常情况下，电灯是否亮取决于电路是否接通. 电路是否接通是原因，电灯的亮与灭是结果. 反映和处理一般逻辑关系的数学工具，就是逻辑代数.

1847 年，英国数学家乔治·布尔（G. Boole，1815—1864）提出了用数学分析方法表示命题陈述的逻辑结构，并成功地将形式逻辑归结为一种代数演算，从而诞生了著名的“布尔代数”.

15.3.1　基本概念与基本逻辑运算

问题　某教师要记录某一天晚上 9 点各教室亮灯的情况．假如该学校共有 8 间教室，请帮助设计记录表．要求：在保证能够看清楚是否每一个教室都已经查看的前提下，尽可能地使记录简洁．

这里有该教师用同学设计的表格做的记录表（记录时间省略）．请比较哪一种表格更符合设计要求．

表 15-7　晚上 9 点各教室亮灯情况记录表

教室	教室 1	教室 2	教室 3	教室 4	教室 5	教室 6	教室 7	教室 8
亮灯情况	亮	灭	亮	亮	灭	亮	亮	灭

表 15-8　晚上 9 点各教室亮灯情况记录表（亮：1；灭：0）

教室	教室 1	教室 2	教室 3	教室 4	教室 5	教室 6	教室 7	教室 8
亮灯情况	1	0	1	1	0	1	1	0

可以看出：表 15-8 用 1 表示灯亮，用 0 表示灯灭．显然，用数码符号表示灯的亮与灭的状态更简洁方便．逻辑代数就是用数字或符号来表示这样一些概念，并在此基础上进行逻辑运算，这为人们利用电脑代替人们的一些脑力劳动提供了理论基础．

和普通代数类似，在逻辑代数中也用英文字母表示变量，这种变量称为**逻辑变量**，常用大写的字母 A，B，C，…表示．逻辑变量的取值只有 0 和 1 两种情况．而且这里的 0 和 1 并不是表示它们之间的大小关系，而是表示事物矛盾双方的一种符号，比如灯泡的亮与灭、开关的闭合与断开、电流的有与无、命题的真与假等等．而且我们常用 0 表示假，1 表示真．我们把 0 和 1 称为**逻辑常量**．

在初等代数中，有加、减、乘、除等算术运算，逻辑代数中则有“与”“或”“非”三种基本运算，它们不是一般数值的运算，而是逻辑关系的运算，这种运算称为**逻辑运算**．

1．“与”逻辑运算（“与”运算）

设 A，B 是两个逻辑变量，用 $A \cdot B$ 表示两个变量的**逻辑与**，也叫**逻辑**

乘. A 和 B 都称为 $A \cdot B$ 的**因子**.

“与”运算的法则是

$0 \cdot 0=0$;　$0 \cdot 1=0$;

$1 \cdot 0=0$;　$1 \cdot 1=1$.

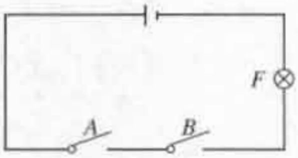


图 15-1

在普通代数中，$0 \cdot a=0$ 恒成立，在逻辑代数中，当 A 为任意逻辑变量时，$0 \cdot A=0$ 是否恒成立?

我们可以用两个开关串联控制一个灯的照明电路来说明“与”运算的实际意义. 如图 15-1 所示，电路串联两个开关 A，B，再串联一只灯泡 F. 可以看出，只有当开关 A 和 B 都闭合时，灯 F 才会亮；一个断开或两个都断开时，灯都不会亮. 因此，灯 F 与开关 A，B 之间是“与”运算关系.

将逻辑运算式中变量的所有取值组合与其相应运算结果一一列出，并以表格的形式表示，这种表称为逻辑运算的**真值表**，其中用 1 表示真值“真”，用 0 表示真值“假”. 例如

$$Y=A \cdot B$$

的真值表如表 15-9 所示. 同样地，表 15-1 可表示成表 15-10.

表 15-9

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

表 15-10

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

观察表 15-10 可知，命题 p，q，以及用“且”联结这两个命题得到的复合命题的真值情况，同“与”运算的真值结果是一致的. 因此，我们可以把由两个命题用“且”联结得到复合命题看做逻辑运算中的“与”运算.

2. “或”逻辑运算（“或”运算）

设 A，B 是两个逻辑变量，用 $A+B$ 表示两个变量的**逻辑或**，也叫

逻辑加.

“或”运算的运算法则是

$$0+0=0;\quad 0+1=1;$$
$$1+0=1;\quad 1+1=1.$$

我们可以用两个开关并联控制一个灯的照明电路来说明“或”运算的实际意义．如图 15-2 所示，电路并联两个开关 A，B，再串联一只灯泡 F．可以看出，当开关 A 和 B 中有一个闭合或者两个都闭合时，灯 F 就亮；只有当两个开关都断开时，灯才不会亮．因此，灯 F 与开关 A，B 之间是“或”运算关系．

想一想　在普通代数中，$0+a=a$ 恒成立，在逻辑代数中，当 A 为任意逻辑变量时，$0+A=A$ 是否恒成立？

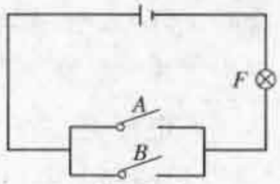


图 15-2

$Y=A+B$ 的真值表如表 15-11 所示．同样地，表 15-2 可表示成表 15-12.

表 15-11

A	B	$A+B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

表 15-12

p	q	$p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

观察表 15-12 可知，命题 p，q，以及用“或”联结这两个命题得到的复合命题的真值情况，同“或”运算的真值结果是一致的．因此，我们可以把由两个命题用“或”联结得到复合命题看做逻辑运算中的“或”运算.

3．“非”逻辑运算（“非”运算）

设 A 是逻辑变量，用 $\overline{A}$ 表示变量 A 的**逻辑非**，也叫**逻辑反**.

“非”运算的运算法则是

$$\overline{0}=1;\qquad \overline{1}=0.$$

若把逻辑变量 A 叫做**原变量**，则变量 $\overline{A}$ 叫做 A 的**反变量**.

显然“非”逻辑运算的真值表（表 15-13）与命题的“非”的真值表的情况是一致的．因此，我们可以把命题的“非”看做逻辑运算中的“非”运算.

表 15-13

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

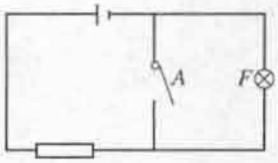


图 15-3

下面我们用图 15-3 中所示电路，来说明“非”运算的实际意义. 开关 A 与电灯 F 并联，当开关 A 断开时，灯 F 亮；当开关 A 闭合时，灯 F 灭. 则电路中灯 F 与开关 A 的关系为“非”运算关系.

在电子电路中，把能实现“与”“或”“非”三种基本逻辑运算的逻辑电路分别叫做与门、或门、非门（也叫反相器）. 图 15-4 中给出的是这三种电路的常用符号，也就是基本逻辑图形符号.

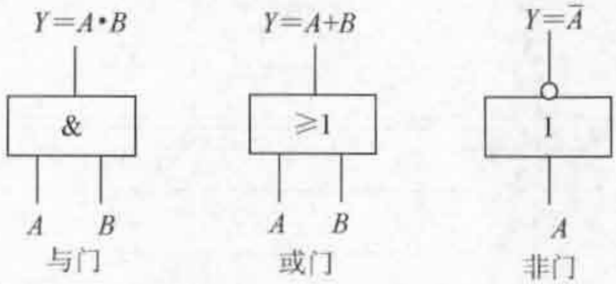


图 15-4

> 假设开关断开用 0 表示，开关闭合用 1 表示；灯亮用 1 表示，灯灭用 0 表示，请作出 $\overline{A \cdot B}$ 的真值表.
>
> 试一试

> 1938 年，美国科学家香农（Shannon，1916—2001）发表了著名的论文《继电器和开关电路的符号分析》，首次用布尔代数进行开关电路分析，并证明布尔代数的逻辑运算，可以通过继电器电路来实现，明确地给出了实现加、减、乘、除等运算的电子电路的设计方法.
>
> 读一读

练习 15-7

1. 指出下列描述中所包含的逻辑关系：

(1) 甲、乙两人只有同时开锁，才能打开保险箱；

(2) 王书记或张校长可以参加这个会议；

(3) 小李去上网，我就不去.

2. 设 A，B，C 是逻辑变量，根据与、或、非的运算法则填写真值表：

(1)

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$

(2)

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$

(3)

A	B	C	$A \cdot B \cdot C$	$A+B+C$

3. 为方便居民出入和节省能源，某市给居民楼楼梯上的电灯安装了声控和光控开关，当光线暗到一定程度时，只要声音达到一定的分贝，电灯就会自动亮起来；而当光线明亮时，无论声音多大，灯都不亮．你能说明该部分电路所满足的逻辑运算关系吗？

15.3.2 逻辑代数的运算律和基本定理

我们已经学习了“与”“或”“非”三种基本逻辑运算，和普通代数类似，可以将较为复杂的逻辑代数式化简，下面我们来学习逻辑代数的运算律和基本定理.

1. 运算律

表 15-14 给出了逻辑代数的运算律，这些运算律都可以用真值表来证明.

表 15-14 逻辑代数的运算律

序号	运算律	公式	
1	0-1 律	$0\cdot A=0$	$1+A=1$
2	自等律	$1\cdot A=A$	$0+A=A$
3	重叠律	$A\cdot A=A$	$A+A=A$
4	互补律	$A\cdot\overline{A}=0$	$A+\overline{A}=1$
5	交换律	$A\cdot B=B\cdot A$	$A+B=B+A$
6	结合律	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	$A+(B+C)=(A+B)+C$
7	分配律	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$
8	反演律	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
9	还原律	$\overline{\overline{A}}=A$	

在初中代数的四则运算中，通常是按照先乘除，后加减的运算顺序进行计算. 同样地，在进行逻辑运算时，一般遵循以下规定：

(1) 逻辑运算优先法则由高到低依次是

括号→非→与→或；

(2) “与”运算符一般可以省略，如 $Y=A\cdot B$ 可写成 $Y=AB$；

(3) “非”运算符下可以不加括号，如 $Y=\overline{A\cdot B}$，$Y=\overline{A+B}$等.

> **想一想** 表 15-14 中的分配律 $A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$ 与实数的运算法则相比较，有什么不同吗?

根据逻辑代数的运算律，可以推导出逻辑代数的基本定理.

2. 基本定理

基本定理 1 $AB+A\overline{B}=A$.

证明　$AB+A\overline{B}$

$=A(B+\overline{B})$　　（分配律）

$=A.$　　（互补律）

这个定理可推广为：**若两个乘积项分别含有同一因子的原变量和反变量**（如上式中的 B 和$\overline{B}$），**而其他因子都相同**（称为**公共因子**），**则这两个乘积项可以合并成只含有公共因子的一项.**

例如 $ABC+A\overline{BC}=A.$

基本定理 2　$A+AB=A.$

证明　$A+AB$

$=A\cdot 1+AB$　　（自等律）

$=A(1+B)$　　（分配律）

$=A\cdot 1$　　（0-1 律）

$=A.$　　（自等律）

这个定理可推广为：**两个乘积项相加时，如果一项是另一项的因子，则另一项是多余的.**

例如

$$\begin{aligned}&AC+ABC\\=&AC+ACB\\=&AC(1+B)\\=&AC.\end{aligned}$$

基本定理 3　$A+\overline{A}B=A+B.$

证明　$A+\overline{A}B$

$=(A+\overline{A})(A+B)$　　（分配律）

$=1\cdot(A+B)$　　（互补律）

$=A+B.$　　（自等律）

这个定理可推广为：**两个乘积项相加时，如果一项的反是另一项的因子，则另一项中的这个因子是多余的.**

例如 $AB+\overline{AB}C=AB+C.$

基本定理 4　$AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C.$

证明　$AB+\overline{A}C+BCD$

$=AB+\bar{A}C+(A+\bar{A})BCD$ （互补律）

$=AB+\bar{A}C+ABCD+\bar{A}BCD$ （分配律）

$=(AB+ABCD)+(\bar{A}C+\bar{A}CBD)$ （交换律）

$=AB+\bar{A}C.$ （基本定理 2）

这个定理可推广为：**若两个乘积项分别含有同一因子的原变量和反变量（如上式中的 A 和 $\bar{A}$），而这两项的其他因子又都是第三个乘积项的因子，则这三个乘积项相加时第三个乘积项是多余的.**

例如 $AB+\bar{A}CD+BCD=AB+\bar{A}CD.$

例 1 化简 $ABC+\bar{A}B+AB\bar{C}.$

解 $ABC+\bar{A}B+AB\bar{C}$

$=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}B$

$=AB(C+\bar{C})+\bar{A}B$

$=AB+\bar{A}B$

$=B.$

例 2 求证：$\overline{A\bar{B}+B\bar{C}\cdot\overline{AB}}=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}C+BC+AB.$

证明 左边 $=\overline{A\bar{B}}\cdot\overline{B\bar{C}\cdot\overline{AB}}$

$=(\bar{A}+B)(\overline{B\bar{C}}+\overline{\overline{AB}})$

$=(\bar{A}+B)(\bar{B}+C+AB)$

$=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}C+\bar{A}AB+B\bar{B}+BC+AB$

$=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}C+BC+AB$

$=$右边，

所以 $\overline{A\bar{B}+B\bar{C}\cdot\overline{AB}}=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}C+BC+AB.$

练习15-8

1. 化简下列各式：

（1）$BC+\bar{B}C$； （2）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$；

（3）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C}$； （4）$A\bar{B}+B+\bar{A}B.$

2. 化简下列各式：

（1）$\overline{\bar{A}BC}+\overline{A\bar{B}}$； （2）$A\bar{B}(\bar{A}CD+\overline{AD+\bar{B}\bar{C}})(\bar{A}+B).$

15.3.3　逻辑函数

1. 逻辑函数的概念

函数思想的建立，是数学从常量数学进入变量数学的转折点，它使数学能有效地揭示事物运动变化的规律，反映事物的联系. 在逻辑代数中，逻辑函数的引入使得各种逻辑变量之间的关系可以借助于代数方法进行研究，避免了逻辑学中因对文字的不同理解而造成的不必要的错误.

如果有若干个逻辑变量 A，B，C，…按与、或、非三种基本运算组合在一起，得到一个表达式 Y. 对逻辑变量 A，B，C，…的任意一组取值，Y 都有唯一的值与之对应，则称 Y 为 A，B，C，…的**逻辑函数**. 记为

$$Y=F(A, B, C, \cdots),$$

其中 A，B，C，…称为**逻辑自变量**，Y 称为**逻辑因变量**. 在不引起歧义时，它们也可简称为自变量和因变量.

逻辑函数具有以下两个特点：

（1）逻辑函数的值域中只有 0 和 1 两个值；

（2）逻辑函数和变量之间的关系是由“与”“或”“非”三种基本运算决定.

2. 逻辑函数最小项

设 A，B，C 为逻辑变量，三个变量可以构成许多乘积项，例如

$$ABC, \ \bar{A}B\bar{C}, \ \bar{A}\bar{B}C, \ \overline{AB}CA, \ A(B+C), \ \cdots,$$

在这些乘积项中，有一类乘积项如表 15-15 所示.

表 15-15

编号	m_0	m_1	m_2	m_3
乘积项	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
编号	m_4	m_5	m_6	m_7
乘积项	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC

由表 15-15 可见，表中所列各个乘积项的共同特点是：

（1）每一项都只有三个因子，而且包含了全部三个变量；

（2）每个变量都作为一个因子在每个乘积项中只出现一次.

具备上述两个特点的这八个乘积项中的任何一项，称为三变量 A，B，C

的**逻辑函数最小项**. 同理可以定义 n（$n\in\mathbf{N}_+$）个变量的逻辑函数最小项.

如果原变量用 1 表示，反变量用 0 表示，并将二进制数转换成十进制数，用这个十进制数作为下标，那么

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\leftrightarrow 000\leftrightarrow m_0,$$

$$\overline{A}\,\overline{B}C\leftrightarrow 001\leftrightarrow m_1,$$

$$\overline{A}B\overline{C}\leftrightarrow 010\leftrightarrow m_2,$$

$$\overline{A}BC\leftrightarrow 011\leftrightarrow m_3,$$

$$A\overline{B}\,\overline{C}\leftrightarrow 100\leftrightarrow m_4,$$

$$A\overline{B}C\leftrightarrow 101\leftrightarrow m_5,$$

$$AB\overline{C}\leftrightarrow 110\leftrightarrow m_6,$$

$$ABC\leftrightarrow 111\leftrightarrow m_7.$$

试写出二变量 A，B 的逻辑函数最小项，四变量的呢？

试一试

此时，$m_i(i=0,1,2,3,4,5,6,7)$ 称为**三变量最小项编号**.

如果逻辑函数有 n 个变量，则可构成 2^n 个最小项. 例如，含有四个变量的最小项共有 $2^4=16$ 个. 同样，含有四个变量的最小项编号如同三个变量的最小项编号方法一样，如

$$\overline{A}BC\overline{D}\leftrightarrow 0110\leftrightarrow m_6,$$

$$A\overline{B}CD\leftrightarrow 1011\leftrightarrow m_{11}.$$

今后在不产生歧义时，我们常用最小项编号代替相应的最小项. 如 $\overline{A}BC=m_3$. 但必须根据函数所含有的变量数来确定相应的最小项. 如

$$m_6=AB\overline{C}, \qquad \text{（三变量函数）}$$

$$m_6=\overline{A}BC\overline{D}. \qquad \text{（四变量函数）}$$

下面以三变量最小项为例，说明最小项的性质：

（1）全体最小项的“或”运算结果为 1，即

$$m_0+m_1+m_2+\cdots+m_7=1.$$

（2）任意两个最小项的“与”运算结果为 0，例如

$$m_2m_5=(\overline{A}B\overline{C})(A\overline{B}C)$$

$$=(A\overline{A})(B\overline{B})(C\overline{C})=0.$$

想一想 在含有三变量的逻辑函数中，它的最小项 m_2 与 m_6 是逻辑相邻的吗？

若两个最小项只有一个因子不同而其他

因子相同，则称这两个最小项是**逻辑相邻的**．例如 $m_3=\overline{A}BC$ 和 $m_7=ABC$ 比较，只有 A 与 $\overline{A}$ 不同，因此在只有三个变量的情况下，m_3 和 m_7 是逻辑相邻的．

（3）两个逻辑相邻的最小项的“或”可以合并成一个“与”项，并消去一个因子．例如

$$m_7+m_3=ABC+\overline{A}BC=(A+\overline{A})BC=1\cdot BC=BC.$$

练习15-9

1. 口答下列各题：

（1）四变量乘积项 $\overline{A}\overline{B}CD$ 是逻辑函数 $F(A,\ B,\ C,\ D)$ 的最小项吗？$\overline{A}\overline{B}C$ 呢？

（2）逻辑函数 $F(A,\ B,\ C)$ 有多少个最小项？$F(A,\ B,\ C,\ D,\ E)$ 有多少个最小项？

2. 作出逻辑函数 $Y=A(B+C)$ 的真值表．

3. 逻辑函数 $F(A,\ B)$ 有多少个最小项？并写出这些最小项．

4. 写出四变量 A，B，C，D 的逻辑函数最小项，并写出 m_7 的逻辑相邻项．

15.3.4　逻辑函数的表示方法

初等函数有三种表示方法（解析法、列表法和图象法），类似地，逻辑函数的表示方法主要有真值表法、表达式法和卡诺图法等．下面我们介绍后两种方法．

1．逻辑函数表达式

关于逻辑自变量（A，B，C，…）与逻辑因变量 Y 之间的函数关系式称为**逻辑函数表达式**．记作

$$Y=F(A,\ B,\ C,\ \cdots).$$

事实上，逻辑函数表达式是由逻辑变量的“与”“或”“非”三种运算符以及括号所构成的式子，用以揭示逻辑自变量与逻辑因变量之间的关系．例如 $Y=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}$，该逻辑函数表达式有两个自变量 A，B，函数 Y 和变量

A，B 的关系是：当变量 A 和 B 取值不同时，函数 Y 的值为“1”；A 和 B 取值相同时，函数 Y 的值为“0”. 我们把这种逻辑关系称为**“异或”逻辑关系**.

由若干“与”项进行“或”运算构成的表达式，叫“与－或”表达式. 其中，每个“与”项可以是单个变量的原变量或者反变量，也可以由多个原变量或者反变量相“与”组成. 例如，$\overline{A}B$，$A\overline{B}C$，$\overline{C}$均是“与”项，将这三个“与”项做“或”运算，便可构成一个三变量函数的“与－或”表达式，即$\overline{A}B+A\overline{B}C+\overline{C}$.

常用的逻辑函数表达式主要有以下几种（表 15-16）：

表 15-16 常用的逻辑函数表达式

逻辑关系	表达式	函数 Y 与自变量 A，B 的关系
与	$Y=AB$	当且仅当变量 A 和 B 取值都为“1”时，函数 Y 的值为 1，否则为 0
或	$Y=A+B$	当且仅当变量 A 和 B 取值都为“0”时，函数 Y 的值为 0，否则为 1
非	$Y=\overline{A}$	当变量 A 的取值为“0”时，函数 Y 的值为 1，否则为 0
与或	$Y=AB+CD$	
或与	$Y=(A+B)\cdot(C+D)$	
与非	$Y=\overline{A\cdot B}$	当且仅当变量 A 和 B 取值都为“1”时，函数 Y 的值为 0，否则为 1
或非	$Y=\overline{A+B}$	当且仅当变量 A 和 B 取值都为“0”时，函数 Y 的值为 1，否则为 0
与或非	$Y=\overline{AB+CD}$	
异或	$Y=\overline{A}B+A\overline{B}$	当且仅当变量 A 和 B 取值不同时，函数 Y 的值为 1，否则为 0
同或	$Y=AB+\overline{A}\overline{B}$	当且仅当变量 A 和 B 取值不同时，函数 Y 的值为 0，否则为 1

例 3 已知逻辑函数 $F(A)=A(A+\overline{A})$，求 $F(0)$.

解 $F(0)=0(0+\overline{0})=0(0+1)=0\cdot 1=0$.

另外，我们也可以先对函数表达式进行化简，然后再求函数值．即因为

$$F(A)=A(A+\overline{A})=A\cdot 1=A,$$

所以 $F(0)=0$.

> 在例 3 中，你能求出 $F(1)$ 吗？
>
> 试一试

例 4　已知逻辑函数表达式 $Y=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot C$，试写出相应逻辑函数的真值表.

解　根据逻辑函数表达式，列出相应的逻辑函数真值表（表 15-17）：

表 15-17

A	B	C	$A\cdot\overline{B}$	$\overline{A}\cdot C$	$Y=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot C$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

由例 4 可以看到，由逻辑函数的表达式写出函数的真值表，首先把逻辑函数中全部自变量的各种可能取值列入表中，然后把每组变量取值代入逻辑函数表达式中，求出相应函数值并填入表中，即可得到相应的真值表．由于每个逻辑变量只有 0 和 1 两种取值，所以 n 个逻辑变量共有 2^n 种不同的取值组合，但逻辑函数的值域中只有 0 和 1 两个值.

> 写出逻辑函数 $Y=\overline{A}B+A\overline{B}$ 的真值表.
>
> 试一试

做逻辑函数的真值表时，我们也可以把表 15-17 中的第 4 列和第 5 列省略不写.

任意一个逻辑函数均可表示成唯一的一组最小项之和的形式，称它为**标准“与－或”表达式**，或称为**最小项表达式**.

例如

$$F(A,B,C)=\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+ABC=m_2+m_4+m_7$$

就是一个最小项表达式.

为了获得逻辑函数的最小项表达式，首先将逻辑函数转换成“与－或”表达式，然后将缺少变量的“与”项配项，直到每一项都成为包含所有变量的“与”项，即最小项为止.

例 5 将逻辑函数 $F(A, B, C)=AB+B\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}$ 表示为最小项表达式.

解 $F(A, B, C)=AB+B\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}$

$$
\begin{aligned}
&=AB(C+\overline{C})+(A+\overline{A})B\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}\\
&=ABC+AB\overline{C}+AB\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}\\
&=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}\\
&=m_2+m_6+m_7.
\end{aligned}
$$

我们知道，已知逻辑函数的表达式能写出相应的真值表，同样地，由逻辑函数的真值表也可以写出逻辑函数的表达式.

先把真值表中函数值 Y 等于 1 所对应的自变量组合一一取出来，把同一组合中的自变量做“与”运算，在自变量组合中，取值为 1 的自变量用变量自身表示，取值为 0 的自变量，在其上加取反符号“$^{-}$”. 然后，再把所有的组合做“或”运算，便得到相应的逻辑函数的“与－或”表达式.

例 6 已知逻辑函数真值表如表 15-18，试写出相应逻辑函数“与－或”表达式.

表 15-18

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

解 函数 Y 的值为 1 时只有四种情况，对应 A，B，C 的取值分别是

$$001 \leftrightarrow \overline{A}\,\overline{B}C,$$
$$011 \leftrightarrow \overline{A}BC,$$
$$100 \leftrightarrow A\overline{B}\,\overline{C},$$
$$101 \leftrightarrow A\overline{B}C.$$

因此，与表 15-18 所示的真值表所对应的逻辑函数“与一或”表达式为

$$Y=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C.$$

从例 4、例 6 可以看到，两个不同的逻辑函数表达式 $Y=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot C$ 与 $Y=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C$ 可以有相同的真值表，说明它们的逻辑运算功能是一样的. 也就是说，表示相同逻辑运算功能的逻辑函数表达式并不一定相同. 为了体现表达函数的唯一性，我们常采用标准“与一或”表达式来表示一个逻辑函数，如例 6 中的表达式就是标准的“与一或”表达式.

逻辑函数的表示方法除了真值表、逻辑函数表达式外，常用的还有卡诺图表示法.

2. 卡诺图

下面，我们介绍另一种表示逻辑函数的方法——卡诺图法. 卡诺图是由表示逻辑变量所有取值组合的小方格所构成的平面图. 卡诺图是真值表的一种变换，比真值表更明确地表示出逻辑函数的内在联系，使用卡诺图可以避免繁琐的逻辑代数运算.

为了便于化简，把逻辑函数的所有最小项表示为小方格，小方格在排列时，应使几何位置相邻的小方格在逻辑上也是相邻的，这样得到的图表称为**卡诺图**.

卡诺图有以下几个特点：

(1) 紧挨着的小方格是几何相邻的，称为**平面几何相邻**；

(2) 最上边与最下边、最左边与最右边都分别是相邻的，称为**立体几何相邻**.

这里所说的几何相邻是指两个小方格的几何位置是相邻的.

如图 15-5 所示，当我们将一张画有表格的纸横向卷成圆筒状时，最左边与最右边就挨在了一起，即 1 与 4、5 与 8、9 与 12、13 与 16 都是几何相邻的；当我们将一张画有表格的纸纵向卷成圆筒状时，最上边与最下边也挨在

了一起，即1与13、2与14、3与15、4与16都是几何相邻的.

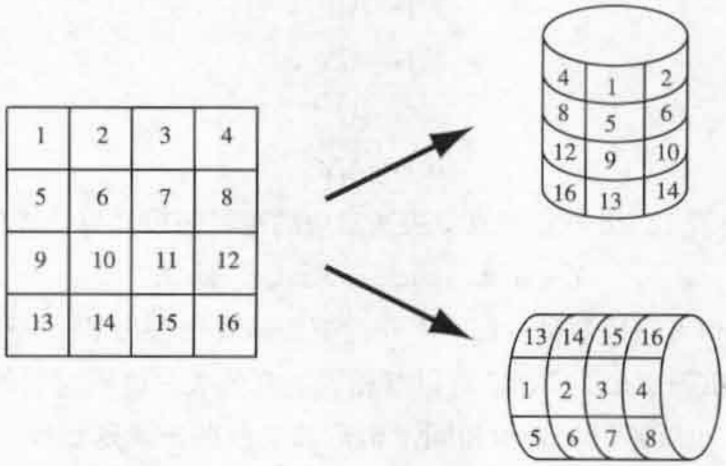


图 15-5

画卡诺图时，根据函数中变量的数目 n，将图形分成 2^n 个方格，每个方格和一个最小项一一对应，方格的编号和最小项的编号相同，由方格外面行变量和列变量的取值决定.

下面分别是二变量（图 15-6）、三变量（图 15-7）和四变量（图 15-8）的卡诺图.

A\B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

图 15-6

A\BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

图 15-7

AB\CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

图 15-8

由逻辑函数真值表可以看出该逻辑函数的全部最小项及相应的函数值. 画已知逻辑函数的卡诺图时，凡是使 $Y=1$ 的那些最小项，在相应的方格中填1；而对于使 $Y=0$ 的那些最小项，则在相应的方格中填0（或者不填）.

注 五变量及其以上的卡诺图这里不做介绍，读者可自行查阅有关资料.

例 7 根据下面的真值表（表 15-19）画出逻辑函数的卡诺图.

表 15-19

	A	B	C	Y
m_0	0	0	0	0
m_1	0	0	1	0
m_2	0	1	0	0
m_3	0	1	1	0
m_4	1	0	0	0
m_5	1	0	1	1
m_6	1	1	0	1
m_7	1	1	1	1

解　由真值表可以看出，使 $Y=1$ 的最小项有 m_5，m_6，m_7. 将 1 填入卡诺图 15-7 与 m_5，m_6，m_7 对应的小方格中，得到所求的卡诺图，如图 15-9.

$A\backslash BC$	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1

图 15-9

如果逻辑函数不是“与一或”式，应先将逻辑函数变换成“与一或”式，然后把含有各个“与”项的最小项在相应的小方格内填 1，即得逻辑函数的卡诺图.

例 8　画出 $Y=A\bar{B}C+\bar{A}BC+AB$ 的卡诺图.

解　$Y=A\bar{B}C+\bar{A}BC+AB$

$=A\bar{B}C+\bar{A}BC+AB(C+\bar{C})$

$=A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC+AB\bar{C}$

$=m_5+m_3+m_7+m_6$.

因此，在 m_3，m_5，m_6，m_7 相应的小方格内填 1，即可得到已知逻辑函数的卡诺图，如图 15-10.

$A\backslash BC$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

图 15-10

为了更清楚地看出卡诺图与逻辑函数表达式之间的关系，我们可以将卡诺图改造. 以四变量为例，如图 15-11，画逻辑函数

$$F(A，B，C，D)=AB\bar{C}+BCD$$

改造后的卡诺图，方法如下：

(1) 找到含有 AB 的行和含有$\bar{C}$的列交叉处的

小方格，填上 1，它们就是含有 $AB\overline{C}$ 的最小项；

（2）找到含有 B 的行和含有 CD 的列交叉处的小方格，填上 1，它们就是含有 BCD 的最小项. 结果见图 15-12.

AB \ CD		$\overline{C}\overline{D}$ 00	$\overline{C}D$ 01	CD 11	$C\overline{D}$ 10
$\overline{A}\overline{B}$	00	m_0	m_1	m_3	m_2
$\overline{A}B$	01	m_4	m_5	m_7	m_6
AB	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\overline{B}$	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

图 15-11

AB \ CD		$\overline{C}\overline{D}$ 00	$\overline{C}D$ 01	CD 11	$C\overline{D}$ 10
$\overline{A}\overline{B}$	00				
$\overline{A}B$	01			1	
AB	11	1	1	1	
$A\overline{B}$	10				

图 15-12

例 9 画出下列四变量逻辑函数的卡诺图：

（1）$Y=C$；

（2）$Y=\overline{B}+CD+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}D$.

解 （1）图 15-13 即为逻辑函数 $Y=C$ 的卡诺图.

（2）图 15-14 即为逻辑函数 $Y=\overline{B}+CD+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}D$ 的卡诺图.

AB \ CD		$\overline{C}\overline{D}$ 00	$\overline{C}D$ 01	CD 11	$C\overline{D}$ 10
$\overline{A}\overline{B}$	00			1	1
$\overline{A}B$	01			1	1
AB	11			1	1
$A\overline{B}$	10			1	1

图 15-13

AB \ CD		$\overline{C}\overline{D}$ 00	$\overline{C}D$ 01	CD 11	$C\overline{D}$ 10
$\overline{A}\overline{B}$	00	1	1	1	1
$\overline{A}B$	01	1	1	1	
AB	11		1	1	
$A\overline{B}$	10	1	1	1	1

图 15-14

由已知逻辑函数的卡诺图，也可写出相应的逻辑函数表达式. 方法是，只要把图中填 1 的小方格对应的最小项写出来，然后作“或”运算即可.

例 10　如图 15-15，根据卡诺图写出逻辑函数的最小项表达式.

A \ BC	00	01	11	10
0	1		1	1
1		1		

图 15-15

解　根据图 15-15 可知，填 1 的小方格有 4 个，它们的编号分别为

$$m_0，m_2，m_3，m_5，$$

因此，逻辑函数的最小项表达式为

$$\begin{aligned}F(A，B，C)&=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}C\\&=m_0+m_2+m_3+m_5.\end{aligned}$$

练习15-10

1. 完成下列卡诺图：

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0			
1				m_6

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0			
01				m_6
11	m_{12}			
10				

（第 1 题）

2. 已知逻辑函数 $F(A，B，C)=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}C$，试写出函数的真值表.

3. 将逻辑函数 $F(A，B)=\overline{A}+B$ 表示为最小项表达式.

4. 已知逻辑函数 $F(A，B，C)=\overline{A}B+\overline{A}C+BC$：

(1) 写出函数的真值表；

(2) 画出函数的卡诺图.

5. 根据下面的真值表画出逻辑函数的卡诺图，并写出逻辑函数的最小项表达式：

(1)

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(2)

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

15.3.5 逻辑函数的化简

在初中代数中，代数式能够化成最简形式. 类似地，逻辑函数表达式也可化简，下面介绍两种逻辑函数的化简方法.

1. 代数化简法

代数化简法就是运用逻辑运算规则对逻辑函数进行化简的方法，化简应消去多余的乘积项和每个乘积项中多余的因子，以求得逻辑函数表达式的最简形式.

下面介绍几种常用的代数化简方法.

(1) 并项法

根据 $A\cdot B+A\cdot\overline{B}=A$ 可以把两项合并为一项，并消去 B 和 $\overline{B}$ 两个因子，

其中 A 和 B 可以代表任何复杂的逻辑函数表达式．例如

$$Y=\bar{A}BC+\bar{A}B\bar{C}=\bar{A}B,$$
$$\begin{aligned}Y&=AB+ACD+\bar{A}B+\bar{A}CD\\&=(AB+\bar{A}B)+(ACD+\bar{A}CD)=B+CD.\end{aligned}$$

（2）吸收法

根据 $A+AB=A$ 可将 AB 项消去，其中 A 和 B 可以代表任何复杂的逻辑函数表达式．例如

$$Y=\bar{A}B+\bar{A}B\bar{C}=\bar{A}B,$$
$$Y=AB+ABC+ABD=AB+ABD=AB.$$

（3）消去法

根据 $A+\bar{A}B=A+B$ 可将 $\bar{A}B$ 中的因子 $\bar{A}$ 消去，其中 A 和 B 可代表任何复杂的逻辑函数表达式．例如

$$Y=AB+\overline{AB}\,\bar{C}=AB+\bar{C},$$
$$Y=AC+B\,\overline{AC}=AC+B.$$

（4）配项法

根据 $A+A=A$ 可以在逻辑函数表达式中重复写入某一项，以获得更加简单的化简结果．例如

$$\begin{aligned}Y&=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+ABC\\&=(\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC)+(\bar{A}BC+ABC)\\&=\bar{A}B(\bar{C}+C)+BC(\bar{A}+A)\\&=\bar{A}B+BC.\end{aligned}$$

除以上方法外，还可以根据 $A+\bar{A}=1$ 将式中的某一项乘以 $(A+\bar{A})$，然后拆成两项分别与其他项合并，以获得更加简单的化简结果．实际上，在化简复杂的逻辑函数时，常常需要综合运用上述几种方法．

例 11　化简 $Y=A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$.

解　$$\begin{aligned}Y&=A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC\\&=A\bar{B}C+ABC+AB\bar{C}+ABC &&\text{（配项法）}\\&=AC(\bar{B}+B)+AB(\bar{C}+C) &&\text{（分配律）}\\&=AC+AB. &&\text{（互补律）}\end{aligned}$$

例 12　化简 $Y=BC+D+\bar{D}(\bar{B}+\bar{C})(AD+B\bar{C})$.

解 $Y=BC+D+\overline{D}(\overline{B}+\overline{C})(AD+B\overline{C})$

$=BC+D+(\overline{B}+\overline{C})(AD+B\overline{C})$ （消去法）

$=BC+D+\overline{BC}(AD+B\overline{C})$ （反演律）

$=BC+D+AD+B\overline{C}$ （消去法）

$=(BC+B\overline{C})+(D+AD)$ （交换律）

$=B+D.$ （分配律、互补律、吸收法）

代数化简法的优点是不受变量数目的约束，当对公式、规则和方法熟练时，化简比较方便.

2. 卡诺图化简法

引进卡诺图的目的，是为了借助卡诺图对逻辑函数进行化简.

由最小项的性质可知，凡是两个逻辑相邻的最小项的“或”运算可以合并成一项，并消去它们中相反的因子. 两个相邻最小项合并可消去一个变量；四个相邻最小项合并可消去两个变量；八个相邻最小项合并可消去三个变量.

因此，在填好卡诺图之后，可以借助于圈“1”法进行化简. 为获得最简“与一或”式，在圈“1”时应注意以下几点：

(1) 圈相邻的最小项，只能两项、四项或八项一圈，先圈八格组，再圈四格组，后圈两格组，孤立的小方格单独画成一个圈；

(2) 所画圈的个数应尽量少，圈越少，“与”项越少；

(3) 圈应尽量大，圈越大，消去的变量越多；

(4) 有些方格可以多次被圈，但是每个圈都要有新的方格，否则该圈所表示的“与”项是多余的；

(5) 有时由于圈格的方法不止一种，因此化简的结果也就不同，但它们之间可以转换.

下面分别给出了两个、四个或八个相邻最小项合并为一项的示例.

从图 15-16 中可以看出，不论 A 取何值，只要 $BC=11$，结果就是 1. 所以可直接写出化简结果$Y=BC$.

A \ BC	00	01	11	10
0			1	
1			1	

图 15-16

验证：

$$Y=m_3+m_7$$

$$=\overline{A}BC+ABC$$

$$=BC.$$

这是两个相邻最小项合并方法.

从图 15-17 可以看出，不论 A 取何值，也不论 B 取何值，只要 $C=0$，结果就为 1. 所以可直接写出结果 $Y=\overline{C}$.

验证：

$$
\begin{aligned}
Y &= m_0+m_2+m_4+m_6 \\
&= \overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+AB\overline{C} \\
&= \overline{A}\overline{C}+A\overline{C}=\overline{C}.
\end{aligned}
$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

图 15-17

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

图 15-18

这是四个相邻最小项合并方法.

从图 15-18 可知

$$
\begin{aligned}
Y &= m_0+m_1+m_3+m_2+m_8+m_9+m_{11}+m_{10} \\
&= \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}D+\overline{A}\overline{B}CD+\overline{A}\overline{B}C\overline{D}+ \\
&\quad A\overline{B}\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}D+A\overline{B}CD+A\overline{B}C\overline{D} \\
&= \overline{B}.
\end{aligned}
$$

> 你能从图 15-18 的卡诺图中，直接分析写出化简结果吗?
>
> 试一试

例 13 根据图 15-19 所示卡诺图写出逻辑函数表达式，并化简.

解 卡诺图中填 1 的小方格有 6 个，卡诺图所表示的逻辑函数为

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= \overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\overline{C}+ \\
&\quad ABC+AB\overline{C} \\
&= m_0+m_1+m_3+m_4+m_7+m_6.
\end{aligned}
$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1		1	1

图 15-19

因为

$m_0+m_1=\overline{A}\overline{B}$，$m_4+m_6=A\overline{C}$，$m_3+m_7=BC$，

所以化简后的逻辑函数为

$$F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{C}+BC.$$

例 14 化简 $F(A,B,C,D)=ABCD+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}D+AB\overline{D}+\overline{A}BD$.

解 (1) 画卡诺图表示该逻辑函数，如图 15-20；

(2) 用圈“1”法圈起含有“1”且相邻的方格，如图 15-20；

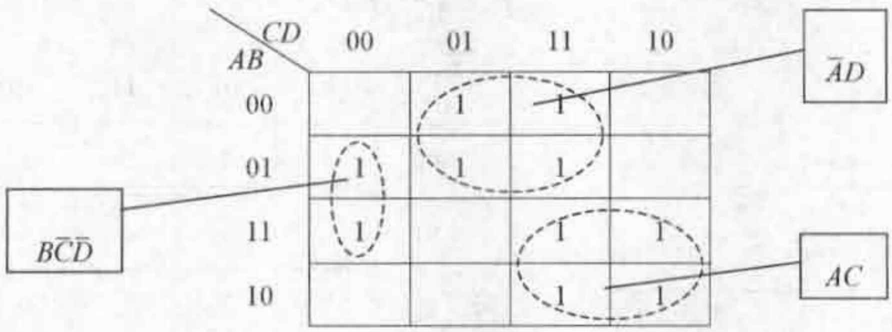


图 15-20

(3) 化简后的逻辑函数为

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}D+AC+B\overline{C}\,\overline{D}.$$

练习15-11

1. 画出四变量逻辑函数

$$Y=AB\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}$$

所对应的卡诺图.

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

(第 1 题)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	1
11	0	0	0	1
10	0	1	0	0

(第 2 题)

2. 根据卡诺图写出逻辑函数最小项表达式.

3. 根据真值表画出卡诺图.

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

（第 3 题）

4. 根据卡诺图写出逻辑函数表达式，并化简：

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01				1
11	1	1	1	1
10	1	1		

（1）

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	
01	1	1		1
11	1	1		1
10			1	

（2）

（第 4 题）

5. 化简下列逻辑函数表达式：

（1）$Y=AB+\overline{A}C+\overline{B}C$；

（2）$Y=B\overline{C}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}D+AD+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BCD$.

6. 用卡诺图将下列逻辑函数化简为“与一或”表达式：

（1）$Y=AB(C+\overline{D})+ABD+\overline{A}CD+A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}C$；

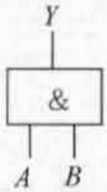
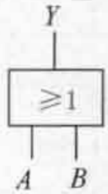
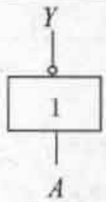
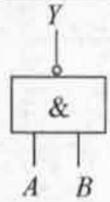
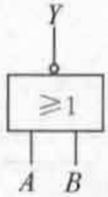
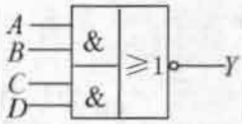
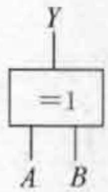
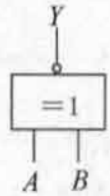
（2）$Y=A\overline{B}C+\overline{A}BC+BCD+AB\overline{C}D+A\overline{B}D+ABC\overline{D}$.

15.3.6　逻辑图

实现逻辑函数的逻辑电路图，称为**逻辑图**，它包括相应逻辑元件图形符

号及连接导线．逻辑元件图形符号与逻辑运算符号是一致的，表 15-20 即为两者的对照表．

表 15-20 常用逻辑元件图形符号和逻辑运算符号对照表

运算	与	或	非	与非
表达式	$Y=AB$	$Y=A+B$	$Y=\overline{A}$	$Y=\overline{A\cdot B}$
图形符号				
运算	或非	与或非	异或	同或
表达式	$Y=\overline{A+B}$	$Y=\overline{AB+CD}$	$Y=\overline{A}B+A\overline{B}$	$Y=AB+\overline{A}\,\overline{B}$
图形符号				

下面以“与一或”逻辑函数表达式为例，我们来学习如何由逻辑函数表达式画出相应的逻辑图．其步骤是先画出各项的逻辑运算图形符号，再把各项“或”在一起，便得到相应的逻辑图．

例 15 利用基本逻辑图形符号，画出逻辑函数 $Y=\overline{A}B+A\overline{C}$ 的逻辑图．

解 图 15-21 即为逻辑函数 $Y=\overline{A}B+A\overline{C}$ 的逻辑图．

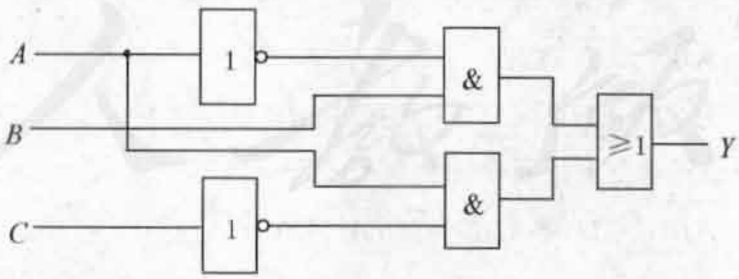


图 15-21

由逻辑图写出相应的逻辑函数表达式时，我们可以从逻辑电路输入端向输出端方向，逐级写出各级逻辑函数表达式，并把它们组合起来，便可得到相应的逻辑函数表达式．

例 16　已知逻辑图如图 15-22 所示，试写出相应的逻辑函数表达式.

解　由图 15-22 可得

$$Y=M+N=AB+\bar{B}C.$$

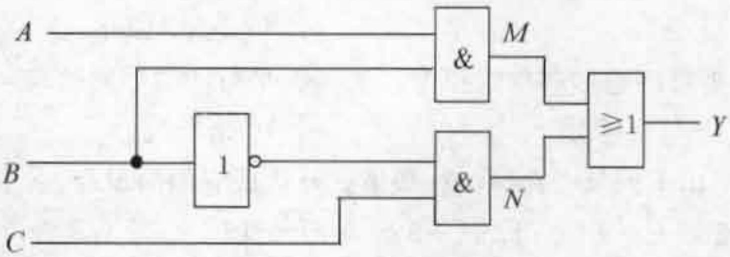


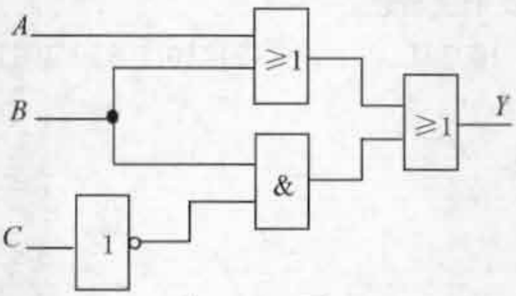
图 15-22

练习15-12

1. 利用基本逻辑图形符号，画出逻辑函数 $Y=(\bar{A}+B)+(\bar{C}+D)$ 的逻辑图.

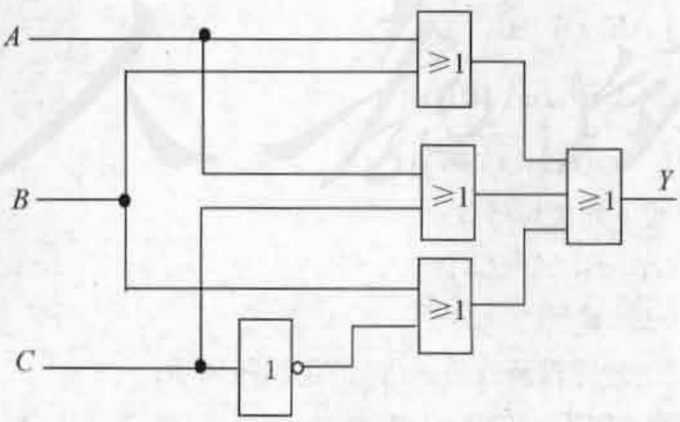
2. 根据下面所示逻辑图写出逻辑函数的表达式.

(1)



（第 2（1）题）

(2)



（第 2（2）题）

习题十五

1. 分别写出由下列各种命题构成的“p 或 q”，“p 且 q”，“非 p”形式的复合命题，并判断它们的真假：

（1）p：$\sqrt{5}>2$，　　　　　　　　q：$\sqrt{5}$是无理数；

（2）p：平行四边形对角线相等，　　q：平行四边形对角线互相平分；

（3）p：10 是自然数，　　　　　　q：10 是奇数.

2. 分别指出下列复合命题的构成形式及构成它的简单命题：

（1）$x=2$ 或 $x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根；

（2）π 既大于 3 又是无理数；

（3）直角不等于 $90°$；

（4）$x+1\geqslant x-3$；

（5）垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.

3. 把下列十进制数转换成二进制数：

（1）25；　　　　（2）127；　　　　（3）39.75.

4. 把下列二进制数转换成十进制数：

（1）110101.1；　　（2）100101；　　（3）10110010.1011.

5. 利用代数法化简：

（1）$AC+\overline{A}B+BC$；

（2）$ABC+AC+BC$.

6. 用公式证明下列各式：

（1）$AB+BC+AC=(A+B)(B+C)(A+C)$；

（2）$AB+A\overline{B}+\overline{A}B=A+B$；

（3）$\overline{\overline{A}B+A\overline{B}}=(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$；

（4）$ABC+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A}}$.

7. 用真值表证明下列逻辑等式：

（1）$A+BC=(A+B)(A+C)$；

（2）$ABC+\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=1$.

8. （1）写出三变量逻辑函数项 $A\overline{B}C$ 的逻辑相邻项；

（2）写出四变量 $A\overline{B}CD$ 的逻辑相邻项.

9. 写出函数 $F(A，B，C)=(\overline{A}+\overline{B})(B+\overline{C})(\overline{A}+C)$的最小项表达式.

10. 根据卡诺图写出逻辑函数表达式，并化简：

（1）

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01				1
11	1			1
10	1	1		

（第 10（1）题）

（2）

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01				
11				
10	1	1		1

（第 10（2）题）

11. 用卡诺图将下列函数进行化简：

（1）$F(A, B, C)=m_0+m_1+m_2+m_3$；

（2）$F(A, B, C, D)=m_0+m_1+m_3+m_4+m_5+m_7$；

（3）$F(A, B, C, D)=m_0+m_2+m_8+m_{10}$.

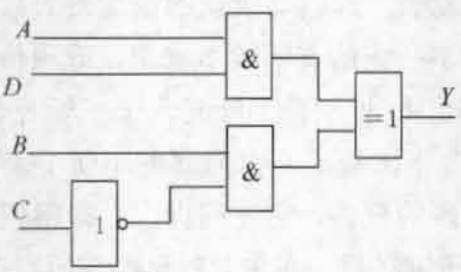
12. 利用基本逻辑图形符号，画出下列逻辑函数的逻辑图：

（1）$Y=(\overline{A}+B)(A+C)$；

（2）$Y=\overline{A}B+AC$.

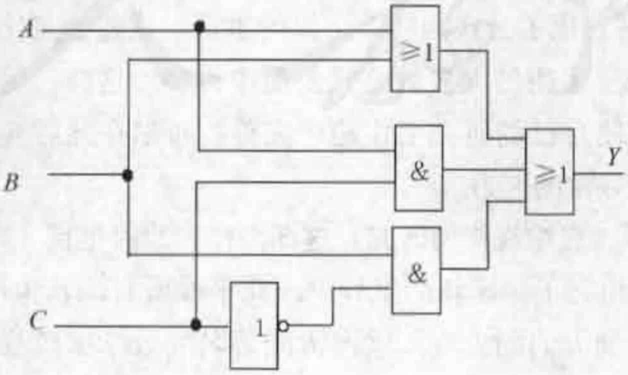
13. 根据下面所示逻辑图写出逻辑函数的表达式：

（1）



（第 13（1）题）

（2）



（第 13（2）题）

阅读与实践

（一）布尔与逻辑代数

逻辑代数，是逻辑电路和计算机技术重要的数学基础，逻辑代数也叫做布尔代数.

乔治·布尔，1815 年生于英国林肯郡. 他家境贫寒，父亲是位鞋匠，无力供他读书. 他的学问主要来自于自学. 年仅 12 岁，布尔就掌握了拉丁文和希腊语，后来又自学了意大利语和法语. 布尔 16 岁开始任教以维持生活.

1835 年，20 岁的布尔开办了一所私人授课学校. 为了给学生们开设必要的数学课程，他兴趣浓厚地读起了当时一些介绍数学知识的教科书. 不久，他就感到惊讶，这些东西就是数学吗？实在令人难以置信. 于是，这位只受过初步数学训练的青年自学了艰深的《天体力学》和很抽象的《分析力学》. 由于他对代数关系的对称和美有很强的感觉，在孤独的研究中，他首先发现了不变量，并把这一成果写成论文发表. 这篇高质量的论文发表后，布尔仍然留在小学教书，但是他开始和许多一流的英国数学家交往或通信，其中有数学家、逻辑学家德·摩根. 摩根在 19 世纪前半叶卷入了一场著名的争论，布尔知道摩根是对的，于是在 1848 年出版了一本薄薄的小册子来为朋友辩护. 这本书是他 6 年后更伟大的东西的预告，它一问世，立即得到了摩根的赞扬，肯定他开辟了新的、棘手的研究科目. 布尔此时已经在研究逻辑代数，即布尔代数. 他把逻辑简化成极为容易和简单的一种代数. 在这种代数中，适当的材料上的“推理”，成了公式的初等运算的事情，这些公式比过去在中学代数第二年级课程中所运用的大多数公式要简单得多. 这样，就使逻辑本身受数学的支配. 为了使自己的研究工作趋于完善，布尔在此后 6 年的漫长时间里，又付出了不同寻常的努力.

1854 年，他发表了《思维规律的研究》这部杰作，当时他已 39 岁，布尔代数问世了，数学史上树起了一座新的里程碑. 几乎像所有的新生事物一样，布尔代数发明后没有受到人们的重视. 欧洲大陆著名的数学家蔑视地称它为没有数学意义的、哲学上稀奇古怪的东西，他们怀疑英伦岛国的数学家能在

数学上作出独特贡献. 布尔在他的杰作出版后不久就去世了. 20 世纪初，罗素在《数学原理》中认为，“纯数学是布尔在一部他称之为《思维规律的研究》的著作中发现的”. 此说一出，立刻引起世人对布尔代数的注意. 今天，布尔发明的逻辑代数已经发展成为纯数学的一个主要分支.

（二）土耳其商人和帽子

许多著名的科学家常常喜欢出一些有趣的题目，来考一考别人的机敏和逻辑推理能力. 伟大的物理学家爱因斯坦就曾经出过这样一道题——土耳其商人和帽子.

有一个土耳其商人，想找一个助手协助他经商. 但是，他希望自己的助手必须十分聪明才行. 消息传出的三天后，有 A，B 两个人前来联系.

商人为了试一试 A，B 两个人中哪一个聪明一些，就把他们带进一间伸手不见五指的房子里. 商人打开电灯说：“这张桌子上有五顶帽子，两顶是红色的，三顶是黑色的. 现在，我把灯关掉，并把帽子的摆放位置搞乱，然后，我们三人每人摸一顶帽子戴在头上. 当我把灯开亮时，请你们尽快地说出自己头上戴的帽子是什么颜色的.”说完之后，商人就把电灯关掉了，然后，三个人都摸了一顶帽子戴在头上，同时，商人把余下的两顶帽子藏了起来.

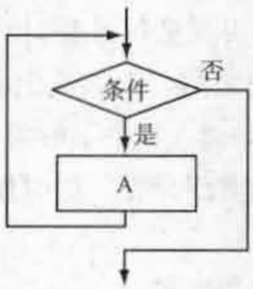
待这一切做完之后，商人把电灯重新开亮. 这时候，那两个人看到商人头上戴的是一顶红色的帽子.

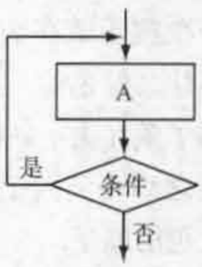
过了一会儿，A 喊道：“我戴的是黑帽子.”

请问：A 是如何知道的?

第十六章　算法与程序框图

古希腊的数学展示着严密演绎的文明，自古至今中国的数学就崇尚算法的精神，算法的概括为计算机的实际应用开辟了广阔的前景.





一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量.

——拉　奥

天才等于1%的灵感加99%的血汗.

—— 爱迪生

随着现代信息技术的飞速发展，算法在科学技术、社会发展中发挥着越来越大的作用，并日益融入社会生活的许多方面. 算法思想已经成为现代人应具备的一种数学素养之一.

本章我们学习算法的基本知识及其框图表示.

16.1 算法的概念

1. 算法的概念

问题 1　两个杯子 A 和 B 中，分别装有两种不同的饮料. 要借助于一个空杯子 C，将两个杯子中的饮料互换. 怎样才能完成这个任务呢?

我们可以采用下面的方法：

第一步：将杯子 A 中的饮料倒入空杯子 C 中（简记为 A→C）;

第二步：将杯子 B 中的饮料倒入杯子 A 中（简记为 B→A）;

第三步：将杯子 C 中的饮料倒入杯子 B 中（简记为 C→B).

在上面的操作步骤中，每一步操作都是确切的、可行的，只要按照上面的步骤进行操作，就可以在有限的步骤内完成任务.

像上例，在完成某一项任务时，我们经常需要确定完成这一项任务的步骤，以及每一步骤的具体内容，也就是要确定算法. 算法就是一个可以一步一步执行的程序，其目的就是提供满足一定条件的问题的解. 而且这个程序必须是确定的、有效的和有限的.

> 说出你在日常生活中用到算法的一些例子.
> 试一试

因此，算法可以理解为由基本运算及规定的运算顺序所构成的完整的解题步骤，并且这样的步骤能够解决一类问题.

问题 2　下面是某班级 50 名学生的体重数据（单位：kg）:

75.0	64.0	47.4	66.9	62.2	58.7	63.5	64.6	67.3	56.4
70.3	70.4	65.2	53.7	78.1	67.5	63.8	54.9	71.7	79.1
66.6	68.3	69.5	77.3	77.2	65.4	54.4	49.9	76.5	72.9
68.7	64.9	73.8	74.7	62.1	58.6	59.6	65.4	69.6	72.7
69.4	75.6	71.7	48.6	50.1	55.5	63.8	68.8	70.9	60.8

要找出其中的最大值，并按由小到大的顺序排序．你能完成这个任务吗？

如果有 10 000 名学生的体重数据需要处理，你会怎样完成呢？需要多长时间？

有的同学可能已经想到了可以用计算机帮忙：首先将体重数据输入到 Excel 电子表格中，然后用 MAX 函数就可以求出最大值；用“数据”菜单中的“排序”命令，瞬间就可以将体重数据进行排序．

计算机是怎样工作的呢？实际上，MAX 函数是人们按照一定的算法编写的一个计算机程序，计算机只是按照算法所规定的步骤执行操作而已．所以要利用计算机解决实际问题，关键是要设计算法．

在一组数据中找出最大值，可以采取“逐数比较，存大数”的方法：

第一步：假设数据序列中的第一个数是最大值，用变量 max 保存；

第二步：将数据序列中的下一个数和 max 比较，如果这个数比 max 大，则将这个数保存到变量 max 中，否则不做任何操作；

第三步：若数据序列中还有数据没有和 max 比较，则返回第二步继续，否则执行第四步；

第四步：输出变量 max 的值，就是最大值．

变量是指在程序的运行过程中随时可以发生变化的量．变量是程序中数据的临时存放场所．

读一读

2. 算法的描述

怎样才能更好地描述算法呢？常见的描述算法的方式有以下三种．

(1) 自然语言

自然语言是人们日常交流使用的语言，前面两个问题中的算法都是用自然语言描述的．使用自然语言对算法进行描述具有通俗易懂的特点，但由于自然语言表达的含义往往比较含糊，因此容易造成歧义．

(2) 程序框图

程序框图也称为流程图，是用一些图形符号来表示算法中的各种操作．用程序框图表示算法直观、形象，容易理解．下一节我们将介绍这种方法．

(3) 计算机语言

将算法用某种计算机语言（如 BASIC 语言、C 语言等）进行描述，实际上就是写计算机程序，其可以在计算机上运行．

例 1　写出求 $1+2+3+4+5$ 的和的一个算法.

解　我们可以采用累加的方法.

S1：先计算 $1+2$ 的值，和为 3；

S2：用 S1 得到的和再加上 3，得和为 6；

S3：用 S2 得到的和再加上 4，得和为 10；

S4：用 S3 得到的和再加上 5，得和为 15.

> 如果计算 $1+2+3+\cdots+100$，你有什么简便的算法吗？
>
> 试一试

在描述算法时，我们也可以用 S1 表示第一步，用 S2 表示第二步……

例 2　一个大人和两个小孩要渡河，渡口只有一条小船，他们三人都会划船，但船每次只能渡一个大人或两个小孩. 试问他们怎样渡过河去？请写出渡河的一个算法.

解　我们用自然语言对算法进行描述.

S1：两个小孩同船渡过河去；

S2：一个小孩划船回来；

S3：大人独自划船渡过河去；

S4：对岸的小孩划船回来；

S5：两个小孩同船渡过河去.

例 3　（鸡兔同笼问题）大约在 1 500 年前，《孙子算经》中就记载了这个有趣的问题. 书中是这样叙述的："今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？" 这四句话的意思是：在同一个笼子里有若干只鸡和兔，从上面数，有 35 个头；从下面数，有 94 只脚. 求笼中各有几只鸡和兔？

解　方法一（假设法）：

S1：假设笼子里装的全是鸡，则总的脚数应为 $2\times35=70$；

S2：计算多出的脚数为 $94-70=24$；

S3：计算兔数，一只兔比一只鸡多 2 只脚，因此也就是有 $24\div2=12$ 只兔；

S4：计算鸡数，$35-12=23$.

方法二（代数法）：

设有 x 只鸡，y 只兔，则有

$$\begin{cases} x+y=35 & ① \\ 2x+4y=94 & ② \end{cases}$$

S1：将②－①×2得$2y=24$，$y=12$；

S2：将$y=12$代入方程①得$x=35-y=35-12=23$.

由上面的例子可以发现，解决不同问题的算法是不同的，对同一个问题的求解算法也可能不止一个.

一般来说，任何算法都具有以下五个特征：

(1) 有穷性：一个算法必须保证在执行有限步之后结束；

(2) 确定性：算法的每一个步骤必须有确定的结果；

(3) 输入：一个算法有0个或多个输入，以刻画运算对象的初始情况，所谓0个输入是指算法本身定义了初始条件；

(4) 输出：一个算法有一个或多个输出，以反映对输入数据加工后的结果，一般来说，没有输出的算法是毫无意义的；

(5) 可执行性：算法原则上能够精确运行，而且人们用笔和纸做有限次运算后即可完成.

练习16-1

1. 什么是算法？你能举出几个例子吗？

2. （农夫过河）一个农夫带着一只狼、一只羊和一捆青菜在河的南岸，他要带着这些东西到北岸. 河上只有一条小船，只能容下农夫和一种物品，并且只有农夫能划船. 另外，因为狼吃羊，而羊爱吃青菜，所以农夫不能留下羊和青菜或者狼和羊单独在河的一边. 请问农夫该采取什么方法才能将所有的东西运过河？

3. 写出求解方程组$\begin{cases}2x+y=7\\4x+5y=11\end{cases}$的一个算法.

16.2 程序框图与算法的基本逻辑结构

描述算法经常用的工具是程序框图，图16-1是一个用公式法解一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的程序框图. 图中“$b^2-4ac\to\Delta$”的含义是把“b^2-4ac”的值赋给“Δ”.

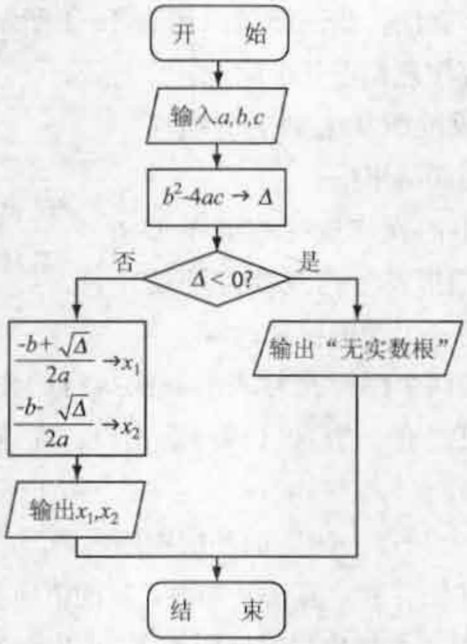


图 16-1

由图 16-1 可以看出，用程序框图表示算法直观、形象，容易理解.

16.2.1　程序框图的基本图例

在图 16-1 的程序框图中用到许多图形符号，这些图形符号都有各自的含义，表 16-1 介绍了画程序框图的一些常用符号.

表 16-1　常用符号

图　形	名　称	作　用
	起止框	表示算法的开始和结束
	输入输出框	表示要输入数据或输出数据
	判断框	根据一个条件，选择一个操作执行
	处理框	执行赋值、计算等操作
	流程线	表示算法的执行顺序

一般地，任意一个算法，我们都可以用表 16-1 所示的符号画出其程序框图，在画程序框图时应注意如下几个问题：

（1）程序框图一般按照从上到下的顺序画，先画开始框，最后画结束框；

（2）要根据算法中的操作选择相应图形符号，不能用错，在图形符号内还要加注适当文字说明，不能只画一个图形符号；

（3）用流程线连接两个图形符号表示算法执行的先后顺序，在连接输入输出框和处理框时，只能有一个入口和一个出口，在连接判断框时，则必须有一个入口和两个出口.

试一试　观察图 16-1，说出各图形符号的名称及作用.

例 1　画出计算 1+2+3+4+5 的和的程序框图.

解　我们用变量 S 保存和，算法开始时，S 的值应为 0.

根据 16.1 中的例 1，可画出程序框图如图 16-2 所示.

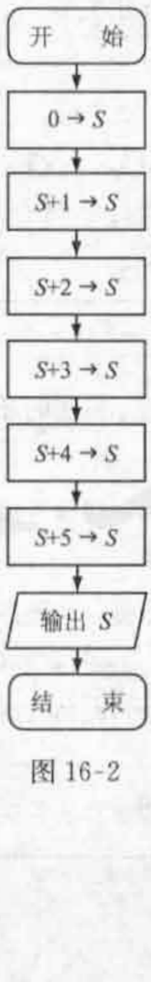


图 16-2

想一想　求 $1+2+3+\cdots+100$ 的和的算法能用类似的程序框图来表示吗？

练习16-2

1. 什么是程序框图？画程序框图的基本符号有哪些？它们表示的含义各是什么？

2. 在程序框图中，判断框有几个入口？几个出口？

3. 画出求四个数平均值的程序框图.

4. 画出16.1中例2的算法的程序框图.

16.2.2　顺序结构及其框图

要掌握算法的设计，就必须了解算法的基本结构. 经过长期的探索，人们发现，任何一个算法都可以由三种基本结构组成，这三种基本结构是：顺序结构、条件分支结构和循环结构.

想一想 在日常生活中，做什么事情的过程符合顺序结构？

顺序结构是指算法中的每一步操作依次排列，计算机将顺次执行每一步操作，其程序框图如图16-3所示，表示先执行操作A，再执行操作B.

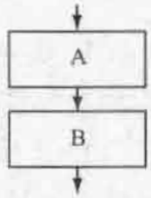


图16-3

例2　用程序框图描述根据公式 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 求三角形面积的算法，其中 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，而 a，b，c 分别为三角形的三边.

解　由面积公式可知，首先要输入三角形的三条边长 a，b，c，然后根据公式先计算 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，再计算面积 S，最后输出 S. 用程序框图表示如图16-4所示.

议一议 在图16-4所示的程序框图中，两个处理框能否交换顺序？

例3　画出求点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离 d 的算法程序框图.

解　我们知道，点到直线的距离公式为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 因此，解决

这个问题的步骤是先输入 A，B，C 及 x_0，y_0 的值，然后按公式计算，最后输出 d 的值. 在计算时可以先计算分子再计算分母，程序框图如图 16-5 所示.

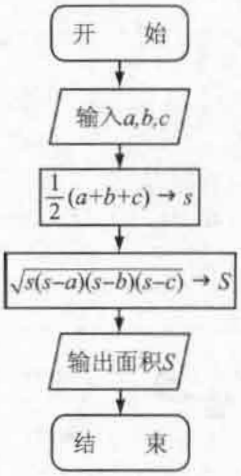


图 16-4

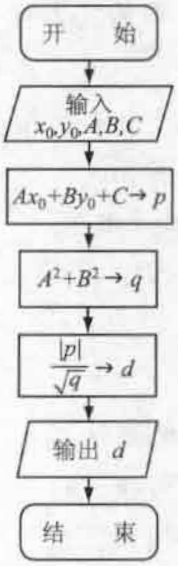


图 16-5

议一议 在图 16-5 所示的程序框图中，计算分子和分母的两个处理框能否交换顺序？

练习16-3

1. 已知直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b，画出求斜边的长度 c 的算法的程序框图.

2. 已知三角形的底边和高分别为 a 和 h，画出求三角形的面积 S 的算法的程序框图.

3. 有两个瓶子 A 和 B，分别装有两种不同的饮料，另有一个空杯子 C，请用程序框图写出将两个瓶子的饮料互换的算法.

4. 已知圆的半径 r，画出求圆的面积 S 和圆周长 L 的算法的程序框图.

16.2.3 条件分支结构及其框图

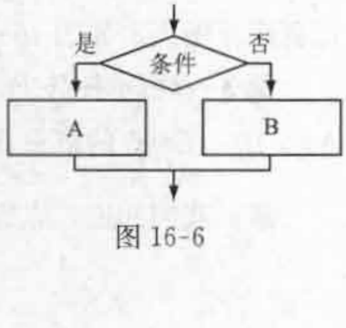


图 16-6

条件分支结构是指在算法中先对一个条件进行判断，然后再根据判断结果选择其中的一个分支执行操作. 其程序框图如图 16-6 所示：若条件成立则选择操作 A 执行；否则选择操作 B 执行. 也就是

说在操作 A 和操作 B 之间根据条件只能选择其中之一执行．在画条件分支结构的程序框图时，要在判断框的两个出口分别标注“是”和“否”，表示条件为成立和不成立时要选择的分支．

例 4　试画出输入两个数 a，b，输出其中较大值的算法的程序框图．

解　两个数 a，b 中的较大值不是 a 就是 b，因此只要判断 a 和 b 的大小即可：若 $a<b$，则输出 b；否则输出 a．程序框图如图 16-7 所示．

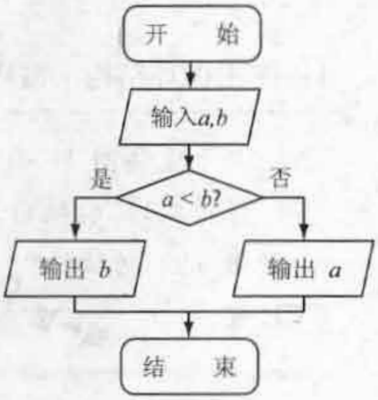


图 16-7

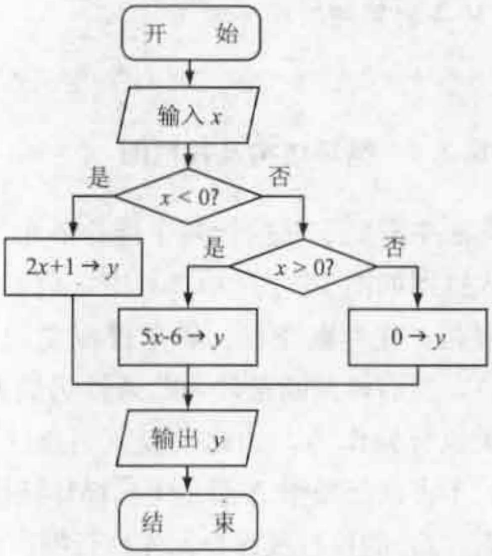


图 16-8

例 5　已知函数

$$y=\begin{cases}2x+1, & x<0\\0, & x=0\\5x-6, & x>0\end{cases}$$

请画出计算函数值的程序框图．

解　该函数是一个分段函数，要根据 x 值的范围来决定如何计算 y 的值，因此要用条件分支结构．程序框图如图 16-8 所示．

练习16-4

1. 某快递公司的收费标准是按邮寄物品的质量进行计算的，公式是

$$y=\begin{cases}20, & m<40\text{ kg}\\20+(m-40)\times 0.5, & m\geqslant 40\text{ kg}\end{cases}$$

画出计算邮寄费用的程序框图.

2. 画出求一个数的绝对值的程序框图.

3. 对于给定的三个数 a，b，c，用程序框图画出判断以 a，b，c 为边长是否能构成三角形的算法.

4. 对输入的任意三个数 x，y，z，按由小到大的顺序输出，画出完成这项任务的算法的程序框图.

16.2.4 循环结构及其框图

算法中需要重复执行某个操作若干次时，可以使用循环结构. 循环结构的程序框图如图 16-9 所示. 其中，(1) 的执行过程是：先判断条件，若条件成立则执行操作 A，然后再判断条件，若条件仍然成立，则再次执行操作 A，如此重复直到条件不成立时，不再执行操作 A 而是退出循环结构.

观察图 16-9，并根据 (1) 的执行过程说出 (2) 的执行过程.

试一试

而 (2) 的执行过程是：先执行操作 A 再判断条件，若条件成立则返回执行操作 A，然后再判断条件，若条件仍然成立，则再次执行操作 A，如此重复直到条件不成立时，不再执行操作 A 而是退出循环结构.

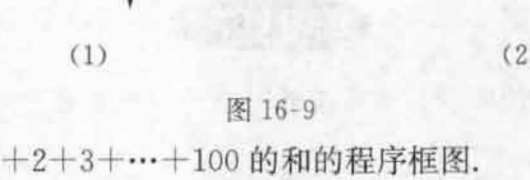


图 16-9

例 6 画出求 $1+2+3+\cdots+100$ 的和的程序框图.

分析 在例 1 中我们已经知道求 $1+2+3+4+5$ 的算法，观察那种方法可

以看出，算法中的每一步都是上一步的结果再加上当前的一个数，然后重复这样的操作直到加到 5 为止．但该方法用于本题就比较繁琐，因此，我们有必要找一种通用的求和的简便算法．

解　我们用 S 存放每一步求出的和，用 i 表示每一个要加的数，算法开始让 S 的值为 0，i 的值为 1，算法的每一步计算 $S+i$ 的值，然后再存到 S 中，并使 i 的值增加 1，重复上述步骤直到 i 的值大于 100 为止．算法的程序框图如图 16-10 所示．

> **议一议**　在这个算法的开始，为什么 S 要为 0?

例 7　画出从 100 个数中找出最大值的程序框图．

解　根据我们在 16.1 节问题 2 中得到的在一组数据中找最大值的算法，本题的程序框图如图 16-11 所示．

> 若要从 100 个数中找出最小值，其算法的程序框图应该如何修改？**试一试**

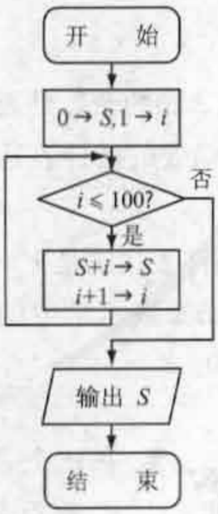


图 16-10

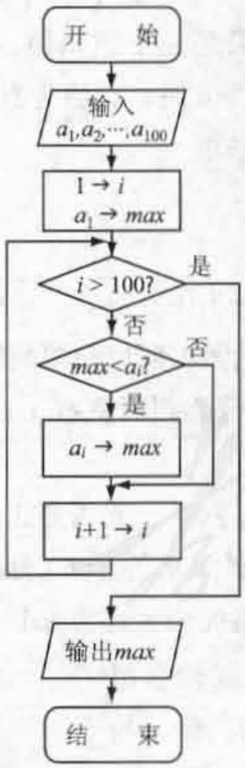


图 16-11

练习16-5

1. 画出计算 $1+2+3+\cdots+n$ 的程序框图.
2. 画出计算 $1\times2\times3\times\cdots\times20$ 的程序框图.
3. 画出判断整数 $m(m>2)$ 是否是素数的程序框图.

16.3 条件判断

在算法的条件分支结构和循环结构中，都需要对条件进行逻辑判断，然后根据结果选择操作. 一般来说，条件判断是一个条件表达式或一个逻辑表达式，其值可能为真，也可能为假.

所谓条件表达式是由比较运算连接成的一个式子，常用的比较运算有：大于（>）、小于（<）、大于等于（>=）、小于等于（<=）、等于（==）和不等于（<>）. 比较运算的结果是一个逻辑值：真或假. 如条件表达式 $x>3$，当 $x=1$ 时，其值为假；当 $x=5$ 时，其值为真.

例 1 写出下列语句的条件表达式：

（1）整数 x 是偶数；

（2）数 x 是正数；

（3）学生的数学成绩及格（总分为 100 分）.

解 （1）偶数是指能被 2 整除的数，所以只要判断 x 被 2 除的余数是否为 0 即可，求余运算的函数是 MOD，因此判断整数 x 是否是偶数的条件表达式是 MOD(x，2)==0；

（2）正数是指大于零的数，所以判断 x 是否是正数的条件表达式是 $x>0$；

（3）判断及格就是判断成绩是否大于等于 60 分，用 *score* 表示学生的数学成绩，则判断学生的数学成绩及格的表达式为 *score*>=60.

逻辑表达式是由逻辑运算符和逻辑量组成的式子，常用的逻辑运算符有：与（AND）、或（OR）、非（NOT）. 逻辑运算的结果还是一个逻辑值，逻辑运算的真值表如表 16-2 所示.

议一议 在一个算法中，3>2 能否作为条件判断？为什么？

表 16-2

A	B	A AND B	A OR B	NOT A
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

例 2 写出下列语句的逻辑表达式：

(1) 整数 x 既能被 3 整除又能被 5 整除；

(2) x 介于 10 与 100 之间.

解 (1) x 能被 3 整除可以表示为 MOD(x, 3)==0，x 能被 5 整除可以表示为 MOD(x, 5)==0，所以 x 既能被 3 整除又能被 5 整除的表达式为：(MOD(x,3)==0) AND (MOD(x, 5)==0). 也可以表示为 MOD(x, 15)==0.

(2) x 介于 10 与 100 之间，就是 $x>10$ 且 $x\leqslant 100$，所以表达式应为：(x>10)AND(x<=100).

议一议 能否写一个条件表达式或逻辑表达式来判断一个数是素数?

练习16-6

1. 写出下列语句的条件表达式：

(1) 数 x 是奇数；

(2) 大于 10 的整数 x；

(3) 数 x 和数 y 相等.

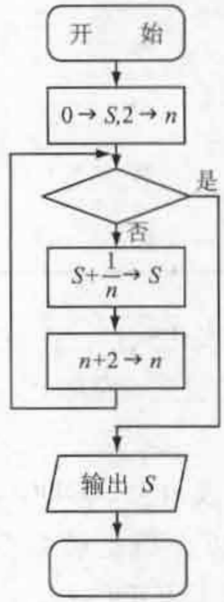
2. 写出下列语句的逻辑表达式：

(1) a 大于 b，且 b 大于 c；

(2) x 和 y 相等，且 x 不等于零；

(3) x 或 y 中至少有一个不小于 z.

3. 以下给出的是计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{20}$的值的一个程序框图，请完善之.



（第 3 题）

16.4 算法案例

问题　怎样设计算法求两个正整数的最大公约数?

我们知道，如果一个整数 m 能被另一个整数 n 整除，则称整数 n 是 m 的一个约数. 例如，因为 12 能被 2 整除，所以 2 是 12 的一个约数. 由于 1 是任何一个正整数的约数，因此两个正整数一定有公约数. 例如，12 和 16 的公约数为 1，2，4，其中 4 为 12 和 16 的最大公约数.

任意给定的两个正整数，如何计算它们的最大公约数呢? 我国古代数学家发明了一个方法，称为“更相减损之术”. 具体方法以 12 和 16 为例说明.

用两个数中较大的数减去较小的数，即 $16-12=4$；用差数 4 与较小的数 12 组成新的一对数 12 和 4，在这一对新数中，再用较大的数 12 减去较小的数 4，即 $12-4=8$；这样一直做下去，直到产生一对相等的数为止，这个相等的数就是最大公约数. 每一步的操作结果是

$$(16,\ 12)\to(4,\ 12)\to(8,\ 4)\to(4,\ 4).$$

由此可知，12 和 16 的最大公约数是 4.

上述算法用程序框图描述如图 16-12 所示.

古希腊求两个正整数的最大公约数的方法是辗转相除法（即欧几里得算法）. 以 12 和 16 为例，用较大的数 16 除以较小的数 12 余数为 4，用余数 4 和较小的数 12 组成新的一对数，重复上述操作，直到余数为零为止，最后一步的较小的数就是最大公约数. 每一步操作结果是

$$(16,\ 12) \rightarrow (4,\ 12).$$

最后一步余数为零，所以 4 就是最大公约数.

该算法的程序框图请同学们自己画出来.

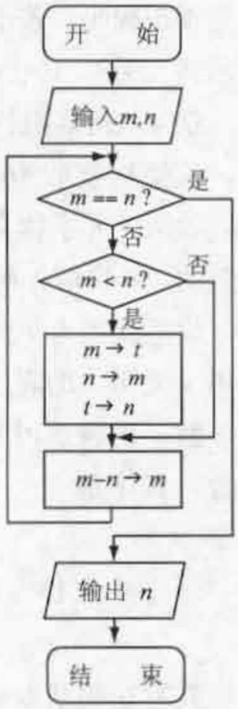


图 16-12

例 1　用程序框图给出求解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的算法.

解　求解一元二次方程的根，首先要计算判别式 b^2-4ac 的值，然后比较判别式的值与零的大小，据此分别进行不同的计算，具体程序框图见图 16-1.

例 2　设 x 为一个正整数，规定如下运算：若 x 为奇数，则求 $3x+2$；若 x 为偶数，则求 $5x$. 画出其算法的程序框图.

解　这是一个典型的条件分支结构，只要对 x 的值进行判断后采用不同的计算公式即可，关键是如何判断 x 是否为奇数. 这可以通过判断 x 除以 2 的余数是否为零来实现. 算法的程序框图如图 16-13 所示.

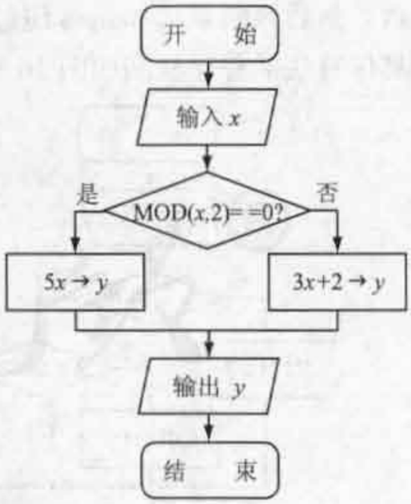


图 16-13

例 3　火车站对乘客退票收取一定的费用，具体办法是：2 元以下的票不退，票价不小于 2 元的，按票价每 10 元（不足 10 元按 10 元计算）核收 2 元. 试写出计算票价为 x 元的车票退掉后，返还的金额 y 的算法的程序框图.

解　首先对票价小于 2 元的票进行处理，对不小于 2 元的票要计算包含几个 10，可以采用将 x 除以 10 取整数的方法.

如图 16-14 所示是某同学根据上述算法画出的程序框图，你能判断这个框

图是否正确吗？若不正确，请改正.（其中“$[x/10]$”表示将 x 除以 10 后，对商取整数.）

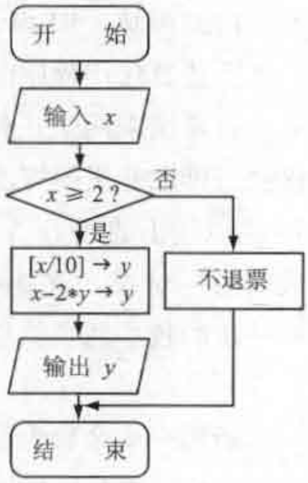


图 16-14

例 4 到某银行办理异地汇款（不超过 1 000 万）时，该银行要收取一定的手续费：汇款额不超过 100 元，收取 1 元手续费；超过 100 元不超过 5 000 元，按汇款的 1%收取；超过 5 000 元，一律收取 50 元手续费. 设汇款额为 x 元时，该银行收取的手续费为 y 元，求出 y 关于 x 的表达式，并画出由 x 求 y 的程序框图.

解 由题意可知，汇款手续费是汇款数额的分段函数，具体是

$$y=\begin{cases}1, & x\leqslant 100\\ 1\%x, & 100<x\leqslant 5\,000\\ 50, & 5\,000<x\leqslant 10\,000\,000\end{cases}$$

其算法的基本步骤是逐个判断即可，程序框图如图 16-15 所示.

例 5 设计一个算法，求满足条件 $1+2+3+\cdots+n>2\,010$ 的最小正整数 n，并画出程序框图.

解 对于这个问题，我们可以采用试探的方法，从 1 开始，每次加一个数，然后判断累加和是否超过 2 010，第一次超过 2 010 的 n 就是要求的解. 具体算法的程序框图如图 16-16 所示.

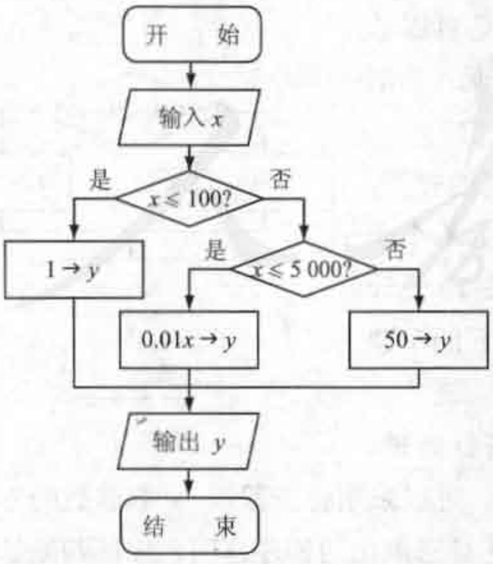


图 16-15

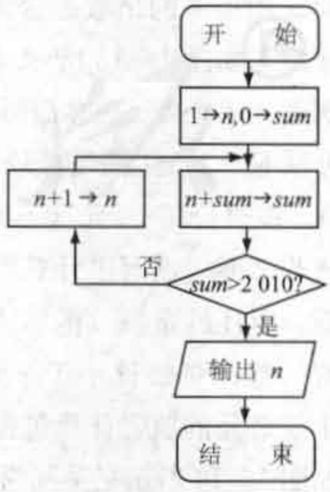


图 16-16

练习16-7

1. 已知正四棱锥的底面边长为3，高为4，写出求正四棱锥的体积和表面积的算法，画出相应的程序框图.

2. 画出计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{100}$的值的程序框图.

3. 用程序框图表示算法：如果学生的成绩大于或等于60分，则输出“及格”，否则输出“不及格”.

习题十六

1. 写出解一元二次方程$5x^2-12x+3=0$的一个算法.

2. 写出求$2+4+6+8+10+12$的和的算法.

3. 一个人带着三只狼和三只羊过河，只有一条船，同船可容纳一个人和两只动物，没有人在的时候，如果狼的数量不少于羊的数量，狼就会吃羊. 该人如何才能将动物完全转移过河？请设计算法.

4. 画出求两个数a，b的算术平均数的算法的程序框图.

5. 设x是一个正整数，规定如下运算：若x为奇数时，则$y=3x+1$；若x为偶数时，则$y=5x$. 写出该算法的程序框图.

6. 已知$S=1+2+4+\cdots+2^{49}$，画出求S的程序框图.

7. 为了加强居民的节水意识，某市制订了以下生活用水收费标准：每户每月用水未超过7 m³时，每立方米收费1.0元，并加收0.2元的城市污水处理费；超过7 m³时，超过的部分，每立方米收费1.5元，并加收0.4元的城市污水处理费. 请你写出某户居民每月应交纳的水费y元与用水量x m³之间的函数关系，然后画出求y值的程序框图.

8. 画出求$-1+2-3+4-5+\cdots-29+30$的值的算法的程序框图.

阅读与实践

秦九韶算法

假设

$$f(x)=3x^3+2x^2+4x+5,$$

依照 $f(x)$ 的解析式，大家都能算出 $f(2)$ 的值来. 事实上，我们有

$$f(2)=3\times2^3+2\times2^2+4\times2+5=45.$$

如果仔细查看上述计算过程，可以看出，利用 $f(x)$ 的解析式计算 $f(2)$ 的值，需要做 6 次乘法，3 次加法（注：计算 2^3需要做 2 次乘法）.

但是，$f(x)$ 的表达式可以改写为

$$f(x)=((3x+2)x+4)x+5,$$

如果利用这个形式来计算 $f(2)$ 的值，就是

$$f(2)=((3\times2+2)\times2+4)\times2+5=45.$$

可以看出，用这种方法计算 $f(2)$ 的值，只需要做 3 次乘法，3 次加法.

一般地，计算一个 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$的值，如果直接按解析式计算的话，需要做$\frac{n(n+1)}{2}$次乘法，$n$ 次加法.

但是，如果可以把 $f(x)$ 改写成

$$\begin{aligned}f(x)&=(a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1)x+a_0\\&=((a_nx^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+a_2)x+a_1)x+a_0\\&\cdots\cdots\\&=(\cdots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\cdots+a_1)x+a_0,\end{aligned}$$

然后再来求多项式 $f(x)$ 的值时，可以先计算最内层括号内一次多项式的值，即

$$v_1=a_nx+a_{n-1},$$

然后由内向外逐层计算各一次多项式的值，即

$$\begin{aligned}v_2&=v_1x+a_{n-2},\\v_3&=v_2x+a_{n-3},\\&\cdots\cdots\\v_n&=v_{n-1}x+a_0.\end{aligned}$$

这样一来，计算 $f(x)$ 的值只要做 n 次乘法，n 次加法，能有效地减少运算次数.

上述能减少运算次数的计算多项式值的方法，是由我国南宋数学家秦九韶发明的，称为秦九韶算法.

秦九韶算法看似简单，但其具有很大的意义. 事实上，对于计算机来说，做一次乘法运算比做一次加法运算所用的时间要长得多. 因此，减少乘法运

算的次数能加大计算机的运算效率，所以在运算量很大的情况下，秦九韶算法能极大地缩短计算机的运算时间.

现在秦九韶算法是计算机编程人员必学的内容之一.

第十七章　数据表格信息处理

从问题情境中提炼数据信息，数据信息借助计算机，将结果呈现在人们眼前．数学发展到今天，数与形的结合变得越来越简捷、越来越完美．

数学家实际上是一个着迷者，不迷就没有数学．

——诺瓦利斯

数学——科学不可动摇的基石，促进人类事业进步的丰富源泉．

——巴　洛

数据表格是一种常见的数据组织形式，在实际生活中有着广泛应用．运用计算机技术处理数据表格，不仅方便，而且迅捷．

本章主要介绍数组的概念及其代数运算，学习数据表格以及信息处理方面的知识，以增强信息处理能力．

17.1 数组、数据表格的概念

问题　期末考试结束后，某学习小组五位同学三门功课的成绩如下：

赵大伟的数学成绩是 87 分，语文成绩是 98 分，政治成绩是 80 分；

王志强的数学成绩是 65 分，语文成绩是 77 分，政治成绩是 66 分；

张小华的数学成绩是 98 分，语文成绩是 84 分，政治成绩是 87 分；

李建军的数学成绩是 86 分，语文成绩是 80 分，政治成绩是 87 分；

刘爱洁的数学成绩是 84 分，语文成绩是 88 分，政治成绩是 78 分．

你能用表格的形式将上述信息表示出来吗？

我们可以把这五位同学的考试分数列成表格，如表 17-1 所示．

表 17-1

姓名	数学	语文	政治
赵大伟	87	98	80
王志强	65	77	66
张小华	98	84	87
李建军	86	80	87
刘爱洁	84	88	78

上述表格中的每一格叫做一个单元格，横方向的一排单元格叫做一行，纵方向的一排单元格叫做一列．不难看出，表格中任意一个单元格都由它所在的行和列唯一确定，单元格中的内容叫做**数据**．

值得注意的是，数据可以是数值，也可以是字符、文字等．如表 17-1 的第一行第一列的数据是“姓名”，第二行第二列的数据是“87”．

形如表 17-1 的表格叫做**数据表格**．

如果没有特殊说明，本章中所提到的数据都是指数值数据．

表 17-1 包含五行三列数据，其中赵大伟的三门课程成绩是第一行的数据，五人的语文成绩是第二列的数据，而张小华的数学成绩是第三行第一列

的数据.

我们将赵大伟的三门学科成绩单独列出来，就形成一行数据

$$(87,\ 98,\ 80); \qquad ①$$

同样地，我们也可把这五名同学的数学成绩单独列出来，形成一列数据

$$\begin{pmatrix} 87 \\ 65 \\ 98 \\ 86 \\ 84 \end{pmatrix}. \qquad ②$$

像这样，具有相同类型的一行或一列数据叫做**数组**.

一般地，n 个数 a_1，a_2，…，a_n 组成的有序数组叫做 **n 维数组**，表示为

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \text{ 或 } \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

前者叫做 n 维行数组，后者叫做 n 维列数组. 其中每一个数 $a_i(i\in\mathbf{N}_+)$ 叫做数组 $\boldsymbol{a}$ 的第 i 个分量，i 叫做 a_i 的下标.

例如，①中的数据可以表示为 3 维行数组

$$\boldsymbol{a}=(87,\ 98,\ 80);$$

②中的数据可以表示为 5 维列数组

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 87 \\ 65 \\ 98 \\ 86 \\ 84 \end{pmatrix}.$$

想一想 举出你身边数据表格的例子，并说出它们由几个 n 维数组构成.

表 17-1 中五行三列的数据可以看成由五个 3 维行数组或三个 5 维列数组构成.

如果没有特殊说明，本章中我们只讨论行数组，列数组都可以类比行数组进行讨论.

数组具有以下特点：

(1) 同一性，所有数据分量均属于同一数据类型；

(2) 整体性，一个数组是一个数据集合；

(3) 有序性，分量从排列上有顺序关系.

设数组 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，如果有

$$a_i=b_i(i=1, 2, 3, \cdots, n),$$

则称数组 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

注意，两个数组只有维数相同时，才可能相等.

例　已知数组 $(4+x, y-3, \sqrt{3}z)=(-1, 4, 3)$，求 x，y 和 z.

解　由数组相等的定义知

$$\begin{cases}4+x=-1\\ y-3=4\\ \sqrt{3}z=3\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=-5\\ y=7\\ z=\sqrt{3}\end{cases}$$

练习17-1

1. 用数组的形式表示出下列表格中的数据，并说出数组的维数：

(1) 8 个随机数：

3	6	4	7	2	5	6	7

(2) 多哈亚运会奖牌榜中，中国所获奖牌情况：

排名	国家	金牌	银牌	铜牌	总数
1	中国	165	88	63	316
2	韩国	58	53	82	193
3	日本	50	71	77	198
4	哈萨克斯坦	23	19	43	85
5	泰国	13	15	26	54

2. 已知数组 $\boldsymbol{a}=(2, -4, 5, 2)$，写出该数组的第 2 个分量和第 4 个分量.

3. 已知数组 $\left(2x-3, \frac{1}{2}y-4, 2z\right)=(7, 1, -8)$，求 x，y 和 z.

17.2 数组的代数运算

1. 数组的加法与减法

问题 1 某商场第一季度商品销售数量情况如表 17-2 所示.

表 17-2

	笔记本电脑/台	台式电脑/台	数码相机/台	手机/部
1 月份	60	100	35	180
2 月份	75	113	38	211
3 月份	81	127	48	201

(1) 试用数组表示这个商场 1 月份和 2 月份各类商品销售总量；

(2) 根据表 17-2 中的数据，求这个商场各类商品 2 月份比 1 月份多销售的数量.

根据数组的定义，表 17-2 中 1 月份和 2 月份各类商品的销售数量可以用数组分别表示为

$$\boldsymbol{a}=(60, 100, 35, 180), \boldsymbol{b}=(75, 113, 38, 211).$$

(1) 1 月份和 2 月份各类商品销售总量，就是这两个月各类商品销售数量之和，应当将两个数组的对应数据相加，其结果构成一个新数组，叫做这两个数组的和，即

$$(60, 100, 35, 180)+(75, 113, 38, 211)=(135, 213, 73, 391).$$

这就是说，1 月份和 2 月份共销售笔记本电脑 135 台，台式电脑 213 台，数码相机 73 台，手机 391 部.

(2) 这个商场各类商品 2 月份比 1 月份多销售的数量，就需要对这两个数组进行减法运算. 应当将两个数组的对应数据相减，即 2 月份数组的数据减去

1 月份数组的对应数据，其结果构成一个新数组，叫做这两个数组的差，即

$$(75,\ 113,\ 38,\ 211)-(60,\ 100,\ 35,\ 180)=(15,\ 13,\ 3,\ 31).$$

这就是说，2 月份比 1 月份笔记本电脑多销售 15 台，台式电脑多销售 13 台，数码相机多销售 3 台，手机多销售 31 部.

一般地，对于两个 n 维数组 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$，规定：

(1) 由数组 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的对应分量之和构成的新数组，称为**数组 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)+(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)\\&=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots,\ a_n+b_n);\end{aligned}$$

(2) 由数组 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的对应分量之差构成的新数组，称为**数组 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差**. 记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)-(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)\\&=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \cdots,\ a_n-b_n).\end{aligned}$$

值得注意的是，两个数组，只有当它们的维数相同时，才能进行加（减）法运算.

> (1) 试计算上述问题中，该商场第一季度各类商品销售总量；(2) 计算该商场 3 月份比 2 月份各类商品多销售的数量.
>
> 试一试

2. 实数与数组相乘

问题 2　见表 17-2，为了提高经济效益，商场要求各销售部门提高销售数量. 如果计划 4 月份各类商品的销售量都是 1 月份的 2 倍，试计算 4 月份各类商品的销售数量.

1 月份各类商品的销售数量用数组表示为 $\boldsymbol{a}=(60,\ 100,\ 35,\ 180)$，依题意，4 月份各类商品的销售量构成的新数组应为

$$(2\times60,\ 2\times100,\ 2\times35,\ 2\times180)=(120,\ 200,\ 70,\ 360).$$

这里我们把 $(2\times60,\ 2\times100,\ 2\times35,\ 2\times180)$ 认为是 $2(60,\ 100,\ 35,\ 180)$，并且把它叫做实数 2 与数组 $(60,\ 100,\ 35,\ 180)$ 的乘积，记作

$$2(60,\ 100,\ 35,\ 180)=(2\times60,\ 2\times100,\ 2\times35,\ 2\times180).$$

这就是说，4 月份应该销售笔记本电脑 120 台，台式电脑 200 台，数码相机 70 台，手机 360 部.

一般地，设数组 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则实数 λ 与数组 $\boldsymbol{a}$ 的每一

个元素分别相乘后所得数组叫做**实数 λ 与数组 $\boldsymbol{a}$ 的积**，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n).$$

设 λ，μ 是实数，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是 n 维数组，则可以验证，实数与数组的乘积满足以下规律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

我们把数组的加法、减法及实数与数组的乘积统称为**数组的线性运算**.

例 1　已知数组 $\boldsymbol{a}=(12, 3, 4, -5)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1, 8, -4, 9)$，求：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　　（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　　（3）$2\boldsymbol{b}$；　　（4）$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

解　（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(12, 3, 4, -5)+(1, 8, -4, 9)=(13, 11, 0, 4)$；

（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(12, 3, 4, -5)-(1, 8, -4, 9)=(11, -5, 8, -14)$；

（3）$2\boldsymbol{b}=2(1, 8, -4, 9)=(2, 16, -8, 18)$；

（4）$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(12, 3, 4, -5)+(2, 16, -8, 18)=(14, 19, -4, 13)$.

例 2　已知数组 $\boldsymbol{a}=(2, 3, 4)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 5, 4)$，$\boldsymbol{c}=(-2, 5, 4)$，求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$.

解　$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=2(2, 3, 4)+(-2, 5, 4)-3(-2, 5, 4)=(8, -4, 0)$.

3. 数组的内积

问题 3　已知表 17-2 中各类商品的单价如表 17-3 所示.

表 17-3

	笔记本电脑/台	台式电脑/台	数码相机/台	手机/部
单价/元	5 100	3 200	2 100	1 200

试计算商场 1 月份以上四种商品的销售总额.

1 月份各类商品的销售数量可以用数组表示为

$$\boldsymbol{a}=(60, 100, 35, 180),$$

各类商品的单价可以用数组表示为

$$\boldsymbol{c}=(5\,100, 3\,200, 2\,100, 1\,200).$$

显然，商场 1 月份以上四种商品的销售总额为

$$60\times5\,100+100\times3\,200+35\times2\,100+180\times1\,200=915\,500\ (\text{元}),$$

这个结果恰好是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 两个数组中对应数据乘积之和.

一般地，设数组 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，规定

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \cdots, b_n)\\&=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,\end{aligned}$$

我们把 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 叫做数组 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积.

值得注意的是，两个向量只有维数相同时，才能进行内积运算.

> 请同学们用三维数组验证运算律.
>
> 试一试

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是 n 维数组，λ 是实数，则可以验证，数组的内积运算满足如下运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 数乘结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

例 3　已知某商店某天文化用品（铅笔，钢笔，橡皮，直尺，作业本）的销量对应的数组为 $\boldsymbol{a}=(54, 12, 16, 150, 120)$，它们的单价对应的数组为 $\boldsymbol{b}=(0.5, 4, 0.4, 1, 1.2)$，求这个商店该天文化用品的销售总额.

解　因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(54, 12, 16, 150, 120)\cdot(0.5, 4, 0.4, 1, 1.2)\\&=54\times0.5+12\times4+16\times0.4+150\times1+120\times1.2\\&=375.4,\end{aligned}$$

所以这个商店该天文化用品的销售总额为 375.4 元.

练习17-2

1. 已知数组 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$：

(1) $\boldsymbol{a}=(1, -5, 2)$，$\boldsymbol{b}=(2, 2, 2)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(4, 5, 3, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 3, 1, 0)$；

(3) $\boldsymbol{a}=(-4, 0, 0, 2, 0)$，$\boldsymbol{b}=(1, 1, 1, 1, 1)$；

(4) $\boldsymbol{a}=(7, -5, 4, 2, 3, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 2, 2, 3, 5, -5)$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1, 3, x)$，$\boldsymbol{b}=(0, 2, 3)$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，求 x 的值.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(1, 7, 2, -3)$，$\boldsymbol{b}=(5, 0, -1, 2)$，$\boldsymbol{c}=(2, 3, 0, -3)$，求：

(1) $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}$；　　(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$；　　(3) $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

17.3 用软件处理数据表格

1. 电子表格中的公式

问题 如图 17-1 所示，怎样才能用电子表格中的公式计算功能，求出每位同学的总分及平均分呢？

	A	B	C	D	E	F
1	姓名	数学	语文	政治	总分	平均分
2	赵大伟	87	98	80		
3	王志强	65	77	66		
4	张小华	98	84	87		
5	李建军	86	80	87		
6	刘爱洁	84	88	78		

图 17-1

电子表格中的公式是用户自己定义的数学表达式，在电子表格中，可以通过公式去实现计算功能．如在 Excel 中，计算上述每位同学总分的具体操作步骤为：

第一步：选中单元格 E2，输入公式“＝B2＋C2＋D2”，然后按回车键；

第二步：选中单元格 E2，用鼠标选中填充柄，向下拖拽，直到 E6，松开鼠标．

进行上述操作后，可以看出，上述问题中的总分已经全部算出来了，如图 17-2 所示．

E2 ▾ fx =B2+C2+D2

	A	B	C	D	E	F
1	姓名	数学	语文	政治	总分	平均分
2	赵大伟	87	98	80	265	
3	王志强	65	77	66	208	
4	张小华	98	84	87	269	
5	李建军	86	80	87	253	
6	刘爱洁	84	88	78	250	

图 17-2

通过以上操作，我们可以看出，在电子表格中，公式是以等号开头，由运算符和运算对象组成的，这跟数学中的公式很相似．电子表格中常用的运算符号和数学运算符号之间的对比如表 17-4 所示．

> 求图 17-1 中的平均分．
>
> 试一试

表 17-4

	加	减	乘	除	乘方	算术平方根	常用对数	小于等于	大于等于	不等于
数学符号	$+$	$-$	$\times$	$\div$	a^b	$\sqrt{a}$	$\lg a$	$\leqslant$	$\geqslant$	$\neq$
电子表格中的符号	+	-	*	/	a^b	sqrt(a)	log(a)	<=	>=	<>

例 1　在电子表格中计算 $234+567+2^{24}$ 的值．

解　在电子表格的 A1 单元格内输入公式“=234+567+2^24”，然后按回车键，就可以得到运算结果，如图 17-3 所示．

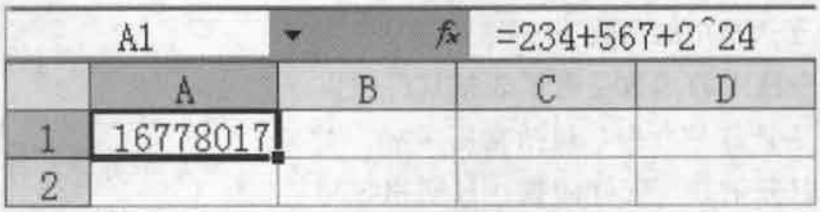


图 17-3

例 2　表 17-5 所示是某家庭 5 月份的收支情况，请用电子表格计算该家庭 5 月份的存款数额和月结余现金数（单位：元）．

表 17-5

月收入	存款（收入的 45%）	电话费	水电费	伙食费	其他	月结余
2 600		60	105	670	260	

解　将上述表格输入到电子表格中，如图 17-4 所示．

然后在单元格 B3 中，输入公式“=A3*45%”，然后按回车键，得到存款金额，如图 17-4 所示．

在单元格 G3 中，输入公式“=A3-B3-C3-D3-E3-F3”，然后回车，得到月结余现金数，如图 17-5 所示．

	A	B	C	D	E	F	G
1	某家庭5月份收支情况表						
2	月收入	存款（收入的45%）	电话费	水电费	伙食费	其他	月结余
3	2600	=A3*45%	60	105	670	260	
4							

图 17-4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	某家庭5月份收支情况表							
2	月收入	存款（收入的45%）	电话费	水电费	伙食费	其他	月结余	
3	2600	1170	60	105	670	260	=A3-B3-C3-D3-E3-F3	
4								

图 17-5

最终运算结果如图 17-6 所示.

	A	B	C	D	E	F	G
1	某家庭5月份收支情况表						
2	月收入	存款（收入的45%）	电话费	水电费	伙食费	其他	月结余
3	2600	1170	60	105	670	260	335
4							

图 17-6

2. 电子表格中的函数

电子表格中的函数是电子表格软件提供的完成特定计算的命令，包括常用函数、工程函数、财务函数、统计函数、日期和时间函数、三角和逻辑函数等.

如图 17-7 所示的电子表格中，如果想求出每人各科成绩的总分，那么可以在 H2 单元格中输入公式“$=B2+C2+D2+E2+F2+G2$”.

(1) 如果在单元格中输入公式时，没有以等号开头将是什么结果？

(2) 如果在 Excel 中，在 A1 单元格中输入公式“$=A1+B1$”将出现什么结果？

试一试

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	姓名	数学	语文	政治	体育	专业课1	专业课2	总分
2	赵大伟	87	98	80	99	86	95	
3	王志强	65	77	66	91	74	67	
4	张小华	98	84	87	88	94	90	

图 17-7

不难想到，如果上述表格中的课程很多，那么公式会很长，那样是很不方便的. 使用 Excel 中的函数可以快捷地解决这个问题.

下面我们用 SUM 函数来解决上述问题.

在 H2 单元格中输入 “= SUM(B2:G2)”，然后按回车键即可得到赵大伟的总分. 可以用同样的办法求出其他人的总分.

如果想求赵大伟的平均分，可以在 I2 单元格中输入 “=AVERAGE(B2:G2)”，然后按回车键即可. 用同样的方法可以求出其他人的平均分.

> 用求最大值的函数 MAX 和求最小值的函数 MIN 找出图 17-7 中的最大值和最小值.
>
> 试一试

最终计算结果如图 17-8 所示.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	姓名	数学	语文	政治	体育	专业课1	专业课2	总分	平均分
2	赵大伟	87	98	80	99	86	95	545	90.83
3	王志强	65	77	66	91	74	67	440	73.33
4	张小华	98	84	87	88	94	90	541	90.17
5	李建军	86	80	87	75	84	90	502	83.67
6	刘爱洁	84	88	78	85	83	91	509	84.83

图 17-8

例 3　已知

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

在电子表格中，用阶乘函数 FACT 计算 $n=9$ 时 e 的近似值.

解　先分别计算出$\frac{1}{1!}$，$\frac{1}{2!}$，$\frac{1}{3!}$，…，$\frac{1}{9!}$的值，如图 17-9 所示.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n的值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e=1/1!+1/2!+…+1/n!
2	1/n!的值	1	0.5	0.16666667	0.04166667	0.00833333	0.00138889	0.00019841	0.00002480	=1/FACT(J1)	

图 17-9

然后在 K2 单元格中利用求和函数 SUM 计算出 e 的近似值，如图 17-10 所示.

K2　　f_x　=SUM(B2:J2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n的值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e=1/1!+1/2!+…+1/n!
2	1/n!的值	1	0.5	0.16666667	0.04166667	0.00833333	0.00138889	0.00019841	0.00002480	0.00000276	1.71828153

图 17-10

3. 排序

为了方便查找数据或为了让数据具有一定的顺序，需要对表格中的数据按照某一标准进行排序. 以图 17-11 为例，对五位同学的总分进行排序，操作步骤如下：

图 17-11

图 17-12

第一步：选中要排序的区域，然后单击“数据”菜单，选中“排序”命令，打开排序对话框，如图 17-11 所示；

第二步：在“排序”对话框中的“主要关键字”列表框中选择“总分”，并单击其右侧的“降序”单选框，如图 17-12 所示，然后单击“确定”按钮，表中数据按要求调整了顺序，如图 17-13 所示.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	姓名	数学	语文	政治	体育	专业课1	专业课2	总分	平均分
2	赵大伟	87	98	80	99	86	95	545	90.83
3	张小华	98	84	87	88	94	90	541	90.17
4	刘爱洁	84	88	78	85	83	91	509	84.83
5	李建军	86	80	87	75	84	90	502	83.67
6	王志强	65	77	66	91	74	67	440	73.33

图 17-13

4. 筛选

如果要查找政治成绩大于或等于 80 分的同学，我们可以用电子表格的筛选功能，操作步骤如下：

第一步：选中 D1 单元格后，选择“数据”菜单下“筛选”中的“自动筛选”命令，如图 17-14 所示；

图 17-14

第二步：单击“政治”栏里下拉列表框里的“自定义”，出现对话框，如图 17-15 所示；

图 17-15

第三步：选择“大于或等于”“80”，如图 17-16 所示，单击“确定”按钮，得到符合要求的数据，如图 17-17 所示；

图 17-16

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	姓名	数学	语文	政治	体育	专业课	专业课	总分	平均分
2	赵大伟	87	98	80	99	86	95	545	90.83
3	张小华	98	84	87	88	94	90	541	90.17
5	李建军	86	80	87	75	84	90	502	83.67

图 17-17

值得注意的是，此时选择“数据”菜单下“筛选”中的“自动筛选”命令，可恢复全部数据.

筛选功能的作用就是在操作数据项时，有时参加操作的只有一部分记录，为了提高操作速度，把那些不参加操作的记录隐藏起来，而把要操作的数据筛选出来作为操作对象，以增加效率.

用相同的方法，分别查询数学、英语大于 80 分的同学.

试一试

练习17-3

1. 下表给出的是各个品牌杀毒软件在某城市五个软件专卖店一天的销量：

	卡巴斯基/套	NOD32/套	瑞星/套	金山/套	其他/套
专卖店一	204	115	132	241	96
专卖店二	402	265	345	105	112
专卖店三	103	366	233	234	65
专卖店四	256	345	104	86	103
专卖店五	178	98	254	104	77
单价/元	188	126	288	166	

(1) 分别求出各个专卖店该天的销售总数量和各个品牌该天销售的总数量；

(2) 分别求出该天各个专卖店销售卡巴斯基、NOD32、瑞星、金山四种杀毒软件的总金额，并对销售额排序；

(3) 找出销售量最大和最小的杀毒软件.

17.4 数据表格的图示

问题 怎样才能更加直观地表示数据表格中的数据呢？

表 17-6

姓名	数学	语文	政治
赵大伟	87	98	80
王志强	65	77	66
张小华	98	84	87
李建军	86	80	87
刘爱洁	84	88	78

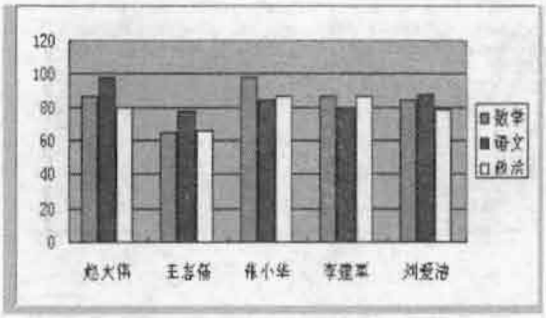


图 17-18

如图 17-18 所示，表 17-6 中的数据可以绘制到柱形图中. 从图中可以直观地看到五位同学各科成绩的差异，以及三门课程成绩的稳定情况.

下面简单介绍利用电子表格的图表功能，作出数据表格图示的方法.

根据表中的数据绘制出一个表示数据大小比例的图形，这个图形叫做图表.

下面以作出图 17-18 为例介绍操作步骤.

首先在 Excel 中输入相关数据，然后选中数据区域，再点击“插入”菜单中的“图表”(或者利用工具栏中的图表向导)，如图 17-19 所示.

在图表向导第一步中选择图表类型“柱形图”，如图 17-20 所示，然后点击“下一步”.

在图表向导第二步中确认源数据，如图 17-21 所示.

点击“完成”按钮，得到相应的图表.

如果得到图表后，要修改图表的类型、图例、图表背景等，可以通过图表工具栏来完成. 也可以用鼠标右键单击图表，弹出右键菜单，选中相应的选项进行修改.

图表工具栏如图 17-22 所示.

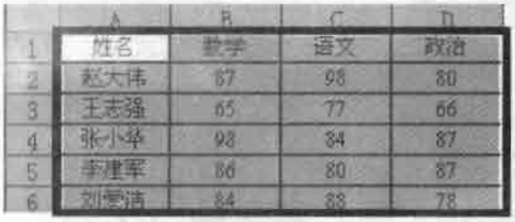


图 17-19

图 17-20

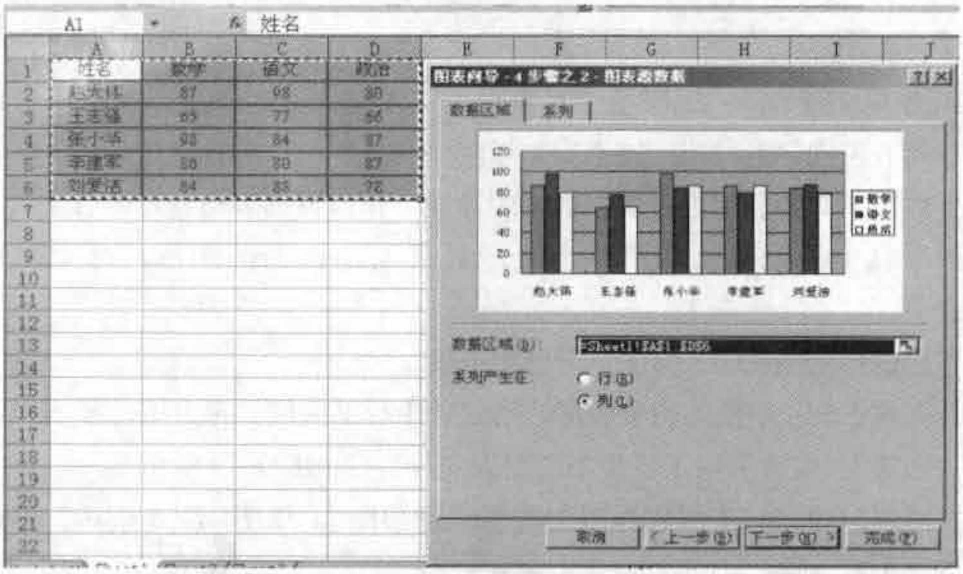


图 17-21

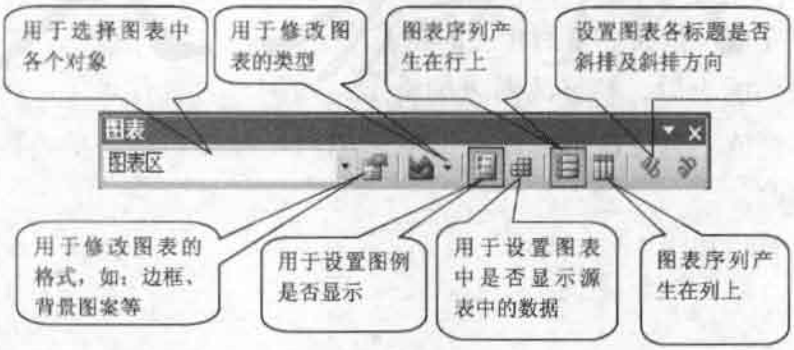


图 17-22

下面介绍电子表格中常用的几种图表类型.

1. 柱形图和条形图

柱形图用于显示一段时间内的数据变化或显示各项之间的比较情况，可以用来比较数据间的多少与大小关系. 在柱形图中，通常沿水平轴组织类别，而沿垂直轴组织数值.

我们也可以用条形图来显示数据间的大小关系. 如图 17-23 所示是表 17-6 的条形图，作图的具体操作步骤与前面类似.

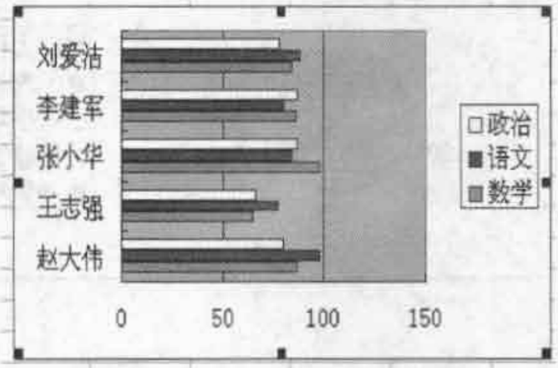


图 17-23

条形图是应用广泛的一种图表类型. 因为条形图与柱形图的行和列刚好是调过来了，所以有时可以互换使用.

> 你能在 Excel 表格中作出与图 17-24 对应的条形图吗?
>
> 试一试

对于表 17-6 中每位同学的成绩，可以算出总分，如表 17-7 所示，然后也可以用柱形图（或条形图）来表示，如图 17-24 所示.

表 17-7

姓名	数学	语文	政治	总分
赵大伟	87	98	80	265
王志强	65	77	66	208
张小华	98	84	87	269
李建军	86	80	87	253
刘爱洁	84	88	78	250

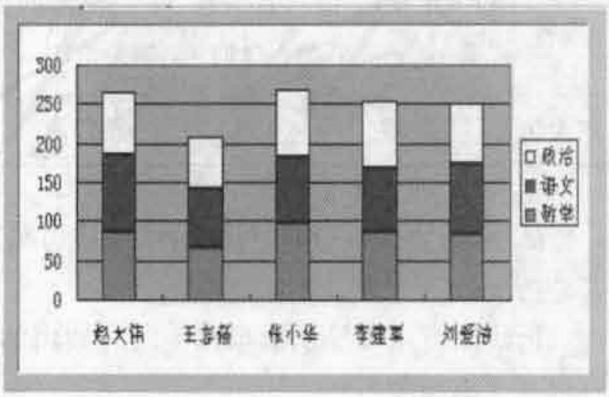


图 17-24

由图 17-23 和 17-24 我们可以直观地看到五名同学的三门课程的成绩以及总分排名情况.

2. 饼图

如果要考查表 17-7 中每名同学的总分占所有人成绩总分之和的比例，我们可以采用饼图（也叫扇形图）来直观表示，如图 17-25 所示.

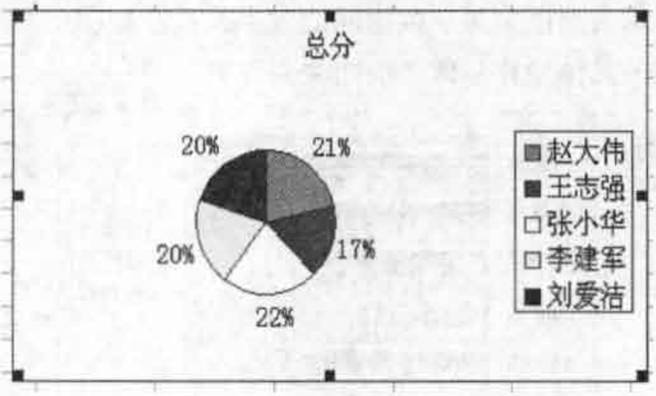


图 17-25

饼图能清楚地表示出各部分在总体中所占百分比，它有利于形成总体和部分的概念.

3. 折线图

表 17-8 是赵大伟同学在初中三年六个学期的数学期末考试成绩，我们可以用折线图来显示赵大伟同学在初中数学成绩的变化趋势，如图 17-26 所示.

表 17-8

姓名	07～08 学年第一学期	07～08 学年第二学期	08～09 学年第一学期	08～09 学年第二学期	09～10 学年第一学期	09～10 学年第二学期
赵大伟	90	98	80	82	89	91

从图 17-26 中，我们可以清晰地看出赵大伟同学在六个学期中数学学习的波动情况.

折线图可用来显示数据在一段时间内的变化趋势. 我们可以根据折线图，对将来作出预测.

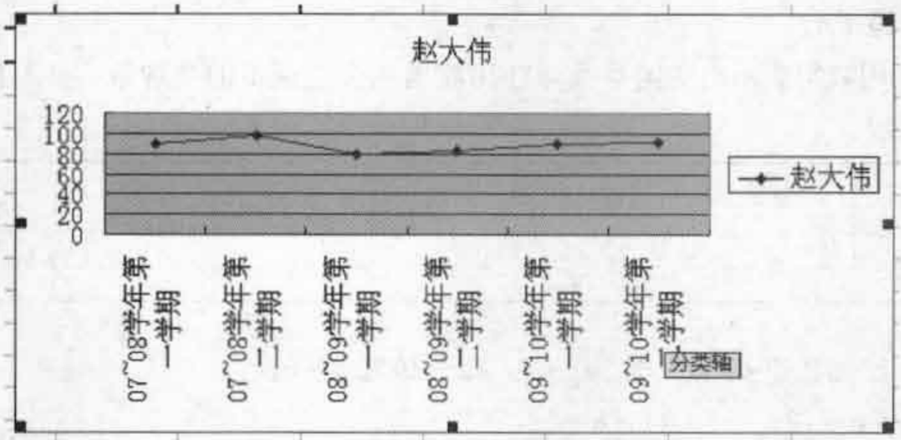


图 17-26

练习17-4

1. 下表给出的是各个品牌杀毒软件在某城市五个软件专卖店一天的销量：

	卡巴斯基/套	NOD32/套	瑞星/套	金山/套	其他/套
专卖店一	204	115	132	241	96
专卖店二	402	265	345	105	112
专卖店三	103	366	233	234	65
专卖店四	256	345	104	86	103
专卖店五	178	98	254	104	77

(1) 分别作出各个专卖店该天销售业绩的柱形图和各个品牌该天销售业绩的条形图；

(2) 作出各个品牌该天销售的市场份额的饼图.

2. 下表给出的是某品牌杀毒软件在一个专卖店中一周的销售业绩，作出其一周销售业绩的折线图.

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
销售量	62	105	175	156	98	204	467

习题十七

1. 用数组表示出中国乒乓球在历届奥运会上获得的金牌数，并写出该数组的维数：

年份	1988	1992	1996	2000	2004	2008
金牌数	2	3	4	4	3	4

2. 已知数组 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$：

(1) $\boldsymbol{a}=(2, -3, 1)$，$\boldsymbol{b}=(3, 1, -2)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(0, 3, 2, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-4, 5, -1, 2)$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1, 3, x)$，$\boldsymbol{b}=(y, 2, 3)$，$\boldsymbol{c}=(0, z, 3)$，如果 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，求 x，y 和 z 的值.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1, 4, 1, -2)$，$\boldsymbol{b}=(1, 2, 0, 0)$，$\boldsymbol{c}=(4, -1, 2, 3)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$； (2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$； (3) $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$.

5. 根据下列表格：

2008 年夏季奥运会奖牌数量

国家	金	银	铜	总数
中国	51	21	28	100
美国	36	38	36	110
俄罗斯	23	21	27	71
英国	19	13	15	47
德国	16	10	15	41

(1) 用数组表示出金牌、银牌和铜牌数；

(2) 作出柱形图和条形图；

(3) 作出中国金牌、银牌和铜牌分布的饼图.

阅读与实践

Excel 表格简介

一、初识 Excel

1. 启动 Excel

执行"开始→程序→Microsoft Excel".

2. 退出 Excel

执行"文件→退出".

3. Excel 的界面组成（如图 1 所示）

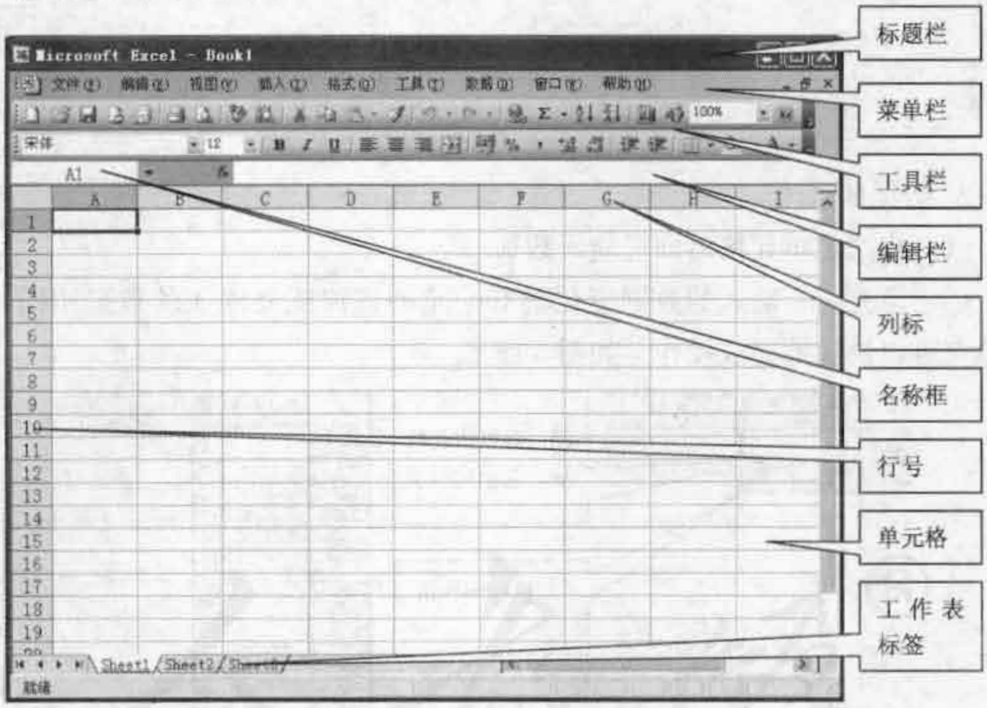


图 1

工作表：工作表是一张表格，由若干行和列组成．一个工作表中最多可以包含 65 536 行和 256 列．列号用字母标识，行号用数字标识．图 1 中共有默认的 3 个工作表，分别叫 Sheet1，Sheet2，Sheet3.

单元格：行和列交叉形成单元格，单元格是组成工作表的基本单位．每一个单元格有唯一的地址，用标识列号的字母后跟标识行号的数字来标识．图 1 中选中的单元格是 A1.

工作簿：若干个工作表组合在一起形成一个工作簿，我们把一个 Excel 文档叫做一个工作簿. 一个工作簿中最多可以包含 255 张工作表.

二、单元格的基本操作

1. 单元格的选择

对单元格进行操作必须先选中单元格或单元格区域.

单个单元格的选择：鼠标单击单元格，如单击选中 D3 单元格.

单元格区域的选择：按住鼠标拖动可选择一个单元格区域，如图 2 所示.

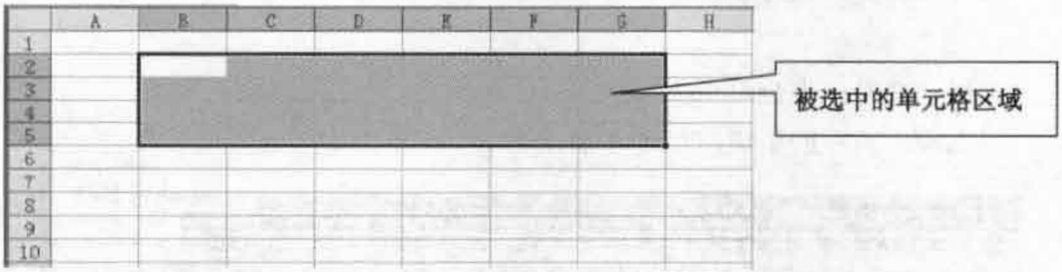


图 2

2. 数据的录入

（1）当选定单元格后即可输入数据.

（2）填充：若输入的数据变化具有一定的规律或要输入的数据相同，使用填充可以快捷地完成操作. 如图 3 所示.

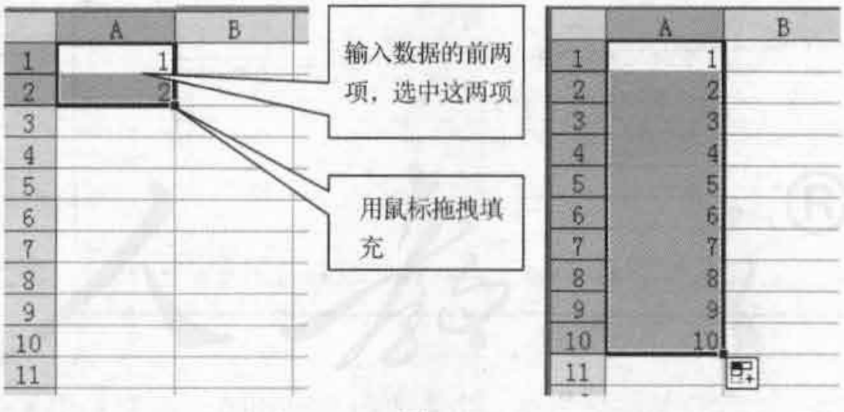


图 3

3. 单元格格式设置

选中要设置格式的单元格，单击鼠标右键，在弹出菜单中选择设置单元格格式，得到图 4.

通过这个对话框可以设置单元格数据类型、对齐方式、字体、边框、背

景图案等，让单元格中的数据按照我们的要求进行显示.

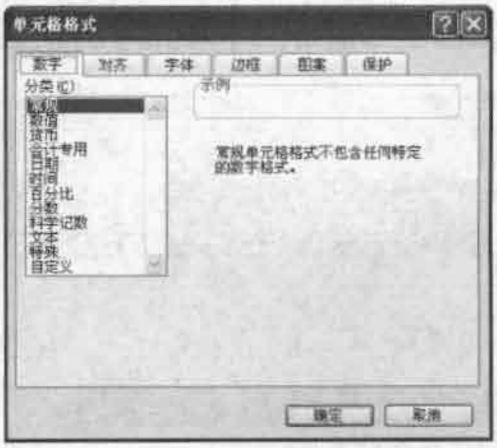
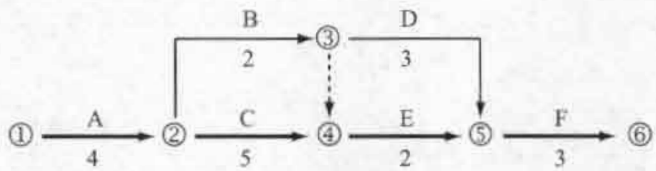


图 4

第十八章 编制计划的原理与方法

几千年的历史经验，沉淀为统筹学这一中国数学应用的瑰宝，通过科学地编制计划，使纷繁复杂的事物，变得条理清晰，有条不紊，从而焕发出灿烂的光芒。



时间是个常数，但对勤奋者来说，是个“变数”。用“分”来计算时间的人比用“小时”来计算时间的人时间多59倍。

——雷巴柯夫

在数学中，我们发现真理的主要工具是归纳和模拟。

——拉普拉斯

凡事预则立，不预则废．人们在日常生活及生产活动中，往往要结合各种条件做出相关的计划．由于编制工程计划的需求，半个世纪前就有了统筹方法．统筹方法是一种安排工作进程、编制计划的数学方法，它的实用范围极广泛，在企业管理和基本建设，以及关系复杂的科研项目的组织与管理中，经常应用．

下面我们先从一个具体的例子开始，来学习编制计划的基本原理和方法．

18.1 编制计划的有关概念

问题　某公司来了位客人，老板让秘书泡茶招待客人．假设完成这件事情的步骤及完成各步骤所需要的时间如表 18-1 所示．

表 18-1

序号	工作名称	持续时间/分钟	工作内容
1	洗茶杯	2	清洗茶杯
2	放茶叶	1	取适量茶叶并放入茶杯内
3	烧水	5	打开饮水机烧水
4	泡茶	1	泡茶后端给客人

你能设计出几种方案呢？

我们把类似于上面的问题叫做**统筹问题**，也叫做**项目**或**工程**．在本章中，我们把统筹问题、工程和项目看成同义词．

上述问题中的表 18-1 叫做**工作明细表**，有具体开始时间和完成时间的一项实际任务，叫做**工作**（或**工序**），例如上面问题中的洗茶杯、烧水等活动，都是工序．某项工作从开始到完成的持续时间量叫做**工期**（或**工时**），工期可以用小时、日、周、月等表示．

下面我们来解决上面的问题．

方案一：先洗茶杯，放茶叶，然后再打开饮水机烧水，等水开后泡茶端给客人．

方案一可以用图 18-1 表示.

图 18-1

方案二：打开饮水机烧水的同时洗茶杯，洗完茶杯后取茶叶放入杯中，然后等水开后泡茶并端给客人.

> 请你算出实施这两个方案各自所需要的时间.
> 试一试

方案二可以用图 18-2 表示.

比较以上两个方案，显然方案二用的时间少.

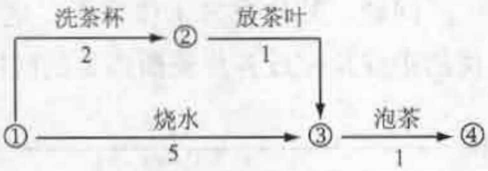


图 18-2

在上面的活动中，“放茶叶”得“洗茶杯”结束才能开始，我们称这两项工作是**相互邻接的**，简称是**邻接的**. 茶杯不洗，就不能放茶叶，所以“洗茶杯”叫做“放茶叶”的**紧前工作**（**紧前工序**），“放茶叶”叫做“洗茶杯”的**紧后工作**（**紧后工序**）. 为了节省时间，有的工作可以同时开始，如“烧水”与“洗茶杯”可以同时展开，我们称它们为**平行工作**（**平行工序**）.

像图 18-1 和 18-2 这样的图我们称为**双代号网络图**，简称**网络图**. 图中小圆圈叫做**节点**，小圆圈中的数字是节点的编号，网络图中第一个节点叫做网络图的**起始节点**，表示一项计划或工程的开始；网络图中最后一个节点叫做网络图的**终止节点**，表示一项计划的完成；网络图中其余节点叫做**中间节点**，它既表示前一项工作的完成，又表示后一项工作的开始. 两个节点间的**箭线**表示一项工作，如图 18-1 中，节点“①”和“②”之间的箭线表示“洗茶杯”这项工作，记作〈1，2〉. 网络图中工作的名称与工期一般分别标在箭线的上方与下方.

例 佳佳每天早晨的活动如下：起床用 2 分钟，洗脸、刷牙用 4 分钟，烧饭用 8 分钟，打扫房间用 5 分钟，吃饭用 5 分钟. 试分析出上述各项工作之间的邻接关系，并画出整个活动的网络图.

解 分析以上各项工作，容易知道，先起床，再洗脸、刷牙，然后在烧饭的同时可以打扫房间，最后吃饭. 其中烧饭与打扫房间是平行工作.

整个活动的网络图如图 18-3 所示.

图 18-3

应当注意的是，在绘制网络图时，要保持同一对节点之间只对应一个工作．在图 18-3 中，要将工作“打扫房间”和“烧饭”画成图 18-4 的方式，而不是 18-5 中的方式．

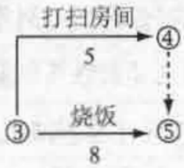


图 18-4

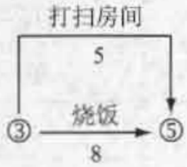


图 18-5

这是因为在图 18-5 中，同一对节点〈3，5〉之间对应着两个工作，而在图 18-4 中，采用不同的工作与不同的一对节点对应，避免了混乱．为了保持工作间的逻辑关系，借助于虚箭线表示**虚工作**．在网络图中，虚工作只是为了表述工作间的逻辑关系，它是既不消耗时间也不消耗资源的工作．

练习18-1

1. 试结合自己日常生活中的某项活动，编制一个工作明细表．

2. 小明早晨起来要完成以下几件事情：洗水壶用 1 分钟，烧开水用 11 分钟，把水灌入水瓶用 2 分钟，吃早点用 8 分钟，整理书包用 2 分钟：

(1) 在分析出上列各项工作的邻接关系的基础上，画出整个活动的网络图；

(2) 小明应该怎样安排才能使所用的时间最少？最少要几分钟？

18.2 关键路径法

问题　某公司要研制一种新产品，需要制定这种新产品的研制计划，我们如何才能帮助该公司制定计划呢？

在这个问题中，我们首先需要了解新产品研制的项目工序，比如通过调

研我们知道该项目工序共包括：新产品的设计（需 20 天），零部件的来源(零部件共两类，自制的和外购的，自制需 15 天，外购需 10 天)，零部件的装配（需 8 天），样品鉴定（需 3 天）．根据工作的先后顺序，把研制新产品的各项工作列成一个明细表，如表 18-2 所示．

表 18-2　新产品研制的工作明细表

序号	工作名称	持续时间/天	工作内容
1	产品设计	20	制作产品各部件的设计图、产品装配图等
2	自制零部件	15	按设计图纸制作产品零部件
3	外购零部件	10	按图纸要求联系厂家购置所需零部件
4	装配	8	按设计装配图纸进行产品装配
5	样品鉴定	3	组织专家对样品进行鉴定

接着，我们要分析一下各项工作间的关系：产品设计要先于其他工作，自制和外购零部件在产品设计之后，而自制零部件与外购零部件可以同时进行，因此它们是平行工作，同在装配之前，最后是样品鉴定．根据紧前工作列出工作序号形成表 18-3，我们称其为产品研制工作间的邻接表．

表 18-3　新产品研制工作间的邻接表

序号	工作名称	持续时间/天	紧前工作
1	产品设计	20	—
2	自制零部件	15	1
3	外购零部件	10	1
4	装配	8	2，3
5	样品鉴定	3	4

在表 18-3 中，如果我们将最后一列的“紧前工作”改为“紧后工作”也是可以的，在这一列中主要是确定各工作之间的紧前、紧后逻辑关系，而紧前、紧后工作是相对的．

请将表 18-3 中的紧前工作改为紧后工作，重新完成该表，并与同学交流．

试一试

有了表 18-3，我们就可以作出研制计划的网络图，如图 18-6 所示．

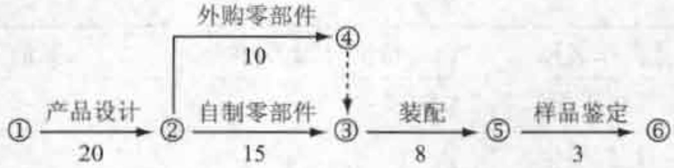


图 18-6

自起始节点开始，顺着箭线的方向，经过一系列连续不断的作业直至最后一个节点的通路叫**路径**. 完成路径上全部工作的工期之和叫做**路径时间长度**，简称**路长**. 因此，有了网络图后，我们可以算出每条路径的总时间. 例如路径

$$①\xrightarrow[20]{\text{产品设计}}②\xrightarrow[15]{\text{自制零部件}}③\xrightarrow[8]{\text{装配}}⑤\xrightarrow[3]{\text{样品鉴定}}⑥$$

的路长为 20+15+8+3=46 天. 在所有的路径中，路长最大的路径叫做**关键路径**，我们可以在网络图中用粗箭线表示. 关键路径上的节点叫做**关键节点**，各项工作叫做**关键工作**. 关键路径的长度就是统筹问题的总工期. 在上面的例子中，正常情况下，产品研制工作的总工期为 46 天.

> 你能找出图 18-6 中的关键路径吗？哪些工作是关键工作？
>
> 试一试

在实际工作中，如果关键工作的工期延长了，总工期也必然延长.

从上面的过程可以看到，新产品的研制计划，我们共分了三个步骤：

(1) 在工作明细表的基础上，列出工作间的邻接表；

(2) 依据邻接表作出网络图；

(3) 找到网络图中的关键路径，从而得到所编制计划的时间信息.

这是解决统筹问题的一种基本方法，我们把这种编排计划的方法叫做**关键路径法**.

练习18-2

1. 妈妈起床后，早饭前要完成以下几件事情：烧开水用 12 分钟，打扫卫生用 5 分钟，把水灌入热水瓶用 1 分钟，买早点用 8 分钟：

(1) 请你完成下表；

序号	工作名称	持续时间/分钟	紧前工作
1	烧开水	12	
2	打扫卫生	5	
3	把水灌入热水瓶	1	
4	买早点	8	

(2) 绘制该计划的网络图；

(3) 妈妈早饭前完成这几件事，需要的最短时间是多少？

2. 请结合你的日常生活或课外活动：

(1) 制订某项活动的计划，列出该活动中各项工作的明细表；

(2) 在分析明细表中的各项工作邻接关系的基础上，列出工作间的邻接表；

(3) 作出该活动计划的网络图；

(4) 找出关键路径并说明全部计划所需的时间.

18.3 统筹图

网络图和横道图都是统筹图，下面分别介绍它们的绘制方法和特点.

18.3.1 网络图

由前面的知识可以知道，网络图由箭线、节点和路径三个要素组成.

一项工作或一道工序统称为**作业**，在网络图中，作业用箭线表示，箭尾 i 表示作业开始，箭头 j 表示作业结束，此时该作业可记作 $\langle i, j\rangle$. 作业的名称标注在箭线的上方，该作业的工期（或工时）记作 $D_{i,j}$，标注在箭线的下方. 如图 18-6 中，“产品设计”这项工作可记作 $\langle 1, 2\rangle$，工期 $D_{1,2}=20$.

节点表示某项作业的开始或结束，它不消耗任何资源和时间.

绘制双代号网络图时，一般有如下绘制规则：

(1) 网络图由起始节点开始，按照工作的流向顺序，自左向右绘制，直到终止节点为止，且图中只能有一个起始节点和一个终止节点；

(2) 节点按出现的先后次序用正整数编号，且箭头节点的编号必须大于箭尾节点的编号，即作业 $\langle i, j\rangle$ 中有 $i<j$，因此起始节点的编号最小，而终止节点的编号最大；

(3) 任意两个节点间只能有一条箭线，即不能用同一对节点表示不同的工作，这样就可以建立一对节点与一项工作之间的一一对应关系，以便通过一对节点来表示一项工作；

(4) 网络图中不允许有缺口与回路，在网络图上，除了起始节点和终止节点外，其它所有事件前后都要用箭线连接起来，不可中断，在图中不允许有缺口.

如在图 18-7 中所示的网络中，工作 B 丢失了与其紧后工作应有的联系，因而是错误的.

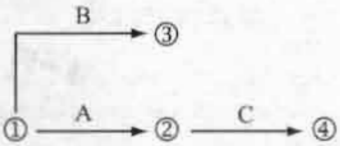


图 18-7

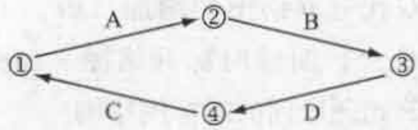


图 18-8

网络图中不允许有回路，即不允许循环现象，否则将造成逻辑上的错误，使工作永远不能完成. 如图 18-8 所示的网络图就是一个循环，因此也是一个错误的网络图.

例　根据下列工作间的邻接表：

工作代号	工期/天	紧前工作
A	4	—
B	2	A
C	5	A
D	3	B
E	2	B，C
F	3	D，E

(1) 作出双代号网络图；

(2) 试问：该统筹问题最少需要多少天才能完工？

解　(1) 由邻接表看出，B，C 是 A 的紧后工作，可以并进展开；D 是 B 的紧后工作，E 是 B，C 的紧后工作，而且 F 无紧后工作，因此它的箭头节点

就是终止节点. 双代号网络图如图 18-9 所示.

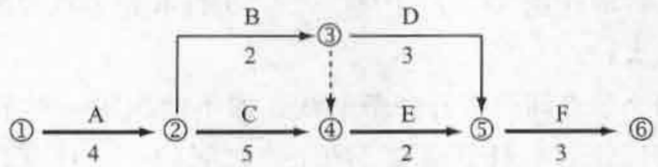


图 18-9

在图 18-9 中，我们已将关键路径都用粗箭线表示了. 图中的虚工作可以省略工作名称，工期可以省略或者标成 0.

(2) 由于关键路径的路长为 $4+5+2+3=14$，故该统筹问题的总工期是 14 天.

试一试

请你找出例题中所有的路径，并计算每条路径的路长.

在实际工作中，为了增加时间感和进度感，在双代号网络图中增加日历、工程标尺与进度标尺，叫做时标网络图. 如图 18-10 是某统筹问题计划的时标网络图.

在图 18-10 中，并没有标出休息日，即认为休息日星期六、星期日按加班处理，以使筹备工作早日完成. 由图可以看出，筹备工作自 5 月 10 日开始，至 5 月 22 日结束.

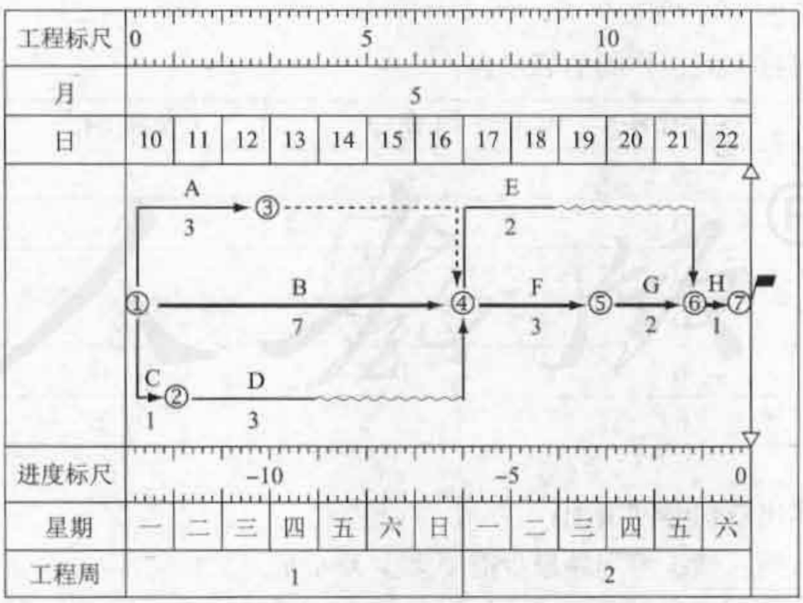


图 18-10

练习18-3

1. 已知各项工作的逻辑关系如下表所示，试绘制双代号网络图：

(1)

工作	A	B	C	D
紧前工作	—	—	A，B	B

(2)

工作	A	B	C	D	E
紧前工作	—	—	A，B	A，B	B

2. 根据下列工作间的邻接表：

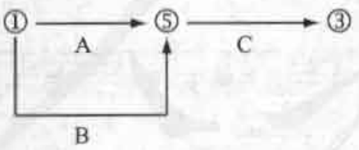
工作	工期/天	紧前工作
A	4	—
B	2	—
C	5	—
D	3	A，B
E	2	B
F	5	C，D，E

(1) 作出双代号网络图；

(2) 该统筹问题总工期是多少天？

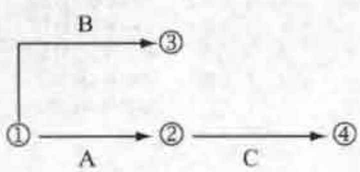
3. 指出下列网络图中的错误，并在不改变工作间邻接关系的前提下，绘制正确的网络图.

(1)



(2)

工作	紧前工作
A	—
B	—
C	A，B



4. 王林下午放学后要做这几件事：做作业（A）用 30 分钟，烧饭（B）用 40 分钟，打扫院子（C）用 8 分钟，吃饭（D）用 10 分钟，洗碗（E）用 2 分钟，整理桌凳（F）用 2 分钟.

请你在上述各项工作邻接关系的基础上，列出工作间的邻接表，作出该活动计划的双代号网络图，找出关键路径，并说明完成全部事情所需的时间.

18.3.2 横道图

在实际工作中，编制计划时通常采用网络图，因为网络图容易表述工作间的邻接关系. 但在执行计划时，为了便于让执行人员读懂计划中各项工作的时间进程，一般采用横道图（或甘特图）表示一个计划.

图 18-11 是某项计划的横道图，在图中，左边是工作表，显示每项工作的详细数据，如任务名称、工期、开始时间等，右边则用矩形横道显示信息，每一个矩形横道表示一项工作. 横道的长度表示工作的持续时间，即工期. 通过视图上、下方的工程标尺与进度标尺，可以清楚地得到每一项工作的起止日期与整个统筹问题的起止日期. 图中实体横道对应着工程中的关键工作.

横道图是 1917 年由美国人亨利·劳伦斯·甘特（Henry Laurence Gantt，1861—1919）发明的. 亨利·劳伦斯·甘特是科学管理运动的先驱者之一.

读一读

任务名称	工期	开始时间	完成时间
A	1 工作日	2004年5月10日	2004年5月10日
B	3 工作日	2004年5月10日	2004年5月12日
C	7 工作日	2004年5月10日	2004年5月16日
D	3 工作日	2004年5月11日	2004年5月13日
E	2 工作日	2004年5月17日	2004年5月18日
F	3 工作日	2004年5月17日	2004年5月19日
G	2 工作日	2004年5月20日	2004年5月21日
H	1 工作日	2004年5月22日	2004年5月22日

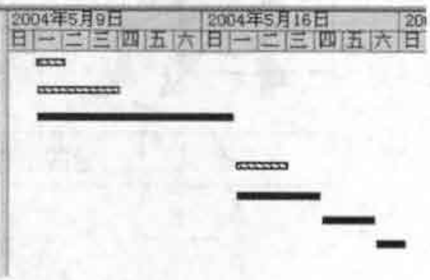


图 18-11

随着现代信息技术的发展，人们研发了许多计划编制软件，比较成熟的

软件有微软公司的 Project，北京梦龙科技有限公司的梦龙智能项目管理系统（MRPERT）等.

下面介绍一种在 Excel 中作横道图的方法.

S1：启动 Excel 后，仿照图 18-12 的格式，制作一份表格，并将有关工序名称、开（完）工时间和工程持续时间等数据填入表格中.

	A	B	C	D
1		开始时间	工期	完工时间
2	A	2010-5-10	1	2010-5-11
3	B	2010-5-10	3	2010-5-13
4	C	2010-5-10	7	2010-5-17
5	D	2010-5-11	3	2010-5-14
6	E	2010-5-17	2	2010-5-19
7	F	2010-5-17	3	2010-5-20
8	G	2010-5-20	2	2010-5-22
9	H	2010-5-22	1	2010-5-23

图 18-12

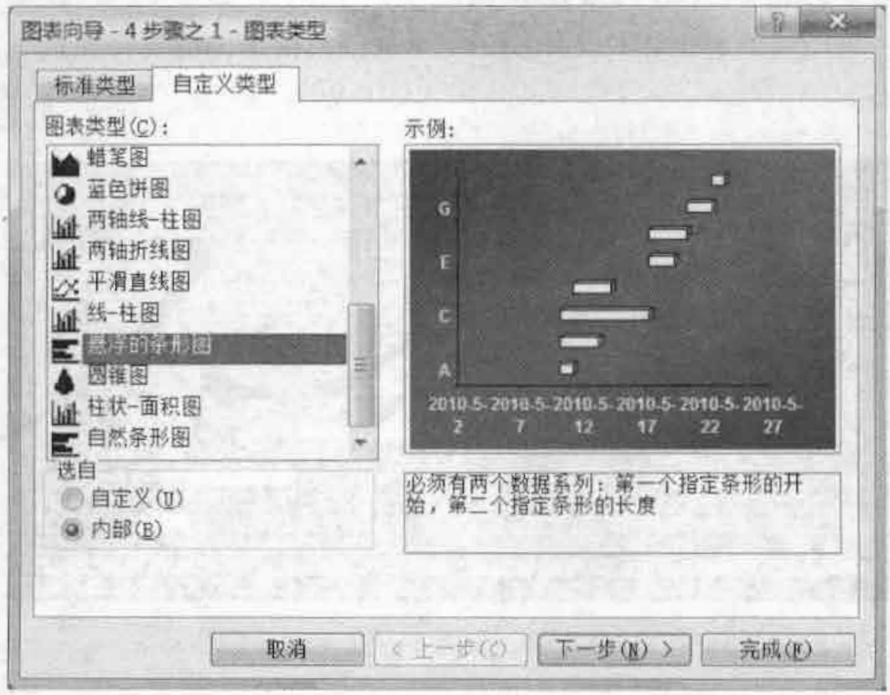


图 18-13

A1 单元格中请不要输入数据，否则后面制作图表时会出现错误．“完工时间”也可以不输入．

S2：选中 A1 至 C9 的单元格区域，执行“插入→图表”命令（或者直接按“常用”工具栏上的“图表向导”按钮），启动“图表向导—4 步骤之 1—图表类型”（如图 18-13）．

S3：切换到“自定义类型”标签下，在“图表类型”下面的列表中，选中“悬浮的条形图”选项，单击“完成”按钮，将图表插入到文档中．

经过 S3 操作，图表中有关“任务名称”就按开工顺序从上到下排列了，这样更符合我们的实际情况．

读一读

然后用鼠标双击图表的纵坐标轴，打开“坐标轴格式”对话框，切换到“刻度”标签下，选中“分类次序反转”选项；再切换到“字体”标签下，将字号设小一些，按“确定”后返回．

S4：仿照上面的操作，打开横坐标轴的“坐标轴格式”对话框，在“刻度”标签中，将“最小值”和“交叉于”后面方框中的数值都设置为“40308”（即日期 2010-5-10 的序列值，具体应根据实际情况确定）；同时，在“字体”标签中，将字号设置小一些，按“确定”后返回．

调整好图表的大小和长宽比例，一个规范的横道图就制作完成了，如图 18-14所示．

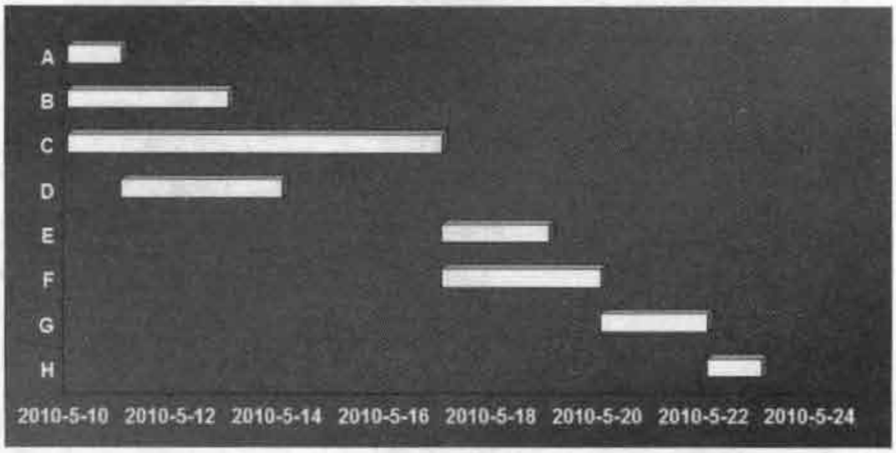


图 18-14

也可以利用相应的设置对话框，修改图表的格式、颜色等，感兴趣的同学们请自己练习设置.

练习18-4

1. 根据下表，绘制横道图. 其中工作A的开工日期定为2011年8月1日.

工作代号	工期/天	紧前工作
A	4	—
B	2	A
C	5	A
D	3	B
E	2	B，C
F	3	D，E

2. 某厂研制一种新产品，由锻件、机加工件与外购件组成，研制该产品的工序如下表：

工序名称	工序代号	工时/天	紧前工序
设计（产品和工艺）	A	50	—
外购材料与配件	B	45	A
锻件下料、锻造	C	5	A
锻件机加工	D	10	C，F
工装设计	E	10	A
工装制造	F	20	E
机加工件制造	G	30	F
产品装配与调试	H	10	B，D，G

(1) 试绘制该研制项目的双代号网络图；

(2) 假设本项目的开始日期为2012年3月1日，请按日历绘制相应的横道图.

18.4 进度计划的编制

采用双代号网络图来编制统筹问题的计划，可以从网络图中找出关键路径，对每一个关键工作优先安排资源，提高效率，尽量缩短它们的工期. 但是如果一项计划的工作数量庞大、邻接关系复杂时，把所有路径一一列举出来计算路长，然后找关键路径的方法显然就是有一定局限性的，这就需要另找方法；同时，对非关键工作而言，只要在不影响原工期的前提下，可适当抽调人力、物力和资源，支援关键工作，从而使总工期得以提前. 而要找出非关键工作的机动时间，则需要引入有关时间参数及其计算方法.

18.4.1 网络图的时间参数

1. 节点的最早开始时间与最迟开始时间

从前面的知识可以看出，网络图中节点并不占用时间，它只表示进入该节点的作业最迟在什么时刻结束和由该节点出发的作业最早可能开始的时间.

从节点 i 开始的各项活动最早可能开始的时间，叫做**节点 i 的最早开始时间**，记作 ET_i. 从网络图的起始节点开始计算，在没有规定最早开始时间的情况下起始节点的值设为 0，即

$$ET_1=0.$$

读一读

ET 是英语 Earliest Time 的缩写.

我们可以依据工作间的邻接关系，从起始节点开始，从左向右（按节点编号由小到大）顺向递推计算各项工作的最早开始时间.

图 18-15 是某项工作计划的网络图. 其中，工作 A 的最早开始时间没有特殊要求，所以

$$ET_1=0.$$

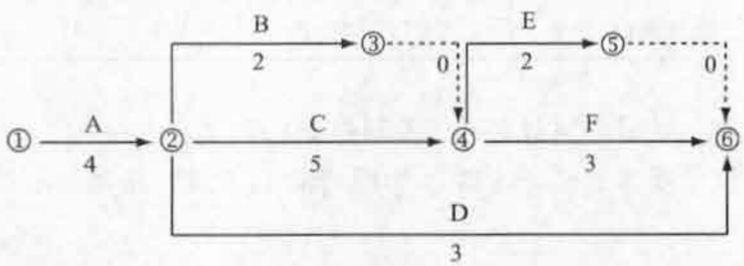


图 18-15

工作 B，C，D 最早开始时间是相同的，也就是节点②的最早开始时间，即

$$ET_2 = ET_1 + \text{工作 A 的工期} = 0+4=4.$$

同理有

$$ET_3 = ET_2 + \text{工作 B 的工期} = 4+2=6.$$

对于工作 E，F，则必须在工作 B，C 都完成后才能开始，因此，它们的最早开始时间也就是节点④的最早开始时间.

$$ET_4 = \max\{ET_3 + \text{虚工作的工期}，ET_2 + \text{工作 C 的工期}\} = \max\{6，9\} = 9.$$

max{a，b，…}表示取 a，b，…中的最大者. 读一读

类似地，可以算得

$$ET_5=11,$$
$$ET_6=12.$$

每个节点的最早开始时间，一般用□表示，写在每个节点的旁边，如图 18-16 所示.

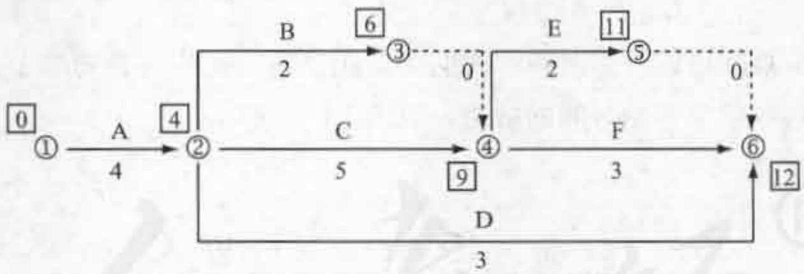


图 18-16

若设总工期为 ET，则本例中

$$ET=ET_6=12.$$

下面我们再来计算每项工作的最迟开始时间.

LT 是英语 Last Time 的缩写. 读一读

在不延误总工期的前提下，从节点 i 开始的各项活动最迟必须开始的时间叫做节点 i 的

最迟开始时间，记作 LT_i. 应当注意的是，如果某项工作在最迟时间之后开工，那就要影响整个统筹问题的进度了.

为了不延误总的工期 ET，所以终止节点的最迟时间应等于 ET. 于是，我们可以从终止节点开始，从右向左逆向递推计算各节点的最迟时间.

以图 18-15 为例，设节点⑥的最迟时间为 LT_6，则

$$LT_6=ET=12.$$

节点⑤的最迟时间，也就是虚工作的最迟开始时间 LT_5 为

$$\begin{aligned}LT_5&=LT_6-\text{虚工作的工期}\\&=12-0=12.\end{aligned}$$

对于节点④，它既是工作 E 的开始节点，又是工作 F 的开始节点，为了不延误这两项紧后工作的最迟开始时间，应取

$$\begin{aligned}LT_4&=\min\{LT_6-\text{工作 F 的工期},\ LT_5-\text{工作 E 的工期}\}\\&=\min\{9,\ 10\}\\&=9.\end{aligned}$$

类似地，可以算得

$$LT_3=9,$$
$$LT_2=4,$$
$$LT_1=0.$$

每个节点的最迟开始时间，我们约定用△表示，也写在每个节点的旁边，并且一般写在最早开始时间的后边，如图 18-17 所示.

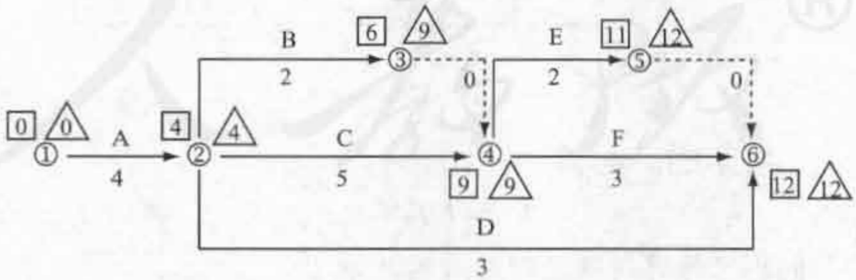
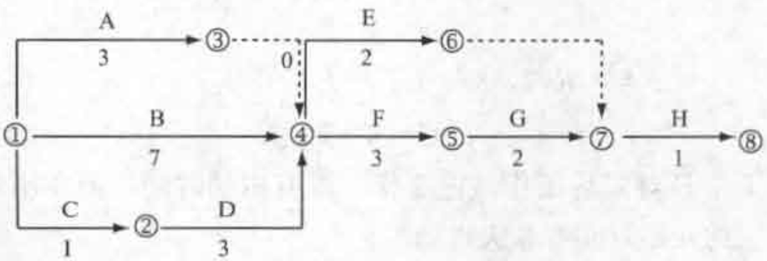


图 18-17

至此，我们就得到了每一项工作的最早开始时间与最迟开始时间.

练习18-5

1. 写出下列网络图中各节点的最早开始时间和最迟开始时间.



2. 根据下列工作间的邻接表：

工作	A	B	C	D	E	G	H
紧前工作	—	—	A	A	A，B	C	E
工期/天	3	2	3	4	3	5	2

(1) 作出双代号网络图；

(2) 标出各节点的最早开始时间和最迟开始时间；

(3) 该统筹问题需要多少天完工?

2. 工作时差

得到了某一项工作的最迟开始时间与最早开始时间后，就可以计算该项工作的开始时间是否有机动时间. 我们先来定义时差的概念.

时差是指在不影响整个项目按期完工的条件下，某工作在开始时间安排上可以机动使用的一段时间. 时差分为自由时差和总时差.

工作 $\langle i, j\rangle$ 的**自由时差** $r\langle i, j\rangle$ 为

$$r\langle i, j\rangle=ET_j-ET_i-D_{i,j}, \qquad ①$$

其中 ET_j 和 ET_i 分别表示节点 j 和 i 的最早开始时间，$D_{i,j}$ 表示工作 $\langle i, j\rangle$ 的工期. $r\langle i, j\rangle$ 的含义是在不误紧后工作最早开始时间的前提下，工作 $\langle i, j\rangle$ 的开始时间有多少机动时间.

工作 $\langle i, j\rangle$ 的**总时差** $R\langle i, j\rangle$ 规定为

$$R\langle i, j\rangle=LT_j-ET_i-D_{i,j}, \qquad ②$$

其中 LT_j 表示节点 j 的最迟工作时间. $R\langle i, j\rangle$ 的含义是在不误总工期的前

提下，工作 $\langle i, j\rangle$ 的开始时间有多少机动时间.

例如，图 18-17 中，工作 B 的自由时差和总时差，由①②式分别得

$$\begin{aligned} r\langle 2, 3\rangle &= ET_3 - ET_2 - D_{2,3} \\ &= 6-4-2=0, \\ R\langle 2, 3\rangle &= LT_3 - ET_2 - D_{2,3} \\ &= 9-4-2=3. \end{aligned}$$

也就是说，工作 B 对紧后工作（虚工作）没有机动时间，但在不延误总工作的前提下，它的开始时间有 3 天机动.

又如，对关键工作 C 来说，有

$$\begin{aligned} r\langle 2, 4\rangle &= ET_4 - ET_2 - D_{2,4} \\ &= 9-4-5=0, \\ R\langle 2, 4\rangle &= LT_4 - ET_2 - D_{2,4} \\ &= 9-4-5=0. \end{aligned}$$

即关键工作 C 无机动时间.

可以把各项工作的自由时差和总时差也标在网络图上. 如图 18-18，箭线上方方括号内的两个数据，左边的数是工作的自由时差，而右边的数是工作的总时差.

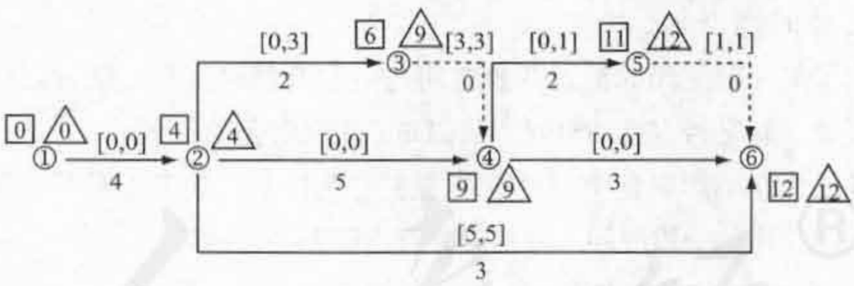


图 18-18

由图 18-18 可以看出，所有关键工作的总时差与自由时差都为零，且关键路径上节点的最早时间和最迟时间是相等的.

一般地，有如下定理.

定理 在双代号网络图中：

(1) 工作 $\langle i, j\rangle$ 为关键工作的充要条件是该工作的总时差为零，即

$$R\langle i, j\rangle = 0;$$

(2) 节点 i 为关键节点的充要条件是

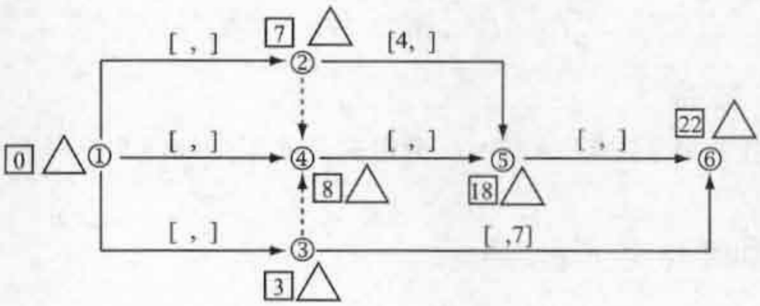
$$ET_i = LT_i.$$

我们常用定理中的两个条件来寻找网络图中的关键路径与关键工作.

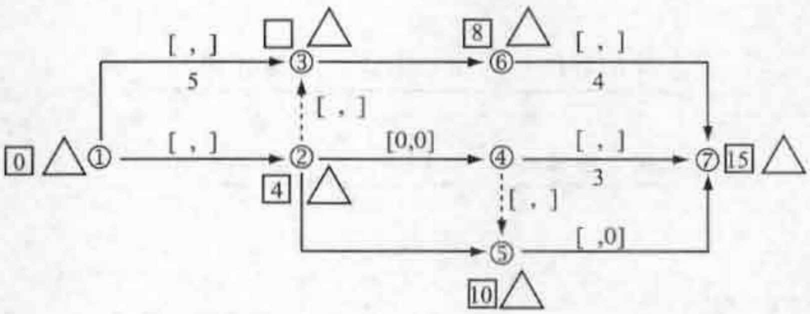
练习18-6

填写下列网络图中空缺的时间参数（包括 $D_{i,j}$，ET_i，LT_i，$r\langle i,\ j\rangle$，$R\langle i,\ j\rangle$），并写出关键工作.

1.



2.



18.4.2　时间优化的方法

时间优化就是在人力、物力、财力等基本条件有保证的前提下，努力缩短总工期，达到节省时间的目的. 这种情况通常发生在计划任务时间比较紧张、资源有限的时候. 时间优化的中心是在不改变工作间邻接关系的基础上，如何缩短关键工作的时间. 缩短关键路长的途径是，把某项关键工作分解成并进的工作，或分解成交叉工作.

例　现有三个房间要求粉刷，其中包括三道工序：准备房间以备粉刷；粉刷屋顶和墙；漆房间贴面. 每道工序均有熟练的工人，即准备工、粉刷工、油漆工. 假设每道工序的工期都是1，可以如何安排此项目？

解 有三种安排方式，但对资源的要求不同.

(1) 串行安排.

串行安排的顺序为：准备工先准备第一个房间，然后，由粉刷工粉刷，最后由油漆工油漆. 第一个房间完成后，三个工人一起转移到第二个房间.

网络图如图 18-19 所示.

图 18-19

(2) 并行安排.

并行安排需要三个准备工、三个粉刷工和三个油漆工. 三个房间同时展开.

网络图如图 18-20 所示.

图 18-20

(3) 交叉安排.

交叉安排的顺序为：准备工先准备第 1 个房间，然后由粉刷工粉刷第 1 个房间，在粉刷工粉刷第 1 个房间的同时，准备工准备第 2 个房间，当粉刷工刷完第 1 个房间后，油漆工油漆第 1 个房间……

网络图如图 18-21 所示.

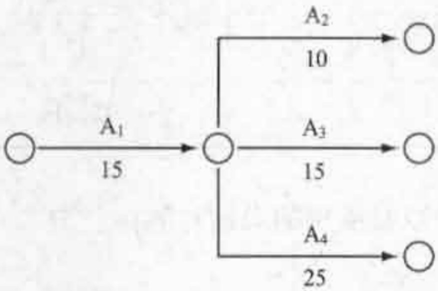
图 18-21

从三种安排方式来看，串行安排所需要的工期为 9；并行安排的工期为 3；交叉安排的工期是 5. 但并行安排需要三个准备工，三个粉刷工，三个油漆工，所需要的资源较多. 比较三种安排方式，在资源有限的情况下，交叉安排是优化工期的一种比较好的办法. 在不考虑资源问题的情况下，并行安排工期最短.

练习18-7

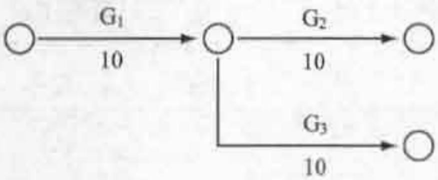
将练习 18-4 第 2 题的计划作下列两方面的改进：

(1) 增加设计人员，将工序 A（产品和工艺设计）分解为



代号	工序名称
A_1	总体设计
A_2	确定外购件规格
A_3	锻件加工
A_4	机加工件设计

(2) 增加加工人员，将工序 G 分解为



代号	工序名称
G_1	粗加工
G_2	精加工 1 组
G_3	精加工 2 组

绘制新的网络图，计算时间参数，并指出关键路径.

习题十八

1. 星期天小明准备在家做午饭，但家里只有一个灶头，需要完成以下几项活动：取挂面（1 分钟），洗菜（5 分钟），烧水（10 分钟），煮面条（5 分钟），炒菜（7 分钟）. 试分析上列各工作之间的邻接关系，画出整个活动的网络图，并求出小明做完午饭最少需要多少时间.

2. 某厂要维修一台机器，已知各工序关系明细表如下所示：

工序代号	工序名称	工期/小时	紧前工作
A	拆卸	4	—
B	清洗	2	A
C	机头检修	6	A
D	部件检查	2	B
E	零件加工	8	D
F	零件修理	5	D
G	涂油上漆	3	E，F
H	安装	4	G
I	运行试验	4	C，H

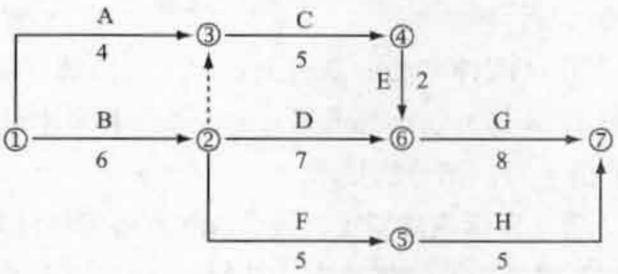
（1）试绘制网络图，并求出关键路径以及所用的最短时间；

（2）结合网络图，绘制横道图.

3. 试根据下表作出某项调研工作计划的双代号网络图.

工作代号	工作	工时/天	紧前工序
A	初步研究	1	—
B	研究选点	2	A
C	准备调研方案	4	A
D	联系调研点	2	B
E	培训工作人员	3	B，C
F	准备表格	1	C
G	实地调研	5	D，E，F
H	写调研报告	2	G
I	开会汇总	3	H

4. 计算下图中各节点的最早开始时间 ET_i，最迟开始时间 LT_i，以及各项工作的自由时差 $r\langle i,\ j\rangle$ 和总时差 $R\langle i,\ j\rangle$，并标出关键路径.



阅读与实践

项目管理技术的发展

项目管理是“管理科学与工程”学科的一个分支，是介于自然科学和社会科学之间的一门边缘学科. 项目管理通常被认为产生于第二次世界大战后期，事实上，项目管理的历史源远流长.

宋代沈括在《梦溪笔谈》中曾记载，宋朝祥符年间，京都汴梁（今开封）皇宫里着了一场大火，烧毁了几座宫殿. 宋真宗派大臣丁渭主持修复. 丁渭受命后，发现工地远离水道，材料运输困难而且没有土制砖. 经勘察和思考，他制订了一个施工组织方案. 首先，在皇宫旧址前大街上挖出宽大渠道，取土烧砖；其次，再引开封附近的汴水入大渠道，将上游木材水运至宫门；第三，皇宫建好后，用工程遗留下来的碎砖废土填塞河道，“复为街衢”. “丁渭工程”终以“一举而三役济，计省费以亿万”流传至今.

近代项目管理在四五十年代主要应用于国防和军工项目，美国退伍将军莱斯利·R·格罗夫斯写的一本回忆录中，详细记载了美国把研制第一颗原子弹的任务命名为“曼哈顿计划”，并作为一个项目来管理的过程.

1957 年美国杜邦公司在建设化工厂时，组织了一个工作组，并在兰德公司的配合下，提出运用图解理论的方法制定计划. 这种方法被命名为“关键线路法”（CPM）.

1958 年美国海军特种计划局和洛克希德航空公司在规划和研制“北极星”导弹的过程中，也提出一种以数理统计学为基础、以网络分析为主要内容、

以电子计算机为手段的新型计划管理方法，即“计划评审术”(PERT).

关键路径法（CPM）和计划评审术（PERT）这两种技术独立发展至今，形成了比较成熟的项目管理技术.

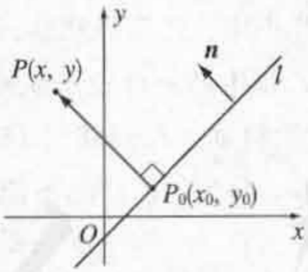
1966年又有人在这两种方法的基础上提出了“图解评审法”（GERT），又称“决策网络技术”，是可以对逻辑关系进行条件和概率处理（譬如说可能不执行某些活动）的一种网络分析技术.

60年代初期，著名科学家华罗庚、钱学森相继将网络计划方法引入我国.华罗庚教授在研究了国外的关键路径法（CPM）、计划评审术（PERT）、网络计划法（AN）等的基础上，吸收科学的部分，结合我国实际情况加以优化，形成了一种新的管理方法，称为统筹方法，并于1965年发表了《统筹方法评话》，为推广应用网络计划方法奠定了基础. 近几年，随着科技的发展和进步，网络计划技术的应用也日趋得到工程管理人员的重视，在人们的生活、工作和生产中得到了广泛的应用，取得了较高的社会和经济效益.

在传统的项目管理方法中，项目的开发被分成项目启动、项目策划、项目生产、项目监测和项目完成五个部分，我们本章学习的就是项目策划中的一部分知识.

第十九章　线性规划初步

尽管运筹学诞生于人类讨厌的战争，它的应用却为今天的人们带来丰厚的回报．利用最少的资源，获取较大的收益，线性规划为决策者提供了一个科学的依据．



数学是一种理性的精神，使人类的思维得以运用到最完善的程度．

——克莱因

数学方法渗透并支配着一切自然科学的理论分支，它愈来愈成为衡量科学成就的主要标志了．

——冯纽曼

运筹学是本世纪新兴的学科之一，它是把科学的方法、技术和工具应用到包括系统管理在内的各种问题上，以便为那些掌管系统的人们提供问题的最佳解决方案的一门学科，在工业、商业、农业、交通运输、政府部门等社会生活的各方面都有重要的应用，现在它已经成为经济计划、系统工程、现代管理等领域的强有力工具.

线性规划是运筹学的一个基本分支，其应用极其广泛，其作用已被越来越多的人所重视，从线性规划诞生至今的几十年中，随着计算机的逐渐普及，它越来越急速地渗透于农业生产、商业活动、军事行动和科学研究的各个方面，为社会节省的财富、创造的价值无法估量.

19.1 线性规划问题

问题 对于给定的人力、物力和财力，怎样才能发挥出最大效益？对于给定的任务，怎样才能用最少的人力、物力和财力去完成？

我们知道，对于上面提出的两个问题，不同的安排方案会产生不同的结果. 科学合理地安排方案，会获得最大的效益，起到事半功倍的效果. 这需要我们研究出一种数学模型，事先做好任务的规划.

例如，若某工厂用 A，B 两种原料生产甲、乙两种产品，每生产一件甲产品使用 4 kg 的 A 原料，且耗时 1 小时，每生产一件乙产品使用 4 kg 的 B 原料，且耗时 2 小时，该厂每天最多可从原料加工车间获得 16 kg 的 A 原料和 12 kg 的 B 原料，按每天工作 8 小时计算，且甲、乙产品不能同时生产，该厂每天所有可能的生产安排是怎样的？

在这个问题中，设该厂每天生产甲、乙两种产品分别为 x 件，y 件，则：

根据一个工作日的工作时间，需满足

$$x+2y\leqslant 8;$$

根据原料数量，加工车间的日产量需满足

$$4x\leqslant 16 \text{ 且 } 4y\leqslant 12;$$

根据工厂生产的实际意义，应满足

$$x\geqslant 0 \text{ 且 } y\geqslant 0.$$

由于以上条件需同时满足，故可得二元一次不等式组

$$\begin{cases}x+2y\leqslant 8\\4x\leqslant 16\\4y\leqslant 12\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}\qquad ①$$

当有序数组（x，y）满足不等式组①时，每天安排的生产任务才有意义，由此可得到每天所有可能的生产安排.

进一步，若生产一件甲产品获利 2 万元，生产一件乙产品获利 3 万元，采用哪种生产安排所获得的利润最大？

设生产甲产品 x 件，乙产品 y 件时，工厂所获得的利润为 z，则 $z=2x+3y$.

于是，问题就转化为：当 x，y 满足不等式组①且为整数时，求 z 的最大值.

在上述问题中，不等式组①是一组对变量 x，y 的约束条件，这组约束条件都是关于 x，y 的一次不等式（有时也用一次方程），所以又称为**线性约束条件**. 我们把需要求最大值的函数 $z=2x+3y$ 称为**目标函数**，又因为这里的 $z=2x+3y$ 是关于变量 x，y 的一次解析式，所以又称为**线性目标函数**.

一般的，在线性约束条件下求线性目标函数的最大值或最小值问题，统称为**线性规划**问题.

> **试一试**
> 改变上述问题中的耗时，以及各原料的总数量，请你写出该厂每天生产甲产品 x 件，乙产品 y 件时的线性约束条件. 再改变单件产品获利数量，请你写出获利的线性目标函数.

例　某运输公司要将某种物品运出，其中运往 A 地最多 60 吨，运往 B 地最多 80 吨. 若一辆汽车可以装 10 吨该物品，且往返一次 A 地汽车的耗油量为 20 升，往返一次 B 地汽车的耗油量为 40 升. 已知该运输公司现有 10 辆汽车，安排 x 辆汽车将物品送往 A 地，安排 y 辆汽车将物品送往 B 地：

（1）求所有汽车调运方案应满足的线性约束条件；

（2）写出将该物品运往 A，B 两地往返一次的耗油量 z 的线性目标函数.

解　（1）根据运往 A 地物品的数量，有 $10x\leqslant 60$；

根据运往 B 地物品的数量，有 $10y\leqslant 80$；

根据汽车的数量，有 $x+y\leqslant 10$ 且 x，$y\in\mathbf{N}$.

由于以上条件要同时满足，故可得线性约束条件

$$\begin{cases} x\leqslant 6 \\ y\leqslant 8 \\ x+y\leqslant 10 \\ x\in\mathbf{N} \\ y\in\mathbf{N} \end{cases}$$

(2) 依题意，得

$$z=20x+40y.$$

练习19-1

1. 要将两种大小不同的钢板截成 A，B，C 三种规格，钢版的单价及每张钢板可截得三种规格的小钢板的块数如下表所示：

	单价/元	A 规格	B 规格	C 规格
第一种钢板	100	2	1	1
第二种钢板	120	1	2	3

现需要 A，B，C 三种规格的成品分别为 10 块，20 块，30 块，设需要截第一种钢板 x 张，第二种钢板 y 张，总成本为 z 元，求：

(1) 所有裁截方案应满足的线性约束条件；

(2) 总成本的线性目标函数.

2. 某工厂计划生产甲、乙两种产品，这两种产品都需要 A，B 两种原料，每件产品所需原料的数量，A，B 两种原料的限量及所获得的利润如下表所示：

	原料 A 的数量/kg	原料 B 的数量/kg	利润/元
生产甲产品一件	3	1	30
生产乙产品一件	2	2	40
原料限量	1 200	800	

若生产甲产品 x 件，乙产品 y 件，所获总利润 z 元，求：

(1) 所有生产方案应满足的线性约束条件；

(2) 变量为 x，y，总利润为 z 的线性目标函数.

19.2 二元一次不等式表示的区域

问题　我们知道满足方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为零）的解对应的点的集合是一条直线，那么满足二元一次不等式 $Ax+By+C>0$ 和 $Ax+By+C<0$ 的解对应的点的集合又各是怎样的图形呢？

下面我们就来探究这个问题.

设坐标平面内直线 l 的一般方程为

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B\text{ 不同时为零}). \qquad ①$$

根据直线方程的意义，凡在直线 l 上的点的坐标都满足方程①，而不在直线 l 上的点的坐标都不满足方程①.

直线 l 把坐标平面内不在 l 上的点分为两部分，分别位于直线的两侧. 下面我们来讨论这两部分点的坐标所满足的条件.

如图 19-1，设 $P(x, y)$ 是坐标平面内不在直线 l 上的任意一点，作 $PP_0\perp l$，垂足为 $P_0(x_0, y_0)$. 而且 $\boldsymbol{n}=(A, B)$ 为直线 l 的一个法向量.

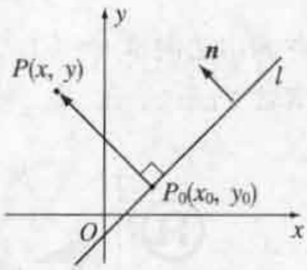


图 19-1

显然，$\overrightarrow{P_0P}\parallel\boldsymbol{n}$，当点 P 在 $\boldsymbol{n}$ 指向的那一侧时，$\overrightarrow{P_0P}$ 的方向与 $\boldsymbol{n}$ 的方向相同；当点 P 在 $\boldsymbol{n}$ 指向的另一侧时，$\overrightarrow{P_0P}$ 的方向与 $\boldsymbol{n}$ 的方向相反. 另一方面，

$$\overrightarrow{P_0P}\text{ 与 }\boldsymbol{n}\text{ 方向相同}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}>0; \qquad ②$$

$$\overrightarrow{P_0P}\text{ 与 }\boldsymbol{n}\text{ 方向相反}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}<0, \qquad ③$$

而且

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=A(x-x_0)+B(y-y_0)=Ax+By-(Ax_0+By_0),$$

由于 $P_0(x_0, y_0)$ 在直线 l 上，所以 $Ax_0+By_0+C=0$，即 $C=-(Ax_0+By_0)$. 所以

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=Ax+By+C.$$

由②和③，得

$$\overrightarrow{P_0P}\text{与}\boldsymbol{n}\text{ 方向相同}\Leftrightarrow Ax+By+C>0;$$

$$\overrightarrow{P_0P}\text{与}\boldsymbol{n}\text{ 方向相反}\Leftrightarrow Ax+By+C<0.$$

至此，我们得到以下结论.

直线 l：$Ax+By+C=0$ 将坐标平面内不在 l 上的点分为两部分，直线 l 的一个法向量 (A, B) 指向的那一侧半平面内所有点的坐标都满足不等式

$$Ax+By+C>0;$$

而在直线 l 的另一侧半平面内所有点的坐标都满足不等式

$$Ax+By+C<0.$$

例 1 画出下列二元一次不等式表示的区域：

(1) $2x-y-3>0$； (2) $3x+2y-6\leqslant 0$.

解 (1) 所求区域不包含直线，用虚线画出直线

$$2x-y-3=0,$$

并画出法向量 $\boldsymbol{n}=(2, -1)$，法向量 $\boldsymbol{n}$ 指向的那一侧就是不等式 $2x-y-3>0$ 表示的区域，如图 19-2 (1) 中的阴影部分所示；

(2) 所求区域包含直线，用实线画出直线

$$3x+2y-6=0,$$

并画出法向量 $\boldsymbol{n}=(3, 2)$. 向量 $\boldsymbol{n}$ 的反方向指向的那一侧（包含直线）就是不等式 $3x+2y-6\leqslant 0$ 表示的区域，如图 19-2 (2) 中的阴影部分所示.

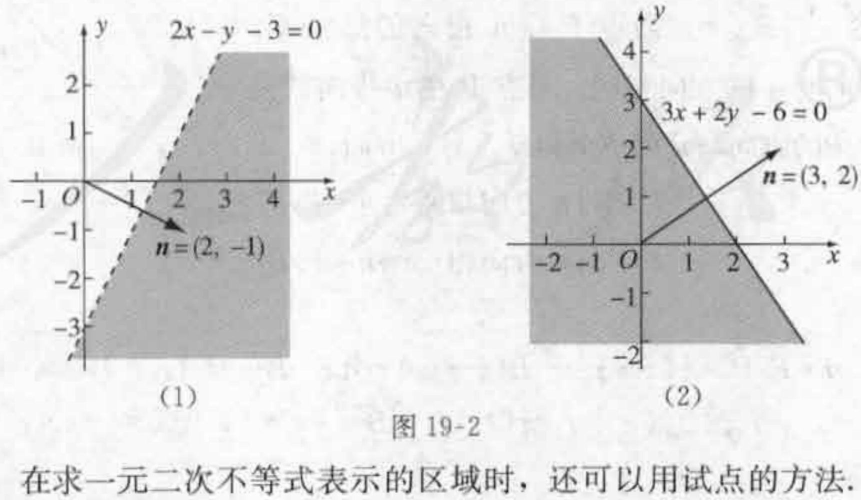


图 19-2

注 在求一元二次不等式表示的区域时，还可以用试点的方法. 比如上一个例子中，在直线的某一侧任取一点，验证其坐标是否满足这个不等式，

如果满足，则该点所在的这一侧区域就是所求的区域；否则直线的另一侧就是所求的区域．如果直线不过原点，常用原点来验证，这样比较方便．

想一想 你能用试点法来解例 1 吗？

例 2 画出下面不等式组

$$\begin{cases} x+y-5<0 \\ 4x-y\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

表示的区域．

解 在直角坐标系中，分别作出直线

l_1：$x+y-5=0$，l_2：$4x-y=0$ 和 l_3：$y=0$．

用例 1 的方法（或试点的方法）再分别作出不等式

$x+y-5<0$，$4x-y\geqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$

所表示的区域，则它们的交集就是已知不等式组所表示的区域，如图 19-3 中的阴影部分所示．

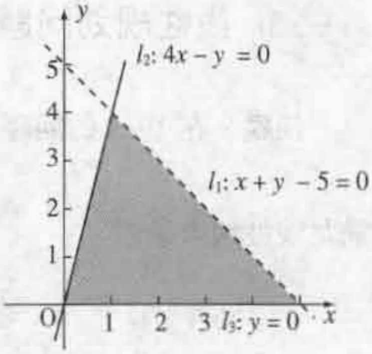
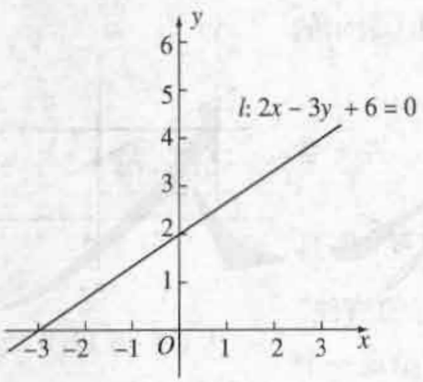


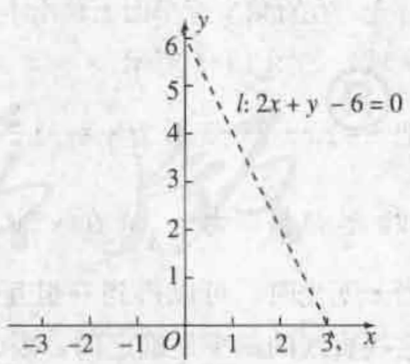
图 19-3

练习19-2

1. 在下列图中，用阴影线表示所给不等式表示的区域：

(1) $2x-3y+6\leqslant 0$； (2) $2x+y-6<0$．





（第 1 题）

2. 画出下列不等式表示的区域：

(1) $x\leqslant 2$； (2) $x+y\geqslant 0$；

(3) $x-y<0$；　　　　　　　　(4) $x+2y-4<0$.

3. 画出下列不等式组表示的区域：

(1) $\begin{cases}x-y+2\geqslant 0\\5x+2y-10\leqslant 0\\y\geqslant -1\end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases}2x-y+3>0\\x+y-2\leqslant 0\end{cases}$

19.3 线性规划问题的图解法

问题　在 19.1 的问题举例中，线性目标函数

$$z=2x+3y$$

满足线性约束条件

$$\begin{cases}x+2y\leqslant 8\\4x\leqslant 16\\4y\leqslant 12\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases} \qquad ①$$

当 x，y 满足不等式组①且为整数时，如何求 z 的最大值呢？

下面我们来探究这个问题.

首先，在直角坐标平面上画出不等式组①表示的平面区域，如图 19-4 所示.

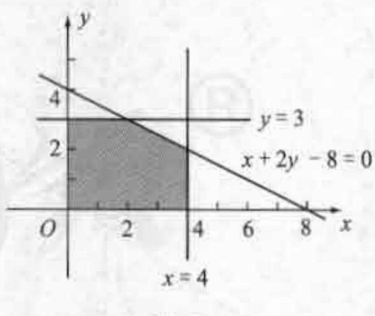


图 19-4

把 $z=2x+3y$ 变形为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$，将 z 看成常数，这是斜率为 $-\frac{2}{3}$，在 y 轴上截距为 $\frac{z}{3}$ 的直线. 当 z 变化时，可以得到一组互相平行的直线. 由于这些直线的斜率是确定的，因此只要给定一个点，就能确定一条直线. 这说明，截距 $\frac{z}{3}$ 可以由平面内的一个点的坐标唯一确定. 从而不难看出，当直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ 经过不等式组①表示的平面区域内

的一个点时，截距$\frac{z}{3}$被唯一确定，z也就被唯一确定.

因此，问题可以转化为当直线$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$与不等式组①表示的平面区域有公共点时，在区域内找一个点P，使直线经过点P时在y轴上的截距$\frac{z}{3}$最大.

可以先令$z=0$，画出直线$2x+3y=0$，然后平移这条直线，在阴影区域内寻找使截距$\frac{z}{3}$最大的点. 由图19-5可以看出，当直线$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$经过直线$x=4$与直线$x+2y-8=0$的交点$M(4, 2)$时，截距$\frac{z}{3}$的值最大，最大值为$\frac{14}{3}$. 此时$2x+3y=14$.

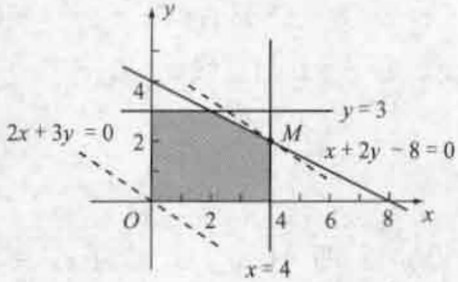


图 19-5

从而可知，上述问题中，每天生产甲产品4件、乙产品2件时，工厂可获得最大利润14万元.

像这样，在线性规划的问题中，画出线性约束条件所表示的平面区域，在平面区域上找出线性目标函数最值的方法，叫做线性规划问题的图解法.

一般地，满足线性约束条件的解(x, y)叫做**可行解**，由所有可行解组成的集合叫做**可行域**. 在可行域中，使目标函数取得最大值（或最小值）的可行解叫做这个问题的**最优解**.

例1 已知线性约束条件为

$$\begin{cases}x-y-1\leqslant 0\\2x+y-5\geqslant 0\\x-4y+11\geqslant 0\end{cases}$$

求线性目标函数$z=x+2y$满足线性约束条件的最优解及最大值、最小值.

解 在直角坐标系中，画出可行域（图19-6中阴影部分）.

将目标函数变形为$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$，当$\frac{z}{2}$取得最大值时，$z$取得最大值；当

$\frac{z}{2}$取得最小值时，z取得最小值.

令$z=0$，画出直线$x+2y=0$，然后平移这条直线，如图19-6所示，可知当直线经过点A时，$\frac{z}{2}$取得最小值；当直线经过点B时，$\frac{z}{2}$取得最大值.

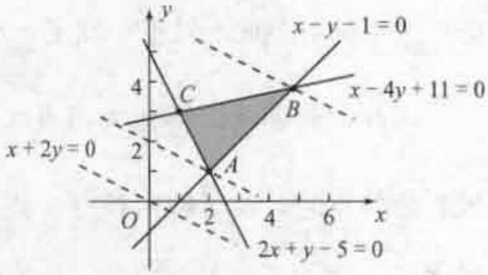


图19-6

因为点A是直线$x-y-1=0$与直线$2x+y-5=0$的交点，点B是直线$x-y-1=0$与直线$x-4y+11=0$的交点，解方程组

$$\begin{cases}x-y-1=0\\2x+y-5=0\end{cases}$$

得$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$即$A(2,1)$，此时$z_{\min}=2+2\times1=4$.

解方程组

$$\begin{cases}x-y-1=0\\x-4y+11=0\end{cases}$$

得$\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$即$B(5,4)$，此时$z_{\max}=5+2\times4=13$.

所以$A(2,1)$和$B(5,4)$就是线性目标函数$z=x+2y$的最优解，且z的最小值和最大值依次为4和13.

例2 求函数$z=2x+4y$的最大值和最小值，其中x，y满足线性约束条件

$$\begin{cases}x+y-10\leqslant0\\x-y+3\geqslant0\\2x+y-8\geqslant0\\x\geqslant0\\y\geqslant0\\x\in\mathbf{Z}\\y\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

解 在直角坐标系中，画出可行域（图19-7阴影部分），并在可行域内找出横坐标和纵坐标都是整数的点.

将目标函数变形为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{4}$，

当$\frac{z}{4}$取得最大值时，z 取得最大值；当$\frac{z}{4}$取得最小值时，z 取得最小值.

令 $z=0$，画出直线 $x+2y=0$，然后平移这条直线，如图 19-7 所示，可知当直线经过点 A 时，z 取得最小值；当直线经过点 B 时，z 取得最大值.

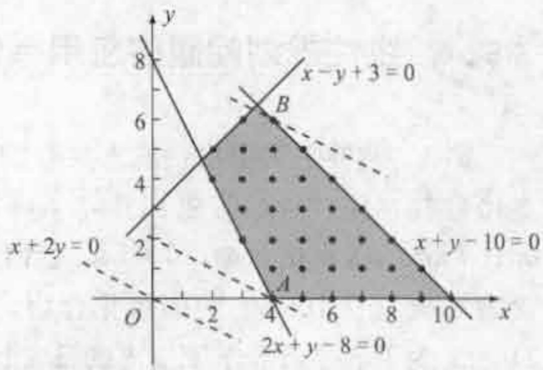


图 19-7

因为 $A(4,\ 0)$，$B(4,\ 6)$ 是满足条件的最优解，所以

$$z_{\min}=2\times4+4\times0=8,$$
$$z_{\max}=2\times4+4\times6=32.$$

练习19-3

1. 求线性目标函数 $z=2x+5y$ 的最大值，其中 x，y 满足线性约束条件

$$\begin{cases}x+4y\leqslant12\\x+y\leqslant6\\y\leqslant x\end{cases}$$

2. 求线性目标函数 $z=3x+5y$ 的最小值，其中 x，y 满足线性约束条件

$$\begin{cases}5x+y\geqslant10\\x+y\geqslant6\\4x+9y\geqslant36\\x\geqslant0\\y\geqslant0\end{cases}$$

3. 求线性目标函数 $z=4x+2y$ 的最大值和最小值，其中 x，y 满足线性约束条件

$$\begin{cases}5x+3y\leqslant15\\y\leqslant x+1\\x-5y\leqslant3\end{cases}$$

19.4 线性规划问题的应用举例

例1 营养学家指出，成人良好的日常饮食应该至少提供 0.075 kg 的碳水化合物，0.06 kg 的蛋白质，0.06 kg 的脂肪. 已知 1 kg 食物 A 含有 0.105 kg 的碳水化合物，0.07 kg 蛋白质，0.14 kg 脂肪，花费 28 元；而 1 kg 食物 B 含有 0.105 kg 的碳水化合物，0.14 kg 蛋白质，0.07 kg 脂肪，花费 21 元. 为了满足营养学家指出的日常饮食要求，同时花费又最低，需要同时食用食物 A 和食物 B 各多少千克?

分析 将已知数据列成下表：

食物	碳水化合物/kg	蛋白质/kg	脂肪/kg
A	0.105	0.07	0.14
B	0.105	0.14	0.07

解 设每天食用 x kg 食物 A，y kg 食物 B 能满足要求，总成本为 z 元. 则线性约束条件为

$$\begin{cases} 0.105x+0.105y\geqslant 0.075 \\ 0.07x+0.14y\geqslant 0.06 \\ 0.14x+0.07y\geqslant 0.06 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases} \quad ①$$

线性目标函数为 $z=28x+21y$.

将①化简为

$$\begin{cases} 7x+7y\geqslant 5 \\ 7x+14y\geqslant 6 \\ 14x+7y\geqslant 6 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases} \quad ②$$

在直角坐标系中画出②所表示的可行域，如图 19-8 所示.

目标函数 $z=28x+21y$ 可变形为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{z}{21}$，当 $\frac{z}{21}$ 取得最大值时，z

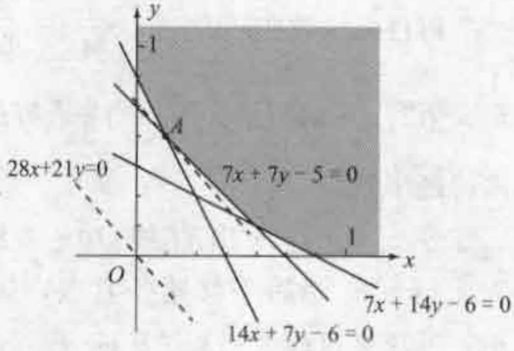


图 19-8

取得最大值；当$\frac{z}{21}$取得最小值时，z取得最小值.

令$z=0$，画出直线$28x+21y=0$，然后平移这条直线，如图 19-8 所示，可知当直线经过点 A 时，z取得最小值.

因为 A 是直线$14x+7y-6=0$和直线$7x+7y-5=0$的交点，解方程组

$$\begin{cases}14x+7y-6=0\\7x+7y-5=0\end{cases}$$

可得最优解$A\left(\frac{1}{7},\ \frac{4}{7}\right)$，所以$z_{\min}=28\times\frac{1}{7}+21\times\frac{4}{7}=16$.

即每天食用$\frac{1}{7}$ kg 食物 A，$\frac{4}{7}$ kg 食物 B，能够满足日常饮食要求，且花费最低，最低成本为 16 元.

例 2　一个化肥厂生产甲、乙两种混合肥料，生产一车皮甲种肥料需要的主要原料是磷酸盐 4 吨，硝酸盐 18 吨，获利 10 万元；生产一车皮乙种肥料需要的主要原料是磷酸盐 1 吨，硝酸盐 15 吨，获利 8 万元．现有库存磷酸盐 10 吨，硝酸盐 90 吨，在此基础上生产这两种混合肥料至少各一车皮．问甲、乙两种肥料各生产几车皮，才能获得最大的收益？

解　设计划生产甲种肥料的车皮数为x，乙种肥料的车皮数为y，获得的收益为z万元.

则线性约束条件为

$$\begin{cases}4x+y\leqslant 10\\18x+15y\leqslant 90\\x\geqslant 1,\ x\in\mathbf{Z}\\y\geqslant 1,\ y\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

线性目标函数为$z=10x+8y$.

在直角坐标系中画出线性约束条件所表示的可行域，并在可行域内找出横坐标和纵坐标都是整数的点，如图 19-9 所示.

将目标函数变形为 $y=-\frac{5}{4}x+\frac{z}{8}$，当$\frac{z}{8}$取得最大值时，$z$取得最大值；当$\frac{z}{8}$取得最小值时，$z$取得最小值.

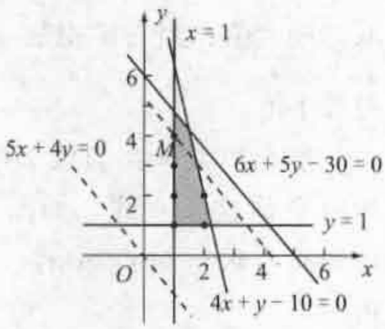


图 19-9

令 $z=0$，画出直线 $10x+8y=0$，即 $5x+4y=0$，然后平移这条直线，如图 19-9 所示，可知当直线经过点 $M(1,4)$ 时，z 取得最大值. 此时，$z_{\max}=10\times1+8\times4=42$（万元）.

即化肥厂生产 1 车皮甲种混合肥料，4 车皮乙种混合肥料，该厂可获得最大收益 42 万元.

练习19-4

1. 某学校计划用 2 000 元购买单价为 50 元的桌子和 20 元的凳子，希望使桌凳的总数尽可能的多，但凳子数不少于桌子数，且凳子数不多于桌子数的 1.5 倍，问桌子和凳子各买多少才行?

2. 某厂拟生产甲、乙两种产品，每件销售收入分别为 3 000 元、2 000 元. 甲、乙产品都需要在 A，B 两种设备上加工，在 A，B 设备上加工一件甲产品所需时间分别为 1 小时、2 小时，加工一件乙产品所需时间分别为 2 小时、1 小时，A，B 两种设备每月有效使用时间分别为 400 小时和 500 小时. 如何安排生产可使收入最大?

3. 一个小型家具厂计划加工 A 和 B 两种类型的桌子. 每类桌子都要经过打磨、着色和上漆三道工序. 每张 A 桌子需要 10 分钟打磨，6 分钟着色，6 分钟上漆；每张 B 桌子需要 5 分钟打磨，12 分钟着色，9 分钟上漆. 如果一个工人每天打磨和上漆分别至多工作 450 分钟，着色每天至多工作 480 分钟. 如何安排生产，能使一个工人每天加工的两种桌子数量和最多?

4. 要将两种大小不同的钢板截成 A，B，C 三种规格，钢板的单价及每张钢板可截得三种规格的小钢板的块数如下表所示：

	单价/元	A 规格	B 规格	C 规格
第一种钢板	100	2	1	1
第二种钢板	120	1	2	3

现需要 A，B，C 三种规格的成品分别为 15 块，18 块，27 块，求使总成本最小的裁截方案.

5. 某工厂计划生产甲、乙两种产品，这两种产品都需要 A，B 两种原料，每生产一件产品甲和生产一件产品乙所需 A，B 两种原料的数量，A，B 两种原料的限量及所获得的利润如下表所示：

	原料 A 的数量/kg	原料 B 的数量/kg	利润/元
生产甲一件	3	1	30
生产乙一件	2	2	40
原料限量	1 200	800	

求所获总利润最大的生产方案.

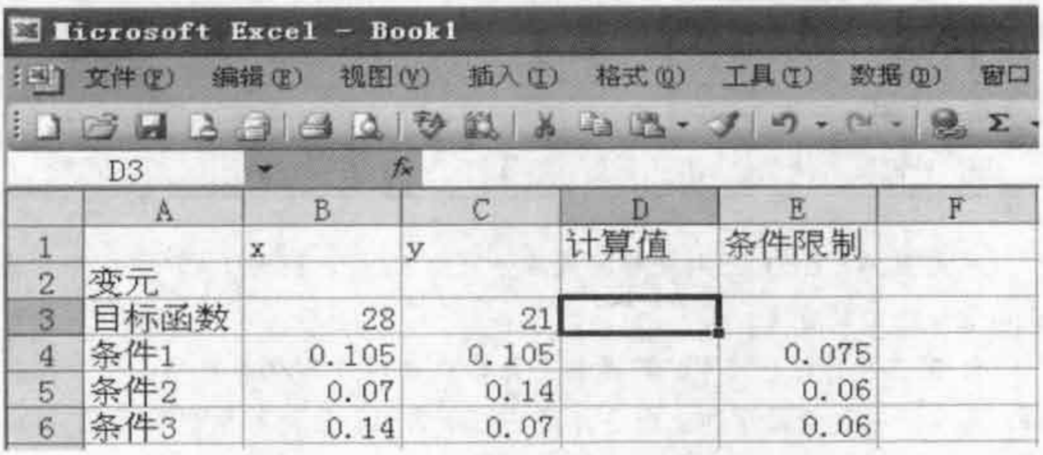
19.5 用 Excel 解线性规划问题

通过前面的学习，我们已经能利用图解法来解决简单的线性规划问题了. 事实上，在信息技术高速发展的今天，很多计算机软件都能提供解线性规划问题简单而有效的工具. 下面我们就以 Excel 为例，利用它的规划求解工具解 19.4 节例 1 的线性规划问题. 具体操作步骤如下：

(1) 打开 Excel，单击“工具”菜单中的“加载宏”命令，就可以打开“加载宏”的窗口，选中其中的“规划求解”，单击“确定”按钮.

注 如果“工具”菜单中的选项“加载宏”的窗口中没有“规划求解”指令，必须先安装.

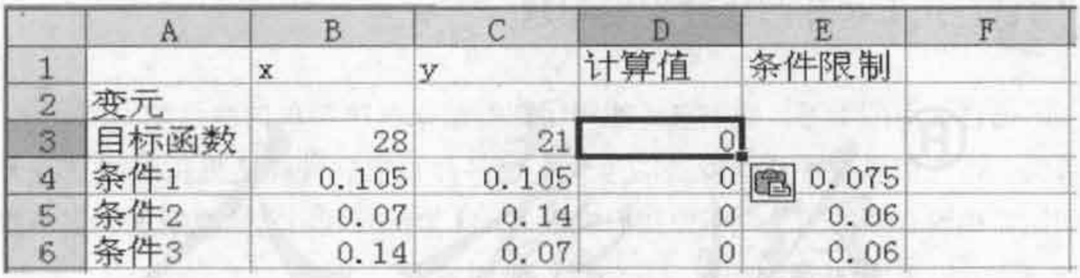
(2) 在工作表中输入 19.4 节例 1 中的数据和限制条件，并将单元格 B2，C2，D3 分别作为变量 x，y 的解和最值 z 的输出区域，如图 19-10 所示.



	A	B	C	D	E	F
1		x	y	计算值	条件限制	
2	变元					
3	目标函数	28	21			
4	条件1	0.105	0.105		0.075	
5	条件2	0.07	0.14		0.06	
6	条件3	0.14	0.07		0.06	

图 19-10

(3) 在单元格 D3 中输入公式“=$B$2*B3+$C$2*C3”(该公式为目标函数，表示 $D3=28x+21y$，其中“$B$2”是绝对引用 B2 的意思)，在单元格 D4 中输入公式“=$B$2*B4+$C$2*C4”，在单元格 D5 中输入公式“=$B$2*B5+$C$2*C5”，在单元格 D6 中输入公式“=$B$2*B6+$C$2*C6”（分别表示 $D4=0.105x+0.105y$，$D5=0.07x+0.14y$，$D6=0.14x+0.07y$. 也可以复制 D3 的公式，即当 D3 单元格变为 0 时，右击 D3 单元格点击“复制”命令，再分别点击 D4，D5，D6，右键点击“粘贴”命令）. 这时工作表变为如图 19-11 所示.



	A	B	C	D	E	F
1		x	y	计算值	条件限制	
2	变元					
3	目标函数	28	21	0		
4	条件1	0.105	0.105	0	0.075	
5	条件2	0.07	0.14	0	0.06	
6	条件3	0.14	0.07	0	0.06	

图 19-11

(4) 选中单元格 D3，打开“工具”菜单，单击“规划求解”命令，弹出“规划求解参数”对话框，如图 19-12 所示. 在“等于”栏中选择“最小值”(如果求目标函数的最大值，则选择“最大值”)，在“可变单元格”框中输入“$B$2: $C$2”(表示可行解 (x, y)).

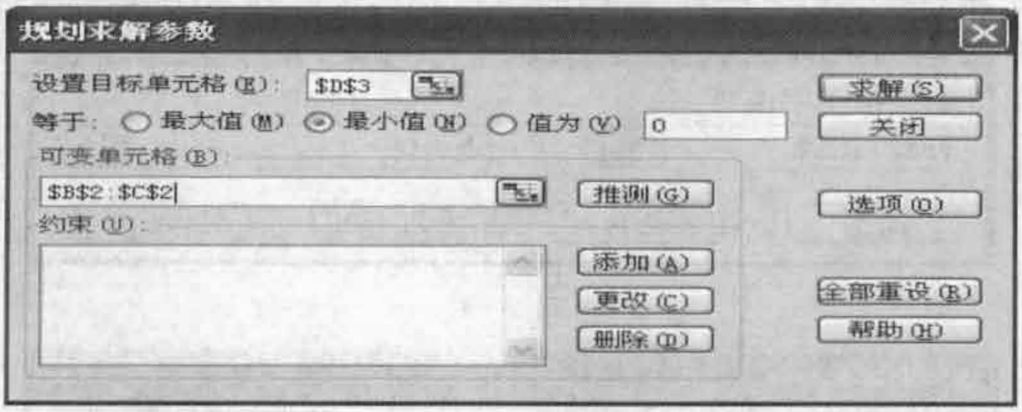


图 19-12

单击“约束”中的“添加”按钮，打开“添加约束”对话框，在“单元格引用位置”框中输入“$D$4”，在下拉式比较符列表中选择“>=”，在“约束值〔C〕:”框中输入“$E$4”(表示约束条件 $0.105x+0.105y\geqslant 0.075$)，如图 19-13 所示. 单击“添加”按钮，类似地完成另外两个约束条件的输入，即“$D$5”“>=”“$E$5”和“$D$6”“>=”“$E$6”.

图 19-13

然后，输入变元的非负条件“$B$2:$C$2”“>=”“0”(图 19-14).

单击“确定”按钮后，结果如图 19-15 所示.

点击“求解”按钮，完成求解，结果如图 19-16 所示.

图 19-14

图 19-15

	A	B	C	D	E
1		x	y	计算值	条件限制
2	变元	0.142857	0.571429		
3	目标函数	28	21	16	
4	条件1	0.105	0.105	0.075	0.075
5	条件2	0.07	0.14	0.09	0.06
6	条件3	0.14	0.07	0.06	0.06

图 19-16

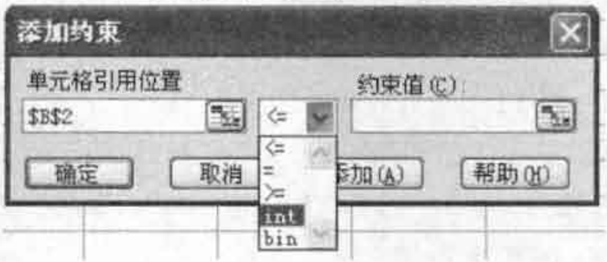
即当 $x=0.142\ 857$，$y=0.571\ 429$ 时，$z_{\min}=16$.

通过上面一个简单的线性规划求解的例子，我们可以了解用 Excel 的“规划求解”功能，帮助我们完成类似有关线性规划的求解过程.

例 用 Excel 的“规划求解”，求函数 $z=2x+4y$ 的最大值，其中 x，y 满足线性约束条件

$$\begin{cases} x+y-10\leqslant 0 \\ x-y+3\geqslant 0 \\ 2x+y-8\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x\in\mathbf{Z} \\ y\in\mathbf{Z} \end{cases}$$

解　首先在 Excel 工作表中，输入前 5 个约束条件然后继续添加 \$B\$2 为整数和 \$C\$2 为整数，即在约束条件中选择“int”，如图 19-17 所示.



(1)

(2)

图 19-17

最后点击规划求解，可求得满足约束不等式组的最优解为 $x=4$，$y=6$ 时，$z_{\max}=32$，如图 19-18 所示.

	A	B	C	D	E
1		x	y	计算值	条件限制
2	变元	4	6		
3	目标函数	2	4	32	
4	条件1	1	1	10	10
5	条件2	1	-1	-2	-3
6	条件3	2	1	14	8
7	条件4	1	0	4	0
8	条件5	0	1	6	0

图 19-18

由以上可知，我们可以利用 Excel 的求解功能来解决简单的线性规划求整数最优解的问题.

练习19-5

用 Excel 的“规划求解”功能，将前面的线性规划问题进行练习.

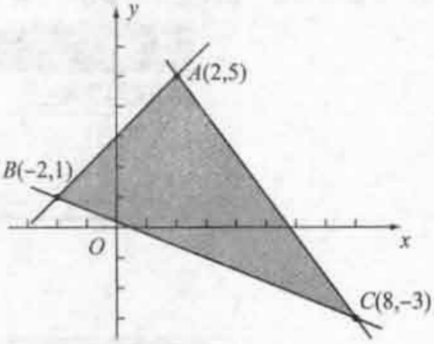
习题十九

1. 直线 l_1，l_2，l_3 相交于 $A(2, 5)$，$B(-2, 1)$，$C(8, -3)$，如图所示：

(1) 用不等式组表示图中的阴影部分；

(2) 设目标函数为 $z=3x-4y$，图中的阴影部分是对 x，y 的约束条件，求在此约束条件下，目标函数的最大值和最小值；

(3) 设目标函数为 $z=3x+4y$，图中的阴影部分是对 x，y 的约束条件，求在此约束条件下，目标函数的最大值和最小值.



(第 1 题)

2. 分别画出下列不等式表示的平面区域：

(1) $x+y\leqslant 1$；　(2) $2x-y>4$；　(3) $y\leqslant -1$；　(4) $x\geqslant 2$.

3. 画出不等式组 $\begin{cases}-x+y-2\leqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\\ x-3y+3<0\end{cases}$ 表示的平面区域.

4. 某工厂生产甲、乙两种产品，需要工时分别为 2 工时和 1 工时，甲、乙两种产品每件各需要 1 个单位和 3 个单位的原料 A. 每天工厂可提供 80 个工时，90 个单位的原料 A，甲、乙两种产品每件利润分别为 40 元和 30 元. 若生产甲 x 件，生产乙 y 件：

(1) 写出 x，y 满足的线性约束条件；

(2) 写出总利润 z 关于 x，y 的目标函数；

(3) 用图解法求取得的最大利润及最优解，并用 Excel 的“规划求解”功能验证结论.

5. 一位营养师设计的早餐中，主要有甲、乙两种食品，这两种食品中每

百克的维生素含量如下表：

	维生素 A/mg	维生素 B/mg	维生素 C/mg
甲食品 100 g	2	4	10
乙食品 100 g	3	1	5

若一份早餐的营养标准规定至少含 12 mg 的维生素 A，12 mg 的维生素 B，40 mg 的维生素 C，且已知每百克甲种食品的成本为 0.5 元，乙种食品 0.7 元．问一份早餐中，甲、乙两种食品各取多少百克，既能满足营养要求又使成本最低？最低成本是多少？

6. 某单位组织 600 人外出郊游，准备租用某汽车公司的汽车，该汽车公司可租用的大客车有 10 辆，小客车有 20 辆，大客车每辆载客 50 人，小客车每辆载客 30 人，大客车每辆租金 400 元，小客车每辆租金 300 元，租用的一个条件是，小客车的数量不得少于大客车的数量．分别用图解法和 Excel 的“规划求解”功能，求大客车和小客车各租多少辆时，可使租金总额最少？最少的租金总额是多少？

7. 某企业为推销自己的产品在电视台预约播放两套电视连续剧，同时插播产品广告．连续剧甲每次播放时间为 80 min，其中广告时间为 1 min，收视观众为 60 万；连续剧乙每次播放时间为 40 min，其中广告时间为 1 min，收视观众为 20 万．已知每周要播放至少 6 min 的广告，连续剧播放的时间不多于 320 min．如果你是企业负责人，为了获得最高的收视率来扩大产品影响，要求电视台每周播映两套电视连续剧各多少次？

8. 甲、乙两个粮库要向 A，B 两镇运送大米，已知甲库可调出 100 吨大米，乙库可调出 80 吨大米，A 镇需要 70 吨大米，B 镇需要 110 吨大米．两库到两镇的路程和每吨每千米的运费如下表：

	路程/km		运费/元	
	甲库	乙库	甲库	乙库
A 镇	20	15	12	12
B 镇	25	20	10	8

(1) 这两个粮库各运往 A，B 两镇多少吨大米，才能使总运费最少？最少

运费是多少？

（2）最不合理的调运方案是什么？它造成的损失是多少？

阅读与实践

谁解得对

在一节研究不等式的课堂上，数学老师出了一道题，让同学们来求解，题目是这样的：

已知

$$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 3 & ①\\ -1\leqslant x-y\leqslant 1 & ②\end{cases}$$

求 $4x+2y$ 的取值范围.

题目给出后，同学们经过一番紧张的解答，结果出来了. 可是，同学们算出来的结果却有两个，且都觉得自己的解没有错. 于是同学们分成了两组，展开了激烈的辩论，可是谁也说服不了谁. 老师就让这两组的学生各派一名代表，把自己的解法写到了黑板上.

第一名学生代表的解法是：

①+②，得

$$0\leqslant 2x\leqslant 4，从而 0\leqslant 4x\leqslant 8. \quad ③$$

②×(−1)，得

$$-1\leqslant y-x\leqslant 1. \quad ④$$

①+④，得

$$0\leqslant 2y\leqslant 4. \quad ⑤$$

③+⑤，得

$$0\leqslant 4x+2y\leqslant 12.$$

第二名学生代表的解法是：

因为

$$4x+2y=3(x+y)+(x-y),$$

①×3，得

$$3\leqslant 3(x+y)\leqslant 9. \qquad ⑥$$

②+⑥，得

$$2\leqslant 3(x+y)+(x-y)\leqslant 10,$$

即

$$2\leqslant 4x+2y\leqslant 10.$$

为什么两种解法的结果不一样呢？到底哪个解法是正确的呢？

学习了本章内容，下面我们不妨用线性规划的知识，来判断哪个结果是正确的.

问题可以改写成：设变量 x，y 满足线性约束条件

$$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 3 & ①\\ -1\leqslant x-y\leqslant 1 & ②\end{cases}$$

线性目标函数为 $z=4x+2y$，求 z 的最大值和最小值.

因为$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 3\\ -1\leqslant x-y\leqslant 1\end{cases}$等价于

$$\begin{cases}1\leqslant x+y\\ x+y\leqslant 3\\ -1\leqslant x-y\\ x-y\leqslant 1\end{cases}$$

所以可画出不等式组表示的平面区域，如图 1 所示.

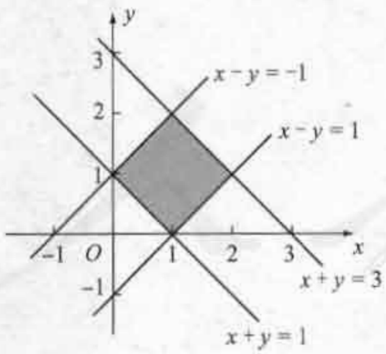


图 1

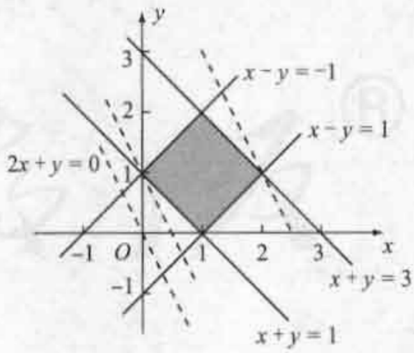


图 2

我们画出直线 $2x+y=0$，然后平移这条直线，我们不难发现，直线 $x+y=1$ 与直线 $x-y=-1$ 的交点（0，1）是目标函数取得最小值的最优解；直线 $x+y=3$ 与直线 $x-y=1$ 的交点（1，2）是目标函数取得最大值的最优

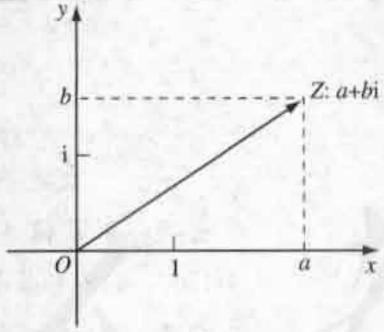
解．所以，目标函数的最小值为 $z_{\min}=2$，目标函数的最大值为 $z_{\max}=10$.

由此可以看出，第二名代表的解法是正确的.

那么，第一名学生代表的解法究竟错在哪里呢？请同学们进一步思考.

第二十章　复　数

一个虚无飘渺、若隐若现的怪数，卡丹诺首先接纳了她，高斯揭去了她神秘的面纱，赋予了她美丽的容貌和灵魂，使她在自然科学的领域有了自己的舞台，展示着自己独特的魅力，迷人的舞姿。



虚数是奇妙的人类精神寄托，她好像是存在与不存在之间的一种两栖动物。

——莱布尼茨

学习任何知识的最佳途径是由自己去发现，因为这种发现理解最深，也最容易掌握其中的规律、性质和联系。

——波利亚

我们知道，在实数范围内，当 $b^2-4ac<0$ 时，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 无解. 人们在研究代数方程的过程中，为了使这样的方程有解，便引进了虚数，从而使数集扩充到复数集. 复数是 16 世纪人们在讨论一元二次方程、一元三次方程的求根公式时引入的. 现在复数已是研究数学、力学和电学常用的数学工具. 复数与向量、平面解析几何、三角函数等都有密切的联系，也是进一步学习数学的基础. 本章主要学习复数的概念和运算，从而解决包括解方程在内的一些问题.

20.1 复数的概念

20.1.1 复数的有关概念

问题 1 我们知道，在有理数范围内方程 $x^2-2=0$ 无解，而把有理数集扩充到实数集后，这个方程就有了两个解 $x=\pm\sqrt{2}$. 我们还知道，在实数范围内方程 $x^2+1=0$ 无解，类比这种想法，能否通过把实数集扩充，而使方程 $x^2+1=0$ 有解呢?

为了使方程 $x^2+1=0$ 有解，我们引入一个新数 i，并规定：

(1) 它的平方等于 -1，即

$$\mathrm{i}^2=-1;$$

> 1545 年，意大利数学家卡尔达诺（G. Cardano，1501—1576）在《大术》一书中，首先研究了虚数. 1572 年，意大利数学家邦别利（R. Bombelli，1526—1572）正式使用“实数”“虚数”这两个名词.
>
> 读一读

> 虚数单位 i 是瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707—1783）最早引用的，它取自 imaginary（想象的，假想的）一词的第一个字母. 在电学中，为了与电流符号区分开来，虚数单位常用 j 来表示.
>
> 读一读

(2) 它和实数在一起可以按照四则运算法则进行运算.

我们把这个新数 i 叫做**虚数单位**. 这样，i 就是方程 $x^2+1=0$ 的一个解.

在这种规定下，i 可以与实数 b 相乘，再与实数 a 相加，结果可以写成 $a+b\mathrm{i}$. 这样，形如 $a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$ 的数叫做**复数**，a 叫做复数的**实部**，b 叫做复数的**虚部**. 当虚部 $b=0$ 时，规定 $0\cdot\mathrm{i}=0$，复数就成为实数；当虚部 $b\neq0$ 时，$a+b\mathrm{i}$ 叫做**虚数**；而当虚部 $b\neq0$ 且实部 $a=0$ 时，$b\mathrm{i}$ 叫做**纯虚数**.

例如，3，-2，$-\frac{1}{2}-\sqrt{7}\mathrm{i}$，$-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，$3\mathrm{i}$，$-0.5\mathrm{i}$ 都是复数，它们的实部分别是：3，-2，$-\frac{1}{2}$，$-\sqrt{3}$，0，0；它们的虚部分别是：0，0，$-\sqrt{7}$，$\frac{1}{2}$，3，-0.5. 其中 3，-2 都是实数；$-\frac{1}{2}-\sqrt{7}\mathrm{i}$，$-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，$3\mathrm{i}$，$-0.5\mathrm{i}$ 都是虚数；而 $3\mathrm{i}$，$-0.5\mathrm{i}$ 都是纯虚数.

> **想一想**　0 是复数吗？如果是，请说出它的实部和虚部.

复数通常用字母 z 表示，即 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$. 对于复数 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$，以后除特殊说明外，都有 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$.

全体复数所构成的集合 $\{z\mid z=a+b\mathrm{i}, a, b\in\mathbf{R}\}$，叫做**复数集**. 复数集通常用 $\mathbf{C}$ 表示，即

$$\mathbf{C}=\{z\mid z=a+b\mathrm{i}, a, b\in\mathbf{R}\}.$$

显然，实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集，即 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

因此，复数可以分类如下

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\\\text{虚数}\end{cases}$$

这样，数集就由实数集扩充到了复数集.

> **试一试**　你能用文氏图表示复数集、实数集、有理数集、无理数集、虚数集、纯虚数集之间的关系吗？

如果两个复数 $a+b\mathrm{i}$，$c+d\mathrm{i}$ 的实部与虚部分别相等，我们就说这两个**复数相等**. 记作

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i},$$

这就是说，如果 a，b，c，d 都是实数，那么

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c，且\ b=d；$$

$$a+bi=0 \Leftrightarrow a=0，且\ b=0.$$

应该注意，两个实数可以比较大小，但两个复数，如果不全是实数，它们之间就不能比较大小，只能说相等或不相等. 例如，3 与 i，$1+i$ 与 $2+i$ 之间无大小可言.

例 1 实数 m 取什么值时，复数 $z=m+1+(m-1)i$ 是：

(1) 实数？ (2) 虚数？ (3) 纯虚数？

解 (1) 当 $m-1=0$，即 $m=1$ 时，复数 z 是实数，此时 $z=2$；

(2) 当 $m-1\neq0$，即 $m\neq1$ 时，复数 z 是虚数；

(3) 当 $m+1=0$，且 $m-1\neq0$，即 $m=-1$ 时，复数 z 是纯虚数，此时 $z=-2i$.

例 2 求适合下列方程的 x 和 $y(x,\ y\in\mathbf{R})$ 的值：

(1) $(x+2y)-i=6x+(x-y)i$；

(2) $(x+y+1)-(x-y+2)i=0$.

解 (1) 根据复数相等的定义，得方程组

$$\begin{cases}x+2y=6x\\-1=x-y\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

(2) 由复数等于零的充要条件，得

$$\begin{cases}x+y+1=0\\-(x-y+2)=0\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

练习20-1

1. 口答下列各题：

(1) 说出下列各复数的实部和虚部：

$$-3+2\mathrm{i},\ 3+7\mathrm{i},\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ \sqrt{2}-\mathrm{i},\ -\sqrt{3}\mathrm{i},\ \mathrm{i},\ -7.$$

(2) 说出下列各数中，哪些是实数，哪些是虚数，哪些是纯虚数：

$$2+\sqrt{2},\ 0.618,\ \frac{1}{2}\mathrm{i},\ 0,\ \mathrm{i},\ \mathrm{i}^2,\ 5+2\mathrm{i},$$

$$3-\sqrt{2}\mathrm{i},\ (1+\sqrt{3})\mathrm{i},\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i},\ \frac{2}{3}.$$

(3) $3\mathrm{i}$ 是不是正数？$-2\mathrm{i}$ 是不是负数？$\sqrt{5}\mathrm{i}$ 是不是无理数？

(4) 复数集中，哪些数之间能比较大小？哪些数之间不能？

2. 填空：

(1) 复数集是实数集与虚数集的____________；

(2) 实数集与纯虚数集的交集是____________；

(3) 纯虚数集是虚数集的____________；

(4) 设复数集 $\mathbf{C}$ 为全集，那么实数集的补集是____________.

3. 求适合下列方程中的 x 和 $y(x,\ y\in\mathbf{R})$ 的值：

(1) $(x-2y)+(2x+3y)\mathrm{i}=3-3\mathrm{i}$；

(2) $(3x+y+3)=(x-y-3)\mathrm{i}$；

(3) $(x+y-3)+(x-y-1)\mathrm{i}=0$.

4. 试问实数 x 取何值时，复数 $(x^2+x-2)+(x+2)\mathrm{i}$ 是实数？是虚数？是纯虚数？

20.1.2 复数的几何意义

问题 2 我们知道，任何一个平面向量在直角坐标系中可以由一个有序实数对来唯一确定，一个复数也是由复数的实部和虚部这个有序实数对唯一确定的. 那么，它们之间有怎样的联系呢？

1. 复平面

根据复数相等的定义，任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$，都可以由一个有序实数

对（a，b）来唯一确定，而每一个有序实数对（a，b），在平面直角坐标系中又唯一确定一点 $Z(a, b)$ 或一个向量 $\overrightarrow{OZ}=(a, b)$．因此复数 $z=a+bi$，点 $Z(a, b)$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}=(a, b)$ 之间能建立起一一对应关系，点 $Z(a, b)$ 或向量 $\overrightarrow{OZ}=(a, b)$ 就是复数 $z=a+bi$ 的几何表示（如图 20-1）．

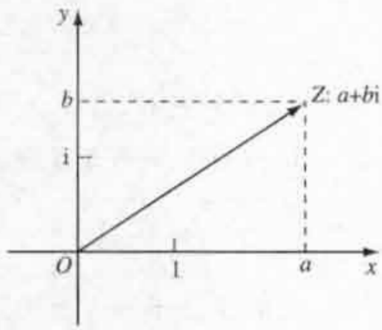


图 20-1

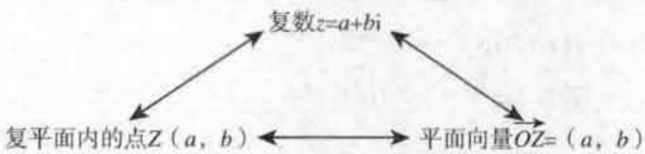
用直角坐标系来表示复数的平面叫做**复平面**.

在复平面内，x 轴叫做**实轴**，y 轴叫做**虚轴**．x 轴的单位是 1，y 轴的单位是 i.

显然，实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数.

例如，复平面内的原点（0，0）表示实数 0，实轴上的点（2，0）表示实数 2，虚轴上的点（0，−1）表示纯虚数 −i，点（−2，3）表示复数 −2+3i 等.

因此，复数和复平面内的点是一一对应的，而且复数与复平面内以坐标原点为起点的向量也是一一对应的，即



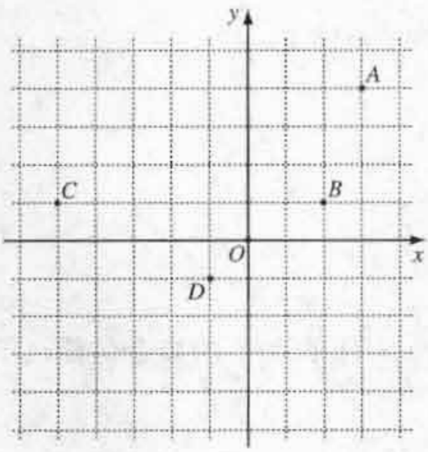
为了方便起见，我们常把复数 $z=a+bi$ 记作 Z：$a+bi$ 或 $\overrightarrow{OZ}=a+bi$，并且规定，相等的向量表示同一个复数.

例 3 （1）写出图 20-2（1）中复平面内的各点所表示的复数；

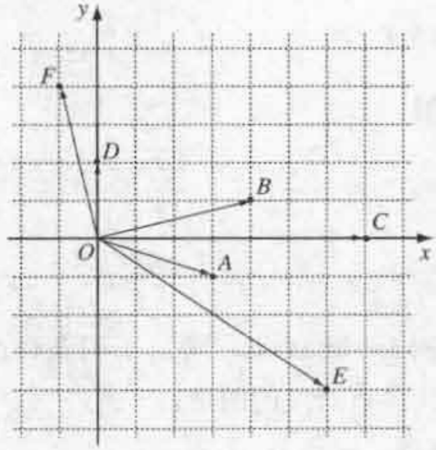
（2）在复平面内，作出表示下列复数的点和向量：3−i，4+i，7，2i，6−4i，−1+4i.

解 （1）O：0，A：3+4i，B：2+i，C：−5+i，D：−1−i；

（2）如图 20-2（2）所示，A：3−i，B：4+i，C：7，D：2i，E：6−4i，F：−1+4i.



(1)



(2)

图 20-2

2. 复数的模和共轭复数

设$\overrightarrow{OZ}=a+b\text{i}$，则向量$\overrightarrow{OZ}$的长度（模）叫做复数 $z=a+b\text{i}$ 的模（或绝对值），记作$|z|$或$|a+b\text{i}|$. 由向量的长度计算公式得

$$\boxed{|z|=|a+b\text{i}|=\sqrt{a^2+b^2}.}$$

显然，$|z|$就是点 $Z(a, b)$ 到原点的距离.

当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做**互为共轭复数**. 复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示. 即当 $z=a+b\text{i}$ 时，$\bar{z}=a-b\text{i}$.

显然，在复平面内，表示两个互为共轭复数的点关于实轴对称（图 20-3），并且它们的模相等.

> （1）试分别说出 $2-3\text{i}$，4i，-6，0 的共轭复数；（2）复数$z=a+b\text{i}$，当 a，b 满足什么条件时，$z=\bar{z}$？
>
> 试一试

> 你能用定义证明 $|z|=|\bar{z}|$ 吗？
>
> 试一试

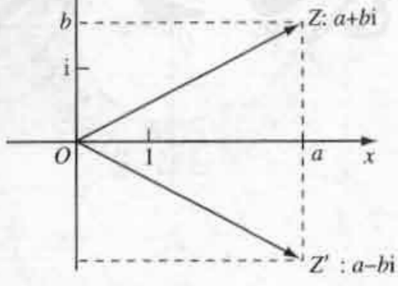


图 20-3

例 4 求 $z_1=3+4\mathrm{i}$，$z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 的模和共轭复数.

解 $|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$|z_2|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.

$\overline{z_1}=3-4\mathrm{i}$，$\overline{z_2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

例 5 设 $z\in\mathbf{C}$，满足下列条件的复数 z 对应的点 Z 的集合是什么图形？并作出各自对应的图形：

(1) $|z|=2$；　　(2) $2\leqslant|z|<3$.

解 (1) 复数 z 的模等于 2，这表明，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度等于 2，即点 Z 到原点的距离等于 2，所以满足条件 $|z|=2$ 的复数 z 对应的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心，以 2 为半径的圆，如图 20-4 (1)；

(2) 不等式 $2\leqslant|z|<3$ 可化为不等式组

$$\begin{cases}|z|<3\\|z|\geqslant 2\end{cases}$$

不等式 $|z|<3$ 的解对应的点的集合是以原点 O 为圆心，以 3 为半径的圆的内部所有点构成的集合，不等式 $|z|\geqslant 2$ 的解对应的点的集合是以原点 O 为圆心，以 2 为半径的圆及该圆外部所有点构成的集合. 这两个集合的交集，就是上述不等式组的解对应的点的集合，也就是满足条件 $2\leqslant|z|<3$ 的复数 z 对应的点 Z 的集合，如图 20-4 (2) 阴影所示.

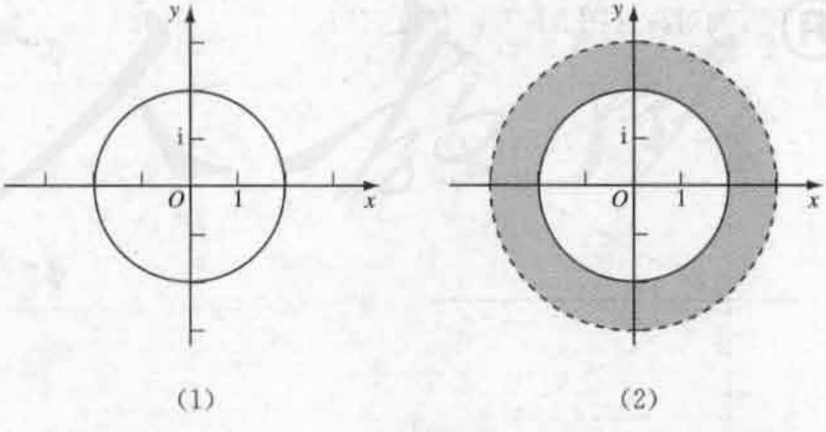
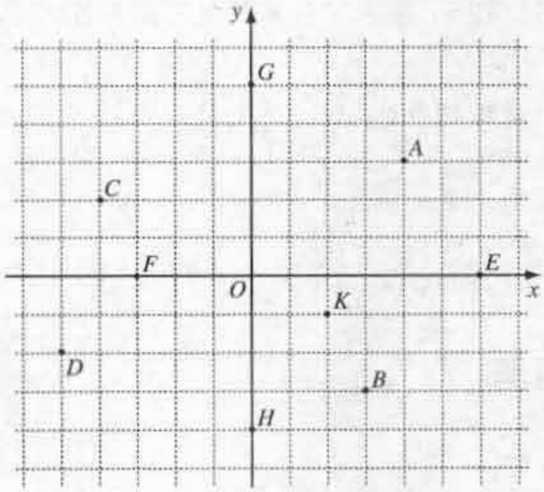


图 20-4

练习20-2

1. 写出图中复平面内各点所表示的复数（方格的每边表示单位长）.



（第1题）

2. 在复平面内描出表示下列各复数的点和向量：

(1) $2+5i$；　　(2) $-3+2i$；

(3) $3-2i$；　　(4) $-2i-4$；

(5) 3；　　(6) $-3i$；

(7) $4i$；　　(8) -2.

3. 设 Z 是复平面内表示复数 $z=a+bi$ 的点，a，b 必须满足什么条件，才能使点 Z 位于：

(1) 实轴上？　　(2) 虚轴上？

(3) 上半平面（不包括实轴）？　　(4) 右半平面（不包括虚轴）？

(5) 第一象限？　　(6) 第三象限？

4. 求下列复数的模和共轭复数：

(1) $4-3i$；　　(2) $5+12i$；

(3) $\frac{3}{2}-2i$；　　(4) $-1+\sqrt{2}i$；

(5) $-7i$；　　(6) 3.

5. 在复平面内，O 是原点，向量 $\overrightarrow{OA}=2+i$，点 A 关于实轴的对称点为点 B，点 B 关于虚轴的对称点为点 C，求：

(1) 向量$\overrightarrow{OB}$对应的复数；

(2) 点 C 对应的复数.

6. 在复平面内，满足下面条件的复数 z 对应的点 Z 的集合表示什么图形？并作出各自的图形：

(1) z 的实部与虚部相等；

(2) $|z|=1$；

(3) $1<|z|<2$.

20.2 复数的运算

20.2.1 复数的加法和减法

复数的加法运算，可以按照多项式的加法法则来进行，把最后的结果写成 $a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})$的形式．我们规定复数的加法法则如下：

设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，则

$$\boxed{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.}$$

显然，两个复数的和仍然是一个确定的复数.

想一想 两个虚数的和还是虚数吗？试举例说明.

容易证明，复数的加法运算满足交换律、结合律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

$$\boxed{\begin{aligned}&z_1+z_2=z_2+z_1,\\&(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).\end{aligned}}$$

类比实数减法的意义，我们规定复数的减法是加法的逆运算，即把满足

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi$$

的复数 $x+yi$ 叫做复数 $a+bi$ 减去复数 $c+di$ 的差，记作$(a+bi)-(c+di)$.

因为$(c+d\mathrm{i})+(x+y\mathrm{i})=(c+x)+(d+y)\mathrm{i}$，所以

$$(c+x)+(d+y)\mathrm{i}=a+b\mathrm{i},$$

根据复数相等的定义，有 $c+x=a$，$d+y=b$，因此

$$x=a-c，y=b-d,$$

所以 $x+y\mathrm{i}=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$，即

$$\boxed{(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.}$$

这就是复数的减法法则.

由此可见，两个复数的差是一个确定的复数.

因此，**两个复数相加（减）就是把实部与实部、虚部与虚部分别相加（减）**，即

$$(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}.$$

我们知道，任何一个复数和复平面内以原点为起点的向量是一一对应的，如果复数$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$ 对应的向量分别为$\overrightarrow{OP_1}=(a，b)$，$\overrightarrow{OP_2}=(c，d)$，则 z_1+z_2 就可以用$\overrightarrow{OP_1}$ 与$\overrightarrow{OP_2}$ 的和$\overrightarrow{OP}$表示，z_1-z_2 就可以用$\overrightarrow{OP_1}$与$\overrightarrow{OP_2}$的差$\overrightarrow{P_2P_1}$表示，这就是复数加减法的几何意义，如图 20-5 所示.

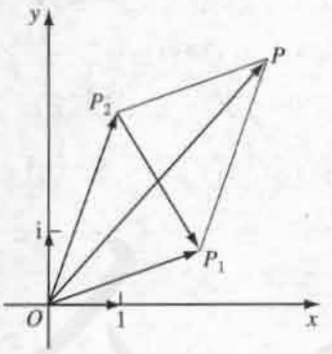


图 20-5

举例说明两个共轭复数的和一定是实数，它们的差或者是零或者是纯虚数.

试一试

例 1　已知 $z_1=3+2\mathrm{i}$，$z_2=1-4\mathrm{i}$，计算 z_1+z_2，z_1-z_2.

解　$z_1+z_2=(3+2\mathrm{i})+(1-4\mathrm{i})$

$=(3+1)+(2-4)\mathrm{i}$

$=4-2\mathrm{i}.$

$z_1-z_2=(3+2\mathrm{i})-(1-4\mathrm{i})$

$=(3-1)+[2-(-4)]\mathrm{i}$

$=2+6i.$

例 2 计算$(2-5i)+(3+7i)-(5+4i)$.

解 $(2-5i)+(3+7i)-(5+4i)$

$=(2+3-5)+(-5+7-4)i$

$=-2i.$

练习20-3

1. 填空题：

(1) $6i+i=$________； (2) $2+3i+3=$________；

(3) $i+(4+2i)=$________； (4) $3+\left(4+\frac{2}{3}i\right)=$________；

(5) $4i-7i=$________； (6) $3+2i-5=$________；

(7) $0-\left(1-\frac{1}{2}i\right)=$________； (8) $5i-(2-4i)=$________；

(9) $(1+i)+(1-i)=$______； (10) $(3+2i)-(3-2i)=$______.

2. 计算：

(1) $(4+3i)+(5+7i)$； (2) $(-5+i)+(3-2i)$；

(3) $(3+2i)+(-3-2i)$； (4) $(4+5i)-(3+2i)$；

(5) $(-3+2i)-(4-5i)$； (6) $(6-3i)-(-3i-2)$；

(7) $(-3+2i)-(5-i)+(4+7i)$； (8) $(5-4i)+\left(-\frac{3}{2}+7i\right)-\left(\frac{1}{2}-i\right)$.

20.2.2 复数的乘法和除法

1. 复数的乘法

两个复数的乘法可以按多项式的乘法法则进行，只是在所得的结果中把 i^2 换成-1，并且把实部与虚部分别合并，写成 $a+bi$ 的形式即可.

我们规定，复数的乘法法则如下

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

即

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

显然，两个复数的积仍为复数.

容易证明，复数的乘法运算满足交换律、结合律和乘法对加法的分配律，即对任意的复数 z_1，z_2，z_3，有

$$z_1z_2=z_2z_1,$$
$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),$$
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

例 3　计算：

(1) $(2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$；　　　(2) $(1-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})$.

解　(1)　$(2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$

$=6-8\mathrm{i}+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2$

$=10-5\mathrm{i}$；

(2)　$(1-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})$

$=(11-2\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})$

$=-20+15\mathrm{i}$.

例 4　求证：$z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

证明　设 $z=a+b\mathrm{i}$，$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，于是

$z\bar{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})$

$=a^2-ab\mathrm{i}+ab\mathrm{i}-b^2\mathrm{i}^2$

$=a^2+b^2=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

例 4 表明，**两个互为共轭复数的乘积等于这个复数（或其共轭复数）的模的平方.**

> (1) 试举例验证 $z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$；(2) 在复数范围内，把 a^2+b^2 分解成两个一次因式的积.
>
> **试一试**

2. 复数的乘方

根据乘法的运算律，实数范围内正整指数幂的运算律在复数范围内仍然成立，即对任意复数 z，z_1，z_2 和自然数 m，n 有

$$z^mz^n=z^{m+n},$$
$$(z^m)^n=z^{mn},$$
$$(z_1z_2)^n=z_1{}^nz_2{}^n.$$

在复数的乘方运算中，经常要计算 i 的正整数次幂，我们要记住如下结果

$$i^1=i,\qquad i^2=-1,\qquad i^3=-i,\qquad i^4=1;$$

$$i^{4n+1}=i,\qquad i^{4n+2}=-1,\qquad i^{4n+3}=-i,\qquad i^{4n}=1,\ n\in \mathbf{N}_+.$$

例 5 计算 $(1-\sqrt{2}i)^2$.

解
$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2}i)^2&=1^2-2\times1\times\sqrt{2}i+(\sqrt{2}i)^2\\&=1-2\sqrt{2}i+2\times(-1)\\&=-1-2\sqrt{2}i.\end{aligned}$$

例 6 计算：i^{19}；i^{28}；i^{37}；i^{90}.

解 $i^{19}=i^{4\times4+3}=-i$；　　$i^{28}=i^{4\times7}=1$；

$i^{37}=i^{4\times9+1}=i$；　　$i^{90}=i^{4\times22+2}=-1$.

例 7 计算：

(1) $(1+i)^2$；　　(2) $(1-i)^2$；　　(3) $(1+i)^{2\,000}$.

解 (1) $(1+i)^2=1^2+2i+i^2=1+2i-1=2i$；

(2) $(1-i)^2=1^2-2i+i^2=1-2i-1=-2i$；

(3)
$$\begin{aligned}(1+i)^{2\,000}&=[(1+i)^2]^{1\,000}=(2i)^{1\,000}\\&=2^{1\,000}\cdot i^{1\,000}=2^{1\,000}\cdot i^{4\times250}=2^{1\,000}.\end{aligned}$$

3. 复数的除法

规定复数的除法是乘法的逆运算，即把满足

$$(c+di)(x+yi)=a+bi\quad (c+di\neq0)$$

的复数 $x+yi$ 叫做复数 $a+bi$ 除以复数 $c+di$ 的商，记作 $(a+bi)\div(c+di)$ 或 $\dfrac{a+bi}{c+di}$.

因为 $(c+di)(x+yi)=(cx-dy)+(dx+cy)i$，所以

$$(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi,$$

根据复数相等的定义，有

$$\begin{cases}cx-dy=a\\dx+cy=b\end{cases}$$

解这个方程组得

$$\begin{cases}x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\\ y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\end{cases}$$

于是有

$$\boxed{(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\ (c+di\neq 0).}$$

由此可见，两个复数相除（除数不为零），所得的商是一个确定的复数.

在实际运算时，通常把$(a+bi)\div(c+di)$写成$\frac{a+bi}{c+di}$的形式，分子与分母同乘以分母的共轭复数 $c-di$，使分母“实数化”，化简后把结果写成 $a+bi$ 的形式即可. 即

$$(a+bi)\div(c+di)=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

若复数 $z=a+bi$ 不为零，则$\frac{1}{z}$叫做 z 的**倒数**，由复数除法的运算法则可得

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}.$$

显然，$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

例 8　计算$(1+2\mathrm{i})\div(3-4\mathrm{i})$.

解　$(1+2\mathrm{i})\div(3-4\mathrm{i})=\frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}$

$$=\frac{-5+10\mathrm{i}}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}.$$

例 9　计算$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^8$.

解　$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^8=\left[\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right]^8=\left(\frac{2\mathrm{i}}{2}\right)^8=\mathrm{i}^8=1.$

练习20-4

1. 计算：

(1) $(3+2i)(7+i)$；　(2) $(4-3i)(-2-3i)$；

(3) $(4-8i)i$；　(4) $-3i(7-6i)$；

(5) $(1+i)(1-i)$；　(6) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(-\sqrt{3}+\sqrt{2}i)$；

(7) $(3+\sqrt{2}i)^2$；　(8) $(3+4i)^3$；

(9) $i(2-i)(1-2i)$；　(10) $(1+2i)(3-4i)(-2-i)$.

2. 在下列各题中，已知 z，求 $\overline{z}$，并验证 $z\overline{z}=|z|^2$：

(1) $z=3+6i$；　(2) $z=-3+6i$；

(3) $z=5+2\sqrt{6}i$；　(4) $z=-5+2\sqrt{6}i$.

3. 计算：

$$i^{23}, i^{352}, i^{1\,000}, i^{2\,007}, (-i)^{2\,008}, i^{3\,333}.$$

4. 计算：

(1) $\dfrac{2+i}{7+4i}$；　(2) $\dfrac{1-2i}{2-3i}$；

(3) $\dfrac{2-i}{4-i}$；　(4) $\dfrac{2i}{1-i}$；

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}i}$；　(6) $\dfrac{1}{i}$；

(7) $\dfrac{1}{1+i}$；　(8) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$.

5. 计算$\dfrac{1}{(1+i)^2}+\dfrac{1}{(1-i)^2}$.

20.3 实系数一元二次方程的解法

在初中，我们学过在实数集 **R** 中实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法，其解的情况是：

当根的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程在实数集 **R** 中有两个不相等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

当根的判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程在实数集 **R** 中有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

当根的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程在实数集 **R** 中无解.

现在，我们在复数集 **C** 中研究当判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

我们先考察方程 $x^2=-1$ 的解. 因为 $\mathrm{i}^2=-1$，$(-\mathrm{i})^2=-1$，所以 i 和 $-\mathrm{i}$ 都是 -1 的平方根，即方程 $x^2=-1$ 的解是 $x=\pm\mathrm{i}$.

同理，方程 $x^2=-5$ 的解是 $x=\pm\sqrt{5}\,\mathrm{i}$.

方程 $x^2=-a$ $(a>0)$ 的解是 $x=\pm\sqrt{a}\,\mathrm{i}$.

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(b^2-4ac<0)$，通过配方可变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

由 $b^2-4ac<0$，可知 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，所以

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}.$$

因此，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 在复数集 **C** 中的解是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a},$$

其中 $b^2-4ac<0$，显然这两个根是一对共轭复数.

> **做一做**
>
> 求方程 $x^2=-2$；$x^2=-3$；$x^2+8=0$ 的解.

> **议一议**
>
> (1) 在复数集中，任何实系数一元二次方程都有解.
>
> (2) 在复数集中，任意一个实系数一元二次方程都有两个共轭复数根.
>
> 这两个命题正确吗？

设这一对共轭复根为 x_1，x_2，则

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\,\mathrm{i}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

这就是说，在复数集 **C** 中，实系数一元二次方程的根与系数的关系，在根的判别式 $\Delta<0$ 时也成立.

例 1 在复数集 **C** 中，解方程 $x^2-4x+5=0$.

解 因为 $b^2-4ac=16-20=-4<0$，所以

$$x_1=\frac{4+\sqrt{4}\,\mathrm{i}}{2}=2+\mathrm{i},\ x_2=2-\mathrm{i}.$$

例 2 已知实系数一元二次方程 $x^2+mx+n=0$ 的一个根是 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，求它的另一个根和 m，n.

解 因为当 $\Delta<0$ 时，实系数一元二次方程在复数集 **C** 中的两个根是共轭复数，所以原方程的另一个根是 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，由根与系数的关系可得

$$m=-(x_1+x_2)=-[(1+\sqrt{3}\mathrm{i})+(1-\sqrt{3}\mathrm{i})]=-2,$$

$$n=x_1x_2=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})=1-(\sqrt{3}\mathrm{i})^2=4.$$

例 3 在复数集 **C** 中，解方程 $x^3-1=0$.

解 因为 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，所以

$$x-1=0 \text{ 或 } x^2+x+1=0,$$

解得 $x_1=1$ 或 $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

所以原方程的解为

$$x_1=1 \text{ 或 } x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \text{ 或 } x_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

想一想 在复数集 **C** 中，1 的立方根有几个？它们分别是什么？

通常，这三个根分别记作 1，ω，$\overline{\omega}$.

练习20-5

1. 解下列方程：

(1) $x^2=-9$；　　(2) $x^2+8=0$；

(3) $4x^2+35=10$；　　(4) $x^2-x+1=0$；

(5) $x^2+x=-6$；　　(6) $x^2+4x+5=0$；

(7) $x^2+2x+10=0$；　　(8) $2(x^2+4)=-x$；

(9) $(x-2)(x-3)+2=0$；　　(10) $x^3+1=0$.

2. 已知实系数一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个根是 $3-4\mathrm{i}$，求方程的另一个根和 b，c.

3. 已知两数的和等于 14，两数的积等于 58，求这两个数.

20.4 复数的三角形式

20.4.1　复数的三角形式

设 $z=a+bi$，根据复数的几何意义，我们知道 $\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$，则 $|z|=|\overrightarrow{OZ}|=\sqrt{a^2+b^2}$，如图 20-6 所示.

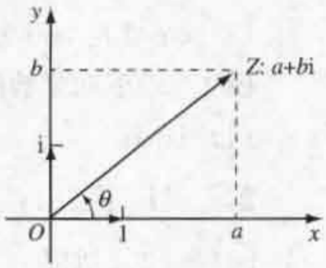


图 20-6

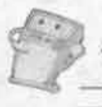
我们规定，以 x 轴的正半轴为始边，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线为终边的角 θ，叫做复数 $z=a+bi$ 的**辐角**. 显然，不等于 0 的复数 $a+bi$ 的辐角值有无数多个，这些值相差 2π 的整数倍. 例如，复数 i 的辐角可以是集合

$$\{\theta|\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$$

中的任意一个角. 如果复数等于 0，那么和它对应的向量是零向量. 由于零向量没有确定的方向，因而复数 0 没有确定的辐角.

适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的复数的辐角 θ 的值，叫做**辐角的主值**，通常记作 $\arg z$，即

$$0\leqslant\arg z<2\pi.$$



想一想　复数 1，i，-1，$-i$ 的辐角的集合分别是什么？

容易看出，正实数的辐角的主值是 0，负实数的辐角的主值是 π，虚部为正实数的纯虚数的辐角的主值是 $\frac{\pi}{2}$，虚部为负实数的纯虚数的辐角的主值是 $\frac{3\pi}{2}$.

要确定一个复数的辐角，可以利用公式

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r}\\[2mm] \sin\theta=\dfrac{b}{r}\end{cases}$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，θ 的终边所在的象限由 a 和 b 的符号确定.

由三角函数的定义，可知

$$a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta,$$

所以 $z=a+bi=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，即

$$\boxed{a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta).}$$

式子 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 叫做复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**三角形式**. 为了和三角形式相区别，$a+b\mathrm{i}$ 叫做复数的**代数形式**.

注 复数的三角形式 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 必须满足三个条件：

(1) $r>0$；

(2) 同一个辐角 θ 的余弦和正弦；

(3) $\cos\theta$ 与 $\mathrm{i}\sin\theta$ 之间用"+"连接.

> **想一想** $\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ 和 $\sin\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6}$ 是复数的三角形式吗?

例 1 求下列复数的辐角和辐角的主值：

(1) $1+\mathrm{i}$； (2) $1-\mathrm{i}$.

解 (1) 因为 $a=1$，$b=1$，$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以

$$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}，\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

所以复数 $1+\mathrm{i}$ 的辐角为 $\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 复数 $1+\mathrm{i}$ 的辐角的主值为$\frac{\pi}{4}$.

(2) 因为 $a=1$，$b=-1$，$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，所以

$$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}，\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

所以复数 $1-\mathrm{i}$ 的辐角为 $\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 复数 $1-\mathrm{i}$ 的辐角的主值为$\frac{7\pi}{4}$.

例 2 化下列复数的代数形式为三角形式：

(1) $2\mathrm{i}$； (2) -1； (3) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$； (4) $-1-\mathrm{i}$.

解 (1) 因为 $r=\sqrt{0^2+2^2}=2$，$\arg(2\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$，所以

$$2\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)；$$

(2) 因为 $r=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$，$\arg(-1)=\pi$，所以

$$-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi；$$

(3) 因为 $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$，所以

$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\frac{\pi}{6}，$$

所以$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(4) 因为 $r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，而且

$$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\arg(-1-\mathrm{i})=\frac{5\pi}{4}$，因此

$$-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

把一个复数表示成三角形式时，复数的辐角不一定取主值，例如

$$\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

也是复数$-1-\mathrm{i}$的三角形式.

容易知道，如果 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则 $\overline{z}=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$.

练习20-6

1. （口答）下列各式哪些是复数的三角形式？

(1) $2\left(\cos\frac{\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right)$；　　(2) $-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)$；

(3) $\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}$；　　(4) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

2. 求下列复数的辐角和辐角主值：

(1) $-1+\mathrm{i}$；　　(2) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$；

(3) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$；　　(4) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

3. 把下列复数表示成三角形式：

(1) $-\mathrm{i}$；　　(2) 1；

(3) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；　　(4) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

4. 把下列复数表示成代数形式：

(1) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$；　　(2) $8\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.

20.4.2 复数三角形式的乘法与乘方运算

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$
\begin{aligned}
z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\
&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\
&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],
\end{aligned}
$$

即

$$
\boxed{\begin{aligned}&r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}}
$$

这就是说，**两个复数乘积的模等于两个复数模的积，积的辐角等于两个复数的辐角的和.**

由此，我们就可以得到两个复数 z_1 与 z_2 乘积的几何意义：

如图 20-7，在复平面内，分别画出 $\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1$，$\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2$ 对应的向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，把$\overrightarrow{OP_1}$旋转 θ_2，就得到 $\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)$对应的向量$\overrightarrow{OP_3}$，再把$\overrightarrow{OP_3}$的模变为原来的 r_1r_2 倍，所得的向量$\overrightarrow{OP}$，就表示 z_1z_2.

特别地，复数 z 乘以 i，就是把 z 对应的向量$\overrightarrow{OP}$绕原点旋转 90°到$\overrightarrow{OP_1}$的位置；复数 z 乘以$-$i，就是把 z 对应的向量$\overrightarrow{OP}$绕原点旋转$-90°$到$\overrightarrow{OP_2}$的位置，如图 20-8 所示.

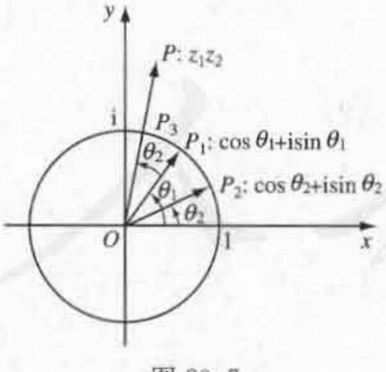


图 20-7

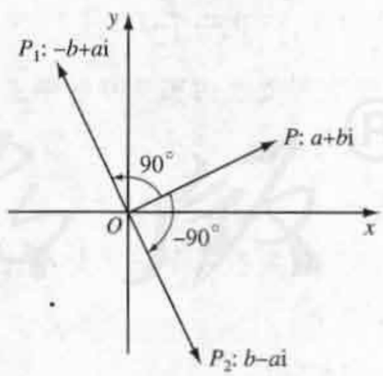


图 20-8

上面的结论可以推广到 n 个复数相乘的情况，即

$$
\begin{aligned}
&r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\cdot\cdots\cdot r_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)\\
&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)],
\end{aligned}
$$

在上式中，令

$$r_1=r_2=\cdots=r_n,\ \theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n,$$

又可得到

$$\boxed{\begin{aligned}&[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n\\&=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)\ (n\in\mathbf{N}_+).\end{aligned}}$$

棣莫佛（A. de Moivre，1667—1754）是最早给出这个公式的数学家.

这就是说，**复数 n 次幂的模等于这个复数模的 n 次幂，它的辐角等于这个复数的辐角的 n 倍.**

这个定理通常叫做**棣莫佛定理**.

例 3 计算：$3\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

解 $3\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\mathrm{i}$.

例 4 计算：

(1) $(\cos 40^\circ+\mathrm{i}\sin 40^\circ)^8$；

(2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^{11}$.

解 (1) $(\cos 40^\circ+\mathrm{i}\sin 40^\circ)^8$

$=\cos 320^\circ+\mathrm{i}\sin 320^\circ$

$=\cos 40^\circ-\mathrm{i}\sin 40^\circ$.

(2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^{11}$

$=\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^{11}$

$=\cos\frac{11\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{4}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

例 5 如图 20-9，向量$\overrightarrow{OZ}$表示复数$-1+\mathrm{i}$，把向量$\overrightarrow{OZ}$绕原点旋转 120°，得到向量$\overrightarrow{OZ_1}$. 求向量$\overrightarrow{OZ_1}$对应的复数（用代数形式表示）.

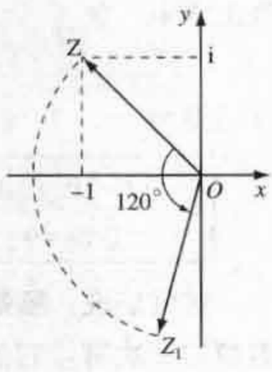


图 20-9

解 根据复数乘法的几何意义，所求的复数就是$-1+\mathrm{i}$乘以一个模为 1，辐角为 120°的复数，即所求的复数是

$$\begin{aligned}&(-1+\mathrm{i})(\cos 120^\circ+\mathrm{i}\sin 120^\circ)\\=&(-1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\=&\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

练习20-7

1. 口答下列问题：

(1) 若$|z_1|=2$，$|z_2|=3$，则$|z_1z_2|$是多少？

(2) 若$\arg z_1=\frac{\pi}{6}$，$\arg z_2=\frac{\pi}{3}$，则$\arg(z_1z_2)$是多少？

2. 计算：

(1) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(2) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(3) $\sqrt{2}(\cos 240^\circ+\mathrm{i}\sin 240^\circ)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 30^\circ+\mathrm{i}\sin 30^\circ)$；

(4) $3(\cos 18^\circ+\mathrm{i}\sin 18^\circ)\cdot 2(\cos 54^\circ+\mathrm{i}\sin 54^\circ)\cdot 5(\cos 108^\circ+\mathrm{i}\sin 108^\circ)$.

3. 用棣莫佛定理计算：

(1) $[3(\cos 18^\circ+\mathrm{i}\sin 18^\circ)]^5$；

(2) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$；

(3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^8$；

(4) $(1-\mathrm{i})^6$.

4. 向量$\overrightarrow{OZ}$表示复数$a+b\mathrm{i}$，把$\overrightarrow{OZ}$分别绕原点O旋转$\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}$到$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$的位置. 求$\overrightarrow{OZ_1}$和$\overrightarrow{OZ_2}$所表示的复数.

20.4.3 复数三角形式的除法运算

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，且 $z_2\neq 0$.

因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_2}&=\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}\\&=\frac{r_2[\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2)]}{r_2^2}\\&=\frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2)],\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=z_1\cdot\frac{1}{z_2}\\&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot\frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2)]\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].\end{aligned}$$

这就是说，两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差.

> **想一想** 复数 z_1 除以复数 z_2 的几何意义是什么？

例 6 计算：

$$4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

解 $4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$$\begin{aligned}&=2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\\&=2(0+\mathrm{i})\\&=2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

练习20-8

1. 口答下列问题：

(1) 若$|z_1|=2$，$|z_2|=3$，则$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$是多少？

(2) 若$\arg z_1=\frac{\pi}{6}$，$\arg z_2=\frac{\pi}{3}$，则$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$是多少？

2. 计算：

(1) $12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div\left[6\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$；

(2) $\sqrt{3}(\cos 150^\circ+\mathrm{i}\sin 150^\circ)\div[\sqrt{2}(\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ)]$；

(3) $2\div\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(4) $(-\mathrm{i})\div[2(\cos 120^\circ+\mathrm{i}\sin 120^\circ)]$.

3. 求证：$\frac{1}{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$.

4. 将对应于复数$z_1=3-\sqrt{3}\mathrm{i}$的向量按顺时针方向旋转60°后得到新向量对应的复数为z_2. 求z_1z_2和$\frac{z_1}{z_2}$的值.

20.4.4 复数的开方运算

方程

$$z^n=a\ (n\in\mathbf{N}_+,\ a\in\mathbf{C},\ 且\ a\neq 0) \qquad ①$$

的解z叫做复数a的n**次方根**. 下面我们来解方程①.

设$a=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，且$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$是方程①的解，则

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

因为相等的复数，它们的模相等，而辐角相差2π的整数倍，所以

$$\rho^n=r,\ n\varphi=\theta+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z}).$$

由此可得

$$\rho=\sqrt[n]{r},\ \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

因此，$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$的$n$次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

当 k 取 0，1，2，…，$n-1$ 各值时，上式有 n 个不相同的值；由于正弦函数和余弦函数的周期都是 2π，所以当 k 取 n，$n+1$，…时，$\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}$的值就会重复出现. 因此，复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根是

$$\boxed{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),}$$

其中 $k=0$，1，2，…，$n-1$.

这就是说，一个复数的 n 次方根有 n 个值，它们的模都等于这个复数模的 n 次算术根，它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 0，1，2，…，$n-1$倍的和的 n 分之一.

例 7 解方程 $z^2=\mathrm{i}$.

解 因为 $\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$，所以 i 的平方根是

$$\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right),$$

其中 $k=0$，1. 于是得

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}，z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}.$$

即

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}，z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

例 8 求 $1-\mathrm{i}$ 的立方根.

解 因为 $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$，所以 $1-\mathrm{i}$ 的立方根是

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right],$$

其中 $k=0$，1，2.

所以 $1-\mathrm{i}$ 的立方根有三个，它们分别是

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$，$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$，$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{23\pi}{12}\right)$.

练习20-9

1. 计算：

(1) i 的立方根；　(2) $-\mathrm{i}$ 的立方根；　(3) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 的立方根.

2. 解方程：

(1) $z^3=8\mathrm{i}$；　(2) $z^4=-9$；　(3) $z^5=-1-\mathrm{i}$.

3. 求 -16 的立方根.

4. 解方程：$z^6=-64$.

20.5 复数的指数形式

复数三角形式的乘法、除法运算法则与指数的运算法则很类似. 在数学中，我们引入记号 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示复数 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. 即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

我们知道

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}&=(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2),\end{aligned}$$

而

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}=\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2),$$

所以

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}.}$$

这样，复数三角形式的乘法运算就可转化为指数运算.

$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 叫做复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的**指数形式**.

例 1 计算：

(1) $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\cdot 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$；　(2) $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\div(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})$.

解 (1) $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\cdot 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)}=6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$；

(2) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\div(2e^{i\frac{\pi}{3}})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

例 2　计算：

(1) $(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}})^6$；　　　　(2) 求 $e^{i\frac{\pi}{6}}$ 的立方根.

解　(1) $(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}})^6=(\sqrt{2})^6(e^{i\frac{\pi}{8}})^6=8e^{i\frac{3\pi}{4}}$；

(2) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ 的立方根是

$$e^{i\frac{1}{3}(2k\pi+\frac{\pi}{6})}=e^{i(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{18})},$$

其中 $k=0$，1，2，即 $e^{i\frac{\pi}{18}}$，$e^{i\frac{13\pi}{18}}$，$e^{i\frac{25\pi}{18}}$.

练习20-10

1. （口答）下列复数指数形式是什么？

(1) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$；　　　　(2) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

2. 计算下列各题，并将结果化为复数的三角形式：

(1) $e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$；　　　　(2) $2e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i(-\frac{\pi}{3})}$；

(3) $e^{i\frac{\pi}{3}}\div e^{i\frac{\pi}{4}}$；　　　　(4) $2e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{i(-\frac{\pi}{4})}$.

3. 计算：

(1) $(-2e^{i\frac{\pi}{9}})^3$；　　　　(2) $(2e^{i\frac{\pi}{3}}\div e^{i\frac{\pi}{6}})^2$；

(3) $25e^{i\frac{\pi}{3}}$ 的平方根；　　　　(4) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ 的立方根.

20.6 复数的应用

复数是研究交流电路理论的重要数学工具，电压、电流等量都可以在复平面内用向量表示，这样就使这些量的分析和计算大为简便．下面举例说明.

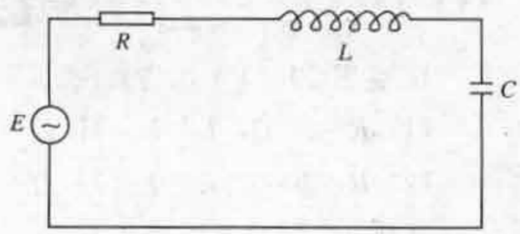


图 20-10

例 1　如图 20-10 所示，已知 $R=100\ \Omega$，$L=0.5$ H，$f=60$ Hz，$C=30\ \mu$F．计算复阻抗 Z，并把结果化为复数的三角形式.

(其中 $Z=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$，j 代表虚数单位 i，$R$ 为电阻（Ω），ω 为角速度（rad/s），L 为感抗（H），C 为电容（F），1 F$=10^6$ μF，且 $\omega=2\pi f$.）

解 将以上已知值代入 $Z=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$，得

$$\begin{aligned}Z&\approx100+j\left(2\times3.14\times60\times0.5-\frac{10^6}{2\times3.14\times60\times30}\right)\\&\approx100+j(188.4-88.5)\\&\approx100+j100.\end{aligned}$$

因为 $|Z|=\sqrt{100^2+100^2}\approx141.4$，$\theta=\frac{\pi}{4}$，所以

$$Z=141.4\left(\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

例 2 如图 20-10 所示的电路，当电压共振时（即复阻抗 Z 为实数），求频率 f 与自感 L、电容 C 之间的关系.

解 复阻抗 Z 为实数，即它的虚部等于 0. 于是得

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0,$$

即

$$2\pi fL-\frac{1}{2\pi fC}=0,$$

所以

$$f^2=\frac{1}{4\pi^2LC},$$

即

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

练习20-11

1. 在图 20-10 中，已知：

(1) $R=90\ \Omega$，$L=0.4$ H，$f=60$ Hz，$C=25$ μF；

(2) $R=30\ \Omega$，$L=0.5$ H，$f=60$ Hz，$C=2$ μF.

分别求它们的复阻抗 Z.

2. 在图 20-10 中，已知 $L=0.5\ \mathrm{H}$，$C=3\times10^{-6}\ \mathrm{F}$，求电路中电压共振时的频率.

3. 已知交流电路中的三个并联电阻的复阻抗 $Z_1=75+\mathrm{j}38$，$Z_2=12-\mathrm{j}32$，$Z_3=26+\mathrm{j}34$，与三个并联电阻等效的复阻抗 Z 满足：$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}$. 求复阻抗 Z.

习题二十

1. 求适合下列方程的实数 x 与 y 的值：

(1) $(3x+2y)+(5x-y)\mathrm{i}=17-2\mathrm{i}$；

(2) $(x+y-3)+(x-4)\mathrm{i}=0$.

2. 实数 m 取什么值时，复数 $(m^2-5m+6)+(m^2-3)\mathrm{i}$ 是：

(1) 实数？　　(2) 虚数？　　(3) 纯虚数？

3. 已知复数

$$3+5\mathrm{i};\ -1+\mathrm{i};\ -\frac{3}{2}\mathrm{i};\ 5;\ -5-12\mathrm{i};\ 10+9\mathrm{i};\ 1+\sqrt{2}\mathrm{i}:$$

(1) 在复平面内，求作与各复数对应的点和向量；

(2) 求各复数的绝对值；

(3) 求各复数的共轭复数，并作出与这些共轭复数对应的向量.

4. 设 $z\in\mathbf{C}$，满足下列条件的复数对应的点 Z 的集合是什么图形？并画出各自的图形：

(1) $|z|=5$；　　(2) $|z|\geqslant1$；　　(3) $|z|\in[2,5)$.

5. 计算：

(1) $(6-5\mathrm{i})-(3+2\mathrm{i})$；

(2) $\left(\frac{2}{3}+\mathrm{i}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)$；

(3) $(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\mathrm{i})-[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})\mathrm{i}]+(-\sqrt{2}\mathrm{i}+\sqrt{3})$；

(4) $[(a+b)+(a-b)\mathrm{i}]-[(a-b)+(a+b)\mathrm{i}]$.

6. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})$；

(2) $(3+i)(2-3i)(1-4i)$；

(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}i)(\sqrt{a}-\sqrt{b}i)$，其中 $a>0$，$b>0$；

(4) $(a+bi)(a-bi)(-a+bi)(-a-bi)$.

7. 利用公式 $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$，把下列各式分解成一次因式的积：

(1) x^2+4； (2) a^4-b^4.

8. 计算：

(1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$； (2) $(a-bi)^3$.

9. 设 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求证：

(1) $\omega^2=\bar{\omega}$； (2) $\omega^3=1$.

10. 计算：

(1) $\frac{7-9i}{1+i}$； (2) $\frac{1-2i}{3+4i}$；

(3) $\frac{1}{(2-i)^2}$； (4) $\frac{5(4+i)}{i(2+i)}$.

11. 解下列方程：

(1) $4x^2+9=0$； (2) $x^2+x+2=0$；

(3) $x^2+4x+6=0$； (4) $2x^2-3x+4=0$.

12. 已知 $2i-3$ 是关于 x 的方程 $2x^2+px+q=0$ 的一个根，求实数 p，q 的值.

13. 把下列复数表示为三角形式：

(1) $-3+3i$； (2) $3\sqrt{3}-3i$；

(3) $-2+2\sqrt{3}i$； (4) $\cos\theta-i\sin\theta$.

14. 计算：

(1) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(2) $\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(3) $10\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\div\left[5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$；

(4) $12\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)\div\left[6\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.

15. 用棣莫佛定理计算：

(1) $[3(\cos 10^\circ+\mathrm{i}\sin 10^\circ)]^6$；　　(2) $[2(\cos 15^\circ+\mathrm{i}\sin 15^\circ)]^6$；

(3) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^4$；　　(4) $(2-2\sqrt{3}\mathrm{i})^4$.

16. 当 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 是什么值时，$(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^n$是一个实数？

17. 把与复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量旋转 60°，得到一个新向量，求新向量对应的复数.

18. 解下列方程（$x\in\mathbf{C}$）：

(1) $x^5=2\mathrm{i}$；　　(2) $x^6=4+4\sqrt{3}\mathrm{i}$；

(3) $x^6=1$；　　(4) $x^{10}=1$.

19. 计算下列各题，并把结果表示为三角形式：

(1) $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$；　　(2) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\div\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$；

(3) $(-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})^3$；　　(4) $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\div\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}})^2$.

阅读与实践

数的发展简史

数的概念是从实践中发展起来的. 早在人类社会初期，人们在狩猎、采集果实等劳动中由于计数的需要，就产生了 1，2，3，4 等数的概念以及表示“没有”的数 0. 自然数的整体构成了自然数集 $\mathbf{N}$.

在自然数集中，加法、乘法运算总可以实施. 并且加法与乘法满足交换律、结合律以及分配律.

随着生产和科学的发展，数的概念也得到了发展.

为了解决测量、分配中遇到的将某些量进行等分的问题，人们引进了分数.

无论是分数的确切定义和科学表示，还是分数的算法，最早都是由我们的祖先建立起来的，这是我国对世界数学的杰出贡献之一. 如在 1 世纪的《九章算术》中，已经有约分、通分及分数的四则运算等知识.

引进了分数之后，分份和度量等问题以及两个自然数相除（除数不为 0）的问题也就解决了，并且产生了小数.

为了表示各种相反意义的量以及满足计数法的需要，人们又引进了负数. 这样就把数集扩充到有理数集 **Q**. 显然，自然数集是有理数集的真子集. 如果把整数看做分母为 1 的分数，那么有理数集实际上就是分数集.

负数的引进，是我国古代数学家对数学的又一巨大贡献.

负数概念引进后，整数集和有理数集就完整地形成了.

在整数集中，解决了自然数集中不够减的问题，有理数集中，解决了整数集中不能整除的问题，但它们都满足加法、乘法的运算律.

有些量与量之间的比值，例如由正方形的边长去度量它的对角线所得的结果，无法用有理数来表示. 为解决这个矛盾，人们又引进了无理数. 所谓无理数，就是无限不循环小数. 有理数集与无理数集合并在一起，就构成实数集 **R**. 因为有理数都可看做循环小数（包括整数、有限小数），无理数都是无限不循环小数，所以从这个意义上来说，实数集实际上就是小数集.

实数解决了开方开不尽的问题，在实数集中，不仅满足加法与乘法的运算律，而且加法、减法、乘法、除法（除数不为 0）、乘方运算总可以实施. 但是，数集扩充到实数集 **R** 以后，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $\Delta<0$ 时，方程仍然无解. 为解决使所有的一元二次方程都有解的问题，人们又引进了虚数，使数集扩充到复数集.

历史上，人类对虚数的认识与对零、负数、无理数的认识一样，经历了漫长的时间.

众所周知，在实数范围内负数的偶次方根不存在. 1545 年，意大利人卡尔达诺讨论了这样一个问题：把 10 分成两部分，使它们的积为 40，他找到的答案是 $5+\sqrt{-15}$ 或 $5-\sqrt{-15}$. 即

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10,$$

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40.$$

卡尔达诺没有因为 $5+\sqrt{-15}$ 违反实数最基本的原则而予以否定，他给这个自己还找不到合理解释的数起了个名字——虚数. 由理论推导得出的数 $5+\sqrt{-15}$ 表示自然界中哪些量呢？从此“虚数”这个令人不解的怪物困扰数学界达一百多年之久. 即使在 1730 年棣莫佛得到公式 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+$

$i\sin n\theta$ $(n\in\mathbf{N}_+)$，1748 年欧拉发现关系式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 的情况下，这种困扰仍无法澄清.

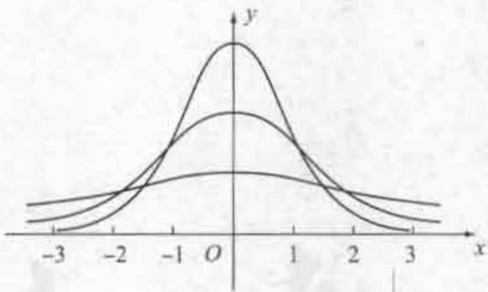
伴随着科学技术的发展，1831 年德国数学家高斯创立了虚数的几何表示，它被理解为平面上的点或向量，即复数 $z=a+bi$ 与平面直角坐标内的点 $Z(a,\ b)$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 相互对应，从而与物理学上的各种矢量相沟通，使复数成为研究力、位移、速度、加速度等量强有力的工具. 例如在电工学中，交流电的电压、电流都可用复数表示

$$\varepsilon=\varepsilon_m[\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)],$$
$$i=i_m[\cos(\omega' t+\varphi')+j\sin(\omega' t+\varphi')].$$

由它们的模和辐角完全确定了电压和电流的变化规律.

第二十一章　概率分布初步

昨天，杨辉三角揭示了二项展开式的奥秘；今天，人们利用概率分布在生活中获取收益；明天，概率知识必将引领人们创造更加辉煌的奇迹．



虽然不允许我们看透自然界本质的秘密，从而认识现象的真实原因，但仍可能发生这样的情形：一定的虚构假设足以解释许多现象．

——欧　拉

没有大胆的猜测，就做不出伟大的发现．

——牛　顿

排列、组合的知识对数学的发展产生过巨大的影响．二项式定理既是排列与组合知识的应用，又是随机变量及其分布知识的基础．概率分布的知识在工农业生产和科学技术中得到越来越广泛的应用，现已成为研究自然现象和规律、处理工程乃至公共事业问题的有利工具．

21.1 排列与组合

21.1.1　排列与排列数公式

问题 1　现有甲、乙、丙三个足球队，进行主、客场双循环比赛，共需比赛多少场?

每两个球队按主客场的顺序都进行两场比赛，比赛情况如下．

主场	客场	赛事
甲 →	乙	甲—乙
	丙	甲—丙
乙 →	甲	乙—甲
	丙	乙—丙
丙 →	甲	丙—甲
	乙	丙—乙

共需 6 场比赛．

这个问题可以这样来看，从 3 个足球队中，每次选出 2 个队，按照主队在前，客队在后的顺序排列，求一共有多少种不同的排法．这件事情可以分成两个步骤来完成：第一步从 3 个足球队中任选 1 个做主队；第二步从剩下的 2 个足球队中任选 1 个做客队．由分步计数原理，共需

$$3\times2=6$$

场比赛．

我们把每一个研究的对象叫做**元素**．上面的问题就是从 3 个不同的元素中，任取 2 个元素，按照一定的顺序排成一列，求一共有多少个不同的排列个数的问题．

一般地，从 n 个不同的元素中，任取 m（$m\leqslant n$）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**．

如果 $m<n$，这样的排列叫做**选排列**. 如果 $m=n$（也就是每次取出所有元素的排列），这样的排列叫做**全排列**. 全排列中所有不同的排法所含有的元素完全一样，只是元素排列的顺序不完全相同.

我们可以写出问题 1 中所有双循环比赛的场次，即从甲，乙，丙三个甲级足球队中任取两个球队的所有排列是

甲乙，甲丙，乙甲，乙丙，丙甲，丙乙（前者为主场球队）.

我们把从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$）个元素的所有排列的个数，叫做**排列数**，用符号 A_n^m 表示. 如问题 1 中，所有比赛场数为

$$A_3^2=3\times2=6.$$

问题 2 从 10 名参加集训的乒乓球运动员中，任选 3 名运动员，排好出场的先后顺序去参加比赛，有多少种不同的出场顺序？

我们把集训的运动员看做不同的元素，这个问题就是求从 10 个不同的元素中取出 3 个元素的排列数，即求 A_{10}^3. 下面我们计算这个数.

运动员出场的顺序分别为第 1 个出场，第 2 个出场和第 3 个出场，因此可以分成三步来完成：

第一步，考虑第 1 个出场人选，有 10 种方法；

第二步，考虑第 2 个出场人选，因为第 1 个出场的人选已经确定，所以还有 9 种方法；

第三步，考虑第 3 个出场人选，因为第 1 个、第 2 个出场的人选已经确定，所以还有 8 种方法.

想一想 计算从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，根据分步计数原理，要分成多少个步骤？完成每个步骤的方法种数各是多少？

根据分步计数原理，参赛的方法共有

$$\begin{aligned}A_{10}^3&=10\times9\times8\\&=720\text{（种）}.\end{aligned}$$

一般地，有如下**排列数公式**

$$\boxed{A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1).}$$

其中 m，$n\in\mathbf{N}_+$，且 $m\leqslant n$.

如果 $m=n$，即为全排列时，排列数公式变为

$$A_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1,$$

也就是说，全排列的排列数等于自然数 1 到 n 的连乘积，这个连乘积叫做 n 的**阶乘**，用 $n!$ 表示，即

$$A_n^n=n!.$$

因为 $(n-m)\times(n-m-1)\times\cdots\times3\times2\times1=(n-m)!$，所以，排列数公式还可以写成

$$\boxed{A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.}$$

我们规定 $0!=1$，所以，当 $m=n$ 时，$(n-m)!=1$，上述公式也成立.

例 1　计算 A_{18}^5 的值.

解法一　由排列数公式有

$$\begin{aligned}A_{18}^5&=18\times17\times16\times15\times14\\&=1\ 028\ 160.\end{aligned}$$

解法二　用计算器计算.

按键	显示
18 [2ndF] [nCr] 5 [=]	1028160

所以，$A_{18}^5=1\ 028\ 160$.

例 2　用红、黄、蓝 3 面旗子按一定顺序，从上到下排列在竖直的旗杆上表示信号，每次可以挂一面，二面或三面，并且不同的顺序表示不同的信号，一共可以表示多少种不同的信号？

解　因为挂一面，二面或三面旗子都可以表示某种信号，所以分为三类：

第一类，挂一面旗子，是从 3 个不同的元素中取出 1 个元素的排列，排列数为 A_3^1；

第二类，挂二面旗子，是从 3 个不同的元素中取出 2 个元素的排列，排列数为 A_3^2；

第三类，挂三面旗子，是从 3 个不同的元素中取出 3 个元素的排列，排列数为 A_3^3.

根据分类计数原理，所表示信号的种数为

$$A_3^1+A_3^2+A_3^3=3+3\times2+3\times2\times1=15.$$

即一共可以表示 15 种不同的信号.

例 3 用 1～5 这 5 个数字组成没有重复数字的五位数，其中组成五位奇数的概率是多少？

解 用 1～5 这 5 个数字组成没有重复数字的五位数，基本事件总数为 A_5^5，且这些结果出现的可能性都相等，记“用 1～5 这 5 个数字组成没有重复数字的五位奇数”为事件 A，则事件 A 包含的基本事件总数为 $3A_4^4$，所以，

$$P(A)=\frac{3A_4^4}{A_5^5}=\frac{3}{5}.$$

即组成没有重复数字的五位奇数的概率是$\frac{3}{5}$.

练习21-1

1. 写出从 a，b，c，d 这 4 个元素中任取 2 个元素的所有排列.

2. 计算下列排列数的值：

(1) A_7^3； (2) A_8^4；

(3) A_{15}^2； (4) A_{100}^3.

3. 在下面的空格处填上计算结果：

n	2	3	4	5	6	7	8
$n!$							

4. 有 7 名同学排成一排照相：

(1) 共有多少种不同的排法？

(2) 如果甲同学必须站在正中间，有多少种不同的排法？

(3) 其中甲、乙两名同学必须相邻，有多少种不同的排法？

(4) 其中甲、乙两名同学不相邻，有多少种不同的排法？

(5) 如果甲同学不在排头，乙同学不在排尾，有多少种不同的排法？

5. 在平面直角坐标系中，用 0～9 这 10 个自然数为坐标，可以组成多少个第一象限的点？

6. 用 1，2，3，4，5 这 5 个数字组成没有重复数字的四位数，其中可以组成没有重复数字的四位偶数的概率是多少？

21.1.2　组合与组合数公式

问题 3　甲，乙，丙三个足球队进行单循环比赛，共需比赛多少场？

所谓单循环比赛，就是参加比赛的每两个队之间都要进行一场比赛.

我们不难发现，甲，乙，丙三个足球队进行单循环比赛，共有

甲与乙，甲与丙，乙与丙

3 场比赛. 这个问题与问题 1 的区别在于是否分主客场，这里没有主客场的顺序之分，甲与乙的比赛和乙与甲的比赛是同一场比赛，是一组. 这个问题是求一共有多少个不同的组. 这就是我们这一小节要研究的组合问题.

一般地，从 n 个不同元素中，任取 m ($m\leqslant n$) 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**.

我们可以写出问题 3 中，所有单循环比赛的场次，即从甲，乙，丙三个足球队中任取 2 个球队的所有组合是

甲乙，甲丙，乙丙.

我们把从 n 个不同元素中取出 m ($m\leqslant n$) 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示. 如问题 3 中比赛的场数，就是从 3 个不同元素中取出 2 个元素的组合数 C_3^2.

我国《周易》中的“四象”“八卦”等是世界公认的关于排列、组合问题最早的研究成果.

问题 4　从 4 个不同元素 a，b，c，d 中，取出 3 个元素的排列数与组合数有什么关系？

排列与组合的区别是什么？

为了研究这个问题，我们先写出所有的从 4 个不同元素 a，b，c，d 中取出 3 个元素的排列与组合，如下所示.

组合		排列		
$a\ b\ c$	$\longleftrightarrow$	abc	bac	cab
		acb	bca	cba

$a\ b\ d$	$\longleftrightarrow$	abd	bad	dab
		adb	bda	dba
$a\ c\ d$	$\longleftrightarrow$	acd	cad	dac
		adc	cda	dca
$b\ c\ d$	$\longleftrightarrow$	bcd	cbd	dbc
		bdc	cdb	dcb

由表中可以看出，对于每一个组合，都有 A_3^3 个不同的排列. 因此，求从 4 个不同元素中取出 3 个元素的排列数 A_4^3，可以分两步完成：

第一步，从 4 个不同元素中取出 3 个元素做组合，共有 C_4^3 种；

第二步，对每一组合中的 3 个不同元素做全排列，每一组合对应的全排列都有 A_3^3 个.

根据分步计数原理，得到如下关系

$$A_4^3=C_4^3\cdot A_3^3.$$

一般地，求从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m，可以分如下两步完成：

第一步，求从这 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m；

第二步，求每一个组合中 m 个元素的全排列数 A_m^m.

根据分步计数原理，得

$$A_n^m=C_n^m\cdot A_m^m.$$

因此，我们可以得到组合数公式

$$\boxed{C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.}$$

其中 m，$n\in\mathbf{N}_+$，且 $m\leqslant n$.

因为

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!},$$

所以上面的组合数公式可以写成

$$\boxed{C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.}$$

这也是组合数计算的一个常用公式.

1899 年，英国数学家克里斯托尔（Chrystal，1851—1911）以 nPr 和 nCr 分别表示“从 n 个不同元素中每次取出 r 个不重复的元素的排列数与组合数”. 后来人们用 A_n^r 表示 nPr，用 C_n^r 表示 nCr，一直沿用到现在.

例 4 计算：

(1) C_{10}^4 与 C_{10}^6；　(2) $C_7^3+C_7^4$ 与 C_8^4.

解 (1) 方法一：由组合数公式可得

$$C_{10}^4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210,$$

$$C_{10}^6=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=210;$$

方法二：用计算器计算.

按键	显示
10 nCr 4 =	210

按键	显示
10 nCr 6 =	210

(2) $$C_7^3+C_7^4=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}+\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35+35=70.$$

$$C_8^4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70.$$

由例 3，我们可以发现组合数具有如下两个性质.

性质 1

$$\boxed{C_n^m=C_n^{n-m}.}$$

为了使这个公式在 $n=m$ 时也成立，我们约定 $C_n^0=1$.

性质 2

$$\boxed{C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+C_{n}^{m-1}.}$$

例 5 平面内有 12 个点，其中任意 3 点都不在同一条直线上，以任意 3 点为顶点画三角形，一共可画多少个三角形？

解 因为平面内的 12 个点中任意 3 点都不在同一条直线上，所以，任意 3 点做顶点都可以构成一个三角形，所画三角形的个数，就是从 12 个元素中取出 3 个元素的组合数，即

$$\begin{aligned}C_{12}^{3}&=\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1}\\&=220.\end{aligned}$$

因此一共可画 220 个三角形.

根据组合数公式，完成对两个性质的证明. 结合实例说明两个性质的正确性.

试一试

例 6 在产品检验时，常从产品中抽取一部分产品进行检验. 现有 100 件产品，其中有 2 件次品，任意抽取 3 件. 问：

(1) 一共有多少种不同的抽法？

(2) 抽出的 3 件中恰有 1 件次品的抽法共有多少种？

(3) 抽出的 3 件中至少有 1 件次品的抽法共有多少种？

(4) 抽出的 3 件中恰有 1 件次品的概率是多少？

(5) 抽出的 3 件中至少有 1 件次品的概率是多少？

解 (1) 所求抽法的总数，就是从 100 件产品中取出 3 件的组合数

$$\begin{aligned}C_{100}^{3}&=\frac{100\times 99\times 98}{3\times 2\times 1}\\&=161\ 700;\end{aligned}$$

(2) 分两步：第一步，从 2 件次品中抽取 1 件，有 C_{2}^{1} 种抽法；第二步，从 98 件合格品中抽出 2 件，有 C_{98}^{2} 种抽法，所以，不同的抽取方法共有

$$\begin{aligned}C_{2}^{1}\cdot C_{98}^{2}&=2\times 4\ 753\\&=9\ 506\ (\text{种});\end{aligned}$$

(3) 方法一：从 100 件产品中抽出 3 件，至少有 1 件次品的抽法，包括抽取 1 件次品和 2 件次品两类抽法. 因此，至少有 1 件次品的抽法种数为

$$C_2^1 \cdot C_{98}^2 + C_2^2 \cdot C_{98}^1 = 9\ 506 + 98$$
$$= 9\ 604.$$

方法二：从 100 件产品中抽出 3 件的所有抽法中，除抽出 3 件都是合格品的抽法外，剩下的就是至少有 1 件次品的抽法，共有抽取方法

$$C_{100}^3 - C_{98}^3 = 161\ 700 - 152\ 096$$
$$= 9\ 604\ (种).$$

(4) 记“抽出的 3 件中恰有 1 件次品”为事件 A，则

$$P(A) = \frac{9\ 506}{161\ 700} = \frac{4\ 753}{80\ 850};$$

(5) 记“抽出的 3 件中至少有 1 件次品”为事件 B，则

$$P(B) = \frac{9\ 604}{161\ 700} = \frac{49}{825}.$$

即 (1) 一共有 161 700 种不同的抽法；

(2) 抽出的 3 件中恰有 1 件次品的抽法有 9 506 种；

(3) 抽出的 3 件中至少有 1 件次品的抽法有 9 604 种.

(4) 抽出的 3 件中恰有 1 件次品的概率是 $\frac{4\ 753}{80\ 850}$；

(5) 抽出的 3 件中至少有 1 件次品的概率是 $\frac{49}{825}$.

练习21-2

1. 写出从 a，b，c，d 这 4 个元素中任取 2 个元素的所有组合.

2. 计算：

(1) C_{100}^{97}；　　(2) $C_{190}^{180} - C_{190}^{10}$；

(3) C_{16}^4；　　(4) $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

3. 从 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 9 个数中取出 2 个数，使它们的和是偶数，共有多少种不同的取法？

4. 从 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 9 个数中取出 2 个数，使它们的积是奇数，共有多少种不同的取法？

5. 某小组有 7 人：

(1) 选出 3 人参加植树劳动，有多少种不同的选法？

(2) 选出 4 人参加卫生扫除，有多少种不同的选法?

6. 一个口袋中有 10 个不同的黑球，1 个白球，从中任取 4 个球，有多少种不同的取法?

7. 某产品共 100 件，其中有 5 件次品，从中抽出 2 件进行检验：

(1) 共有多少种不同的抽取方法?

(2) 不含次品的抽取方法有多少种?

(3) 至少含有 1 件次品的抽取方法有多少种?

(4) 至多含有 1 件次品的抽取方法有多少种?

21.2 二项式定理

21.2.1　二项式定理

通过计算，我们得到

$(a+b)^1=a+b$,

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

> 请观察这 4 个展开式，说说它们有哪些规律.
>
> 试一试

从展开式的项数看，每个展开式的项数恰好比 $(a+b)$ 的次数多 1.

从 a 与 b 在各项中的次数看，a 在每项中的次数是降幂排列，最高次数恰好等于 $(a+b)$ 的次数，最低次数为零；b 在每项中的次数是升幂排列，最低次数为零，最高次数等于 $(a+b)$ 的次数，且展开式中每一项 a 与 b 的次数和都等于 $(a+b)$ 的次数.

下面我们再来看展开式各项的系数有什么规律：

$(a+b)^2$ 展开式有三项，它们的系数分别为 1，2，1，也就是

$$C_2^0,\ C_2^1,\ C_2^2;$$

$(a+b)^3$ 展开式有四项，它们的系数分别为 1，3，3，1，也就是

$$C_3^0,\ C_3^1,\ C_3^2,\ C_3^3;$$

$(a+b)^4$ 展开式有五项，它们的系数分别为1，4，6，4，1，也就是

$$C_4^0，C_4^1，C_4^2，C_4^3，C_4^4；$$

总之，展开式中各项的系数都可用组合数 C_n^m 来表示，其中 n 恰好等于（$a+b$）的次数，m 恰好等于展开式中 b 的次数.

> **议一议**　用两个计数原理来展开上面的式子，是否能发现各项系数与组合数之间的对应关系？

根据以上分析，我们可写出 $(a+b)^5$ 的展开式为

$$(a+b)^5=C_5^0a^5+C_5^1a^4b^1+C_5^2a^3b^2+C_5^3a^2b^3+C_5^4a^1b^4+C_5^5b^5.$$

一般地，有

$$\boxed{(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^nb^n，n\in\mathbf{N}_+.}$$

这就是**二项式定理**，右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，其中 C_n^m（$m=0，1，2，\cdots，n$）叫做**二项式系数**，式中的 $C_n^ma^{n-m}b^m$ 是二项展开式的第 $m+1$ 项，用 T_{m+1} 表示.

我们将

$$T_{m+1}=C_n^ma^{n-m}b^m$$

叫做二项展开式的**通项公式**，它在研究二项式过程中有极其重要的作用.

> 根据此定理展开 $(1+x)^5$ 和 $(x+1)^5$，观察 x 的幂指数变化规律. 把定理中的 a，b 用其他的实数或字母来代替，分别写出其展开式，再观察展开式的规律.
>
> **试一试**

例1　求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的二项展开式.

解　由二项式定理有

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=C_5^0x^5+C_5^1x^4\left(\frac{1}{x}\right)^1+C_5^2x^3\left(\frac{1}{x}\right)^2+C_5^3x^2\left(\frac{1}{x}\right)^3+C_5^4x^1\left(\frac{1}{x}\right)^4+C_5^5\left(\frac{1}{x}\right)^5$$

$$=x^5+5x^3+10x+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}.$$

在二项式定理中，如果设 $a=1$，$b=x$，则得到公式

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^mx^m+\cdots+x^n.$$

例2　求 $(1+x)^5+(1-x)^5$ 的展开式.

解　原式 $=1+C_5^1x+C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+x^5+1+C_5^1(-x)+C_5^2(-x)^2+$

$C_5^3(-x)^3+C_5^4(-x)^4+(-x)^5$

$=1+C_5^1x+C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+x^5+1-C_5^1x+C_5^2x^2-C_5^3x^3+C_5^4x^4-x^5$

$=2+2C_5^2x^2+2C_5^4x^4$

$=2+20x^2+10x^4$.

例 3 求$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$的二项展开式的第 6 项.

解 $T_6=C_{10}^5(\sqrt{x})^5\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5=C_{10}^5=252$.

例 4 求$\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$的二项展开式中 x^3 的系数.

解 展开式的通项为

$$T_{m+1}=C_9^m x^{9-m}\left(-\frac{1}{x}\right)^m$$
$$=(-1)^m C_9^m x^{9-2m}.$$

根据题意，有 $9-2m=3$，解得 $m=3$.

因此，x^3 的系数是

$$(-1)^3C_9^3=(-1)^3\frac{9\times8\times7}{3!}=-84.$$

注 二项展开式中第 $m+1$ 项的系数与第 $m+1$ 项的二项式系数 C_n^m 是两个不同的概念，这一点一定要分清楚，例如在 $(1+2x)^7$ 的二项展开式中，其第 4 项 $T_4=C_7^3 1^{7-3}(2x)^3$，其二项式系数是 $C_7^3=35$；而第 4 项的系数是指 x^3 的系数，应是 $8C_7^3=280$.

例 5 求$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式中的常数项.

解 展开式的通项是

$$T_{m+1}=C_6^m(2\sqrt{x})^{6-m}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^m$$
$$=(-1)^m C_6^m 2^{6-m}x^{3-m}.$$

根据题意，有 $3-m=0$，即 $m=3$.

因此，常数项是

$$(-1)^3C_6^3 2^3=-160.$$

练习21-3

1. 求 $(p+q)^6$ 的展开式.
2. 求 $(3a+b)^7$ 的展开式中的第 4 项.
3. 求 $(x^2+2x^3)^5$ 的展开式中的第 2 项和第 3 项的系数.
4. 求$\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中的第 3 项.

21.2.2　二项式系数的性质

我们把二项式展开式的二项式系数按如下的方法排列出来：

$(a+b)^1$ ……………………………… 1　1

$(a+b)^2$ ……………………………… 1　2　1

$(a+b)^3$ ……………………………… 1　3　3　1

$(a+b)^4$ ……………………………… 1　4　6　4　1

$(a+b)^5$ ……………………………… 1　5　10　10　5　1

$(a+b)^6$ ……………………………… 1　6　15　20　15　6　1

……

上面右边二项式系数表称为"杨辉三角".

由杨辉三角可以看出二项式系数具有下列性质：

(1) 除每行两端的 1 以外，每个数字都等于它肩上两个数之和，即 $C_{n+1}^r=C_n^{r-1}+C_n^r$；

(2) 在二项展开式中，与首末两端"等距离"的两项的二项式系数相等，由组合数的性质 $C_n^r=C_n^{n-r}$ 亦可得出这一点；

(3) 如果二项式的幂指数是偶数，那么二项展开式有奇数项，且中间一项的二项式系数最大；如果二项式的幂指数是奇数，那么二项展开式有偶数项，且中间两项的二项

杨辉是我国宋朝数学家，他于 1261 年著《详解九章算法》，在其中详细列出了这样一张图表，并且指出这个方法出于更早期贾宪的著作《黄帝九章算法细草》，在欧洲一般都认为这是帕斯卡（Pascal）于 1654 年发现的，所以他们称这个图形为"帕斯卡三角".）

读一读

式系数相等并且最大.

例 6 求 $(1+x)^8$ 的展开式中二项式系数最大的项.

解 已知二项式幂指数是偶数 8，展开式共有 9 项，依二项式系数性质，中间一项的二项式系数最大，所以要求的系数最大项为

$$T_5=C_8^4x^4=70x^4.$$

例 7 求证：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^m+\cdots+C_n^n=2^n$.

证明 运用 $(1+x)^n$ 的展开式

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^mx^m+\cdots+C_n^nx^n,$$

设 $x=1$，则得

$$2^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^m+\cdots+C_n^n.$$

例 8 求证：在 $(a+b)^n$ 的展开式中，奇数项的二项式系数之和等于偶数项的二项式系数之和.

证明 在展开式

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^nb^n$$

中，令 $a=1$，$b=-1$，得

$$(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n.$$

整理后，得

$$0=(C_n^0+C_n^2+\cdots)-(C_n^1+C_n^3+\cdots),$$

所以

$$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots.$$

即所证命题成立.

练习21-4

1. 求 $(x+2y)^9$ 的展开式中二项式系数最大的项.
2. 求 $(a+5)^7$ 的展开式中系数最大的项.
3. 求 $(1-x)^{13}$ 的展开式中含 x 的奇次项系数之和.
4. 求证：$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$（$n$ 为偶数）.
5. 求 $C_{11}^1+C_{11}^3+C_{11}^5+\cdots+C_{11}^{11}$.

21.3 离散型随机变量及其分布

21.3.1　离散型随机变量

问题　一批产品共100件，其中有5件次品，现在从中任取10件检查，求取到的次品件数分别为0，1，2，3，4，5的概率.

由前面所学的知识可得，“任取10件检查看其中有几件次品”是一个随机试验，它有6个基本事件，分别是

$\omega_0=$“次品件数为0”，

$\omega_1=$“次品件数为1”，

$\omega_2=$“次品件数为2”，

$\omega_3=$“次品件数为3”，

$\omega_4=$“次品件数为4”，

$\omega_5=$“次品件数为5”，

其概率分别是

$$P_0=\frac{C_{95}^{10}}{C_{100}^{10}}\approx 0.583\ 75,$$

$$P_1=\frac{C_{95}^{9}C_5^1}{C_{100}^{10}}\approx 0.339\ 39,$$

$$P_2=\frac{C_{95}^{8}C_5^2}{C_{100}^{10}}\approx 0.070\ 22,$$

$$P_3=\frac{C_{95}^{7}C_5^3}{C_{100}^{10}}\approx 0.006\ 38,$$

$$P_4=\frac{C_{95}^{6}C_5^4}{C_{100}^{10}}\approx 0.000\ 25,$$

$$P_5=\frac{C_{95}^{5}C_5^5}{C_{100}^{10}}\approx 0.000\ 00.$$

需说明的是，P_5 的值是约等于0，并非真正为0，说明其发生的概率非常小，但并不一定不发生.

在这个问题中，如果用 ξ 表示一次试验所取到的次品数，则 ξ 可能取的值为0，1，2，3，4，5. 它们分别对应着基本事件 ω_0，ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，ω_5 的

发生．我们把这种表示随机试验结果的变量叫做**随机变量**．把随机变量 ξ 可能取的值与相应的概率都求出来，列成下表：

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.583 75	0.339 39	0.070 22	0.006 38	0.000 25	0.000 00

不难求出，上表中各 P 值的和等于 1，说明对于任意一个随机试验，每一次做试验，其所有的基本事件总有一个会发生．

像这样所有的可能取值能一一列举出来的随机变量叫做**离散型随机变量**．

离散型随机变量的例子很多．例如某人射击一次可能命中的环数 ξ_1 是一个离散型随机变量，它的所有可能取值为 0，1，…，10；某网页在 24 小时内被浏览的次数 ξ_2 也是一个离散型随机变量，它的所有可能取值为 0，1，2，…．

本章只研究取有限个值的离散型随机变量．

我们把离散型随机变量 ξ 的取值及其相对应的概率值的全体叫做**离散型随机变量 ξ 的概率分布**，简称**分布**．如本节开始提出的问题中，所列的表就表示了随机变量 ξ 的概率分布．

> **议一议** 电灯泡的寿命是一个离散型随机变量吗？再举出几个例子，并讨论是否为离散型随机变量．

设随机变量 ξ 所有可能取的值为 x_1，x_2，…，x_n，并且取每一个值的对应概率为 p_1，p_2，…，p_n．可列出下表：

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

这个表表示了离散型随机变量 ξ 的概率分布，通常称为**分布列**．

离散型随机变量的分布列有两条性质：

(1) $p_i \geqslant 0$，$i=1$，2，3，…，n；

(2) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$．

例 1 掷一颗骰子，向上的点数记为 ξ：

(1) 求 ξ 的分布列；

(2) 求“点数大于 4”的概率；

(3) 求“点数不超过5”的概率.

分析 “点数大于4”这个事件包括随机变量ξ的取值为5和6两类，其发生概率为$P(\xi=5)$与$P(\xi=6)$的和.

解 (1) ξ的分布列为

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(2) $P(\xi>4)=P(\xi=5)+P(\xi=6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$;

(3) $P(\xi\leqslant 5)=P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)+P(\xi=4)+P(\xi=5)=5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

一般地，设有N件产品，其中含有m件次品，从中任取n件（$n\leqslant N$），这n件中所含次品数ξ是一个随机变量，把它可能取的值与取各值的对应概率列成下表（$0\leqslant k\leqslant l$，l为n和m中较小的一个）：

ξ	0	1	…	k	…	l
P	$\frac{C_{N-m}^{n}C_m^0}{C_N^n}$	$\frac{C_{N-m}^{n-1}C_m^1}{C_N^n}$	…	$\frac{C_{N-m}^{n-k}C_m^k}{C_N^n}$	…	$\frac{C_{N-m}^{n-l}C_m^l}{C_N^n}$

我们称随机变量ξ的这种形式的概率分布为**超几何分布**，也称ξ**服从超几何分布**.

在超几何分布中，只要知道N，m和n，就可以根据表中

$$P(\xi=k)=\frac{C_{N-m}^{n-k}C_m^k}{C_N^n}\ (0\leqslant k\leqslant l,\ l\text{为}n\text{和}m\text{中较小的一个})$$

求出对应于ξ取k值的概率$P(\xi=k)$.

超几何分布在产品抽样检验中有着重要应用，它揭示了在无放回的抽样中，抽得的次品数的概率分布. 实际上，在无放回抽样的检验中，从N件产品中随机地一次性抽取n件产品，相当于从N件产品中每次随机抽取一件产品，取后不放回，连续抽取n次.

例2 一批产品共100件，规定次品率不得超过15%，现从中任取5件检

验，发现 3 件次品，试分析此批产品质量是否合乎规定.

解 设这批产品的次品率为 15%，即这批产品含有 15 件次品，现从中任取 5 件，设其中的次品数为 ξ，则这个随机变量 ξ 服从超几何分布，其概率分布列为

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.435 68	0.403 41	0.137 75	0.021 58	0.001 54	0.000 04

从中得到，次品数 ξ 不小于 3 的概率

$$P(\xi \geqslant 3)=P(\xi=3)+P(\xi=4)+P(\xi=5)$$
$$=0.021\ 58+0.001\ 54+0.00\ 04=0.023\ 16.$$

这表示在次品率为 15% 的情况下，任取 5 件中有 3 件及 3 件以上次品的概率仅为 0.023 16. 概率这么小的事件，在一次试验中是几乎不可能发生的，我们称这种几乎不可能发生的事件，也就是概率很小的事件，为**小概率事件**. 在实际生活中，我们恪守“小概率事件在一次试验中，几乎不可能发生”的原理.

对于多小的概率是小概率，常由问题本身的需要所决定，通常，规定不超过 0.05 的概率为小概率.

在本题中，由于“任取 5 件，发现 3 件次品”，这样的一个小概率事件竟然在一次试验中发生了，说明认为“次品率为 15%”是不合理的，当然认为“次品率＜15%”就更不合理了. 因此，可以认为这批产品不合格.

例 3 某厂规定 40 件为一批的产品中，最多只能有一件不合格，检查人员任取两件检验，发现一件不合格，试问能否认为这 40 件产品中只有一件不合格.

解 假设 40 件产品中只有一件为不合格品.

设从 40 件中，任取两件所含的不合格件数为 ξ，则 ξ 可能取值为 0，1；“$\xi=0$”，即事件“两个都是合格品”，用 $P(\xi=0)$ 表示其概率；“$\xi=1$”，即事件“一件不是合格品，一件是合格品”，用 $P(\xi=1)$ 表示其概率.

则有

$$P(\xi=0)=\frac{C_{39}^{2}}{C_{40}^{2}}=\frac{19}{20}=0.95,$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_{39}^{1}C_{1}^{1}}{C_{40}^{2}}=\frac{1}{20}=0.05.$$

由上面的计算，我们得到事件“$\xi\geqslant1$”的概率为

$$P(\xi\geqslant1)=0.05,$$

它为小概率事件.

现在抽查发现次品数1，即$\xi=1$发生了，根据小概率的原理，应该否定我们的假设，即不能认为这40件产品中只有一件不合格.

练习21-5

1. 下面列出的表格是否是某个随机变量的分布列？试用分布列的性质加以说明：

(1)

ξ	-1	0	1	2	3
P	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

(2)

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.1	-0.2	0.3	0.4	0.2	0.2

2. 一批产品100件，次品率为4%，从中任抽10件检验，求抽得的次品数的分布列.

3. 已知随机变量ξ的分布列为：

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	0.10	0.12	0.16	0.23	0.16	0.13	0.10

求：

(1) $P(\xi=3)$；　(2) $P(\xi>3)$；

(3) $P(\xi\geqslant4)$；　(4) $P(2.5\leqslant\xi\leqslant5)$；

(5) $P(1<\xi<2)$；　(6) $P(\xi\leqslant6)$.

4. 一批产品 30 件，厂方规定一批中含有次品件数不超过 3 为合格，现从中任取 3 件发现 2 件次品，试问能否认为该批产品合格？

5. 某批螺钉 100 只，其中有 5 只次品，从这批螺钉中任取 4 只，发现有 k 只次品：

(1) 求“$k=2$”的概率；

(2) 若这批螺钉所含次品数未知，厂方规定其次品数 $M\leqslant 5$ 才算合格，试问 k 不超过多少才能使概率不超过 0.05？

6. 访问一种产品（商品）的检验单位，了解产品检验的实际情况，和老师、同学交流.

21.3.2 二项分布

在相同的条件下，重复地做 n 次试验，如果每一次试验结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果，那么就把这 n 次试验叫做**n 次独立试验**. 例如，对一批产品进行抽样检验，每次取一件，有放回地抽取 n 次，就是一个 n 次独立试验.

如果构成 n 次独立试验的每一次试验只有两个可能的结果 A 及 $\overline{A}$（**$\overline{A}$ 表示 A 以外的结果**），并且在每次试验中，事件 A 发生的概率都不变，那么这样的 n 次独立试验，就叫做**n 次独立重复试验**或**n 重伯努利试验**.

例如，从一批含有不合格品的产品中，每次抽取一件进行检验，有放回地抽取 n 次，如果每次抽取只考察两个结果：产品合格或不合格. 那么这样的试验就是 n 次独立重复试验.

请举出一个 n 次独立重复试验的例子.

试一试

又如，一个射手进行 n 次射击，如果每次射击的条件都相同，而且每次射击只考察中靶或不中靶两个结果，那么这也是一个 n 次独立重复试验.

在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k（$0\leqslant k\leqslant n$）次的概率问题叫做**独立重复试验模型**或**伯努利概型**.

在 n 次独立重复试验中，将事件 A 发生的次数设为 ξ，显然 ξ 是一个随机变量，如果在一次试验中，事件 A 发生的概率为 p，那么在 n 次独立重复试验

验中，这事件恰好发生 k 次的概率是

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, n$，$q=1-p$. 于是得到 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	$C_n^n p^n q^0$

由于表中的第二行恰好是二项式展开式

$$(q+p)^n=C_n^0 p^0 q^n+C_n^1 p^1 q^{n-1}+\cdots+C_n^k p^k q^{n-k}+\cdots+C_n^n p^n q^0$$

各对应项的值，所以称这样的随机变量 ξ 服从**二项分布**，记作 $\xi \sim B(n, p)$.

在产品的抽样检验中，如果抽样是有放回的，那么抽 n 件检验就相当于做 n 次独立重复试验，因此在有放回的抽样检验中，抽出的 n 件产品中所含次品件数 ξ 的概率分布是二项分布，即 ξ 服从二项分布. 一般当产品总数很大时，无放回的抽样可以看作是有放回的，抽样检验的有关问题常常用二项分布来解决.

> 二项分布是应用最广泛的离散型随机变量概率模型，举出一个服从二项分布的离散型随机变量的例子.
>
> 试一试

例 5　在 100 件产品中，有 3 件不合格，每次抽取一件，有放回地连抽三次，求取得不合格品件数 ξ 的分布列.

解　ξ 可能取的值为 0，1，2，3，由于是有放回地每次抽一件连续抽 3 次，所以这相当于做 3 次独立重复试验，ξ 服从二项分布，一次抽取到不合格品的概率 $p=0.03$，因此

$$P(\xi=0)=C_3^0 0.03^0(1-0.03)^3=0.912\,67,$$
$$P(\xi=1)=C_3^1 0.03^1(1-0.03)^2=0.084\,68,$$
$$P(\xi=2)=C_3^2 0.03^2(1-0.03)^1=0.002\,62,$$
$$P(\xi=3)=C_3^3 0.03^3(1-0.03)^0=0.000\,03.$$

分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	0.912 67	0.084 68	0.002 62	0.000 03

例 6 从一批产品中任取 5 件，求批次品率分别为 0.01，0.05，0.1，0.2，0.3 时，5 件中所含次品件数的分布列.

解 设所取 5 件中所含次品件数为 ξ，则 ξ 服从二项分布，其分布列分别求出，列表如下：

ξ	0	1	2	3	4	5
P(批次品率为 0.01)	0.951 0	0.048 0	0.001 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
P(批次品率为 0.05)	0.773 8	0.203 6	0.021 4	0.001 1	0.000 1	0.000 0
P(批次品率为 0.1)	0.590 5	0.328 0	0.072 9	0.008 1	0.000 5	0.000 0
P(批次品率为 0.2)	0.327 7	0.409 6	0.204 8	0.051 2	0.006 4	0.000 3
P(批次品率为 0.3)	0.168 1	0.360 1	0.308 7	0.132 3	0.028 4	0.002 4

从上例中可以看出，当抽取的 5 件中所含次品件数 $k>5p$（p 为批次品率）时，抽得 k 件次品的概率

$$P(\xi=k)=C_5^k p^k(1-p)^{5-k}$$

为 p 的增函数，例如 $k=2$，即表中 $\xi=2$ 这一列，$2>5\times0.3$，满足 $k>5p$ 的条件，此列中批次品率大的抽到 2 件次品的概率也大.

一般地，对于二项分布，当 $k>np$（n 为任取的产品件数，也是独立重复试验次数）时，抽到 k 件次品的概率随着 p 的增大而增大.

下面我们用这个结论来研究产品验收问题.

例 7 某厂家声称自己生产的电子元件次品率 p 不超过 0.01，今从其产品中任抽 5 件，发现 2 件次品，据此能否认为该厂家的说法属实.

解 假设厂家说法属实，即该厂产品的次品率 $p\leqslant0.01$，因为若次品率为 0.01 时，今从其产品中任取 5 件产品，次品数超过 1 的概率为

$$C_5^2\times0.01^2\times0.99^3+C_5^3\times0.01^3\times0.99^2+C_5^4\times0.01^4\times 0.99^1+C_5^5\times0.01^5\times0.99^0\leqslant0.001.$$

而当次品率 $p<0.01$ 时，任取的 5 件产品中含有多于 1 件次品的概率就会更小，这样的小概率事件在一次抽样中是不易发生的，所以我们有理由认为厂家的说法不属实.

练习21-6

1. 已知某篮球运动员罚球命中的概率为0.7，求他罚球3次命中次数的分布列.

2. 抛掷5枚硬币，求得到正面向上的次数ξ的分布列.

3. 一批产品的次品率为0.02，从中任取4个，写出这4个产品中所含次品件数ξ的分布列.

4. 规定某种产品的次品率不超过0.05，现抽查5件发现1件次品，能否认为该批产品符合规定.

21.4 正态分布

在生产、科研和日常生活中，常遇到这样一类随机现象，它们是由一些互相独立的偶然因素所引起的，而每一个这种偶然因素在总体的变化中都只是起着均匀、微小的作用. 表示这类随机现象的随机变量的概率分布一般是本节要学习的正态分布. 例如长度测量的误差；某一地区同年龄人群的身高、体重、肺活量等；炮弹的落点；某地每年七月份的平均气温、平均湿度、降雨量等；合格产品的某项质量指标等等，一般都服从正态分布.

> **议一议** 为什么表示某一地区同年龄人群的身高的随机变量服从正态分布？

服从正态分布的随机变量叫做**正态随机变量**，简称**正态变量**，服从正态分布的总体称为**正态总体**.

设正态变量的平均数（即其对应总体的平均数）为a，标准差（即其对应总体的标准差）为σ，正态分布完全由参数a与σ确定，因此正态分布记作$N(a,\ \sigma^2)$. 如果随机变量ξ服从$N(a,\ \sigma^2)$，则记作$\xi \sim N(a,\ \sigma^2)$. 正态变量的概率密度函数的图象叫做正态曲线，图21-1中画出了

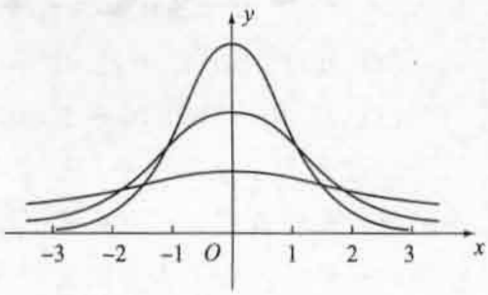


图21-1

三条正态曲线，它们的参数 a 都等于 0，而参数 σ 则为不同数值.

从图 21-1 可以看出，正态曲线具有以下性质：

(1) 曲线在 x 轴的上方，并且关于直线 $x=a$ 对称；

(2) 曲线在 $x=a$ 时处于最高点，并由此处向左右两边延伸时，曲线逐渐降低，呈现“中间高，两边低”的形状；

(3) 曲线的形状由正参数 σ 确定.

从理论上可以证明，正态变量 $N(a, \sigma^2)$ 在区间 $(a-\sigma, a+\sigma)$，$(a-2\sigma, a+2\sigma)$，$(a-3\sigma, a+3\sigma)$ 内，取值的概率分别是 68.3%，95.4%，99.7%，如图 21-2 所示. 例如，当 $a=0$，$\sigma=1$ 时，正态变量（这时称它为标准正态变量）在区间 $(-1, 1)$，$(-2, 2)$，$(-3, 3)$ 内取值的概率分别是 68.3%，95.4%，99.7%.

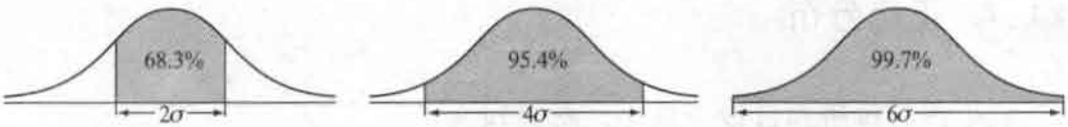


图 21-2

由于正态总体在 $(-\infty, +\infty)$ 内取值的概率是 1，上面的例子表明，它在区间 $(a-2\sigma, a+2\sigma)$ 之外取值的概率是 4.6%，在区间 $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ 之外取值的概率是 0.3%，由于这些概率值很小，不超过 5%，为小概率事件.

在实际应用中，通常认为服从于正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 的随机变量 ξ 只取 $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ 之间的值，并简称为 3σ 原则.

练习21-7

1. 设钢管内径尺寸 $\xi \sim N(25.40, 0.05^2)$，现在从这个总体中随机抽取 1 000 个产品，利用正态分布推算其内径分别在下述范围内的产品个数：

(1) $25.40-0.05 \sim 25.40+0.05$；

(2) $25.40-2\times0.05 \sim 25.40+2\times0.05$.

2. 在医疗卫生工作中，经常用到人的各种生理生化指标（如身高、红细胞数、血糖浓度等）的正常值，所谓正常值是指正常人的各种生理生化指标的观察值，由于生物的变异和环境条件不同，这些值是有波动的，如

果已知正常人的某项生化指标服从正态分布，可根据大量的调查资料求出 a 和 σ，然后把在 $(a-2\sigma,\ a+2\sigma)$ 或 $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$ 区间的观察值作为 95.4%（或 99.7%）的正常值范围，已知某地 12 岁男孩身高服从正态分布，已求出 $a=143.1$，$\sigma=5.668\ 0$，求该地 12 岁男孩身高的 95.4% 和 99.7% 正常值范围.

习题二十一

1. 计算：

(1) A_{15}^{2}；　　(2) $5A_{5}^{3}+4A_{4}^{2}$；

(3) C_{20}^{5}；　　(4) $C_{n+1}^{n}\cdot C_{n}^{n-2}$.

2. 在直线 $y=kx+b$ 中，若 k，b 可分别取 0 到 9 这 10 个数字，则一共可以构成多少条不同的直线？

3. 平面内有 5 个不同的点，以其中任意两个点为端点，可以得到多少条不同的线段？可以得到多少条不同的有向线段？

4. 将 8 本不同的书分给 5 名同学，每人分一本，共有多少种不同的分法？

5. 从 1，3，5，7，9 中任取 3 个数字，从 2，4，6，8 中任取 2 个数字，一共可以组成多少个没有重复数字的五位数？

6. 现有 10 元，50 元，100 元的纸币各一张，可以组成多少种不同的币值？

7. 化简 $(1-\sqrt{a})^5+(1+\sqrt{a})^5$.

8. 求 $(2-3x)^7$ 的二项展开式的第 3 项和第 6 项.

9. 求 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 的二项展开式的常数项.

10. 求 $(2-3x)^7$ 展开式的二项式系数最大的项.

11. 一批产品 100 件，规定次品数不超过 3 件为合格批. 先从中任取 5 件，发现 1 件次品，试问能否认为该批产品合格？如果发现 2 件呢？

12. 一批白炽灯泡的光通量服从 $N(209,\ 6.5^2)$，如果有这样一批灯泡 10 000个，计算光通量在下列范围内的灯泡的个数：

(1) $209-2\times6.5\sim209+2\times6.5$；

(2) $209-32\times6.5\sim209+3\times6.5$.

阅读与实践

正态分布

生物学家弗朗西斯·高尔顿在他的一本名为《自然遗传》的著作中，设计了一种简单的试验，形象而直观地提示了正态分布产生的机理. 他在一倾斜的板上，对称地排列了一些图钉，板底部有一排挡板，钢球穿过图钉列阵，一次一个地落下，并堆积在挡板上，最后大量钢球堆积形成的外轮廓线为钟形曲线. 可以想象，一只钢球穿过图钉列阵时，每遇到一只图钉就发生一次碰撞，碰撞后向左或向右都有可能，取决于许多微小的因素：如钢球接近图钉时的角度与速度、钢球的能量以及球和图钉自身的粗糙度等等. 钢球碰撞后又会与下一层中一只图钉发生独立的碰撞，且钢球向左或向右的概率相等. 若图钉有 19 层，将每层看成一组因素，则表示钢球最终位置的随机量是由这 19 种因素随机相互作用而确定的. 一个穿过对称图钉列阵的钢球有充分的偶然性产生一个随机分布的位置量，而且人们可以根据实际问题的要求，改变图钉的位置，以限定球到达底板的概率，但最终钢球堆积形成的外轮廓线仍是正态分布密度曲线. 高尔顿将这套试验系统称为“5 点型板”，这是因为骰子上 5 点的图案像图钉列阵，他曾用这种试验研究遗传智力分布等问题.

5 点型板试验说明了这样一个事实：当许多微小因素独立地随机作用于一个变量时，该变量的终值通常服从正态分布.

在许多实际问题中遇到的随机变量都服从或近似服从正态分布：

在生产中，产品的质量指标，如电子管的使用寿命、电容器的电容量、零件的尺寸、铁水含磷量、纺织品的纤度和强度等一般都服从正态分布；

在测量中，如大地测量、天平称量物体、化学分析某物质中某元素的含量等，测量结果一般服从正态分布；

在生物学中，同一群体的某种特性指标，如某地区同龄组儿童的身高、体重、肺活量，在一定条件下生长的农作物的产量等一般服从正态分布；

在气象学中，某地每年 7 月份的平均气温、平均湿度以及降雨量，水文学中的水位等一般也服从正态分布.

总之，正态分布广泛存在于自然现象、社会现象以及生产、科学技术的各个领域中.

正态分布的名称为“正态”（normal，意为通常的），正态分布的密度曲线也称为“钟形曲线”．正态分布起源于误差分析，早期的天文学家通过长期对一些天体的观测收集到了大量数据，并利用这些数据建立天体运动的物理模型，其中第谷与开普勒在建模中提出了一条原则：模型选择的最终标准是结果与观测数据的符合程度，这个“符合程度”实质上蕴含了误差概率理论的问题．伽利略是第一个在其著作中提出随机误差这一概念的人，他对观测误码率差提出了以下观点：

（1）所有的观测值都可能有误差，其来源可归因于观测者、仪器工具以及观测条件；

（2）观测误差对称地分布在 0 的两侧；

（3）小误差出现得比大误差更频繁.

一百多年后，辛普森和拉普拉斯对误差的性质及误差概率分布进行了研究，直到高斯在 1809 年才解决了误差分布问题，证明了误差服从正态分布.

正态分布作为一种概率模型，在 19 世纪极为流行，一些学者甚至把 19 世纪的统计学称为正态分布统治的年代．高斯这项工作对后世的影响极大，他使正态分布同时有了“高斯分布”的名称，后世之所以多将最小二乘法的发明权归之于他，也是出于这一工作．现今德国 10 马克的印有高斯头像的钞票，其上还印有正态分布的密度曲线.