中等职业教育课程改革国家规划新教材

数学（基础模块）下册

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
职业教育课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学教师教学用书：基础模块. 下册 / 人民教育出版社，课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心编著. —北京：人民教育出版社，2010.1（2019.8重印）

中等职业教育课程改革国家规划新教材

ISBN 978-7-107-22033-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①人… ②课… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教学参考资料
Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第037410号

中等职业教育课程改革国家规划新教材 数学（基础模块）下册 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编：100081）

网　址 http://www.pep.com.cn
经　销 全国新华书店
印　刷 北京市科星印刷有限责任公司
版　次 2010年1月第1版
印　次 2019年8月第7次印刷
开　本 787毫米×1 092毫米 1/16
印　张 17.5
字　数 370千字
定　价 37.00元

说 明

本书是根据2010年春季开始使用的《中等职业教育课程改革国家规划新教材数学（基础模块）下册》编写的教师教学用书.

这本教学参考书的编写原则是：

1. 努力体现中等职业教育课程改革数学教材的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

2. 从当前中等职业学校教学实际出发，根据教学内容尽力指出教材中的难点、重点，帮助教师克服教学中的一些困难.

3. 明确各章的教学要求.

4. 尽力吸收中等职业学校的数学教学经验.

这本教学参考书每章包括教学要求，教材分析和教学建议，教学设计，测验题及答案，习题的答案、提示和解答等5部分.

本书在教材分析和教学建议中，先介绍本章的内容结构，说明编写意图和编写指导思想，并指出教学的重点和难点，然后分小节进行内容分析并提出教学建议. 教学设计是根据教材内容做的课堂教学设计，供教师教学时参考使用. 测验题是一份课堂考试卷，可在学生自测的基础上进行，它反映了教材对本章教学的基本要求. 由于各专业教学要求不尽相同，这份考试卷仅供参考，教师可根据实际情况另拟考试题目. 习题的答案、提示和解答部分，一般简单题只给答案；中等难度题只给提示；难题给出解答，一般只给出常规解法.

这套教材把通过学习算法解决实际问题与学习数学的基本思想方法、知识放在同样重要的地位. 在教材中，把一些常用到的数学方法总结成为算法步骤. 例如不等式（组）的解法，配方法等，学生可以根据这些算法按部就班地求解问题. 教师要重视上述基本算法的教学，要在教学中经常有意识地讲解上述方法的应用.

在教学中，要贯彻"温故而知新"的原则. 中等职业学校贯彻这一原则有一定的困难. 但要使学生学好数学，教学中非得贯彻这一原则不可. 根据中等职业学校学生的实际状况和数学教学对基础知识的要求较高，基础薄弱难于继续学习的特点，在教材编写中，主要采取循环方式编写来贯彻这一原则. 由于单纯性复习效果不好，对学生的心理影响也不利，教材采用了在讲新内容的同时，紧密结合新知识复习旧知识. 教师在教学中还要根据学生的具体情况，灵活地设计教案，以新带旧搞好课堂教学，提高教学质量.

主　　编：孙明红.

编　　者：叶思义、孙明红、王智海、陆泽贵、祁志卫、鹿继梅、刘学卫、秦一梅、徐刚、刘爱武、贾艳、栾允、苗友芝、杜红梅、矫宁、曹春雷、龙正武.

责任编辑：龙正武.

这本教学参考书一定存在不少缺点、错误，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时修改、订正.

职业教育课程教材研究开发中心

2009年12月

目　录

第六章　数列……………………………………………………………………… 1
Ⅰ　教学要求……………………………………………………………………… 1
Ⅱ　教材分析和教学建议……………………………………………………… 1
Ⅲ　教学设计……………………………………………………………………… 6
Ⅳ　测验题 ……………………………………………………………………… 31
Ⅴ　习题答案、提示和解答 ………………………………………………… 33

第七章　平面向量 ……………………………………………………………… 39
Ⅰ　教学要求 …………………………………………………………………… 39
Ⅱ　教材分析和教学建议 …………………………………………………… 39
Ⅲ　教学设计 …………………………………………………………………… 45
Ⅳ　测验题 ……………………………………………………………………… 79
Ⅴ　习题答案、提示和解答 ………………………………………………… 80

第八章　直线和圆的方程 ……………………………………………………… 86
Ⅰ　教学要求 …………………………………………………………………… 86
Ⅱ　教材分析和教学建议 …………………………………………………… 86
Ⅲ　教学设计 …………………………………………………………………… 91
Ⅳ　测验题……………………………………………………………………… 133
Ⅴ　习题答案、提示和解答………………………………………………… 135

第九章　立体几何……………………………………………………………… 144
Ⅰ　教学要求…………………………………………………………………… 144
Ⅱ　教材分析和教学建议…………………………………………………… 144
Ⅲ　教学设计…………………………………………………………………… 158
Ⅳ　测验题……………………………………………………………………… 219
Ⅴ　习题答案、提示和解答………………………………………………… 222

第十章　概率与统计初步……………………………………………………… 228
Ⅰ　教学要求…………………………………………………………………… 228
Ⅱ　教材分析和教学建议…………………………………………………… 228

Ⅲ　教学设计…… 237
Ⅳ　测验题…… 266
Ⅴ　习题答案、提示和解答…… 269

第六章　数列

Ⅰ　教学要求

1. 了解数列的有关概念和通项公式的意义，会求常见数列的通项公式.
2. 理解等差数列的定义、公差、通项公式、等差中项及前 n 项和的公式.
3. 理解等比数列的定义、公比、通项公式、等比中项及前 n 项和的公式.
4. 能够应用数列的有关知识，解决一些基本问题.

Ⅱ　教材分析和教学建议

本章主要内容为数列的概念、等差数列、等比数列和数列的应用举例. 数列在生产实际与日常生活中的应用范围很广，而且是培养学生发现、认识、分析、综合等能力的重要题材.

本章首先通过把一些常见的数排成一列，引入了数列的定义及有关概念，然后联系实际问题中数列的变化规律，有意识地引导学生去发现数列的项与项数之间的关系，写出数列的通项公式. 教材中还渗透了数列是定义在正整数集的子集上的函数 $f(n)$ 的概念，但教材没有突出数列的函数定义.

在研究等差和等比这两种特殊的数列时，教材也是从具体的生产、生活问题出发，引出了等差、等比数列的定义. 通过列出等差或等比数列的一些项，让学生观察其中的规律，猜想出通项公式. 同时介绍了等差数列和等比数列的通项公式、前 n 项和的公式.

对于部分程度较好的学生，可以要求他们理解"数列是定义在正整数集的子集上的函数"这一函数定义. 从而，使学生学习了自变量连续变化的函数之后，又接触到了自变量离散变化的函数，使学生对函数概念的本质加深理解.

本章教材的重点是：数列的有关概念，通项公式，等差数列与等比数列的定义，通项公式，前 n 项和公式.

本章教材的难点是：求数列的通项公式.

为较好地解决难点，建议在讲解求数列的通项时，由浅入深，由有限项到无限项，引导学生发现规律，写出数列的通项.

本章教学约需 11 课时，具体分配如下(仅供参考)：

6.1.1	数列的定义	1 课时
6.1.2	数列的通项	1 课时
6.2.1	等差数列的概念	2 课时

6.2.2	等差数列的前 n 项和	2 课时
6.3.1	等比数列的概念	2 课时
6.3.2	等比数列的前 n 项和	1 课时
6.4	数列的应用	1 课时
小结与复习		1 课时

6.1.1 数列的定义

1. 本节教学中，可以先利用教材中的实例指出年份列表

2 009，2 021，2 033，2 045，2 057，2 069，2 081，2 093

是一个数列，自然地引入数列的定义，然后再结合教材中的五个实例让学生理解．同时要引导学生通过观察、分析，找出这几个列数的特征．例如：

② 中 4，5，6，7，8，9，10 的每一项都是项数加 3，是由有限个数组成的一列数；

③ 中 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ 的每一项都是项数的倒数，这列数是由无限个数组成的．

2. 要强调数列中数的有序性．可采用与集合的元素无序性相对比的方法讲授．如

$$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ 和 } \{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4\}$$

是两个相同的集合，而

4，5，6，7，8，9，10 与 10，9，8，7，6，5，4

是两个不同的数列．组成数列的数相同，但排列次序不同就是不同的数列．

3. 要注意数列中的同一个数可以重复出现，这与集合中元素的互异性是不同的．如教材中的 ⑤：$-1, 1, -1, 1, \cdots$ 与 ⑥：$2, 2, 2, \cdots$．

4. 关于数列的分类，教材中只按数列的项数是有限还是无限进行分类．除有穷数列和无穷数列外，还有按数列项与项之间大小关系来分的递增数列、递减数列、摆动数列和常数列，也有按任何一项绝对值是否都小于某一正数来分的有界数列和无界数列，等等．

6.1.2 数列的通项

1. 数列是一种特殊函数的一列函数值．它按一定次序排列，必定有开头的数，有相继的第二个数、第三个数，等等．于是数列中的每一个数都对应于一个序号；反过来，每个序号也都对应于数列中的一个数．因此，数列就是定义在正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的子集上的函数 $f(n)$，当自变量依次取 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 时，相对应的一列函数值 $f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$．

数列的项通常记作 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 或简记为 $\{a_n\}$，其中 a_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的通项．

值得注意的是：

(1) $\{a_n\}$ 与 a_n 是不同的．前者表示数列，后者表示这个数列的第 n 项；

(2) 数列的项与它的项数是不同的概念，数列的项是指数列中某一确定的数，是函数

值，而项数是指数列的项的位置序号，是自变量的值.

2. 一个数列$\{a_n\}$的第n项a_n与项数n之间的函数关系可以用一个公式$a_n=f(n)$来表示时，这个公式叫做这个数列的通项公式. 应使学生注意的是，不是所有的数列都能写出它的通项公式的，如1，1.4，1.41，1.414，…. 有的数列的通项公式，也可能出现形式上不同，而实质一致的情况. 如数列-1，1，-1，1，…的通项公式可写成$a_n=(-1)^n$，还可写成

$$a_n=\begin{cases}-1,\ n=2k-1,\ n\in\mathbf{N}_+\\ 1,\ n=2k,\qquad n\in\mathbf{N}_+\end{cases}$$

如果一个数列只给出它的前面几项，并没有给出它的构成规律，那么仅由前面几项归纳出来的"通项公式"有可能不只一个. 如由数列2，4，8，…，可以给出$a_n=2^n$，也可给出$a_n=n^2-n+2$. 由于这两个通项公式本质上的不同，由此写出的后继项也不相同，前者的$a_4=16$，后者的$a_4=14$.

但知道一个数列的通项公式，这个数列就唯一确定了.

3. 这一节教材中三个例题分属两种类型：

(1) 已知数列的通项公式或递推关系，写出数列某些项，如例1、例3.

(2) 根据数列的前几项，写出数列的通项公式，如例2. 这类问题是本节教学中的难点. 教学时要引导学生观察数列中各项与其序号的变化情况，分解所给数列的前几项，在这几项的分解式中，看看哪些部分是变化的，哪些是不变的，再探索各项中变化部分与序号间的联系，从而归纳出规律，写出通项公式. 这里应着重培养学生的观察、分析和归纳能力.

除此以外，习题中还有利用数列的通项公式来判断一个数是不是这个数列中的项的问题.

4. 给出递推关系是给出数列的一种重要方法. 但难度较大，教学中只要使学生知道有这样一种方法即可，不作进一步的要求. 教材中的例3就是一种用递推公式给出数列的例子.

6.2.1 等差数列的概念

1. 等差数列的通项公式与前n项和的公式的导出都离不开等差数列的定义，因此教学时要自始至终紧扣这个定义.

2. 教学中要突出以下几点：

(1) 强调"从第2项起每一项减去它前一项的差都等于同一个常数". 要防止在求公差时，把相邻两项相减的顺序颠倒. 虽然等差数列的任一项减去它的后一项也是一个常数，但它不是公差，而是公差的相反数.

(2) 等差数列的性质是

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots=d$$

或

$$a_2=a_1+d,\ a_3=a_2+d,\ \cdots,\ a_n=a_{n-1}+d.$$

由此，应使学生明确，一个等差数列只需给出a_1和d，这个等差数列就唯一确定了.

证明一个数列是等差数列，只要证明对于任意自然数 n，差 $a_{n+1}-a_n$ 是一个常数即可.

(3) 当 $d=0$ 时，等差数列就是常数列，即

$$a, a, a, \cdots, a, \cdots.$$

(4) 如果已知三个数成等差数列，且公差为 d，则设这三个数分别为 $a-d$，a，$a+d$ 会比较方便.

3. 要引导学生分析等差数列的通项公式，明确通项公式中的 4 个量 a_1，a_n，d，n 之间的关系. 要求学生灵活使用通项公式，并可将公式变形为 $a_n=a_m+(n-m)d$. 对等差数列(当 $d\neq 0$ 时) 的图象及公差 d 的几何意义，教师可以根据学生的程度酌情讲解.

4. A 是 a，b 的等差中项的特征是 $2A=a+b$，两个数的等差中项就是这两个数的算术平均值. 这个概念和公式在解题中常常用到，教师应注意引导.

6.2.2 等差数列的前 n 项和

1. 在讲解等差数列前 n 项和公式时，通过对实例的观察、分析和计算，着重讲述求和的数学方法和思路. 在推导出求和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 后，要求学生动笔推导等差数列的另一个前 n 项和公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$.

求一个等差数列前 n 项的和时，如果已知等差数列的首项 a_1，末项 a_n 及项数 n，可用公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$；如果已知等差数列的首项 a_1，公差 d 及项数 n，可用公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

2. 等差数列的前 n 项和公式共涉及 5 个变量 a_1，a_n，n，d 和 S_n，已知其中 3 个量，就可以求出另外 2 个量. 应当要求学生掌握这一点.

6.3.1 等比数列的概念

1. 等比数列的定义是推导通项公式、前 n 项和公式的基础，因此要求学生务必掌握.

在等比数列的教学中，教师可采用类比的方法，在复习等差数列有关知识的同时，让学生自主地学习等比数列的相应知识.

2. 在等比数列的教学中，应突出以下几点：

(1) 强调“从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数”. 要防止在求公比时，把相邻两项比的次序颠倒.

(2) 等比数列的公比 q 可正可负，但不能为 0. 尤其是 q 为负值时，数列各项的符号变化情况，可结合实例组织讨论.

(3) 当公比 $q=1$ 时，等比数列是常数列.

(4) 等比数列的性质是

$$a_2=a_1q, a_3=a_2q, a_4=a_3q, \cdots, a_n=a_{n-1}q,$$

即要证明一个数列是等比数列，只需证明对于任意正整数 n，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 是一个常数.

3. 根据等比数列的通项公式 $a_n = a_1q^{n-1}$ 和 $a_m = a_1q^{m-1}$，两式相除并整理可得$\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$. 这一推广形式应要求学生理解.

对于 $f(n) = a_1q^{n-1}$ 是一个不为 0 的常数与指数函数的积这一点，教师可以根据学生的程度酌情讲解.

4. G 是 a，b 的等比中项的特征是 $G^2 = ab(ab > 0)$.

任意两个同号的数的等比中项都有两个，它们互为相反数. 当 $a > 0$，$b > 0$ 时，$G = \sqrt{ab}$ 也叫做 a，b 的几何平均数.

5. 如果已知 3 个数成等比数列，公比为 q，则可设它们分别为$\frac{a}{q}$，a，aq.

6.3.2 等比数列的前 n 项和

1. 在推导等比数列前 n 项和公式时，在

$$S_n = a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

的两边分别乘以 q 这一步，学生往往不易想到，为此要说明将上面等式右边的每一项乘以公比 q，就得到它后面相邻的一项，即

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

因而，从前一等式的两边分别减去后一等式的两边，就可以消去这些相同项. 这种求和的方法，在解决某些求和问题时经常用到，应要求学生理解.

2. 教材中没有给出等比数列的另一求和公式

$$S_n = \frac{a_1 - a_nq}{1 - q},$$

可引导学生自己推出，并组织学生讨论，如何灵活运用这两个求和公式.

3. 要强调使用求和公式时，q 不能为 1 的条件，指出当 $q = 1$ 时，它的前 n 项和为 $S_n = na_1$.

4. 等比数列的通项公式及前 n 项和公式共涉及 5 个变量 a_1，a_n，n，q，S_n，已知其中 3 个量就可以通过解方程或方程组求出另外 2 个量. 但要防止丢根.

6.4 数列的应用

1. 本节列举了等差数列和等比数列在工农业生产等方面的应用，使学生了解数列知识应用的广泛性. 同时，通过应用问题讲解可对前面所学知识进一步的复习、巩固.

2. 针对实际应用中“增长”与“减少”的问题，要进行具体分析. 一般地说，“增长”或“减少”是具体数量时，常用等差数列的有关知识去解决；“增长”或“减少”的是倍数、百分数时，常用等比数列的有关知识去解决. 在储蓄、贷款等经济活动中，应注意分清是单利还是复利，前者所构建的数列是等差数列，后者所构建的数列是等比数列. 应用等比数列公式时，若是增长率或降低率(百分率)，公比应是(1 + 增长率) 或(1 − 降低率).

3. 在讲解应用问题时，要注意项数 n 的问题. 例如，第 5 年对于第 1 年来说，$n=5$；若是“5 年后的产量”对于“今年的产量”来说，则是 a_6，而不是 a_5. 若 1995 年的产量是 a_1，则 2000 年的产量应是 a_6，而不要因 $2\,000-1\,995=5$ 误认为是 a_5.

4. 本节课后的习题量比较大，可引导学生有选择的做.

Ⅲ 教学设计

6.1.1 数列的定义

【教学目标】

1. 理解数列的有关概念和通项公式的意义.
2. 了解数列与函数的关系，培养学生观察分析的能力.
3. 使学生体会数学与生活的密切联系，提高数学学习的兴趣.

【教学重点】

数列的概念及其通项公式.

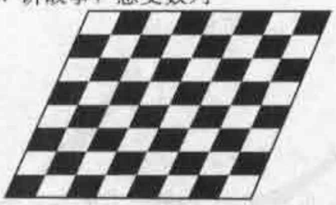
【教学难点】

数列通项公式的概念.

【教学方法】

这节课主要采用情景教学法. 利用多媒体，在教师的引导下，根据学生的认知水平，设计了创设情境——引入概念、观察归纳——形成概念、讨论研究——深化概念、即时训练——巩固新知等环节. 各步骤环环相扣，层层深入，引导学生体会数学概念形成过程中所蕴涵的数学方法，使之获得内心感受.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 讲故事，感受数列 	教师讲述古印度传说故事《棋盘上的麦粒》. 学生倾听故事，认识数列.	创设情境，让学生认识数列，激发学生的好奇心，增强学生的学习兴趣.
	2. 提出问题，引入新课 我国有用十二生肖纪年的习俗，每年都用一种动物来命名，12 年轮回一次. 2009 年(农历乙丑年)是 21 世纪的第一个牛年，请列出 21 世纪所有牛年的年份.	教师提出问题. 学生分组讨论，找出问题的答案.	提出和本节课密切相关的问题，让学生思考，充分发挥学习小组的作用，展开讨论.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	1. 数列的定义 把 21 世纪所有牛年的年份排成一列，得 2 009，2 021，2 033，2 045， 2 057，2 069，2 081，2 093. ①	教师在学生探究的基础上，给出问题的答案.	
	像 ① 这样按一定次序排列的一列数，叫做数列.	教师板书定义.	
新课	数列中的每一个数都叫做这个数列的项，各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项)，第 2 项，…，第 n 项，…，比如，2 009 是数列 ① 的第 1 项(或首项)，2 093 是数列 ① 的第 8 项. 举出一些数列的例子： 大于 3 且小于 11 的自然数排成一列 4，5，6，7，8，9，10； ② 正整数的倒数排成一列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$； ③ $\sqrt{2}$ 精确到 1，0.1，0.01，0.001，…的近似值排成一列 1，1.4，1.41，1.414，…； ④ -1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，… 排成一列 -1，1，-1，1，-1，…； ⑤ 无穷多个 2 排成一列 2，2，2，2，…； ⑥ 这些都是数列.	教师出示一组数列的例子. 师：数列 4，5，6，7，8，9，10；与 10，9，8，7，6，5，4 是不同的数列. 而集合 {4，5，6，7，8，9，10} 与 {10，9，8，7，6，5，4} 是相同的集合. 强调数列的有序性，集合元素的无序性.	强调数列的“有序性”，使学生对数列定义有更深刻的认识，又为后面学习数列的通项公式埋下伏笔. 重视举例这一环节，调动学生的思维，发挥学生的主动性，加深对数列定义的理解.
	2. 数列的分类 项数有限的数列叫做有穷数列，项数无限的数列叫做无穷数列.	教师利用上面举过的例子，讲解“数列的分类”. 请学生指出上述数列中的有穷数列和无穷数列：①② 是有穷数列，③④⑤⑥ 是无穷数列.	观察实例，培养学生分类能力.
	练习 (1) 已知数列$\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{11}$，	同桌之间讨论，完成练习.	通过练习，让学生进一步掌握数列

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	$\sqrt{15}$，…，则 $3\sqrt{3}$ 是它的第____项. (2) 已知数列 1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…，$(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$，…，那么它的第 10 项是（　）. (A) -1　　(B) 1 (C) $-\frac{1}{10}$　　(D) $\frac{1}{10}$	教师巡视指导.	的定义.
新课	3. 数列的一般形式 数列从第一项开始，按顺序与正整数对应. 所以数列的一般形式可以写成 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…， 其中，a_n 是数列的第 n 项，叫做数列的通项，n 叫做 a_n 的序号. 整个数列可记作 $\{a_n\}$. 4. 数列的通项公式 如果 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 与 n 之间的关系可用 $a_n=f(n)$ 来表示，那么这个关系式叫做这个数列的通项公式，其中 n 的取值是正整数集的一个子集. 由此可知，数列的通项可以看成以正整数集的子集为定义域的函数. 例如，数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…，$\frac{1}{n}$，… 可记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，其通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}_+$. 如果数列通项的定义域是正整数集，定义域通常略去不写.	观察数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…. 教师提出问题：数列的每一项与这一项的序号是否有一定的对应关系？这一关系可否用一个公式表示？ 学生分组讨论. 对于上面的数列，第一项与这一项的序号有这样的对应关系： 项　1　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{4}$ 　　↓　↓　↓　↓ 序号　1　2　3　4 这个数列的每一项与这一项的序号可用公式 $a_n=\frac{1}{n}$ 来表示其对应关系.	培养学生的观察能力和由特殊到一般的归纳能力.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	本节课主要学习了以下内容： 1. 数列的定义； 2. 数列的分类； 3. 数列的通项公式.	学生阅读课本P3～P5上半部分，畅谈本节课的收获，教师引导梳理，总结本节课的知识点.	培养学生自己归纳、总结的学习习惯.
作业	教材P4探索与研究.	学生课后完成.	巩固拓展.

6.1.2 数列的通项

【教学目标】

1. 理解数列的通项公式的意义，能根据通项公式写出数列的任意一项，以及根据其前几项写出它的一个通项公式.

2. 了解数列的递推公式，会根据数列的递推公式写出前几项.

3. 培养学生积极参与、大胆探索的精神，培养学生的观察、分析、归纳的能力.

【教学重点】

数列的通项公式及其应用.

【教学难点】

根据数列的前几项写出满足条件的数列的一个通项公式.

【教学方法】

本节课主要采用例题解决法. 通过列举实例，进一步研究数列的项与序号之间的关系. 通过三类题目，使学生深刻理解数列通项公式的意义，为以后学习等差数列与等比数列打下基础.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 数列的定义 按一定次序排列的一列数叫做数列. 注意：(1) 数列中的数是按一定次序排列的； (2) 同一个数在数列中可以重复出现. 2. 数列的一般形式 数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，可记作$\{a_n\}$.	教师引导学生复习.	为学生进一步理解通项公式，应用通项公式解决实际问题做好准备.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	3. 数列的通项公式 如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与n之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的通项公式.		
新课	如果已知一个数列的通项公式，则可依次用限定的正整数1，2，3，…去代替公式中的n，就可求出数列中的各项. 例1　根据通项公式，写出下面数列$\{a_n\}$的前5项： (1) $a_n=\frac{n}{n+1}$； (2) $a_n=(-1)^n\cdot n$. 解　(1) 在通项公式中依次取$n=1，2，3，4，5$，得到数列的前5项为 $\frac{1}{2}，\frac{2}{3}，\frac{3}{4}，\frac{4}{5}，\frac{5}{6}$； (2) 在通项公式中依次取$n=1，2，3，4，5$，得到数列的前5项为 $-1，2，-3，4，-5$. 练习一 根据下列数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前5项： (1)$a_n=n^3$； (2)$a_n=5(-1)^{n+1}$. 练习二 根据下列数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的第7项和第10项： (1)$a_n=\frac{n}{n^2}$； (2)$a_n=n(n+2)$； (3)$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$； (4)$a_n=-2^n+3$.	学生解答例题. 师：你能总结一下这类题目的解决方法吗? 学生总结解法，教师点拨、解答学生疑难，用多媒体展示解题过程. 请学生在黑板上做练习一和练习二. 教师巡视指导. 师生共同订正答案.	将例题直接当成练习，由学生自己寻找解题方法，让学生体验探索与成功的快乐. 由数列的通项公式写出数列的前几项是简单的代入法，本练习为写通项公式做准备，尤其是对接受能力偏弱的学生，可多举几个例子让学生观察，归纳通项公式与各项序号的关系，尽量为例2做准备.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例2　写出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数： (1) 1，3，5，7； (2) $\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$； (3) $-\frac{1}{1\cdot 2}$，$\frac{1}{2\cdot 3}$，$-\frac{1}{3\cdot 4}$，$\frac{1}{4\cdot 5}$. 解　(1)数列的前四项1，3，5，7都是序号的2倍减去1，所以它的一个通项公式是 $$a_n=2n-1;$$ (2) 数列的前四项$\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$的分母都是序号加上1，分子都是分母的平方减去1，所以它的一个通项公式是 $$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$	教师引导学生分析数列的每一项与这一项的序号之间的对应关系： 项　1　3　5　7 　　$\downarrow$　$\downarrow$　$\downarrow$　$\downarrow$ 序号　1　2　3　4 师：你能找出各项与项数二者的对应关系满足什么规律吗？ 学生探究找出规律：数列的前四项1，3，5，7都是序号的2倍减去1. 师：如何用含有n的式子来表示第n项a_n？ 教师对学生的回答给以点评，板书解题过程.	由数列的前几项写出数列的一个通项公式是学生学习中的一个难点，要帮助学生分析各项的结构特征，让学生依据前几项的规律，寻求项与序号的关系. 最后教师引导学生结论. 培养学生的合作探究意识和创新意识.
	(3) 数列的前四项$-\frac{1}{1\cdot 2}$，$\frac{1}{2\cdot 3}$，$-\frac{1}{3\cdot 4}$，$\frac{1}{4\cdot 5}$的绝对值都等于序号与序号加1的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式是 $$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$	学生根据(1)题的解题思路，分组合作，讨论解答后两道题. 教师巡视指导. 教师说明数列的通项公式可以不止一个.	学生可能会写出多种不同的通项公式，对学生善于思考、勇于创新的精神给予赏识性评价.
	总结： (1) 当一个数列中的数依次出现“+”“−”相间时，应先把符号分离出来，用$(-1)^n$或$(-1)^{n+1}$等来表示； (2) 认真观察各数列所给出的项，寻求各项与序号的关系，归纳其规律，抽象出其通项公式.	教师引导学生总结. 师：当一个数列中的数依次出现“+”“−”相间时，应如何解决？ 师：根据数列的前几项，写数列的一个通项公式的方法是什么？	培养学生勤动手、动脑、善于总结、归纳的习惯.
	练习三 (1) 已知一个数列的前4项分别是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{8}$，则它的一个通项公	学生合作探究，完成练习. 教师巡视指导.	通过练习，让学生进一步掌握写通项公式的方法.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	式是______. (2) 数列 $\frac{2^3-1}{2}$，$\frac{3^3-1}{3}$，$\frac{4^3-1}{4}$，$\frac{5^3-1}{5}$，…的一个通项公式是(　　). (A) $\frac{n(n^2-1)}{n+1}$　(B) $\frac{n(n^2+1)}{n}$ (C) $\frac{n(n^2+3n+3)}{n+1}$　(D) $\frac{n(n^2+2)}{n}$	师生共同订正答案.	在教师的引导下，培养学生观察、分析、归纳的能力.
	例 3　已知数列$\{a_n\}$的第 1 项是 1，以后各项由公式 $$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$$ 给出，写出这个数列的前 5 项. 例 3 中的函数表达式，表达的是任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} 的关系，这样的关系式叫做数列的递推公式. 解　不难得出 $a_1=1$； $a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2$； $a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$； $a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$； $a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}$.	教师出示例 3，引导、点拨. 师：数列中，a_n 项与 a_{n-1} 项是什么关系？ 引导学生得出：是任一项与前一项的关系. 教师给出递推公式的定义. 学生分组探究. 教师巡视指导，强调代数计算时，要注意正确性.	培养学生积极实践、科学探究的学习态度.
	练习四 (1) 已知数列$\{a_n\}$，其中 $a_1=1\ 981$，$a_n=a_{n-1}+12$，$n\geqslant 2$，写出这个数列的前 5 项. (2) 已知数列$\{a_n\}$中，$a_5=2\ 009$，$a_n=a_{n-1}+12$，$n\geqslant 2$. 求 a_1.	请学生在黑板上做题. 教师巡视指导、订正.	加强练习，体会递推公式的应用.
小结	三类题目： (1) 由数列的通项公式写出数列某一项； (2) 根据数列的前几项，写出数列的一个通项公式； (3) 根据数列的递推公式写出数列的前几项.	学生阅读课本 P5 ~ P7，畅谈本节课的收获，教师引导梳理，总结本节课的知识点.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处强调总结.
作业	教材 P8 习题第 5，6，7 题.	学生课后完成.	巩固拓展.

6.2.1 等差数列的概念

【教学目标】

1. 理解等差数列的概念，掌握等差数列的通项公式；掌握等差中项的概念.

2. 逐步灵活应用等差数列的概念和通项公式解决问题.

3. 通过教学，培养学生的观察、分析、归纳、推理的能力，渗透由特殊到一般的思想.

【教学重点】

等差数列的概念及其通项公式.

【教学难点】

等差数列通项公式的灵活运用.

【教学方法】

本节课主要采用自主探究式教学方法. 充分利用现实情景，尽可能地增加教学过程的趣味性、实践性. 在教师的启发指导下，强调学生的主动参与，让学生自己去分析、探索，在探索过程中研究和领悟得出的结论，从而达到使学生既获得知识又发展智能的目的.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	问题　某工厂仓库里堆放有一批钢管(参见教材图 6-1)，共堆放了 7 层，试从上到下列出每层钢管的数量.	教师出示引例，并提出问题. 学生探究、解答.	希望学生能通过对日常生活中的实际问题的分析对比，建立等差数列模型，进行探究、解答问题，体验数学发现和创造的过程.
新课	从上例中，我们得到一个数列，每层钢管数为 4，5，6，7，8，9，10. 1. 等差数列的定义 一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数就叫做等差数列的公差(常用字母“d”表示).	师：请同学们仔细观察，看看这个数列有什么特点？ 学生观察、回答. 教师总结特征： 从第二项起，每一项与它前面一项的差等于同一个常数(即等差). 我们给具有这种特征的数列一个名字——等差数列. 教师板书定义. 师：等差数列的例子，在生活中有很多，谁能再举几个?	由特殊到一般，发挥学生的自主性，培养学生的归纳能力. 在学生自主探究的基础上得出定义和公式，更有利于学生理解和运用.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	练习一 抢答：下列数列是否为等差数列？ 1，2，4，6，8，10，12，…； 0，1，2，3，4，5，6，…； 3，3，3，3，3，3，3，…； 2，4，7，11，16，…； −8，−6，−4，0，2，4，…； 3，0，−3，−6，−9，…. 注意：求公差 d 一定要用后项减前项，而不能用前项减后项. 2. 常数列 特别地，数列 3，3，3，3，3，3，3，… 也是等差数列，它的公差为0. 公差为0的数列叫做常数列. 3. 等差数列的通项公式 首项是 a_1，公差是 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以表示为 $a_n=a_1+(n-1)d.$ 4. 通项公式的应用 根据这个通项公式，只要已知首项 a_1 和公差 d，便可求得等差数列的任意项 a_n. 事实上，等差数列的通项公式中共	教师出示题目. 学生思考、抢答. 师：你能说出练习一中，各等差数列的公差吗？ 学生说出各题的公差 d. 教师订正并强调求公差应注意的问题. 师：已知一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公差是 d，如何求出它的任意项 a_n 呢？ 学生分组探究，填空，归纳总结通项公式： $a_2=a_1+d$， $a_3=$____$+d=$____$+d$ $=a_1+$____d， $a_4=$____$+d=$____$+d$ $=a_1+$____d， …… $a_n=a_1+$____$d.$ 师：一个等差数列的各项，已知____和____就可以确定下来. 师：等差数列的通项公式中共有几个变量？	引导学生观察、归纳、猜想，培养学生合理的推理能力. 学生在分组合作探究过程中，可能会找到多种不同的解决办法，教师要逐一点评，并及时肯定、赞扬学生善于动脑、勇于创新的品质，激发学生的创造意识.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	有四个变量，知道其中三个，便可求出第四个. 例1　求等差数列8，5，2，… 的通项公式和第20项. 解　因为 $a_1=8$，$d=5-8=-3$，所以这个数列的通项公式是 $a_n=8+(n-1)\times(-3)$， 即 $a_n=-3n+11$. 所以 $a_{20}=-3\times20+11=-49$. 例2　等差数列 -5，-9，-13，… 的第多少项是 -401？ 解　因为 $a_1=-5$，而且 $d=-9-(-5)=-4$， $a_n=-401$， 所以 $-401=-5+(n-1)\times(-4)$. 解得 $n=100$. 即这个数列的第100项是 -401. 练习二 (1) 求等差数列3，7，11，… 的第4，7，10项. (2) 求等差数列10，8，6，… 的第20项. 练习三 在等差数列 $\{a_n\}$ 中： (1) $d=-\frac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1； (2) $a_1=12$，$a_6=27$，求 d. 例3　在3与7之间插入一个数 A，使3，A，7成等差数列，求 A. 解　因为3，A，7成等差数列，所以	教师引导学生分析本题，已知什么？求什么？怎么求？ 学生思考，说出已知、所求，代入通项公式. 强调：通项公式是用含有 n 的式子表示 a_n. 学生尝试解答后，师生共同板书解题过程. 仿照例1，教师引导、点拨. 学生解答. 用多媒体展示解题过程. 学生核对、订正. 教师强调解题过程要规范、严谨. 学生练习. 请学生在黑板上做题. 教师巡视指导. 师生共同订正. 教师出示例题. 学生同桌之间合作探究. 学生分析解题思路. 教师出示答案，订正.	鼓励学生自主解答，培养学生运算能力. 通过例题，强化学生对等差数列通项公式的理解，强化学生学以致用的意识. 由特殊到一般，发挥学生的自主性，培养学生的归纳能力.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$A-3=7-A$，$2A=3+7$. 解得 $A=5$.	师：在 a 与 b 之间插入一个数 A，使 a，A，b 成等差数列．你能用 a，b 来表示 A 吗？ 学生探究、回答.	
	5. 等差中项的定义 一般地，如果 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项.	教师订正学生的回答，给出等差中项的定义和公式. 师：你能用文字描述一下这个式子的含义吗？	在学生自主探究的基础上得出定义和公式，更有利于学生理解和运用.
	6. 等差中项公式 如果 A 是 a 与 b 的等差中项，则 $$A=\frac{a+b}{2}.$$ 这就表明，两个数的等差中项就是它们的算术平均数.	师：在等差数列 1，3，5，7，9，11，13，… 中，每相邻的三项，满足等差中项的关系吗？ 学生分组合作探究，得出结论.	引导学生观察、归纳、猜想，培养学生合理的推理能力.
	7. 一个结论 在等差数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…中， $$a_2=\frac{a_1+a_3}{2},$$ $$a_3=\frac{a_2+a_4}{2},$$ …… $$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$ …… 这就是说，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项(有穷等差数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项.	师：能将这个结论推广到一般的等差数列中吗？ 学生继续分组合作探究. 教师总结学生的回答，给出结论.	
	练习四 求下列各组数的等差中项： (1)732 与 -136； (2) $\frac{49}{2}$ 与 42.	学生做练习. 学生回答各题结果，统一订正答案.	通过两道直接套用公式的练习题，强化学生对中项公式的掌握.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	例 4　已知一个等差数列的第 3 项是 5，第 8 项是 20，求它的第 25 项. 解　因为 $a_3=5$，$a_8=20$，根据通项公式得 $\begin{cases} a_1+(3-1)d=5 \\ a_1+(8-1)d=20 \end{cases}$ 整理，得 $\begin{cases} a_1+2d=5 \\ a_1+7d=20 \end{cases}$ 解此方程组，得 $a_1=-1$，$d=3$. 所以 $a_{25}=-1+(25-1)\times 3=71$. 强调：已知首项 a_1 和公差 d，便可求得等差数列的任意项 a_n.	教师出示例题. 学生分组合作探究. 教师点拨、引导： (1) 例题给出了哪些量？如何用数列符号表示？ (2) 例题中的所求量是什么？需要知道哪些条件？ 教师总结学生思路，给出解题过程.	学生在分组合作探究过程中，可能会找到多种不同的解决办法，教师要逐一点评，并及时肯定、赞扬学生善于动脑、勇于创新的品质，激发学生的创造意识.
新课	练习五 (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_n=21$，$d=2$，求 n. (2) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=10$，$a_5=6$，求 a_8 和 d.	学生自主练习. 教师巡视指导. 请个别学生在黑板上做题后，师生共同订正.	鼓励学生自主解答，培养学生运算能力.
	例 5　梯子的最高一级是 33 cm，最低一级是 89 cm，中间还有 7 级，各级的宽度成等差数列，求中间各级的宽度. 解　用 $\{a_n\}$ 表示题中的等差数列. 已知 $a_1=33$，$a_n=89$，$n=9$. 则 $a_9=33+(9-1)d$，即 $89=33+8d$. 解得 $d=7$. 于是 $a_2=33+7=40$， $a_3=40+7=47$， $a_4=47+7=54$， $a_5=54+7=61$， $a_6=61+7=68$，	教师出示例题. 引导学生将题中的已知和未知转化为用数列符号表示. 学生解答. 教师巡视指导. 教师出示解题过程，强调	通过例题，强化学生对等差数列通项公式的理解，强化学生学以致用的意识.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	$a_7=68+7=75$, $a_8=75+7=82$. 即梯子中间各级的宽从上到下依次是 40 cm, 47 cm, 54 cm, 61 cm, 68 cm, 75 cm, 82 cm.	解题步骤要规范、严谨，叙述要简明、完整.	
新课	例6　已知一个直角三角形的三条边的长度成等差数列．求证：它们的比是 3∶4∶5. 证明　设这个直角三角形的三边长分别为 $a-d$, a, $a+d$. 根据勾股定理，得 $(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$. 解得 $a=4d$. 于是这个直角三角形的三边长是 $3d$, $4d$, $5d$, 即这个直角三角形的三边长的比是 3∶4∶5.	教师出示例题，提示点拨：当已知三个数成等差数列时，可将这三个数表示为 $a-d$, a, $a+d$, 其中 d 是公差．由于这样表示具有对称性，运算时往往容易化简. 学生根据教师的提示，分组探究. 请学生在黑板上做题. 教师引导学生订正解题过程，规范解题步骤.	在例题的教学中，教师要注重引导学生分析题意，教会学生思考问题、解决问题的思路与方法；在解决问题中，将新的知识内化到学生原有的认知结构中去.
小结	1. 等差数列的定义及通项公式. 2. 等差中项的定义和公式. 3. 等差数列通项公式和中项公式的应用.	学生阅读课本 P9 ~ P12，畅谈本节课的收获. 教师引导梳理，总结本节课的知识点和解题方法.	教师鼓励学生积极回答，答不完整没有关系，其他同学补充．以此培养学生的口头表达能力，归纳概括能力.
作业	教材 P17 习题第 1，2，6 题.	学生课后完成.	巩固拓展.

6.2.2　等差数列的前 n 项和

【教学目标】

1. 理解并掌握等差数列前 n 项和公式，并会应用公式解决简单的问题.

2. 逐步熟练等差数列通项公式与前 n 项和公式的综合应用，培养学生的运算能力.

3. 通过公式的探索、发现，培养学生观察、猜想、归纳、分析、综合推理的能力，渗透特殊到一般的思想.

【教学重点】

等差数列前 n 项和公式的应用.

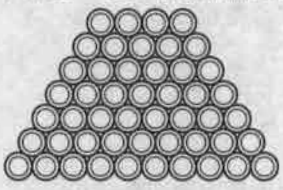
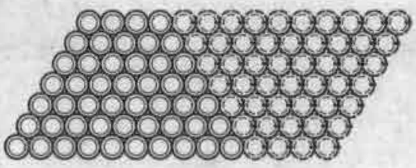
【教学难点】

等差数列前 n 项和公式的推导.

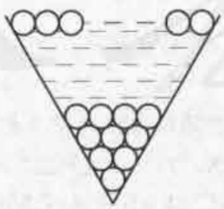
【教学方法】

本节课在公式推导中宜采用引导发现法. 师生共同参与整个教学活动，教师是活动的主导，学生是活动的主体. 教师在引导的同时，必须指导学生亲自探究、发现、应用等活动，为学生思维指路搭桥. 通过学生自主的尝试、发现活动，使学生在感知的基础上有效地揭示知识间的内在联系，从而使学生获取知识，提高能力.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	问题　某工厂仓库里堆放有一批钢管，共堆放了7层，试求钢管的总数.  分析　怎样求得钢管的总数呢？显然，把各层钢管数直接相加就可得出结果. 如果钢管很多，怎么办？下面我们用另外一个办法来求.	学生分组合作探究.	回顾等差数列概念一节中提出的问题，激发学生探究的兴趣和欲望.
新课	1. 计算钢管数  解　用 S 来表示钢管的总数，则 $S_7=4+5+6+7+8+9+10$, ① 将各项次序反过来，又可写成 $S_7=10+9+8+7+6+5+4$. ② 把①②两式对应项相加，每对应两项和都等于14，所以把①②两式分别相加，得 $2S_7=(4+10)\times 7$,	学生各抒己见，回答导入中提出的问题. 教师展示学生回答中，用"倒序相加"方法解答此题的过程. 学生合作探究. 教师逐一点评学生想出的办法，对学生提到的"倒序相加法"结合图形进行讲解.	使用熟悉的几何方法：把"梯形"倒置，与原图补成平行四边形. 借助直观图形能启迪思路，帮助理解. 在教学中，要鼓励学生借助几何直观进行思考，从而渗透数形结合的数学思想.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	$S_7=\frac{(4+10)\times 7}{2}$, $S_7=49$.	师：由上例，你能总结出求任意等差数列各项和的计算方法吗？	
	2. 等差数列的前 n 项和公式 等差数列各项的和等于首末两项的和乘项数除以 2. 一般地，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记作 S_n，即 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.	教师引导学生总结等差数列的前 n 项和公式.	通过对公式的剖析，培养学生灵活应用公式运算的能力.
	可以得到等差数列的前 n 项和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$. 因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.	教师引导学生将等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入上式，得出公式的另一种形式.	
新课	在这两个公式中，都包含四个变量，只要知道其中任意三个，就可求出第四个.	师：你能说出两个公式中包含的变量有哪些吗？ 生：S_n，a_1，n，d，a_n.	
	练习一 根据下列各题条件，求相应等差数列 $\{a_n\}$ 的 S_n： (1) $a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$； (2) $a_1=100$，$d=-2$，$n=50$； (3) $a_1=\frac{2}{3}$，$a_n=-\frac{3}{2}$，$n=14$； (4) $a_1=14.5$，$d=0.7$，$a_n=32$.	学生应用新知识解答问题. 教师对学生的解答给予赏识性评价.	通过练习，引导学生学会选择、运用公式，加深对公式的理解.
	练习二  如图，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比下面一层多放一支，最上面放有 120 支，这个 V 形架上共放多少支铅笔？	学生自主练习. 教师巡视指导. 请学生到黑板上做题后，师生共同订正.	在教师的指引下，提高学生分析问题的能力.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例1　在小于100的正整数集合中，有多少个数是7的倍数？并求它们的和. 解　在小于100的正整数集合中，以下各数是7的倍数 $7，7\times2，7\times3，\cdots，7\times14.$ 即7，14，28，…，98. 显然，这是一个等差数列. 其中$a_1=7$，$d=7$，项数为不大于$\frac{100}{7}$的最大整数值，即$n=14$，$a_{14}=98$. 因此 $S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735.$ 即在小于100的正整数的集合中，有14个数是7的倍数，它们的和等于735. 例2　在等差数列$-5，-1，3，7，\cdots$中，前多少项的和是345？ 解　这里$a_1=-5$，$d=(-1)-(-5)=4$，$S_n=345$. 根据等差数列的前n项和公式得 $345=-5n+\frac{n(n-1)}{2}\times4$， 整理得$2n^2-7n-345=0$，解得 $n_1=15$， $n_2=-\frac{23}{2}$(不合题意，舍去). 所以$n=15$. 即这个数列的前15项的和是345.	教师提出问题，引导学生分析解题思路： (1) 在小于100的正整数的集合中，7的倍数有哪些？ (2) 这些数构成了一个什么样的数列？ (3) 如何用数列符号表示这些已知量？ 教师出示例题，点拨、引导：例题给出了哪些量？所求是什么量？如何用数列符号表示？选择哪个公式？ 教师根据学生的回答，列出已知、所求、选用的公式. 学生自主解答. 教师巡视指导. 请学生在黑板上板演.	解决此题的关键是分析题目所给条件，正确选择公式. 学生自主解答，培养学生运算能力.
小结	等差数列的前n项和公式为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$； $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$	学生阅读课本P15～P16，畅谈本节课的收获. 教师引导梳理，总结本节课的知识点和解题方法.	教师鼓励学生积极回答，培养学生的口头表达能力，归纳概括能力.
作业	教材P16练习A组第2，3题.	学生课后完成.	巩固拓展.

6.3.1 等比数列的概念

【教学目标】

1. 理解等比数列的概念，掌握等比数列的通项公式；掌握等比中项的概念.

2. 逐步灵活应用等比数列的概念和通项公式解决问题.

3. 通过教学，培养学生的观察、分析、归纳、推理的能力，培养学生类比分析的能力.

【教学重点】

等比数列的概念及通项公式.

【教学难点】

灵活应用等比数列概念及通项公式解决相关问题.

【教学方法】

本节课主要采用类比教学法和自主探究教学法. 充分利用现实情景，尽可能地增加教学过程的趣味性、实践性. 在教师的启发指导下，强调学生的主动参与，让学生在等差数列的基础上用类比的方法自己去分析、探索，在探索过程中研究和领悟得出的结论，从而达到使学生既获得知识又发展智能的目的.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	复习提问： (1) 等差数列的定义； (2) 等差数列的通项公式； (3) 计算公差 d 的方法； (4) 等差中项的定义及公式. 学生动手操作： 把一张纸连续对折5次，试写出每次对折后纸的层数. 通过学生动手操作可得折纸的层数是 2，4，8，16，32.	教师提出问题. 学生思考回答. 教师用问题引导学生观察相邻两项的关系，根据前面所学等差数列的知识，尝试给出等比数列的定义.	回顾以前学过的知识，为知识迁移做准备. 通过动手操作解答问题，体验数学发现和创造的过程.
新课	1. 等比数列的定义 一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它前一项的比都等于同一个常数，则这个数列叫做等比数列，这个常数就叫做等比数列的公比. 公比通常用字母“q”表示. 练习一 抢答：下列数列是否为等比数列？	学生对比等差、等比两数列的异同. 教师出示题目.	培养学生发现问题、类比推导与归纳总结的能力.

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	① 8，16，32，64，128，256，…； ② 1，1，1，1，1，1，1，…； ③ 243，81，27，9，3，1，…； ④ 16，8，4，2，0，−2，…； ⑤ 1，−1，1，−1，1，−1，1，…； ⑥ 1，−10，100，−1 000，…．	学生思考、抢答． 师问：你能说出练习一中，等比数列的公比吗？ 教师出示练习一中的等比数列． 学生说出各题的公比 q．	通过一组练习题，加深学生对等比数列定义的理解． 用抢答的方式，激发学生的思维，调动学生的学习积极性．
	注意： (1) 求公比 q 一定要用后项除以前项，而不能用前项除以后项； (2) 等比数列中，各项和公比均不为 0； (3) $q=1$ 时，$\{a_n\}$ 为常数列．	师：等比数列中，某一项可以为 0 吗？公比 q 可以为 0 吗？为什么？ 师：常数列是等比数列吗？ 学生根据定义，得出结论．	在教师的引导下，结合等比数列定义，归纳得出结论，提高学生发现问题、解决问题的能力．
	2. 等比数列的通项公式 首项是 a_1，公比是 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以表示为 $$a_n=a_1q^{n-1}.$$ 根据这个通项公式，只要已知首项 a_1 和公比 q，便可求得等比数列的任意项 a_n． 事实上，等比数列的通项公式中共有四个变量，知道其中三个，便可求出第四个．	师：请仿照等差数列通项公式的推导过程，归纳总结等比数列的通项公式． 学生分组探究： $a_2=a_1q$， $a_3=$ _ $q=$ _ $q=a_1$ _， $a_4=$ _ $q=$ _ $q=a_1$ _， …… $a_n=a_1$ _．	引导学生观察、归纳、猜想，培养学生合理的推理能力和合作意识．
	练习二 已知一个等比数列的首项为 1，公比为 −1，求这个数列的第 9 项． 练习三 求下列等比数列的第 4 项和第 8 项： (1)5，−15，45，…； (2)1.2，2.4，4.8，…； (3) $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{8}$，…；	练习时请个别学生在黑板上做题． 教师订正． 学生做练习三．	巩固加深对等比数列概念及其通项公式的理解，能运用等比数列解决一些简单的实际问题．

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	(4) $\sqrt{2}$，1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，…． 例 1　已知一个等比数列的第 3 项和第 4 项分别是 12 和 18，求它的第 1 项和第 2 项． 解　设这个数列的第一项是 a_1，公比是 q，则 $a_1q^2=12$，　① $a_1q^3=18$．　② 解 ①② 所组成的方程组，得 $q=\frac{3}{2}$，$a_1=\frac{16}{3}$， $a_2=a_1q=\frac{16}{3}\times\frac{3}{2}=8$． 即这个数列的第 1 项是 $\frac{16}{3}$，第 2 项是 8． 练习四 (1) 一个等比数列的第 9 项是 $\frac{4}{9}$，公比是 $-\frac{1}{3}$，求它的第 1 项． (2) 一个等比数列的第 2 项是 10，第 3 项是 20，求它的第 1 项和第 4 项． 例 2　将 20，50，100 三个数分别加上相同的常数，使这三个数依次成等比数列，求它的公比 q． 解　设所加常数为 a，依题意 $20+a$，$50+a$，$100+a$ 成等比数列，则 $\frac{50+a}{20+a}=\frac{100+a}{50+a}$， 去分母，得 $(50+a)^2=(20+a)(100+a)$，即 $2\,500+100a+a^2=2\,000+120a+a^2$， 解得 $a=25$． 代入计算，得 $\frac{50+a}{20+a}=\frac{50+25}{20+25}=$	教师引导学生分析本题，已知什么？求什么？怎么求？ 教师启发学生，当用一个式子解决不了问题的时候，考虑构成方程组来解决． 教师板书解题过程． 引导学生注意求公比的方法：两式相除． 学生解答练习四． 请学生在黑板上做题． 教师巡视指导． 教师引导学生利用等比数列的定义列出方程．	教师注重引导学生分析题意，教会学生思考问题、解决问题的思路与方法． 通过练习，让学生进一步掌握等比数列中，求公比的方法． 此题看似复杂，实际上学生自己可以完成． 另外例 2 的思路与以下等比中项的思路一致，可以在讲完等比中项以后让学生再回顾此题．

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$\frac{5}{3}$，所以公比 $q=\frac{5}{3}$. 3. 等比中项的定义 在2与8之间插入一个数4，那么2，4，8成等比数列. 一般地，如果 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项. 4. 等比中项公式 如果 G 是 a 与 b 的等比中项，则 $G^2=ab$，即 $G=\pm\sqrt{ab}$. 容易看出，一个等比数列从第2项起，每一项(有穷等比数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等比中项. 练习五 求下列各组数的等比中项： (1)2，18；　　(2)16，4.	由特殊数列2，4，8引出等比中项的定义. 师：2，-4，8是否构成等比数列？-4是不是2和8的等比中项？ 学生思考、合作探究，得出等比中项公式. 教师引导学生注意等比中项的值有两个. 学生口答练习五. 师生统一订正.	培养学生发现问题，进行类比、推导以及归纳总结的能力.
小结	1. 等比数列的定义. 2. 等比数列的通项公式. 3. 等比中项的定义及公式. 4. 等比数列定义与通项公式的应用.	学生阅读课本P18～P20，畅谈本节课的收获. 教师引导梳理，总结本节课的知识点和解题方法.	教师鼓励学生积极回答，培养学生的口头表达能力和归纳概括能力.
作业	教材P23习题第1，2题.	学生课后完成.	巩固拓展.

6.3.2 等比数列的前 n 项和

【教学目标】

1. 理解并掌握等比数列前 n 项和公式，并会应用公式解决简单的问题.
2. 逐步熟练等比数列通项公式与前 n 项和公式的综合应用，培养学生的运算能力.
3. 通过公式的探索、发现，培养学生观察、猜想、归纳、分析、综合推理的能力，渗透类比与转化的思想.

【教学重点】

等比数列前 n 项和公式的应用.

【教学难点】

等比数列前 n 项和公式的推导和灵活运用.

【教学方法】

本节课在公式推导中宜采用类比教学法和自主探究教学法. 师生共同参与整个教学活动，教师是活动的主导，学生是活动的主体，教师在引导的同时，让学生在等差数列的基础上用类比的方法自己去分析、探索，在探索过程中研究和领悟得出结论，从而达到使学生既获得知识又发展智能的目的.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	印度一国王与国际象棋发明家的故事：发明者要国王在他的棋盘上的64格中的第1格放入1粒麦粒，第2格放入2粒麦粒，第3格放入4粒麦粒，第4格放入8粒麦粒……问应给发明家多少粒麦粒?	教师讲故事，并提出问题. 学生分组合作探究. 学生用计算器依次算出各项的值，然后再求和. 教师对他们的这种思路给予肯定.	利用学生好奇心理，让学生去经历知识的形成与发展过程，便于调动学生学习本节课的积极性.
新课	1. 求数列1，2，4，…，2^{62}，2^{63}的各项和 数列1，2，4，…，2^{62}，2^{63}是以1为首项，2为公比的等比数列，前面的问题应归结为求这个数列前64项的和，可表示为 $S_{64}=1+2+4+8+\cdots+2^{62}+2^{63}$. ①	师：数列1，2，4，…，2^{62}，2^{63}是个什么数列？有何特征？前面的问题应归结为什么数学问题呢? 学生思考回答. 师：让我们寻找一种更简单的解决这个问题的办法吧. 师：观察①式中的各项有何联系? 学生会发现，后一项都是前一项的2倍.	教学中，繁难的求解过程激起学生急于探求新方法的欲望，为后面的教学埋下伏笔.
	$2S_{64}=2+4+8+\cdots+2^{63}+2^{64}$. ②	师：如果我们把每一项都乘公比2，得到②式，请观察各项发生了什么变化？与①式有什么联系? 学生发现，除最后一项外，每一项都变成了①的后一项. 教师继续引导学生比较、	留出时间让学生充分地比较，等比数列前 n 项和公式的推导关键是错位相减，培养学生的辩证思维能力.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	①－②，得到 $$S_{64}-2S_{64}=1-2^{64}.$$ 即 $$(1-2)S_{64}=1-2^{64}.$$ $$S_{64}=\frac{1-2^{64}}{1-2}.$$	探究：①② 两式有许多相同的项，用什么办法可以把相同的项消掉？ 学生会想到把两式相减，消去相同的项. 教师板书推导过程，得出求和公式. 教师指出：这就是错位相减法，并要求学生纵观全过程后反思：为什么 ① 式两边要同乘 2 呢？	让学生在化繁为简的过程中，充分感受到数学的简洁性.
新课	2. 等比数列的前 n 项和公式 当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$； 当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$. 等比数列的前 n 项和公式，包含四个变量，只要知道其中任意三个，就可求出第四个.	教师顺势引导学生将结论一般化. 等比数列的前 n 项和公式要分 $q\neq1$ 与 $q=1$ 时两种情况讨论. 请学生说出公式中包含的变量：a_1，q，n，S_n.	培养学生分类讨论的意识. 在教师的引导下，让学生从特殊到一般，完成公式的探究.
	例 1　求等比数列 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…的前 8 项的和. 解　因为 $a_1=\frac{1}{2}$，$q=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，$n=8$，所以 $$S_8=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{255}{256}.$$	学生独立思考，自主解题. 师生共同总结解法. 教师订正评价.	通过对例题的解答，强化对公式的掌握.
	练习 根据下列各组条件，求相应的等比数列 $\{a_n\}$ 的 S_n： (1) $a_1=3$，$q=2$，$n=6$； (2) $a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$n=5$.	学生练习，教师巡视指导.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例 2 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=-\frac{1}{3}$，前 4 项的和 $\frac{5}{9}$，求这个等比数列的首项. 解 根据等比数列前 n 项和公式及已知条件可得 $$\frac{5}{9}=\frac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)},$$ 解得 $a_1=\frac{3}{4}$. 即首项为 $\frac{3}{4}$.	教师出示例 2，引导学生分析题意，写出已知、所求，自主解答. 请学生在黑板上解题. 师生共同订正.	
小结	等比数列的前 n 项和公式： 当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$； 当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$.	学生阅读课本 P21～P22，畅谈本节课的收获. 教师引导梳理，总结本节课的知识点和解题方法.	教师鼓励学生积极回答，培养学生的口头表达能力和归纳概括能力.
作业	教材 P23 练习 A 组第 2 题，练习 B 组第 1 题.	学生课后完成.	巩固拓展.

6.4 数列的应用

【教学目标】

1. 能够应用等差数列、等比数列的知识解决简单的实际问题.

2. 通过解决实际问题，培养学生分析问题、解决问题的能力，渗透数学建模的思想.

3. 在应用数列知识解决问题的过程中，培养学生勇于探索、积极进取的精神，激发学生学习数学的热情.

【教学重点】

通过数列知识的应用，培养学生分析问题、解决问题的能力和运用数学的意识.

【教学难点】

根据实际问题，建立相应的数列模型.

【教学方法】

这节课主要采用问题解决法和分组合作探究的教学方法. 在教学过程中，从学生身边的实例入手，引起学生兴趣，体会所学知识的重要性. 培养学生分析问题、解决问题的能力，为今后进一步学习打好基础.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	数学来源于生活，又在生活和生产实践中有着广泛的应用．等差数列与等比数列，就是在科学与工农业生产中经常会碰到的知识．这节课我们就一起来探讨几个应用题．	教师提出本节课要解决的问题．	引导学生从生活中的实际问题出发，发现问题，分析问题，解决问题．
新课	例 1　某林场计划造林 0.5 km²，以后每年比上一年多造林 0.1 km²，问 6 年后林场共造林多少？ 解　依题意，林场每年造林数成等差数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=0.5$，$d=0.1$，$n=6$． 所以 $S_6=0.5\times 6+\frac{6\times(6-1)}{2}\times 0.1$ $=4.5$． 即 6 年后林场共造林 4.5 km²．	教师引导学生阅读题目，找出关键语言、关键数据． 教师引导学生得出：本题实质上是一个等差数列求和的问题． 学生在教师的指引下，将实际问题的文字语言转化为数学的符号语言，用数学式子表达数学关系． 教师板书解题步骤．	解应用题的关键是将实际问题转化为数学问题，建立数学模型．
	建模求解应用题的步骤： (1) 阅读题目，确定数列类型； (2) 寻求已知量； (3) 确定所求量； (4) 利用公式列等式； (5) 解答； (6) 写出答案．	通过例题，教师引导学生归纳应用题的解题步骤．	在构建数学模型的过程中，要求学生对数学知识具有检索能力，认定或构建相应的数学模型，完成从实际问题向数学问题的转化．
	例 2　某种电子产品自投放市场以来，经过三次降价，单价由原来的 174 元降到 58 元，这种产品平均每次降价的百分率是多少？ 解　设平均每次降价的百分率是 x，则每次降价后的单价是原价的 $(1-x)$ 倍．这样，将原单价与三次降价后的单价依次排列，就组成一个等比数列，记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1=174$，$a_4=58$， $n=4$，$q=1-x$．	教师引导学生建模： (1) 分清是等差数列还是等比数列； (2) 分清是求通项问题还是求和问题． 学生分组合作探究． 教师巡视指导．	构建出数学模型后，要正确得到问题的解，还需要比较扎实的基础知识和较强的数学运算能力． 解答数列综合题和应用性问题既要有坚实的基础知识，又要有良好的

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	由等比数列的通项公式，得 $$58=174\times(1-x)^{4-1}.$$ 整理，得 $$(1-x)^3=\frac{1}{3},$$ $$1-x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\approx 0.693.$$ 因此 $$x\approx 1-0.693\approx 31\%.$$ 即这种电子产品平均每次降价的百分率大约是31%. 注意： (1) 要准确判定数列类型； (2) 要分清已知量和待求量.	对学生解题过程中普遍遇到的难点，师生合作完成. 请学生在黑板上做题. 师生统一订正. 通过例题，再次强调解应用题需要注意的问题.	思维能力和分析、解决问题的能力；解答应用性问题，应充分运用观察、归纳、猜想的手段，建立出有关等差(比)数列模型，再综合其他相关知识来解决问题. 这些都有利于学生数学能力的提高.
新课	例3　一对夫妇为了5年后能购买一辆车，准备每年到银行去存一笔钱. 假设银行储蓄年利率为5%，按复利计算，为了使5年后本利和共有10万元，问他们每年约需存多少钱？(精确到1元) 解　设每年他们存入 x 元，一年后存的本利和为 $$x(1+5\%),$$ 两年后的本利和为 $$x(1+5\%)+x(1+5\%)^2,$$ …… 5年后的本利和为 $$x(1+5\%)+x(1+5\%)^2+\cdots+x(1+5\%)^5.$$ 依题意，列方程得 $$x(1+5\%)+x(1+5\%)^2+\cdots+x(1+5\%)^5=100\ 000,$$ 即 $1.05x\times\dfrac{1.05^5-1}{1.05-1}=100\ 000.$ 解此方程，得 $x\approx 17\ 236$ 元. 所以每年约需存入17 236元.	教师首先帮助学生理解“复利”的概念，注意分期付款因方式的不同抽象出来的数列模型也不同. 教师引导学生将实际问题的文字语言转化为数学的符号语言，用数学式子表达数学关系，将实际问题通过分析概括，抽象为数学问题. 教师引导学生先建立数学模型，再用数学知识解决，然后回到实际问题，给出答案.	强化转化思想、方程思想的应用.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	等差数列和等比数列知识在社会学、经济学等方面有着广泛的应用. 解决数列实际问题的步骤是: 读题，确定数列类型→寻求已知量→确定所求量→利用公式列等式→解答→写出答案.	学生回顾解决应用题的方法，畅谈本节课的收获. 教师引导梳理，总结本节课的知识点和解题方法.	教师鼓励学生积极回答，培养学生的口头表达能力和归纳概括能力.
作业	教材 P25 习题第 7，9 题.	学生课后完成.	巩固拓展.

Ⅳ 测 验 题

1. 填空题

(1) 已知等差数列 $a_1=3$，$d=-2$，$n=15$，则 $a_n=$______.

(2) 已知等比数列 $a_1=3$，$q=-2$，$n=7$，则 $a_n=$______.

(3) 数列 2，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，… 的通项公式是______.

(4) 数列 2，$\frac{3}{2}$，1，$\frac{1}{2}$，… 的通项公式是______.

(5) 在 81 和 1 中间插入 3 个数，使这 5 个数成等比数列，则插入的 3 个数为______.

(6) $7+3\sqrt{5}$ 与 $7-3\sqrt{5}$ 的等比中项是______.

2. 选择题

(1) 数列$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是(　　).

(A) $a_n+a_{n+1}=$常数　　(B) $a_{n+1}-a_n=$常数

(C) $a_{n+1}-a_n=$正数　　(D) $a_{n+1}-a_n=$负数

(2) 数列$\{a_n\}$为等比数列的充要条件是(　　).

(A) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=$常数　　(B) $a_na_{n+1}=$常数

(C) $\frac{a_n}{a_{n+1}}=$正数　　(D) $\frac{a_n}{a_{n+1}}=$负数

(3) 若 -1 为方程 $mx^2+2nx+p=0(m\neq0,\ p\neq0)$ 的一个根，则(　　).

(A) $m=2n$　　(B) $m=p$

(C) m，n，p 成等比数列　　(D) m，n，p 成等差数列

(4) 等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=48$，那么 $a_6+a_7=$(　　).

(A) 12　　(B) 16

(C) 20　　(D) 24

(5) 已知数列$\{a_n\}$是等比数列，则下列等式中成立的是(　　).

(A) $a_8^2=a_2a_4$　　(B) $a_3^2=a_2a_4$

(C) $a_4^2=a_1a_7$　　(D) $a_2^2=a_1a_4$

3. 求数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，… 的前 10 项的和.

4. 已知等差数列的第 3 项是 -4，第 6 项是 2，求它的第 10 项.

5. 3 个正数成等差数列，其和为 15，若将这 3 个数分别加上 1，4，19 后，得到的 3 个数成等比数列，求这 3 个数.

6. 已知等差数列中，$d=2$，$a_n=1$，$S_n=-8$，求 a_1 和 n.

7. 梯子的最高一级宽是 33 cm，最低一级宽是 89 cm，中间还有 6 级，各级的宽度成等差数列，求中间各级的宽度.

8. 画一个边长为 2 cm 的正方形，再以这个正方形的对角线为边画第 2 个正方形，以第 2 个正方形的对角线为边画第 3 个正方形，这样一共画了 10 个正方形. 求：

(1) 第 10 个正方形的面积；

(2) 这 10 个正方形的面积的和.

测验题答案

1. (1) -25；　(2) 192；　(3) $\frac{1}{2^{n-2}}$；

(4) $a_n=\frac{5-n}{2}$；　(5) 27，9，3 或 -27，9，-3；

(6) ± 2.

2. (1) B；　(2) A；　(3) D；　(4) D；　(5) C.

3. $\frac{1\,023}{1\,024}$.

4. $a_{10}=10$.

5. 2，5，8.

6. $n=4$，$a_1=-5$.（提示：由通项公式，得 $a_1=3-2n$，由求和公式，得 $na_1=-16-n$，解得 $n=4$，$a_1=-5$.）

7. 梯子中间各级的宽从上到下依次是 41 cm，49 cm，57 cm，65 cm，73 cm，81 cm.

8. 这 10 个正方形的面积组成一个等比数列，且

$$a_1=2^2=4(\text{cm}^2),\ q=(\sqrt{2})^2=2,$$

所以：

(1) $a_{10}=4\times 2^9=2\,048(\text{cm}^2)$；

(2) $S_{10}=\frac{4\times(2^{10}-1)}{2-1}=4\,092(\text{cm}^2)$.

V 习题答案、提示和解答

练习 A 组(第 4 页)

1. 7.

2. C.

练习 B 组(第 4 页)

略.

练习 A 组(第 7 页)

1. $a_n=\frac{1}{2n}$.

2. 83.

练习 B 组(第 7 页)

1. C.

2. 1 981，1 993，2 005，2 017，2 029.

3. 1 981.

习题(第 8 页)

1. (1)1，8，27，64，125；　(2)5，-5，5，-5，5.

2. (1)$a_7=\frac{1}{49}$，$a_{10}=\frac{1}{100}$；　(2)$a_7=63$，$a_{10}=120$；

(3)$a_7=\frac{1}{7}$，$a_{10}=-\frac{1}{10}$；　(4)$a_7=-125$，$a_{10}=-1\ 021$.

3. (1)$a_n=2n$；　(2)$a_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$.

4. (1)6，12；　(2)8，64；　(3)1，36.

5. (1)$a_n=3n$；　(2)$a_n=-2(n-1)$；　(3)$a_n=\frac{n+1}{n}$；　(4)$a_n=\frac{1}{n^2}$.

6. (1)$a_{10}=110$，　$a_{31}=992$，　$a_{48}=2\ 352$；　(2) 第 20 项.

7. (1)$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=7$，$a_4=10$，$a_5=13$；

(2)$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，$a_4=16$，$a_5=32$；

(3)$a_1=3$，$a_2=6$，$a_3=3$，$a_4=-3$，$a_5=-6$；

(4)$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=\frac{5}{2}$，$a_4=\frac{29}{10}$，$a_5=\frac{941}{290}$.

练习 A 组(第 13 页)

1. (1)$a_7=27$；　(2)$a_{20}=-28$.

2. (1)$a_1=10$；　(2)$d=3$.

3. (1)298；　(2) $\frac{133}{4}$.

练习 B 组(第 13 页)

1. $a_n=7n-5$.

2. $a_{n+1}=-\frac{7n}{2}$.

3. $n=10$.

4. $a_8=-6$，$d=-4$.

练习 A 组(第 16 页)

1. (1)$S_{10}=500$；　(2)$S_{50}=2\ 550$；　(3)$S_{14}=-\frac{35}{6}$；　(4)$S_{26}=604.5$.

2. (1)$1+2+\cdots+1\ 000=\frac{(1+1\ 000)\times 1\ 000}{2}=500\ 500$；

(2)$2+4+\cdots+1\ 000=\frac{(2+1\ 000)\times 500}{2}=250\ 500$.

3. 设前 n 项的和为 77，则

$$-4n+\frac{n(n-1)}{2}\times 5=77.$$

解得 $n=7$ 或 $n=-\frac{22}{5}$(舍).

所以前 7 项的和为 77.

练习 B 组(第 17 页)

1. 因为 $a_1=7$，$a_8=35$，所以

$$35=7+(8-1)d.$$

解得 $d=4$.

因此这 6 个数是 11，15，19，23，27，31.

2. 设所有既是 6 的倍数又是三位正整数的数从小到大排列组成的数列为$\{a_n\}$，则这是一个公差为 6，首项为 102 的等差数列，所以通项公式为

$$a_n=102+(n-1)\times 6=6n+96.$$

由 $a_n\leqslant 1\ 000$ 即 $6n+96\leqslant 1\ 000$ 有 $n\leqslant 150$.

因此有 150 个三位正整数是 6 的倍数.

又因为

$$150\times 102+\frac{150\times(150-1)}{2}\times 6=82\ 350,$$

所以它们的和为 82 350.

习题(第 17 页)

1. (1)14.6.　(2)0.

2. (1)771；　(2)90.

3. 设所有三位正整数从小到大排成的数列为$\{a_n\}$，则其为一个公差为 1，首项为 100 的等差数列.

设 $a_n=999$，则由

$$999=100+(n-1)\times 1$$

可知 $n=900$.

即正整数集合中，有 900 个三位数. 它们的和为

$$900\times 100+\frac{900\times(900-1)}{2}\times 1=494\ 550.$$

4. 因为 $a_1=10$，$d=-3$，$a_n=-47$，所以

$$-47=10+(n-1)\times(-3).$$

解得 $n=20$.

因此所求和为

$$\frac{(10-47)\times 20}{2}=-370.$$

5. (1) 因为

$$54=20+(n-1)d,$$

$$\frac{(20+54)n}{2}=999.$$

所以 $n=27$，$d=\frac{17}{13}$.

(2) 因为

$$37a_1+\frac{37\times(37-1)}{2}\times\frac{1}{3}=629,$$

$$a_{37}=a_1+(37-1)\times\frac{1}{3}.$$

所以 $a_1=11$，$a_{37}=23$.

(3) 因为

$$\frac{5}{6}n+\frac{n(n-1)}{2}\times\left(-\frac{1}{6}\right)=-5,$$

$$a_n=\frac{5}{6}+(n-1)\left(-\frac{1}{6}\right).$$

所以 $n=15$，$a_{15}=-\frac{3}{2}$.

(4) 因为

$$-10=a_1+(15-1)\times 2,$$

$$S_{15}=\frac{[a_1+(-10)]}{2}\times 15,$$

所以 $a_1=-38$，$S_{15}=-360$.

6. 设此数列为 $a-d$，a，$a+d$，则

$$a-d+a+a+d=18,$$

$$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=116.$$

因此 $a=6$，$d=\pm 2$.

所以这三个数组成的数列为 8，6，4 或 4，6，8.

7. 因为 $a_1=-20$，$a_{50}=120$，所以

$$S_{50}=\frac{(-20+120)\times 50}{2}=2\ 500.$$

即前 50 项的和为 2 500.

8. 设前 $2n$ 个正奇数由小到大排成的数列为 $\{a_n\}$，则其为公差为 2，首项为 1 的等差数列. 因此

$$\begin{aligned}S_{2n}&=2n\times 1+\frac{2n\times(2n-1)}{2}\times 2\\&=4n^2.\end{aligned}$$

即所求和为 $4n^2$.

9. 因为 $a_1=-5$，$a_{n+2}=16$，$S_{n+2}=88$，所以

$$16=-5+(n+1)d,$$
$$88=\frac{(-5+16)(n+2)}{2}.$$

因此 $n=14$，$d=\frac{7}{5}$.

10. 因为

$$a_1+(a_1+d)=-6,$$
$$(a_k-d)+a_k=26,$$

所以 $a_1+a_k=10$.

又因为 $S_k=50$，所以

$$50=\frac{10\times k}{2},$$

解得 $k=10$.

练习 A 组(第 20 页)

1. (1)$a_4=-135$，$a_8=-10\ 935$；　　(2)$a_4=9.6$，$a_8=153.6$；

(3)$a_4=\frac{9}{32}$，$a_8=\frac{729}{8\ 192}$；　　(4)$a_4=\frac{1}{2}$，$a_8=\frac{1}{8}$.

2. (1)$a_1=2\ 916$；　　(2)$a_1=5$，$a_4=40$.

3. $q=3$.

4. (1)± 6；　　(2)± 8.

练习 B 组(第 21 页)

1. $a_1=1$，$a_4=27$.

2. 9.

3. $8\sqrt{5}$，40，$40\sqrt{5}$ 或 $-8\sqrt{5}$，40，$-40\sqrt{5}$.

练习 A 组(第 23 页)

1. (1)189；　　(2) $\frac{31}{2}$.

2. 因为 $a_5=1\times 2^{5-1}=16$，所以

$$a_5+a_6+\cdots+a_{10}=\frac{16(1-2^6)}{1-2}=1\ 008.$$

练习 B 组(第 23 页)

1. $q=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$，$S_5=\frac{279}{4}$ 或 $\frac{99}{4}$.

2. 因为

$$1\ 296=6^{n-1}a_1,$$
$$1\ 554=\frac{a_1(1-6^n)}{1-6},$$

所以 $a_1=6$，$n=4$.

3. 因为

$$a_1q^5-a_1q^4=48,$$

$$a_1q^5+a_1q^4=48,$$

所以 $q=2$，$a_1=1$. 因此

$$S_{10}=\frac{1\times(1-2^{10})}{1-2}=1\ 023.$$

习题(第 23 页)

1. (1)$a_7=-729$；　(2)$a_1=27$，$q=\frac{2}{3}$ 或 $a_1=-27$，$q=-\frac{2}{3}$.
2. (1)± 60；　(2)± 2.
3. 27，81.
4. (1)$q=-4$，$S_4=76.5$；　(2)$a_1=2$，$a_5=\frac{1}{8}$.
5. 设这个数列为 $\frac{a}{q}$，a，aq，则

$$\frac{a}{q}+a+aq=14,$$

$$\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=64.$$

所以 $a=4$，$q=2$ 或 $\frac{1}{2}$.

因此这个数列为 2，4，8 或 8，4，2.

6. 因为

$$2+2^2+\cdots+2^n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2,$$

$$3\times5^{-1}+3\times5^{-2}+\cdots+3\times5^{-n}=\frac{3\times5^{-1}\times(1-5^{-n})}{1-5^{-1}}$$

$$=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right),$$

所以

$$\text{原式}=2^{n+1}-2-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

$$=2^{n+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5^n}-\frac{11}{4}.$$

习题(第 25 页)

1. 是等差数列，且公差为 $\frac{1}{2}$.
2. $23\frac{1}{2}$ cm，24 cm，$24\frac{1}{2}$ cm，25 cm，$25\frac{1}{2}$ cm，26 cm，$26\frac{1}{2}$ cm，27 cm，$27\frac{1}{2}$ cm，28 cm，$28\frac{1}{2}$ cm，29 cm，$29\frac{1}{2}$ cm，30 cm.
3. 2 km，4 km，8 km 高度的气温分别是 2 ℃，−11 ℃，−37 ℃.
4. 中间三个皮带轮的直径分别为 192 mm，168 mm，144 mm.
5. 1 140 个.
6. 570 块.
7. 2.43 km^2.

8. 128 个.

9. 16 017 元.

10. 其余的齿数分别为 27，30，33，36，39，42.

11. 52.0 kPa.

12. 33.3%.

第七章　平面向量

Ⅰ　教学要求

1. 了解向量的概念．理解求向量和的三角形法则和平行四边形法则．理解向量的减法运算．理解向量加法的结合律与交换律．

2. 理解数乘向量的运算及其运算律．理解向量平行的条件．了解平行向量基本定理和平面向量分解定理．

3. 了解向量的直角坐标和点的坐标之间的关系．熟练掌握向量的直角坐标运算、距离公式、中点公式．会求满足一定条件的点的坐标．了解平行向量坐标间的关系．理解向量的内积运算．

4. 了解向量在其他学科中的应用，会应用向量解决简单的应用问题．

Ⅱ　教材分析和教学建议

向量概念来自对物理学中力、速度以及加速度等的研究．在选定表示单位力的一个长度后，任何一个力都可用具有确定长度和方向的有向线段来表示，并可用平行四边形法则求两个力的和．这样的有向线段还可分解为平面内给定的两条有向线段之和，而每个方向上的有向线段又都可用一个数来表示，所以任何一个力都可以用两个数来表示．对于速度、加速度也可以同样处理．于是，有关力、速度和加速度等的任一运算都可以用相应于两个方向的数的运算来替代．

在数学、物理学和电学理论发展的影响下，人们开始广泛地讨论这种具有方向和长度的有向线段的一般理论．这种有向线段被称为向量．向量理论的研究可分为向量代数和向量分析两大方向，向量理论已成为研究几何学的重要工具，也是近代数学中最有用的代数结构之一．向量理论在其他科学中的应用也越来越广泛．

向量不仅是应用广泛的数学知识，也是进一步学习数学的基础．我们把向量引入中等职业学校教材，首先是为专业课、技能课提供方便的数学工具，其次是为学习复数、解析几何等做准备．

本章的主要内容包括：向量的概念，向量的加、减和数乘向量运算及其运算律，向量的内积，向量运算的直角坐标表示．

本章教学的重点是：向量的概念的引入，平面向量分解定理，向量的内积．

本章教学的难点是：向量的概念教学，平面向量分解定理在几何中的应用．

本章共分为五大节．第一大节“向量的加减运算”通过位移等实例引入了向量的概念以及向量的有向线段表示，讨论了向量的加减运算；第二大节“数乘向量”利用向量的加法讨论了向量与数的乘法运算，并给出了平行向量基本定理；第三大节“向量的坐标表示”在平面向量基本定理的基础上给出了向量的坐标表示，以及向量加减法的坐标运算；第四大节“向量的内积及其运算”通过力做功的例子引入了向量的内积运算，并给出了它的坐标运算；最后一节“向量的应用”举例说明了向量在力学等中的应用．

本章教学约需 12 课时，具体分配如下(仅供参考)：

7.1.1	位移与向量的表示	1 课时
7.1.2	向量的加法	2 课时
7.1.3	向量的减法	1 课时
7.2	数乘向量	2 课时
7.3.1	向量的分解	1 课时
7.3.2	向量的直角坐标运算	2 课时
7.4.1	向量的内积	1 课时
7.4.2	向量内积的坐标运算与距离公式	1 课时
7.5	向量的应用	1 课时

7.1.1　位移与向量的表示

1. 在几何学中很难给方向这个概念下一个确切的定义，本章把方向作为已知概念．在几何学中，通常用一组平行直线表示空间的一个方向，用一组平行射线表示一个指向或方向．方向相同或相反，则表示方向的射线或直线一定平行；反之，一组直线或射线平行，则它们表示的方向相同或相反．要让学生了解方向与平行的关系，以便加深学生对平行的理解．

2. 在教材分析和教学建议中，我们已阐述了向量概念的起源，用具有大小和方向的量来说明向量，这是向量最原始的含义．以后，向量的概念通过向量的运算特性推广为一般线性空间的元素．在这一章的教学中，仍要紧紧把握向量的大小、方向两个要素，以展开向量的种种概念，为正确理解向量和向量运算打下基础．

3. 向量在物理学中分为三种基本类型，具有大小，但无特定位置的向量称为自由向量；沿直线作用的向量称为滑动向量；作用于一点的向量称为胶着向量．在本章研究的向量主要是自由向量，其他两种向量一般不涉及，因此教学中不必提及向量的这三种类型．由于我们研究的只是自由向量，当用有向线段表示向量时，应强调“同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量”．

4. 本小节的重点和难点都是向量相等的概念．只有向量相等的概念十分清楚，才能熟练地进行向量的加法和减法运算．

5. 用位置向量可确定一点相对于另一点的位置，这是用向量研究几何的依据，无论在数轴上，还是在建立了坐标系的平面上，通过相对于原点的位置向量可定义点的坐标，

通过两点的位置向量又可计算任一向量的坐标. 因此教学中应对位置向量给予足够的重视. 这一节教学时，教师要使学生建立起位置向量的概念，并能说清一点相对于另一点的位置向量(例如，点 A 相对于点 B 的位置向量是$\overrightarrow{BA}$)，还要使学生能根据位置向量说清一点相对于另一点的位置. 初学向量的学生在谈 A 地相对于 B 地的位置时，往往只谈两地的距离，而不谈方向，通过这种训练可加强学生对向量的大小、方向两要素的理解.

6. 建议通过实例讲解位置向量的概念.

7.1.2 向量的加法

1. 本小节的重点是向量加法的作图法则，以及向量加法的运算律(交换律和结合律).

2. 用质点位移的合成引入向量的加法，是一个很成功的方法. 学生比较容易理解，并可以克服由数量加法到向量加法所产生的困扰.

3. 在证明向量加法的交换律时，应用了一个四边形是平行四边形的充要条件：一组对边平行且相等. 证明前可复习这一定理. 证明时，要使学生清楚每一步的理由. 由加法交换律的证明又可得到求两个向量和的平行四边形法则.

向量加法结合律的证明用到两个向量求和的平行四边形法则，可让学生自己验证，以巩固这一法则. 也可在课上对照图形做简单说明，课下由学生书面完成.

4. 公式$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 不依赖于具体图形，应让学生掌握.

7.1.3 向量的减法

1. 本小节的重点是向量减法的作图法则.

2. 向量的减法是通过实例和加法的逆运算引入的. 教材先引入了相反向量的概念，把减法运算转化为加法运算. 因此，加法运算是最基本的运算.

3. 向量的加减法完全不同于数量的加减法. 学生对向量加减法的掌握要有一个过程，必须反复地练习才行. 教学时，应把求向量和、差的作图法则的特点说清楚. 例如，向量加法的三角形法则的特点是，各个加向量首尾相接，和向量是首指向尾. 向量减法的三角形法则的特点是，减向量和被减向量同起点，差向量是由减向量指向被减向量. 学生对差向量是由减向量指向被减向量常会弄错，在教学时可让学生用“减向量与差向量的和等于被减向量”来检查自己所作差向量是否正确.

4. 教材中的②式$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，用位置向量的语言说明向量的减法规律十分有用. 在讲解例 1 和例 2 时，要反复使用“任一向量等于它的终点向量减去它的起点的向量”(相对于同一个基点)这个法则. 这对学生熟练掌握减法法则很有帮助.

7.2 数乘向量

1. 教材对数乘向量的引入比较细致. 首先通过相同向量的连加引入整数乘向量的概

念，然后通过等分向量引入分数乘向量的概念，然后再给出数乘向量的定义. 在学生已有了感性认识的基础上，讲数乘向量的定义时，首先应强调数乘向量的结果是一个向量，然后分别说明它的长度和方向，从而明确数乘向量的几何意义.

2. 数乘向量的运算律：

(1)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(分配律)；

(2)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$(结合律).

教材没有证明这两条运算律，建议对它们分别作如下说明：

在一条直线上位移了 $\lambda\boldsymbol{a}$，又位移了 $\mu\boldsymbol{a}$，其结果是位移了$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$；

一个向量 $\boldsymbol{a}$ 伸缩了 μ 倍，再伸缩 λ 倍，其结果是伸缩了 $\lambda\mu$ 倍.

3. 教材中，数乘向量的分配律$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$未严格证明. 由于向量的加法和数乘向量的运算与多项式运算类似，学生容易接受. 向量对于数乘的分配律，可用加法结合律，先对 λ 是整数、分数进行证明，对 λ 是无理数的情形，可用极限理论进行严格证明. 由于相似三角形的判定与性质和数乘向量的分配律是等价的，在一般教科书上，分配律的证明，使用了相似三角形的判定与性质(可参考大学空间解析几何教材). 教材是以相似系数为 3 的具体例子，用分配律判定两个三角形相似的.

4. 最后给学生总结目前学到的有关向量的运算：加法、减法和数乘向量. 加、减和数乘向量的综合运算，叫做向量的线性运算.

5. 平行向量基本定理是一个非常重要的定理，它是建立轴上向量的坐标及运算的理论依据. 这一定理在教材中未给出证明，现证明如下.

设 $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$：

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则也有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

如果还存在另一个实数 λ'，使 $\boldsymbol{b}=\lambda'\boldsymbol{a}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda'\boldsymbol{a}$，即

$$(\lambda-\lambda')\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda-\lambda'=0$，即 $\lambda=\lambda'$.

其余结论的证明是简单的，这里不再赘述.

以上证明对学生不作要求.

6. 平行向量基本定理给出了平行向量的另一等价的代数式，应用这一定理，可以通过向量的运算解决几何中的平行问题. 讲解例题时应使学生知道这一点.

7. 本小节的重点是平行向量基本定理. 要使学生知道判断两个向量平行的一个基本方法是，一个向量是否能写成另一个向量的数乘向量的形式.

7.3.1　向量的分解

1. 本小节通过具体的数值例子，归纳出了平面向量的分解定理.

这一定理的证明依据平行向量的基本定理. 下面给出定理的证明，供教师参考.

平面向量分解定理　如果 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面上的两个不平行向量，那么对该平面上的任一向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一的一对实数 a_1，a_2，使

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2.$$

证明　在平面上任取一点 O，作 $\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，因为 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不平行，所以 O，E_1，E_2 不共线.

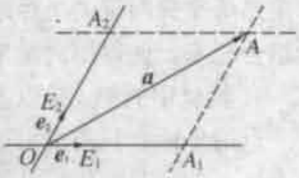


图 7-1

如果点 A 不在 OE_1，OE_2 上，如图7-1所示，那么通过点 A 作直线 $AA_1 \parallel OE_2$，交直线 OE_1 于点 A_1，过点 A 作直线 $AA_2 \parallel OE_1$，交直线 OE_2 于点 A_2，于是 $\overrightarrow{OE_1} \parallel \overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OE_2} \parallel \overrightarrow{OA_2}$，因而存在两个实数 a_1，a_2 使

$$\overrightarrow{OA_1}=a_1\boldsymbol{e}_1,$$
$$\overrightarrow{OA_2}=a_2\boldsymbol{e}_2,$$

而 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$，所以

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2.$$

如果还有 $\boldsymbol{a}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2$，则

$$a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2,$$
$$(a_1-b_1)\boldsymbol{e}_1+(a_2-b_2)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不平行，所以 $a_1-b_1=0$，$a_2-b_2=0$，即

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2.$$

如果点 A 在直线 OE_1 或 OE_2 上，易知存在唯一的 a_1 或 a_2，使

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2 \text{ 或 } \boldsymbol{a}=0\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2.$$

上述证明对学生不作要求，但也可根据图 7-1 作适当的直观分析.

2. 平面向量分解定理有十分重要的意义. 这个定理告诉我们，在平面上取定两个不平行的向量作为基向量，则平面上的任一向量，都可以表示为基向量的线性组合. 于是向量之间的运算转化为对两个向量的线性运算. 由此可见，将平面上的向量表示为基向量的线性组合是十分重要的基本技能. 训练这种技能是本小节的教学重点之一. 例题就是这样的一个例子，这一小节的练习 A 和 B 中也有这样的练习.

7.3.2　向量的直角坐标运算

1. 本小节是由平行向量的基本定理得到向量在直角坐标系中的分解，从而得到向量在直角坐标系中的坐标概念. 向量在直角坐标系中的坐标分量分别是向量在 x 轴和 y 轴上投影的数量.

2. 平面向量的坐标与点坐标的关系是本节的教学重点之一. 由于平面上任一点相对于原点的位置向量确定了该点的位置，因而位置向量就成为建立向量坐标与点的坐标之间联系的桥梁. 一个基本的事实是："平面上任一点的坐标是该点相对于原点的位置向量 $\overrightarrow{OA}$

的坐标，反之亦然．”由这一事实及重要的向量等式$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，可得到平面上任一向量$\overrightarrow{AB}$的坐标，即终点的坐标减始点的坐标．教师可通过例 3，强调这一结果．通过练习熟练掌握求向量坐标的方法．

3．向量的直角坐标运算公式是通过对基向量的运算得到的．本章的第二个重点是使学生熟练掌握向量的坐标运算．向量的坐标运算使向量运算完全数量化，它将数与形紧密地结合起来，使得用向量来求解几何和物理问题更加方便．

4．教材中的例 4 是以上所说重点的综合运用．它给出一种重要的解题思路：要求平面上一点的坐标，只需求出该点位置向量的坐标．同时例 4 给出了运用向量运算求定比分点的办法．定比分点坐标计算公式在教材中没有引入．定比分点公式学起来有一定的困难，也不容易记住，所以把它精简了．实际上利用例 4 的方法求定比分点的坐标并不费事，应使学生理解并掌握．

5．平行向量基本定理已把向量平行的条件以数乘向量的形式给出，掌握了向量的坐标运算，便得出以坐标形式表达的向量平行的条件，这样判断两向量是否平行更为便利，应使学生理解并掌握．

7.4.1 向量的内积

1．两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的内积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，揭示了长度、角度及向量投影之间的深刻联系，它反映了欧氏空间所具有的最本质的特征．

2．内积的定义是教学中的难点．教材是通过力做功的实例引入的，为了减少理解的困难可用图形着重强调，两个向量的内积等于一个向量的长度与另一向量在这个向量方向上正射影数量的乘积，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle),$$

于是，两个向量的内积变成了两个数量的积，这样学生就比较容易理解了．这种解释还可加强学生对内积所表达的几何意义的理解．教师们可酌情处理．

3．向量夹角是内积运算的基础，要求学生掌握．

4．教材根据内积的定义，直接得到内积运算的四条重要性质．这四条性质是欧氏空间中最基本的四个度量公式．教师们可引导学生讲理．

7.4.2 向量内积的坐标运算与距离公式

1．向量内积的坐标运算是本节的重点，证明$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$的关键是根据平面向量分解定理，把向量$\boldsymbol{a}$写成$a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$的形式．因此讲课时要先复习平面向量分解定理．

2．内积运算之所以有用，主要是因为它具有一组运算律，特别是内积分配律．教材没有给出两个向量内积的重要性质的证明，在学习了坐标运算后，可以要求学生自己证明．

设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，$\boldsymbol{e}$是$\boldsymbol{b}$方向上的单位向量，则：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$.

利用这个公式可求一个向量在另一个向量方向上的正射影分量.

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$.

这是向量垂直的充要条件. 利用向量的内积运算解垂直问题非常方便.

(3) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

这是向量长度的计算公式.

(4) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow(a_1b_1+a_2b_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$.

这是柯西不等式，由此可看到它的几何意义.

为了精简课时，教材对以上四组公式及其应用都未详细展开，只是通过实际例子说明计算方法. 教师可根据学生情况及所学专业作适当的调整，但教师对向量内积应有深刻的理解.

3. 利用单位向量证题是一种重要的方法. 教学时，应注意总结，让学生逐步掌握.

4. 由于向量有一套优良的运算律，用向量工具处理长度和角度等问题特别方便.

7.5 向量的应用

1. 本节主要讲解了力向量与速度向量的有关知识.

2. 应注意的是，本节中的力向量知识，主要是物理中力的分解与合成的知识.

3. 本节中力向量的知识是不考虑作用点的.

4. 公式"实际速度=航行速度+水流速度"学生不一定知道，教师在讲例2时可先介绍相关知识.

Ⅲ 教学设计

7.1.1 位移与向量的表示

【教学目标】

1. 了解有向线段的概念，理解并掌握向量的有关概念和向量相等的含义.

2. 会用有向线段表示向量，并能根据图形判定向量是否平行、相等.

3. 通过教学培养学生数形结合的能力.

【教学重点】

向量的概念.

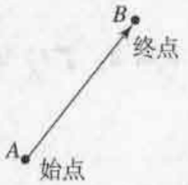
【教学难点】

向量的概念.

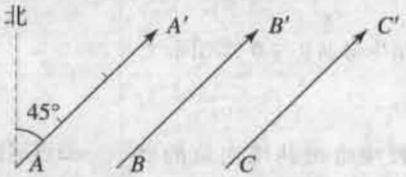
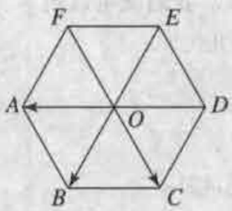
【教学方法】

这节课主要采用启发式教学和讲练结合的教学方法．从物理背景和几何背景入手，建立起学习向量概念及其表示方法的基础，结合丰富的实例，归纳、概括向量的有关概念，使学生容易理解．同时结合习题让学生加深对相等向量的理解．

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	阅读教材 P31 前三自然段，认识数量与向量的不同． 举出向量的其他例子．	教师提出问题． 学生阅读教材，回答数量与向量的不同：向量不仅有大小而且有方向；数量只有大小． 学生回顾物理中学过的向量：力、速度等．	通过阅读教材中的例子与物理中学过的其他实例，由具体到抽象，概括、认识向量概念，符合职校学生的认知能力．
新课	1. 向量的概念 具有大小和方向的量叫做向量． 2. 向量的表示方法 问题 1　如何描述平面上一点的位移？  (1) 用有向线段来表示向量．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向． (2) 用有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示向量时，我们也称为向量$\overrightarrow{AB}$；在印刷时，向量常用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，… 来表示，书写时，则常用带箭头的小写字母$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，… 来表示． 3. 自由向量 只有大小和方向，而无特定的位置．	教师结合教材图 7-1，引导学生体会用有向线段可以表示位移这样具有大小和方向的向量． 让学生画有向线段描述位移："北偏东 45°，3 个单位．" 教师给出向量表示法． 让学生在自己画好的向量上标注$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$． 教师巡视，强调字母上面加箭头，$\overrightarrow{AB}$一定要始点写在终点前． 教师引导学生体会位移与力这两种向量的不同，位移只有大小和方向，而没有作用点，可以平移．	结合教材中实例引入有向线段，学生感觉自然，易于接受． 通过作图进一步加深对向量两个要素以及为什么可以用有向线段表示向量的认识． 让学生自己动手标注$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$，易于发现学生常犯的错误，例如少箭头等，教师及时指正． 比较力与位移两种向量，更深刻地认识自由向量．

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
			
	4. 向量的两要素 大小与方向.	学生认识总结向量的两要素.	让学生认识向量的两要素很关键.
	5. 相等向量 同向且等长的有向线段表示同一向量，或相等的向量. 如上图中，有向线段$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$都表示同一向量$\boldsymbol{a}$，这时可记作$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\boldsymbol{a}$.	教师引导给出相等向量的概念.	紧扣两要素，学生能很轻松的理解相等向量的概念.
新课	例　如图所示，设O是正六边形$ABCDEF$的中心，分别写出与向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$相等的向量. 解　$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DO}$； $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EO}$； $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{FO}$. 	学生看图解答.	
	练习一 已知D，E，F是$\triangle ABC$三边AB，BC，CA的中点，分别写出与$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FD}$相等的向量.	学生练习巩固.	
	6. 向量的模 已知向量$\overrightarrow{AB}$，则有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度，叫做向量$\overrightarrow{AB}$的长度(或模)，记作$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$.	师：线段长度可以比较大小，向量可以吗？教材图 7-3 中$\lvert\overrightarrow{AA'}\rvert=$? 学生熟悉向量的模的记法并思考回答问题.	学生经常发生例如$\overrightarrow{AB}=3$的错误，一定要强调向量与向量模的不同.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	7. 零向量 长度等于零的向量，记作**0**．零向量的方向是不确定的．	学生辨别 0 与 **0** 的不同．	
	8. 共线向量(或平行向量) 如果表示一些向量的有向线段所在直线互相平行或重合，则称这些向量平行或共线．平行向量方向相同或相反，向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于向量 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$． 我们规定：零向量与任一向量平行，即对任一向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{0} \parallel \boldsymbol{a}$．	教师给出共线向量的概念． 学生辨析向量平行与直线平行的区别以及相等向量与共线向量的不同．	通过辨析向量平行与直线平行的区别，进一步加深对共线向量以及自由向量与位置无关的认识．
	9. 位置向量 问题 2　如何用向量确定平面内一点的位置？ 任给一定点 O 和向量 $\boldsymbol{a}$，过点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$， 则点 A 相对于点 O 的位置被向量 $\boldsymbol{a}$ 所唯一确定．这时向量 $\overrightarrow{OA}$ 通常称为点 A 相对于点 O 的位置向量． 例如 $\overrightarrow{OA}$ ＝“东偏南 50°，114 km”就表示天津相对于北京的位置．	教师引导给出位置向量概念． 师：有了位置向量的概念，我们就可以利用位置向量确定一点相对于另一点的位置，这样，我们就可以用向量来研究几何了．	引入位置向量为利用向量来研究几何问题提供理论依据．
	练习二 在平面上任意确定一点 O，点 P 在点 O“东偏北 60°，3 cm”处，Q 在点 O“南偏西 30°，3 cm”处，画出点 P 和 Q 相对于点 O 的位置向量．	学生练习巩固．	
小结	1. 向量的概念与向量的长度． 2. 向量的两要素． 3. 向量的表示方法． 4. 相等向量与共线向量． 5. 零向量． 6. 位置向量．	师生合作．	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行．
作业	教材 P34 练习 B 组第 1 题．		巩固．

7.1.2 向量的加法

【教学目标】

1. 理解并掌握向量的加法运算并理解其几何意义，掌握向量加法的运算律.
2. 会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则求作两个向量的和.
3. 通过教学，养成学生规范的作图习惯，培养学生数形结合的能力.

【教学重点】

利用向量加法的三角形法则和平行四边形法则，作两个向量的和向量.

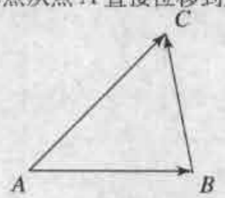
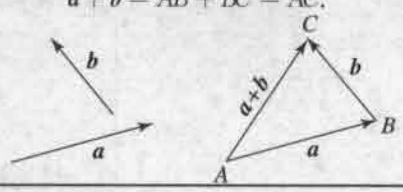
【教学难点】

对向量加法定义的理解.

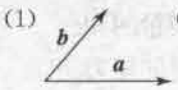
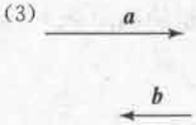
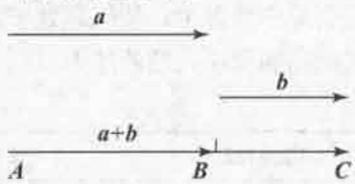
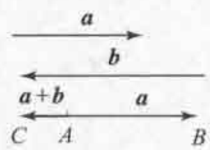
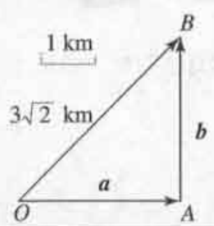
【教学方法】

这节课主要采用启发式教学和讲练结合的教学方法. 创设问题情境，激发学生的好奇心与求知欲. 并在教学过程中始终注重数形结合，引导学生思考，使问题处于学生思维的最近发展区，以此较好地培养学生发现问题、提出问题和解决问题的能力.

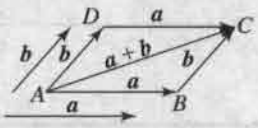
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	请观察： (1) 动点从点 A 位移到点 B，再从点 B 位移到点 C； (2) 动点从点 A 直接位移到点 C.  结论：动点从点 A 直接位移到点 C 与两次连续位移的效果相同. 即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.	学生观察现象，得到结论.	从学生熟悉的位移(向量) 入手，观察现象，得到结论，引入向量加法概念，学生容易接受，降低了新课教学的起点.
新课	1. 向量加法的三角形法则 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面上任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作向量$\overrightarrow{AC}$，则向量$\overrightarrow{AC}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量. 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.  	教师引导学生由位移求和得到向量加法的三角形法则. 师生共同总结归纳三角形法则的规律.	

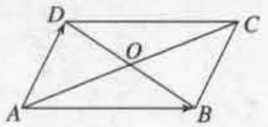
续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	练习一 已知下列各组向量，求作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$：   	学生做练习巩固，并在作图中思考，当向量平行即不能构成三角形时，应如何处理？	学习新知后紧跟练习，有利于帮助学生掌握向量加法的三角形法则．对于作图中学生的难点两向量平行时求和的问题，下面教师将重点讲解．
新课	当两个向量同向时：  $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$ 当两个向量反向时：  $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$ 对于零向量与任一向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$	师生共同完成． 教师提示学生关注和向量与已知向量的长度关系．	为教材 P37 练习 A 组练习 3 奠定基础．
	例　某人先位移向量 $\boldsymbol{a}$：“向东走 3 km”，接着再位移向量 $\boldsymbol{b}$：“向北走 3 km”，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$． 解　如下图，选择适当的比例尺，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$． 	教师引导学生完成例题，并再次强调向量的两要素． 学生通过解答，进一步熟悉向量加法的三角形法则，巩固向量的两要素．	虽然学生已知向量有两要素，但认识还是不深刻，通过例题再次巩固． 以学生为主，完成求和任务，以熟悉三角形法则．

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	则 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$， $\lvert\overrightarrow{OB}\rvert=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$(km). 又$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角是 45°，所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$表示“向东北走 $3\sqrt{2}$ km”.		
	多个向量求和法则：首尾相接，自始而终. 以四个向量为例说明： 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$. 在平面上任选一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{d}$. 则$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.	教师引导给出多个向量求和法则.	
新 课	2. 向量的运算律 (1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$； (2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. 下面我们来证明向量加法交换律. 证明　当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行时，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 	教师提示类比数与式的运算律来记忆. 学生记忆.	类比学习.
	再作$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，连接 DC，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形(为什么？)，于是$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$. 因此 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}$， 即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. 对于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行的情况，请同学们自己验证.	教师引导解答.	
	3. 向量加法的平行四边形法则 在上述证明过程中，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，如果 A，B，D 不共线，以	师生共同完成.	由运算律的推导过程自然地引出

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则对角线上的向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 我们把这种求两个向量和的作图法则叫做向量加法的平行四边形法则. 练习二 如图所示是平行四边形，化简：  (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$； (2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}$； (3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$.	 学生练习巩固，教师巡视指导.	平行四边形法则，学生不感突兀，易于接受. 强化训练.
小结	1. 向量求和的法则：三角形法则、平行四边形法则. 2. 向量加法的运算律.	师生合作.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.
作业	教材 P37 练习 B 组第 1，2 题.		巩固.

7.1.3 向量的减法

【教学目标】

1. 理解并掌握向量的减法运算并理解其几何意义，理解相反向量.
2. 通过教学，养成学生规范的作图习惯，培养学生数形结合的能力.

【教学重点】

向量减法的三角形法则.

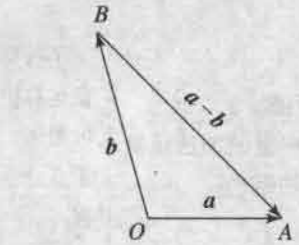
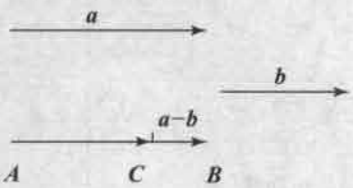
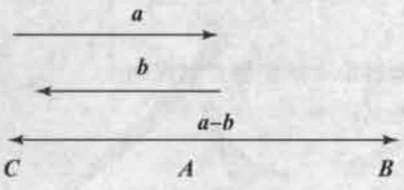
【教学难点】

理解向量减法的定义.

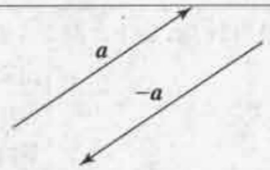
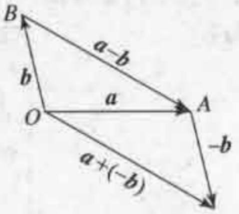
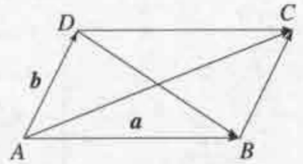
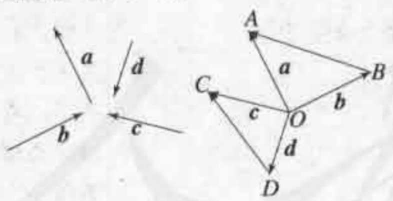
【教学方法】

这节课主要采用启发式教学和讲练结合的教学方法. 由实例引入，创设问题情境，教师引导学生由向量加法得到向量减法. 并在教学过程中始终注重数形结合，对比教学，使问题处于学生思维的最近发展区，较好地培养学生发现问题、提出问题和解决问题的能力.

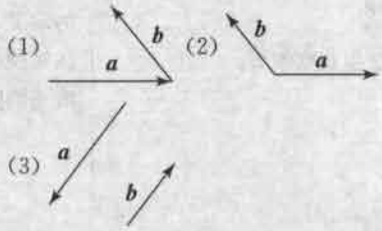
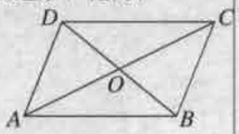
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	在某地的一条大河中，水流速度为 v_1，摆渡船需要以 v_2 的实际航速到达河对岸，那么摆渡船自身应以怎样的航行速度行驶呢？	教师提出问题，引入课题. 学生思考.	从实际生活经历出发，激发学生的学习兴趣，同时体现向量的应用价值.
新课	1. 向量减法法则 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则由向量加法的三角形法则，得 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，我们把向量 $\overrightarrow{BA}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.  两个向量的差是减向量的终点到被减向量的终点的向量. 当两个向量同向时：  $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. 当两个向量反向时：  $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. 2. 相反向量 与向量 $\boldsymbol{a}$ 等长且方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.	教师引导学生由向量加法得到向量减法. 学生比较向量加法的三角形法则与向量减法的作图法则的不同，总结规律. 师生合作完成. 师生合作完成.	在向量加法的基础上引入减法定义和作图法则，符合学生认知规律，有利于减法运算的掌握. 比较学习，印象深刻. 有向量加法的基础，学生解决这类问题应该更轻松，所以建议由学生为主教师为辅来完成. 但向量加法运算和减法运算又有不同，在加法知识先入为主的思维障碍下，有些学生加减法会混淆，所以教师一定要引导学生来区分两者，加深印象.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
			
	思考：向量减法是加法运算的逆运算吗？ 	教师作图，引导学生完成证明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.	
新 课	例1　已知▱$ABCD$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$分别表示向量$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{DB}$.  解　连接AC，DB，由向量求和的平行四边形法则，有$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 由减法定义，得$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.	教师给出问题. 学生根据向量的加法运算和减法运算完成解答.	平行四边形是向量运算中经常遇到的图形，此题作为重点让学生熟练掌握.
	例2　已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$，求作向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$.  解　在平面内任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，作向量$\overrightarrow{BA}$，则$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$. 作$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，作向量$\overrightarrow{DC}$，则$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$.	教师给出问题. 学生作图解答. 教师结合学生解答情况纠错总结.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	练习 1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.  2. 如图是平行四边形，化简： (1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$； (2) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$； (3) $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.  3. 已知 $\square ABCD$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别表示以下向量 (1) $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CA}$；　(2) $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CA}$.	学生练习巩固.	练习中作图与化简两类题型都要练到，使学生对减法法则认识更加深刻.
小结	1. 向量的减法法则. 2. 相反向量.	师生合作.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.
作业	教材 P39 习题第 1，2 题.		巩固.

7.2 数乘向量

【教学目标】

1. 通过实例掌握数乘向量的运算，并理解其几何意义，掌握数乘向量运算的运算律.
2. 理解并掌握平行向量基本定理.
3. 通过教学，养成学生规范的作图习惯，培养学生数形结合的能力.

【教学重点】

数乘向量运算及运算律与平行向量基本定理.

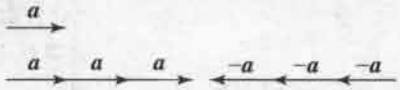
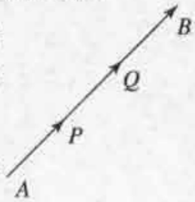
【教学难点】

对数乘向量定义与平行向量基本定理的理解.

【教学方法】

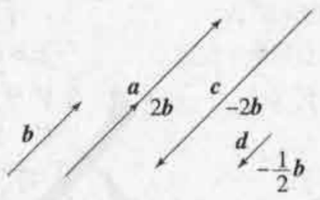
这节课主要采用启发式教学和讲练结合的教学方法. 在向量加法的基础上引入数乘向量的定义，教学过程中紧扣向量的两要素分析定义，始终注重数形结合，引导学生思考，使问题处于学生思维的最近发展区，以此较好地培养学生发现问题、提出问题和解决问题的能力.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，求作： (1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$； (2)$(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$.  请观察 $3\boldsymbol{a}$ 与 $-3\boldsymbol{a}$ 是否还是一个向量，它的长度与方向有何变化. 2. 已知$\overrightarrow{AB}$，把线段 AB 三等分，分点为 P，Q，则$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{BP}$ 与$\overrightarrow{AB}$ 的关系如何？  	教师提出问题，引入课题. 学生观察解答.	在向量加法的基础上引入数乘向量的定义，符合学生认知规律，有利于概念的同化.
新课	1. 数乘向量的定义 实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 向量 $\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\ \lambda\neq 0)$ 的长度与方向规定为： (1) $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=\|\lambda\|\|\boldsymbol{a}\|$； (2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 当 $\lambda=0$ 时，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$. 2. 数乘向量的几何意义 把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向或 $\boldsymbol{a}$ 的反方向，长度放大或缩小. 如 $2\boldsymbol{a}$ 的几何意义就是沿着向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，长度放大到原来的 2 倍. 练习一 任作向量 $\boldsymbol{a}$，再作出向量 $-3\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$，并说出它们的几何意义. 3. 数乘向量运算的运算律	教师由具体例子引导学生得到数乘向量的定义. 师生合作完成.	培养学生由特殊到一般的归纳总结能力. 紧扣向量的两要素分析定义，便于理解向量的几何意义.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	设 λ，$\mu\in\mathbf{R}$，有： (1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$； (2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$； (3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. 请观察，数乘向量运算律与实数乘法运算律有什么相似之处？	教师提出问题. 学生观察解答.	
	例 1　计算下列各式： (1) $(-2)\times\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$； (2) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$； (3) $(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. 解　(1)　$(-2)\times\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ $=\left(-2\times\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$； (2) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ $=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b}$ $=(2-3)\boldsymbol{a}+(2+3)\boldsymbol{b}$ $=-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$. (3) $(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ $=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}-(\lambda+\mu)\boldsymbol{b}-(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}-$ $(\lambda-\mu)\boldsymbol{b}$ $=(\lambda+\mu-\lambda+\mu)\boldsymbol{a}-(\lambda+\mu+\lambda-\mu)\boldsymbol{b}$ $=2\mu\boldsymbol{a}-2\lambda\boldsymbol{b}$.	师生合作完成.	类比学习.
	练习二 化简： (1) $2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$； (2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.	学生练习巩固. 教师引导学生完成.	有实数运算法则做基础，学生解决这部分题目很容易，提醒学生向量上加箭头.
	例 2　设 $\boldsymbol{x}$ 是未知向量，解方程 $5(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$. 解　原式可变形为 $5\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$， $8\boldsymbol{x}=-5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，		

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	$x=-\frac{5}{8}a+\frac{3}{8}b$.		
	练习三 解关于 x 的方程： (1)$3(a+x)=x$； (2)$x+2(a+x)=0$.	学生练习巩固.	
	例 3　已知$\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{AB}$，说明向量$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OB'}$的关系. 解　因为 $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AB}$ $=3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})=3\overrightarrow{OB}$. 所以$\overrightarrow{OB'}$与$\overrightarrow{OB}$共线且同方向，长度是$\overrightarrow{OB}$的 3 倍.	教师给出问题并引导学生解答. 学生根据向量加法法则及数乘向量定义完成解答.	由本例引入平行向量定理，由特殊到一般，便于学生接受.
新课	4. 平行向量基本定理 如果 $a=\lambda b$，则 $a//b$；反之如果 $a//b$，且 $b\neq 0$，则一定存在一个实数 λ，使 $a=\lambda b$. 例如，如果 $a=2b$，则 $a//b$；如果 $c=-2b$，则 $c//b$；如果 $d//b$，且 d 的长度是 b 的一半，并且方向相反，则 $d=-\frac{1}{2}b$. 	教师由上例引导学生推广到一般的平行向量.	
	5. 非零向量 a 的单位向量 与 a 同方向且长度为 1 的向量，称为非零向量 a 的单位向量. 易知，a 的单位向量为$\frac{a}{\|a\|}$.		

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例 4　若 MN 是 $\triangle ABC$ 的中位线，求证： $MN=\frac{1}{2}BC$，且 $MN\parallel BC$. 证明　因为 M，N 是 AB，AC 边上的中点，所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$， $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 所以 $MN=\frac{1}{2}BC$，且 $MN\parallel BC$. 练习四 已知点 D 是线段 BC 的中点，求证： $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.	教师引导学生分析. 学生练习巩固.	本题是首次应用向量知识来解决平面几何问题，对学生来说有些难度，教师要根据向量的运算法则详细讲解.
小结	1. 数乘向量的定义及其几何意义. 2. 数乘向量运算律. 3. 平行向量基本定理. 4. 单位向量.	师生合作.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.
作业	教材 P43 习题第 5 题.		巩固.

7.3.1 向量的分解

【教学目标】

1. 理解平面向量基本定理，会用已知的向量去表示未知的向量.

2. 启发学生发现问题和提出问题，培养学生独立思考的能力，让学生学会分析问题和解决问题.

3. 通过教学，培养学生数形结合的能力.

【教学重点】

平面向量的基本定理，用已知的向量去表示未知的向量.

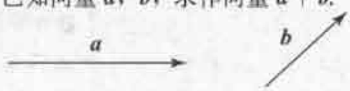
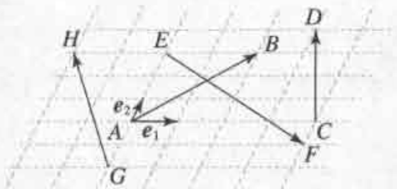
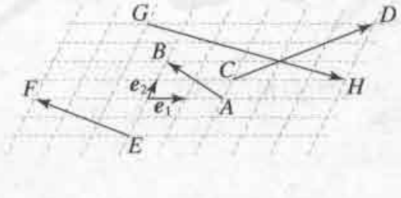
【教学难点】

理解平面向量的基本定理.

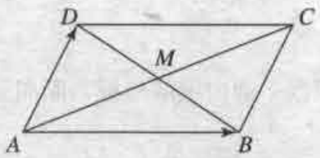
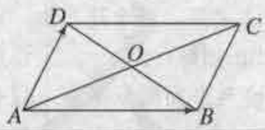
【教学方法】

本节课采用启发式教学和讲练结合的教学方法，引导学生分析归纳，形成概念.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	复习向量的加法. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 	师生共同回忆向量的加法法则.	为知识迁移做准备.
新课	1. 提问 如图，设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线的向量，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{GH}$ 是这一平面内的向量，你能用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 来表示以上四个向量吗？ 	教师提出问题. 教师以$\overrightarrow{AB}$ 为例，配以幻灯片形象讲述$\overrightarrow{AB}$ 的分解. 学生每四人为一组在练习本上画出$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{GH}$ 这三个向量的分解向量. 教师引导学生订正答案，并再次强调四个向量的分解依据是向量的加法法则.	问题是为突出本课重点而设计的. 深度挖掘教材提出的这个问题，在回顾了向量加法的基础上，进一步讨论一个向量如何用两个向量线性表示，为顺利引出平面向量基本定理做好准备.
	2. 平面向量基本定理 如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面上的两个不平行的向量，那么对该平面上的任一向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一的一对实数 a_1，a_2 使 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$.	教师由以上问题引导学生总结得出平面向量的基本定理.	通过问题的详细探究引出平面向量的基本定理，比直接给出定理更符合学生的特点，容易被学生接受.
	练习一 如图，已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{GH}$. 	学生模仿练习. 师生统一订正. 师：从问题和练习中可以看到一个重要的事实，即平面上任一向量都可沿两个不平行的方向分解为唯一一对向量的和.	巩固理解，形成技能.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例1　已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 M，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$.  解　因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ $=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ $=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. 练习二 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}$. 	教师出示例题. 教师首先请学生讨论： S1　$\overrightarrow{MA}$ 是哪个向量的一半？ S2　在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AC}$ 是哪两个向量的和？ 学生尝试解答 $\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$ 的分解，教师对学生的回答给予补充、完善，师生共同总结解答方法. 学生模仿练习.	通过例 1，让学生进一步掌握利用平面向量基本定理来分解某一个向量，从而提高学生的读图能力，并与前面学过的知识结合，对学过的定理有更深层次的认识和理解. 通过小组讨论，教师点拨，帮助学生分解难点，明确解题步骤. 根据学生做题情况，了解学生对本节课知识的掌握情况.
小结	1. 平面向量基本定理. 2. 平面向量基本定理的应用.	师生合作.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.
作业	教材 P45 练习 B 组第 1，2 题.		巩固拓展.

7.3.2 向量的直角坐标运算

【教学目标】

1. 理解平面向量的坐标表示，掌握平面向量的坐标运算.

2. 能够根据平面向量的坐标，判断向量是否平行.

3. 通过学习，使学生进一步了解数形结合思想，认识事物之间的相互联系，培养学生辩证思维能力.

【教学重点】

平面向量的坐标表示，平面向量的坐标运算，根据平面向量的坐标判断向量是否平行.

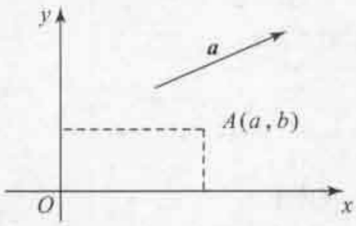
【教学难点】

理解平面向量的坐标表示.

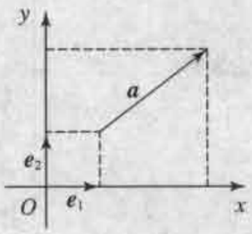
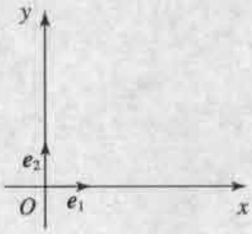
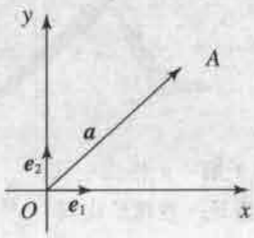
【教学方法】

本节课采用启发式教学和讲练结合的教学方法，教师可以充分发挥学生的主体作用，开展自学活动，通过类比、联想，发现问题，解决问题. 引导学生分析归纳，形成概念.

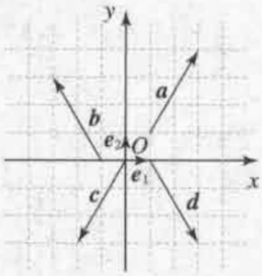
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 平面内建立了直角坐标系，点 A 可以怎么表示？  2. 平面向量是否也有类似的表示呢？ 3. 平面向量基本定理的内容是什么？	教师提出问题. 学生回忆解答.	为知识迁移做准备.
新课	1. 向量的直角坐标 在直角坐标系内，我们分别： (1) 取基向量：取与 x 轴和 y 轴的正方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 作为基向量. (2) 得到实数对：任给一个向量 $\boldsymbol{a}$，由平面向量基本定理，有且只有一对实数 a_1，a_2，使得 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$，我们把 (a_1, a_2) 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$， ①	学生阅读课本，讨论并回答教师提出的问题： (1) $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 与平面向量基本定理中的 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 有什么区别？ (2) 向量的坐标与有序实数对之间是什么关系？ 教师针对学生的回答进行点评.	问题是为突出本课重点而设计. 通过对比教学可以加深学生的印象. 通过问题的详细探究，比直接给出说明更符合学生的特点，容易被学生接受.

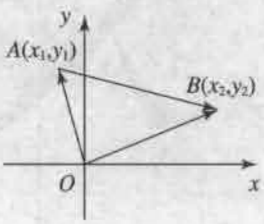
续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	其中 a_1 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标，a_2 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标. $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫做直角坐标平面上的基向量. ① 式叫做向量的坐标表示. 	教师引导学生学习向量的直角坐标表示.	
	探究： (1) 如图，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是直角坐标平面上的基向量，你能写出 $\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的坐标吗?  $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$， $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$， $\boldsymbol{0}=(0,0)$.	学生尝试解答. 教师针对学生的回答进行点评.	求特殊向量的坐标，可以加深学生对向量坐标概念的理解，从而提高学生的读图能力.
	(2) 向量的坐标与点的坐标之间有何关系? 	教师提出问题. 师生共同解答. 试一试：在平面直角坐标系 xOy 中作向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，作有向线段 $\overrightarrow{OA}$，使得点 $A(1,2)$，并说明向量 $\boldsymbol{a}$ 与有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 表示的向量的关系.	加深对“向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标与点 A 的坐标一一对应”这个结论的理解，在向量坐标与原有的点坐标之间架起桥梁，为应用向量知识解决几何问题奠定基础.

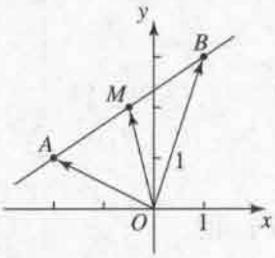
续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	设点 A 的坐标为 (x, y)，则 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=(x, y)$. 即点 A 的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标 (x, y)，也就是点 A 的坐标；反之，点 A 的坐标也是点 A 相对于坐标原点的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标.		
	例1　如图，用基向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分别表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，并求出它们的坐标.  解　由图可知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=(2, 3)$, $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=(-2, 3)$, $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=(-2, -3)$, $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=(2, -3)$.	学生讨论求解.	通过例1可让学生加深对向量的直角坐标表示概念的理解，从而进一步提高学生的读图能力.
	2. 向量的直角坐标运算 (1) 如果 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$; $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1, a_2)-(b_1, b_2)=(a_1-b_1, a_2-b_2)$; $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1, a_2)=(\lambda a_1, \lambda a_2)$, 其中 λ 是实数.	学生阅读课本中向量的直角坐标运算公式，在理解的基础上记忆坐标运算公式.	
	证明 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1, a_2)+(b_1, b_2)$ $=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)+(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)$	教师对于第一个性质引领学生仔细推导. 教师给出具	在板书证明的过程中，突出解题思

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	$=a_1e_1+b_1e_1+a_2e_2+b_2e_2$ $=(a_1+b_1)e_1+(a_2+b_2)e_2$ $=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$.	体的证明步骤.	路与步骤.
	请同学仿照上面的证明，自己证明其他两个结论. 上述向量的坐标运算公式，也可用语言分别表述为： 两个向量和与差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和与差； 数乘向量积的坐标等于数乘上向量相应坐标的积.	学生可分组讨论证明其他两个公式； 小组讨论后，教师对学生的回答给予补充、完善. 师生共同总结向量的直角坐标运算公式及文字叙述.	通过学生讨论，教师点拨，可以突出解题思路，深化解题步骤，分解难点.
新 课	例2　已知 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$. 解　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)+(-3,4)$ $=(-1,5)$； $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,1)-(-3,4)$ $=(5,-3)$； $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=3(2,1)+4(-3,4)$ $=(6,3)+(-12,16)$ $=(-6,19)$.	教师简单点拨，学生尝试解答 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$. 教师点评，并板书详细的解题过程.	巩固理解，形成技能.
	例3　已知 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$，求$\overrightarrow{AB}$ 的坐标. 解　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ $=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)$ $=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$. 	教师出示问题. 学生阅读图形，讨论并回答教师提出的问题： (1) $\overrightarrow{AB}$ 是哪两个向量的差向量？ (2) $\overrightarrow{OA}$ 和$\overrightarrow{OB}$ 坐标分别是什么？ 教师针对学生的回答进行点评.	可以进一步培养学生的读图、识图能力，培养学生数形结合的思想.
	此结论可用语言表述为：	师生共同总结文字结论.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点坐标减去始点的相应坐标. 练习一 1. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$： (1)$\boldsymbol{a}=(4,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(-4,\ 8)$； (2)$\boldsymbol{a}=(3,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ 4)$. 2. 已知 A，B 两点的坐标，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$ 的坐标： (1)$A(-3,\ 4)$，$B(6,\ 3)$； (2)$A(-3,\ 6)$，$B(-8,\ -7)$. 例 4　已知 $A(-2,\ 1)$，点 $B(1,\ 3)$，求线段 AB 中点 M 的坐标.  解　因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ $=(1,\ 3)-(-2,\ 1)$ $=(3,\ 2)$； 所以 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ $=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $=(-2,\ 1)+\frac{1}{2}(3,\ 2)$ $=\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$.	学生抢答. 教师点拨，学生讨论解答. 教师巡回观察点拨，解答学生疑难. 教师点评，并板书详细的解题过程.	在板书例题的过程中，突出解题思路与步骤.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	因此 $M\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$. 3. 用向量的坐标表示向量平行的条件 复习： (1) 平行向量基本定理：如果向量 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是，存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$； (2) 数乘向量：已知 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$，则 $\lambda\boldsymbol{b}=(\lambda b_1,\ \lambda b_2)$. 问题：在直角坐标系中，向量可以用坐标表示，那么，能否用向量的坐标表示两个向量的平行呢? 探究：设 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$，如果 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则条件 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 可用坐标表示为 $$(a_1,\ a_2)=\lambda(b_1,\ b_2),$$ 即 $$\begin{cases}a_1=\lambda b_1\\a_2=\lambda b_2\end{cases}$$ 消去 λ，得 $$a_1b_2-a_2b_1=0.$$ 一般地，对于任意向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$，都有 $$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0.$$ 例 5　判断下列两个向量是否平行： (1) $\boldsymbol{a}=(-1,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(5,\ -15)$； (2) $\boldsymbol{e}=(2,\ 0)$，$\boldsymbol{f}=(0,\ 3)$. 解　(1) 因为 $(-1)\times(-15)-3\times5=0$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 平行； (2) 因为 $2\times3-0\times0=6\neq0$，所以向量 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 不平行.	师生共同复习. 教师提出问题，引出探究的问题. 师生共同探究用向量的坐标表示向量平行的条件. 教师给出具体的探究步骤. 学生尝试解答. 师生共同解决例 5，教师详细板书解题过程，带领学生仔细分析解题步骤.	为知识迁移做准备. 通过例 5 可让学生加深对向量平行的条件的理解.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例6　已知点 $A(-2, -1)$，$B(0, 4)$，向量 $\boldsymbol{a}=(1, y)$，并且 $\overrightarrow{AB} \parallel \boldsymbol{a}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的纵坐标 y. 解　由已知条件得 $\overrightarrow{AB}=(0, 4)-(-2, -1)$ $=(2, 5)$， 因为 $\overrightarrow{AB} \parallel \boldsymbol{a}$，所以 $1\times 5-2\times y=0$. 解得 $y=\frac{5}{2}$.	教师点拨，学生讨论解答.	通过例6进一步加深学生对向量的坐标表示向量平行的条件的理解.
	例7　已知点 $A(-2, -3)$，$B(0, 1)$，$C(2, 5)$，求证：A，B，C 三点共线. 证明　由已知条件得 $\overrightarrow{AB}=(0, 1)-(-2, -3)$ $=(2, 4)$， $\overrightarrow{AC}=(2, 5)-(-2, -3)$ $=(4, 8)$. 因为 $2\times 8-4\times 4=0$，所以 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$，又线段 AB 和 AC 有公共点 A，所以 A，B，C 三点共线.	师生合作共同完成.	通过小组讨论、教师点拨，帮助学生顺利证明 A，B，C 三点共线. 再次巩固用向量的坐标表示向量平行的思路和步骤.
	练习二 1. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3, -4)$，$\boldsymbol{b}=(2, y)$，并且 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$，求 y. 2. 已知点 $A(-1, -3)$，$B(0, -1)$，$C(1, 1)$，求证：A，B，C 三点共线.		学习新知后紧跟练习有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内容. 有利于教师检验学生的掌握情况.
小结	1. 向量的直角坐标 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2=(a_1, a_2)$. 2. 向量的直角坐标运算： (1) 两个向量和与差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和与差； (2) 数乘向量积的坐标等于数乘上向量相应坐标的积；	学生阅读课本，畅谈本节课的收获，教师引导梳理，总结本节课的知识点.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	(3) 一个向量的坐标等于向量终点的坐标减去始点的相应坐标. 3. 若 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0.$		
作业	教材P49练习A组第1题(1)(3)，第2题(1)(3)，教材 P51 练习 A 组第 3 题.		巩固拓展.

7.4.1 向量的内积

【教学目标】

1. 理解并掌握平面向量内积的基本概念，会用已知条件去求向量的内积.
2. 掌握向量内积的基本性质及运算律并运用其解决相关的数学问题.
3. 通过教学，渗透一切事物相互联系和相互制约的辩证唯物主义观点.

【教学重点】

平面向量内积的概念，平面向量内积的基本性质及运算律.

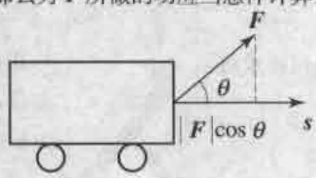
【教学难点】

平面向量内积的概念、基本性质及运算律的正确理解.

【教学方法】

本节课采用启发式教学和讲练结合的教学方法，引导学生分析归纳，形成概念.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生了位移 $\boldsymbol{s}$，那么力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功应当怎样计算?  力做的功为 $W=\|\boldsymbol{s}\|\,\|\boldsymbol{F}\|\cos\theta$， 其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角. $\|\boldsymbol{F}\|\cos\theta$ 是 $\boldsymbol{F}$ 在物体前进方向上分量的大小. $\|\boldsymbol{s}\|\,\|\boldsymbol{F}\|\cos\theta$ 称为位移 $\boldsymbol{s}$ 与力向量 $\boldsymbol{F}$ 的内积.	教师提出问题. 并简单讲解什么是功，让学生对功有个基本了解. 师生共同计算这个力所做的功. 我们知道，功只有大小，没有方向，它由力和位移两个向量来确定，这给我们一种启示，能否把“功”看成是这两个向量的一种运算的结果呢? 引出课题.	此引例体现了数学知识与其他学科的联系，让学生了解所学内容在实际生活中的具体应用.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	1. 两个非零向量夹角的概念 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 叫向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角．记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，规定 $$0^\circ\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant 180^\circ.$$ 说明： (1) 当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向； (2) 当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=180^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向； (3) 当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=90^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记做 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$； (4) 在两向量的夹角定义中，两向量必须是同起点的．	学生阅读课本，讨论并回答教师提出的问题： (1) 当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0^\circ$ 和 180° 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向是怎样的？ (2) 当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=90^\circ$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向又是怎样的？ 师生共同总结，教师重点强调说明(4)．	此问题是为本课重点向量的内积概念而准备．通过问题的详细探究给出概念，比直接给出更符合学生的特点，容易被学生接受．
	2. 向量的内积 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为两向量的夹角，则数量 $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积．记作 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$ 规定：$\boldsymbol{0}$ 向量与任何向量的内积为 0． 说明： (1) 两个向量的内积是一个实数，不是向量，可以是正数、负数或零，符号由 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的符号所决定； (2) 两个向量的内积，写成 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，符号“·”在向量运算中不是乘号，既不能省略，也不能用“×”代替．	教师直接给出向量内积的基本表达式． 教师引导学生学习向量内积的概念． 学生阅读课本中向量内积的概念，在理解的基础上记忆向量内积的概念． 教师总结向量内积的含义，以及公式中的注意事项．	在本节中首次引入了抽象的向量内积，学生往往只接受具体的基本表达式，而不能接受 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的含义，所以应让学生从符号的含义开始认识，这部分教师必须讲解清楚．
	例 1　求 $\|\boldsymbol{a}\|=5$，$\|\boldsymbol{b}\|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$．求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$． 解　由已知条件得 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=5\times4\times\cos120^\circ=-10.$$	学生讨论求解．	求内积题目不必过难，重点在理解内积的概念．
	3. 向量的内积的性质 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，$\boldsymbol{e}$ 是单位向量，则： (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle$；	学生阅读课本中向量内积的性质，在理解的基础上记忆向量内积的性质． 教师对于每一个性质都要	两向量的内积是两向量乘法的一种，是学生以前所未接触过的，与以

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$； (3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|^2$ 或 $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$； (4) $\|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$. 4. 向量的内积的运算律 (1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$； (2) 结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$； (3) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.	引领学生从向量内积的表达式入手，仔细推导. 教师引导学生学习向量内积的运算律. 让学生明确内积满足交换律和分配律，不满足结合律. 比如，实数乘法满足结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$，而向量的内积不满足；又如实数乘法满足：$a\cdot c=b\cdot c\Rightarrow a=b$，而向量的内积不满足这种推出关系.	前数量间的乘法、实数与向量间的乘法有很大区别，因此运算法则、运算律都要重新推导，学生对于概念和运算法则的理解和掌握有些困难. 它与实数乘法的概念、性质及运算律有联系也有区别，这一区别是教学的重点也是学生学习的难点.
	例 2　求证： (1)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2$； (2) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2+\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=2(\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2)$. 证明　(1) 显然 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ $=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$ $=\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2$； (2) 因为 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2$ $=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ $=\|\boldsymbol{a}\|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\|\boldsymbol{b}\|^2$， $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2$ $=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ $=\|\boldsymbol{a}\|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\|\boldsymbol{b}\|^2$， 所以 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2+\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2$ $=2(\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2)$.	学生分组讨论证明的方法； 小组讨论后，教师对学生的回答给予补充、完善，师生共同总结解答方法. 教师给出具体的证明步骤.	通过例 2 可让学生加深对结合律等运算律的理解. 通过学生讨论，教师点拨，可以突出解题思路，深化解题步骤，分解难点.
	练习 1. 已知 $\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\boldsymbol{b}\|$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$： (1) $\|\boldsymbol{a}\|=7$，$\|\boldsymbol{b}\|=12$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120°$； (2) $\|\boldsymbol{a}\|=8$，$\|\boldsymbol{b}\|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$. 2. 已知 $\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\boldsymbol{b}\|$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$： (1) $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|=16$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$； (2) $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|=12$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\sqrt{3}$.	师生合作共同完成.	学习新知后紧跟练习，有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内容. 有利于教师检验学生的掌握情况.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	本节课我们主要学习了平面向量的内积，常见的题型主要有： (1) 直接计算内积； (2) 由内积求向量的模； (3) 运用内积的性质判定两向量是否垂直； (4) 性质和运算律的简单应用.	学生阅读课本，畅谈本节课的收获，教师引导梳理，总结本节课的知识点.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.
作业	教材 P54 练习 A 组第 2 题(1)(3)，第 3 题(1)(2)；练习 B 组第 1 题(选做).		巩固拓展.

7.4.2 向量内积的坐标运算与距离公式

【教学目标】

1. 掌握向量内积的坐标表示，并应用向量内积的知识解决有关长度、角度和垂直的问题.

2. 能够根据平面向量的坐标，判断向量是否垂直.

3. 通过学习向量的坐标表示，使学生进一步了解数形结合思想，认识事物之间的相互联系，培养学生辩证思维能力.

【教学重点】

向量内积的坐标表达式，向量垂直的充要条件，向量长度的计算公式的应用.

【教学难点】

向量内积的坐标表达式的推导，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 两个式子的内在联系.

【教学方法】

本节课采用启发式教学和讲练结合的教学方法. 向量内积的坐标表达式，是向量运算内容与形式的统一. 无论是向量的线性运算还是向量的内积运算，最终归结为直角坐标运算. 教学中教师要引导学生抓住这条线索，不断使学生的平面向量知识系统化、条理化，从而有利于学生知识体系的形成.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积表达式是怎样的？由内积表达式怎样求 $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$？ 2. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ __________； 3. $\|\boldsymbol{a}\|$ 与 $\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ 有何关系？	教师提出问题. 学生回忆解答. 师生共同回忆旧知识. 师：对平面向量的内积的研究不能仅仅停留在几何角度，还要寻求其坐标表示. 引出探究问题.	为知识迁移做准备.
新课	已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是直角坐标平面上的基向量，$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$，你能推导出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的坐标公式吗？ 探究过程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)$ $=a_1b_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+a_1b_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+a_2b_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+a_2b_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2$， 又因为 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=1$，$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$， 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$. 定理　在平面直角坐标系中，已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是直角坐标平面上的基向量，两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$. 这就是说，两个向量的内积等于它们对应坐标的乘积的和. 我们还可以得到以下结论： (1) 向量垂直 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$； (2) 两向量夹角余弦的计算公式为 $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2}}$. 问题： (1) 若已知 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，你能用上面的定理求出 $\|\boldsymbol{a}\|$ 吗？ 解　因为 $\|\boldsymbol{a}\|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)\cdot(a_1,\ a_2)$	学生讨论并回答，教师再提出下列问题： (1) $(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)$ 是怎样进行运算的？ (2) $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2$ 的内积是怎样计算的？ 教师针对学生的回答进行点评. 师生共同写出详细的探究过程. 教师给出向量内积的直角坐标运算公式. 并引导学生用文字叙述. 在教师的引导下学生讨论得出. 教师提出问题，稍加点拨. 学生讨论解答. 教师总结得出这就是根据向量的坐标求向量长度的计算公式.	问题为复习向量的线性运算和向量的内积而设计. 通过学生的探究给出结论，比直接给出更符合学生的特点，容易被学生接受. 通过结论的探究，让学生初步感受到无论是向量的线性运算还是向量的内积运算，最终都归结为直角坐标运算. 通过对问题的详细探究得到性质，比直接给出结论更容易被学生接受. 同时加深对 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$=a_1^2+a_2^2$， 所以 $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$. 这就是根据向量的坐标求向量长度的计算公式. (2) 若已知 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，你能求出 $\|\overrightarrow{AB}\|$ 吗? 解　因为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. 因为 $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$，所以 $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. 这就是根据两点的坐标求两点之间的距离公式.	 教师提出问题. 学生讨论解答. 教师总结得出这就是根据两点的坐标求两点之间的距离公式.	$a_1b_1+a_2b_2$ 的理解. 从而提高学生的思维能力. 使刚刚学过的知识及时得到应用.
	例 1　设 $\boldsymbol{a}=(3, -1)$，$\boldsymbol{b}=(1, -2)$，求： (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　(2) $\|\boldsymbol{a}\|$； (3) $\|\boldsymbol{b}\|$；　(4) $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$. 解　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times(-2)=3+2=5$； (2) $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$； (3) $\|\boldsymbol{b}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$； (4) 因为 $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， 所以 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$.	学生尝试解答. 教师针对学生的回答进行点评.	通过例 1 可让学生加深对向量内积的直角坐标运算公式及向量的长度公式的理解和记忆.
	例 2　已知 $A(2, -4)$，$B(-2, 3)$，求 $\|\overrightarrow{AB}\|$. 解　因为 $A(2, -4)$，$B(-2, 3)$，所以	教师点拨，学生解答. 教师针对学生的回答进行点评.	巩固公式，形成技能.

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$\overrightarrow{AB}=(-2,3)-(2,-4)$ $=(-4,7)$. 所以 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{7^2+(-4)^2}=\sqrt{65}$. 例 3　已知 $A(1,2)$，$B(3,4)$，$C(5,0)$，求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形. 证明　因为 $\overrightarrow{AB}=(3-1,4-2)=(2,2)$， $\overrightarrow{AC}=(5-1,0-2)=(4,-2)$， $\overrightarrow{BC}=(5-3,0-4)=(2,-4)$， $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$， $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$， 所以 $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$. 因此 $\triangle ABC$ 是等腰三角形. 例 4　已知 $A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$，求证：$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$. 证明　因为 $\overrightarrow{AB}=(2-1,3-2)=(1,1)$， $\overrightarrow{AC}=(-2-1,5-2)=(-3,3)$， 可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,1)\cdot(-3,3)=0$. 所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$. 练习 1. 已知 $A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$，求证：$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$. 2. 已知点 P 的横坐标是 7，点 P 到点 $N(-1,5)$ 的距离等于 10，求点 P 的坐标.	 教师点拨，学生讨论解答. 小组讨论时教师巡视，并针对学生的回答给予补充、完善. 最后师生共同完成此题. 教师给出具体的解题步骤. 教师点拨，学生解答. 教师针对学生的回答进行点评. 师生合作共同完成.	 在板书证明的过程中，突出解题思路与步骤. 通过学生讨论，教师点拨，可以突出解题思路，深化解题步骤，分解难点，帮助学生顺利完成此题. 学习新知后紧跟练习，有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内容. 有利于教师检验学生的掌握情况.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	本节课我们主要学习了平面向量内积的坐标运算与距离公式，常见的题型主要有： (1) 直接用两向量的坐标计算内积； (2) 根据向量的坐标求模； (3) 根据两点坐标求两点间的距离； (4) 判定两向量是否垂直.	学生阅读课本，畅谈本节课的收获，教师引导梳理，总结本节课的知识点.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.
作业	教材 P56 练习 A 组第 1 题；教材 P57 练习 B 组第 1 题(选做).		巩固拓展.

7.5 向量的应用

【教学目标】

1. 能运用向量的有关知识对物理中力的作用进行相关分析和计算.
2. 通过例题，研究利用向量知识解决物理中有关“速度的合成与分解”等问题.
3. 通过教学，培养探究问题和解决问题的能力.

【教学重点】

运用向量的有关知识对物理中力的作用进行相关分析和计算.

【教学难点】

以向量为主题的数学模型的建立.

【教学方法】

这节课主要采用问题解决法和分组教学法. 运用现代化教学手段，通过两个实例，分析抽象出以向量为主题的数学模型，使学生更容易理解向量的实质.

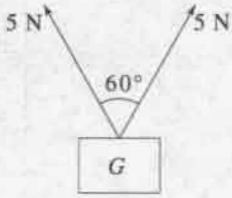
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 什么是向量？在物理学中碰到过哪些？ 2. 什么是向量加法的平行四边形法则和三角形法则？ 3. 物理学中力、速度是怎样分解和合成的？	教师提出问题. 学生回忆解答. 师生共同回忆这三个问题.	为知识迁移做准备.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	在日常生活中，你是否有下面这些经验？两个人共提一个旅行包，夹角越大越费力；在单杠上做引体向上，两臂的夹角越小越省力. 你能从数学的角度解释这些现象吗?		从身边的经验引出本节的课题，可以激发学生学习的兴趣，为顺利引出力向量做好准备.
新课	1. 力向量 例1　已知两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的大小和方向(如教材图 7-40 所示)，求两个力的合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向. 解　设 $\boldsymbol{F}_1=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{F}_2=(b_1, b_2)$，则 $a_1=300\cos 30°\approx 259.8$， $a_2=300\sin 30°=150$， $b_1=200\cos 135°\approx -141.4$， $b_2=200\sin 135°\approx 141.4$. 所以 $\boldsymbol{F}_1\approx(259.8, 150)$，$\boldsymbol{F}_2\approx(-141.4, 141.4)$，因此 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ $\approx(259.8, 150)+(-141.4, 141.4)$ $=(118.4, 291.4)$， $\lvert\boldsymbol{F}\rvert=\sqrt{118.4^2+291.4^2}\approx 314.5$. 设 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴的正向夹角为 θ，则 $\tan\theta=\dfrac{291.4}{118.4}\approx 2.4611$， 又由 $\boldsymbol{F}$ 的坐标知 θ 是第一象限的角，所以 $\theta\approx 67°53'$. 即两个力的合力约为 314.5 N，与 x 轴的正方向的夹角约为 $67°53'$，与 y 轴的正方向的夹角约为 $22°7'$.	教师提出问题，引导观察思考： (1)$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 如何用坐标表示? (2)$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 什么关系? (3)$\boldsymbol{F}$ 的坐标怎么表示？长度怎么求呢? (4)已知 $\boldsymbol{F}$ 的坐标怎么求 $\boldsymbol{F}$ 与坐标轴的夹角呢? 学生小组合作交流，讨论完成. 小组讨论后，教师对学生的回答给予补充、完善，师生共同总结解答方法. 教师给出具体的证明步骤. 教师总结解题关键： (1) 问题的转化，即把物理问题转化为数学问题； (2) 模型的建立，即建立以向量为主题的数学模型； (3) 参数的获得，即求出数学模型的有关解——理论参数值； (4) 求出问题的答案.	力向量是向量应用中的重点，同时也是难点，此题的设计目的是为了突破学生这一思维障碍，提高学生的建模能力，同时进一步巩固向量的有关性质. 在板书例题的过程中，突出解题思路与步骤.
	练习一 如图，用两条绳提一个物体，每条绳用力 5 N，这时两条绳的夹角为 60°，且物体处于受力平衡状态，求物体所受重力 G 的大小.	教师简单点拨，学生合作完成.	巩固理解，形成技能.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	 2. 速度向量 例 2　河水从东向西流，流速为 2 m/s，一轮船以 2 m/s 垂直水流方向向北航行，求轮船的实际航行的方向和航速. 解　设 $\boldsymbol{a}$ =“向西方向，2 m/s”，$\boldsymbol{b}$ =“向北方向，2 m/s”，则 $\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\approx2.8$ m/s. 由 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\boldsymbol{b}\rvert$，可得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向为西北方向. 所以轮船实际航行速度为“向西北方向，2.8 m/s”.	对于例 2 的教学，让学生读懂题意是解决问题的关键. 教师只须带领学生详细分析题意，解题时点拨如何假设未知量，启发学生讨论并尝试解答.	通过学生讨论，教师点拨，可以突出解题思路，深化解题步骤，分解难点，帮助学生顺利完成此题.
	练习二 河水从西向东流，流速为 3 m/s，一轮船以 5 m/s 向西北方向航行，求轮船实际航行的方向和速率.	学生模仿练习.	求轮船的实际航行速度不必过难，重点在理解题意.
小结	用向量中的有关知识研究物理中的相关问题，步骤如下： (1) 问题的转化，即把物理问题转化为数学问题； (2) 模型的建立，建立以向量为主题的数学模型； (3) 参数的获得，即求出数学模型的有关解——理论参数值； (4) 问题的答案，即回到问题的初始状态，解释相关的物理现象.	师生合作.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.
作业	教材 P60 习题第 1，2 题.		巩固拓展.

Ⅳ 测 验 题

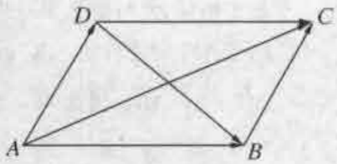
1. 如图，填空：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$______;

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$______;

(3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$______;

(4) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=$______.



(第 1 题)

2. 化简：

(1) $4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-7\boldsymbol{b}$;

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(-2, 3)$，$\boldsymbol{b}=(8, -5)$，求 $5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}$.

4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，求 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$ 的值.

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(3, 4)$，$\boldsymbol{b}=(2, -1)$，且 $\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直，求 x 的值.

6. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 用向量方法证明：$MN \parallel BC$，且 $MN=\frac{1}{3}BC$.

7. 已知点 $A(2, 3)$，分别求点 A 关于原点、关于 x 轴、关于 y 轴的对称点 A_1，A_2，A_3 的坐标.

8. 在某地区的地图上，以某广场的中心为原点 O，建立坐标系，x 轴指向东，y 轴指向北，一个单位表示实际路程 1 km，一辆汽车从点 $A(5, 1)$ 出发，始终沿一个方向匀速行驶，9 min 时路过点 C 处，12 min 到达点 $B(-3, 7)$，求：

(1) 汽车的位移向量 $\overrightarrow{AB}$，并说明位移的距离和方向；

(2) 点 C 相对于广场的中心点 O 的位置向量，并用语言说明点 C 相对于中心广场的位置；

(3) 汽车在 AB 段上的行驶速度 $\boldsymbol{v}$，并求 $\boldsymbol{v}$ 在 x 轴、y 轴上的分量，用坐标表示 $\boldsymbol{v}$.

测验题答案

1. (1) $\overrightarrow{AC}$;　(2) $\overrightarrow{AC}$;　(3) $\overrightarrow{DB}$;　(4) $\overrightarrow{AC}$.

2. (1) $\boldsymbol{a}$;　(2) $2\overrightarrow{AD}$.

3. $5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(14, 0)$，$2\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}=(-60, 41)$.

4. 7.

5. $\frac{23}{3}$.

6. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

7. $A_1(-2, -3)$，$A_2(2, -3)$，$A_3(-2, 3)$.

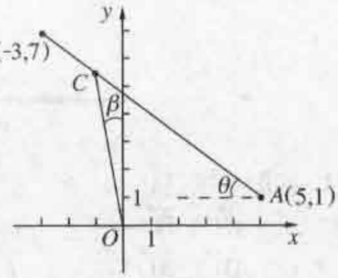
8. (1) 因为

$$\overrightarrow{AB}=(-3,\ 7)-(5,\ 1)=(-8,\ 6),$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10.$$

如图，

$$\tan\theta=\frac{6}{8}=0.75,\ \theta\approx 36°52'.$$

汽车位移为“西偏北 36°52′，10 km”.



(第 8 题)

(2) 由于汽车匀速行驶，AC 段用 9 min，AB 段用12 min，所以

$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\\&=(5,\ 1)+\frac{3}{4}(-8,\ 6)\\&=\left(-1,\ \frac{11}{2}\right),\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}\approx 5.59.$$

如图，有

$$\tan\beta=\frac{1}{\frac{11}{2}}=\frac{2}{11}\approx 0.1818,\ \beta=10°18'.$$

点 C 位于广场中心“北偏西 10°18′，5.59 km”.

(3) 因为$t=12\ \text{min}=\frac{1}{5}\ \text{h}$，所以

$$|\boldsymbol{v}|=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{t}=50\ \text{km/h}.$$

设 $\boldsymbol{v}=(v_x,\ v_y)$，因为

$$\cos\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\ \sin\theta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$
$$v_x=-|\boldsymbol{v}|\cos\theta=-40\ \text{km/h},$$
$$v_y=|\boldsymbol{v}|\sin\theta=30\ \text{km/h},$$

所以 $\boldsymbol{v}=(-40,\ 30)$.

V　习题答案、提示和解答

练习 A 组(第 34 页)

1. 图略．长度相等，位移不相等.
2. 不相同.
3. 图略．点 P 相对于点 O 的位置向量为$\overrightarrow{OP}$，点 Q 相对于点 O 的位置向量为$\overrightarrow{OQ}$.

练习 B 组(第 34 页)

1. 图略. 这个人的位移是$\overrightarrow{AD}$，依图可量得此人的位移为"向东偏北 15°，860 m".

2. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FC}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EB}$.

练习 A 组(第 37 页)

1. 略.

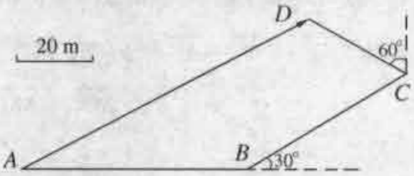
2. (1) $\overrightarrow{AC}$； (2) $\overrightarrow{AO}$； (3)$\mathbf{0}$.

3. 正确. 因为表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 这三个向量的三条有向线段，要么构成三角形要么共线.

练习 B 组(第 37 页)

1. 依题意，选择 1 cm 表示 20 m 作图. 依图量得点 D 相对于点 A 的位置是："约东偏北 27.4°，87 m".

2. 作图(图略)，依图可量得轮渡实际航速为7.5 m/s，方向为"向北偏东 42°".



(第 1 题)

练习 A 组(第 39 页)

1. 略.

2. (1) $\overrightarrow{DB}$； (2) $\overrightarrow{CA}$； (3) $\overrightarrow{AD}$.

练习 B 组(第 39 页)

1. (1) $\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{b}$； (2) $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

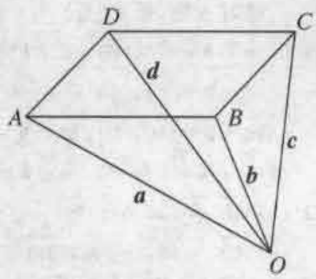
2. 如图，因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$
$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d},$$

又 $ABCD$ 是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d},$$

即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$.



(第 2 题)

习题(第 39 页)

1. 图略：(1) $\overrightarrow{AC}$； (2) $\overrightarrow{AB}$.

2. (1)$\mathbf{0}$； (2) $\overrightarrow{AB}$； (3) $\overrightarrow{AC}$； (4) $\overrightarrow{BA}$.

3. 不一定. 表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的有向线段中有两条不共线就可构成三角形.

习题(第 43 页)

1. (1)$5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$； (2)$\boldsymbol{a}$； (3)$23\boldsymbol{a}-22\boldsymbol{b}$； (4)$-11\boldsymbol{b}+11\boldsymbol{c}$.

2. (1)$\boldsymbol{x}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$； (2)$\boldsymbol{x}=\frac{7}{8}\boldsymbol{a}$； (3)$\boldsymbol{x}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$； (4)$\boldsymbol{x}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

3. (1) 以 $\triangle ABC$ 中 AB 和 AC 为邻边构造 ▱$ABFC$. 连 AF，则 D 在 AF 上，且 D 为 AF 的中点. 由向量加法的平行四边形法则可知

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

又$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$，所以

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

(2)
$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}&=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\&=2\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

4. (1) 平行四边形；　　(2) 梯形；　　(3) 菱形.

5. 利用$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$即可证明.

练习 A 组（第 45 页）

1. $\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OD}=-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

2. $x=\frac{47}{11}$，$y=\frac{16}{11}$.

3. $\overrightarrow{AB}=-2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{EF}=-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{GH}=6\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

练习 B 组（第 45 页）

1. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$\overrightarrow{DB}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{EC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

2. 因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，所以

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{3}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}=\frac{2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{4};$$

$$\overrightarrow{MP}=-\frac{\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}}{4};$$

$$\overrightarrow{NP}=\frac{-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}}{4}.$$

练习 A 组（第 49 页）

1. (1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,6)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-7,2)$；

   (2)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,11)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(7,-5)$；

   (3)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,0)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,6)$；

   (4)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,4)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,-4)$.

2. (1) $\overrightarrow{AB}=(3,4)$，$\overrightarrow{BA}=(-3,-4)$；

   (2) $\overrightarrow{AB}=(9,-1)$，$\overrightarrow{BA}=(-9,1)$；

   (3) $\overrightarrow{AB}=(0,2)$，$\overrightarrow{BA}=(0,-2)$；

   (4) $\overrightarrow{AB}=(-5,-13)$，$\overrightarrow{BA}=(5,13)$.

3. $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(8,0)$.

练习 B 组（第 49 页）

1. $D(-3,2)$.

2. 设AB的中点为M，则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(0,1).$$

练习 A 组（第 51 页）

1. $y=\frac{8}{3}$.

2. 由已知条件，得

$$\overrightarrow{AB}=(0,-1)-(-1,-3)=(1,2),$$

$$\overrightarrow{AC}=(1,1)-(-1,-3)=(2,4).$$

因为$1\times4-2\times2=0$，所以$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，且线段$AB$和$AC$有公共点$A$. 因此$A$，$B$，$C$三点共线.

3. 由已知条件，得

$$\overrightarrow{AB}=(1,\ 0)-(0,\ 1)=(1,\ -1),$$
$$\overrightarrow{CD}=(2,\ 1)-(1,\ 2)=(1,\ -1).$$

因为$1\times(-1)-(-1)\times1=0$，所以$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$.

因此$AB\parallel CD$.

练习 B 组(第 51 页)

略.

习题(第 51 页)

1. $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

2. (1)$(1,\ 1)$； (2)$(-2,\ 0)$.

3. 易得

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),$$
$$\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2,\ y_3-y_2),$$
$$\overrightarrow{CA}=(x_1-x_3,\ y_1-y_3),$$

所以

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\\=&(x_2-x_1+x_3-x_2+x_1-x_3,\ y_2-y_1+y_3-y_2+y_1-y_3)\\=&(0,\ 0)=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

4. 由$x(1,\ 2)+y(2,\ 3)=(3,\ 4)$得

$$(x,\ 2x)+(2y,\ 3y)=(3,\ 4),$$

即$\begin{cases}x+2y=3\\2x+3y=4\end{cases}$

解得$x=-1$，$y=2$.

5. 设$A'(x_1,\ y_1)$，$B'(x_2,\ y_2)$，则

$$\frac{-2+x_1}{2}=1,\ \frac{3+y_1}{2}=1,$$
$$\frac{3+x_2}{2}=1,\ \frac{5+y_2}{2}=1.$$

解得$A'(4,\ -1)$，$B'(-1,\ -3)$.

又因为

$$\overrightarrow{A'B'}=(-5,\ -2),\ \overrightarrow{AB}=(5,\ 2).$$

所以$\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$.

6. 因为

$$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BA}=(9,\ -12),$$
$$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}=(-9,\ 12),$$
$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{3}{2},\ 2\right),$$

所以

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(5,\ -7),$$
$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(-10,\ 13),$$
$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{5}{2},\ 3\right).$$

因此 $C(5,\ -7)$，$D(-10,\ 13)$，$E\left(-\frac{5}{2},\ 3\right)$.

练习 A 组(第 54 页)

1. (1)30； (2)-30； (3)40； (4)-40.

2. (1)16； (2)-42； (3)0； (4)4.

3. (1) $\frac{\pi}{3}$； (2) $\frac{2\pi}{3}$； (3)π； (4) $\frac{\pi}{6}$.

练习 B 组(第 54 页)

1. -93.

2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=52$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{13}$.

练习 A 组(第 56 页)

1. (1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-16+15=-1$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{41}$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=-\frac{\sqrt{41}}{205}$；

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{34}$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=0$；

(3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-96$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{89}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{113}$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=-\frac{96\sqrt{10\ 057}}{10\ 057}$；

(4)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-15$，$|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{10}$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

2. 因为

$$\overrightarrow{AB}=(-6,\ 6),\ \overrightarrow{AC}=(-3,\ -3),$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18-18=0,$$

因此 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，即 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$.

练习 B 组(第 57 页)

1. $(0,\ 0)$ 或 $(10,\ 0)$.

2. $(7,\ 11)$ 或 $(7,\ -1)$.

习题(第 57 页)

1. -10.

2. 15.

3. (1)4； (2)26； (3)-8； (4)10.

4. 因为

$$\overrightarrow{AB}=(8,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(10,\ -4),\ \overrightarrow{BC}=(2,\ -4),$$

所以

$$|\overrightarrow{AB}|=8,\ |\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{29},\ |\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{5}.$$

即 $\triangle ABC$ 各边的长为 8，$2\sqrt{29}$，$2\sqrt{5}$.

5. 因为

$$\overrightarrow{PQ}=(-2-x,\ -5),\ \overrightarrow{PM}=(1-x,\ -1),$$

所以由 $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PM}|$ 可知

$$(-2-x)^2+(-5)^2=(1-x)^2+(-1)^2,$$

解得 $x=-\frac{9}{2}$.

6. 因为

$$\overrightarrow{AB}=(-5,\ -2),\ \overrightarrow{AC}=(-1,\ -12),\ \overrightarrow{BC}=(4,\ -10),$$

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-5)\times 4+(-2)\times(-10)=0$，即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

因此 $\angle B=90°$，$\triangle ABC$ 为直角三角形.

7. (1) 垂直；　(2) 垂直；　(3) 不垂直；　(4) 不垂直.

8. 因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x(-y)+yx=0,$$

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

同理可证 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$.

9. (1) $\frac{14\sqrt{29}}{145}$；　(2) $-\frac{8\sqrt{65}}{65}$.

习题(第 60 页)

1. 方向为东偏北 53.5°，航速为 380.8 km/h.
2. $\sqrt{37}$.
3. 略.
4. 5.
5. $5\sqrt{3}$ N.

第八章　直线和圆的方程

Ⅰ　教学要求

1. 掌握平面直角坐标系内两点之间的距离公式和中点公式.

2. 理解直线的方程和圆的方程的含义，会由方程求两曲线的交点.

3. 理解直线的倾斜角和斜率，会根据已知条件，求直线的斜率和倾斜角.

4. 掌握直线的点斜式方程和斜截式方程，理解直线在 y 轴上的截距.

5. 理解直线与二元一次方程的关系，掌握直线的一般式方程，了解直线的方向向量和法向量.

6. 理解两直线平行与垂直的条件，会求点到直线的距离.

7. 掌握圆的标准方程和一般方程，理解直线与圆的位置关系.

8. 能利用直线和圆的方程解决简单的问题.

Ⅱ　教材分析和教学建议

本章主要内容包括坐标系中的基本公式，直线的方程，圆的方程，直线与圆的位置关系，直线与圆的方程的应用等.

本章内容共分五大节：

第一大节是"坐标系中的基本公式"，教材以问题的形式，举例确认了数轴上两点之间的距离公式与中点公式，进而推出平面坐标系中两点之间的距离公式与中点公式，它们是进一步学习的基础，是平面解析几何中最基本的公式. 公式虽然已经用向量的知识推导过，但本节中的推导方法，显然更直观易懂.

第二大节是"直线的方程"，教材通过实例引入直线的方程的定义，接着先介绍直线的两个重要概念：倾斜角和斜率，在此基础上，推导出直线方程的几种形式：点斜式、斜截式和一般式，并介绍了直线的方向向量和法向量，然后讨论两条直线平行或垂直的条件，最后给出了点到直线的距离公式.

第三大节是"圆的方程"，这一节重点介绍圆的标准方程和圆的一般方程，最后用一个例题的形式，向学生展示了研究曲线的一种重要代数方法：先求其方程，再研究方程的特征，进而达到研究曲线的目的. 让学生领略到"坐标法"的魅力.

第四大节是"直线与圆的位置关系"，介绍如何根据直线与圆的方程，判断直线与圆相离、相切，还是相交. "过圆上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程"是作为例题和习题的形式呈

现的，给了读者较多的学习选择权和自由发挥空间，可视情况选学.

第五大节是“直线与圆的方程的应用”，用两个具体例子说明直线与圆的方程的简单应用，例题和习题均来自于生活实际，典型生动.

本章教学的关键是使学生正确理解直线与圆的方程的含义，重点是直线的点斜式方程和圆的标准方程，难点是如何通过曲线的方程研究曲线的性质.

本章教学约需 14 课时，具体分配如下(仅供参考)：

8.1.1	数轴上的距离公式与中点公式	1 课时
8.1.2	平面直角坐标系中的距离公式与中点公式	1 课时
8.2.1	直线与方程	1 课时
8.2.2	直线的倾斜角和斜率	1 课时
8.2.3	直线方程的几种形式	2 课时
8.2.4	直线与直线的位置关系	2 课时
8.2.5	点到直线的距离	1 课时
8.3.1	圆的标准方程	1 课时
8.3.2	圆的一般方程	1 课时
8.4	直线与圆的位置关系	1 课时
8.5	直线与圆的方程的应用	1 课时
小结与复习		1 课时

8.1.1　数轴上的距离公式与中点公式

1. 数轴上的距离公式与中点公式是以两个问题的形式，通过具体例子操作确认的，学生应该能够理解掌握，在绝大部分职业学校，不必要作过多严密的论证.

2. 数轴上的点与实数一一对应，这是学生在初中已经学过的知识，可以通过恰当的复习，引起学生回忆.

3. “点 P 与数 x 对应 $\Leftrightarrow$ 点 P 的坐标为 $x \Leftrightarrow P(x)$”，让学生领略到了数学语言的简洁性，对 $P(x)$ 这样的记法，学生可能一下子不太适应，对此教师应该有足够的认识，宜多结合具体例子加以说明.

8.1.2　平面直角坐标系中的距离公式与中点公式

1. 平面直角坐标系中的距离公式与中点公式是用向量知识曾经推导过的，这一节的推导借助于数轴上的距离公式与中点公式，直观易懂. 在教学中，对推导过程不宜忽略. 这样便于学生理解公式. 这两个公式是平面解析几何中最基本的，应该要求学生熟练掌握.

2. 对求两点间的距离，教材给出了算法，学生刚学的时候，可以采取课本上算法的形式去求解，待熟练之后，应该要求学生一步写出.

3. 例 2 和例 3 分别介绍了关于坐标原点成中心对称的两点和关于坐标轴成轴对称的两点坐标的特征. 讲解时，应该结合图形，这样便于学生理解.

4. 例 4 用到了平行四边形对角线互相平分的性质. 与例 2、例 3 相同，讲解此题时，应结合图形. 同时应该告诉学生：灵活运用平面几何的知识，将有助于解析几何问题的解决. 此题当然另有其他多种解法，教学时，应该有足够的时间让学生思考，待本章学完之后，此题仍可以作为典型的“一题多解”“一题多变”问题二次利用，培养学生思维的灵活性.

8.2.1 直线与方程

1. 直线的方程是一个重要的概念，正确理解它是学好本章的关键.

2. 关于“直线 l 的方程 $F(x, y)=0$”应该讲清两个问题：

(1) 直线 l 上的点的坐标都满足方程 $F(x, y)=0$，也就是直线 l 上不存在不满足 $F(x, y)=0$ 的点；

(2) 不在直线 l 上的点的坐标都不满足 $F(x, y)=0$，也就是说以方程 $F(x, y)=0$ 的解 (x, y) 为坐标的点都是直线 l 上的点.

3. 点在直线 $F(x, y)=0$ 上的充要条件是：该点的坐标是 $F(x, y)=0$ 的解. 因此判定一个点是否在直线上，只要判定该点的坐标是不是这个直线方程的解.

8.2.2 直线的倾斜角和斜率

1. 直线的倾斜角和斜率都反映了直线相对于 x 轴的倾斜程度，是实现直线倾斜程度“形数转化”的重要桥梁，是进一步学习直线方程的基础，应该引起足够的重视.

2. 当直线与 y 轴垂直时，规定这条直线的倾斜角为 $0°$；当直线与 y 轴不垂直时，定义直线向上的方向与 x 轴正方向所成的最小正角为直线的倾斜角. 因此，直线倾斜角 α 的取值范围是

$$0° \leqslant \alpha < 180°.$$

讲清直线的倾斜角这个概念的关键是：(1) 直线向上的方向；(2) x 轴的正方向；(3) 最小的正角.

3. 倾斜角不是 $90°$ 的直线，它的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的斜率，通常用 k 表示，即 $k=\tan\alpha$. 倾斜角为 $90°$ 的直线的斜率是不存在的.

4. 平面上任何一条直线都有唯一的一个倾斜角，倾斜角的大小确定了，直线的方向也就确定了. 但并不是每条直线都有斜率，直线的斜率不存在，并不是说直线不存在，也不是说直线的倾斜角不存在.

5. 应该结合图形，说明直线的倾斜角为 $0°$、锐角、直角、钝角时，直线的大致倾斜程度，并分别说明对应直线的斜率为 0、正数、不存在和负数.

6. 斜率公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 是一个重要的公式，它与两点的顺序无关，即公式中的下标 1，2 可以互换.

斜率公式表明，直线对于 x 轴的倾斜程度，可以通过直线上任意两点的坐标表示，而

不需要求出直线的倾斜角，这样在使用时比较方便.

8.2.3 直线方程的几种形式

1. 先通过具体例子，确认“过一定点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线 l 是唯一存在的”，然后再考虑如何求其方程. 这样类似的思维训练是必要的，应该让学生形成这样科学的思维方式：对一个问题，先要考虑它有无解，再考虑如何解.

2. 直线的点斜式方程是本章的重点，也是本节的基础，应该让学生熟记，直线的斜截式方程是点斜式方程的一个特例，完全可以由学生推导得到.

3. 斜截式中的“b”是指直线在 y 轴上的截距，可正、可负也可能是 0，应该注意它与“距离”的区别. 斜截式方程和一次函数的联系与区别，教学中应该涉及，便于学生构造完整的知识网络.

4. 对“直线的两点式方程”，教材是以例题和练习的形式呈现的. 教学时，采用教材中的方式处理就可以了，对个别学有余力的学生，可提出“两点式方程”的概念，以拓展他们的视野. 对“直线的截距式方程”也可以同样处理.

5.“直线的一般式方程”这一段帮助学生明确平面坐标系中的直线与二元一次方程存在着一一对应的关系，教学中，只需要通过具体例子说明就可以了，对绝大部分学生来讲，证明这个事实并不必要.

6. 直线的方向向量和法向量，也是反映直线倾斜程度的量. 它们和直线的倾斜角与斜率相比，更加脱离了“形”的束缚. 因此也就显得更抽象一些，但“解析味”无疑更浓了. 从直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$，直接就可以看出直线的方向向量和法向量分别为 $(B, -A)$ 和 (A, B).

8.2.4 直线与直线的位置关系

1. 本节内容是把两直线平行与垂直这样的几何关系转化为代数条件，十分重要，应该要求学生熟练掌握.

2. 对两直线平行或相交的讨论，教材完全是根据方程组

$$\begin{cases} y=k_1x+b_1 & (\text{直线 } l_1 \text{ 的方程}) \\ y=k_2x+b_2 & (\text{直线 } l_2 \text{ 的方程}) \end{cases}$$

的解的情况来进行的，“解析味”非常浓，所以要求学生对“直线的方程”这个概念有非常清楚的认识. 建议学习这部分内容之前，对“直线的方程”要进行复习. 推导结论

$$\boxed{\begin{array}{l} l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 相交} \Leftrightarrow k_1 \neq k_2; \\ l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 平行} \Leftrightarrow k_1 = k_2 \text{ 且 } b_1 \neq b_2; \\ l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow k_1 = k_2 \text{ 且 } b_1 = b_2. \end{array}}$$

时，应结合具体的例子，以便学生理解.

3. 考虑两直线垂直，教材安排了两个思路：其一是直线 l_1 和 l_2 的方向向量 $\boldsymbol{a}_1=(1,$

k_1) 与 $\boldsymbol{a}_2=(1, k_2)$ 互相垂直. 其二是直线 l_1 和 l_2 的法向量 (A_1, B_1) 和 (A_2, B_2) 互相垂直. 两个思路得到的结论各有优缺点，思路二得到的结论：$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$，显然更具有普适性，不必考虑直线斜率是否存在. 但实际上，对思路一，如果取方向向量分别为 $(B_1, -A_1)$ 和 $(B_2, -A_2)$，我们将发现两个思路的结论是完全一致的.

4. 注意教材只对直线斜率存在的情形，给出了它们平行与垂直的结论，一般地：

当两直线斜率都不存在时，两直线平行或重合；

当一直线斜率不存在，另一直线斜率存在时，两直线相交；

当一直线斜率不存在，另一直线斜率为 0 时，两直线垂直.

8.2.5　点到直线的距离

1. 点到直线的距离公式是一个重要的公式，应该要求学生熟记.

2. 对学有余力的学生，应该介绍点到直线距离公式的推导. 做到这一点并不很难，推导方法有多种，教材只介绍了一种，教师可视情况自行处理.

3. 在特殊情况下，直线 l 平行于 x 轴或 y 轴时，点到直线距离公式可简化为 $d=|y_1-y_0|$ 或 $d=|x_1-x_0|$.

4. 对两条平行线间的距离，只需要在其中一条上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$（当然为了便于计算，越简单越好），然后求出点 P_0 到另一条直线的距离就可以了.

8.3.1　圆的标准方程

1. 圆是学生比较熟悉的曲线. 圆的性质在平面几何里已学过，这里只作为圆锥曲线的一种，用解析法研究它的方程和应用，而不再讨论它的性质. 本节主要研究圆的方程的特点，怎样根据不同条件建立圆的方程，以及运用圆的方程解决一些简单的问题.

2. 本节主要研究圆心不在原点的圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

要求学生能够用圆心坐标、半径长熟练地写出圆的标准方程；已知圆的标准方程能够熟练地求出它的圆心和半径.

8.3.2　圆的一般方程

1. 比较二元二次方程的一般形式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad ①$$

和圆的一般方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad ②$$

的系数，启发学生归纳出如下结论：

当二元二次方程 ① 表示圆时，则：

(1) x^2 和 y^2 的系数相同，且不等于 0，即 $A=C\neq 0$；

(2) 不含 xy 项，即 $B=0$；

(3) $\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-4\left(\frac{F}{A}\right)>0$，即 $D^2+E^2-4AF>0$.

条件(1)(2)是二元二次方程表示圆的必要条件，但不充分，具有条件(1)(2)的方程曲线，还不一定是圆，只有增加条件(3)才能保证曲线一定是圆．因此，条件(1)(2)(3)合起来才是二元二次方程表示圆的充要条件.

2. 由于方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 和 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 都含有3个参变数，因而必须具备3个独立条件，才能确定一个圆．通常用待定系数法，确定常数 a，b，r 或 D，E，F，然后再写出圆的方程．学生已经学过待定系数法，在例题的讲解中一般不会有什么困难，但要再次向学生指出它是一种常用的数学方法，不仅可以用来确定圆的方程，还可以用来确定一些其他曲线的方程和解决有关问题.

3. 对于圆的一般方程，要求学生能够通过配方，理解在什么情况下，它的轨迹是一个圆，圆心的坐标是什么，半径是什么；在什么情况下，它的轨迹是点圆或无轨迹．这里注意不要让学生死记结果，而是要求学生掌握通过配方求圆心和半径的方法.

4. 本节中的例2向学生展示了一种研究曲线的重要方法：先求其方程，再研究方程的特点，进而得到曲线的性质．这个例题让学生进一步体会到解析几何的本质：用代数方法研究几何问题.

8.4　直线与圆的位置关系

1. 判断直线与圆的位置关系，教材介绍了两种思路：一是考虑方程组的解的情况；二是考虑圆心到直线的距离与半径的大小比较，这两种方法都应该让学生掌握.

2. 例3和习题第7，8题研究过圆上一点的切线方程.

8.5　直线与圆的方程的应用

1. 例1介绍直线方程的应用，例2介绍圆的方程的应用，教师应该根据学生的专业背景，对题目适当进行变通.

2. 例2中的数据完全可以动态生成，学生会觉得更生动，其解法还可以有多种(如利用相交弦定理等)．通过此问题的解决，如果能让学生产生这样的意识，“要求一个圆的半径，就要想办法寻求3个独立的条件”，那我们的教学目的就达到了.

Ⅲ　教学设计

8.1.1　数轴上的距离公式与中点公式

【教学目标】

1. 理解数轴上的点与实数之间的一一对应关系，会表示数轴上某一点的坐标.

2. 掌握数轴上的距离公式和中点公式，并能用这两个公式解决有关问题.

3. 培养学生勇于发现、勇于探索的精神以及合作交流等良好品质.

【教学重点】

数轴上的距离公式、中点公式.

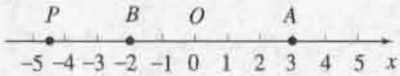
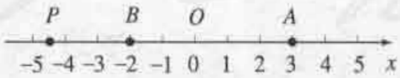
【教学难点】

距离公式与中点公式的应用.

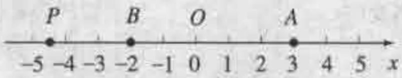
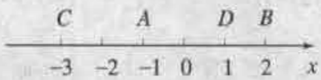
【教学方法】

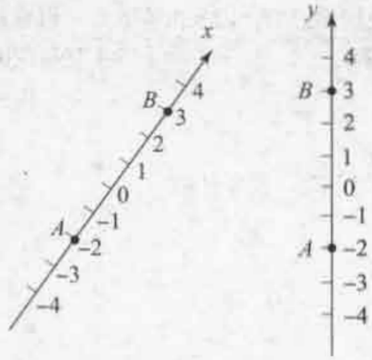
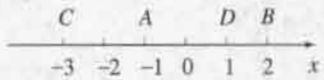
这节课主要采用问题解决法和分组教学法. 先从数轴入手，在使学生进一步明确了数与数轴上的点的一一对应关系后，给出数轴上点的坐标的定义及记法，在此基础上进一步学习了数轴上的距离公式及中点公式. 本节教学中，始终要坚持数形结合的思想和方法，让学生积极大胆的猜想，在探索过程中发现和归纳两个公式，以此增强学生的参与意识，提高学生的学习兴趣.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 数轴  2. 数轴上的点与实数是______对应的.	师：人类早期用石子来记数，但是石子记数不能移动，无法携带，于是人们又想到了用结绳等方法记数. 我国古书《易经》上记载有“结绳记数”的历史，即在一根长绳上打上结表示数. 随着社会的进步，记数的方法也越来越准确、科学. 到了17世纪，法国数学家笛卡儿发明了用直线和直线上的点来表示数的方法，这就是我们现在仍在沿用的数轴表示数的方法. 师：数轴的三要素是什么？ 学生回答，教师展示数轴.	通过引入激发学生学习的兴趣.
新课	1. 数轴上点的坐标  在数轴上，如果点 P 与 x 对应，则称点 P 的坐标为 x，记作 $P(x)$.	师：平面上我们用一对有序实数来表示一个点的位置，在数轴上，我们应当怎么表示一个点的位置呢？ 学生思考问题. 教师投影，给出数轴上点的坐标的定义及记法.	由二维坐标到一维坐标，似乎违反了人的认知规律，但在以往的学习中，学生对两维坐标是熟悉的. 通过类比平面坐标得到

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	练习一 观察数轴，完成下列题目：  (1) 点 P 与 -4.5 对应，则点 P 的坐标是________，记作________； (2) 点 A 的坐标是________，记作________； (3) 点 B 的坐标是________，记作________； (4) 点 O 的坐标是________，记作________. 2. 数轴上的距离公式 探究一 如图，填空：  (1) 图中点 A 的坐标是________，B 的坐标是________，C 的坐标是________，点 D 的坐标是________； (2) 点 A 与 B 之间的距离 $\|AB\|=$________，点 C 与 A 之间的距离 $\|CA\|=$________，点 B 与 C 之间的距离 $\|BC\|=$________； (3) 你能找出数轴上两点间距离与两个点坐标之间的关系吗？ 一般地，如果 $A(x_1)$，$B(x_2)$，则这两点的距离公式为 $\|AB\|=\|x_2-x_1\|$. 探究二 在以上例子中，我们遇到的数轴都	学生理解概念，教师强调记法. 请同学们结合定义抢答下列问题. 学生回答，教师点评. 教师投影提出问题，学生分组讨论探究. 教师巡视. 第(2)题主要是引导学生从图象上直观地求距离. 学生在尝试解决问题(3)的过程中，使认知得到升华. 在探究的基础上，教师给出数轴上两点的距离公式. 教师提出问题，学生观察	轴上坐标，学生容易理解. 强化新知识的记忆与应用，以形成学生内在的素质. 让学生通过小组合作，在探究过程中，归纳出数轴上两点间的距离公式，形成知识的主动认知. 使学生由感性认知(算法)上升到理性认知(公式). 探究二使学生认

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	是水平放置的，如果数轴不是水平放置的(如下图所示)，数轴上的距离公式成立吗？  试求两个图中点 A 与 B 之间的距离. 3. 数轴上的中点公式 探究三 根据下图回答问题：  (1) 点 $A(-1)$，$C(-3)$ 的中点坐标是多少？中点坐标与 A，C 两点的坐标有怎样的关系？ (2) 点 $A(-1)$，$D(1)$ 的中点坐标是多少？中点坐标与 A，D 两点的坐标有怎样的关系？ 一般地，在数轴上，$A(x_1)$，$B(x_2)$ 的中点坐标 x 满足关系式 $$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$ 4. 应用 例　已知点 $A(-3)$，$B(5)$，求： (1) $\|AB\|$； (2) A，B 两点的中点坐标.	并尝试解决. 师：不管数轴在平面上怎么放置，两点间的距离公式是不变的. 教师投影提出问题，学生分组讨论探究. 教师巡视. 学生在尝试解决问题的过程中，探究中点公式. 在探究的基础上，教师引导学生归纳出数轴上两点的中点公式. 教师投影，先让学生思考，小组内合作尝试解答.	识到非水平放置的数轴上的两点间的距离公式是不改变的，特别是竖直放置的数轴上的距离问题，为下节解决平面直角坐标系中两点间的距离公式打下基础. 让学生通过小组合作，在探究过程中，归纳得出数轴上两点间的中点公式. 在实践中应用本节知识解决有关数轴上的距离和中点

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	解 (1) $\|AB\|=\|5-(-3)\|=8$； (2) 设点 $M(x)$ 是 A，B 两点的中点，则 $$x=\frac{-3+5}{2}=1.$$ 即 A，B 的中点坐标为 1. 练习二 已知点 $A(-6)$，$B(-1)$，$C(2)$，$D(4.5)$，$E(7)$，求： (1) $\|AB\|$，$\|AC\|$，$\|BD\|$，$\|DE\|$； (2) A，B 的中点坐标，B，E 的中点坐标.	教师在学生思考的基础上，找个别学生回答，并给予点评. 小组合作完成，并采用抢答形式，提高课堂学习气氛. 教师针对学生的解答给予点评.	问题. 检验并强化本节知识的应用.
小结	1. 数轴上点的坐标. 2. 数轴上两点间的距离公式. 3. 数轴上两点间的中点公式.	回顾本节主要内容，强化一个定义及两个公式.	简洁明了地概括本节课的重要知识，学生易于理解记忆.
作业	教材 P67 练习 A 组第 1 题；练习 B 组第 3 题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.1.2 平面直角坐标系中的距离公式和中点公式

【教学目标】

1. 了解平面直角坐标系中的距离公式和中点公式的推导过程.

2. 掌握平面直角坐标系中的距离公式和中点公式，并能熟练应用这两个公式解决有关问题.

3. 培养学生勇于发现、勇于探索的精神以及合作交流等良好品质.

【教学重点】

平面直角坐标系中的距离公式、中点公式.

【教学难点】

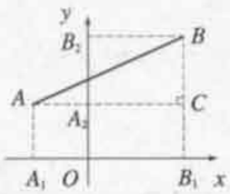
距离公式与中点公式的应用.

【教学方法】

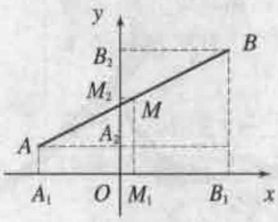
这节课主要采用问题解决法和分组教学法. 本节教学中，将平面(二维)的数量关系

转化为轴(一维)上的数量关系是关键. 先从复习上节内容入手，通过构建直角三角形，将两点间的距离转化为直角三角形的斜边长，从而利用勾股定理求出两点间的距离. 最后讨论了平面直角坐标系中的中点公式. 教学过程中，通过分组抢答的形式，充分调动学生的积极性.

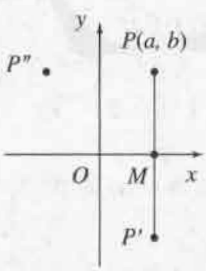
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 一般地，如果 $A(x_1)$，$B(x_2)$，则这两点的距离为 $$\|AB\|=\|x_2-x_1\|.$$ 2. 一般地，在数轴上，$A(x_1)$，$B(x_2)$ 的中点坐标 x 满足关系式 $$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$	师：上节我们学习了数轴上两点的距离公式与中点公式. 那么在平面直角坐标系内，已知两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，如何求这两点的距离？如何计算这两点的对称中心的坐标？	提出问题，激发学生的学生兴趣.
新课	1. 距离公式 探究一 如图，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.  过 A，B 分别向 x 轴、y 轴作垂线 AA_1，AA_2 和 BB_1，BB_2，垂足分别为 A_1，A_2，B_1，B_2，其中直线 BB_1 和 AA_2 相交于点 C. 两点的距离公式 $$\|AB\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$ 探究二 求两点之间的距离的计算步骤： S1 给两点的坐标赋值 $x_1=?$，$y_1=?$，$x_2=?$，$y_2=?$ S2 计算两个坐标的差，并赋值给另外两个变量，即	教师提出探究问题，学生根据已有的知识探究问题的解，回答下列问题： (1) 以上四个垂足的坐标分别是多少？ (2) $\|AC\|$ 与 $\|A_1B_1\|$ 关系如何？如何求 $\|A_1B_1\|$？ (3) $\|BC\|$ 等于多少？ (4) 在直角三角形 ABC 中，如何求 $\|AB\|$？ (5) 你能表示出 $\|AB\|$ 吗？ 教师在学生探究的基础上，投影距离公式，并让学生记忆. 师：你能说出求平面上两点间距离的步骤吗？ 教师引导学生探究依据公式求两点距离的步骤.	将探究问题细化为 5 个小问题，层层递进，降低了问题的难度，从而有利于学生解答. 为了学生便于理解，课件中将过 A，B 两点向 x 轴和 y 轴做垂线的过程，分解为分别向 x 轴做垂线和向 y 轴做垂线两步. 在探究过程中，进一步深化对公式的理解与掌握.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	$d_x = x_2 - x_1$，$d_y = y_2 - y_1$； S3　计算 $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$； S4　给出两点的距离 d.		
	例 1　已知 $A(2,\ -4)$，$B(-2,\ 3)$，求 $\|AB\|$. 解　因为 $x_1 = 2$，$x_2 = -2$，$y_1 = -4$，$y_2 = 3$，所以 $d_x = x_2 - x_1 = -2 - 2 = -4$， $d_y = y_2 - y_1 = 3 - (-4) = 7$. 因此 $\|AB\| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$.	教师引导学生结合求平面上两点间的距离的步骤解答.	通过例题的解答，使学生明确求两点间距离的步骤.
新课	练习一 求两点之间的距离： (1)$A(6,\ 2)$，$B(-2,\ 5)$； (2)$C(2,\ -4)$，$D(7,\ 2)$.	学生练习，教师巡视指导.	检验学生对公式的掌握情况.
	2. 中点公式 探究三 如图所示，若已知 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，那么怎么求它们的对称中心的坐标？  设 $M(x,\ y)$ 是 A，B 的对称中心，即线段 AB 的中点．过 A，B，M 分别向 x 轴，y 轴作垂线 AA_1，AA_2，	教师提出要探究的问题，学生解答以下问题： (1) 你能说出垂足 A_1，A_2，B_1，B_2，M_1，M_2 的坐标吗？ (2) 点 M 是 AB 中点吗？M_1 是 A_1，B_1 的中点吗？它们的坐标有怎样的关系？ (3)M_2 是 A_2，B_2 的中点吗？它们的坐标有怎样的关系？ (4) 你能写出点 M 的坐标吗？	将问题细化为 4 问，降低难度，学生在解答过程中容易得到公式.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	BB_1，BB_2，MM_1，MM_2，垂足分别是 A_1，A_2，B_1，B_2，M_1，M_2.		
	在平面直角坐标系内，两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 的中点 $M(x, y)$ 的坐标满足 $$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$	教师投影结论，学生理解掌握.	
	例 2　求证：任意一点 $P(x, y)$ 与点 $P'(-x, -y)$ 关于坐标原点成中心对称. 证明　设 P 与 P' 的对称中心为 (x_0, y_0)，则 $$x_0=\frac{x+(-x)}{2}=0,$$ $$y_0=\frac{y+(-y)}{2}=0.$$ 所以坐标原点为 P 与 P' 的对称中心.	师：例 2 中，点 P 与 P' 的对称中心是 P 与 P' 的中点吗？坐标怎么求？是多少？ 教师强调本例题的结论.	将问题化归为求点 P 与 P' 的中点坐标.
新 课	练习二 求下列各点关于坐标原点的对称点的坐标： $A(2, 3)$，$B(-3, 5)$，$C(-2, -4)$，$D(3, -5)$.	学生抢答，教师点评.	检验对例 2 所得结论的掌握.
	例 3　已知坐标平面内的任意一点 $P(a, b)$，分别求它关于 x 轴的对称点 P'，关于 y 轴的对称点 P'' 的坐标.  	师：(1) 如果点 P 与 P' 关于 x 轴对称，PP' 与 x 轴垂直吗？P' 的横坐标是多少？ (2) PP' 与 x 轴的交点 M 是线段 PP' 的中点吗？M 点的纵坐标是多少？ (3) 你能求出 P' 的纵坐标吗？怎么求的？ (4) 由以上分析，点 P' 的坐标是多少？	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课		(5) 你能求出 P'' 的坐标吗? 教师在学生探究的基础上进行总结.	
	练习三 求下列点关于 x 轴和 y 轴的对称点的坐标: $A(2, 3)$, $B(-3, 5)$, $C(-2, -4)$, $D(3, -5)$.	学生抢答,教师点评.	检验例3的掌握情况.
	例4　已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(-3, 0)$, $B(2, -2)$, $C(5, 2)$, 求顶点 D 的坐标. 解　因为平行四边形的两条对角线的中点相同,所以它们的坐标也相同. 设点 D 的坐标为 (x, y), 则 $\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{-3+5}{2}=1\\ \dfrac{y-2}{2}=\dfrac{0+2}{2}=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$ 所以顶点 D 的坐标为 $(0, 4)$.	教师引导学生解答,强调 AC 的中点与 BD 的中点相同. 教师规范解题步骤.	利用中点公式解决实际问题,进一步强化对公式的理解和掌握.
	练习四 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, -4)$, $C(6, 2)$, 求顶点 D 的坐标.	学生练习,教师巡视.	强化训练.
小结	1. 直角坐标系中两点间的距离公式. 2. 直角坐标系中两点间的中点公式. 3. 点的对称.	教师引导学生回顾总结本节所学内容.	简洁明了地概括本节课的重要知识,学生易于理解记忆.
作业	教材P70练习A组第1题,第2题;练习B组第3题(选做).	标记作业.	针对学生实际,对课后书面作业实施分层设置.

8.2.1 直线与方程

【教学目标】

1. 理解直线的方程的概念，会判断一个点是否在一条直线上.
2. 培养学生勇于发现、勇于探索的精神以及学生合作交流等良好品质.

【教学重点】

直线的特征性质，直线的方程的概念.

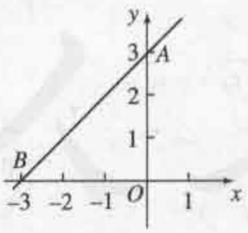
【教学难点】

直线的方程的概念.

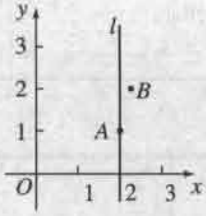
【教学方法】

这节课主要采用分组探究教学法. 本节首先利用一次函数的解析式与图象的关系，揭示了代数方程与图形之间的关系，然后用集合表示的性质描述法阐述了直线与方程的对应关系，进而给出了直线的方程的概念. 本节教学中，要突出用集合的观点，完成由形到数、由数到形的转化.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 用性质描述法表示大于 0 的偶数构成的集合，并判断 -1 和 6 在不在这个集合中. 2. 作函数 $y=x+3$ 的图象，并判断点 $(0, 1)$ 和 $(-2, 1)$ 在不在函数的图象上.	教师提出问题，学生解答. 教师点评.	复习本节相关内容.
新课	1. 函数与图象 一次函数的图象是一条直线，如 $y=x+3$ 的图象是直线 AB，如图所示.  2. 直线的特征性质 问题：平面直角坐标系中的任意一条直线，都是由点组成的集合. 但是，已知任意一点的坐标，到底怎样	师：$y=x+3$ 是一个代数方程，而直线 AB 是一个几何图形，也就是说，代数方程可以用几何图形表示，几何图形也可以用代数方程来表示. 学生在教师引导下理解代数方程与几何图形的对应关系. 师：既然直线是点的集合，那么我们就可以利用集合的特征性质来解决这一问题.	由特殊到一般，为引入直线的方程提供基础. 提出解决问题的方法.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	才能判断它是不是在给定直线上呢? 例如，通过点(2，0)且垂直于x轴的直线l.  	师：如图，在直线l上的点的横坐标有什么特点？横坐标是2的点也一定在直线l上吗? 直线l的特征性质能用$x=2$来表述吗? 学生回答教师提出的问题. 师：对于平面直角坐标系中的任意一点，只要看它的坐标是否满足$x=2$，就能判断出点是否在直线l上. 点$A(2，1)$的坐标满足方程$x=2$吗？点A在直线l上吗? 点$B(2.3，2)$满足方程$x=2$吗？点B在直线l上吗?	引导学生分析直线l上点的坐标特点，为概念的引入打下基础. 通过具体的例子来说明判断某点是否在给定直线上的方法.
新课	3. 直线的方程 一般地，在平面直角坐标系中，给定一条直线，如果直线上点的坐标都满足某个方程，而且满足这个方程的坐标所表示的点都在直线上，那么这个方程叫做直线的方程.	教师强调要从两方面来说明某个方程是不是给定直线的方程. 师：由上面的分析，通过点(2，0)且垂直于x轴的直线l的方程是什么? 学生回答.	
	例　分别给出下列直线的方程： (1)直线m平行于x轴，且通过点$(-2，2)$; (2)y轴所在的直线.	教师引导学生解答．引导过程中进一步强调直线上的点的坐标都满足方程，而且满足这个方程的坐标所表示的点都在直线上.	通过例题进一步加强学生对概念的理解.
	练习 (1)写出垂直于x轴且过点$(5，-1)$的直线方程. (2)已知点$(a，3)$在方程为$y=x+1$的直线上，求a的值.	学生小组合作完成练习，教师巡视了解学生掌握情况.	

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	1. 直线的方程的概念. 2. 判断一个点是否在直线上的方法.	师生共同回顾本节内容，进一步深化对概念的理解.	总结本节内容.
作业	教材 P73 练习 A 组题；练习 B 组题（选做）.	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.2.2 直线的倾斜角与斜率

【教学目标】

1. 掌握直线的倾斜角的概念，知道直线的倾斜角的范围.

2. 理解直线的斜率，掌握过两点的直线的斜率公式，了解倾斜角与斜率之间的关系.

3. 让学生从学习中体会到用代数方法解决几何问题的优点，能够从不同角度去分析问题，体会代数与几何结合的数学魅力.

【教学重点】

直线的倾斜角和斜率.

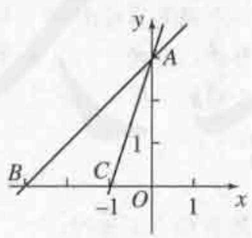
【教学难点】

直线的斜率.

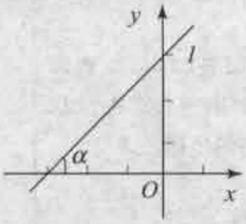
【教学方法】

这节课主要采用讲练结合的教学法. 本节首先通过观察同一坐标系中的两条直线引入了直线倾斜角的定义，在明确了倾斜角范围后，定义了直线的斜率，最后讨论了直线斜率与直线上两个不同点坐标之间的关系. 直线的倾斜角和斜率是反映直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度的，是研究两条直线位置关系的重要依据，要引导学生正确理解概念.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 由一点能确定一条直线吗？ 2. 观察并回答问题：  在图中，直线 AB，AC 都经过哪一点？它们相对于 x 轴的倾斜程度相同吗？	教师提出问题，学生讨论回答. 师：从图中可以看出，直线 AC 比直线 AB 更陡一些. 在数学中，我们用倾斜角和斜率来衡量直线相对于 x 轴的倾斜程度.	引入本节课题. 由直观图形引入问题，激发学生学习兴趣.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	直线倾斜角的定义： 一般地，平面直角坐标系内，直线向上的方向与 x 轴正方向所成的最小正角 α 叫做这条直线的倾斜角. 	教师对定义进行三方面的诠释： (1) 直线向上的方向； (2) x 轴的正方向； (3) 最小的正角. 学生结合图形理解倾斜角的概念.	明确直线倾斜角的定义.
	特别地，当直线与 y 轴垂直时，规定这条直线的倾斜角为 $0°$. 倾斜角的范围是 $$0° \leqslant \alpha < 180°.$$	教师强调与 y 轴垂直的直线(包括 x 轴) 的倾斜角.	
	直线斜率的定义： 倾斜角不是 $90°$ 的直线，它的倾斜角的正切值叫做这条直线的斜率，通常用 k 表示，即 $$k=\tan\alpha.$$	教师强调倾斜角是 $90°$ 的直线的斜率不存在. 应当使学生明确所有的直线都有倾斜角，但与 x 轴垂直的直线的斜率不存在.	明确倾斜角与斜率的关系.
	练习一 已知直线的倾斜角，求对应的斜率 k： (1) $\alpha=0°$；　(2) $\alpha=30°$； (3) $\alpha=135°$；　(4) $\alpha=120°$.	学生练习，教师巡视点评. 教师指明，当倾斜角是锐角时，斜率 k 为正值；当倾斜角是钝角时，斜率 k 为负值.	使学生通过练习感悟倾斜角的变化对斜率的影响.
	探究一 (1) 由不同的两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 能否确定一条直线? (2) 由 P_1 和 P_2 所确定的直线的倾斜角也能确定吗? (3) 如果直线的倾斜角不等于 $90°$，直线的斜率也能确定吗?	教师投影探究问题，学生分组讨论并尝试回答，教师点评.	通过小组合作探究，使学生明确由两点确定一条直线，相应的倾斜角和斜率(如果存在)也相应确定.
	探究二 设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$： (1) 当 $x_1=x_2$ 时，直线 P_1P_2 与 x 轴	教师提出问题，学生结合图形回答.	通过探究问题，使学生了解 P_1，P_2

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	什么关系？直线的倾斜角是多少？斜率存在吗？ (2) 当 $y_1=y_2$ 时，直线 P_1P_2 与 y 轴什么关系？直线的倾斜角是多少？斜率存在吗？是多少？ (3) 当 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$ 时，直线的倾斜角存在吗？斜率存在吗？	教师根据学生回答情况给予点评. 学生在回答(3)后，教师问：此时斜率怎么求呢？从而引出斜率的坐标公式.	的坐标与直线 P_1P_2 的斜率以及倾斜角之间的关系.
	斜率的坐标公式： 一般地，若 $x_1\neq x_2$，过点 $P(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的直线斜率为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.	教师强调 $x_1\neq x_2$.	斜率的坐标公式.
新课	例　判断直线 P_1P_2 的斜率是否存在. 若存在，求出它的值： (1) $P_1(3, 4)$，$P_2(-2, 4)$； (2) $P_1(-2, 0)$，$P_2(-5, 3)$； (3) $P_1(3, 8)$，$P_2(3, 5)$. 解　(1) 因为 P_1，P_2 的横坐标不同，所以直线 P_1P_2 的斜率存在，而且斜率为 $k=\dfrac{4-4}{-2-3}=0$； (2) 因为 P_1，P_2 的横坐标不同，所以直线 P_1P_2 的斜率存在，而且斜率为 $k=\dfrac{3-0}{-5-(-2)}=-1$； (3) 因为 P_1，P_2 的横坐标相同，所以直线 P_1P_2 的斜率不存在.	教师引导学生解答(1)(3)，进一步强调公式中 $x_1\neq x_2$ 这一条件. 学生做(2)，教师巡视.	公式应用，强化对公式的掌握.
	练习二 判断直线 P_1P_2 的斜率是否存在. 若存在，求出它的值： (1) $P_1(1, -1)$，$P_2(-3, 2)$； (2) $P_1(3, 4)$，$P_2(3, 2)$.	学生练习，教师巡视.	强化训练.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	1. 直线倾斜角的定义和范围. 2. 直线的斜率 $$k=\tan\alpha(\alpha\neq 90^\circ)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2).$$	教师引导学生共同回顾本节所学的知识.	总结本节内容.
作业	教材P76练习A组题；练习B组第1题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.2.3 直线方程的几种形式(一)

【教学目标】

1. 掌握直线的点斜式、斜截式，能根据条件熟练地求出直线的点斜式和斜截式方程.

2. 了解根据直线上两点坐标求直线方程的方法.

3. 让学生从学习中进一步体会用代数方法解决几何问题的优点，体会用数形结合的方法解决问题的魅力.

【教学重点】

直线的点斜式与斜截式方程.

【教学难点】

理解直线的点斜式方程的推导过程.

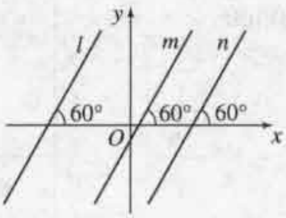
【教学方法】

这节课主要采用讲练结合、小组合作探究的教学法. 引导学生理解推导直线方程的点斜式的过程，认识到点斜式直线方程与斜率坐标公式之间的关系. 对于直线方程的斜截式，要使学生认识到斜截式是点斜式的特殊情形. 教材在例2中给出了已知两点求直线方程的方法，教师可针对学生的实际情况补充直线方程的两点式，但要求不宜过高.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 直线倾斜角的定义及范围是什么? 2. 已知$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，且$x_1\neq x_2$，则直线的斜率是多少?	教师提出问题，学生回答，师生共同补充点评.	引入本节课题.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	3. 观察下图：  	师：给定一个角 $\alpha=60°$. 由角 α 能确定一条直线吗？ 生：不能. 师：我们知道 $k=\tan\alpha$，给定一个斜率 k，由斜率 k 能确定一直线吗？ 生：不能.	由直观图形引入问题，激发学生学习兴趣.
新课	探究一 如果直线的倾斜角为 60°(即斜率为 $\sqrt{3}$)，而且通过点(0，0)，那么这样的直线是唯一的吗？ 探究二 若直线 l 经过点 $P_0(1, 2)$，且斜率为$\sqrt{3}$，求直线 l 的方程. 设直线 l 上不同于 P_0 的任意一点的坐标为 $P(x, y)$，由斜率公式得 $k=\dfrac{y-2}{x-1}=\sqrt{3}(x\neq 1)$， 整理变形为 $y-2=\sqrt{3}(x-1)$. 经验证，(1，2) 点符合上式，此方程为所求直线方程. 探究三 若直线 l 经过点 $P_1(x_0, y_0)$，且斜率为 k，求 l 的方程. 设点 $P(x, y)$ 是直线上不同于点 P_1 的任意一点，根据经过两点的直线的斜率公式得 $k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$， 可化为 $y-y_0=k(x-x_0)$. 点斜式方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.	师：上一节，我们学习了直线的斜率公式，它也是我们继续学习推导直线方程的基础. 师：直线l的方程也就是直线上任意一点所应满足的方程. 师：如何用 P_0，P 两点的坐标表示直线 l 的斜率？ 师：点(1，2) 也满足方程 $y-2=\sqrt{3}(x-1)$ 吗？ 师：如果把上述求直线方程的过程推广到一般情形，即可得到直线方程的点斜式. 请同学们仿照上面的方式推导直线 l 的方程. 学生推导公式，教师巡视. 师问：(1) 这个方程是由哪两个条件确定的？ (2) 当直线 l 的倾斜角为 0° 时，直线方程是什么？ (3) 当直线倾斜角为 90° 时，直线有斜率吗？它的方程能用点斜式表示吗？此时直线方程是什么？	使学生明确由点和倾斜角(或斜率)可以确定一条直线. 通过具体的例子让学生初步了解由斜率公式推导直线方程的方法. 推导一般情形下的直线方程. 使学生明确求直线点斜式方程所需的条件.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	斜截式方程： (1) 如果直线的斜率为 k，直线与 y 轴交点为 $(0, b)$，你能写出这条直线的方程吗？ (2) 斜截式方程 $$y=kx+b;$$ (3) b 是直线在 y 轴上的截距. 例 1　求下列直线的方程： (1) 过点 $(0, 0)$，斜率为 2； (2) 过点 $(4, 5)$，斜率为 1； (3) 过点 $(5, 5)$，倾斜角为 $0°$； (4) 过点 $(1, 2)$，倾斜角为 $30°$； (5) 截距为 -3，倾斜角为 $45°$. 解　(1) 直线的方程为 $y-0=2(x-0)$，即 $y=2x$； (2) 直线的方程为 $y-5=1\times(x-4)$，即 $y=x+1$； (3) 直线的斜率为 $k=\tan 0°=0$，因此方程为 $y-5=0\times(x-5)$，即 $y=5$. (4) 直线的斜率为 $k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此方程为 $y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(x-1)$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2-\frac{\sqrt{3}}{3}$； (5) 直线的斜率为 $k=\tan 45°=1$，因此方程为 $y=1\times x+(-3)$，即 $y=x-3$. 练习一 求下列直线的方程： (1) 过点 $(-3, 2)$，斜率为 -1； (2) 过点 $(1, 2)$，倾斜角为 $60°$； (3) 截距为 -2，倾斜角为 $45°$. 例 2　求下列直线的方程： (1) 过点 $(0, 0)$ 和 $(1, 5)$；	师：$y=kx+b$ 方程是由哪两个条件确定的？ 教师演示并提问： 截距 b 可以大于 0？可以等于或小于 0 吗？截距是距离吗？ 教师讲解 (1)(3)(5)，剩余两个让学生练习. 师：第 (1) 题中条件是什么？应当用哪一个方程？可以用斜截式来求吗？ 师：倾斜角与斜率有怎样的关系？求出直线的斜率后，怎么求直线方程？ 师：第 (5) 题中条件是什么？应当用哪一个方程？ 学生练习，教师巡视指导. 师：在求直线方程的条件中，缺少哪个条件？怎么求？	在学习点斜式的基础上，推导斜截式方程. 强调截距 b 的几何意义. 教师讲解例题，学生进一步学习求直线方程的方法. 强化训练. 学习由直线上两点坐标来求直线方

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	(2) 过点(5, 0)和(0, 6). 解 (1) 直线的斜率 $k=\frac{5-0}{1-0}=5$, 所以直线方程为 $y-0=5\times(x-0)$, 即 $y=5x$; (2) 直线的斜率 $k=\frac{6-0}{0-5}=-\frac{6}{5}$, 所以由直线的斜截式方程得 $y=-\frac{6}{5}x+6$. 练习二 求过点(−2, 2)和(0, −2)的直线方程.	师：可以用点斜式求直线的方程吗？ 师：请用两种方法求直线的方程. 学生练习，教师巡视指导.	程的方法. 教师可以根据教学的实际情况，讲解直线方程的两点式. 强化训练.
小结	1. 直线点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$. 2. 直线的斜截式方程 $y=kx+b$.	师生共同回顾本节所学两个方程，教师指出直线方程的名称也就是求方程所需的两个条件.	总结本节内容.
作业	教材P79练习A组第1题(2)(4)，第2题(2)；练习B组第1题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.2.3 直线方程的几种形式(二)

【教学目标】

1. 掌握直线的一般式，理解二元一次方程与直线的对应关系.

2. 了解直线的方向向量和法向量的概念，了解直线的方向向量、法向量及斜率之间的关系.

3. 培养学生事物之间的普遍联系与互相转化的辩证唯物主义观点.

【教学重点】

直线的一般式方程，直线的方向向量和法向量.

【教学难点】

二元一次方程与直线的对应关系，直线的方向向量、法向量与斜率的关系.

【教学方法】

这节课主要采用讲练结合、小组合作探究的教学法. 首先从所学的直线方程入手，揭示所学过的直线方程都可以表示成 $Ax+By+C=0$ 的形式，引入了直线的一般方程的概念. 在引入直线方程的一般式后，介绍了直线的方向向量和法向量的概念，进而讨论了方向向量与斜率的关系、法向量与一般式方程中一次项系数之间的关系，为以后进一步讨论两条直线的位置关系等内容打下基础.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 根据下列条件，写出直线的方程： (1) 经过点 $A(8,-2)$，斜率是 -1； (2) 截距是 2，斜率为 1； (3) 经过点 $A(4,2)$，平行于 x 轴； (4) 经过点 $A(4,2)$，平行于 y 轴； 2. 上述几种形式的直线方程，都可以表示成 $Ax+By+C=0$ 的形式吗?	教师提出问题，学生解答. 学生尝试回答，教师问而不答.	创设问题情境，启动学生思维. 通过实例体会只有直线的一般式能表示所有的直线.
新课	1. 直线的一般式方程 平面直角坐标系中的每一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示吗? 对直线的倾斜角 α 进行讨论： (1) 当 $\alpha\neq 90^\circ$ 时，$k=\tan\alpha$，其方程可写成 $y=kx+b$，可变形为 $Ax+By+C=0$， 其中 $A=k$，$B=-1$，$C=b$； (2) 当 $\alpha=90^\circ$ 时，直线斜率不存在，其方程可写成 $x=a$ 的形式，也可以变形为 $Ax+By+C=0$， 其中 $A=1$，$B=0$，$C=a$. 结论： 平面直角坐标系中任何一条直线都可以用关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$(A，B 不同时为零) 来表示；反之，每一个关于 x，y 的二元一	教师提出问题. 学生分组讨论探究. 在学生充分讨论的基础上，找个别学生回答，教师点评. 师：(1) 在平面直角坐标系中，表示任何一条直线的方程都是关于 x，y 的一次方程；反之，每一个关于 x，y	通过探究让每一位学生都能积极主动参与到教学活动中，并且敢于发表自己的见解，调动了学生学习的兴趣，使学生的主体地位得到充分的体现，也使得本节课的重点和难点得以突破. 使学生明确二元一次方程与直线的对应关系.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	次方程都表示一条直线. 直线的一般式方程： 关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$(A，B 不同时为零) 叫做直线的一般式方程. 2. 直线的方向向量与法向量 (1) 如果非零向量 $\boldsymbol{a}$ 所在的直线与直线 l 平行，则称 $\boldsymbol{a}$ 为直线 l 的一个方向向量； (2) 如果非零向量 $\boldsymbol{n}$ 所在的直线与直线 l 垂直，则称 $\boldsymbol{n}$ 为直线 l 的一个法向量； 你能找出直线 $x=2$ 的一个方向向量和一个法向量吗？直线的方向向量与法向量有怎样的关系？ 探究一 (1) 如果直线 l 过点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 和 $P_2(x_2,\ y_2)$，向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标是多少？它是直线 l 的一个方向向量吗？ (2) 令 $\lambda=x_2-x_1$，如果 $\lambda\neq 0$，设直线 l 的斜率为 k，则 $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)=\lambda\left(1,\ \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$ $=\lambda(1,\ k)$， 那么，向量 $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ 与向量 $(1,\ k)$ 是什么关系？向量 $(1,\ k)$ 是直线的一个方向向量吗？	的一次方程都表示直角坐标系中的一条直线； (2) 直线方程的特殊形式与一般形式可以互相转化. 教师强调 A，B 不同时为零. 师：根据方向向量的定义，一条直线的方向向量有多少？它们什么关系？ 师：根据法向量的定义，一条直线的法向量有多少？它们什么关系？直线的方向向量与法向量关系是怎样的？它们坐标满足什么条件？ 生：向量 $\boldsymbol{a}=(0,\ 1)$ 是直线 $x=2$ 的一个方向向量，向量 $\boldsymbol{n}=(1,\ 0)$ 是直线 $x=2$ 的一个法向量．它们互相垂直. 学生分小组讨论并回答问题，教师点评.	明确直线的一般式方程. 引入直线的方向向量及法向量. 探究直线的方向向量与斜率的关系.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	探究二 (1) 设 l 的一般方式方程为 $$Ax+By+C=0,$$ 如果 $P_2(x_2,\ y_2)$ 和 $P_1(x_1,\ y_1)$ 都在直线上，两点 P_2，P_1 满足怎样的关系? (2) 把得到的两个关系式相减，你能得到怎样的式子? (3) 由 $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$ 能说明向量 $\boldsymbol{n}=(A,\ B)$ 与向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 垂直吗? (4) 向量 $\boldsymbol{n}=(A,\ B)$ 是直线 l 的一个法向量吗?	学生小组讨论并回答问题，教师点评.	探究直线的法向量与一般方程的关系. 通过探究将本节重点和难点分化，并激发学生的学习兴趣.
	结论： 如果知道直线的斜截式方程 $y=kx+b$，则 $(1,\ k)$ 是它的一个方向向量；如果知道直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$，则 $(A,\ B)$ 是它的一个法向量.	师：直线 $y=-2x+3$ 的一个方向向量是多少? 法向量是多少?	总结规律.
	例3　求下列直线的一般式方程，并指出它的一个方向向量和法向量： (1) 过点 $(-3,\ -2)$，且斜率为 -2； (2) 过点 $(5,\ 5)$，且倾斜角为 $120°$. 解　(1) 直线的点斜式方程为 $y-(-2)=(-2)\times[x-(-3)]$，化简得 $y=-2x-8$，所以该直线的一般式方程为 $$2x+y+8=0.$$ 由上知，$(1,\ -2)$ 为直线的一个方向向量，$(2,\ 1)$ 为直线的一个法向量. (2) 因为直线的斜率为 $$k=\tan 120°=-\sqrt{3}.$$ 所以直线的点斜式方程为 $y-5=-\sqrt{3}\times(x-5)$，因此该直线的一般式方程为	师：第(1)题给出的条件是什么? 能直接写出直线的什么形式? 你能由直线的点斜式方程直接得到一般式方程吗? 师：由倾斜角如何求出直线的斜率?	本节内容的初步应用.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$\sqrt{3}x+y-5-5\sqrt{3}=0$. 由上知，$(1, -\sqrt{3})$为直线的一个方向向量，$(\sqrt{3}, 1)$为直线的一个法向量. 练习一 求下列直线方程的一般式，并指出它的一个方向向量和法向量： (1) 斜率为$\frac{1}{2}$，过点$(-1, 2)$； (2) 过点$(1, 1)$且平行于x轴.	学生练习，教师巡视指导. 对第(2)题，可以指导学生利用数形结合来解.	强化训练.
	例4　求下列直线的一般式方程： (1)$(1, 4)$是直线的一个方向向量，且在y轴上的截距为5； (2)$(3, 4)$是直线的一个法向量，且直线通过点$(-1, -2)$. 解　(1) 由已知可得直线的斜率为4，所以直线的斜截式方程为$y=4x+5$，因此一般式方程为 $4x-y+5=0$； (2) 由已知可设直线方程为$3x+4y+C=0$，其中C为待定系数. 代入点$(-1, -2)$，有 $3\times(-1)+4\times(-2)+C=0$, 解得$C=11$，因此直线的一般式方程为 $3x+4y+11=0$.	师：第(2)题中用到了待定系数法.	知识应用. 教师可结合学生情况，介绍待定系数法.
	练习二 求法向量为$(1, 2)$且过点$(3, 4)$的直线的一般式方程.	学习练习，教师巡视指导.	强化训练.
小结	1. 直线一般式方程 $Ax+By+C=0$. 2. 直线的方向向量. 3. 直线的法向量.	师生共同回顾本节所学直线方程的一般式及直线的方向向量和法向量.	总结本节内容.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
作业	教材P82练习A组第1，2题；练习B组第3题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.2.4 直线与直线的位置关系(一)

【教学目标】

1. 会求两条直线的交点，理解两条直线的三种位置关系(平行、相交、重合)与相应的直线方程所组成的二元一次方程组的解(无解、有唯一解、有无数个解)的关系.

2. 掌握用直线的斜率来判断两直线位置关系的方法.

3. 让学生从学习中体会到用代数方法研究几何图形性质的思想，体会代数与几何结合的数学魅力.

【教学重点】

两条直线平行或相交的条件.

【教学难点】

求两条直线的交点.

【教学方法】

这节课主要采用讲练结合、小组合作探究的教学法. 本节课首先通过问题引入本节要研究的内容，在讨论了两条直线的位置关系与相应的直线所组成的二元一次方程组解的对应关系后，进一步研究了用直线的斜率来判断两条直线位置关系的方法.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 回答下列问题： (1) 直线 $y=2x+1$ 的斜率是______，在 y 轴上的截距是______； (2) 直线 $y=2$ 的斜率是______，在 y 轴上的截距是______； (3) 直线 $x=2$ 的斜率是______，在 y 轴上的截距______.	教师投影，学生回答问题，教师点评.	回顾以前所学知识，为新课做准备.
	2. 在平面内，两条不重合的直线要么平行，要么相交. 那么，给定平面直角坐标系中的两条直线，能否借助于方程来判断它们的位置关系?	教师提出问题，学生思考.	提出问题，激发学生求知欲.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	1. 两条直线的交点 (1) 给定平面直角坐标系中的两条直线 l_1：$y=k_1x+b_1$， l_2：$y=k_2x+b_2$. 如果一个点是 l_1 与 l_2 的交点，那么它的坐标必满足 $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ (2) 方程组 $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ 有一组解 $\Leftrightarrow$ 两条直线有一个公共点 $\Leftrightarrow$ 直线 l_1 与 l_2 相交； 方程组 $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ 有无数组解 $\Leftrightarrow$ 两条直线有无数个公共点 $\Leftrightarrow$ 直线 l_1 与 l_2 重合； 方程组 $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ 无解 $\Leftrightarrow$ 两条直线没有公共点 $\Leftrightarrow$ 直线 l_1 与 l_2 平行.	师：如果两条直线相交，由于点同时在这两条直线上，交点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，如果这两个二元一次方程只有一个公共点，那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 与 l_2 的交点. 教师引导学生完成方程组解的情况与直线的位置的对应关系.	使学生理解两条直线的三种位置关系（平行、相交、重合）与相应的直线方程所组成的二元一次方程组的解（无解、有唯一解、有无数个解）的关系.
	2. 用斜率判断直线的位置关系 将方程组 $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ ① 中两式相减，整理得 $(k_1-k_2)x=-(b_1-b_2)$. ② (1) 当 $k_1\neq k_2$ 时，则②有多少解？方程组①有多少解？l_1 与 l_2 有几个交点？交点坐标是什么？l_1 与 l_2 是什么位置关系？ (2) 当 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$ 时，则②有多少解？方程组①有多少解？l_1 与 l_2 有几个交点？l_1 与 l_2 是什么位置关系？ (3) 当 $k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$ 时，则②有	学生分组讨论教师提出的问题，教师在学生充分讨论的基础上，找个别学生回答，其他同学可以补充. 教师点评.	通过讨论，将两条直线的位置关系问题化归为两条直线的斜率问题.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	多少解？方程组①有多少解？l_1与l_2有几个交点？l_1与l_2是什么位置关系？ 结论： 如果 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，则： l_1与l_2相交$\Leftrightarrow k_1\neq k_2$； l_1与l_2平行$\Leftrightarrow k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$； l_1与l_2重合$\Leftrightarrow k_1=k_2$且$b_1=b_2$.	 师生共同总结.	 师生共同总结，培养学生的归纳能力.
	例1 判断下列各对直线的位置关系(相交、平行或重合)，如果相交，求出交点： (1)l_1：$y=3x+4$，l_2：$y=3x-4$； (2)l_1：$y=-3$，l_2：$y=1$； (3)l_1：$y=-3x+4$，l_2：$y=x-8$. 解 (1)因为两直线斜率都为3，而截距不相等，所以l_1与l_2平行； (2)因为两直线的斜率都为0，而截距不相等，所以l_1与l_2平行； (3)因为两直线斜率不相等，所以l_1与l_2相交. 联立得方程组 $\begin{cases}y=-3x+4\\y=x-8\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3\\y=-5\end{cases}$ 因此，l_1与l_2的交点为(3，−5).	教师引导学生解答. 教师演示解方程组的过程.	让学生表述，可以锻炼学生的语言表达能力.
	例2 判断下列各对直线的位置关系(相交、平行或重合)，如果相交，求出交点： (1)l_1：$x-1=0$，l_2：$y+4=0$； (2)l_1：$x-y-3=0$，l_2：$x+y+1=0$； (3)l_1：$x-2y+3=0$，l_2：$2x-4y+6=0$.	师：下面我们来研究一下，如果知道的是两直线的一般式方程，如何来判断它们的位置关系. 学生回答，教师引导、点评.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	解　(1) 联立得方程组 $$\begin{cases}x-1=0\\y+4=0\end{cases}$$ 解得$\begin{cases}x=1\\y=-4\end{cases}$ 因此，l_1 与 l_2 相交，且交点为$(1,-4)$. (2) 联立得方程组 $$\begin{cases}x-y-3=0\\x+y+1=0\end{cases}$$ 解得$\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$ 因此，l_1 与 l_2 相交，且交点为$(1,-2)$. (3) 联立得方程组 $$\begin{cases}x-2y+3=0\\2x-4y+6=0\end{cases}$$ 第二式减第一式的 2 倍得 $0=0$，所以上述方程组有无穷多组解，即 l_1 与 l_2 有无穷多个交点. 因此，l_1 与 l_2 重合. 练习 判断下列各对直线的位置关系(相交、平行或重合)，如果相交，求出交点： (1)$y=2x+3$，$y=-2x+1$； (2)$3x-4=0$，$x=2$； (3)$2x-y+1=0$，$x-2y+1=0$.	师：要解这个方程组，用什么消元法？你会求解吗？ 学生回答，教师点评. 对(3)的解方程组的过程学生可能有困难，教师应引导学生解决. 学生小组合作完成练习，教师巡视点评指导.	让学生复习解二元一次方程组的方法. 强化训练．加深对本节内容的理解掌握.
小结	1. 方程组$\begin{cases}y=k_1x+b_1\\y=k_2x+b_2\end{cases}$的解与两直线位置的对应关系. 2. 如果 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，则： l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow k_1\neq k_2$； l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$； l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$.	师生共同回顾本节所学内容.	总结本节内容.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
作业	教材P86练习A组第1题(2)(4)，第2题(2)；练习B组第1题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.2.4 直线与直线的位置关系(二)

【教学目标】

1. 掌握两条直线垂直的条件，能利用直线的斜率或法向量来判断两条直线是否垂直.

2. 会求过已知点且与已知直线垂直的直线.

3. 让学生从学习中体会到用代数方法研究几何图形性质的思想，体会代数与几何结合的数学魅力.

【教学重点】

两条直线垂直的条件.

【教学难点】

两条直线垂直的条件的应用.

【教学方法】

这节课主要采用讲练结合、小组合作探究的教学法. 本节课从直线斜截式和一般式两个方向讨论了两直线垂直的条件：先由直线的斜截式方程，讨论了两条直线垂直时的斜率之间的关系，即 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$；再由直线的一般式方程讨论了两条直线垂直时的条件，即 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 回答下列问题： (1) 若 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，则 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充要条件是______； (2) 若直线的斜率为 k，则直线的方向向量 $\boldsymbol{a}=$ ____. 2. 直线 l：$Ax+By+C=0$ 的一个法向量是______.	教师投影，学生回答问题，教师点评. 教师提出问题，学生思考.	回顾以前所学知识，为新课做准备. 提出问题，激发学生求知欲.

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	探究一 已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$， l_2：$y=k_2x+b_2$. (1) 直线 l_1 的斜率是多少？它的一个方向向量是多少？直线 l_2 呢？ (2) 当直线 l_1 与 l_2 垂直时，两条直线的方向向量什么关系？	教师提出问题，学生分小组合作探究. 找学生回答，师生共同点评.	设置大密度小台阶的问题，有利于学生思考，并分化了难点.
	结论一 当两条直线的斜率存在时，有 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.	师生共同归纳结论，教师指明结论的前提是两条直线的斜率存在.	利用斜截式讨论两条直线是否垂直的前提是两直线的斜率都存在.
	例 3　判断下列各对直线是否垂直： (1)l_1:$y=-2x+1$，l_2:$y=\frac{1}{2}x-1$； (2)l_1:$y=3x+1$，l_2:$y=\frac{1}{3}x-4$. 解　(1) 因为$(-2)\times\frac{1}{2}=-1$，所以 $l_1\perp l_2$； (2) 因为 $3\times\frac{1}{3}\neq-1$，所以 l_1 与 l_2 不垂直.	教师引导学生解答.	
	练习一 判断下列各对直线是否垂直： (1)l_1：$y=-x+3$，l_2：$y=x-1$； (2)l_1：$y=3x$，l_2：$y=\frac{1}{3}x-1$.	学生练习，可采用抢答形式.	强化练习.
	探究二 已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$， l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$. (1) 直线 l_1 的一个法向量是多少？直线 l_2 呢？ (2) 当直线 l_1 与 l_2 垂直时，两条直线	师：直线 l：$Ax+By+C=0$ 的一个法向量是多少？ 学生回答，教师点评.	针对学生情况，应当复习一下向量有关的知识.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	的法向量什么关系？ 结论二 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$. 例 4　判断下列各对直线是否垂直： (1)$l_1$：$2x-3y+4=0$，$l_2$：$x-y+6=0$； (2)$l_1$：$3x-4y-11=0$，$l_2$：$8x+6y+3=0$. 解　(1)因为$2\times1+(-3)\times(-1)\neq0$，所以 l_1 与 l_2 不垂直； (2)因为$3\times8+(-4)\times6=0$，所以$l_1\perp l_2$. 练习二 判断下列各对直线是否垂直： (1)$x+2=0$，$y-4=0$； (2)$2x+y-3=0$，$3x-6=0$.	师生共同归纳结论. 师：应用本结论来讨论两条直线是否垂直更具一般性，不需要考虑直线的斜率是否存在. 找个别同学回答，师生共同点评. 学生抢答，师生点评.	把学习的主动权交给学生，提高学生学习的兴趣. 强化训练.
小结	1. 已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$， l_2：$y=k_2x+b_2$. 则有 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$. 2. 已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$， l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$. 则有 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.	师生共同回顾本节所学内容，强调当两条直线的斜率存在时，才能应用 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$. 而 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$ 更具一般性.	总结本节内容.
作业	教材 P88 练习 A 组题；练习 B 组第 2 题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.2.5 点到直线的距离

【教学目标】

1. 掌握点到直线的距离公式，会运用公式解决有关点到直线距离的简单问题，会求两条平行线之间的距离.

2. 培养学生数形结合的能力，综合应用知识解决问题的能力，类比思维能力. 训练学生由特殊到一般的思想方法.

【教学重点】

点到直线的距离公式.

【教学难点】

点到直线的距离公式的应用.

【教学方法】

这节课主要采用讲练结合的方法. 首先复习了点到直线的距离的概念，在解决一个特例后，给出了点到直线的距离公式，再通过例题讲解了公式的一般用法，最后通过例题解决了两平行线间的距离. 教学过程中，教师可以结合学生的实际情况，与学生一起推导点到直线的距离公式，及两条平行线间的距离公式.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	点到直线的距离：直线外一点到直线的垂线段的长度，叫点到直线的距离.	师：请大家看投影，在图中 A 点到直线 l 上的点的连线中，哪一条线段的长度是点 A 到直线 l 的距离？ 学生尝试回答，师生一起归纳概念.	引导学生复习点到直线的距离的概念.
新课	问题 1 给定平面直角坐标系内一点的坐标和直线的方程，如何求点到直线的距离？ 问题 2 若 $P(3,\ 4)$，直线 l 的方程为 $x-4=0$，你能求出 P 点到直线 l 的距离吗？	教师提出问题，学生思考. 师：在直角坐标系中，你能找到 P 点的位置吗？你能画出直线 $x-4=0$ 吗？它是一条怎样的直线？ 学生根据教师提出的问题，画图.	提出本节要研究的问题，问而不答. 将问题的解决步骤通过设问呈现，让学生在解答问题的过程中，体会解决问题的方法.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
		师：点 P 到直线的距离是多少？怎么算的？	
	点到直线的距离公式： 一般地，求点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离 d 的公式是 $$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$	师：在运用公式时，直线 l 的方程是一般式. 教师强调公式应用的条件，并让学生记忆公式.	让学生在知道公式应用的条件下来记忆公式. 强调公式应用的条件.
	问题 3 若点 P 在直线 l 上，点 P 到 l 的距离是多少？反之成立吗？	教师提出问题，学生回答.	
新 课	例 1　求点 $P(-1, 2)$ 分别到直线 l_1：$2x+y=5$，l_2：$3x=1$ 的距离 d_1 和 d_2. 解　将直线 l_1，l_2 的方程化为一般式 $2x+y-5=0$，$3x-1=0$. 由点到直线的距离公式，得 $$d_1=\frac{\lvert 2\times(-1)+2-5\rvert}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5};$$ $$d_2=\frac{\lvert 3\times(-1)-1\rvert}{3}=\frac{4}{3}.$$	师：直线 l_1 和 l_2 是直线方程的一般式吗？一般式是怎样的？ 学生回答，教师点评. 教师请学生求出这两个距离. 学生解答，教师巡视. 师：在求点 P 到直线 l_2 的距离时，你能用另外的方法求吗？ 学生类比问题 2 求解.	让学生在求解的过程中熟悉公式.
	练习一 求下列点到直线的距离： (1)$O(0, 0)$，l_1：$3x+4y-5=0$； (2)$A(2, -3)$，l_2：$x+y-1=0$.	学生练习，教师巡视.	强化训练，掌握公式的应用.
	例 2　求平行线 $2x-7y+8=0$ 和 $2x-7y-6=0$ 之间的距离. 解　在直线 $2x-7y-6=0$ 上任取一点，如取 $P(3, 0)$，则两条平行线之间的距离就是点 $P(3, 0)$ 到直线 $2x-7y+8=0$ 的距离. 因此	师：平行线间的距离有怎样的特点？你能在直线 $2x-7y-6=0$ 上找到一个特殊点吗？你找到的这个点到直线 $2x-7y+8=0$ 的距离是两条平行线间的距离吗？ 学生尝试回答，教师点评.	将两平行直线间的距离化归为点到直线的距离.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$d=\frac{\lvert 2\times 3-7\times 0+8\rvert}{\sqrt{2^2+(-7)^2}}=\frac{14\sqrt{53}}{53}$. 练习二 求两条平行线 $2x+3y-8=0$ 和 $2x+3y+18=0$ 之间的距离.	学生练习，教师巡视.	强化训练.
小结	1. 点到直线的距离的概念. 2. 点到直线的距离公式 $d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 3. 两平行直线间的距离.	学生在教师的引导下回顾本节主要内容，加深对公式的记忆.	简洁明了地概括本节课的重要知识，学生易于理解记忆.
作业	教材 P90 练习 A 组第 1 题；教材 P91 练习 B 组第 1 题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.3.1 圆的标准方程

【教学目标】

1. 掌握圆的标准方程，并能根据圆的方程写出圆心坐标和半径.
2. 会根据已知条件求圆的标准方程.
3. 进一步培养学生数形结合能力，综合应用知识解决问题的能力.

【教学重点】

圆的标准方程，根据已知条件求圆的标准方程.

【教学难点】

圆的标准方程的推导.

【教学方法】

这节课主要采用讲练结合的方法. 首先复习圆的定义，在定义的基础上，推导了圆的标准方程. 最后通过例题，学习了圆的标准方程的应用.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 五环旗、赵州桥引入	师：圆是我们生活中经常遇到的曲线，这节课我们就来学习圆的标准方程.	使学生明确学习内容.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	2. 圆的定义 平面内到一定点的距离等于定长的点的轨迹. 定点是圆心，定长为半径.	教师提出问题，学生回答.	让学生回顾圆的定义，明确确定圆必须知道圆心和半径.
新课	如何求以 $C(a, b)$ 为圆心，以 r 为半径的圆的方程？ 设 $M(x, y)$ 是所求圆上任一点，点 M 在圆 C 上的充要条件是 $\|CM\|=r$. 由距离公式，得 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$, 两边平方，得 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.	师：设 $M(x, y)$ 是圆上任意一点，点 M 在圆上的充要条件是什么？ 学生回答，教师点评. 师：你能把 $\|CM\|=r$ 用点的坐标表示出来吗？ 学生回答，教师点评. 师：把得到的方程两边平方后，化简得到的方程是怎样的？ 师：方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 就是以 $C(a, b)$ 为圆心，以 r 为半径的圆的方程，称为圆的标准方程.	紧扣圆的定义推导方程. 使学生明确圆的标准方程的形式.
	练习一 说出下列圆的方程： (1) 以 $C(1, -2)$ 为圆心，半径为 3 的圆的方程； (2) 以原点为圆心，半径为 3 的圆的方程.	学生口答，教师点评.	强化训练.
	练习二 说出下列圆的圆心及半径： (1) $x^2+y^2=1$; (2) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$; (3) $(x+1)^2+(y+1)^2=2$; (4) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$.	学生口答，教师点评.	
	例1　求过点 $A(6, 0)$，且圆心 B 的坐标为 $(3, 2)$ 的圆的方程. 解　因为圆的半径 $r=\|AB\|=\sqrt{(3-6)^2+(2-0)^2}$	师：求一个圆的标准方程需要知道哪几个量？本例中，哪些量是已知的？需要我们求什么？怎么求？	明确确定圆的方程的条件.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	$=\sqrt{13}$, 所以所求圆的方程是 $$(x-3)^2+(y-2)^2=13.$$ 例2　求以直线 $x-y+1=0$ 和 $x+y-1=0$ 的交点为圆心，半径为 $\sqrt{3}$ 的圆的方程. 解　由方程组 $$\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-1=0\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$$ 所以，所求圆的圆心坐标为(0，1)，又因为圆的半径为 $\sqrt{3}$，所以圆的方程为 $$x^2+(y-1)^2=3.$$ 练习三 (1) 求过点 $A(3,\ 0)$，且圆心 B 的坐标为 $(1,\ -2)$ 的圆的方程； (2) 求以直线 $x-y=0$ 和 $x+y=1$ 的交点为圆心，半径为2的圆的方程.	学生回答，教师点评后，让学生解答本题. 师：本例中半径是已知的，需要我们先求出圆心，也就是两条直线的交点，怎么求？ 学生回答后，教师指导学生完成. 学生练习，教师巡视.	强化训练.
小 结	1. 以 $C(a,\ b)$ 为圆心，以 r 为半径的圆的标准方程是 $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$ 2. 确定一个圆的标准方程的条件是：圆心坐标和半径.	学生在教师的引导下回顾本节主要内容.	简洁明了地概括本节课的重要知识，学生易于理解记忆.
作 业	教材P93练习A组第2题；教材P94练习B组第1题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.3.2 圆的一般方程

【教学目标】

1. 掌握圆的一般方程，能判断一个二元二次方程是否是圆的方程.
2. 能根据圆的一般方程求出圆心坐标和半径，会用待定系数法求圆的方程.
3. 进一步培养学生数形结合的能力，综合应用知识解决问题的能力.

【教学重点】

圆的一般方程.

【教学难点】

二元二次方程与圆的一般方程的关系.

【教学方法】

这节课主要采用讲练结合的方法. 首先由圆的标准方程展开得到圆的一般方程，然后讨论一个二元二次方程满足什么样的条件才能表示圆. 最后通过例题，让学生初步感悟待定系数法和求曲线方程的一般步骤.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 圆心为 $C(a, b)$，半径为 $r(r>0)$ 的圆的标准方程是什么？ 2. 回答下列问题： (1) 以原点为圆心，半径为 3 的圆的方程是______； (2) 圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 的圆心坐标是______，半径是______. 3. 直线方程有多种形式，圆的方程是否还有其他的形式？	师：上节课我们学习了圆的标准方程，请同学们回顾一下，圆心坐标为 (a, b)，半径为 r 的圆的方程是什么？ 学生回答教师提出的问题. 学生口答，教师点评. 教师类比直线方程提出问题.	回顾上节所学内容，为学习新知做好准备.
新课	探究一 (1) 请将圆心在 (a, b)，半径为 r 的圆的标准方程展开； (2) 展开后得到的方程有几个未知数？最高次是几次？这个方程是几元几次方程？ (3) 如果令 $-2a=D$，$-2b=E$，$a^2+b^2-r^2=F$，这个方程是什么形式？	学生解决教师提出的问题，教师点评.	使学生初步了解圆的一般方程的形式.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	(4) 任意一个圆的方程都可表示为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的形式吗?	师：在方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 中，D，E，F 是常数吗？为什么？	强调方程中 D，E，F 是常数.
	探究二 (1) 请举出几个形式为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的方程；	学生回答教师提出的问题.	加深对圆的一般方程形式的认识.
	(2) 你所举出的方程一定表示圆吗？下述方程表示的是圆吗？ $x^2+y^2+2x+2y+8=0$, $x^2+y^2+2x+2y+2=0$, $x^2+y^2+2x+2y=0$.	学生思考教师提出的问题. 师：将方程 $x^2+y^2+2x+2y+8=0$ 配方，你能得到怎样的方程？ 学生根据教师提示分组解答，配方后方程分别为 $(x+1)^2+(y+1)^2=-6$, $(x+1)^2+(y+1)^2=0$, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.	学生通过举例验证引出问题(2).
新课	探究三 满足怎样的条件时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ① 表示圆? 将方程配方，得 $\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2$ $=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$. ②	学生猜想.	让学生主动猜想.
	(1) 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程①表示以 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，且半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 的圆； (2) 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程①表示点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$； (3) 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程①不表示任何图形.	教师强调配方法的应用，引导学生解答. 师：将方程②同圆的标准方程比较，如果方程②表示圆，必须满足怎样的条件？ 此时圆的圆心坐标是多少？圆的半径呢？ 学生回答，教师点评. 师：由以上探究可知，只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 才表示一个圆.	强调配方法在解决二次问题中的应用. 类比圆的标准方程，探究二元二次方程表示圆的条件.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	圆的一般方程： 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 叫做圆的一般方程.	师：圆的标准方程指明了圆的圆心和半径，圆的一般方程表明了圆的方程形式是二元二次方程.	
	练习一 求出下列圆的圆心及半径： (1)$x^2+y^2-6x=0$； (2)$x^2+y^2-4x-6y+12=0$.	学生练习，教师巡视时应当引导学生用配方法求解.	
新课	例1　求过点 $O(0,0)$，$M(1,1)$，$N(4,2)$ 的圆的方程，并求出这个圆的半径和圆心坐标. 解　设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$， 其中 D，E，F 待定. 由题意得 $\begin{cases}F=0\\D+E+F+2=0\\4D+2E+F+20=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-8\\E=6\\F=0\end{cases}$ 于是所求圆的方程为 $x^2+y^2-8x+6y=0$. 将这个方程配方，得 $(x-4)^2+(y+3)^2=25$. 所以所求圆的圆心坐标是$(4,-3)$，半径为5.	师：确定一个圆的标准方程需要知道哪几个值？要确定圆的一般方程呢？ 学生回答. 师：先设所求方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 师：根据圆经过三个点，这三个点的坐标应满足方程，所以我们会得到一个三元一次方程组. 教师引导学生解方程组. 师：求出 D，E，F 的值，所求圆的方程也就确定了. 师：像这种求圆的一般方程的方法叫待定系数法. 师：类似前面的讨论，我们可以用配方法表示出圆的标准方程，然后写出圆心坐标及半径.	强调圆的标准方程和一般方程的特点. 让学生了解待定系数法求圆的方程的一般步骤.
	练习二 求经过三点$(0,0)$，$(3,2)$，$(-4,0)$的圆的方程.	学生练习，教师巡视.	
	例2　已知一曲线是与两个定点	师：请同学们回顾一下推导圆的标准方程时的过程. 学生看书回顾，教师指明	类比推导圆的标准方程的步骤，让学生初步感悟求曲

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$O(0, 0)$，$A(3, 0)$ 距离比为 $\frac{1}{2}$ 的点的轨迹，求这个曲线的方程. 解　在给定的坐标系中，设 $M(x, y)$ 是曲线上的任意一点，点 M 在曲线上的充要条件是 $\frac{\mid OM\mid}{\mid AM\mid}=\frac{1}{2}.$ 由两点间的距离公式，上式可用坐标表示为 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2},$ 两边平方并化简，得曲线方程 $x^2+y^2+2x-3=0.$ 将方程配方，得 $(x+1)^2+y^2=4.$ 所以所求曲线是以 $C(-1, 0)$ 为圆心，半径为 2 的圆. 练习三 求与两定点 $A(-1, 2)$，$B(3, 2)$ 的距离比为 $\sqrt{2}$ 的点的轨迹方程.	推导标准方程的主要步骤. 师：设动点，写出动点 M 满足的条件. 师：用点的坐标表示 M 满足的几何条件. 师：化简方程. 教师演示所得图形曲线. 学生练习，教师巡视.	线方程的一般步骤和方法. 强化训练.
小结	1. 圆的一般方程是 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$ 其中 $D^2+E^2-4F>0.$ 2. 待定系数法求圆的一般方程.	学生在教师的引导下回顾本节主要内容.	简洁明了地概括本节课的重要知识，学生易于理解记忆.
作业	教材 P96 练习 A 组第 1，2 题；练习 B 组第 2 题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.4 直线与圆的位置关系

【教学目标】

1. 依据直线与圆的方程，能熟练求出它们的交点坐标.

2. 能通过比较圆心到直线的距离和半径之间的大小关系来判断直线和圆的位置关系.

3. 理解直线和圆的三种位置关系(相离、相切、相交)与相应的直线和圆的方程所组成的二元二次方程组解(无解、有唯一解、有两组解)的对应关系.

【教学重点】

直线与圆的位置关系.

【教学难点】

直线与圆的位置关系的判断及应用.

【教学方法】

这节课主要采用讲练结合、小组合作探究的教学法. 本节之前，学生已学习了如何利用方程来研究两直线的位置关系. 根据初中所学知识，可以利用圆心到直线的距离与半径的大小关系来研究直线与圆的位置关系. 教材在处理直线与圆的位置关系时，从“形”和“数”两个方面进行了分析.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 点到直线的距离公式是? 2. 怎样利用直线的方程来判断两条直线的位置关系? 3. 直线和圆的位置关系有哪几种? 每种关系中直线同圆的交点个数各是多少?	教师提出问题，学生回答，教师点评. 师生共同回顾.	复习本节相关知识，为学习新知识做准备.
新课	例1　判断直线 l：$y=x+2$ 和圆 O：$x^2+y^2=2$ 的位置关系. 解　将直线和圆的方程联立，得 $\begin{cases} y=x+2 & ① \\ x^2+y^2=2 & ② \end{cases}$ 将①式代入②式，整理得 $x^2+2x+1=0$, 解得 $x=-1$. 将 $x=-1$ 代入①式得 $y=1$. 所以直线 l 和圆 O 有且只有一个公共点(−1，1)，即直线 l 和圆 O 相切.	师：如果直线 l 和圆 O 有公共点，由于公共点同时在直线 l 和圆 O 上，所以公共点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，如果这两个方程有公共解，那么以公共解为坐标的点必是 l 和圆 O 的公共点. 教师引导学生共同解答.	由解方程的思想来解决直线与圆的位置关系，体现了代数与几何的统一. 直线与圆的交点坐标就是它们联立的方程组的解.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	探究 如果圆的半径为 r，圆心到直线的距离为 d： (1) 当 $d>r$ 时，直线与圆有几个交点？直线与圆的位置关系是怎样的？ (2) 当 $d=r$ 时，直线与圆有几个交点？直线与圆的位置关系是怎样的？ (3) 当 $d<r$ 时，直线与圆有几个交点？直线与圆的位置关系是怎样的？	教师利用投影显示直线与圆的三种位置关系，学生结合图形思考、讨论.	通过圆心到直线的距离与半径的关系来研究直线与圆的位置关系，在探究过程中，要注意数形结合.
	例2　已知直线 l：$x+y+C=0$ 和圆 M：$(x-1)^2+(y+1)^2=4$，问 C 为何值时，直线 l 与圆 M 相交、相切、相离？	结合探究所得结论，引导学生解答.	
	解　显然，圆 M 的圆心为 $M(1,-1)$，半径 $r=2$. 圆心 M 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{\lvert 1+(-1)+C\rvert}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\lvert C\rvert}{\sqrt{2}}$. 当 $d>r$ 时，即 $\dfrac{\lvert C\rvert}{\sqrt{2}}>2$，$C>2\sqrt{2}$ 或 $C<-2\sqrt{2}$ 时，直线 l 和圆 M 相离； 当 $d=r$ 时，即 $\dfrac{\lvert C\rvert}{\sqrt{2}}=2$，$C=2\sqrt{2}$ 或 $C=-2\sqrt{2}$ 时，直线 l 和圆 M 相切； 当 $d<r$ 时，即 $\dfrac{\lvert C\rvert}{\sqrt{2}}<2$，$-2\sqrt{2}<C<2\sqrt{2}$ 时，直线 l 和圆 M 相交.	师：例 2 中，圆心坐标是什么？半径呢？圆心到直线 l 的距离是多少？直线与圆有什么位置关系？ 注意解绝对值不等式容易发生错误.	讲解时要注意结合图形.
	练习一 已知圆 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 与直线 $y=kx+4$，问 k 为何值时，直线与圆相交、相切、相离？	学生练习，教师巡视并个别指导.	强化训练.
	例3　写出过圆 O：$x^2+y^2=10$ 上一点 $M(2,\sqrt{6})$，且与圆相切的直线 l 的方程. 解　显然，直线 l 与直线 OM 是垂直的，而直线 OM 的斜率为	教师借助多媒体分析题意，利用圆的切线的几何性质，找出直线 l 与直线 OM 的斜率关系.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$\dfrac{\sqrt{6}-0}{2-0}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 由此可知直线 l 的斜率为 $(-1)\div\dfrac{\sqrt{6}}{2}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 由直线的点斜式方程可知直线 l 的方程为 $y-\sqrt{6}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}(x-2)$, 即 $\sqrt{6}x+3y-5\sqrt{6}=0$. 练习二 求过圆 $x^2+y^2=4$ 上一点 $(-1,\sqrt{3})$ 的切线方程.	教师引导学生解答. 本例也可以设切线斜率为 k，写出切线方程，利用圆心到直线的距离等于半径求解. 教师可以根据学生情况进行补充. 学生练习，教师巡视指导.	强化训练.
小结	1. 直线与圆的位置关系的代数解法(解方程组). 2. 直线与圆的位置关系的几何解法(比较 d 与 r 的关系).	师生共同回顾本节所学内容.	总结本节内容.
作业	教材 P100 习题第 1～3 题；习题第 7，8 题(选做).	学生标记作业.	针对学生实际，对课后书面作业实施分层设置.

8.5 直线与圆的方程的应用

【教学目标】

1. 能根据实际问题中的数形关系，运用直线和圆的方程解决问题.

2. 通过本节例题教学，让学生认识数学与人类生活的密切联系，培养学生应用所学的数学知识解决实际问题的意识.

【教学重点】

直线和圆的方程在解决实际问题中的应用.

【教学难点】

根据实际问题中的数量关系列出直线和圆的方程.

【教学方法】

这节课主要采用讲练结合的教学方法. 本节课紧密联系学生熟悉的生产和生活背景，有针对性地选择了可以利用直线方程和圆的方程解决的实际问题，通过师生共同研究，不仅可

以巩固直线与圆的有关内容，并且提高了学生运用所学数学知识解决实际问题的意识和能力.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 点到直线的距离公式是什么？ 2. 已知圆上不共线的三点，如何来求圆的方程？	学生回答，教师点评. 师：前面我们学习了直线与圆的方程，下面学习直线与圆的方程应用的例子.	复习所学知识，为本节学习做准备. 引入课题.
新课	例 1　在一次设计电路板的实验中，张明设计的电路板如图(教材图 8-23)所示(单位：cm)，现在张明要从 P 点连一条线到线段 AB，他想知道这条线的最短长度，你能替他计算出来吗？(精确到 0.01 cm) 解：不难看出，P 到直线 AB 的距离就是张明想知道的最短距离，所以可以利用直线的有关知识来解. 以这块电路板的左下角为原点，建立平面直角坐标系，由图中尺寸可知 $A(2,\ 6)$，$B(16,\ 8)$，$P(4,\ 10)$. 因此直线 AB 的斜率 $k=\frac{8-6}{16-2}=\frac{1}{7}$， 所以直线 AB 的方程为 $y-6=\frac{1}{7}(x-2)$，即 $x-7y+40=0$. 从而可知 P 到直线 AB 的距离为 $\frac{\lvert 4-7\times 10+40\rvert}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\frac{26}{\sqrt{50}}\approx 3.68$， 所以张明想知道的最短距离约为 3.68 cm. 练习一 教材 P103 习题第 1 题. 例 2　某次生产中，一个圆形的零件损坏了，只剩下了如图(教材图 8-24)所示的一部分. 现在陈阳所在的车间准备重新做一个这样的零件，为了获得这个圆形零件的半径，陈阳在	教师引导学生建立直角坐标系. 师：在所建立的直角坐标系中，A，B，P 三点的坐标各是什么？ 师：直线 AB 的斜率怎么求？ 师：求出直线 AB 的斜率后，怎么求直线 AB 的方程？ 师：你能求出 P 到直线的距离吗？	直线方程的应用. 解题过程中注意引导学生建立直角坐标系. 圆的方程的应用.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	零件上画了一条线段 AB，并作出了 AB 的垂直平分线 MN，而且测得 $AB=8$ cm，$MN=2$ cm. 根据已有数据，试帮陈阳求出这个零件的半径. 解　以 AB 中点 M 为原点，建立平面直角坐标系，由已知有 $A(-4,0)$，$B(4,0)$，$N(0,2)$. 设过 A，B，N 的圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$， 代入 A，B，N 的坐标，可得 $\begin{cases}16-4D+F=0\\16+4D+F=0\\4+2E+F=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=0\\E=6\\F=-16\end{cases}$ 因此所求圆的方程为 $x^2+y^2+6y-16=0$， 化为标准方程是 $x^2+(y+3)^2=5^2$. 所以这个零件的半径为 5 cm. 练习二 教材 P103 习题第 2 题.	师：建立坐标系后，点 A，B，N 三点的坐标各是多少？ 师：你会解这个方程组吗？ 师：怎么求半径？ 学生练习，教师巡视指导.	解题过程中注意引导学生建立直角坐标系.
小结	1. 直线方程的应用. 2. 圆的方程的应用.	师生共同回顾本节所学内容.	总结本节内容.
作业	教材 P103 习题.	学生标记作业.	第 2 题难度较大，需要帮助学生分析.

Ⅳ　测　验　题

1. 填空题

(1) 已知 $A(2,-1)$，$B(-1,5)$，则 $\|AB\|=$ ________，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=$ ________.

(2) 直线 $x-5y-2=0$ 的斜率等于________，在 y 轴上的截距等于________.

(3) 与直线 $2x-3y-5=0$ 垂直，且通过坐标原点的直线方程是____________.

(4) 两直线 $x-y+1=0$ 和 $x+y-5=0$ 的交点坐标为________.

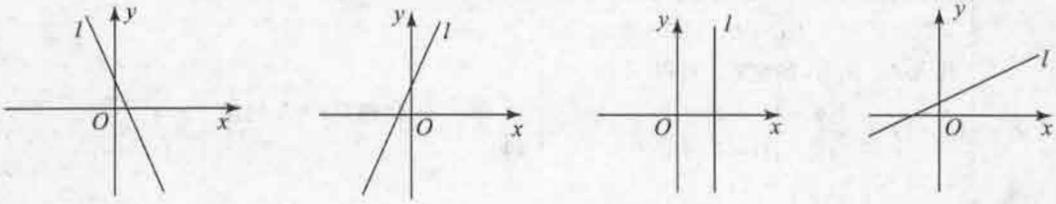
(5) 直线 $x=a$ 与圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相切，则 $a=$________.

(6) 经过三点 $O(0, 0)$，$A(2, 0)$，$B(0, 4)$ 的圆的方程是____________.

(7) 圆 $x^2+y^2-6x+8=0$ 的半径为________，已知点 $O(0, 0)$，$A(4, 0)$，点 B 是圆 $x^2+y^2-6x+8=0$ 上的动点，则 $\triangle OAB$ 的面积的最大值是________.

2. 选择题

(1) 直线 l 的斜率为 3，则 l 的图形最有可能是(　　).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(2) 过点(1, 2)，且倾斜角为 45° 的直线方程为(　　).

(A) $y-2=\sqrt{2}(x-1)$　　(B) $y-1=x-2$

(C) $y-2=x-1$　　(D) $y-1=\sqrt{2}(x-2)$

(3) 与直线 $y=2x+3$ 平行，且通过点 $P(-1, -3)$ 的直线方程是(　　).

(A) $y=2x+1$　　(B) $y=-2x+1$

(C) $y=\frac{1}{2}x-1$　　(D) $y=2x-1$

(4) 两条直线 $2x+y+a=0$ 和 $x+2y-1=0$ 的位置关系是(　　).

(A) 垂直　　(B) 相交，但不垂直

(C) 平行　　(D) 重合

(5) 若点 $M(1, 3)$ 和点 N 关于点 $C(3, 7)$ 中心对称，则点 N 的坐标为(　　).

(A)(5, 11)　　(B)(2, 5)

(C)(1, 2)　　(D)(−1, −1)

(6) 已知点 $P(1, 1)$ 到直线 $x+y+C=0$ 的距离等于 $\sqrt{2}$，则 C 等于(　　).

(A) $\sqrt{2}$　　(B) 0 或 3

(C) 0 或 −4　　(D) 4

3. 若直线 l：$(a+1)x-3y-12=0$ 与直线 $4x-6y+1=0$ 平行：

(1) 求 a 的值；　　(2) 在平面直角坐标系中画出直线 l.

4. 求通过点 $A(4, 0)$，$B(0, 4)$，且圆心在直线 $5x+3y-16=0$ 上的圆的方程.

5. 已知圆 C 的一般方程为 $x^2+y^2-4x-2y+F=0$，且该圆通过点(0, −1)：

(1) 求圆 C 的圆心和半径；

(2) 试判断直线 $y=2x-8$ 与圆 C 的位置关系.

测验题答案

1. (1)$3\sqrt{5}$，-2；　(2) $\frac{1}{5}$，$-\frac{2}{5}$；　(3)$y=-\frac{3}{2}x$；　(4)(2，3)；

(5)$a=3$ 或 -1；　(6)$(x-1)^2+(y-2)^2=5$；　(7)1，2.

2. (1)B；　(2)C；　(3)D；　(4)B；　(5)A；　(6)C.

3. (1)$a=1$　(2) 略.

4. $(x-2)^2+(y-2)^2=8$.

5. (1) 圆心为(2，1)，半径为 $2\sqrt{2}$；

(2) 相交.

V　习题答案、提示和解答

练习 A 组(第 67 页)

1. (1) $|AB|=4$，$|AC|=8$，$|BD|=5$，$|DE|=4$；

(2)A，B 中点坐标为 -3，B，E 中点坐标为 $\frac{7}{2}$.

2. 略.

练习 B 组(第 67 页)

1. $\frac{|x|}{x}(x\neq 0)$ 只可能是 1 或 -1，图略.

2. (1) 位于 3 或 -3 处；　(2) 位于 -1 的左边或 1 的右边.

3. 设坐标为 x，则

$$|x+9|=2|x+3|,$$

解得 $x=3$ 或 $x=-5$.

练习 A 组(第 70 页)

1. (1) $\sqrt{73}$；　(2) $\sqrt{61}$.

2. (1)(0，3)；　(2)$\left(-\frac{3}{2}，-3\right)$.

3. A，B，C，D 关于原点的对称点分别为

$$A'(-2,\ -3),\ B'(3,\ -5),\ C'(2,\ 4),\ D'(-3,\ 5).$$

4. A，B，C，D 关于 x 轴的对称点分别为

$$A'(1,\ -3),\ B'(-3,\ -2),\ C'(-5,\ 4),\ D'(3,\ 5);$$

关于 y 轴的对称点分别为

$$A''(-1,\ 3),\ B''(3,\ 2),\ C''(5,\ -4),\ D''(-3,\ -5).$$

练习 B 组(第 70 页)

1. $3\sqrt{21}$ 或 $-3\sqrt{21}$.

2. 设 P 的坐标为$(x,0)$，则

$$(x-2)^2+9=25,$$

解得 $x=6$ 或 $x=-2$.

所以 $P(6,0)$ 或 $P(-2,0)$.

3. 设 D 的坐标为(x,y)，由 AC 的中点与 BD 中点相同有

$$\begin{cases}\dfrac{-1+0}{2}=\dfrac{x+3}{2}\\ \dfrac{-2+2}{2}=\dfrac{y+1}{2}\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=-4\\ y=-1\end{cases}$

因此 $D(-4,-1)$.

习题(第 71 页)

1. $|AB|=\sqrt{793}$，$|AC|=\sqrt{941}$，$|BC|=2\sqrt{2}$.
2. $(0,0)$ 或$(-10,0)$.
3. $\left(\dfrac{3}{8},0\right)$.

4. (1)$2\sqrt{5}$，$(5,3)$；　　(2)$2\sqrt{17}$，$(2,-3)$.
5. 由题意知，AB，BC，AC 的中点坐标分别为

$$D(0,2),\ E(-1,1),\ F(1,0).$$

所以在$\triangle ABC$ 中，AB 边上的中线长度为$|CD|=3$，BC 边上的中线长度为$|AE|=3$，AC 边上的中线长度为$|BF|=3\sqrt{2}$.

6. 设在 x 轴上的点为$M(x,0)$，则

$$\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(0+2)^2},$$

解得 $x=3$.

所以 x 轴上到A，B 两点距离相等的点的坐标为$(3,0)$.

同理，可设在 y 轴上的点为 $N(0,y)$，则

$$\sqrt{(0-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(0-5)^2+(y+2)^2},$$

解得 $y=-3$.

所以 y 轴上到A，B 两点距离相等的点的坐标为$(0,-3)$.

7. 设边 AB 与 y 轴的交点 D 的坐标为$(0,a)$(如右图所示)，则

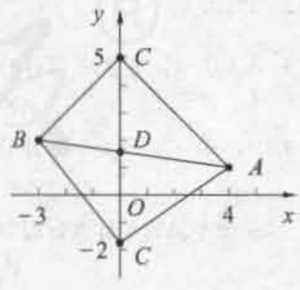
$$|BD|+|DA|=|BA|,$$

由距离公式，得

$$\sqrt{(0+3)^2+(a-2)^2}+\sqrt{(4-0)^2+(1-a)^2}=\sqrt{(4+3)^2+(1-2)^2},$$

解得 $a=\dfrac{11}{7}$.

即 D 的坐标为$\left(0,\dfrac{11}{7}\right)$.



设 $\triangle ABC$ 的顶点 C 的坐标为 $(0,\ y)$，则

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD},\\ &=\frac{1}{2}\times|CD|\times 4+\frac{1}{2}\times|CD|\times|-3|\\ &=\frac{7}{2}|CD|=\frac{7}{2}\times\left|y-\frac{11}{7}\right|=12.\end{aligned}$$

所以 $y=5$ 或 $y=-\dfrac{13}{7}$.

即点 $C(0,\ 5)$ 或 $C\left(0,\ -\dfrac{13}{7}\right)$.

8. 因为

$$|AB|=\sqrt{(5-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5},$$
$$|AC|=\sqrt{(0-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5},$$
$$|BC|=\sqrt{(0-5)^2+(3-3)^2}=5,$$

所以 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$.

因此 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

练习 A 组(第 73 页)

1. $x=-\dfrac{1}{3}$.

2. A，C，D 在，B 不在.

练习 B 组(第 73 页)

1. $a=3$.

2. 因为 $-2=4b+1$，所以 $b=-\dfrac{3}{4}$.

练习 A 组(第 76 页)

1. (1)0；　(2)$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；　(3)1；　(4)$\sqrt{3}$；　(5)$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；　(6)-1；　(7)$-\sqrt{3}$.

2. (1) 存在，$k=-\dfrac{3}{4}$；　(2) 存在，$k=0$；　(3) 不存在；　(4) 存在，$k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

练习 B 组(第 76 页)

1. $k=1$，倾斜角为 $45°$.

2. 因为

$$\frac{t+2-2}{t-1}=-2,$$

所以 $t=\dfrac{2}{3}$.

练习 A 组(第 79 页)

1. (1)$y=-x-1$；　(2)$y=\sqrt{2}x-3\sqrt{2}$；　(3)$y=-x-2$；　(4)$y=-\sqrt{3}x+7$.

2. (1) 因为斜率 $k=\dfrac{3-2}{-4-(-2)}=-\dfrac{1}{2}$，所以直线方程为

$$y-2=-\frac{1}{2}(x+2),$$

即 $y=-\frac{1}{2}x+1$；

(2) 因为斜率 $k=\frac{-2-0}{0-(-1)}=-2$，所以直线方程为

$$y-0=-2(x+1),$$

即 $y=-2x-2$.

练习 B 组(第 79 页)

1. (1)$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$；　(2)$y=\frac{5}{3}x+\frac{11}{3}$.

2. 因为斜率 $k=\frac{b-0}{0-a}=-\frac{b}{a}$，所以直线方程为

$$y=-\frac{b}{a}x+b.$$

也可写成$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3. 因为斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，所以直线方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

也可写成$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

练习 A 组(第 82 页)

1. (1)$x+2y-2=0$，方向向量$\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$，法向量$(1,\ 2)$；

(2)$y+3=0$，方向向量$(1,\ 0)$，法向量$(0,\ 1)$；

(3)$x+y+2=0$，方向向量$(1,\ -1)$，法向量$(1,\ 1)$.

2. (1)$k=-3$，$b=5$；　(2)$k=\frac{5}{4}$，$b=-5$；

(3)$k=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$；　(4)$k=\frac{7}{6}$，$b=\frac{2}{3}$；

(5)k 不存在，b 也不存在；　(6)$k=0$，$b=\frac{2}{7}$.

练习 B 组(第 82 页)

1. $C=0$.

2. 不一定.

因为当 $B=0$ 时，斜率不存在；当 $B\neq 0$ 时，斜率存在，且为 $-\frac{A}{B}$.

3. (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}x+y+1=0$；　(2)$x+2y-3=0$.

练习 A 组(第 86 页)

1. (1) 平行；　(2) 相交，交点为$(0,\ 3)$；

(3) 相交，交点为$(12,\ 8)$；　(4) 相交，交点为$\left(\frac{5}{6},\ \frac{7}{6}\right)$.

2. (1) 相交，交点为$\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right)$；　　(2) 相交，交点为$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$；

(3) 重合；　　(4) 相交，交点为$(0, 0)$.

练习 B 组(第 86 页)

1. 可设方程为 $y=-3x+b$，代入$(2, 3)$有

$$3=-6+b,$$

解得 $b=9$，所以方程为

$$y=-3x+9.$$

即 $3x+y-9=0$.

2. 因为直线 $x-y+4=0$ 的斜率为 1，所以所求直线斜率也为 1，因此方程为

$$y=x-2.$$

即 $x-y-2=0$.

3. 因为 $A\neq 0$，$B\neq 0$，所以解方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C_1=0\\Ax-By+C_2=0\end{cases}$$

得$\begin{cases}x=-\dfrac{C_1+C_2}{2A}\\y=-\dfrac{C_1-C_2}{2B}\end{cases}$

因此 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax-By+C_2=0$ 相交，且交点为$\left(-\dfrac{C_1+C_2}{2A}, -\dfrac{C_1-C_2}{2B}\right)$.

练习 A 组(第 88 页)

1. (1) 垂直；　(2) 不垂直；　(3) 不垂直；　(4) 垂直.
2. (1) 垂直；　(2) 不垂直；　(3) 垂直；　(4) 不垂直.

练习 B 组(第 88 页)

1. AB 的方程为 $3x+2y-16=0$，BC 的方程为 $2x-3y-15=0$.
   因为 $3\times 2+2\times(-3)=0$，所以 $AB\perp BC$.
2. $2x-y-11=0$.
3. $5x-y-23=0$.

练习 A 组(第 90 页)

1. (1)1；　(2)$\sqrt{2}$；　(3)0；　(4)$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$；　(5)4.
2. 设坐标为$(x, 0)$，则

$$\frac{|x-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},$$

解得 $x=1$ 或 $x=-3$.

所以所求点的坐标为$(1, 0)$或$(-3, 0)$.

练习 B 组(第 91 页)

1. $2\sqrt{13}$.
2. 因为 $3x-2y-1=0$ 可化为 $6x-4y-2=0$，所以所求距离为

$$\frac{|3-(-2)|}{\sqrt{6^2+(1-4)^2}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}.$$

习题(第 91 页)

1. $y=107$，即 $y-107=0$.

2. $y=\frac{2}{3}x+2$，即 $2x-3y+6=0$.

3. (1)$x=3$，即 $x-3=0$，方向向量$(0, 1)$，法向量$(1, 0)$；

(2)$2x+y-13=0$，方向向量$(1, -2)$，法向量$(2, 1)$；

(3)$y=-2$，即 $y+2=0$，方向向量$(1, 0)$，法向量$(0, 1)$；

(4)$7x-5y+35=0$，方向向量$\left(1, \frac{7}{5}\right)$，法向量$(7, -5)$.

4. (1)$3x-y-13=0$； (2)$5x-3y+17=0$；

(3)$x+y+7=0$； (4)$x+3y-7=0$.

5. (1)$x-3y+5=0$； (2)$3x+y-6=0$；

(3)$y=4$.

6. $y=\frac{3}{5}x$，即 $3x-5y=0$.

练习 A 组(第 93 页)

1. (1)$x^2+y^2=4$； (2)$(x+2)^2+(y-1)^2=3$；

(3)$(x-2)^2+(y-1)^2=5$； (4)$x^2+(y-1)^2=4$.

2. (1)$(x-3)^2+(y-6)^2=10$； (2)$x^2+(y+3)^2=25$.

练习 B 组(第 94 页)

1. $x^2+(y-2)^2=1$.

2. 设圆心坐标为(a, b)，则

$$\begin{cases}a+b+3=0\\(a-6)^2+b^2=(a-1)^2+(b-5)^2\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$

因此圆的半径为

$$\sqrt{(-1-6)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{53}.$$

所以所求圆的方程为

$$(x+1)^2+(y+2)^2=53.$$

练习 A 组(第 96 页)

1. (1)$(3, 0)$，3； (2)$(0, 3)$，3； (3)$(2, 3)$，1； (4)$(1, -2)$，$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. $(x+2)^2+\left(y-\frac{25}{4}\right)^2=\frac{689}{16}$.

练习 B 组(第 96 页)

1. $(x-7)^2+(y-2)^2=32$.

2. 将$(0, -1)$代入方程得

$$0+1-0+2+F=0,$$

所以 $F=-3$.

原方程为 $x^2+y^2-2x-2y-3=0$，可化为

$$(x-1)^2+(y-1)^2=5.$$

因此半径为$\sqrt{5}$.

习题(第 97 页)

1. (1) $(x+1)^2+(y-1)^2=25$，图略；

(2) $(x-2)^2+y^2=10$，图略；

(3) $(x-3)^2+(y-1)^2=34$，图略.

2. $(x+2)^2+(y-2)^2=10$.

3. (1) $(1, 0)$，$\sqrt{6}$，图略； (2) $(-1, 2)$，3，图略；

(3) $(-2, 0)$，2，图略； (4) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$，$\frac{\sqrt{21}}{2}$，图略.

4. 因为 $C_1(-1, -3)$，$C_2(2, 4)$，所以圆心距为

$$|C_1C_2|=\sqrt{(-1-2)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{58}.$$

5. 联立得方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x-4=0 & ① \\ x^2+y^2+6y-28=0 & ② \end{cases}$$

① − ② 并整理得 $x-y+4=0$，即

$$y=x+4. \qquad ③$$

将 ③ 代入 ① 有

$$x^2+(x+4)^2+6x-4=0,$$

整理得 $x^2+7x+6=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=-6$.

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$$

设所求圆的圆心坐标为 (a, b)，则

$$\begin{cases} a-b-4=0 \\ (a+1)^2+(b-3)^2=(a+6)^2+(b+2)^2 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{7}{2} \end{cases}$

因此所求圆的半径为

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+\left(-\frac{7}{2}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{178}}{2}.$$

所以所求圆的方程为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{89}{2}.$$

6. 设圆上任意一点为 $P(x, y)$，则$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$，即

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0.$$

又因为$\overrightarrow{AP} = (x-x_1, y-y_1)$，$\overrightarrow{BP} = (x-x_2, y-y_2)$，所以上式可化为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

习题(第 100 页)

1. 因为

$$\frac{|4\times4-3\times(-1)+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{25}{5}=5,$$

所以直线与圆相切.

2. 由

$$\frac{|0+5\times0+C|}{\sqrt{1^2+5^2}}=5$$

可知 $C=5\sqrt{26}$ 或 $C=-5\sqrt{26}$.

3. $x-\sqrt{3}y+4=0$.

4. 设圆的圆心坐标为(a, b)，半径为 r，则由条件知

$$|a|=|b|=r.$$

又因为

$$(8-a)^2+(1-b)^2=r^2,$$

所以

$$a^2-16a+b^2-2b+65=0. \qquad ①$$

当 $a=b$ 时，① 式的解为 $a=5$ 或 $a=13$；

当 $a=-b$ 时，① 式无解.

因此 $a=5$，$b=5$，$r=5$，或 $a=13$，$b=13$，$r=13$.

所以圆的方程为

$$(x-5)^2+(y-5)^2=25 \text{ 或 } (x-13)^2+(y-13)^2=169.$$

5. 设圆心为(a, b)，由条件知 $|b|=5$.

又因为

$$(a-1)^2+(b-2)^2=25,$$

整理得

$$a^2-2a-4b+5=0. \qquad ①$$

当 $b=5$ 时，① 式的解为 $a=-3$ 或 $a=5$；

当 $b=-5$ 时，① 式无解.

所以圆心坐标为$(-3, 5)$ 或$(5, 5)$.

因此所求圆的方程为

$$(x+3)^2+(y-5)^2=25 \text{ 或 } (x-5)^2+(y-5)^2=25.$$

6. 因为圆心为$(1, -2)$，半径为$\sqrt{5}$，又因为圆心到直线的距离为

$$\frac{|2+2+b|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{|b+4|}{\sqrt{5}},$$

所以：

当$\frac{|b+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$，即$-9<b<1$时，相交；

当$\frac{|b+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，即$b=-9$或$b=1$时，相切；

当$\frac{|b+4|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$，即$b<-9$或$b>1$时，相离.

7. 因为圆心为(3，4)，所以$\overrightarrow{CA}=(6-3,\ 8-4)=(3,\ 4)$为切线的一个法向量，因此可设直线方程为

$$3x+4y+D=0.$$

代入(6，8)可得$D=-50$.

因此所求切线方程为$3x+4y-50=0$.

8. 因为$\overrightarrow{OM}=(x_0,\ y_0)$为所求切线的一个法向量，所以可设直线方程为

$$x_0x+y_0y+D=0.$$

代入$(x_0,\ y_0)$有

$$D=-(x_0^2+y_0^2).$$

又$M(x_0,\ y_0)$在圆上，所以$x_0^2+y_0^2=r^2$，因此$D=-r^2$.

所以所求切线方程为$x_0x+y_0y-r^2=0$，即

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

习题(第 103 页)

1. 以A为原点，AB为x轴，AF为y轴建立平面直角坐标系，则有

$$A(0,\ 0),\ B(100,\ 0),\ C(150,\ 50),\ D(150,\ 100),\ E(80,\ 170),\ F(0,\ 170).$$

2. 由图可知圆拱所在圆的圆心在y轴上，且半径r满足

$$(r-4)^2+12^2=r^2,$$

解得$r=20$.

因此不难看出圆心坐标为$(0,\ -16)$.

所以圆拱所在圆的方程为

$$x^2+(y+16)^2=20^2.$$

将$x=-4$代入上述方程有

$$(y+16)^2=20^2-4^2.$$

解得$y=8\sqrt{6}-16$或$y=-8\sqrt{16}-16$(舍).

因此A_2P_2的高约为3.60 m.

第九章　立体几何

Ⅰ　教学要求

1. 能正确地画出有关空间图形的示意图，能由空间图形的示意图想象出空间图形．会用斜二测画法画水平放置的正三角形、正方形、正六边形等平面图形的直观图和正方体、长方体等立体图形的直观图．

2. 理解空间点、直线、平面之间的各种位置关系．

3. 掌握平面的基本性质，空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行与垂直的性质与判定．

4. 理解空间中的角．

5. 掌握简单多面体(棱柱、棱锥）和旋转体(圆柱、圆锥与球）的有关概念、结构特征与性质．

6. 掌握用斜二测画法画棱柱的直观图、用正等测画法画圆柱的直观图．在此基础上，了解锥、球的直观图的画法，进一步培养学生画空间图形的能力．

7. 掌握直棱柱、正棱锥、圆柱和圆锥的表面积及全面积计算公式，了解球面面积的计算公式．

8. 了解祖暅原理，掌握有关多面体与旋转体的体积计算公式．通过祖暅原理的教学，对学生进行爱国主义教育．

9. 通过本章的学习，培养学生的空间想象力，进一步发展学生的推理、计算、画图的能力和应用能力．

Ⅱ　教材分析和教学建议

本章教材把几何研究的范围由平面扩大到空间，学习空间图形的性质与应用．

教材首先让学生从直观上认识空间几何体和轨迹，然后给出了平面的三条基本性质，作为研究空间图形性质的基础，进而把平面上的平行关系推广到空间．学习直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的概念和性质、空间图形的平移等知识．接着进一步学习空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直关系与角等内容．

本章共分四大节．第一大节是空间中平面的基本性质，这是本章知识的基础．第二大节是空间中的平行关系，研究空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行关系．第三大节是空间中的垂直和角，在前面已学习了直线与直线垂直的基础上，定义了直线与平

面、平面与平面所成的角与垂直的概念，并研究了“垂直”的判定与性质，以及空间的对称等. 第四大节是多面体和旋转体. 重点介绍了棱柱、棱锥、圆柱、圆锥的有关性质，学习它们的结构特征及表面积的计算公式. 在多面体和旋转体的体积中，首先介绍了祖暅原理，以祖暅原理为工具，长方体体积公式为基础，介绍了柱、锥体的体积公式. 球体的体积公式是直接给出的.

本章的重点是前三大节. 本章的难点是空间性质的逻辑关系及其推理训练. 学习立体几何除了培养学生的空间想象能力外，还有培养学生的逻辑思维能力的任务. 中职学生的逻辑思维能力相对来说比较薄弱，但不能放弃这方面的要求. 在教学中要对学生进行力所能及的推理训练，以提高学生的文化素养. 在立体几何的教学中，特别重要的是，要随时注意复习用到的平面几何知识. 中职学生平面几何知识一般较薄弱，遗忘也较严重. 但是学习立体几何随时需要用到平面几何知识，大量的问题要转化为平面几何问题来解决. 不注意平面几何知识的复习，立体几何的教学是难以进行的.

本章教学约需 18 课时，具体分配如下(仅供参考)：

9.1.1	立体图形及其表示方法	1 课时
9.1.2	平面的基本性质	1 课时
9.2.1	空间中的平行直线	1 课时
9.2.2	异面直线	1 课时
9.2.3	直线与平面平行	1 课时
9.2.4	平面与平面的平行关系	1 课时
9.3.1	直线与平面垂直	1 课时
9.3.2	直线与平面所成的角	1 课时
9.3.3	平面与平面所成的角	1 课时
9.3.4	平面与平面垂直	1 课时
9.4.1	棱柱	1 课时
9.4.2	棱锥	1 课时
9.4.3	直棱柱和正棱锥的侧面积	1 课时
9.4.4	圆柱、圆锥	2 课时
9.4.5	球	1 课时
9.4.6	多面体与旋转体的体积	2 课时

9.1.1　立体图形及其表示方法

1. 本节主要是要使学生在回顾小学和初中所学的有关立体图形的基础上，学习斜二测画法.

2. 本节的重点和难点是斜二测画法.

3. 通过本节课的学习，让学生学会利用斜二测画法画出初中已学过的常见平面图形(如：三角形、矩形、正方形、梯形等) 的直观图和一些常用简单几何体(如正方体、长方

体等）的直观图，并为后续学习其他几何体的画法打下基础.

9.1.2　平面的基本性质

1. 教学时应向学生指出，数学中所说的“平面”在空间中是无限延展的. 对初学者来讲，理解平面的无限延展性是一个难点，因为学生日常接触到的很多平面的实例都只是平面的一部分，用平行四边形来表示平面时，也只是画出平面的一部分，所以学生往往把平面理解成是有限的、有边界的. 因此在教学时，要向学生指出平面的无限延展性，它可以把空间分成两个部分.

2. 在讲“通常用平行四边形来表示平面”时，要结合实际图形，向学生强调以下两点：

(1) 所画的平行四边形是表示它所在的整个平面，根据需要可以把它画大一些或小一些，这同画直线一样，直线是无限延伸的，但在画图时，是用直线的一部分来表示直线，根据需要，可以画长一些，也可画短一些；

(2)“通常”两字的意思，是因为有时也可以用其他的平面图形，如封闭的平面曲线等表示平面.

3. 画表示水平平面的平行四边形时，通常把它的锐角画成 45°，横边等于邻边的两倍. 但在画图时，可根据图形的不同需要调整.

4. 本节讨论的平面的三条基本性质，在一些教科书中把它们都列为公理. 应注意到，不能由这三条性质建立立体几何的公理体系，它们既不独立，也不完备，所以一般称基本性质较好.

5. 平面基本性质 1，是用直线“平直”性质去认识平面的“平直”性质. 具有“如果任意两个点 A，B 在一个点集内，那么直线 AB 也在这个点集内”这条性质的点集，除直线和空间本身之外，只有平面. 所以除直线和空间本身外，这条性质可作为平面的特征性质，由此可判断一个面是不是平面. 教学时，可引导学生考察除平面外的其他图形. 例如，球面、柱面，任何一个“弯曲”的面等，看看这些图形是否具有基本性质 1，从而加深学生对基本性质 1 的理解.

6. 平面基本性质 2，实际上是给出了确定一个平面的条件. 讲解时，应突出“不在同一直线上”和“三个点”. 可引导学生注意，过一点、两点或在同一直线上的三个点都可以有无数个平面，只有过不在一条直线上的三个点，才有且只有一个平面. 过四点的平面则不一定存在.

在讲解性质 2 时，要把通过不在一条直线上三点的平面看成是由三组直线编织起来的，以加深学生对三点确定一个平面的认识. 教学实践说明，学生对理解基本性质 2 有一定的困难. 特别是“存在性与唯一性”的内涵，学生更不容易搞清楚. 教学中要先强调“存在性”，然后适当地让学生理解“唯一性”. 练习只要求学生能够进行简单的说理就可以了，不要求学生进行严格的证明. 讲解基本性质 2 的推论，可按此原则进行. 讲解两条平行线确定一个平面时，要先复习平行公理. 平行公理说明了平面的存在性，然后由基本性

质 2 简要地说明唯一性.

确定平面是将空间图形问题转化为平面图形问题来解决的重要条件. 因为我们在研究空间图形的时候，往往是将有关点、线归结到一个平面内，再利用平面图形的性质来解决，因此，不掌握确定平面的条件，这样的转化就不容易实现. 这就要求学生对基本性质 2 及其推论，有较深刻的理解. 但学生的认识不可能一次完成，所以在以后各节的教学中要注意逐渐提高.

7. 平面基本性质 3，除反映基本性质 1 之外，还反映了空间另一条基本性质：一个平面把空间分成两个半空间，连接同一半空间内的两点的线段不通过这个平面；连接不同半空间两点的线段，一定与这个平面相交. 通常又把这条性质叫做空间的对称性. 两个平面相交，交线把其中每一个平面都分为两个半平面. 这就是说，基本性质 3 是平面的对称性在空间的推广. 以上关于基本性质的说明，不要向学生讲解. 但教师对几何公理体系以及中学立体几何中选作公理的基本性质之间的逻辑关系，应有比较深入的了解. 在教学中，主要是向学生强调，两个平面，如果有一个公共点，那么它们就有无穷多个公共点，并且这些公共点的集合是一条直线. 根据这条性质可安排学生画相交平面的练习.

8. 本节还把空间看成点集，把点看成空间的基本元素，把平面、直线看成空间的子集，并说明可借用集合的符号和语言表达它们之间的关系. 尽管把空间看成点的集合，是非常抽象的数学模型，但学生的理解常常停留在直观的层面上，是通过有形的点、平面和直线去理解抽象的点、平面和直线，所以在立体几何中使用几何语言和符号，一般不会发生困难. 语言“点 A 在直线 l 上”“点 A 属于直线 l”与符号 $A\in l$ 是同义的，它们之间没有什么不同. 开始教学时，可多使用语言叙述，少使用符号，以加深学生对概念的理解，但在书写时要逐步增加符号的使用量，以使学生熟悉符号，了解符号的意义，并知道使用符号表达清晰、简捷的优点.

9.2.1 空间中的平行直线

1. 把平行公理推广到空间：在空间，过直线外一点，有一条且只有一条直线与这条直线平行. 对平行公理的这个推论，教材中只作了叙述，但没有证明. 在教学时，可根据平行公理以及直线与直线外一点确定一个平面，作一些简短的说明，以使学生理解.

2. 平行线的传递性是空间图形重要的基本性质. 它是研究平移和其他空间变换的基础. 本教材把这条性质当作公理，提前讲解. 平行线的传递性虽然看起来简单，但它有着深刻的内涵.

3. 在本教材中，平行线的传递性放在空间的平行关系的开始，即在线、面平行与面、面平行之前，因此无法证明，而把它作为基本性质. 如果在编排上把它放在线、面平行与面、面平行之后，在逻辑上没有矛盾，这时这条性质就可以给予证明了. 现证明如下：

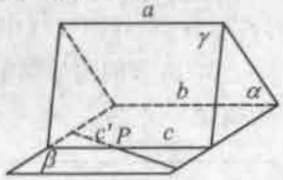


图 9-1

平行线传递性的证明：

已知：三条直线 a，b，c，且 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$(图 9-1).

求证：$a \parallel c$.

证明：当 a，b，c 共面时，结论已在平面几何中证明．现在只讨论 a，b，c 不共面的情况．

因为 $a \parallel b$，$b \parallel c$，所以可设 a，b 确定的平面为 α，且 b，c 确定的平面为 β，且 $\alpha \cap \beta = b$.

因为 $a \parallel b$，$a \not\subset \beta$①，所以 $a \parallel \beta$.

在 c 上任取一点 P，设 a，P 确定的平面为 γ，γ 与 β 的交线为 c'，则 $a \parallel c'$.

因为 $b \parallel a$，所以 $b \parallel \gamma$.

又因为 $b \subset \beta$，且 $\beta \cap \gamma = c'$，所以

$$b \parallel c'.$$

又已知 $b \parallel c$，在平面 β 内，过一点 P 有两条直线 c 与 c' 平行于 b，这是不可能的，所以 c 与 c' 是同一条直线，即 $a \parallel c$.

4. 在高等数学中，两条直线平行包括两条直线重合的情况．但在初等几何中，由于不研究运动，只研究大小与位置关系，因而平行线的定义不包括重合．但教师应理解，用运动变换的观点来研究几何，重合应是平行的一个特殊情况．研究直线平行时，一条直线可以平行移动到任何位置．另外，在几何学中，互相平行的直线通常用来表示一个方向，这一点应让学生了解．

5. 本节的空间图形平移的性质，常被称为“等角定理”，它表明角在空间平行移动，它的大小不变．角的平移性质的证明所依据的性质：“如果四边形的一组对边平行且相等，那么它的另一组对边平行且相等．”这个定理非常重要，它表明平移不仅保持角的大小不变，而且也保持两点的距离不变．

6. 本小节的例题，主要是平行线传递性的应用，练习题中还有较多的等角定理的应用．

9.2.2　异面直线

1. 异面直线是学习立体几何的难点．如果立体几何一开始就学习异面直线，会比较困难．在学生学完平面的基本性质和平行关系后，再来学习异面直线，相对来说会容易些．教学中，可通过线、面，面、面关系以及平移的性质帮助学生理解异面直线的有关性质．

2. 要用平移性质帮助学生理解异面直线夹角的概念．根据异面直线夹角的定义可知，两条异面直线的一条或两条在空间平移，它们的夹角不会改变．与此等价的说法还有，“过空间任一点，可作一平面与两条异面直线分别平行”或“存在两个互相平行的平面分别过两条异面直线中的一条”．

3. 本节例题是判定异面直线，在正方体中写出一些异面直线的夹角．通过例题来巩固概念．

---

① $a \not\subset \beta$，表示直线 a 不在平面 β 内，即 a 与 β 平行或相交．教学中可作补充．

9.2.3　直线与平面平行

1. 根据平面基本性质1，教材分析了直线与平面的位置关系：(1) 在平面内；(2) 相交，交点唯一；(3) 平行，直线与平面没有公共点.

2. 直线与平面平行判定定理的证明，教材中没有给出，实际上可以采用反证法证明：利用"平行直线确定一个平面""两个平面相交于一条直线"这两个平面性质导出假设与已知矛盾. 教学时可采用启发式，通过提问引导学生思考，让学生了解证明过程. 这个定理是学习其他平行关系的基础，在教学时，一定要认真、细致，使学生体会如何由直线与直线平行的特征性质，推导出直线与平面平行的特征性质.

3. 本节还提出了直线与平面平行判定定理的逆定理. 应向学生指出，判定定理的逆命题大都是正确的. 这是因为用作判定的性质常是特征性质. 还应向学生指出，逆定理的重要作用是通过"线、面平行"去判定"线、线平行". 它的证明，是由直线与平面平行定义，推导出直线与交线平行. 这是在空间证明两条直线平行最基本的方法.

4. 配合直线与平面平行的判定定理安排了例题.

5. 注意正确地画出直线与平面平行的示意图画法的教学，应使学生会画这种示意图.

9.2.4　平面与平面的平行关系

1. 根据平面的基本性质3，分析两个平面的位置关系：相交、平行.

2. 在空间中，平面与平面平行和平面上直线与直线平行相对应，很多有关平行线的定理都可相应地变为面、面平行的有关定理. 空间面、面平行与线、线平行具有同样重要的地位.

3. 本节的重点和难点都是面、面平行判定定理. 讲解定理可采用启发式，先复习线、面平行问题. 例如，过已知平面外一点，可以有多少条直线与已知平面平行？这些直线的全体构成什么样的图形？同学会发现它们构成平面(不证明). 接着问，这个平面与已知平面是否平行？由于一个平面可被两条相交直线所唯一确定，因而就可引出本节的面、面平行判定定理.

4. 第二个定理是面、面平行的一个重要性质. 通过这个定理，把线、线平行问题转化为面、面平行的问题，通过面、面平行去判定线、线平行.

5. 例1是在利用线、面平行的判定定理的基础上，直接应用面、面平行的判定定理；例2的推理利用了性质定理，其结论要求记住；例3是把平行线分线段成比例定理推广到空间，学习平行平面分线段成比例定理. 本节练习B组第1题要求归纳出平面与平面的各种位置关系.

6. 要使学生会正确地画出面、面平行的示意图.

9.3.1　直线与平面垂直

1. 在教学中，要注意平面上两条直线垂直的概念与空间线、面垂直概念之间的联

系，由线、线垂直引出线、面垂直．例如，可提问学生：过直线上一点作直线的垂线，在过直线的一个平面内能作几条？在空间呢？当学生回答在空间可作无数条直线与已知直线垂直时，再进一步提问：这些直线是否都在同一平面内？或问：过直线上一个点，且垂直于这条直线的直线，绕这一点旋转的轨迹是什么图形？由此可给出直线垂直于平面的定义．接着就可由两条相交直线确定一平面引出直线和平面垂直的判定．

2. 直线与平面垂直的判定定理十分重要，它是判定直线与平面垂直的一个重要方法．

3. 教材给出了直线与平面垂直的性质定理，这个性质定理比较容易理解，应掌握．

9.3.2 直线与平面所成的角

1. 教材首先给出了平面的斜线与它在平面内的射影的概念，并指出“斜线和它在平面内的射影的夹角叫做斜线和平面所成的角(或夹角)”．

2. 教材的例2给出了三垂线定理(叙述、证明)，重点要明确直线与平面所成的角．在此基础上，让学生了解三垂线定理的内容．

3. 教材练习B组的第2题给出了三垂线定理的逆定理，建议教师将此题作为例题向学生讲解．

4. 有关三垂线定理及其逆定理的应用，都不要求学生掌握，只要让学生理解证明方法，会利用这种方法去证明有关题目．

9.3.3 平面与平面所成的角

1. 二面角的引入应该从具体事例入手，教材中使用了笔记本电脑面板打开过程形象地介绍了二面角的大小．

2. 应使学生明确怎样才能作出给定二面角的平面角，即在棱上任意找一点，过这一点在两个半平面内分别作棱的垂线．这是求二面角大小的前提，务必要使学生掌握．

3. 要通过模型(正方体、长方体等)向学生说明，求二面角的大小时，选适当的点作出二面角的平面角是关键．

4. 讲解二面角的定义时，可适当地与平面几何中学到的角的概念对比．顶点与棱对应，角的两边与二面角的两个半平面对应．

平面几何中的角可以理解为是一条射线绕着端点旋转而成的．同样，二面角也可以看成一个半平面绕其边(轴)旋转而成的．还应向学生指出，一般二面角是指大于等于0°，且小于等于180°的角．

9.3.4 平面与平面垂直

1. 两个平面垂直的判定定理表明，如果一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直．这就是说，可以通过线面的垂直关系去判定面面垂直关系．在讲两个平面垂直的判定定理时，要注意向学生揭示线面与面面垂直之间的关系．

2. 适当地向学生小结线线垂直、线面垂直的性质，让学生系统地了解它们之间的关

系，让他们知道怎样由线线垂直去判定线面垂直，又怎样由线面垂直去判定面面垂直；反过来，如何由面面垂直去判定线面垂直，又如何由线面垂直去判定线线垂直.

3. 面面垂直的实例在生活中有很多，教学时可多借助实例加深学生对面面垂直的理解.

9.4.1　棱柱

1. 本节首先学习多面体的一般概念，多面体定义可由具体多面体(如棱柱、棱锥等)的模型引出.

2. 多面体可分为凸多面体和凹多面体两类，我们研究的是凸多面体.

3. 除以正方体为例说明多面体的有关概念外，还可以引导学生以日常生活中所见的其他多面体来说明这些概念，以加深他们对多面体的理解.

4. 多面体的面数至少为 4，多面体以它的面数为标准分类，可分为四面体、五面体……

5. 本章中讲解棱柱、棱锥的概念都是以多面体的概念为基础的，本节所讲内容要求学生切实掌握.

6. 以实物和模型引入棱柱的概念(最好是正棱柱、一般的直棱柱、斜棱柱的实物或模型各拿一个)，引导学生总结出棱柱是特殊的多面体这一结论，这类多面体的特点是：

(1) 有两个面互相平行；

(2) 其余的各面都是四边形，每相邻两个面的交线都互相平行且相等.

7. 在讲授棱柱的有关概念时，要强调棱柱的对角线与它各面上的对角线的区别.

8. 棱柱的分类方法：

一种分类是按侧棱是否与底面垂直(这里先复习线面垂直的定义和判定定理). 棱柱可以分为直棱柱、斜棱柱. 直棱柱又可按底面是否是正多边形分为正棱柱和其他直棱柱. 这种分类如下：

$$\text{棱柱}\begin{cases}\text{直棱柱}\begin{cases}\text{正棱柱}\\ \text{其他直棱柱}\end{cases}\\ \text{斜棱柱}\end{cases}$$

另一种分类法是按底面多边形的边数，把棱柱分为三棱柱、四棱柱、五棱柱等.

通常把这两种分类的称谓法综合在一起来称谓一个棱柱，如称为斜三棱柱、直四棱柱、正五棱柱等.

9. 棱柱的性质是从它的定义出发，根据本章前面所学的有关定理推导出来的，是学习侧面积及体积公式等的基础. 在学习时，要先复习有关定理(如平面与平面平行的性质定理等).

棱柱性质的教学，可通过提问让学生自己证明. 对课时少的专业，可采用学生阅读、教师总结的办法学习. 以后各节都可采用这样的办法.

10. 教师可用下表进一步总结棱柱的性质.

	侧棱	侧面	底面	平行于底面的截面	过不相邻的两条侧棱的截面(对角面)
斜棱柱	平行且相等	平行四边形	全等的多边形	与底面全等的多边形	平行四边形
直棱柱	平行且相等，等于高	矩形	全等的多边形	与底面全等的多边形	矩形
正棱柱	平行且相等，等于高	全等的矩形	全等的正多边形	与底面全等的正多边形	矩形

11. 长方体、正方体是特殊的四棱柱，下图表示了它们与四棱柱、平行六面体、直平行六面体之间的关系. 可提问学生：在什么条件下，可按箭头所指的方向由前一种棱柱得到后一种棱柱？

$$\text{四棱柱}\xrightarrow{\text{底面是平行四边形}}\text{平行六面体}\xrightarrow{\text{侧棱垂直于底面}}$$
$$\text{直平行六面体}\xrightarrow{\text{底面是矩形}}\text{长方体}\xrightarrow{\text{棱都相等}}\text{正方体}.$$

这里要强调概念与概念之间的从属关系，可结合下表让学生理解.

	对角线是否相等	侧面形状	底面形状	对角面形状
斜平行六面体	不等	平行四边形	平行四边形	平行四边形
直平行六面体	不等	矩形	平行四边形	矩形
长方体	相等	矩形	矩形	矩形
正方体	相等	正方形	正方形	矩形

注意由长方体底面是矩形，侧棱垂直于底，可得出各相邻的棱互相垂直的结论.

12. 长方体的对角线的性质定理应用较广，教学中应要求学生重视这个定理.

9.4.2 棱锥

1. 由实物或模型引出棱锥的定义.

明确棱锥是具备一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形这两个特点的多面体.

2. 要使学生了解一个多面体可分解为几个棱锥的并集.

3. 此节中的定理："如果棱锥被平行于底面的平面所截，则所得的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离和棱锥高的平方比. "是表示一般棱锥的性质的定理，要注意定理的条件和结论.

定理的证明，只要求学生了解. 证明定理后，可提出以下问题：

(1) 棱锥的高是 h，有一组平行于底面的截面，顶点到截面的距离分别是 $\frac{h}{2}$，$\frac{h}{3}$，

$\frac{h}{4}$，$\frac{h}{\sqrt{2}}$，$\frac{h}{\sqrt{3}}$，$\frac{h}{\sqrt{n}}$，那么截面面积各是底面面积的几分之几？

(2) 棱锥的高是 h，有一组平行于底面的截面，面积分别为底面面积的$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{n}$，那么顶点到截面的距离各是多少？

学习此定理时要使学生认识到今后在棱锥中遇到平行于底面的截面时，应注意到截面和底面的面积与对应高之间的比例关系，这一定理对今后的计算、证明、求体积的公式都很重要，要给予足够的重视．练习 B 组第 1 题是巩固此定理的习题．此定理反映了空间相似变换的性质(截得的棱锥与原棱锥相似)．适当地把空间的相似(这里是位似) 概念与平面上的相似概念联系起来，对学生掌握这个定理是有益的．

4. 讲正棱锥概念时，应拿各种棱锥模型启发学生，使他们认识到具备什么条件的棱锥是正棱锥，强调必须具备两个条件：

(1) 底面是正多边形；

(2) 顶点在底面上的射影是底面中心．

学生往往容易忽视第二个条件，要结合射影深化其认识．

5. 对正棱锥应强调它的高与斜高两概念的区别，并强调只有正棱锥才有斜高．

6. 正棱锥中的四个直角三角形和两个角应让学生熟练掌握，这是求积计算或证明中将立体几何问题转化为平面几何问题来解决的关键．

正棱锥中的四个直角三角形指的是：教材中的性质(2) 所提到的两个三角形，以及底面正多边形的边心距、外接圆半径和边长的一半组成的直角三角形，侧面的侧棱、斜高和底面多边形边长的一半组成的直角三角形．

两个角指的是：侧棱和底面所成的角及侧面和底面所成的二面角．

9.4.3 直棱柱和正棱锥的侧面积

1. 由直棱柱、正棱锥的定义和性质，启发学生自己得出侧面积或全面积的计算公式．这些侧面积计算公式，不要求学生死记．

2. 在学生已掌握一些常用平面图形面积计算的基础上，学生在实践中去计算一些有规则的几何体的表面积是不会发生困难的．

9.4.4 圆柱、圆锥

1. 由于圆柱、圆锥的概念、性质、画法和侧面积都有相似之处，并且有棱柱、棱锥的知识作基础，因而课本把它们并在一起讲，这样便于对比，并可节省教学时间．

2. 教材是用旋转矩形、直角三角形来分别定义圆柱、圆锥的，其实这样得到的几何体分别叫做直圆柱、直圆锥．此外，还有斜圆柱、斜圆锥．本教材只研究直圆柱、直圆锥，并分别把它们简称为圆柱、圆锥．

3. 圆柱、圆锥的两条性质，教材没有证明．教学时，可适当根据定义以及线、面平

行、垂直的性质，进行简单说理．例如，性质 1：设平行于底面的截面与轴相交于点 C，在截线上任取一点 P，说明 CP 为定值．性质 2 可根据定义直接推出．

4. 在研究几何体的性质时，我们常常通过研究它们的特殊截面的性质，来揭示几何体的性质．在解圆柱、圆锥的有关问题时，常常把问题转化为研究它们的两组特殊截面：轴截面、平行于底面的截面．

5. 画圆柱、圆锥的直观图是用正等测画法，它与斜二测画法同样是根据平行射影原理，只是规则不同：x 轴、y 轴、z 轴两两的夹角都是 120°，并且平行于三轴的线段都取原长．

6. 圆柱的侧面展开图与侧面积计算公式比较简单，学生可自己推出．圆锥的侧面展开图与侧面积涉及扇形的有关概念和面积计算，建议教学时先复习扇形的有关知识，然后由学生自己研究侧面积的计算公式．

7. 圆柱、圆锥之间的关系与正棱柱、正棱锥的关系相类似．

9.4.5 球

1. 讲授球的定义时，要强调它也是一种旋转体．也可先启发学生回答它是由什么平面图形旋转而来的，它的旋转轴是什么，然后出示模型．

2. 讲完球的定义后，可从轨迹的角度介绍球面的定义．

要强调球面和球的区别，球面仅仅指球的表面，球是几何体，不仅包括球面，也包括球面所包围的空间．

3. “用一个平面去截一个球，截面是圆面”这一点很重要．

球的截面的两个性质是教学的重点，要注意：

(1) 用一个平面从不同位置去截一个球，得到的截面都是圆．当球心到截面的距离 $d=0$ 时，截面是大圆；当 $0<d<R$ 时，截面是小圆．

(2) 对球的截面是圆，可按教材的讲法进行适当的说理．从说理过程，很自然就可直接推出球的半径、截面半径与球心到截面距离三者之间的关系．

4. 在球面上，两点之间的最短距离，是经过两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，这一性质在教材中没有证明．只是利用知识延伸的形式介绍了一下，可用实际模型让学生理解．

5. 球的直观图画法教材没有介绍，不要向学生介绍，在解题时，只要求学生画出球的大圆，再画 $1\sim 2$ 个辅助椭圆即可．

解题时，常常只画出球的大圆，使球的问题转化成平面几何的问题解决，而不必画球的直观图．

6. 球面与圆柱、圆锥的侧面不同，不能展开铺在一个平面上．

球的表面积公式的推导比较复杂，教材中没有给出证明，下面我们给出一个初等证明，供教师参考．

如图，将半径为 R 的半球面上的半个大圆 AGB 分成 $2n$ 等份，用过分点且平行于半球

大圆面的平行平面将半球分成 n 部分，以截得的圆为底作圆台、圆锥，设它们的高分别是 h_1，h_2，…，h_n，母线长为 l，球心到母线的距离为 p.

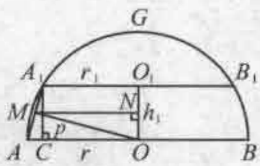


图 9-2

我们先证明高为 h_1 的圆台 OO_1 的侧面积 $S_1=2\pi ph_1$.

作 $OM\perp A_1A$，那么 $A_1M=MA$.

作 $MN\perp O_1O$，$A_1C\perp AO$，垂足分别为 N，C.

因为 $\text{Rt}\triangle A_1AC\backsim\text{Rt}\triangle MON$(为什么？)，所以

$$\frac{AA_1}{MO}=\frac{A_1C}{MN}.$$

又因为 $A_1A=l$，$MO=p$，$A_1C=h_1$，$MN=\frac{1}{2}(r_1+r)$(为什么？)，而且

$$\frac{l}{p}=\frac{h_1}{\frac{1}{2}(r_1+r)}\text{，即}(r_1+r)l=2ph_1\text{，}$$

所以 $S_1=\pi(r_1+r)l=2\pi ph_1$.

同理 $S_2=2\pi ph_2$，…，$S_n=2\pi ph_n$.

因此

$$S=S_1+S_2+\cdots+S_n=2\pi p(h_1+h_2+\cdots+h_n).$$

又因为 $h_1+h_2+\cdots+h_n=R$，所以

$$S=2\pi pR.$$

如果分点无限增加，侧面就无限地接近于半球面，同时 p 也无限地接近于 R. 当 p 变为 R 时，侧面积的和 S 变为 $2\pi R^2$，我们把这个和作为半球面的面积. 由此可得到

$$S_{球面}=4\pi R^2.$$

9.4.6　多面体与旋转体的体积

1. 知道长方体体积计算公式，再利用祖暅原理就可推导出其他一些几何体的体积. 长方体的体积计算公式、祖暅原理，在教材中都没有给出证明，但教师要充分利用实例说明它们的正确性，以加深学生对这两个基本定理的认识.

2. 长方体的体积公式，学生在小学就已熟知了，但缺乏对它深入的理解. 建议在教学时，最好对它加以分析. 先分析长、宽、高都是整数时公式的正确性，再分析长、宽、高是有理数的情形，最后分析长、宽、高是无理数的情形(对具体实数分析，例如$\sqrt{2}$). 通过分析，加深学生对长方体的体积公式的认识.

下面提供一个长方体的体积公式的证明，供参考.

证明：可分为下列三种情况讨论.

(1) 各度都是整数.

设长方体(图 9-3)的三度所含长度单位的量数分别是 $AB=a$，$AC=b$，$AD=c$，并且 a，b 和 c 都是整数(图中 $a=3$，$b=2$，$c=3$)，那么长方体的底面含有 ab 个小正方形，而

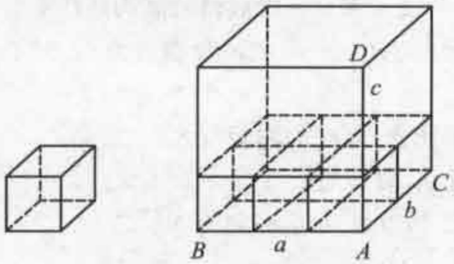


图 9-3

每个小正方形的边长都是 1 个长度单位. 显然，在每个小正方形上可以放置一个单位正方体. 所以这一层的体(如图 9-3 所示) 便含有 ab 个单位正方体，因为这一层的高等于一个长度单位，而整个长方体的高含有 c 个长度单位，所以整个长方体一共含有 c 层，其中每一层都含有 ab 个单位正方体. 因此，这个长方体的体积就等于 abc 个体积单位.

(2) 各度都是分数.

设长方体的三度所含长度单位的量数是分数(其中的一个或两个可以是整数). 把各分数通分后，设三度所含长度单位的量数是 $AB=\frac{p}{m}$，$AC=\frac{q}{m}$，$AD=\frac{r}{m}$(其中 p，q，r，m 都是整数).

我们取原来的长度单位的 $\frac{1}{m}$ 作为新的长度单位(辅助单位)，用它来量长方体的各度，就都得到整数：即 $AB=p$ 个新的长度单位，$AC=q$ 个新的长度单位，$AD=r$ 个新的长度单位.

这时，由前一种情形的证明可以知道，如果这个长方体的体积用新的长度单位相应的新的体积单位来量，那么 $V=pqr$ 个新的体积单位.

但是，与原来的长度单位相应的体积单位中含有 m^3 个新的体积单位；这就是说，新的体积单位是原来体积单位的 $\frac{1}{m^3}$. 因此，如果反回来用原来的体积单位来表示这个长方体的体积，就得

$$V=\frac{1}{m^3}pqr=\frac{p}{m}\cdot\frac{q}{m}\cdot\frac{r}{m}.$$

(3) 各度都是无理数.

为了简便起见，我们只用一个字母 θ 来表示这个长方体(图 9-4). 设这个长方体的三度所含长度单位的量数是：$AB=\alpha$，$AC=\beta$，$AD=\gamma$. 这里 α，β，γ 三个数中，至少有一个是无理数. 在这种情形下，我们可以求得和这三个数 α，β，γ 近似的有理数，并且可使这些近似值具有任意的精确度. 在已知长方体的棱 AB 和它的延长线上分别截取线段 AB_1 和 AB_2，使它们的长度分别等于 $\frac{p_n}{10^n}$ 和 $\frac{p_n+1}{10^n}$；在棱 AC 和它的延长线上，分别

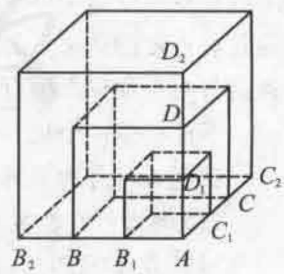


图 9-4

截取线段 AC_1 和 AC_2，使它们的长度分别等于$\frac{q_n}{10^n}$ 和$\frac{q_n+1}{10^n}$；在 AD 和它的延长线上，分别截取线段 AD_1 和 AD_2，使它们的长度分别等于$\frac{r_n}{10^n}$ 和$\frac{r_n+1}{10^n}$；其中$\frac{p_n}{10^n}$，$\frac{q_n}{10^n}$，$\frac{r_n}{10^n}$ 分别是α，β和γ 的不足近似值，$\frac{p_n+1}{10^n}$，$\frac{q_n+1}{10^n}$ 和$\frac{r_n+1}{10^n}$ 分别是α，β和γ 的过剩近似值，并且这些近似值每个都精确到$\frac{1}{10^n}$. 现在我们作两个辅助长方体：以 AB_1，AC_1 和 AD_1 为三度的长方体 θ_1 和以 AB_2，AC_2 和 AD_2 为三度的长方体 θ_2. 那么

$$V_{\theta_1}=\frac{p_n}{10^n}\cdot\frac{q_n}{10^n}\cdot\frac{r_n}{10^n},$$

$$V_{\theta_2}=\frac{p_n+1}{10^n}\cdot\frac{q_n+1}{10^n}\cdot\frac{r_n+1}{10^n}.$$

当 n 无限增加时，$\frac{p_n}{10^n}$ 和$\frac{p_n+1}{10^n}$ 的极限都是α，$\frac{q_n}{10^n}$ 和$\frac{q_n+1}{10^n}$ 的极限都是β，$\frac{r_n}{10^n}$ 和$\frac{r_n+1}{10^n}$ 的极限都是γ.

由极限的运算法则我们知道，n 个因数乘积的极限等于这 n 个因数极限的乘积，所以，当 n 无限增加时，$\frac{p_n}{10^n}\cdot\frac{q_n}{10^n}\cdot\frac{r_n}{10^n}$ 和$\frac{p_n+1}{10^n}\cdot\frac{q_n+1}{10^n}\cdot\frac{r_n+1}{10^n}$ 的极限都等于$\alpha\beta\gamma$. 这就是说，当 n 无限增加时，θ_1 和 θ_2 的体积的极限都是$\alpha\beta\gamma$. 在这种情况下，这两个体积的极限就是长方体 θ 的体积，也就是 $V=\alpha\beta\gamma$.

由以上三种情况可得，在所有各种情况下，长方体的体积都等于它的三度的积.

3. 在推导柱体体积公式之前，最好复习一下棱柱、圆柱的截面性质，即平行于底面的截面与底面全等. 因为用祖暅原理研究柱体体积时，是以棱柱、圆柱的截面性质作基础的.

在推导柱体体积公式的过程中，设棱柱与圆柱的底面积和高分别相等，根据祖暅原理，它们的体积相等. 但等于多少呢？为了解决这个问题，还必须引进一个底面积和高也分别等于它们底面积和高的长方体. 这样，长方体、棱柱、圆柱的体积都相等，而长方体体积的求法是已知的，用比较的方法就可得出柱体的体积公式. 关于这样的长方体的存在性，这里就不证明了.

4. 本节的例 1，要求一个螺母的体积，而一个螺母的体积等于一个六棱柱与一个圆柱体积之差. 像这样，由若干个简单几何体组合而成的几何体，叫做组合体. 求组合体体积的关键是掌握简单体几何的体积公式. 这是一个实际问题，是属于近似计算的. 由于所给数据都具有两位有效数字，在运算过程中都应取三位小数，结果取两位小数.

5. 教材给出了锥体体积公式，但没有证明.

公式的证明是分两步进行的，第一步证底面积相等、高也相等的任意两个锥体体积相等；第二步证三棱锥的体积等于其底面积与高的积的三分之一. 证第一步时，要很好地复

习棱锥和圆锥的平行于底面的截面性质(即截面与底面相似，它们的面积的比等于高的平方比)以及正确运用祖暅原理. 学生的困难在第二步，他们不仅对把三棱锥补为三棱柱这种方法感到生疏，而且对由三棱柱分割而成的三个三棱锥有两两等底等高的关系也不易分辨清楚，在讲解时，一定要用模型帮助学生理解. 如果学生自己也能动手制作这种模型(最省事的办法是把萝卜之类的东西先切成三棱柱，再把三棱柱按书上办法切成三个三棱锥)，效果要更好些. 切成的三棱锥1，2和2，3分别等底等高. 等底，是由于平行四边形的一条对角线把平行四边形截成两个全等的三角形；等高(实际上是同高)，是由于每对三棱锥的两条高是从同一点到同一个面的垂线段.

6. 本节的例2是求圆锥体积的应用题. 注意讲清楚两点：(1) 圆锥底面圆周是以顶点为圆心、母线为半径的圆的一段圆弧；(2) 扇形弧长计算公式. 学生知道这两点，就可自己完成这道例题.

7. 教材对球的体积公式没有证明，直接给出了计算公式. 讲解时，可先用实验的方法进行验证. 实验的方法是取一个半径为 R 的半球，再取一个圆柱(无上底面)和一个圆锥，它们的底面半径与高都是 R，将圆锥放入圆柱内. 再将半球面里装满细沙，把这些细沙倒入圆柱内，这时圆柱恰好装满. 这个实验启示我们，一个半球(半径为 R)的体积等于一个圆柱(底面半径和高都等于 R)与一个圆锥(底面半径和高都等于 R)的体积的差，即

$$\begin{aligned} V_{\text{半球}} &= V_{\text{圆柱}} - V_{\text{圆锥}} \\ &= \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

所以由实验可得知

$$V_{\text{球}} = 2 \times \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ⅲ 教学设计

9.1.1 立体图形及其表示方法

【教学目标】

1. 初步感知身边的立体图形，会用斜二测画法画出平面图形以及简单几何体的直观图.

2. 掌握斜二测画法的画图规则，体会由具体到抽象的认知过程.

3. 培养学生作图、识图、运用图形语言交流的能力，培养学生严谨规范的作图习惯.

【教学重点】

斜二测画法画直观图.

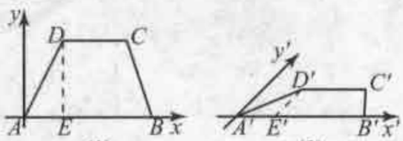
【教学难点】

斜二测画法.

【教学方法】

这节课主要采用讲练结合法．通过立体图形的照片入手，体会立体与平面之间的关系，从画平面图形的直观图入手，引导学生总结出斜二测画法的具体步骤．通过针对性的练习，引导学生边学边练，及时巩固，逐步掌握用斜二测画法画出立体图形的直观图.

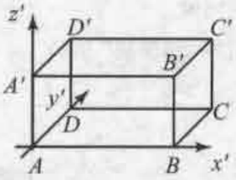
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	平面图形与立体图形：几何图形都可以看成点的集合．如果构成几何图形的点，都在一个平面上，那么这个几何图形是一个平面图形；否则，这个几何图形就是一个立体图形. 如：直线、正方形、梯形、圆等是平面图形；正方体、棱柱、圆柱等是立体图形.	师：在初中，我们已经接触过很多几何图形．我们还知道，正方形是一个平面图形，正方体是一个立体图形.	由以前接触过的几何图形导入，自然贴切.
新课	问题　在平面内，怎样画出立体图形? 1. 直观图的定义 给定的一个几何图形，可以用具有立体感的平面图形去表示．这种平面图形通常叫做直观图.	教师呈现实物魔方，以及魔方的图片. 师：哪一个图片上的魔方更有立体感? 师：我们可以用平面图形去表示立体图形. 教师给出直观图的定义，学生在实物与图片的对比中体会直观图.	从学生身边的生活经验出发进行新知的学习，有助于调动学生学习积极性.
	2. 直观图的画法 例 1　画出下图所示的梯形 $ABCD$ 的直观图.  (1)　　(2)	教师在黑板上边做边讲，一边是原图，一边是直观图，对比讲解.	教师对比讲解，使学生明确图形中哪些量发生了变化，哪些量没有变化，便于下面总结画直观图的步骤.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	画法　(1) 在梯形 $ABCD$ 上，以 AB 为 x 轴，A 为原点，建立平面直角坐标系. 画对应的 x' 轴和 y' 轴，使它们相交于点 A'，且 $\angle x'A'y'=45°$； (2) 过点 D 作 AB 的垂线，设垂足为 E； (3) 在 x' 轴上截取 $A'E'=AE$，$E'B'=EB$，然后作 $E'D'$ 平行于 y' 轴，而且使 $E'D'=\frac{1}{2}ED$； (4) 过点 D' 作 x' 轴的平行线 $D'C'$，且 $D'C'=DC$； (5) 连接 $A'D'$，$B'C'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 就是梯形 $ABCD$ 的直观图.		
	画直观图的基本步骤： (1) 在平面图形上取互相垂直的 x 轴和 y 轴，作出与之对应的 x' 轴和 y' 轴，使得它们的夹角为 45°； (2) 图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段； (3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半； (4) 连接有关线段.	引导学生根据例题总结出画直观图的基本步骤. 教师强调重点，学生识记.	
	练习一 1. 作边长为 3 cm 的正方形的直观图. 2. 作边长为 3 cm 的等边三角形的直观图.	指导学生在原图中如何建立坐标系画直观图更容易.	学生完成练习，进一步体会直观图的画法.
	例 2　画长为 4，宽为 3，高为 2 的长方体的直观图.		

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
			
	画法　(1) 用例 1 的方法画一个长为 4，宽为 3 的长方形的直观图 $ABCD$； (2) 过 A 作 z' 轴，使之垂直于 x' 轴，在 z' 轴上截取 $AA'=2$； (3) 过点 B，C，D 分别作 z' 轴的平行线 BB'，CC'，DD'，并使 $BB'=CC'=DD'=2$， 连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$； (4) 擦去 x' 轴、y' 轴、z' 轴. 并把看不到的线段 AD，DC，DD' 改成虚线.	学生根据例 1 的方法作出长方体底面的直观图，教师重点讲解步骤(2)(3)(4).	学生在作图的过程中体会斜二测画法的作图规则.
新课	画立体图形直观图的方法和步骤： (1) 在立体图形中取水平平面，在其中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，作出水平平面上图形的直观图(包括 x' 轴和 y' 轴)； (2) 在立体图形中，过 x 轴或 y 轴的交点取 z 轴，并使 z 轴垂直于 x 轴或 y 轴，过 x' 轴或 y' 轴的交点取 z' 轴，且 z' 轴垂直于 x' 轴； (3) 图形中平行于 z 轴的线段画成平行于 z' 轴的线段，且长度不变； (4) 连接有关线段，擦去有关辅助线. 上述画直观图的方法叫做斜二测画法.	学生仿照例 2 的步骤，总结画立体图形直观图的步骤，教师加以指点.	
	练习二 作边长为 2 cm 的正方体的直观图.	学生仿照例题进行练习，教师巡视指导. 教师选择部分学生的练习进行展示.	学生通过练习进一步掌握斜二测画法的步骤.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	斜二测画法的规则.	师生共同回顾. 教师可用"一斜二测"进行总结.	
作业	教材P109练习A组第1，2题，练习B组第1，2题.		巩固斜二测画法.

9.1.2 平面的基本性质

【教学目标】

1. 在观察、实验与思辨的基础上掌握平面的三个基本性质及推论.
2. 学会用集合语言描述空间中点、线、面之间的关系.
3. 培养学生在文字语言、图形语言与符号语言三种语言之间的转化能力.

【教学重点】

平面的三个基本性质.

【教学难点】

理解平面的三个基本性质及其推论.

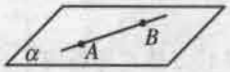
【教学方法】

这节课主要采用实例法. 结合学生身边的实物，体会平面的无限延展性，并引导学生观察身边的物体以及现象，引导学生总结出平面的三个基本性质，逐个理解其内在的思想. 同时教会学生能正确用图形语言与符号语言表示文字语言. 通过穿插有针对性的练习，引导学生边学边练，及时巩固，逐步掌握文字语言、图形语言与符号语言三种语言之间的转化.

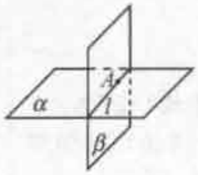
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	平静的海面、教室的黑板等都给我们以平面的形象. 你还能从生活中举出类似平面的物体吗?	教师呈现平面的图片，学生根据生活经验找出具有平面特点的实例.	从学生身边的生活经验出发，对平面加以描述而不是定义，引发学生学习的兴趣.
新课	平面： 几何里所说的"平面"就是从桌面等物体中抽象出来的，但是，几何里的平面是无限延展的. 平面的表示方法： 常把希腊字母 α，β 等写在代表平面的平行四边形的一个角上来表示平	教师从初中的点、线、面开始说起，逐步过渡到平面，并教会学生怎样表示平面.	学生通过点与线的关系联想到点、线与面的关系. 培养学生联想的能力.

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td rowspan="5">新
课</td><td>面，如平面α、平面β等；也可以用代表平面的四边形的四个顶点，或者相对的两个顶点的大写英文字母作为这个平面的名称.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>基本性质 1　如果一条直线上有两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

</td><td>师：如果直线l与平面α有两个公共点，直线l是否在平面α内?
生：是.</td><td>通过动画演示提高学生学习的兴趣，活跃学生的思维.</td></tr>
<tr><td>练习一
在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，判断下列命题是否正确，并说明理由：
(1) 直线AC_1在平面CC_1B_1B内；
(2) 直线BC_1在平面CC_1B_1B内.</td><td>学生个别口答，其他学生进行评价，教师解决有争议的知识点.</td><td>学生在实际讨论中巩固平面的基本性质 1.</td></tr>
<tr><td>平面内有无数个点，平面可以看成点的集合. 点在平面内和点在平面外都可以用元素与集合的属于、不属于来表示.
基本性质 1 可表示为：如果$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，那么直线$AB\subset\alpha$.
利用这个性质，可以判断一条直线是否在一个平面内.</td><td>运用集合的符号表示点、线、面之间的位置关系.</td><td>学生体会三种语言符号的联系与区别.</td></tr>
<tr><td>位置关系的符号表示：
<table><tr><th>位置关系</th><th>符号表示</th></tr><tr><td>点P在直线AB上</td><td>$P\in AB$</td></tr><tr><td>点C不在直线AB上</td><td>$C\notin AB$</td></tr><tr><td>点M在平面AC内</td><td>$M\in$平面AC</td></tr><tr><td>点A'不在平面AC内</td><td>$A'\notin$平面AC</td></tr><tr><td>直线AB与直线BC交于点B</td><td>$AB\cap BC=B$</td></tr><tr><td>直线AB在平面AC内</td><td>$AB\subset$平面AC</td></tr><tr><td>直线AA'不在平面AC内</td><td>$AA'\not\subset$平面AC</td></tr></table></td><td>学生观察理解，条件允许时可作为练习，让学生分小组讨论完成.</td><td></td></tr>
</table>

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	基本性质 2　如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.  	教师讲解基本性质 2，同时教会学生怎样画两个平面相交.	教师结合生活经验启发学生.
	练习二 观察长方体，你能发现长方体中两个相交平面的公共直线吗?	学生观察长方体，回答问题.	
	基本性质 3　过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面.	教师创设实际情境： 生活中经常看到用三角架支撑照相机. 并让学生找出生活中类似的现象．例如自行车、门等. 教师强调存在性和唯一性.	在这个过程中，逐步培养学生空间想象能力.
新课	推论 1　经过一条直线和直线外的一点，有且只有一个平面. 推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面. 推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.	学生在教师的引导下，理解三个推论. 教师结合学生身边的现象或实例逐个讲解三个推论．如教师可结合学生身边熟悉的现象，提出问题：木匠用两根细绳分别沿桌子四条腿底端的对角线拉直，以判断桌子四条腿的底端是否在同一平面内，其依据是什么?	学生体验生活中处处存在数学知识. 学生对于"有且只有一个"进行理解.
	练习三 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是 AC 的中点．判断下列命题是否正确，并说明理由： (1) 由点 A，O，C 可以确定一个平面； (2) 由 A，C_1，B 确定的平面是平面 ADC_1B； (3) 由 A，C_1，B_1 确定的平面与由 A，D，C_1 确定的平面是同一个平面.	学生灵活运用所学知识进行解决.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	1. 平面的基本性质 1. 2. 平面的基本性质 2. 3. 平面的基本性质 3 以及推论.		
作业	教材 P113 练习 B组第 2 题.		

9.2.1 空间中的平行直线

【教学目标】

1. 掌握平行线的基本性质，了解空间四边形的定义.

2. 了解空间中图形平移的定义，理解空间中图形平移的性质.

3. 渗透数形结合思想，渗透由平面到空间的转换思想，培养学生观察分析、空间想象的能力.

【教学重点】

平行线的基本性质.

【教学难点】

空间中图形平移的性质.

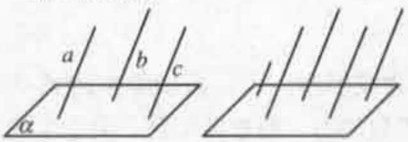
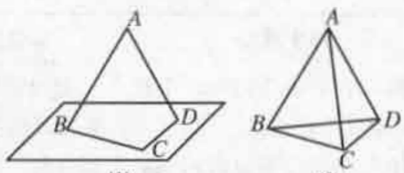
【教学方法】

这节课主要采用实物演示法. 教师通过实物或模型演示，帮助学生理解平行线的性质，以及空间四边形的概念，培养学生的空间想象能力. 通过证明题，向学生渗透将立体问题转化为平面问题来解决的思想.

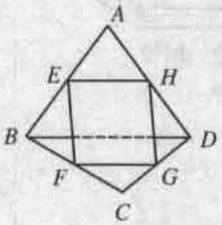
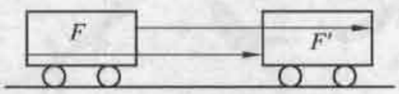
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 平行线的定义. 2. 平面几何中的平行公理.	师：在平面几何中，平行线的定义是什么? 生：在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线. 师：这个定义在立体几何中不变. 但需特别注意“在同一平面内”. 过直线外一点有几条直线和这条直线平行? 生：过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行.	复习旧知，引出新知，由平面推广到空间，激发学习新知识的兴趣.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导 入	3. 平行线的传递性. 4. 空间中的直线是否也具有类似的平行公理、平行线的传递性呢?	师：在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线是否互相平行? 生：是. 师：这是平面中平行直线的传递性. 提出新问题，引出空间中的平行直线.	
新 课	1. 平行线的基本性质 平行公理：过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行. 空间平行线的传递性：平行于同一条直线的两条直线互相平行. 即如果直线 $a\parallel b$，$c\parallel b$，则 $a\parallel c$. 如下图所示.  2. 空间四边形的定义  (1)　　(2) 如图所示，顺次连接不共面的四点 A，B，C，D 所构成的图形，叫做空间四边形； 每个点叫做空间四边形的顶点； 相邻顶点间的线段叫做空间四边形的边； 连接不相邻的顶点的线段叫做这个空间四边形的对角线.	师：这条性质同样也可推广到空间，作为空间中平行直线的基本性质. 教师出示长方体模型，或以教室中的实物为例，让学生理解空间平行线的传递性. 教师通过折纸，讲解空间四边形的各个概念，然后教学生如何画图表示空间四边形.	学生刚开始学习立体几何，空间想象能力较差，教师尽可能利用模型或实物讲解新的概念，然后由实物到图示，使学生对平行线的认识由平面扩展到空间. 通过折纸使学生对图形的认识从平面逐步上升到空间.

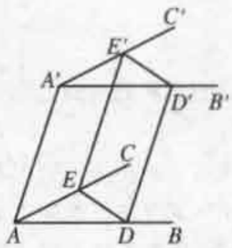
续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	空间四边形用表示顶点的四个字母表示. 例如，图中的四边形可以表示为空间四边形 $ABCD$，线段 AC，BD 是它的对角线.		
	例　如图所示，已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.  	平行四边形都有哪些判定的方法呢? 学生思考后，说出平行四边形的几种判定方法，教师引导学生根据已知条件总结出证明四边形 $EFGH$ 是平行四边形用“一组对边平行且相等”.	刚开始学习立体几何时，很多学生看不懂立体图形. 教师边画图边提问，帮助学生看明白图示，有助于培养学生的空间想象能力，同时潜移默化地引导学生将立体问题转化为平面问题.
	证明　连接 BD，在 $\triangle ABD$ 中，因为 E，H 分别是 AB，AD 的中点，所以 $EH \parallel BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$. 同理 $FG \parallel BD$，且 $FG=\frac{1}{2}BD$. 所以 $EH \parallel FG$，$EH=FG$. 因此四边形 $EFGH$ 是平行四边形.	教师小结：将立体问题转化到平面 ABD、平面 BCD 中，再利用平面几何的知识解决.	
	2. 空间中图形的平移 如果空间图形 F 中的所有点都沿同一方向移动相同的距离到 F' 的位置，则就说图形 F 在空间中作了一次平移(如图).  	教师把三角板紧贴在黑板上，画出其初始位置，再沿一个方向移动.	动手演示，利于学生理解.
	空间图形平移的性质：图形平移后与原图形相等. 对应两点的距离和对应角保持不变.		帮助学生理解空间图形平移的性质. 如，再把三角

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>新
课</td>
<td>

如下图，将$\triangle ADE$平移到$\triangle A'D'E'$的位置，对应边是否相等？对应角是否相等？



拓展：如果一个角($\angle A$)的两边与另一个角($\angle A'$)的两边方向相同，则$\angle A=\angle A'$.

练习

1. 判断题：

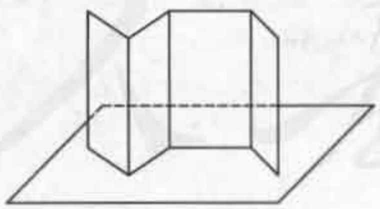
(1) 如果$\angle ABC=\angle A'B'C'$，且$AB\parallel A'B'$，则$AC=A'C'$；

(2) 如果$\angle ABC$与$\angle A'B'C'$的两条边分别平行，则$\angle ABC=\angle A'B'C'$.

2. 作线段AB，然后把AB沿与射线AB成60°角的方向平移3 cm到$A'B'$，求证：$AB=A'B'$.

3. 试一试：

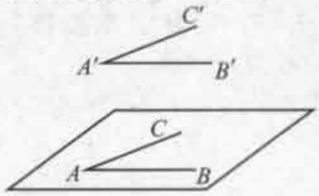
把一张长方形的纸对折两次，打开以后如图所示，说明为什么这些折痕是互相平行的.



</td>
<td>

学生分组讨论，教师通过课件动画演示，然后归纳总结.

师：如图，已知$\angle A$的两边与$\angle A'$的两边方向分别相同，是否有$\angle A=\angle A'$？



学生讨论，回答.

教师点评.

</td>
<td>

板在空中平移并讲解.

本问题是难点，有些学生受平面几何知识影响，会很容易想到平面图形，不能很快接受立体几何知识并用来解决这类问题，需要教师引导分析.

学习新知后紧跟练习有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内容.有利于教师检验学生的掌握情况.

</td>
</tr>
</table>

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	1. 平行线的基本性质，平行线的传递性. 2. 空间四边形的概念. 3. 空间中图形的平移.	师生合作.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.
作业	教材 P116 练习 A 组第 2 题，教材 P117 练习 B 组第 2 题.		巩固拓展.

9.2.2 异面直线

【教学目标】

1. 理解异面直线的定义，会判定两条直线是否为异面直线，会求异面直线的夹角.
2. 培养学生用数形结合的方法解决问题. 注重培养学生的作图、读图的能力.
3. 培养学生勇于发现、勇于探索、勇于创新的精神以及合作交流等良好品质.

【教学重点】

异面直线的判定.

【教学难点】

异面直线的夹角.

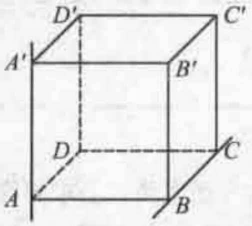
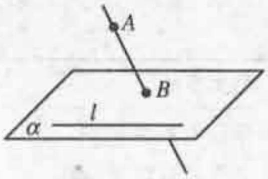
【教学方法】

这节课主要采用实物演示法和类比教学法. 先通过大量实例给学生以直观感知，再由平面几何两直线的位置关系引出异面直线的概念，由平面内两直线的夹角引出异面直线的夹角，并通过题目加深对各概念的理解.

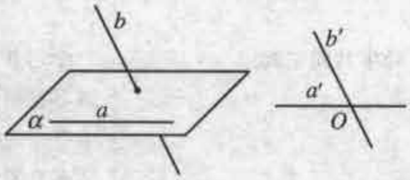
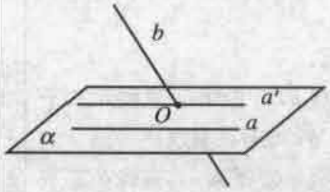
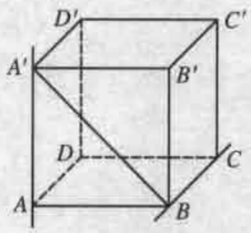
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	平面内两条直线的位置关系只有平行和相交两种. 提出新问题：空间两条直线的位置关系有哪些呢？	师：如果没有特别说明，一般我们说两条直线是指不重合的两条直线. 平面内两条直线的位置关系有哪几种？ 生：平行和相交两种. 师：在空间，除平行和相交外，两条直线还有另外的位置关系吗？	

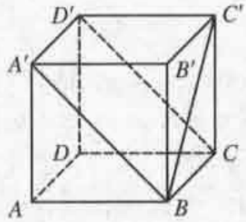
续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入		学生用两支铅笔探究两直线的位置关系．教师找学生上台演示．	
	观察如图所示的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，棱 AA' 与 BC 所在的两条直线是否相交、是否平行？  	观察正方体模型． 教师强调，既不相交也不平行的两条直线，它们一定不会共面，所以称它们为异面直线． 你还能在教室中找出其他异面直线吗？ 给出本节课课题．	先通过大量实例给学生以直观感知，再由平面几何知识解决不了的矛盾引出新的概念．
新课	1. 异面直线的定义 我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线． 小结：空间中，两直线的位置关系是平行、相交或异面．	教师引导学生总结．以表格形式呈现(见课件)．	培养学生的总结和表达能力．
	2. 异面直线的判定方法 连接平面内一点与平面外一点的直线和这个平面内不经过该点的任意直线是异面直线，如图所示．  	教师同时强调：既不平行也不相交的两条直线的关系是异面直线．这也是异面直线的判定方法之一．	
	3. 异面直线的夹角 如图，已知空间中两条不平行的直线 a，b，经过空间中任一点 O，作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，根据角平移的性质，a' 和 b' 所成角的大小和点 O 的选择无关．我们把 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做直线 a，b 所成的角或夹角．	复习平面几何中两直线夹角的定义，顺利引出异面直线的夹角． 为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上，如下图所示．	异面直线的夹角定义学生难以理解，先复习平面知识再扩展到立体知识，便于学生掌握．

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	 如果两条直线平行，我们说它们所成的角或夹角为 0°. 如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说两条异面直线互相垂直. 两条异面直线 a，b 互相垂直，记作 $a \perp b$.	 想一想：如果 $a \parallel b$，$a \perp c$，那么 b 是否垂直 c?	
新课	例　如图所示的是正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$： (1) 哪些棱所在的直线与直线 BA' 是异面直线？ (2) 求直线 BA' 与 CC' 所成的角的度数； (3) 哪些棱所在的直线与直线 AA' 垂直.  解　(1) 由异面直线的判定方法可知，与直线 BA' 成异面直线的有直线 $B'C'$，AD，CC'，DC，$D'C'$，DD'； (2) 因为 $BB' \parallel CC'$，所以 $\angle B'BA'$ 等于异面直线 BA' 与 CC' 所成的角，由此得 BA' 与 CC' 所成的角为 45°； (3) 直线 AB，BC，CD，DA，$A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$ 都与直线 AA' 垂直.	(1) 可以用既不平行也不相交的判定方法来列举，列举时要做到不重不漏； (2) 直线 BA' 与 CC' 的位置关系是什么？所成的角是哪一个？ (3) 与直线 AA' 相交且垂直的棱有哪些？	通过教师的问题引导学生自己解题，培养学生解题的严谨性和条理性.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	练习 1. 判断题： (1) 若直线 $a\subset$ 平面 α，直线 $b\not\subset$ 平面 α，则 a 与 b 成异面直线； (2) 若直线 $a\subset$ 平面 α，直线 $b\subset$ 平面 α，则 a 与 b 相交或平行； (3) 过直线外一点只可作一条直线与已知直线垂直. 2. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中：  (1) 直线 $A'B$ 与 $C'D'$ 是______直线，直线 $A'B$ 与 $C'D'$ 所成的角等于______； (2) 直线 BC 与 $C'D'$ 是______直线，直线 BC 与 $C'D'$ 所成的角为______； (3) 直线 $A'B$ 与 BC' 是______直线，直线 $A'B$ 与 BC' 所成的角为______. 3. 已知 A，B，C，D 是空间中的四个点，且 AB，CD 是异面直线，则 AC，BD 一定是异面直线吗？为什么？	师生共同完成.	学习新知后紧跟练习有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内容.有利于教师检验学生的掌握情况.
小结	1. 异面直线的定义，会判定两条直线的位置关系. 2. 会求异面直线的夹角.	采取学生总结，教师补充的形式进行.	梳理总结也可针对学生薄弱或易错处进行强调和总结.
作业	教材 P125 习题第 2 题.		巩固概念.

9.2.3 直线与平面平行

【教学目标】

1. 掌握空间直线和平面的位置关系.

2. 掌握直线和平面平行的判定定理、性质定理，并能利用定理进行简单的证明.

3. 通过动手，培养学生勇于实践、合理推理的能力，并使学生树立将空间问题向平面问题转化的思想，体会数学来源于生活，并服务于生活.

【教学重点】

直线与平面平行的判定定理、性质定理.

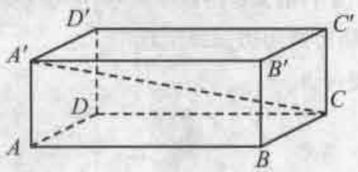
【教学难点】

直线与平面平行的判定定理、性质定理的理解和应用.

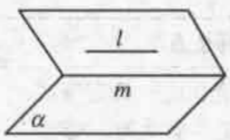
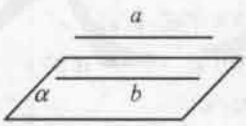
【教学方法】

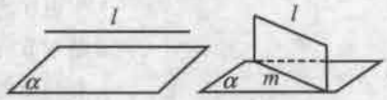
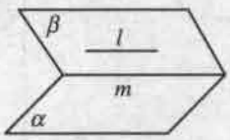
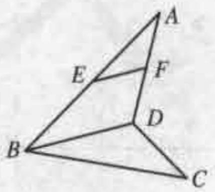
主要采用讲练结合法. 通过动手实践，引导学生“实践—观察—猜想—归纳”，得出直线与平面的位置关系、判定定理和性质定理. 利用文字语言、符号语言和图形语言的相互转化，深化对定理的理解，通过例题，使学生明确定理应用的关键，培养学生将立体问题转化为平面问题的解题思想.

【教学过程】

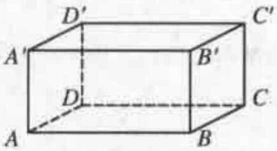
环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 学生动手探究，感受直线和平面的位置关系. 2. 根据公共点的情况，对直线和平面的位置关系进行分类. 	把一支笔看成一条直线，把课本看成一个平面，师生共同演示直线和平面的位置关系. 师：观察如图所示的长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，下列各组中的直线与平面有几个公共点： (1) 棱 $A'B'$(或 $A'D'$) 所在的直线与平面 AC； (2) 棱 AA'(或对角线 $A'C$) 所在的直线与平面 AC； (3) 棱 AB(或 AD) 所在的直线与平面 AC. 学生观察并回答.	通过动手实践，实物演示，使学生的思维兴奋点很快集中，体会数学来源于生活，并服务于生活. 引导学生“实践—观察—猜想—归纳”，得出直线与平面的位置关系.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	1. 直线和平面的位置关系 (1) 直线在平面内：直线与平面有两个公共点. (2) 直线与平面相交：直线与平面只有一个公共点. 这个公共点叫做直线与平面的交点. (3) 直线与平面平行：直线与平面没有公共点. 我们把直线与平面相交或平行的情况统称为直线在平面外，符号表示：$a\not\subset\alpha$.	师：给出定义，并利用表格对比说明三种位置关系(见课件). 生：理解并记忆.	通过表格归纳，有利于学生将知识条理化，便于记忆.
	问题：如图，直线 m 在平面 α 内，让 m 沿某个方向平移出平面 α 到直线 l 的位置. 直线 l 与平面 α 的位置关系是什么？  直线 l 平行于平面 α，记作 $l\parallel\alpha$. 2. 直线与平面平行的判定定理 如果一个平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行. 用符号表示为： 若 $a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且 $a\parallel b$，则 $a\parallel\alpha$. 如图所示.	师：直线 l 与直线 m 的位置关系是什么？ 生：$l\parallel m$. 师：直线 l 与平面 α 有几个公共点？ 生：直线 l 与平面 α 没有公共点. 直线 l 与平面 α 的位置关系是什么？ 生：直线 l 平行于平面 α，即 $l\parallel\alpha$. 师：由此我们归纳出直线与平面平行的判定定理. 教师边画图边强调定理中的关键词语.	从文字语言，符号语言，图形语言三个方面来描述定义，深化对定义的理解. 利用文字语言、符号语言和图形语言的相互转化，有助于学生理解定理的本质，明确利用定理证明的关键.
	 直线与平面平行的判定定理在生活中的应用.	师：平常用平行吊线挂灯管就利用上述性质，只要两根吊线平行且等长，则灯管就和天花板平行. 你还能举出例子吗？ 学生讨论思考(如半开的门，打开一半的书等等).	通过生活实例的引入，可帮助学生理解直线与平面平行的判定定理，再次体会数学来源于生活，并服务于生活.

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	一般画法： 通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形的外面，并且使它与平行四边形的一边平行或与平行四边形内的一条线段平行.  3. 直线与平面平行的性质定理 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和两平面的交线平行. 已知：$l \parallel \alpha$，$l \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = m$(如下图). 求证：$l \parallel m$.  例　已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点(如图). 求证：$EF \parallel$ 平面 BCD. 	教师讲解画图方法. 学生练习画图. 教师边画图边强调定理中的关键词语. 师：观察图形，找出我们要证明 EF 与平面 BCD 内的哪条线平行呢？ 生：BD. 教师可先让学生自己试着去写证明过程，最后师生统一订正，教师给出具体步骤. 师生共同反思：(1) 判定定理的实质； (2) 定理的三个条件缺一不	利用文字语言，符号语言和图形语言的相互转化，有助于学生理解定理的本质，明确利用定理证明的关键. 虽然学生已知线面平行的判定定理，但认识还是不深刻，通过例题再次巩固. 以学生为主，完成证明任务，以便进一步理解线面平行的判定定理.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	证明　连接 BD，在 $\triangle ABD$ 中，因为 E，F 分别是 AB，AD 的中点，所以 $EF \parallel BD$. 又因为 BD 是平面 ABD 与平面 BCD 的交线，$EF \not\subset$ 平面 BCD，所以 $EF \parallel$ 平面 BCD. 练习 1. 如图所示长方体中：  (1) 与直线 AB 平行的平面有_____； (2) 与直线 AA' 平行的平面有_____； (3) 与直线 AD 平行的平面有_____. 2. 下列命题是否正确，并说明理由： (1) 如果一条直线不在平面内，则这条直线就与这个平面平行； (2) 过直线外一点，可以作无数个平面与这条直线平行； (3) 如果一条直线与一个平面平行，则它与这个平面内的任何直线平行.	可：面内、面外、平行； (3) 运用定理证明关键是在面内找一条直线和已知直线平行. 学生抢答．教师点评.	学习新知后紧跟练习有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内容．有利于教师检验学生的掌握情况.
小结	1. 空间直线和平面的位置关系. 2. 直线和平面平行的判定定理、性质定理；并能利用定理进行简单的证明.	教师可引导学生通过教室的实物把本节的内容进行小结.	通过动手，借助实物总结，培养学生勇于实践的精神和总结表达的能力，并再次体会数学来源于生活，并服务于生活.
作业	教材 P121 练习 B 组第 1，2 题.		巩固定理，理解定理.

9.2.4 平面与平面的平行关系

【教学目标】

1. 掌握平面与平面的位置关系的分类. 掌握平面与平面平行的判定定理和性质定理，并会简单应用.

2. 通过直观演示，提高学生的空间想象能力.

3. 通过动手探究，体验数学学习的快乐，激发学习热情，初步培养创新意识.

【教学重点】

平面与平面平行的判定定理和性质定理.

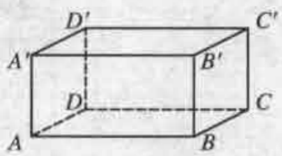
【教学难点】

平面与平面平行的判定定理和性质定理的应用.

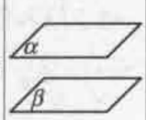
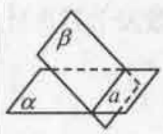
【教学方法】

主要采用讲练结合法. 通过动手实践，引导学生"实践—观察—猜想—归纳"，得出平面与平面的位置关系的判定定理和性质定理. 利用文字语言、符号语言和图形语言的相互转化，深化对定理的理解，通过例题，使学生明确定理应用的关键，培养学生将立体问题转化为平面问题的解题思想.

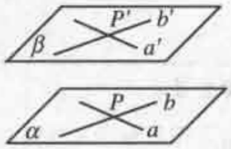
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	学生观察长方体，感受平面与平面的位置关系. 并根据公共点的情况，对平面与平面的位置关系进行分类.  	师：观察如图所示的长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，下列各组中的两个平面有几个公共点： (1) 平面 $A'B'C'D'$ 与平面 $ABCD$； (2) 平面 $ABB'A'$ 与平面 $ABCD$. 学生观察并回答.	由实例感知上升到理性分类.
新课	1. 平面与平面的位置关系 如果两个平面没有公共点，则称这两个平面平行. 如果两个平面有一个公共点，那么由基本性质 2 可知，它们相交于经过这点的一条直线，这时，我们就说这两个平面相交. 平面与平面的位置关系如下表所示.	师：如果没有特别说明，一般我们说两个平面是指不重合的两个平面. 给出定义，并利用表格对比说明两种位置关系(见课件).	通过表格归纳，有利于学生将知识条理化，便于记忆.

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>新
课</td>
<td>
<table>
<tr><td>位置关系</td><td>两平面平行</td><td>两平面相交</td></tr>
<tr><td>公共点</td><td>没有公共点</td><td>有一条公共直线</td></tr>
<tr><td>符号表示</td><td>$\alpha /\!/ \beta$</td><td>$\alpha \cap \beta = a$</td></tr>
<tr><td>图形表示</td><td></td><td></td></tr>
</table>

问题1　如图，在平面α内，作两条相交直线a，b，并且$a \cap b = P$，将直线a，b同时平移出平面α到直线a'，b'的位置，$a' \cap b' = P'$，相交直线a'，b'所确定的平面记为平面β．平面α与平面β的位置关系是什么？



2. 平面与平面平行的判定定理

判定定理　如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面平行．

用符号表示为：

若$a \subset \beta$，$b \subset \beta$，$a \cap b = P$，$a /\!/ \alpha$，$b /\!/ \alpha$，则$\beta /\!/ \alpha$．

利用平面与平面平行的判定定理，我们可以得到：

推论　如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线，则这两个平面平行．

用符号表示为：

如果$a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$，$a \cap b = P$，$a' \subset \beta$，$b' \subset \beta$，$a /\!/ a'$，$b /\!/ b'$，那么$\alpha /\!/ \beta$．
</td>
<td>
学生理解并记忆．

师：画法．在画两个平行平面时，通常把表示这两个平面的平行四边形的相邻两边分别画成平行线．

复习线面平行的判定定理．

师：直线a'与平面α什么关系？b'与平面α什么关系？

生：$a' /\!/ \alpha$，$b' /\!/ \alpha$．

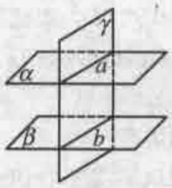
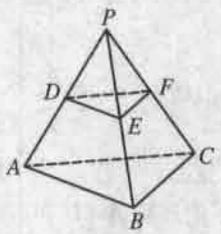
师：由相交直线a'与b'确定的平面β与平面α什么关系？

生：$\beta /\!/ \alpha$．

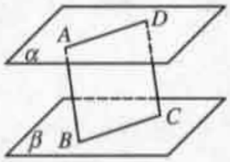
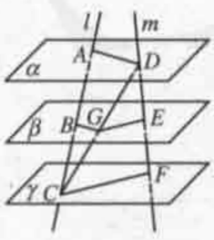
教师边画图边强调定理中的关键词语："平面内""两条相交直线"．
</td>
<td>
从文字语言、图形语言和符号语言三方面加深对位置关系的理解．

采用直观操作和教师问题引导下的思辨论证，归纳出平面与平面平行的判定定理，比直接给出定理，更符合学生的特点，容易被学生接受．利用文字语言、符号语言和图形语言的相互转化，有助于学生理解定理的本质，明确利用定理证明的关键．
</td>
</tr>
</table>

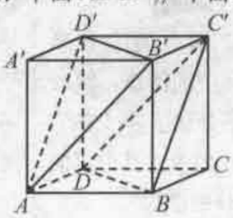
续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	3. 平面与平面平行的性质定理 问题2　如图，$\alpha // \beta$，$\gamma \cap \alpha = a$，$\gamma \cap \beta = b$，那么直线 a，b 的位置关系是什么？  性质定理　如果两个平行平面同时与第三个平面相交，则它们的交线平行.	师：a，b 分别在两个平行平面 α，β 内，它们有没有公共点？ 生：没有. 师：a，b 都在平面 γ 内吗？ 生：在. 师：直线 a，b 的位置关系是什么？ 生：平行. 师：由此可得到面面平行的性质定理.	教师为突破难点设计了几个问题，把主动权交给学生，使学生在自主探索中发现问题、解决问题.
	举例：观察长方体的教室，天花板面与地面是平行的. 一个墙面分别与天花板面、地面相交所得到的两条直线是平行的.	师：你能举出类似的例子吗？ 学生思考并举例.	通过实例的分析，加深对定理的理解，体会生活中处处有数学.
	例1　已知空间四边形 $PABC$，连接 PB，AC，且 D，E，F 分别是棱 PA，PB，PC 的中点(如图). 求证：平面 DEF // 平面 ABC.  证明　在△PAB 中，因为 D，E 分别是 PA，PB 的中点，所以 $DE // AB$. 又因为 $DE \not\subset$ 平面 ABC，所以 $DE //$ 平面 ABC. 同理 $EF //$ 平面 ABC.	教师画完空间四边形 $PABC$，连接 PB，AC 后，问：图中有哪几个平面？ 生：平面 PAB，平面 PBC，平面 PAC，平面 ABC. 连接 D，E，F 后，师再问：要证面 DEF // 面 ABC，怎么证？	求证两平面平行，题目不必过难，重点在于理解面面平行的性质定理. 教师边画图边提问，帮助学生看明白图示，有助于培养学生将立体问题转化为平面问题的解题能力.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	又因为 $DE \cap EF = E$，$AB \cap BC = B$，所以 平面 DEF // 平面 ABC.		
	例 2　已知平面 α // 平面 β，AB 和 CD 为夹在 α，β 间的平行线段（如图）. 求证：$AB = CD$（即夹在两个平行平面间的两条平行线段相等）.  证明　连接 AD，BC. 因为 AB // CD，所以 AB 和 CD 确定平面 AC. 又因为 平面 $AC \cap \alpha = AD$， 平面 $AC \cap \beta = BC$， α // β， 所以 AD // BC，从而 $ABCD$ 是平行四边形. 因此 $AB = CD$.	师：已知 AB // CD，要证 $AB = CD$. 说明四边形 $ABCD$ 是什么图形？ 生：平行四边形. 师：要证 $ABCD$ 是平行四边形，已知 AB // CD，还要证什么？ 生：AD // BC. 师：已知中还有什么条件？ 生：α // β. 师：由平面 α // β 要证 AD // BC，用什么定理？	从要证的结论出发，教师用问题一步步引导学生分析证明思路.
	例 3　已知平面 α // 平面 β // 平面 γ，且两条直线 l，m 分别与平面 α，β，γ 相交于点 A，B，C 和点 D，E，F（如图）. 求证：$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.  	师：两条直线 l，m 一定共面吗？ 生：不一定. 师：能不能连接 A，D 和 B，E，来证明 AD // BE？为什么？ 生：不能. 因为 AD 与 BE 可能是异面直线. 师：连接 D，C 后，除平面 α，β，γ 外，图中还有哪几个平面？	从学生易犯的错误入手，分析连接 DC 的必要性. 然后分析如何应用面面平行的性质定理.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	证明　连接 DC，与平面 β 相交于点 G，则平面 ACD 与平面 α，β 分别相交于直线 AD，BG. 因为 $\alpha \parallel \beta$，$\beta \parallel \gamma$，所以 $BG \parallel AD$，$GE \parallel CF$. 因此 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DG}{GC}$，$\dfrac{DG}{GC}=\dfrac{DE}{EF}$，所以 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$. 本例结果通常可叙述为：两条相交直线被三个平行平面所截，截得的对应的线段成比例.	进一步分析如何应用平面与平面平行的性质定理.	
	练习 1. 判断下列命题的真假： (1) 如果两个平面不相交，那么它们就没有公共点； (2) 如果一个平面内的两条直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行； (3) 如果一个平面内的任何一条直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行； (4) 已知两个平行平面中的一个平面内有一条直线，则在另一个平面内有且只有一条直线与已知直线平行； (5) 分别在两个平面内的两条直线平行. (6) 过平面外一点，有且只有一个平面与这个平面平行； (7) 过平面外一条直线，有且只有一个平面与这个平面平行；	学生抢答，教师点评.	通过练习可检验学生对本节课的掌握情况，以便于教师能针对学生薄弱或易错处强调总结.
	2. 已知长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$（如图）. 求证：平面 $AB'D' \parallel$ 平面 $BC'D$.  	教师简单点拨，学生自行解决，教师巡视并加以指导，同时请两名学生板演.	再次巩固证面面平行的思路与步骤.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	1. 平面与平面的位置关系的分类. 2. 平面与平面平行的判定、性质以及简单应用.	师生合作.	深化理解，区别记忆.
作业	教材 P124 练习 A 组第 2 题，练习 B 组第 3 题.		巩固拓展.

9.3.1 直线与平面垂直

【教学目标】

1. 了解空间直线与平面垂直的定义，掌握直线与平面垂直的判定定理和性质定理，并会简单应用.

2. 渗透由平面到空间的转换思想，培养学生的空间想象能力.

【教学重点】

直线与平面垂直的判定定理和性质定理.

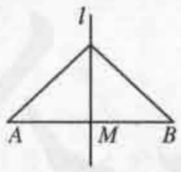
【教学难点】

直线与平面垂直的判定定理和性质定理的应用.

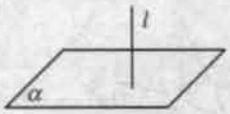
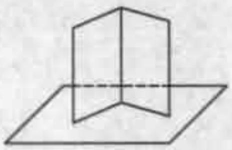
【教学方法】

本节主要采用讲练结合法. 通过学生动手操作，由线段的一条垂直平分线在空间旋转成垂直平分面，在此基础上，定义直线与平面垂直. 通过猜测、说理得出线面垂直的判定定理与性质定理，然后在例题中体验定理在实际生活中的应用.

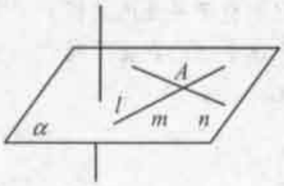
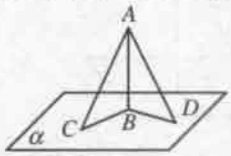
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	平面内到两定点距离相等的点的轨迹是连接这两点线段的垂直平分线.  学生操作：取一根细的直钢丝 AB，通过 AB 的中点 O 固定一条与 AB 垂直的金属棒 l，然后把金属棒两端放在固定的槽内. 通过外力让其旋转，观察 l 的轨迹，看它是什么样的图形.	师：在平面 α 内，设 l 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 M，到 AB 两点距离相等的点是否一定在 l 上？ 到 AB 两点距离不相等的点是否一定不在 l 上？ 学生思考后回答. 师：推广到空间，如果 A，B 是空间中的两点，线段 AB 的垂直平分线有多少条？所有线段 AB 的垂直平分线的集合形成怎样的图形？	由学生初中学过的垂直平分线推广到垂直平分面，符合学生的认知规律. 通过学生动手操作，直观感知垂直平分线运动成垂直平分面的过程，为下面定义线面垂直奠定基础.

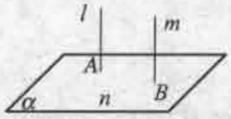
续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	1. 直线与平面垂直的定义 如果一条直线和一个平面内的任何直线都垂直，我们就说这条直线与这个平面互相垂直，直线叫做平面的垂线，平面叫做直线的垂面，交点叫做垂足．垂线上任意一点到垂足间的线段，叫做这个点到这个平面的垂线段． 画直线与平面垂直时，通常要把直线画成和表示平面的平行四边形的一边垂直．如图，直线 l 与平面 α 互相垂直，记作 $l\perp\alpha$． 	教师强调，直线与平面垂直，则它垂直于平面内的任意直线，这个结论在证明时经常用到．	
新课	实验：如图，将一张矩形纸片对折后略微展开，竖立在桌面上，观察折痕与桌面的关系．  我们知道，一个平面可由它所含的两条相交直线完全确定．实际上只要检验一条直线与平面内的两条相交直线是否垂直就可以了．	师：用直线与平面垂直的定义，直接检验直线是否与平面垂直是困难的．想一想，是否有容易操作又比较简单的判别方法？ 学生实验探究，并讨论分析．	通过此实验直观感知直线与平面垂直．为引出直线与平面垂直的判定定理做铺垫．
	2. 直线与平面垂直的判定 判定定理　如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直． 用符号表示为：	教师归纳直线与平面垂直的判定定理． 教师边画图边强调定理中	通过猜测、说理得出线面垂直的判定定理，不做严格证明．

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	若 $l\perp m$，$l\perp n$，$m\cap n=A$，$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $l\perp\alpha$(如图所示).  推论　如果在一组平行直线中，有一条直线垂直于平面，那么另外的直线也都垂直于这个平面.	的关键词语："平面内""两条相交直线".	利用文字语言、符号语言和图形语言的相互转化，有助于学生理解定理的本质，明确利用定理证明的关键.
	例　有一根旗杆 AB 高 8 m，它的顶端 A 挂一条 10 m 的绳子. 拉紧绳子，并把它的下端放在地面上的两点 C，D(和旗杆脚不在同一条直线上). 如果这两点都和旗杆脚 B 的距离是 6 m，那么旗杆就和地面垂直，为什么? 解　在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中，因为 $AB=8$ m，$BC=BD=6$ m， $AC=AD=10$ m， 所以 $AB^2+BC^2=6^2+8^2=10^2=AC^2$， $AB^2+BD^2=6^2+8^2=10^2=AD^2$. 因此 $\angle ABC=\angle ABD=90^\circ$，即 $AB\perp BC$，$AB\perp BD$. 又知 B，C，D 三点不共线，所以 $AB\perp$ 平面 BCD，即旗杆和地面垂直. 3. 直线与平面垂直的性质 性质定理　如果两条直线同时垂直于一个平面，那么这两条直线平行. 用符号表示为： 若 $l\perp\alpha$，$m\perp\alpha$，则 $l\parallel m$(如图所示).	结合下图分析证明思路.  教师引导学生列举实际生活中的例子，来验证此性质.	通过例题，理解线面垂直的判定定理，体验定理的实际应用. 通过实例的分析可加深对定理的理解，体会数学来源于生活，数学服务于生活.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	 练习 1. 在空间中过一点都能作任意一条直线的垂线吗？为什么？ 2. 已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，分别写出与下列直线垂直的平面： (1)AA_1；(2)AB；(3)B_1C_1. 3. 如果一条直线垂直于一个平面内的： (1) 三角形的两条边； (2) 梯形的两条边； (3) 圆的两条直径. 试问这条直线与上述图形所在的平面都垂直吗？ 4. 三角形的两边可以都垂直于同一个平面吗？	师生共同合作完成.	学习新知后紧跟练习有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内容.有利于教师检验学生的掌握情况.
小结	1. 空间直线与平面垂直的定义. 2. 直线与平面垂直的判定定理、性质定理以及简单应用.	师生合作总结．教师应强调转化的思想.	梳理知识点，尤其是小结线面垂直的两个性质.
作业	教材 P129 练习 B 组第 1 ~ 3 题.		巩固拓展.

9.3.2 直线与平面所成的角

【教学目标】

1. 了解平面的斜线的定义，理解直线与平面所成角的概念，并会求直线与平面所成的角.

2. 注重培养学生的读图、作图的能力，培养学生的空间想象力.

【教学重点】

直线与平面所成的角.

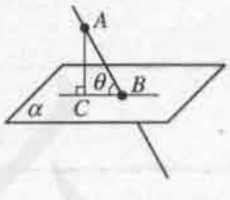
【教学难点】

斜线与平面所成的角.

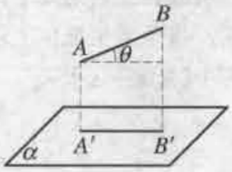
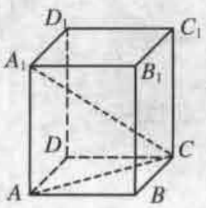
【教学方法】

本节主要采用讲练结合法. 在学生熟悉线面垂直的基础上，讲解平面的斜线及其射影，通过推导三垂线定理进一步熟悉线面垂直的知识.

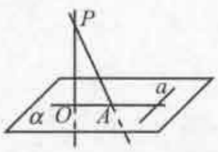
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 直线与平面垂直的定义、判定定理和性质定理. 2. 直线与平面的位置关系.	直线与平面的位置关系利用表格进行提问(见课件). 师：空间直线与平面垂直属于哪一种情况？ 生：一条直线和一个平面相交，且和这个平面垂直. 师：一条直线与一个平面相交但不垂直，会怎样？	本节内容是建立在线面垂直的基础之上的，所以学生必须对线面垂直的定义、判定定理和性质定理非常熟练. 课前复习，为新课的学习扫清障碍.
新课	1. 平面的斜线 如果一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，那么这条直线叫做这个平面的斜线，斜线和平面的交点叫做斜足. 斜线上一点与斜足之间的线段叫做斜线段. 如图，AB 是平面 α 的斜线，B 是斜足，AB 是斜线段.  2. 直线与平面所成的角 从斜线上斜足以外的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面上的射影. 斜线和它在平面上的射影的夹角，叫做斜线和平面所成的角(或夹角)，如上图所示.	教师给出定义. 学生理解并记忆定义. 重点强调斜线的射影是过垂足和斜足的直线.	引导学生在理解的基础上记忆.

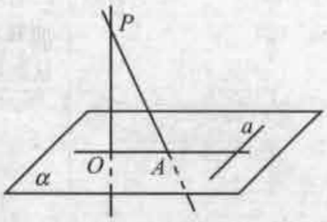
续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	如果直线垂直于平面，则规定直线与平面所成的角是直角(90°)； 如果直线和平面平行，或在平面内，则规定直线与平面所成的角是0°的角. 一条线段与平面所成的角指的是线段所在直线与平面所成的角. 如图，设线段AB在平面α内的射影为$A'B'$，且AB与平面α所成的角为θ. 易证 $$\|A'B'\|=\|AB\|\cos\theta.$$  	教师可在此处多设计几个图形，让学生练习辨别垂线、斜线及其射影.	
新课	练习 设线段$AB=l$，且AB与平面α所成的角为θ，求线段AB在平面内的射影$A'B'$长： (1)$l=6$，$\theta=\frac{\pi}{3}$； (2)$l=10$，$\theta=0$； (3)$l=8$，$\theta=\frac{\pi}{2}$.	学生练习.	此处加强练习为下面顺利引入三垂线定理奠定基础.
	例1　如图长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AB=1$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{2}$. 求对角线A_1C与平面$ABCD$所成的角.  	展示图形，要求学生找出对角线A_1C所在直线在平面$ABCD$上的射影，讨论如何作图.	教师用问题引导学生一步步分析如何作出斜线与平面所成的角，培养学生思维的条理性.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	解　连接 AC，由题意知 $\triangle A_1AC$ 为直角三角形，且 $\angle A_1AC=90°$. 又由题意，可知 $$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$ 而 $AA_1=\sqrt{2}$，所以 $\angle ACA_1=45°$. 因此 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$.		
新课	例 2　如图，已知 PA 是平面 α 的斜线，$PO\perp\alpha$，$a\subset\alpha$，$a\perp AO$. 求证：$a\perp PA$.  证明：因为 $PO\perp\alpha$，$a\subset\alpha$，所以 $PO\perp a$.（线面垂直的定义） 又因为 $AO\perp a$，且 $PO\cap AO=O$，所以 $a\perp$ 平面 PAO.（线面垂直的判定） 又因为 $PA\subset$ 平面 PAO，所以 $a\perp PA$.（线面垂直的定义） 例 2 中，AO 是斜线 PA 在平面 α 内的射影，通常例 2 的结论也叫做三垂线定理： 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.	教师引导学生对定理进行结构分析，明确各元素之间的制约关系，指导学生抓住“四线一面”中“垂线”这个关键条件. 可借助三角板与铅笔演示三垂线定理，给学生以直观印象.	此题看似简单，但每一步都分别应用了线面垂直的定义、判定定理等，教师必须在每一步后注明所用定理，给学生以明确的思维指导.
	练习 1. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，写出对角线 B_1D_1 与平面 AC，平面 BA_1，平面 BC_1 所成的角，并求这些角的余弦值.	师生合作共同完成.	学习新知后紧跟练习，有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	2. 如图所示，PA 为平面 α 的斜线，$PO\perp\alpha$，$a\subset\alpha$，$a\perp PA$. 求证：$a\perp AO$.  该结论叫做三垂线定理的逆定理： 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.		容. 有利于教师了解学生对本节课的掌握情况.
小结	1. 平面的斜线的定义. 2. 理解直线与平面所成的角的概念，并会求直线与平面所成的角.	教师引导梳理.	
作业	教材 P131 练习 A 组第 3 题；练习 B 组第 1 题(选做).		

9.3.3 平面与平面所成的角

【教学目标】

1. 了解二面角、二面角的平面角的定义，会求二面角的大小.
2. 从学生身边的事例出发，体会由实际问题上升为数学概念和数学知识的过程.
3. 培养学生把空间问题转化为平面问题进行解决的思想.

【教学重点】

二面角的定义.

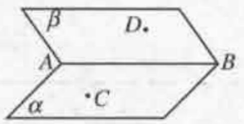
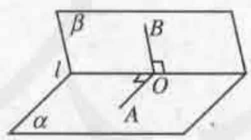
【教学难点】

找出二面角的平面角.

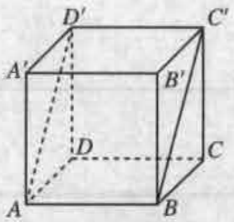
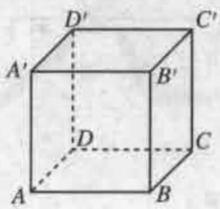
【教学方法】

这节课主要采用讲练结合法. 由直观的生活实例抽象出二面角及其平面角的定义，通过题目练习其应用.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	修筑水坝时，为了使水坝坚固耐用，需要使水坝面与水平面成适当的角度；使用笔记本电脑时，为了方便操作，两个面板要成一定的角度.	两个平面成一定夹角的实例. 如何刻画两个平面形成的这种“角”呢？	由生活实例引出平面与平面所成角的定义，由具体到抽象，符合学生的认知规律.
新课	1. 二面角 平面内的一条直线把这个平面分成两个部分，其中的每一部分都分别叫做一个半平面，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面. 如图，以 AB 为棱，α 和 β 为半平面的二面角，记作二面角 α-AB-β. 如果 C，D 分别是半平面 α 和 β 内(棱以外的半平面部分)的点，那么这个二面角也可记作 C-AB-D. 	笔记本电脑打开过程中，我们可以感到两个面板构成的二面角的大小在逐渐变大. 如何来刻画二面角的大小呢？	由直观的形象感知到抽象的数学定义，让学生感到数学知识来源于生活.
	2. 二面角的平面角 如图，在二面角 α-l-β 的棱 l 上任取一点 O，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角.  二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度. 我们约定，二面角 α 的大小范围是 $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$. 平面角是直角的二面角叫做直二面角.	师：棱 l 与 $\angle AOB$ 所在的平面有什么关系？ 生：棱 $l \perp$ 平面 AOB.	通过此问题可加深对二面角的平面角的理解.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	例　如图，已知正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，求二面角 D'-AB-D 的大小.  解　在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，因为 $AB\perp$ 平面 $ADD'A'$， 所以 $AB\perp AD'$，$AB\perp AD$. 因此 $\angle D'AD$ 即为二面角 D'-AB-D 的平面角. 由于 $\triangle D'AD$ 是等腰直角三角形，因此 $\angle D'AD=45^\circ$， 所以二面角 D'-AB-D 的大小为 45°.	师：所求二面角是哪两个平面所成的角？其平面角是哪一个？如何求出平面角的大小？	用问题引导学生分析解题思路，尤其注重分析如何找出二面角的平面角，为练习中的题目做铺垫.
	练习 1. 一个平面垂直于二面角的棱，它和二面角的两个面的交线组成的角就是二面角的平面角，对吗？为什么？ 2. 如图所示，在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，求二面角 A'-AB-D 的大小. 	师生合作共同完成.	学习新知后紧跟练习有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内容. 有利于教师检验学生的掌握情况.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	1. 二面角，二面角的平面角的定义. 2. 会求二面角的平面角.		
作业	教材P133练习A组第1，2题；练习B组第1，2题(选做).		

9.3.4 平面与平面垂直

【教学目标】

1. 理解两个相交平面互相垂直的定义，掌握平面与平面垂直的判定定理和性质定理，并会简单应用.

2. 从学生身边的实例出发，体会由实际问题上升为数学概念和数学知识的过程.

3. 渗透把空间问题转换为平面问题进行解决的思想.

【教学重点】

平面与平面垂直的判定定理和性质定理.

【教学难点】

平面与平面垂直的判定定理和性质定理的应用.

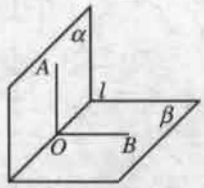
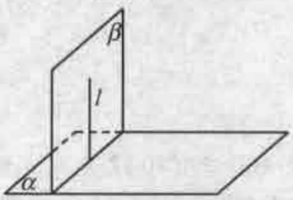
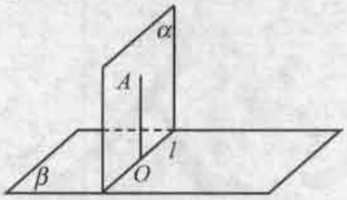
【教学方法】

这节课主要采用讲练结合法. 由生活中常见实例，得出平面与平面垂直的判定定理、性质定理，利用文字语言、符号语言和图形语言的相互转化，帮助学生理解定理. 通过例题，明确应用定理时线线垂直到线面垂直再到面面垂直的证明思路.

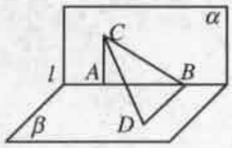
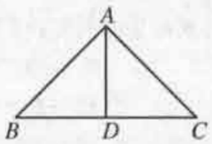
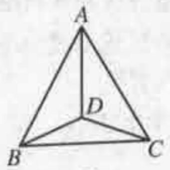
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 复习二面角的平面角定义. 2. 如何来刻画平面与平面垂直的概念呢?	师：(举例)黑板所在墙面与地面给我们相互垂直的形象.	由直二面角的定义引出两平面垂直的定义.
新课	如果两个相交平面组成的二面角为直角，则称这两个相交平面互相垂直. 平面 α 与 β 垂直，记作：$\alpha \perp \beta$. 两个互相垂直的平面在画图时，通常把直立平面的竖边画成与水平平面的横边垂直.	教师讲解画法.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	如图，已知$\alpha\perp\beta$，$\angle AOB$为二面角α-l-β的平面角，$OA\perp\beta$吗？  平面与平面垂直的判定定理： 判定定理　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直. 用符号表示为： $l\perp\alpha$，$l\subset\beta\Rightarrow\beta\perp\alpha$(如图所示). 	师：为什么教室的门转到任何位置时，门所在的平面都与地面垂直？ 通过观察，我们可以发现，门在转动的过程中，门轴始终与地面垂直. 师：建筑工人在砌墙时，常用铅锤线来检查所砌墙面是否和水平面垂直，为什么？ 学生思考回答.	由生活中常见的门轴，得出平面与平面垂直的判定定理，同时加深对定理的理解，帮助学生记忆.
	平面与平面垂直的性质定理： 性质定理　如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面. 用符号表示为： 如果$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$OA\subset\alpha$，$OA\perp l$，那么$OA\perp\beta$(如图所示). 	师：黑板所在平面与地面所在平面垂直，是否在黑板上任意画一条直线，都能使这条直线和地面垂直？你能否在黑板上画一条与地面垂直的直线？ 学生思考.	由生活实例得出平面与平面垂直的性质定理. 利用文字语言、符号语言和图形语言的相互转化，有助于学生理解定理的本质，明确应用定理的关键.
	例1　如图，已知平面$\alpha\perp$平面β，$\alpha\cap\beta=l$，在l上取线段$AB=4$，AC，BD分别在平面α和平面β内，并且垂直于它们的交线AB，并且$AC=3$，$BD=12$. 求CD的长.	教师边作图边分析已知条件. 分析每一步的根据是什么，面面垂直的性质、线面垂直的性质分别在哪一步应用.	此题较为复杂，教师应详细分析各线与平面的关系，各三角形的形状及其根据，给学生以

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	 解　连接 BC，CD. 因为 $AC\perp AB$，所以 $AC\perp\beta$，$AC\perp BD$. 又 $BD\perp AB$，所以 $BD\perp\alpha$，$BD\perp BC$. 所以 $\triangle BAC$ 和 $\triangle CBD$ 都是直角三角形. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC$ 中，有 $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$； 在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，有 $CD=\sqrt{5^2+12^2}=13$.		明确的思路.
新课	例 2　已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=AC=a$，AD 是斜边上的高，以 AD 为折痕使 $\angle BDC$ 成直角，如图所示. 求证： (1) 平面 $ABD\perp$ 平面 BDC，平面 $ACD\perp$ 平面 BDC； (2) $\angle BAC=60°$.  (1)  (2) 证明　(1) 如图(2)，因为 $AD\perp BD$，$AD\perp DC$，$BD\cap DC=D$，所以 $AD\perp$ 平面 BDC. 因为平面 ABD 和平面 ACD 都过 AD，所以 平面 $ABD\perp$ 平面 BDC， 平面 $ACD\perp$ 平面 BDC. (2) 如图(1)，在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC$ 中，因为 $AB=AC=a$，所以	通过折纸让学生明确折后哪些量没有发生改变.	通过例 2，让学生进一掌握理解定理的本质，明确应用定理的关键. 同时通过折纸的形式来帮助学生理解题意，从而提高学生的读图能力，及文字语言转换为数学语言的表达能力.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$BC=\sqrt{2}a$，$BD=DC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 如图(2)，因为 $\triangle BDC$ 是等腰直角三角形，所以 $BC=\sqrt{2}BD=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=a$. 所以 $AB=AC=BC$. 因此 $\angle BAC=60°$. 练习 1. 将一张长方形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 进行折叠，如何才能使两部分所在的平面互相垂直? 2. 长方体教室里的墙面之间是否垂直? 3. 正方体的对角面是否互相垂直? 4. 分别画出互相垂直的两个平面和两两垂直的三个平面. 5. 检查工件的相邻两个面是否垂直时，只要用曲尺的一边紧靠在工件的一个面上，另一边在工件的另一个面上转动一下，观察尺边是否始终和这个面密合就可以了. 为什么? 如果不转动呢?	 师生合作完成.	 学习新知后紧跟练习有利于帮助学生更好的梳理和总结本节所学内容. 有利于教师检验学生的掌握情况.
小结	1. 两个相交平面互相垂直的定义. 2. 平面与平面垂直的判定定理、性质定理以及简单应用.		梳理知识，形成体系.
作业	教材 P135 练习 A 组第 3 题，教材 P136 练习 B 组第 3 题.		

9.4.1 棱柱

【教学目标】

1. 理解并掌握棱柱的有关概念及性质，会计算长方体的对角线长度.

2. 通过大量的实物及模型，让学生认识空间几何体的结构特征，提高学生分类讨论、归纳总结的能力.

3. 通过教学，渗透由具体到抽象，由一般到特殊的思想方法.

【教学重点】

棱柱的有关概念及性质，长方体对角线的计算公式.

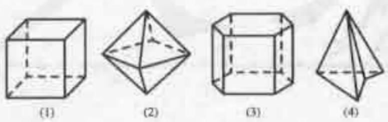
【教学难点】

棱柱的分类与性质.

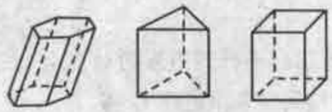
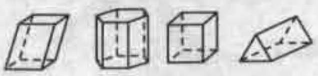
【教学方法】

这节课主要采用实物展示与讲练结合法. 纵观本节内容，由多面体到棱柱，然后到直棱柱、正棱柱，再到平行六面体和长方体，一直贯穿由一般到特殊的分类思想. 教授时，教师结合学生身边的实际物体以及图片，让学生直观理解各个概念及其分类，并设计问题引导学生自己总结出它们的一般性质. 最后学习重要的平行六面体和长方体，推导出它们的两个定理. 通过练习，让学生掌握这两个重要定理.

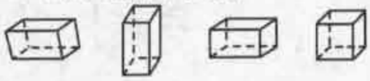
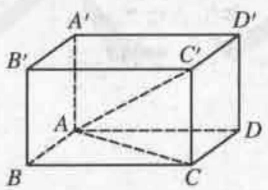
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	什么样的几何体叫做多面体?	学生结合图片以及实际生活经验讨论问题.	演示实物与图片，提高学生学习的兴趣，活跃学生的思维.
新课	1. 多面体 由若干个多边形围成的封闭的空间图形，叫做多面体；围成多面体的各个多边形叫多面体的面，两个相邻面的公共边叫多面体的棱，棱和棱的公共点叫多面体的顶点，连接不在同一面上的两个顶点的线段叫多面体的对角线. 一个多面体至少有四个面，多面体依照它的面数分别叫做四面体、五面体、六面体等. 练习一 请你判断下面的多面体分别是几面体?  (1) (2) (3) (4) 2. 棱柱和它的性质 (1) 棱柱的定义	学生小组合作，对照模型说一说多面体的面、棱、顶点、对角线各是什么. 教师引导，学生口答. 完成练习一.	巩固多面体的相关概念.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	问题： 什么样的多面体叫做棱柱？它们有什么共同特征？ 一个多面体，如果有两个面互相平行，其余每相邻两个面的交线都互相平行，这样的多面体叫做棱柱. 两个互相平行的面叫做棱柱的底面（简称底）；其余各面叫做棱柱的侧面；两个侧面的公共边叫做棱柱的侧棱；两个底面所在平面的公垂线段或它的长度，叫做棱柱的高. (2) 棱柱的表示 用棱柱两底面的字母表示，如棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$. (3) 棱柱的分类 侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱. 侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱. 底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱.  斜棱柱　直棱柱　正棱柱 棱柱的底面可以是三角形、四边形、五边形……这样的棱柱分别叫三棱柱、四棱柱、五棱柱…… (4) 棱柱的性质 观察下列几何体，回答下列问题：  两个底面多边形间的关系是什么？ 上下底面对应边间的关系是什么？ 侧面是什么平面图形？ 侧棱之间的关系是什么？	学生根据呈现的图片以及实物，总结出棱柱的特点，得出棱柱的定义. 学生对照课件，指出棱柱各部分的名称. 教师呈现各种实物，结合直观图，体会各种棱柱之间的区别. 按照不同的标准，对多面体进行分类. 教师呈现多个棱柱，提出四个问题，学生进行讨论回答，逐步总结出一般棱柱的性质.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	棱柱的性质： (1) 棱柱的每一侧面都是平行四边形，所有的侧棱都相等；直棱柱的每一个侧面都是矩形，正棱柱的各个侧面都是全等的矩形. (2) 两个底面与平行于底面的截面是对应边相互平行的全等多边形. (3) 过不相邻的两条侧棱的截面都是平行四边形.	对于直棱柱和正棱柱的性质，采用教师提问，学生回答的形式总结出来. 通过课件演示，让学生总结出性质(2)(3).	学生自己总结棱柱的共性，由具体到抽象，加深对定义的理解.
新课	3. 平行六面体和长方体  底面是平行四边形的四棱柱是平行六面体. 侧棱与底面垂直的平行六面体叫做直平行六面体. 底面是矩形的直平行六面体叫做长方体. 棱长都相等的长方体叫正方体.	教师呈现直观图，让学生对四种棱柱进行类比，观察各个棱柱的特点，找出相同点和不同点.	从棱柱到长方体、正方体，让学生体会由一般到特殊的思想.
	定理 1　平行六面体的对角线交于一点，并且在交点互相平分. 定理 2　长方体的一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱长的平方和. 已知，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，AC' 是一条对角线. 求证：$AC'^2=AB^2+AD^2+AA'^2$.  	教师结合平行四边形的对角线性质简单介绍定理 1，学生理解即可. 对于定理 2，教师应引导学生作出辅助线，然后由学生自主探索证明思路.	长方体是我们研究空间许多性质的主要载体，这里要让学生明确各个元素之间的相互关系.

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	证明　连接 AC．因为 $CC'\perp$ 平面 $ABCD$， 所以 $CC'\perp AC$． 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC^2=AB^2+BC^2$． 在 Rt$\triangle ACC'$ 中，有 $AC'^2=AC^2+CC'^2$ $=AB^2+BC^2+CC'^2$ $=AB^2+AD^2+AA'^2$． 从而结论成立． 例 1　已知一个长方体的长是 12 cm，宽是 9 cm，高是 8 cm．求这个长方体对角线的长 d． 解　因为 $d^2=A'C^2=12^2+9^2+8^2=289$， 所以 $d=17$ cm． 因此对角线的长是 17 cm． 练习二 已知一个长方体的长是 2 cm，宽是 1 cm，高是 2 cm．求它的对角线的长 d．	对于例 1，学生自主完成．	证明只要求学生理解即可． 通过例 1 和相应练习，熟练定理 2 的应用．
小结	1. 棱柱的定义、分类和性质． 2. 两个定理．		
作业	教材 P141 练习 B 组第 3 题；练习 B 组第 1 题(选做)．		

9.4.2 棱锥

【教学目标】

1. 掌握棱锥的有关概念及性质，并能运用定理解决相应的问题．

2. 通过实物及模型，让学生认识棱锥的结构特征，提高学生分类讨论、归纳总结的能力．

3. 通过教学，渗透由具体到抽象，由一般到特殊的思想方法．

【教学重点】

理解棱锥的概念及性质.

【教学难点】

理解棱锥的性质.

【教学方法】

这节课主要采用实物展示与讲练结合法. 教师结合学生身边的实物及图片, 让学生直观理解棱锥的概念及其分类, 总结出棱锥的一般性质. 最后由一般到特殊, 学习正棱锥的相关知识.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	什么样的图形是棱锥?	教师呈现棱锥形的建筑物图片, 学生讨论教师的问题.	从丰富的图片和实物出发, 引导学生讨论.
新课	1. 棱锥的定义 如果一个多面体有一个面是多边形, 其余各面都是有一个公共顶点的三角形, 那么这个多面体就叫做棱锥. 在棱锥中有公共顶点的各三角形叫棱锥的侧面; 多边形面叫做棱锥的底面或底; 两个相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱, 各侧面的公共顶点, 叫做棱锥的顶点, 由顶点所引的底面所在平面的垂线段, 叫做棱锥的高(垂线段的长也简称高). 2. 棱锥的表示 棱锥用顶点和底面各顶点的字母, 或用顶点和底面一条对角线端点的字母来表示. 棱锥可表示为 $S\text{-}ABCDE$, 或 $S\text{-}AC$. 3. 棱锥的分类 棱锥按底面多边形的边数分类, 可以分别称底面是三角形、四边形、五边形 … 的棱锥为三棱锥、四棱锥、五棱锥 ….	教师引导学生讨论得到棱锥的定义. 学生类比棱柱的各元素, 认识棱锥的各个元素. 学生类比棱柱的分类, 在动画的演示下, 认识各种棱锥.	通过演示和练习, 帮助学生认知棱锥的各个元素, 巩固知识点. 棱锥的分类与棱柱进行类比, 更容易理解记忆.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	4. 棱锥的性质 定理　如果棱锥被平行于底面的平面所截，则所得的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离的平方和棱锥高平方的比. 练习 若一个棱锥被平行于底面的平面所截，其截面面积与底面积的比为1∶4，则锥体被截面截得的一个小棱锥的高与原棱锥的高之比为______. 5. 正棱锥 底面是正多边形，顶点在底面内的射影是底面的中心的棱锥叫正棱锥. 性质： (1) 正棱锥各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰三角形. 各等腰三角形底边上的高相等，它叫正棱锥的斜高. (2) 正棱锥的高、斜高和斜高在底面上的射影组成一个直角三角形； 正棱锥的高、侧棱和侧棱在底面上的射影也组成一个直角三角形.	结合三角形相似的知识，教师呈现定理. 学生自行完成练习. 教师采用实物模型，让学生认识正棱锥. 教师结合模型，从棱到面，逐个分析提问，引导学生回答总结. 学生进行识记.	利用一个练习，来检验学生对定理的理解程度. 让学生感受实物，体会数学来源于生活.
小结	棱锥的定义、分类以及正棱锥的性质.		
作业	教材P156习题第2题；教材P142练习B组题(选做).		

9.4.3 直棱柱和正棱锥的侧面积

【教学目标】

1. 理解并掌握直棱柱和正棱锥的侧面积公式，并能运用公式解决相应的问题.
2. 通过教学，培养学生运用公式计算的能力.
3. 理解侧面积公式的推导过程及其主要思想，渗透把立体几何问题转化为平面几何

问题解决的思想方法.

【教学重点】

用公式求直棱柱和正棱锥的侧面积.

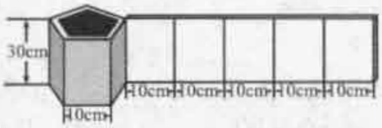
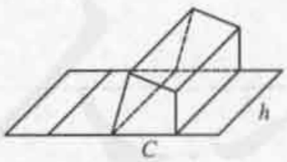
【教学难点】

用直棱柱和正棱锥的侧面积公式解决实际问题.

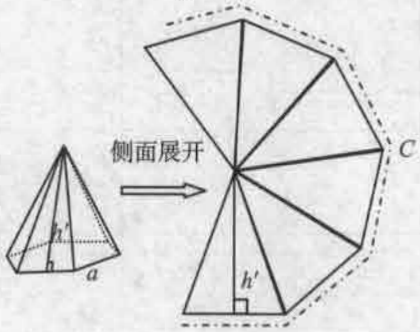
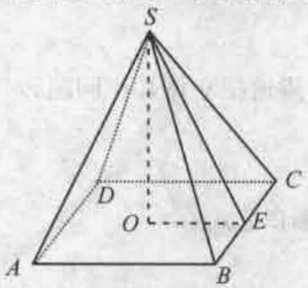
【教学方法】

这节课采用实物操作与讲练结合法. 学生根据纸制模型的侧面展开图，自己推导侧面积公式，体会把立体问题转化为平面问题解决的思想方法. 在理解公式的基础上，运用公式解决实际问题.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	问题：某工厂有一个排风管，管身为中空的正五棱柱，尺寸如图所示. 计算出制作管身所需的平板下料面积.（不考虑排风管的壁厚）  解　所求排风管一个侧面的面积为 $10\times30=300(\text{cm}^2)$. 那么制作管身所需的平板下料面积为 $5\times300=1\,500(\text{cm}^2)$.	教师设置实际场景，学生运用初中知识解决问题. 教师给出侧面展开图，引出课题.	根据实际生活的问题，设置情境，引发学生积极思考. 提出新的解决方案，引发新的思考.
新课	1. 直棱柱的侧面积 把直棱柱的侧面沿一条侧棱剪开后展在一个平面上，展开图的面积就是棱柱的侧面积.  直棱柱的侧面展开图是矩形，这个矩形的长等于直棱柱的底面周长 C，宽等于直棱柱的高 h，因此直棱柱的侧面积是	师：棱柱的侧面展开图是什么？如何计算它的侧面积？ 学生用课前准备的纸制棱柱模型沿侧棱展开. 学生自己推导直棱柱侧面积公式.	通过动手操作，提高学生学习的兴趣，更容易理解记忆侧面积公式.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	$S_{直棱柱侧}=Ch$.		
	练习一 一个正三棱柱的底面是边长为5的正三角形，侧棱长为4，则其侧面积为____.		巩固知识.
	2. 正棱锥的侧面积公式 如果正棱锥的底面周长为C，斜高为h'，它的侧面积是 $S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}nah'=\frac{1}{2}Ch'$. 	师：棱锥的侧面展开图是什么？如何计算它的侧面积？ 教师演示正棱锥的侧面展开，在教师的引导下，学生总结出正棱锥的侧面积公式.	通过课件演示侧面展开图，让学生体会把立体几何问题转化为平面几何问题解决的思想方法.
新课	练习二 正三棱锥底面边长为6，斜高是4，求棱锥的侧面积.	练习采用学生个别口答，其他学生评价的方式.	
	例　已知一个正四棱锥S-$ABCD$的高SO和底面边长都是4，求它的侧面积.  解：过点O作$OE\perp BC$于点E，连接SE. 则在Rt$\triangle SOE$中， $SE^2=SO^2+OE^2=16+4=20$， 所以$SE=2\sqrt{5}$.	例题有一定的难度，教师引导学生作出辅助线，学生自主完成.	学生利用所学的点、线、面的知识，得到斜高的长度. 在这个由已知到未知的探求过程中，体会分析问题、解决问题的过程.

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	因此 $S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}Ch'$ $=\frac{1}{2}\times4\times4\times2\sqrt{5}=16\sqrt{5}$， 所以正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的侧面积是 $16\sqrt{5}$. 练习三 设计一个正四棱锥形冷水塔塔顶，高是 0.85 m，底面的边长是 1.5 m，制造这种塔顶需要多少平方米铁板？ 棱柱、棱锥的全面积等于侧面积与底面面积的和.	学生仿照例题进行练习，教师巡视指导.	练习难度较大，教师引导学生完成.
小 结	直棱柱和正棱锥的侧面积公式.		
作 业	教材 P144 练习 B 组第 1 题；练习 B 组第 2 题(选做).		

9.4.4 圆柱、圆锥(一)

【教学目标】

1. 理解并掌握圆柱、圆锥的有关概念及性质，掌握圆柱、圆锥的侧面积公式，并能运用公式解决相应的问题.

2. 通过教学，培养学生运用公式计算的能力.

3. 理解侧面积公式的推导过程及其主要思想，渗透把立体几何问题转化为平面几何问题解决的思想方法.

【教学重点】

圆柱、圆锥的定义以及性质，圆柱、圆锥的侧面积公式.

【教学难点】

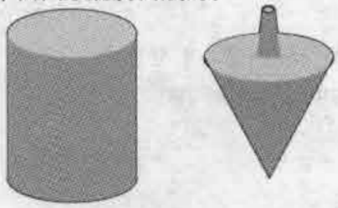
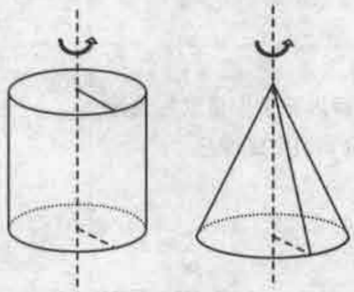
圆柱、圆锥侧面积公式的运用.

【教学方法】

这节课采用实物操作与讲练结合法．首先采用实物展示，用旋转的观点定义圆柱、圆锥，在教师问题的引导下推导其性质．学生根据纸制模型的侧面展开图，自己推导侧面积

公式，体会把立体问题转化为平面问题的思想方法．在理解公式的基础上，运用公式解决实际问题．

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	问题　圆钢呈现圆柱形，铅锤呈现圆锥形，那么这些几何体分别是由什么平面图形旋转而成的？ 	教师呈现图片． 学生结合图片以及实际生活经验讨论问题．	从丰富的图片和实物出发，引导学生结合生活经验进行讨论．
新课	1. 圆柱、圆锥的定义 分别以矩形的一边、直角三角形的一直角边所在的直线为旋转轴，将矩形、直角三角形分别旋转一周形成的曲面所围成的几何体分别叫做圆柱、圆锥．  上面的旋转轴分别叫做它们的轴，在轴上的这条边(或它的长度）分别叫做它们的高，垂直于轴的边旋转而成的圆面分别叫做它们的底面，不垂直于轴的边旋转而成的曲面分别叫做它们的侧面，无论旋转到什么位置，这条边都叫做侧面的母线． 2. 圆柱、圆锥的性质 圆柱、圆锥有下面的性质： (1) 平行于底面的截面是圆； (2) 过轴的截面(轴截面）分别是矩形、等腰三角形．	师：圆柱、圆锥和前几节所学的多面体有什么区别？ 生：圆柱、圆锥是旋转而成的． 师：圆柱、圆锥的轴截面是什么形状？ 生：矩形和三角形． 教师呈现圆柱、圆锥各元素的定义． 教师提问： (1) 用一个平行于底面的平面去截圆柱和圆锥，它们的截面是什么形状？	通过动画演示提高学生学习的兴趣，活跃学生的思维． 在复习初中知识的基础上加以提升． 利用学生初中的知识，归纳出圆柱、圆锥的性质，提高学生的空间想

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例 1　用一个平行于圆锥底面的平面截这个圆锥，截得的小圆锥的底面与圆锥底面半径的比是 1∶4，小圆锥的母线长是 3 cm，求圆锥的母线长. 解　设圆锥的母线长为 y，小圆锥底面与圆锥底面半径分别是 x，$4x$. 根据相似三角形的性质得 $$\frac{3}{y}=\frac{x}{4x},$$ 所以 $y=12$. 即圆锥母线长为 12 cm. 练习一 证明：平行于圆锥底面的截面与底面的面积比，等于顶点到截面的距离与圆锥的高的平方比. 3. 圆柱、圆锥的侧面积公式 圆柱的侧面展开图是矩形，这个矩形的长等于圆柱的底面周长 C，宽等于圆柱的母线长 l，因此 $$S_{圆柱侧}=Cl=2\pi rl.$$ 圆锥的侧面展开图是扇形，这个扇形的弧长等于圆锥的底面周长 C，半径等于圆锥的母线长 l，因此圆锥的侧面积是 $$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}Cl=\pi rl.$$ 练习二 1. 已知圆柱的底面半径为 3，母线长为 6，求该圆柱的全面积.	(2) 用过圆柱和圆锥的轴的平面去截它们，所得截面分别是什么形状? 学生回答，归纳出圆柱和圆锥的两条性质. 教师讲解例题，引导学生利用初中知识解决问题. 教师指导学生借助三角形相似的知识完成练习. 师：圆柱、圆锥的侧面展开图分别是什么图形? 学生对实物模型进行拆解，给出答案：圆柱的侧面展开图是矩形，圆锥的侧面展开图是扇形.	象能力. 通过课件演示侧面展开图，让学生体会把立体几何问题转化为平面几何问题解决的思想方法. 通过练习，熟悉侧面积公式的应用.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	2. 已知圆锥的底面半径为 2，母线长为 4，求该圆锥的全面积以及侧面展开图的圆心角.		
小结	圆柱和圆锥的定义、性质以及侧面积公式.		回顾知识点.
作业	教材 P148 练习 A 组第 1，2 题；教材 P149 练习 B 组第 3 题(选做).		

9.4.4 圆柱、圆锥(二)

【教学目标】

1. 掌握正等测画法，能够画出圆柱、圆锥的直观图.

2. 通过画直观图的过程，体会由具体到抽象、由立体到平面的转换过程，培养学生的空间想象能力.

3. 培养学生作图、识图和运用图形语言交流的能力，培养学生严谨规范的作图习惯.

【教学重点】

正等测画法.

【教学难点】

理解正等测画法.

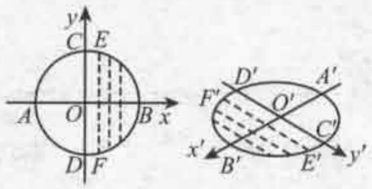
【教学方法】

这节课主要采用讲练结合法. 通过立体图形的照片入手，体会立体与平面之间的关系. 从画水平放置的圆的直观图入手，总结出正等测画法的具体规则. 类比斜二测画法，掌握圆柱和圆锥的直观图画法.

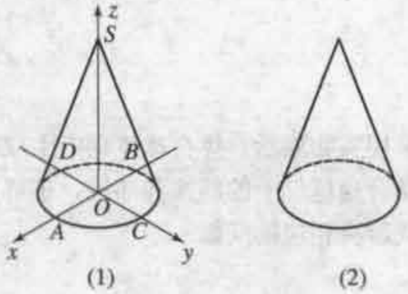
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	呈现实物，设置问题情境：怎样作出圆柱、圆锥的直观图?	教师呈现图片.	学生对比图片与实物，体会立体图形与直观图的关系.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例1　画水平放置的圆的直观图.  	教师边演示，边讲解. 学生和教师同步完成直观图.	通过动画演示提高学生学习的兴趣，活跃学生的思维.
	画法： (1) 在圆上取一对相互垂直的直径 AB，CD，分别以它们所在的直线为 x 轴，y 轴. 画对应的 x' 轴和 y' 轴，使 $\angle x'O'y'=120°$. (2) 将圆 O 的直径 AB 分为 n 等份，过分点画平行于 y 轴的弦 CD，EF，…. 在 x' 轴上以 O' 为中点画线段 $A'B'$，使 $A'B'=AB$，将 $A'B'$ 也分为 n 等份，以各分点为中点画 y' 轴的平行线段 $C'D'$，$E'F'$，…，使 $C'D'=CD$，$E'F'=EF$，…. (3) 用平滑的曲线顺次连接 A'，D'，F'，B'，E'，C'，…，A' 就得到圆的直观图，它是一个椭圆.		让学生体会“化曲为直”的解决问题的方法.
	总结一般步骤： (1) 在已知图形中取相互垂直的轴 Ox，Oy，把它们画成对应的 $O'x'$ 轴和 $O'y'$ 轴，$\angle x'O'y'=120°$(或 $60°$)，它们确定的平面表示水平平面； (2) 已知图形上平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段； (3) 平行于 x 轴或 y 轴的线段长度不变.	教师引导学生总结出正等测画法的步骤.	让学生总结画法的步骤，加深对正等测画法的理解.
	练习一 画一个水平放置的半径等于 4 cm 的圆的直观图.	学生仿照例题进行练习，教师巡视指导.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	例 2　画底面圆半径为 0.8，高为 2.5 的圆锥的直观图.  画法： (1) 画轴：取 x 轴、y 轴、z 轴，使它们两两相交成 $120°$； (2) 画底面：以 O 为中心，按 x 轴、y 轴画半径等于 0.8 的圆的直观图，然后在 z 轴上，取线段 $OS=2.5$； (3) 成图：画圆锥的两条母线 SA，SB 与底面椭圆相切. 再加以整理就得到所画的圆锥直观图. 练习二 已知一个圆柱的底面半径为 2 cm，高为 6 cm，画出它的直观图.	类比长方体直观图的画法，学生完成例 2. 教师强调应注意的问题. 师生总结作旋转体直观图的一般步骤. 学生仿照例题进行练习，教师巡视指导.	
小 结	1. 正等测画法的一般步骤. 2. 旋转体直观图的画法.	师生共同总结.	
作 业	1. 画一个水平放置的半径等于 2 cm 的圆的直观图. 2. 已知一个圆锥的底面半径为 3 cm，高为 4 cm，画出它的直观图.		

9.4.5 球

【教学目标】

1. 理解球的旋转生成过程，掌握球的定义、性质以及表面积公式.
2. 能够运用球的表面积公式解决相关问题，培养学生应用数学知识解决实际问题的

能力.

3. 通过教学，渗透把立体几何问题转化为平面几何问题的思想方法.

【教学重点】

球的定义、性质以及球的表面积公式.

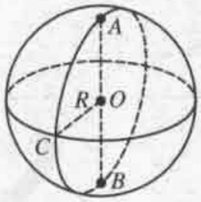
【教学难点】

球面距离的理解.

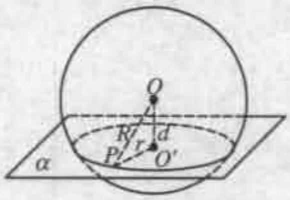
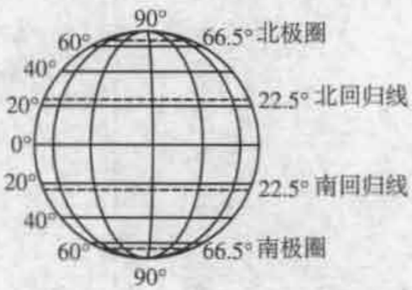
【教学方法】

这节课采用实物操作与讲练结合法. 首先采用实物展示，体会球体动态生成的过程. 类比圆的知识，理解球的定义及其性质. 然后结合地球仪上的经线和纬线，理解大圆与小圆的知识. 识记球的表面积公式，并能应用公式解决相应的问题.

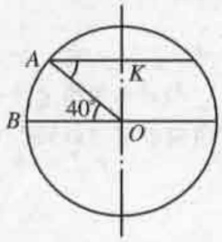
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	问题　下面的物体呈什么形状? 	教师呈现有关球的图片. 学生结合图片以及实际生活经验，举出更多关于球的例子.	由丰富的图片和实物出发，激发学生兴趣.
新课	1. 球的概念与性质 半圆以它的直径为旋转轴，旋转一周所形成的曲面叫做球面. 球面所围成的几何体，叫做球体，简称球. 球的各个元素： (1) 球心； (2) 球的半径； (3) 球的直径；  球的表示方法：用表示球心的字母表示，如球 O. 球面可以看成空间中与定点(球心)距离等于定长(半径)的点构成的集合(轨迹)，同样，球体也可以看成空间中与定点距离等于或小于定长的点构成的集合.	师：球是由什么图形旋转而来的? 生：圆，半圆. 教师结合直观图讲解球的各个元素. 师：仿照初中圆的定义，你能给出球面的另一种定义吗? 强调注意球体与球面的联系与区别.	理解定义，体会旋转体动态形成的过程. 由具体的实物到抽象的直观图，培养学生的空间想象能力.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	用一个平面去截一个球，截面是圆面： (1) 球心和截面圆心的连线垂直于截面； (2) 球心到截面的距离 d 与截面圆的半径 r，满足 $d=\sqrt{R^2-r^2}$.  球面被经过球心的平面截得的圆叫做球的大圆，被不经过球心的平面截得的圆叫做球的小圆.	结合图形，引导学生作出辅助线，利用勾股定理得到结论. 教师可借助地球仪，帮助学生理解概念.	看懂球的截面直观图要求学生有较高的空间想象能力，教师可以利用模型帮助学生理解.
新课	知识拓展： 过地球南北极的半大圆是经线，平行于赤道的小圆是纬线.  球面上两点之间的最短距离，就是经过两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，我们把这个弧长叫做两点的球面距离.	师：假如你要乘坐从济南直飞广州的飞机，设想一下，它应该沿着怎样的航线飞行呢？航程大约是多少呢？ (1) 济南和广州间的距离是一条线段的长吗？ (2) 经过球面上的这两点有多少条弧呢？ (3) 这无数条弧中，长度最短的是哪条？	
	例 1　我国首都北京靠近北纬 40° 纬线上，求北纬 40° 纬线的长度.（地球半径约为 6 370 km）	教师分析，从立体图形抽象到平面图形，引导学生用初中所学知识解决问题.	借助这个例题，教师再次强调将立体几何问题转化为

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>新
课</td><td>
解　如图，设 A 是北纬 40° 圈上的一点，AK 是它的半径，所以 $OK \perp AK$.
设 C 是北纬 40° 的纬线长，因为
$$\angle AOB = \angle OAK = 40^\circ,$$
所以
$$\begin{aligned} C &= 2\pi \cdot AK \\ &= 2\pi \cdot OA\cos\angle OAK \\ &= 2\pi \cdot OA\cos 40^\circ \\ &\approx 2\times 3.141\,6\times 6\,370\times 0.766\,0 \\ &\approx 30\,658(\text{km}). \end{aligned}$$
即北纬 40° 纬线长约为 30 658 km.

2. 球的表面积
由球的半径 R 计算球表面积 S 的公式为
$$S = 4\pi R^2.$$
例 2　已知圆柱的底面直径与高都等于球的直径，求证：
(1) 球的表面积等于圆柱的侧面积；
(2) 球的表面积等于圆柱全面积的 $\frac{2}{3}$.
证明　(1) 设球的半径为 R，依题意圆柱的底半径也是 R，圆柱的高为 $2R$.
因为
$$S_{圆柱侧} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2,$$
$$S_{球表面} = 4\pi R^2,$$
所以 $S_{球} = S_{圆柱侧}$.</td><td>学生在教师的引导下，逐步完成证明过程.</td><td>平面几何问题的思路.</td></tr>
</table>

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	(2) 因为 $S_{圆柱全}=2\pi R^2+4\pi R^2=6\pi R^2$, $S_{球}=4\pi R^2$, 所以 $S_{球}=\frac{2}{3}S_{圆柱全}$. 练习 1. 若球的表面积变为原来的 2 倍，则半径变为原来的______倍. 2. 若球半径变为原来的 2 倍，则表面积变为原来的______倍.	学生根据所学公式，完成题目.	
小结	本节课主要学习了球的概念和性质，以及地球经纬线的概念，请填空： (1) 球面是指____________；球是指____________. (2) __________的平面截球面，所得截线是大圆；__________的平面截球面，所得截线是小圆. (3) 球面的侧面积公式为________.		通过填空的形式回顾本节内容.
作业	教材 P151 练习 A 组第 1 题，练习 B 组题；练习 A 组第 2 题(选做).		

9.4.6 多面体与旋转体的体积(一)

【教学目标】

1. 理解祖暅原理，掌握柱体的体积公式.

2. 会用柱体的体积公式解决相关问题，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力.

3. 通过教学，培养学生的数学应用意识.

【教学重点】

柱体的体积公式.

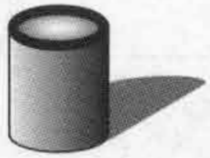
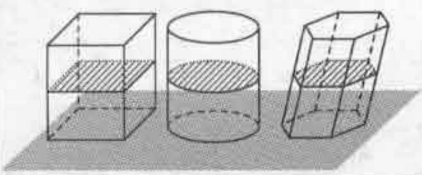
【教学难点】

用柱体的体积公式解决实际问题.

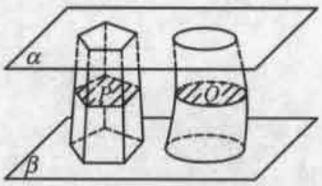
【教学方法】

这节课采用实物操作与讲练结合法．首先采用实物操作，让学生理解祖暅原理，在此基础上由长方体的体积公式推导一般棱柱、圆柱的体积公式，然后讲练结合，使学生熟练应用公式解决实际问题．

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	在生产实际中，经常遇到体积的计算问题，如兴修水利、修建道路需要计算土方，修建粮仓、水池需要计算建材数量和容积．因此有必要研究几何体的体积计算．  (1) 上图是一个圆柱形的器皿，底面半径为 3 cm，高度为 8 cm，那么怎样计算它的容积呢？  (2) 上图是一个长方体的游泳池，长是 50 m，宽是 21 m，深是 2 m，那么这个游泳池能容纳多少水？ 几何体占空间部分的大小叫做它的体积．	师：生活中经常遇到关于物体体积的问题，这些问题与各种几何体的体积有关．这一节我们就来研究几何体的体积问题．	由实际问题引发思考，让学生意识到数学来源于生活．
新课	1. 长方体体积公式 初中学过的计算长方体的体积公式为 $V_{长方体}=abc$ 或 $V_{长方体}=Sh$． 如图，体积公式 $V=Sh$ 是否对其他两个几何体也成立？ 	复习初中知识，然后探究一般棱柱的体积公式． 师：底面积相等、高也相等的棱柱、圆柱，它们的体积是否一样？	通过动画演示提高学生学习的兴趣，活跃学生的思维．

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	2. 进行数学实验，引入祖暅原理 取一摞面积相等的课本堆放在水平桌面上，然后用手推一下以改变其形状.  体积可看成由面积叠加而成，用一组平行平面截两个空间图形，若在任意等高处的截面面积都对应相等，则两空间图形的体积必然相等. 祖暅原理：夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积相等，那么这两个几何体的体积相等.	师：推斜以后体积变化了吗？ 生：几何体所占空间的大小不变. 师：推斜前后的两个几何体(前为长方体，后为平行六面体)还有什么共同之处？ 生：高度没有改变，每页纸张的顺序和面积也没有改变. 师：这两个几何体的体积是否相等？ 生：相等.	引发学生学习积极性，让学生总结归纳出祖暅原理的大致内容. 让学生体会中国数学的伟大，引发学生民族自豪感.
	3. 棱柱、圆柱的体积公式 如果一个棱柱、一个圆柱与一个长方体的高相等(都为 h)且底面面积相等(都为 S)，那么当我们用一个与底面平行的平面去截它们时，可以证明截面的面积都等于各自底面的面积 S，根据祖暅原理可知，棱柱、圆柱的体积与长方体的体积相等，即 $$V_{柱体}=Sh.$$ 其中 $V_{柱体}$ 表示柱体的体积，S 表示柱体底面的面积，h 表示柱体的高.		
	4. 引例的解答 (1) 因为 $V_{圆柱}=Sh=\pi\times3^2\times8=72\pi(\text{cm}^2)$. 所以圆柱形器皿的体积是 $72\pi\ \text{cm}^2$； (2) 因为 $V_{棱柱}=Sh=50\times21\times2=2\,100(\text{m}^3)$， 因此这个游泳池能容纳 2 100 m^3 水.	学生运用公式解决引例中的问题，教师巡视指导.	教师讲解的方法并不是唯一的解决方案，让学生体会完成一件事情可以从多个方面进行考虑.

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例1　有一个六角螺母毛坯，它的底面正六边形的边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是 10 mm，求这个毛坯的体积. 分析　六角螺母毛坯的体积是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积的差. 解　因为 $V_{正六棱柱}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2\times 6\times 10$ $\approx 3\,741(mm^3)$, $V_{圆柱}=\pi\times 5^2\times 10\approx 785(mm^3)$, 所以一个毛坯的体积为 $V=3\,741-785$ $=2\,956(mm^3)$ $\approx 2.96(cm^3)$. 练习 (1) 要求学生用第二种解决方法做例1：先求出六角螺母毛坯的底面面积，再用公式 $V=Sh$ 求出螺母毛坯的体积； (2) 已知长方体的铁块长、宽、高分别是 2，4，8，将它溶化后铸成一个正方体形的铁块(不计损耗)，求铸成的铁块的棱长.	在教师的引导下，学生用多种方案解决例1中的问题.	
小结	祖暅原理，柱体的体积公式.		
作业	教材P156练习A组第1，2题；练习B组第1题(选做).		

9.4.6　多面体与旋转体的体积(二)

【教学目标】

1. 理解并掌握锥体的体积公式，掌握球的体积公式.

2. 会用体积公式解决相关问题，培养学生应用公式运算的能力.

3. 通过教学，培养学生的数学应用意识.

【教学重点】

掌握锥体的体积公式.

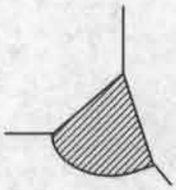
【教学难点】

运用锥体和球体的体积公式解决实际问题.

【教学方法】

这节课采用讲练结合法. 教师引导学生探究三棱锥与同底等高的三棱柱体积之间的关系，得到锥体体积公式；教材直接给出了球体的体积公式. 讲练结合，使学生熟练应用公式解决实际问题.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	在仓库一角有一堆谷，呈$\frac{1}{4}$圆锥形(如下图)，量得底面弧长为 2 m，圆锥的高为 1 m，这堆谷重约多少公斤(假设每立方米谷重 720 公斤，结果取整数部分)？ 	教师呈现问题情境. 学生结合实际生活经验讨论问题.	由实际问题引发思考，让学生意识到数学来源于生活.
新课	1. 锥体的体积 定理　如果一个锥体(棱锥、圆锥)的底面积是 S，高是 h，那么它的体积是 $$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.$$	教师带领学生探究三棱锥与同底等高的三棱柱体积之间的关系，给出锥体体积公式.	渗透特殊到一般的思想.
	例 1　一块正方形薄铁板的边长为 22 cm，以它的一个顶点为圆心边长为半径画弧，沿弧剪下一个扇形，用这块扇形铁板围成一个圆锥筒，求它的容积.（保留两位有效数字） 解　扇形弧长是$\frac{\pi}{2}\times 22=11\pi$. 设所做圆锥筒的底面半径为 r，则 $$2\pi r=11\pi,$$	教师可引导学生通过折纸操作去发现“扇形铁板围成圆锥筒”的过程中，哪些量之间发生了等量转化.	体会平面图形与立体图形之间的相互转换，提高学生的空间想象能力.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	得 $r=5.5$. 因为圆锥筒底的母线长是 22 cm，所以圆锥的高是 $h=\sqrt{22^2-5.5^2}\approx 21.3(\text{cm})$， 所以 $V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi\times 5.5^2\times 21.3$ $\approx 6.7\times 10^2(\text{cm}^3)$. 即圆锥的容积约为 $6.7\times 10^2\ \text{cm}^3$.		
新课	练习一 解决导入时提出的问题. 解　因为底面弧长为 2 m，所以 $\dfrac{1}{4}\times 2\pi r=2$， 求得 $r=\dfrac{4}{\pi}$ m. 因此，谷堆的体积为 $V=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\pi\times\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2\times 1$ $=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{\pi}\ \text{m}^3$. 谷子的重量为 $720\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{\pi}\approx 306$(公斤). 即这堆谷子重约 306 公斤.	学生运用公式，解决引例中的问题.	回扣引例，培养数学应用意识.
	2. 球的体积 定理　如果球的半径是 R，那么它的体积是 $V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.	教师直接呈现球的体积公式. 学生进行识记.	
	例 2　有一种空心钢球，质量为 142 g，测得外径等于 5.0 cm，求它的内径(钢的密度为 7.9 g/cm³，保留两位有效数字). 解　设空心钢球的内径为 $2x$ cm，则钢球壳的体积是		培养学生应用公式运算的能力.

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	$V=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi x^3$ $=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{125}{8}-x^3\right)$. 由 $7.9\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{125}{8}-x^3\right)=142$ 得 $x^3=\frac{125}{8}-\frac{142\times 3}{7.9\times 4\pi}\approx 11.335$, $x\approx 2.25$, $2x\approx 4.5$. 即钢球的内径约为 4.5 cm. 练习二 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，它的各个顶点都在球 O 的球面上，问球 O 的体积.	学生在教师的引导下，运用公式进行练习，教师巡视指导.	
小 结	棱锥，圆锥，球的体积公式.		
作 业	教材 P156 练习 A 组第 3 题，练习 B 组第 3 题；练习 B 组第 2 题(选做).		

Ⅳ 测 验 题

1. 选择题

(1) 当平面 ABC // 平面 $A_1B_1C_1$ 时，直线 AA_1 // BB_1 // CC_1 是 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$ 的( ).

(A) 充要条件　　(B) 必要，但非充分条件

(C) 充分，但非必要条件　　(D) 既非充分，又非必要条件

(2) 给出以下四个命题：

① 在空间过直线外一点，可以作无数条直线与已知直线垂直；

② 过直线外一点，只可以作一条直线与已知直线平行；

③ 过直线外一点，可以作无数个平面与已知直线平行；

④ 过一条直线，总可以作出一个平面与已知平面垂直.

其中真命题的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

(3) 直线 a，b 和 l 所成的角相等，则直线 a，b(　　).

(A) 相交　　(B) 是异面直线

(C) 平行　　(D) 位置关系无法确定

(4) 已知 $SO \perp$ 平面 α，垂足为 O，$\triangle ABC \subset \alpha$，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，则(　　).

(A) $SA=SB=SC$　　(B) $SA \perp SB$，且 $SB \perp SC$

(C) $\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA$　　(D) $SA \perp BC$

(5) 过长方体任意一条棱的截面都是(　　).

(A) 正方形　　(B) 矩形　　(C) 菱形　　(D) 非平行四边形

(6) 三棱锥底面是正三角形为三棱锥是正三棱锥的(　　).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 非充分，且非必要条件

(7) 直角三角形的两条直角边为 3 cm，4 cm，以斜边所在直线为轴旋转，得旋转体的体积是(　　).

(A) $\frac{48\pi}{25}$　　(B) $\frac{72\pi}{5}$　　(C) $\frac{48\pi}{5}$　　(D) $\frac{144\pi}{5}$

(8) 一个正方体所有的顶点都在球面上. 如果这个球的体积是 V，那么正方体的棱长是(　　).

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}\sqrt[3]{6\pi^2V}$　　(B) $\frac{1}{3\pi}\sqrt[3]{6\pi^2V}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{6\pi^2V}$　　(D) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{6\pi^2V}$

2. 填空

(1) 如果两个平面分别与两条平行直线垂直，那么这两个平面的位置关系是________.

(2) 如果两条异面直线分别与两个相交平面垂直，则这两个平面的交线与异面直线公垂线的位置关系是________.

(3) 直棱柱的侧棱长与它的高________，它的侧面和经过不相邻的两条侧棱的截面都是________形.

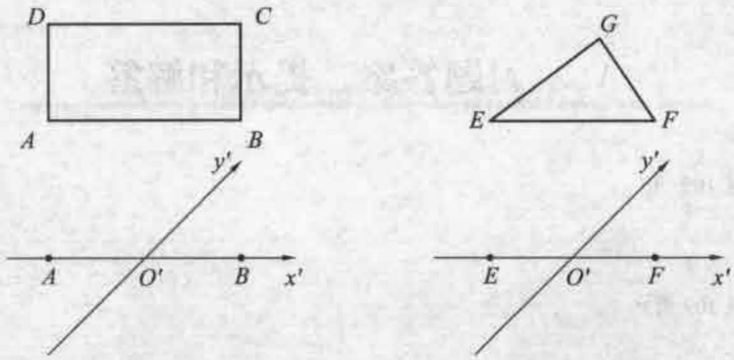
(4) 圆柱的侧面展开图是一个边长为 a 的正方形，则圆柱的全面积是________，体积是________.

(5) 用半径为 10 cm，中心角为 120° 的扇形卷成圆锥筒，则它的容积是________.

(6) 一球的截面面积为 9π，到球心的距离为 4，则球的半径是________.

3. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，E 是 BD 的中点. 求证：$BD \perp$ 平面 AEC.

4. 用斜二测法画出下列矩形 $ABCD$ 和 $\triangle EFG$ 的平面直观图：



（第 4 题）

5. 已知正三棱锥 S-ABC，三条侧棱 SA，SB，SC 互相垂直，设侧棱与底面 ABC 所成的角为 θ. 求证：$\sin^3\theta=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

6. 求边长为 a 的正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 的顶点 A 到平面 $A'BD$ 的距离.

7. 棱锥底面是边长为 2 cm，8 cm 的矩形，它的侧面积为 72 cm^2，高经过底面对角线的交点，求它的体积.

测验题答案

1. (1)D； (2)D； (3)D； (4)A；
   (5)B； (6)B； (7)C； (8)A.

2. (1) 平行； (2) 平行或重合； (3) 相等，矩； (4) $\left(1+\frac{1}{2\pi}\right)a^2$，$\frac{a^3}{4\pi}$；
   (5) $\frac{2\,000\sqrt{2}}{81}\pi$ cm^3； (6)5.

3. 因为 $BD\perp AE$，$BD\perp CE$，所以 $BD\perp$ 平面 AEC.

4. 略.

5. 由题设可证 $SA=SB=SC$. 因为 $SA\perp SB$，所以 $\angle SAB=\frac{\pi}{4}$，从而

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}.$$

因此 $\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

提示：点 A 在平面 $A'BD$ 上的射影是 $\triangle A'BD$ 的中心，且三棱锥 A-$A'BD$ 和三棱锥 A'-ABD 体积相等.

7. $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ cm^3.

提示：设棱锥的侧面三角形的高分别为 h_1，h_2，则可得方程 $8h_1+2h_2=72$，$h_1^2-1=h_2^2-16$，联立求解即可.

V 习题答案、提示和解答

练习 A 组(第 109 页)

1. 略.
2. 略.

练习 B 组(第 109 页)

1. 略.
2. 略.

练习 A 组(第 112 页)

1. (1) 正确； (2) 不正确.
2. 在，根据基本性质 1 即可知.
3. 在桌子四条腿的下端拉对角线 AC，BD，如果 AC，BD 相交于一点，那么四条腿的下端在同一平面内，否则不共面.
4. 无数个；无数个；一个或无数个.

练习 B 组(第 113 页)

1. 两个部分；三个或四个部分.
2. (1)$A\in\alpha$，$B\notin\alpha$； (2)$l\subset\alpha$，$m\not\subset\alpha$； (3)$\alpha\cap\beta=l$.

习题(第 113 页)

1. 略.
2. 略.
3. (1) 正确； (2) 不正确.
4. 是，因为组成角的两条射线相交于一点，它们能确定一个平面.
5. 因为两条平行线能确定一个平面，再根据基本性质 1 即可知平行四边形和梯形均为平面图形.

练习 A 组(第 116 页)

1. 因为每个小长方形的对边都平行，因为“平行于同一直线的两直线平行”，所以这些折痕互相平行.
2. 因为 $AA'\perp\!\!\!\!\!\!=BB'$，所以四边形 $ABB'A'$ 为平行四边形，因此
$$AB\perp\!\!\!\!\!\!=A'B'.$$
同理，$AC\perp\!\!\!\!\!\!=A'C'$.
从而 $\angle BAC=\angle B'A'C'$，所以
$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$
3. 因为 $AA'\perp\!\!\!\!\!\!=BB'$，所以四边形 $ABB'A'$ 为平行四边形，因此
$$AB\perp\!\!\!\!\!\!=A'B'.$$

练习 B 组(第 117 页)

1. (1) 不正确； (2) 不正确.
2. 是，这是由于在 $\triangle ABC$ 中，因为 E，F 分别为 AB，BC 的中点，所以
$$EF\parallel AC,\ EF=\frac{1}{2}AC,$$

同理 $HG /\!/ AC$，$HG=\frac{1}{2}AC$.

所以 $EF \perp\!\!\!\!= HG$.

同理，$EH=FG=\frac{1}{2}BD$.

又因为 $AC=BD$，所以 $EFGH$ 是菱形.

练习 A 组(第 119 页)

1. (1) 不正确；　(2) 正确；　(3) 不正确.
2. (1) 异面，45°；　(2) 异面，90°；　(3) 相交，60°.

练习 B 组(第 119 页)

因为若 AC，BD 共面于平面 α，则由 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，得 $AB\subset\alpha$；由 $C\in\alpha$，$D\in\alpha$，得 $CD\subset\alpha$，即 AB，CD 共面. 与已知矛盾，所以 AC，BD 一定是异面直线.

练习 A 组(第 121 页)

1. (1) 平面 $A'C'$，平面 CD'；
   (2) 平面 BC'，平面 CD'；
   (3) 平面 BC'，平面 $A'C'$.
2. (1) 不正确，因为还有可能相交；
   (2) 正确，由直线与平面平行的判定定理即可知；
   (3) 不正确，还有可能异面.

练习 B 组(第 121 页)

1. 因为在长方体 AC' 中，六个面都是矩形，所以

$$DD' \perp\!\!\!\!= AA',\ A'A \perp\!\!\!\!= B'B.$$

因此 $DD' \perp\!\!\!\!= B'B$，从而四边形 $B'BDD'$ 为平行四边形. 所以 $B'D' /\!/ BD$.

又因为 $BD\subset$ 平面 AC，所以 $B'D' /\!/$ 平面 AC.

2. 因为 $a\subset\alpha$，$\alpha\cap\beta=l$，所以

$$a /\!/ l.$$

同理 $b /\!/ l$.

练习 A 组(第 124 页)

1. (1) 正确；
   (2) 不正确(如果已知平面内的两条直线是平行直线，那么这两个平面不一定平行)；
   (3) 正确；
   (4) 不正确(有无数条)；
   (5) 不正确.
2. (1) 因为平面 $\alpha /\!/ \beta$，平面 APC 交 α 于 AC，交 β 于 BD，所以

$$AC /\!/ BD;$$

(2) 在 $\triangle PBD$ 中，因为 $AC /\!/ BD$，所以

$$PA : AB = PC : CD.$$

$$CD = AB\cdot\frac{PC}{PA}=5\times\frac{3}{4}=3.75.$$

所以 $PD=6.75$ cm.

练习 B 组(第 124 页)

1. 相交、平行.

2. (1) 正确，由平面与平面平行的定义即可知；

   (2) 不正确，因为如果平面外的一条直线与已知平面不平行，那么过这条直线的平面没有一个与已知平面平行.

3. 因为 $AC = AB + BC$，$AB : BC = 1 : 3$，所以 $AC : AB = 4 : 1$，因此

$$AB = \frac{1}{4}AC = 3.75\ \text{cm},$$

$$BC = 3AB = 11.25\ \text{cm}.$$

过点 A 作 $AB' \parallel DE$，交 β 于 B'，交 γ 于 C'. 连接 B，B'，C，C'. 因为 $\beta \parallel \gamma$，所以 $BB' \parallel CC'$，因此

$$AB' : B'C' = AB : BC = 1 : 3.$$

又因为 $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$，$AB' \parallel DE$，所以 $AB' : B'C' = DE : EF$，从而

$$EF = 3DE = 15\ \text{cm}.$$

习题(第 125 页)

1. (1) 正确；　(2) 不正确；　(3) 正确；　(4) 正确.

2. (1) BC，$B'C'$，DC，$D'C'$；(2) 均为 $60°$.

3. 因为 $AC \parallel BD$，所以 AC 与 BD 能确定一个平面，记为 β，易知

$$AB \subset \beta,\ AC \subset \beta,\ BD \subset \beta,\ CD \subset \beta.$$

因此 $\alpha \cap \beta = CD$. 又因为 $AB \parallel \alpha$，所以

$$AB \parallel CD.$$

从而四边形 $ABCD$ 为平行四边形，因此 $AC = BD$.

4. (1) 不正确，因为 a 可能在那个平面内；

   (2) 正确，因为过平面外一点可作一个平面与已知平面平行.

5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

练习 A 组(第 128 页)

1. 可以，如果点在直线外，则点与直线确定一个平面，在平面内过直线外一点可以作唯一一条直线与已知直线垂直，如果点在直线上，则可以在任一经过已知直线的平面内过已知点作唯一一条直线与已知直线垂直.

2. (1) 平面 AC，平面 A_1C_1；　(2) 平面 AD_1，平面 BC_1；

   (3) 平面 AB_1，平面 DC_1.

3. 设矩形为 $ABCD$，对折后折痕为 EF，$E \in AB$，$F \in CD$. 因为 $EF \perp EA$，$EF \perp EB$，所以

$$EF \perp \text{平面 } EAB.$$

4. (1) 垂直；　(2) 不一定垂直；　(3) 垂直.

练习 B 组(第 129 页)

1. 已知：$PA \perp PB$，$PA \perp PC$，$PC \perp PB$.

   求证：$PA \perp$ 平面 PBC，$PB \perp$ 平面 PAC，$PC \perp$ 平面 PAB.

   证明：因为 $PA \perp PB$，$PA \perp PC$，$PB \cap PC = P$，所以

$$PA \perp \text{平面 } PBC.$$

其余同理可证.

2. 因为 $AP \perp AB$，$AP \perp AC$，$AB \cap AC = A$，所以

$$AP \perp 平面 ABC.$$

又因为 $BC \subset$ 平面 ABC，所以

$$AP \perp BC.$$

3. 在 $\square ABCD$ 中，$AO = OC$，$BO = OD$. 在 $\triangle APC$ 中，因为 $PA = PC$，O 为 AC 的中点，所以

$$PO \perp AC.$$

同理，$PO \perp BD$.

因此 $PO \perp$ 平面 AC，即 $PO \perp \alpha$.

4. 不可以，因为垂直于同一平面的两条直线是平行的.

练习 A 组(第 131 页)

1. (1)3；　　(2)10；　　(3)0.

2. 分别为 $\angle DBD_1$，$\angle A_1BD_1$，$\angle C_1BD_1$，且

$$\cos\angle DBD_1 = \cos\angle A_1BD_1 = \cos\angle C_1BD_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

3. $\frac{\sqrt{30}}{6}$，$\frac{\sqrt{30}}{6}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

练习 B 组(第 131 页)

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 因为 $PO \perp \alpha$ 且 $a \subset \alpha$，所以

$$a \perp PO.$$

又因为 $a \perp PA$ 且 $PA \cap PO = P$，所以

$$a \perp 平面 POA.$$

而 $AO \in$ 平面 POA，从而 $a \perp AO$.

练习 A 组(第 133 页)

1. 对，因为它和二面角的两个面的交线都是与二面角的棱垂直的.

2. 90°.

练习 B 组(第 133 页)

1. 30°.

2. $2\sqrt{3}$.

练习 A 组(第 135 页)

1. 略.

2. 相邻的两个面垂直，相对的两个面平行.

3. 因为 $OX \perp OY$，$OX \perp OZ$，所以 $OX \perp$ 平面 YOZ，因此

$$平面 XOY \perp 平面 YOZ，平面 XOZ \perp 平面 YOZ.$$

同理平面 $XOY \perp$ 平面 XOZ.

练习 B 组(第 136 页)

1. 略.

2. 说明曲尺的一边与另一平面内的相交直线都垂直，所以曲尺的一边与另一平面垂直，得相邻两个平面垂直. 如果转不动，不能说明曲尺的一边与另一个平面内的相交直线都垂直，所以不能说明相邻两个

平面垂直.

3. 连接 AD. 由 $\triangle ABD$ 是直角三角形可知

$$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{5^2+8^2}=\sqrt{89}.$$

又 $\triangle ACD$ 也是直角三角形，所以

$$CD=\sqrt{AD^2+AC^2}=\sqrt{(\sqrt{89})^2+3^2}=7\sqrt{2}.$$

即 CD 的长为 $7\sqrt{2}$ cm.

习题(第 136 页)

1. (1) 正确； (2) 正确； (3) 不正确.

2. 不正确，因为此时 b 与 α 的关系可能不垂直. 事实上，$b\subset\alpha$，b 是 α 的斜线，$b\,/\!/\,\alpha$，$b\perp\alpha$ 都有可能.

3. 设 BC 的中点为 E，连接 AE，DE.

由 $AB=AC$ 且 E 为 BC 中点可知

$$AE\perp BC.$$

同理 $DE\perp BC$.

又因为 $AE\cap DE=E$，所以

$$BC\perp 平面\ AED.$$

而 $AD\subset$ 平面 AED，所以

$$BC\perp AD.$$

4. 120°.

练习 A 组(第 140 页)

1. 四面体，6 条棱，4 个顶点.

2. 一个多面体如果两个面互相平行，而其余每相邻两个面的交线都互相平行，这样的多面体叫做棱柱. 棱柱两底面 F 与 F' 的公垂线段的长度叫棱柱的高. 直棱柱的高与侧棱等长.

3. 略.

练习 B 组(第 141 页)

1. 有一个侧面是矩形的棱柱不一定是直棱柱. 有两个相邻侧面是矩形的棱柱是直棱柱.

2. 直棱柱的底面与侧面互相垂直.

3. (1) $\sqrt{17}$ cm； (2) 7 cm； (3) $\sqrt{282}$ dm.

4. $\sqrt{3}a$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{3}d$.

练习 A 组(第 142 页)

1. 不一定.

2. 10.

练习 B 组(第 142 页)

1. $3.6\ \text{cm}^2$.

2. 侧棱长为 $\sqrt{33}$ cm，斜高为 $\sqrt{29}$ cm.

习题 A 组(第 144 页)

1. 侧面积 $35\ \text{cm}^2$，全面积 $47.5\ \text{cm}^2$.

2. 侧面积 $450\sqrt{43}\,\text{cm}^2$，全面积为 $(1\,350\sqrt{3}+450\sqrt{43})\,\text{cm}^2$.

3. 略.

习题 B 组(第 144 页)

1. 2 cm，4 cm，6 cm.

2. $2\sqrt{3}a^2$.

练习 A 组(第 148 页)

1. $\frac{32}{\pi}\,\text{cm}^2 \approx 10.19\,\text{cm}^2$.

2. 可参照棱锥相应的定理证明，具体略.

3. 略.

4. 略.

练习 B 组(第 149 页)

1. $100\pi\,\text{cm}^2$，$25\pi\,\text{cm}^2$，$5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

2. $\frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}\,\text{cm}$ 或 $\frac{9\sqrt{\pi}}{\pi}\,\text{cm}$；$\frac{54}{\pi}\,\text{cm}^2$.

3. $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$.

练习 A 组(第 151 页)

1. 约 1.853 km.

2. 24 cm.

练习 B 组(第 151 页)

约为 $5.099\times10^8\,\text{km}^2$.

练习 A 组(第 156 页)

1. 27.

2. $3\sqrt{3}$.

3. $\frac{1}{6}$.

练习 B 组(第 156 页)

1. 3 cm.

2. 因为底面周长 $C=2\pi r$，所以 $r=\frac{C}{2\pi}$，从而

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 h=\frac{C^2 h}{12\pi}.$$

3. $32\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$.

习题(第 156 页)

1. $\sqrt{313}\,\text{cm}$.

2. $20\,\text{cm}^2$，$80\,\text{cm}^2$，$180\,\text{cm}^2$.

3. 3 cm.

4. $1\,600\pi\,\text{cm}^2$.

5. 12.

第十章　概率与统计初步

Ⅰ　教学要求

1. 掌握分类计数原理及分步计数原理，会用这两个原理解决一些简单问题.

2. 了解随机现象、随机试验的概念.

3. 理解古典概率，了解概率的性质. 会应用古典概率解决一些简单的实际问题.

4. 理解概率的统计定义.

5. 能从现实生活或其他学科中提出具有一定价值的统计问题.

6. 结合具体的实际问题情景，了解随机抽样的必要性和重要性.

7. 在参与解决统计问题的过程中，学会用简单随机抽样方法从总体中抽取样本；通过对实例的分析，了解分层抽样和系统抽样方法.

8. 通过实例体会分布的意义和作用，在表示样本数据的过程中，初步学习列出频率分布表、画频率分布直方图，了解频率分布直方图表示的意义.

9. 通过实例理解样本数据标准差的意义和作用. 学会计算样本的标准差.

10. 能根据实际问题的需求合理地选取样本. 从样本数据中提取基本的数字特征.

11. 在解决统计问题的过程中，进一步体会用样本估计总体的思想，会用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征；会用样本的频率分布估计总体分布.

12. 形成对数据处理过程进行初步评价的意识.

13. 通过收集现实问题中两个有关联变量的数据作出散点图，并利用散点图直观认识两变量的相关关系.

14. 会使用计算器计算出具有线性相关关系的两个变量的线性回归方程的系数，从而建立一元线性回归方程.

Ⅱ　教材分析和教学建议

本章主要内容包括：计数的两个基本原理——分类计数原理和分步计数原理；概率初步，主要是古典概率的有关概念，即古典概型，样本空间与随机事件等；统计初步，包括随机抽样的三种基本方法（简单随机抽样、系统抽样、分层抽样），用样本估计总体，一元线性回归. 其中两个计数原理是研究古典概率的重要工具.

本章第一大节从实例出发，首先给出了分类计数原理和分步计数原理. 并用实例介绍了两个原理的用法，最后特别指出了两个原理的不同点——前者与“分类”有关，后者与

“分步”有关，进一步分析出，判断用哪个原理的关键是看完成某件事是需要分类进行还是需要分步进行．本节的一个重要特点是，典型的例子反复使用，便于学生理解，同时减轻学生的学习负担．

本章的第二大节是概率初步的知识，教材通过对几个具体的试验的分析，引入了随机试验、古典概型、样本空间、随机事件、基本事件、古典概率等概念；接着由分析事件发生的频率与事件发生的可能性(概率)的关系，介绍了求一般的随机事件的概率的方法——用事件发生的频率近似地作为它的概率．

本章第三大节是统计初步，首先给出了总体和样本的概念，介绍了简单随机抽样、系统抽样、分层抽样这三种常用的抽样方法．引导学生学会用随机抽样的方法在总体中抽取样本后，接着介绍了对样本数据进行处理的一种方法——绘制频率分布直方图，在此基础上介绍了如何用样本估计总体，包括用样本的平均数估计总体的平均数；以及用样本的标准差去估计总体的标准差，并分析了频率分布直方图与标准差的关系，本部分内容是初中相关内容的继续和深入．最后，介绍了两个变量之间的相关关系，因为两个变量之间除了函数这种确定性的关系以外，还大量存在因变量的取值带有一定随机性的关系——两个变量之间的相关关系．

概率论是研究随机现象规律性的数学学科．在现实世界中，随机现象广泛存在，而随机现象中存在着数量上的规律性，从而使我们可以运用数学方法来定量的研究随机现象．当前，概率与统计已在工农业生产和科学技术中都得到越来越广泛的应用，成为研究自然现象的规律、处理工程乃至公共事业问题的有利工具．统计是研究如何合理的收集、整理、分析数据的学科，其可以为人们制定决策提供依据．统计基础知识已经成为一个公民的必备常识，在本章教学中要注意激发并培养学生学习的兴趣，增强学生的社会实践能力，培养学生解决实际问题的能力，这对于中等职业学校的学生毕业后参加工作或进一步学习都将有所裨益．

本章重点是分类计数原理，分步计数原理，概率的相关概念，古典概率的计算以及概率的统计定义，抽样方法和用样本估计总体以及求回归方程．

本章难点是正确熟练的运用两个原理分析解决应用题，概率统计定义的理解，利用概率知识解决实际问题的方法，对方差、标准差意义的理解，会用计算器以及统计知识解决实际问题．

本章教学约需 13 课时，具体分配如下(仅供参考)：

10.1　计数原理	2 课时
10.2　概率初步	3 课时
10.3.1　总体、样本和抽样方法	2 课时
10.3.2　频率分布直方图	1 课时
10.3.3　用样本估计总体	2 课时
10.3.4　一元线性回归	2 课时
小结与复习	1 课时

10.1　计数原理

1. 本小节的主要内容是分类计数原理和分步计数原理及其应用. 这两个原理都很重要，是本章后续内容的基础，在日常生活和生产中亦具有广泛的应用.

教学时，要注意结合实例阐述两个原理，着重搞清这两个原理的区别. 为此，需要对学生进行反复的训练，必要时，课堂上可以引导学生分析大量实例，重点判断应该采用哪个原理，而把具体的计算过程放到课后让学生完成. 这对学生掌握解决问题的方法，理清解题思路是必不可少的.

2. 分类计数原理即加法原理，如果完成一件事有 n 类办法，这 n 类办法之间是相互独立的，不论用哪一类办法中的哪一种方法，都能单独完成这件事，那么求完成这件事有多少种方法，就应该用分类计数原理，把每类办法中的方法数相加. 教学时，为使学生理解 n 类办法之间的相互独立性，可以类比物理教材电学部分的"并联电路".

分步计数原理即乘法原理，完成一件事可以分成 n 个步骤，这 n 个步骤之间是相互关联的，缺少其中的任何一个步骤，这件事都无法完成，只有依次完成所有的步骤，才能完成这件事，而完成每一个步骤各有若干种不同的方法，求完成这件事有多少种方法，就应该用分步计数原理，把每一个步骤的方法数相乘. 教学时，为使学生理解 n 个步骤之间的相互关联性，可以类比物理教材电学部分的"串联电路".

3. 要理解分类计数原理，需要注意的是"做一件事，完成它有 n 类办法"，这是对能够完成这件事所有方法的分类. 分类时，首先要根据这件事的特点确定一个分类的标准，然后在所确定的标准下进行分类；其次，分类需满足如下要求：完成这件事的任何一种方法必须包含于某一类之中，且仅包含于该类之中. 只有满足这些条件，才能使用分类计数原理.

要理解分步计数原理，需要注意的是"做一件事，完成它需要分成 n 个步骤"，这是指完成这件事的任何一种方法都要分成 n 个步骤. 分步时，首先要根据这件事的特点确定一个分步的标准；其次，分步要满足如下要求：完成这件事必须且只需完成这 n 个步骤. 只有满足这些条件，才能运用分步计数原理.

在教学中，教师要注意引导学生在列举大量实例的基础上展开讨论、研究和交流，以加深对分类计数原理和分步计数原理的理解. 同时，引导学生正确区分两个计数原理.

4. 本教材没有用集合的观点来理解分类计数原理和分步计数原理，降低了知识的难度，更有利于学生对知识的理解和掌握.

10.2　概率初步

1. 初学概率的人，对概率容易产生两个错觉：一个是把随机现象看成一种莫名其妙的现象，它有时出现这个结果，有时出现那个结果，毫无规律可言；另一个错觉是用一次预测的结果来衡量概率的功效. 其实这两个错觉是出于同一根源，就是没有掌握随机现象的大数属性. 由于过去学习、接触较多的是确定性现象，习惯于用确定性现象的思想方法思考问题，现在转入随机现象，必须用新的思想方法思考问题，思想上一时还没有转过

来，以致产生这些错觉.

随机现象是有规律的，不过它的规律不是做一次、两次或少数几次的试验(或观察)就能觉察出来，必须做大数次才能发现. 上述第一个错觉就是因为没有从大数次观点观察问题，以致把随机现象看成毫无规律可言的现象.

在概率中，我们是用大数次观点观察问题、思考问题和理解问题的. 概率的功效也应从大数次观点来理解. 例如从一批次品率(次品出现的概率) 为 0.03 的产品中任抽一件，在没查看以前，预测它是合格品，其准确性一般是很高的. 这是因为在大数次中，平均每 100 次有 97 次预测准确，而仅 3 次不准确. 再以掷一枚骰子为例，掷得 4 点的概率为$\frac{1}{6}$，预测一次掷得 4 点，在大数次中，平均每 6 次有 1 次准确，而有 5 次不准确. 从以上两个例子来看，预测的准确性与随机现象本身的概率有关，若从大数次观点来理解，我们对概率的功效是没有怀疑的.

2. 样本空间、随机事件及其概率是概率论的基本概念. 近代概率论已给出了概率的测度论式的定义和一套严密的公理化体系. 由于这不适合中等职业学校的学生学习，因而我们分别给出了古典概率和概率的统计定义. 不论是在实际应用中还是在理论上，概率的统计定义都有非常重要的作用.

3. 概率是随机事件发生的可能性大小的量度. 对于一个随机事件来说，发生的可能性的大小是由它自身决定的，是它自身的一种属性，不管你能否认识到或是能否计算出来，它总是客观存在的. 概率论的基本任务之一就是要研究或计算出，一个给定的随机事件发生的可能性究竟有多大. 然而，对于一个给定的事件 A，虽然客观上一定有它的概率 $P(A)$，但如何获得 $P(A)$ 的值，仅靠古典概率的计算公式是远远不能解决问题的. 在多数情况下，需要经过大量的数据分析才能得到它的近似值.

4. 古典概型是人们最早研究的一种概率模型. 它是最简单的，而且是最常用的一种概率模型，同时它又是解决某些较复杂概率问题的基础. 因此，古典概率是本节的重点，教学中必须给予充分重视.

最简单的古典概率问题可以用数数来解决，用它作为学习随机数学的起点是适宜的. 但由于本节概念与学生原有知识、经验和思维习惯(或者说原有的认知结构) 有较大的差距，因而对古典概率有关概念的理解是难点.

教学中要坚持由具体到抽象，对每一个新概念、新知识都要努力做到用学生较为熟悉的例子顺理成章地引入，以克服教学内容较为抽象给学生学习带来的困难，从而使学生了解随机数学，培养学生的随机数学思想方法.

5. 教材首先给出了抛掷硬币、骰子这种简单具体的随机现象，引导学生进行分析、归纳，引入了随机试验，并总结出一类具有共同特征的问题，从而引入了古典概型，以及样本空间、随机事件等概念，并介绍了概率的古典定义. 这样安排的目的，一是便于学生理解有关概念；二是说明古典概率问题来源于实际，用以增强学生对数学理论来源于实践的认识，同时体现了数学建模思想，以培养学生应用数学的意识.

然后，通过例题介绍了古典概率的一些简单实际应用．并通过分析历史上著名的投币试验结果，简要介绍了概率的统计定义．从而指出，求事件A的概率的基本方法，是通过大量的重复试验，用事件A发生的频率近似地作为它的概率．

6. 正确地确定样本空间是求古典概率的关键．

一个样本空间是一个随机试验的一切可能结果的集合．对于这一概念，由于学生已具备了集合知识，学习起来不会有多少困难．关键是要使学生重视它，应引导学生正确确定样本空间中所包含的元素，要做到既不重复也不遗漏．可以说，选择样本空间是建立一个概率模型的第一步．

“样本空间”是由试验的条件和试验的目的所确定的．例如，同时抛掷两枚质地均匀的相同硬币，若把两枚硬币看成一个是第一枚，另一个是第二枚，得样本空间

$$\Omega=\{(\text{正},\ \text{正}),\ (\text{正},\ \text{反}),\ (\text{反},\ \text{正}),\ (\text{反},\ \text{反})\},$$

这个试验是古典概型．

若不考虑两枚硬币的顺序问题，只考察两枚硬币的朝上一面的结果，其不同的结果只有3个，样本空间是

$$\Omega=\{\text{两枚都正},\ \text{两枚都反},\ \text{一枚正、一枚反}\},$$

这三个基本事件不是等可能的，这个试验不是古典概型．

如果仅仅是要写抛掷两枚均匀硬币的样本空间，则以上两个样本空间都可以说是对的，但这两个样本空间的本质是不同的．

7. 如果一个事件包含了它所在的随机试验中所有可能的结果，那么这个事件肯定是必然事件．若一个事件不包含它所在的随机试验中的任何结果，那么这个事件就是不可能事件．我们把随机试验的结果定义为随机事件，实际上已经把必然事件和不可能事件看成随机事件的两种特殊情况了．

8. 学好随机试验、样本空间和随机事件是以后学习概率的基础，因此本节的重点是样本空间和随机事件．难点是正确确定样本空间和随机事件中所包含的元素，教学中，要遵循认知的规律，努力培养学生良好的思维习惯，这样才可能不重复不遗漏地确定之．

9. 一般情形的随机试验不一定是古典概型，判断一个随机试验是否为古典概型有两个条件：(1) 结果有限；(2) 各结果出现的机会均等．特别是(2) 这个等可能性，往往容易被忽视，从而得出错误的结果．解决这一问题的办法是引导学生使用如下的解题步骤：

(1) 找出欲求其概率的事件A．这一步要注意纠正把“事件”与“事件的概率”相混淆与表述上的错误．

(2) 弄清“一次试验”是什么．

(3) 判断一次试验的样本空间是什么，基本事件个数是否有限，是否具有等可能性．

(4) 求一次试验的基本事件总个数．

(5) 求事件A包含的基本事件个数．

(6) 用定义求概率.

在教学中，最好结合例题加以讲解，引导学生自己总结出以上步骤.

10. $P(A)=\frac{m}{n}$ 既是古典概率的定义，又是计算这种概率的基本方法，根据这个公式计算时，关键是判定产生事件A的随机试验是否是古典型的，即它所包含的基本事件是否有限、各基本事件发生的机会是否均等，然后再求出 n，m.

11. 频率和概率的关系：事件的频率与概率都是度量事件发生可能性大小的统计特征. 频率是个试验值，具有随机性，可能取多个不同值，因而它只能近似地反映事件出现的可能性大小；概率是个理论值，它是该事件本身所固有的属性，只能取唯一值. 实际上，事件的概率就是事件发生的可能性大小的一个数量刻画. 概率大，事件发生的可能性就大；概率小，事件发生的可能性就小. 根据概率的统计定义可知，概率可以通过频率来测量，也就是说，通常当试验次数 n 充分大时，事件的频率可近似代替概率. 简单地说，概率是频率的稳定值. 我们经常遇到升学率、合格率、废品率、成活率、死亡率、射击的命中率等都是频率. 这样求得的概率，一般称为统计概率.

由于频率$\frac{m}{n}$ 总界于 0 与 1 之间，因此随机事件 A 的概率也界于 0 与 1 之间，即

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

概率的统计定义中所说的频率总接近于某个常数，在它附近摆动，是指随着试验次数的增大，频率围绕概率摆动的平均幅度可能将越来越小，频率与概率之间出现较大偏差也越来越罕见，但不是不可能出现，所以不能误认为频率的极限是概率.

10.3.1 总体、样本和抽样方法

简单随机抽样

1. 本小节教材首先通过具体的例子给学生介绍了总体、样本、随机抽样等概念，并说明了抽样方法在统计学中所占的重要地位.

2. 在统计中涉及的抽样方法很多，教学时可通过学生熟知的实例，让学生了解抽样方法，在简单随机抽样中，可分为不放回抽样和放回抽样. 本章介绍的是不放回抽样.

3. 在学习简单随机抽样的定义时，应注意以下特点：

(1) 它要求被抽取样本的总体的个体数有限.

(2) 它是从总体中逐个地进行抽取. 这样，就便于在抽样实践中进行操作.

(3) 它是一种不放回抽样. 由于抽样实践中多采用不放回抽样，使其具有较广泛的实用性，而且由于所抽取的样本中没有被重复抽取的个体，便于进行有关的分析和计算.

4. 当用简单随机抽样从含有 N 个个体的总体中抽取一个容量为 n 的样本时，在整个抽样过程中每个个体被抽到的可能性是相等的.

对于上面结论的一般情况，教材中只要求学生知道此结论，在教学时可不引申.

5. 实施简单随机抽样，主要有两种方法：抽签法和随机数表法. 抽签法比较简单，学生比较熟悉，教材中介绍了用随机数表进行抽样的三个步骤：

第一步、将总体中的个体编号. 由于需要进行这一步骤，如果总体中的个体数太多，采用随机数表法进行抽样就显得不太方便. 这里的所谓的编号，实际上就是编数字号码. 例如将 100 个个体编号成 00，01，02，…，99，而不是编号成 0，1，2，…，99，以便于运用随机数表，此外，将起始号选为 00，而不是 01，可使 100 个个体都可用两位数字号码表示，否则将会出现三位数字号码 100. 可见，这样确定起始号便于我们使用随机数表.

第二步、选定开始的数字，为了保证所选定的数字的随机性，应在面对随机数表之前就指出开始数字的位置.

第三步、获取样本号码. 为便于操作，特别是为了知道所抽取的每一个号码是否与前面得到的号码重复，可将总体中所有个体的数字号码先按顺序列出. 每抽出一个号码时，就在其中的相应号码中做一个记号，这样就知道后面得到的号码是否曾被取出.

系统抽样

1. 本小节的重点是通过实例了解系统抽样的方法.

2. 关于系统抽样，在教学中可强调如下几点：

系统抽样适合于总体中的个体数较多的情况，因为这时采用简单随机数表很不方便；

系统抽样与简单随机抽样之间存在着密切的关系，即在将总体中的个体均分后的每一段进行抽样时，采用的是简单随机抽样；

与简单随机抽样一样，系统抽样也属于等可能抽样.

3. 在本节练习 B 中的第 1 题涉及总体中的个体数不能被样本容量整除时，可先用简单随机抽样从总体中剔除几个个体，使剩下的个体数能被样本容量整除，然后往下再按系统抽样进行.

4. 系统抽样时，将总体平均分成几部分后，按事先确定的规则 —— 通常是在各部分相同的位置抽样，因而抽样的间隔相同，所以也被称为等距抽样.

分层抽样

1. 本小节的重点是通过实例了解分层抽样的方法.

2. 分层抽样在内容上与系统抽样是平行的.

在教学过程中强调：

分层抽样适用于总体由差异明显的几部分组成的情况；

在每一层进行抽样时，采用简单的随机抽样或系统抽样；

分层抽样也是等可能抽样.

3. 建议将三种抽样方法的联系和区别做个总结. 如下表：

三种抽样方法的比较

类别	共同点	各自的特点	相互联系	使用范围
简单随机抽样	抽样过程中每个个体被抽到的可能性相等	从总体中逐个抽取		总体中的个体较少
系统抽样		将总体均分成几部分，按事先确定的规则在各部分抽取	在起始部分抽样时采用简单随机抽样	总体中的个体数较多
分层抽样		将总体分成几层，分层进行抽样	各层抽样时采用简单随机抽样或系统抽样	总体由差异明显的几部分组成

10.3.2 频率分布直方图

1. 本小节的重点是通过实例体会分布的意义和作用，在表示样本数据的过程中，学会列出频率分布表、画频率分布直方图，体会其特点.

2. 在初中已经学习过把样本数据表示成频率分布表和频率分布直方图这样的表、图形式，从图表形式上直观地看出样本数据的分布情况. 在教材中，给出了列频率分布表、画频率分布直方图的步骤：

(1) 计算极差

课本提供的样本数据中，最大值是 25.56，最小值是 25.24，它们的差为 $25.56-25.24=0.32$，所以极差为 0.32.

(2) 决定组距与组数

如果组距为 0.03，那么由于$\frac{0.32}{0.03}=10\frac{2}{3}$，于是将样本数据分成 11 组，组距还可以定为其他的数值.

(3) 决定分点

使分点与样本数据不重合，一般使分点比数据多一位小数，并且把第 1 小组的起点稍微减小一点，那么，所分的 11 个小组可以是$[25.235, 25.265]$，$[25.265, 25.295]$，…，$[25.535, 25.565]$.

(4) 列频率分布表

(5) 绘制频率分布直方图

3. 关于频率分布表和频率分布直方图，应向学生指出频率分布表中列出的是在各个不同区间内的取值频率，相应的直方图是用图形面积的大小来表示在各个区间内取值的频率.

4. 在得到上述一组数据的频率分布后，课本介绍了频率分布与相应的总体分布的关系. 即频率分布将随着样本容量的增大更加接近总体分布，当样本容量无限增大且分组的组距无限缩小时，频率分布直方图就会演变成一条光滑的曲线——反映总体分布的总体密度曲线. 在教学中，可强调指出，基于频率分布与相应的总体分布的关系，且通常我们并不知道一个总体的分布，因此我们往往是从总体中抽取一个样本，用样本的频率分布去

估计相应的总体分布.

10.3.3　用样本估计总体

1. 本小节的重点是通过实例理解样本标准差的意义和作用，学会计算样本标准差. 本小节的难点是理解样本标准差的意义和作用，形成对数据处理过程进行初步评价的意识.

2. 在初中已经学过，平均数描述了数据的平均水平，定量的反映了数据的集中趋势所处的水平. 教材以实例的方式解释了如何用样本的平均数估计总体的平均数.

3. 样本的频率分布直方图和样本的平均数都是用来估计总体的，它们之间的联系是平均数代表了一组数据的数值平均水平，在频率分布直方图中，平均数是直方图的平衡点.

4. 标准差、方差是估计总体的数字特征之一，它反映了数据的离散、波动的程度. 如果标准差较大，表明数据的波动程度较大，数据离散程度较高；如果标准差较小，表明数据的波动程度较小，数据离散程度较小.

5. 教材中给出了标准差的算法，使学生养成分步计算的良好习惯. 同时，通过例题演示了如何借助计算器计算样本平均数和样本标准差. 在探索与研究中鼓励学生尝试使用软件来计算样本的数字特征，培养学生的动手操作能力和实践能力.

10.3.4　一元线性回归

1. 本小节的重点是通过收集现实问题中两个有关联变量的数据，作出散点图，并利用散点图直观认识变量间的相关关系；经历用不同估算方法描述两个变量线性相关的过程；能根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程.

2. 变量之间存在着两种关系：一类是函数关系，这是确定性的关系，例如正方形面积 S 与边长 x 之间的关系 $S=x^2$；一类是相关关系，这是非确定性关系，例如家庭的年收入和年饮食支出的关系为不确定的随机变量相关关系，又如当研究一个学生的数学成绩和物理成绩的关系时，这两个变量也是不确定的随机变量相关关系. 本节主要研究两个变量间的相关关系.

3. 在现实生活中，相关关系是大量存在的. 从某种意义上看，函数关系是一种理想的关系模型，而相关关系是一种更为一般的情况，因此研究相关关系，不仅可使我们处理更为广泛的数学问题，还可使我们对函数关系的认识上升到一个新的高度.

4. 散点图直观地描述了两个变量之间有没有相关关系，教学中应指导学生作出散点图，并利用散点图直观认识两变量的相关关系.

5. 用具体的例子来解释线性回归容易理解，所以建议以实际例子引入，让学生用散点图直观认识两变量的相关关系，让学生尝试找到最佳的近似直线.

6. 求回归直线方程，通常是用计算器来完成的. 在很多函数型计算器中，可通过直接按键得出线性回归方程的系数，教材中给出了操作过程，而如果要用一般的科学计算器进行计算，则要像例 2 一样先列出相应的表格.

7. 回归一词是英国科学家高尔顿于 1877 年第一次当作统计概念加以应用的. 高尔顿

做了一项研究，他统计了大量父母身高和子女身高，研究了它们之间的关系，其结果表明，高身材父母的子女的身高有回降到人的平均身高的趋势，因而，他选用了Regression(回归) 一词，统计学家采用它来描述根据已知变量预测另一变量的方法.

Ⅲ 教学设计

10.1 计数原理

【教学目标】

1. 理解分类计数原理与分步计数原理，会利用两个原理解决实际问题.
2. 培养学生利用数学思想方法分析、解决实际问题的能力.
3. 通过教学，让学生感受生活中的数学思想，提高数学的应用意识.

【教学重点】

两个计数原理的理解与应用.

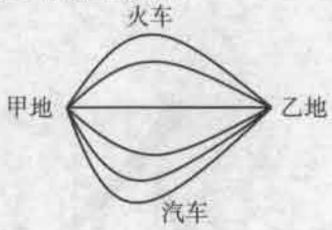
【教学难点】

分类计数原理与分步计数原理的区别.

【教学方法】

本节课主要采用问题教学法．教师创设问题情景，引导学生观察发现分类计数原理与分步计数原理．并通过例题讲解，使学生进一步深化对定理的理解．最后通过对比实例，明确两个定理的联系和区别.

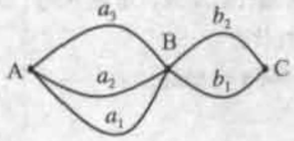
【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	看图1和图2，数一数从甲地到乙地有多少种不同的走法？  图1  图2	教师提出问题，学生独立思考或小组讨论. 师：生活中常见的计数问题蕴含着什么原理呢？	引出两个计数原理.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	问题1　从甲地去乙地，可以乘火车，也可以乘汽车．一天中，火车有2班，汽车有4班，那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地有多少种不同的选择？ 解　$2+4=6$(种)． 分类计数原理　完成一件事，有n类办法，在第1类办法中有m_1种不同的方法，在第2类办法中有m_2种不同的方法……在第n类办法中有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法．	师：问题1要完成一件什么事？完成这件事有多少类不同的办法？每类方法中有多少种不同的方法？完成这件事一共有多少种不同的方法？	结合图示，教师通过问题引导学生一步步分析解题思路． 通过简单的问题1引出分类计数原理．
	例1　书架上层有不同的数学书15本，中层有不同的语文书18本，下层有不同的物理书7本．现从中任取一本书，问有多少种不同的取法？ 解　根据分类计数原理，不同的取法一共有 $N=15+18+7=40$(种)．	师：例1中要完成一件什么事？完成这件事有多少类不同的办法？完成这件事一共有多少种不同的方法？用什么原理做？	引导学生依据分类计数原理分析例1和例2，深化对原理的理解，培养学生分析问题的条理性．
	例2　某班同学分成甲、乙、丙、丁四个小组，甲组9人，乙组11人，丙组10人，丁组9人．现要求该班选派一人去参加某项活动，问有多少种不同的选法？ 解　根据分类计数原理，不同的选法一共有 $N=9+11+10+9=39$(种)．	学生自己分析例2的解题思路．	
	问题2　由A地去C地，中间必须经过B地，且已知由A地到B地有3条路可走，又由B地到C地有2条路可走，那么由A地经B地到C地有多少种不同的走法？	师：问题2中要完成一件什么事？由A地去C地有几个步骤？	结合图示，教师通过问题引导学生一步步分析解题思路．

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	解　$3\times2=6$(种).	 第一步：由A地到B地，有____种不同的走法； 第二步：由B地到C地，有____种不同的走法.	
	分步计数原理　完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第1步有 m_1 种不同的方法，做第2步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.	完成这件事有多少种不同的方法?	通过问题2引出分步计数原理.
新课	例3　书架上层有不同的数学书15本，中层有不同的语文书18本，下层有不同的物理书7本. 现从中取出数学、语文、物理书各一本，问有多少种不同的取法? 解　利用分步计数原理得 $N=15\times18\times7=1\ 890$ 种不同的取法.	应用分步计数原理分析，例3，例4，例5要完成一件什么事？分为几个步骤？每一步骤中有几种不同的方法？完成这件事共有几种不同的方法?	引导学生依据分步计数原理分析例3和例4，深化对原理的理解，培养学生分析问题、解决问题的条理性.
	例4　某农场要在4种不同类型的土地上，试验种植A，B，C，D这4种不同品种的小麦，要求每种土地上试种一种小麦，问有多少种不同的试验方案? 解　依据分步计数原理，可知有 $4\times3\times2\times1=24$ 种不同的试验方案.	因为教材中没有排列组合的知识，教师要详细讲解例4.	
	例5　由数字1，2，3，4，5可以组成多少个3位数(各位上的数字可以重复)?		对比例4与例5，明确题目中"是

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td rowspan="2">新课</td><td>解　根据分步计数原理，组成不同的3位数的个数共有
$$5\times5\times5=125.$$
小结：
两个基本原理的共同点：都是研究“完成一件事，共有多少种不同的方法”.
不同点：分类计数原理中，无论哪一类办法中的哪一种都能单独完成这件事；分步计数原理中，完成一件事，需要分成n个步骤，每个步骤都不可缺少，需要完成所有的步骤才能完成这件事.</td><td></td><td>否允许重复”对结果的影响.</td></tr>
<tr><td>例6　甲班有三好学生8人，乙班有三好学生6人，丙班有三好学生9人：
(1) 由这3个班中任选1名三好学生，出席三好学生表彰会，有多少种不同的选法？
(2) 由这3个班中各选1名三好学生，出席三好学生表彰会，有多少种不同的选法？
解　(1) 依分类计数原理，不同的选法种数是$N=8+6+9=23$；
(2) 依分步计数原理，不同的选法种数是$N=8\times6\times9=432$.</td><td>例6让学生自己讲解思路，学会应用两个原理来分析解决问题.</td><td>通过例6，使学生进一步明确两个原理的联系与区别.</td></tr>
<tr><td>小结</td><td>分类计数原理.
分步计数原理.
两个原理的区别与联系.</td><td>回顾各个例题，让学生在小组中讨论解题思路，学会用数学语言分析、解决问题.</td><td></td></tr>
<tr><td>作业</td><td>教材P165习题第1～5题.</td><td></td><td>巩固两个原理.</td></tr>
</table>

10.2 概率初步

【教学目标】

1. 正确理解古典概型的两个特点，掌握古典概率计算公式.

2. 通过教学，发展学生类比、归纳、猜想等推理能力.

3. 通过古典概率解决游戏问题，培养学生的数学应用能力以及科学的价值观与世界观.

【教学重点】

古典概型的特点，古典概率的计算公式以及简单应用.

【教学难点】

试验的基本事件个数 n 和随机事件包含基本事件的个数 m.

【教学方法】

通过三个简单的例题让学生初步理解古典概型的特征，并由此引出样本空间和基本事件等诸多概念，教师紧扣这三个例题讲解各个概念，并由学生总结古典概率的计算公式. 然后通过后面的例题巩固古典概率的求法.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	例 1　抛掷一枚硬币，假设硬币的构造是均匀的，那么掷得的结果可能是________，掷得“正面向上”的可能性为________. 例 2　抛掷一颗骰子，设骰子的构造是均匀的，那么掷得的可能结果有________，掷得 6 点的可能性为________. 例 3　连续抛掷 2 枚硬币，可能出现的结果有________，两枚都出现“正面向上”的可能性为________.	教师引导学生完成三个例题的填空.	通过三个简单的例题，让学生认识到生活中如何描述事件发生的可能性.
新课	随机试验：如果一个试验在相同的条件下可以重复进行，且每次试验的结果事先不可预知，则称此试验为随机试验，简称试验. 古典概型：在随机试验中，如果其可能出现的结果只有有限个，且它们出现的机会是均等的，我们称这样的随机试验为古典概型.	学生阅读教材 P167 ~ P168 的各个定义，紧扣上面三个例题理解. 学生先指出三个例题中样本空间和随机事件中包含基本事件的个数.	由上面三个例题，让学生初步理解古典概型的特征，并由此引出样本空间、随机事件等诸多概念，教师紧扣这三个例题讲解各个概念，并由学生总结古典概率

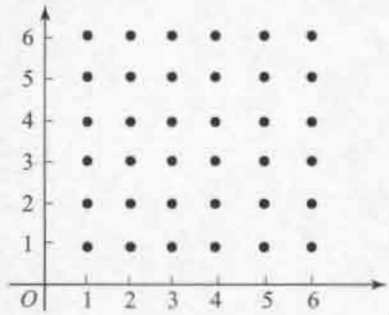
续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	样本空间：我们把一个随机试验的一切可能结果构成的集合叫做这个试验的样本空间．通常用大写希腊字母 Ω 表示． 随机事件：我们把样本空间的子集，叫做随机事件，简称为事件．常用大写字母 A，B，C 等表示． 基本事件：只含有一个元素的事件叫做基本事件． 不可能事件：我们把某一试验中不可能发生的事件叫做不可能事件($\varnothing$)． 必然事件：在做某一试验时，必然发生的事件叫做必然事件(Ω)．		的计算公式．然后通过后面的例题巩固对古典概率的理解．
新课	古典概率：对于古典概型，如果试验的基本事件总数为 n，随机事件 A 所包含的基本事件数为 m，我们就用 $\frac{m}{n}$ 来描述事件 A 出现的可能性大小，并称它为事件 A 的概率．记作 $$P(A)=\frac{m}{n}.$$ 显然 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，而且 $$P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0.$$	总结出古典概率的计算公式．	
	练习 教材 P172 习题 5，6．		用简单的习题 5 强调 $P(A)=\frac{m}{n}$ 以及概率值的范围．
	例 4　从含有两件正品 a_1，a_2 和一件次品 b_1 的三件产品中每次任取 1 件，每次取出后不放回，连续取两次，求取出的两件中恰好有一件次品的概率． 解　样本空间是	重点讲清用列举法得出样本空间与随机事件中所包含的基本事件的个数，提醒学生列举时做到“不重不漏”．	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
	$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_2,a_1),(a_2,b_1),(b_1,a_1),(b_1,a_2)\}$， Ω 由 6 个基本事件组成. 用 A 表示“取出的两件中，恰好有一件次品”这一事件，则 $A=\{(a_1,b_1),(a_2,b_1),(b_1,a_1),(b_1,a_2)\}$， 事件 A 由 4 个基本事件组成. 因而 $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.		
	例 5　在例 4 中，把“每次取出后不放回”这一条件换成“每次取出后放回”，其余不变，求取出的两件中恰好有一件次品的概率.		让学生明确“不放回”与“放回”的区别就在于“元素能否重复”.
新课	解　样本空间 $\Omega=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_2,b_1),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,b_1)\}$， Ω 由 9 个基本事件组成. 用 B 表示“取出的两件中，恰好有一件次品”这一事件，则 $B=\{(a_1,b_1),(a_2,b_1),(b_1,a_1),(b_1,a_2)\}$， 事件 B 由 4 个基本事件组成. 因而 $P(B)=\frac{4}{9}$.		与例 4 比较异同.
	小结： 计算古典概率时，首先确定试验中样本空间包含的基本事件的个数 n，再确定随机事件包含的基本事件的个数 m.		
	例 6　某号码锁有 6 个拨盘，每个拨盘上有从 0～9 共 10 个数字. 当 6 个拨盘上的数字组成某一个六位数字号码		

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	（开锁号码）时，锁才能打开．如果不知道开锁号码，试开一次就把锁打开的概率是多少？ 解　号码锁每个拨盘上的数字有 10 种可能的取法．根据分步计数原理，6 个拨盘上的数字组成的六位数字号码共有 10^6 个，又试开时采用每一个号码的可能性都相等，且开锁号码只有一个，所以试开一次就把锁打开的概率是 $$\frac{1}{10^6}=\frac{1}{100\ 000}.$$ 例 7　抛掷两颗骰子，求： (1) 出现点数之和为 7 的概率； (2) 出现两个 4 点的概率．  解　从图中容易看出基本事件全体构成的集合与点集 $S=\{P(x,\ y)\mid x\in\mathbf{N},\ y\in\mathbf{N},\ 1\leqslant x\leqslant 6,\ 1\leqslant y\leqslant 6\}$ 中的元素一一对应．因为 S 中点的总数是 $6\times 6=36$，所以基本事件总数 $n=36$； (1) 记“出现点数之和为 7”的事件为 A，从图中可看到事件 A 包含的基本事件数共 6 个，即 (6，1)，(5，2)，(4，3)，(3，4)，(2，5)，(1，6)， 所以 $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$； (2) 记“出现两个 4 点”的事件为 B，	 用坐标系辅助讲解，学生更明确．	教师可再举一些关于号码的例子，让学生明确概率在实际生活中的应用． 教师可再附加练习 P172 习题第 7 题，让学生发现用坐标法求概率的优越性．

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	从图中可看到事件 B 包含的基本事件数只有1个(4，4)，所以 $P(B)=\frac{1}{36}$. 阅读教材 P171 抛硬币试验等内容.		
小结	1. 古典概型特点. 2. 古典概率的计算公式.		
作业	教材 P172 习题第 2 ～ 4 题.		巩固公式应用.

10.3.1 总体、样本和抽样方法(一)

【教学目标】

1. 理解总体、样本和随机抽样的概念，掌握简单随机抽样的两种方法.

2. 通过实例，体验简单随机抽样的科学性及可靠性，培养学生分析问题、解决问题的能力.

3. 通过对现实生活和其他学科中统计问题的提出，体会数学知识在实际生活中的重要应用.

【教学重点】

正确理解简单随机抽样的概念，掌握抽签法及随机数表法的步骤.

【教学难点】

能灵活应用抽签法或随机数表法从总体中抽取样本.

【教学方法】

这节课主要采取启发引导和讲练结合的教学方法．引导学生根据现实生活的经历和体验及收集到的信息来理解理论知识，同时通过例题、练习和课后作业，启发学生从书本知识回到社会实践，学以致用.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	下列调查应该采用普查还是抽查？为什么？ (1) 为了防治甲型 H1N1 流感的蔓延，学生每天晨检； (2) 了解中央电视台春节文艺晚会的收视率； (3) 测试灯泡的寿命.	教师引导学生回答问题，并总结普查和抽查的优缺点.	让学生体验数学来源于生活，提高学习兴趣.

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td rowspan="2">新
课</td><td>1. 总体与样本
情境一：某校高中学生有 900 人，校医务室想对全校高中学生的身高情况做一次调查，为了不影响正常教学活动，准备抽取 50 名学生作为调查对象. 你能帮医务室设计一个抽取方案吗？
总体：我们一般把所考察对象的某一数值指标的全体作为总体.
个体：构成总体的每一个元素作为个体.
样本：从总体中抽出若干个体所组成的集合叫样本.
样本容量：样本中所包含的个体数量叫样本容量.</td><td>教师用幻灯片展示概念.
学生阅读概念，并说出情境一中的总体、个体、样本及样本容量，分别是指什么.</td><td>结合实例理解总体、个体、样本及样本容量等概念.</td></tr>
<tr><td>2. 抽样方法
看下面例子，思考：如何抽取样本才能正确估计总体？
情境二：在 1936 年美国总统选举前，一份颇有名气的杂志的工作人员做了一次民意测验，调查兰顿和罗斯福谁将当选为下一届总统. 为了解公众意向，调查者通过电话簿和车辆登记簿上的名单给一大批人发了调查表（注意在 1936 年电话和汽车只有少数富人拥有），通过分析收回的调查表，显示兰顿非常受欢迎. 于是此杂志预测兰顿将在选举中获胜.
实际选举结果正好相反，最后罗斯福在选举中获胜. 其数据如下：
<table>
<tr><th>候选人</th><th>预测结果 /%</th><th>选举结果 /%</th></tr>
<tr><td>兰顿</td><td>57</td><td>38</td></tr>
<tr><td>罗斯福</td><td>43</td><td>52</td></tr>
</table>
随机抽样：抽样时要保证每一个个体都可能被抽到，每一个个体被抽到</td><td>师：情境二中为什么实际选举结果与预测相反？类似的，情境一能否只从高一学生中抽取？
学生回答问题.
学生总结随机抽样应满足的两个条件.</td><td>通过此例，让学生自己总结出随机抽样的概念.</td></tr>
</table>

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	的机会是均等的，满足这样条件的抽样就是随机抽样. 在进行抽样时，为保证抽样的随机性和个体被抽到的机会均等，统计工作者设计了许多方法，本章只介绍简单随机抽样、系统抽样和分层抽样.本节课先来学习简单随机抽样. 3. 简单随机抽样 情境三：一个布袋中有6个同样质地的小球，从中不放回地抽取3个小球作为样本. 每次抽取时各个个体被抽到的可能性是否相等？ 一般地，从元素个数为 N 的总体中不放回地抽取容量为 n 的样本($n \leqslant N$)，如果每一次抽取时总体中的各个个体有相同的可能性被抽到，这种抽样方法叫做简单随机抽样，这样抽取的样本，叫做简单随机样本. 常用的简单随机抽样办法有抽签法和随机数表法. (1) 抽签法 例　从一个100支日光灯管的总体中，用不放回的方法抽取10支日光灯管构成一个简单随机样本. 方法： ① 将这100支日光灯管编号，每一支日光灯管对应1到100中的唯一一个数； ② 把这100个号分别写在相同的100张纸片上； ③ 将100张纸片放在一个箱子中搅匀； ④ 随机抽取10个号签，并记录； ⑤ 将编号与号签一致的个体抽出. 抽签法一般步骤：	 带领学生分析第一次抽取，第二次抽取，第三次抽取时每个小球被抽到的可能性各为多少. 学生在教师的引导下，	 引出简单随机抽样的概念. 让学生由实例归纳抽签法的步骤，从而真正理解并掌握抽签法.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	① 编号制签； ② 搅拌均匀； ③ 逐个不放回地抽取.	总结出抽签法的一般步骤.	
	定义：一般地，将总体中的 N 个个体编号，并把号码分别写在号签上，再将号签放在一个容器中，搅拌均匀后，每次从中抽取一个号签，不放回地连续抽取 n 次，就得到一个容量为 n 的样本，这样的抽样方法就叫抽签法.		在讲完具体的例子后再讲抽签法的定义，学生更容易理解.
	问题：若上面的日光灯管有 3 000 支，要抽取 100 支，用抽签法有没有困难？ (2) 随机数表法	由问题发现抽签法的优点和缺点.	总体较多时，采用抽签法不适合，引出随机数表法.
	例　要考察某种品牌的 850 颗种子的发芽率，从中抽取 50 颗种子作为样本进行试验. 方法： ① 对 850 颗种子进行编号，可编为 001，002，003，…，850； ② 在面对随机数表(其中每个数都是随机方法产生的，这样的数表叫随机数表)之前，指出开始数字的纵横位置(例如从第 1 行第 1 列的数 4 开始)； ③ 获取样本号码(给出的随机数表中是 5 个数一组，我们使用各个 5 位数组的前 3 位，不大于 850 且不与前面重复的取出，否则就跳过不取，如此下去直到得出 50 个三位数).	结合教材 P176 的随机数表，师生一起完成例子.	鉴于学生对随机数表抽取样本比较陌生，接触较少，故教师带领学生一起完成例题.
	随机数表法抽样的一般步骤： ① 编号； ② 在随机数表上确定起始位置； ③ 取数.	引导学生总结出用随机数表法抽样的一般步骤.	

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	填表： <table><tr><td>抽样方法</td><td>适用条件</td><td>步骤</td></tr><tr><td>抽签法</td><td></td><td></td></tr><tr><td>随机数表法</td><td></td><td></td></tr></table>	教师出示表格. 学生完成表格.	让学生通过对比，系统掌握两种方法的区别与联系，以便在具体问题中灵活应用.
作业	教材P177练习A组第3题，练习B组第2题.		满足不同层次学生的需求，体现了差异发展教学.

10.3.1 总体、样本和抽样方法(二)

【教学目标】

1. 理解系统抽样的概念，掌握系统抽样的一般步骤.
2. 通过实例的分析、解决，培养学生分析问题、解决问题的能力.
3. 通过数学活动，感受数学在实际生活中的应用，体会现实世界和数学知识的联系.

【教学重点】

掌握系统抽样的步骤.

【教学难点】

能够灵活应用系统抽样的方法解决统计问题.

【教学方法】

本节课采用启发引导和讲练结合的教学方法. 教学中教师带领学生从系统抽样的定义分析得出系统抽样的方法和步骤，然后结合例题及其变式练习巩固系统抽样的步骤.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 简单随机抽样的特点. 不放回抽样，逐个进行抽取，等概率抽样. 2. 抽签法和随机数表法的步骤. 抽签法：① 编号制签；② 搅拌均匀；③ 逐个不放回地抽取 n 次. 随机数表法：① 编号；② 在随机数表上确定起始位置；③ 取数. 3. 简单随机抽样的适用范围：总体的个体数不多时.	师生一起复习.	复习上节课知识，引出情境一、二.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	1. 系统抽样的定义 情境一：了解某省农村家庭年平均收入情况. 情境二：检测某电视机厂生产的某种型号的电视机的质量是否合格. 定义：将总体分成均衡的若干部分，然后按照预先制定的规则，从每一部分抽取一个个体，得到所需要的样本，这种抽样叫做系统抽样(也称为等距抽样). 2. 系统抽样的方法 例　为了解某地区今年高一学生期末考试数学成绩，拟从参加考试的15 000名学生的数学成绩中抽取容量为150的样本. 抽取方法： (1) 对全体学生进行编号，号码为1～15 000； (2)$k=\frac{N}{n}=\frac{15\ 000}{150}=100$(即可以将总体平均分为150个部分，其中每一部分包含100个个体)； (3) 从1号到100号进行简单随机抽样，抽取一个号码，比如是56； (4) 按照确定的规则，接下来顺次取出的号码为156，256，…，14 956的学生. 3. 系统抽样的一般步骤 从元素个数为N的总体中抽取容量	师：当总体中的个体数比较多时，采用什么样的抽样方法呢? 学生阅读定义. 教师对定义加以说明： (1) 当总体容量较大时，采用系统抽样； (2) 将总体分成均衡的若干部分是指将总体分段，分段间隔要求相等. (3) 预先制定的规则指的是：在第1段内采用简单随机抽样确定一个起始编号，在此编号的基础上加上分段间隔的整倍数即为抽样编号. 学生阅读例题，师生一起完成系统抽样. 让每一个学生尝试自己抽取样本. 教师引导学生简化步骤为：	由生活中的两个情境使学生产生疑问，引出系统抽样的定义. 教师对系统抽样的定义进行简单解释，完成由定义到方法的过渡，降低理解难度. 简化步骤，加强记忆.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	为 n 的样本： (1) 采用随机的方式将总体中的个体编号(为简便起见，有时可直接采用个体所带有的号码，如考生的准考证号、街道上各户的门牌号，等等)； (2) 将整个的编号分段(即分成若干部分)，确定分段的间隔 $k=\frac{N}{n}$； (3) 在第一段用简单随机抽样确定起始的个体编号 s； (4) 按照事先确定的规则抽取样本(通常是 s，$s+k$，$s+2k$，$s+3k$，…，$s+(n-1)k$ 获取整个样本). 注意：当 $\frac{N}{n}$ 是整数时，$k=\frac{N}{n}$；当 $\frac{N}{n}$ 不是整数时，可随机地从总体中剔除余数，使剩下的总体中个体的数量 N' 能被 n 整除，这时 $k=\frac{N'}{n}$. 然后再用系统抽样方法进行抽样.	(1) 编号； (2) 平均分段； (3) 确定起点； (4) 分段抽取.	
	练习 1. 请从参加考试的 15 000 名学生的数学成绩中，抽取容量为 100 的样本. 2. 某批产品共有 1 563 件，产品按出厂顺序编号，号码为 1～1 563. 检测员要从中抽取 15 件产品来检测，请你给出一个系统抽样方案.	教师点拨练习第 2 题，问学生：$\frac{N}{n}$ 不是整数时，怎样从总体中剔除余数?	巩固系统抽样的步骤.
小结	1. 系统抽样的适用范围. 2. 系统抽样的步骤. 3. 在确定分段时的注意事项.	教师提问，学生回答. 学生讨论总结.	
作业	教材 P178 练习 A 组第 2 题.		巩固知识，灵活应用.

10.3.1 总体、样本和抽样方法(三)

【教学目标】

1. 正确理解分层抽样的概念，掌握分层抽样的一般步骤.

2. 区分简单随机抽样、系统抽样和分层抽样，能灵活选择适当的方法进行抽样.

3. 通过数学活动，感受数学在实际生活中的应用，体会现实世界和数学知识的联系.

【教学重点】

分层抽样的定义和步骤.

【教学难点】

利用分层抽样的方法解决现实问题.

【教学方法】

这节课主要采取启发引导和讲练结合的教学方法．教学中教师带领学生从分层抽样的定义分析得出分层抽样的方法和步骤，然后结合例题及课后练习巩固分层抽样的步骤.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 简单随机抽样的特点是什么？ 2. 抽签法和随机数表法的步骤是什么？ 3. 系统抽样的步骤是什么？	学生回答问题，教师强调系统抽样与简单随机抽样的联系.	注重知识间的联系有助于构建新的知识体系.
新课	情境一：某高中学生有 900 名．为了考察他们的体重状况，打算抽取容量为 45 的一个样本．已知高一有 400 名学生，高二有 300 名学生，高三有 200 名学生. 试问：能在 900 人中任意取 45 人吗？能将 45 个名额均匀分到这三个年级中吗？应用什么方法抽取？ 1. 分层抽样的定义 当总体由差异明显的几部分组成时，为了使抽取的样本更好地反映总体的情况，常将总体中各个个体按照某种特征分成若干个互不重叠的部分，每一部分叫做“层”，在各层中按层在总体中所占的比例进行抽样，这种抽样叫做“分层抽样”.	教师引导学生讨论情境一中的问题. 学生阅读分层抽样的概念. 教师对概念作强调说明：(1) 分层需遵循不重复、不遗漏的原则；(2) 抽取比例由每层个体占总体的比例确定；(3) 各层抽样按简单随机抽样进行.	 教师先对定义进行说明，然后由定义得出抽样方法和步骤，便于学生理解掌握.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	情境一的抽样方法： (1) 确定样本容量与总体的个体数之比 $45:900=1:20$； (2) 利用抽样比确定各年级应抽取的个体数，依次为 $\frac{400}{20}$，$\frac{300}{20}$，$\frac{200}{20}$，即 20，15，10； (3) 利用简单随机抽样或系统抽样的方法，从各年级分别抽取 20，15，10 人，然后合在一起，就是所抽取的样本. 2. 分层抽样的一般步骤 分层抽样的一般步骤是： (1) 分层：按某种特征将总体分成若干层； (2) 按比例确定每层抽取个体的个数； (3) 各层分别按简单随机抽样的方法抽取； (4) 综合每层抽样，组成样本. 练习 某公司有员工 500 人，其中不到 35 岁的有 125 人，35 到 49 岁的有 280 人，50 岁以上的有 95 人. 为了调查员工的身体状况，从中抽取一个容量为 100 的样本，用分层抽样应当怎样抽取？ 解 (1) 确定样本容量与总体的个体数之比 $100:500=1:5$； (2) 利用抽样比确定各年龄段应抽取的个体数，依次为 $\frac{125}{5}$，$\frac{280}{5}$，$\frac{95}{5}$，即 25，56，19； (3) 利用简单随机抽样或系统抽样的方法，从各年龄段分别抽取 25，56，19 人，然后合在一起，就是所抽取的样本.	教师引导学生完成情境一的抽样. 根据实例，学生总结分层抽样的步骤. 学生独立完成练习，教师巡回指导.	结合实例讲解分层抽样的步骤，学生更容易理解. 加深对分层抽样的理解，巩固对分层抽样的掌握.

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>小
结</td><td>填表：
<table><tr><th>类别</th><th>共同点</th><th>适用范围</th><th>步骤</th></tr><tr><td>简单随机抽样</td><td rowspan="3"></td><td></td><td></td></tr><tr><td>系统抽样</td><td></td><td></td></tr><tr><td>分层抽样</td><td></td><td></td></tr></table></td><td>教师引导学生完成此表格.</td><td>整合知识，帮助学生建立新的知识体系.</td></tr>
<tr><td>作
业</td><td>教材P179练习A组第1，3题，练习B组题.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

10.3.2 频率分布直方图

【教学目标】

1. 掌握列频率分布表、画频率分布直方图的步骤，会用样本频率分布直方图估计总体分布.

2. 培养学生利用数学方法分析数据、解决实际问题的能力.

3. 通过画频率分布直方图的过程，培养学生耐心细致、严谨认真的科学态度.

【教学重点】

绘制频率分布直方图.

【教学难点】

列出频率分布表.

【教学方法】

本节主要采用例题教学法．通过一个具体的题目，讲解极差、频率等概念，教师带领学生一步步列出例题的频率分布表，画出频率分布直方图．随着教师的讲解，学生分步练习，真正掌握画频率分布直方图的各个步骤.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	从一个总体得到一个包含大量数据的样本时(如教材P180中100件钢管的尺寸)，我们很难从一个个数字中直接看出样本所包含的信息．如果把这些数据形成频数分布或频率分布(如下表)，这样就可以比较清楚地看出样本数据的特征.	师：对比样本数据的两种表现形式，我们发现由频率分布表可以比较清楚地看出样本数据的特征．如何列出频率分布表呢?	对比没经过整理的样本数据和数据的频率分布表，发现统计的重要性，引发学生学习兴趣.

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>导
入</td><td>频率分布表

分组	个数累计	频数	频率
25.235～25.265	1	1	0.01
25.265～25.295	2	2	0.02
25.295～25.325	5	5	0.05
25.325～25.355	12	12	0.12
25.355～25.385	18	18	0.18
25.385～25.415	25	25	0.25
25.415～25.445	16	16	0.16
25.445～25.475	13	13	0.13
25.475～25.505	4	4	0.04
25.505～25.535	2	2	0.02
25.535～25.565	2	2	0.02
合计	100	100	1.00

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>新
课</td><td>例　某钢铁加工厂生产内径为25.40 mm的钢管，为了检验产品的质量，从一批产品中任取100件检验，测得了它们的实际尺寸(见教材P181).
我们来列出这组样本数据的频率分布表、绘制频率分布直方图．步骤如下：
(1) 计算极差.
极差又叫做全距，是一组数据的最大值和最小值的差.
找出这组数据最大值的算法如下：
S1　把这100个数据命名为A_1，A_2，A_3，…，A_{100}，并设最大值为变量x；
S2　让x的值等于A_1；
S3　把$A_i(i=2, \cdots, 100)$逐个与x比较，如果$A_i>x$，则让x的值等于A_i.
运用上面的算法得出这组样本数据的最大值是25.56，用类似的算法可以得</td><td>师：我们将通过一个具体的例子来看一下如何画频率直方图.

想一想：若想求出这组数据的最小值，算法应是怎样的呢?</td><td></td></tr>
</table>

续表

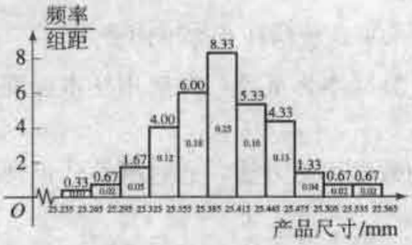
环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	出最小值是 25.24，它们的差为 $$25.56-25.24=0.32,$$ 所以极差等于 0.32. (2) 决定组距与组数. 样本数据有 100 个，可以把样本分为 8 ～ 12 组. 由上面算得极差为 0.32，取组距为 0.03，因为 $$\frac{极差}{组距}=\frac{0.32}{0.03}=10\frac{2}{3},$$ 于是将样本数据分成 11 组. (3) 决定分点. 将第一组的起点定为 25.235，组距为 0.03，这样所分的 11 个组是： 第 1 组：25.235 ～ 25.265 第 2 组：25.265 ～ 25.295 第 3 组：25.295 ～ 25.325 第 4 组：25.325 ～ 25.355 第 5 组：25.355 ～ 25.385 第 6 组：25.385 ～ 25.415 第 7 组：25.415 ～ 25.445 第 8 组：25.445 ～ 25.475 第 9 组：25.475 ～ 25.505 第 10 组：25.505 ～ 25.535 第 11 组：25.535 ～ 25.565 (4) 列频率分布表. 对落在各小组内数据的个数进行累计，这个累计数叫做各个小组的频数，各小组的频数除以样本容量，得各小组的频率. 求各小组频数的算法如下： S1　设 B_j 为落在第 j 个小组内的数据个数，且 B_j 的值等于 0($j=1, 2, \cdots, 11$)； S2　逐一判断 A_i($i=1, 2, \cdots, 100$) 落入哪一个小组，如果落入第 j 个小组，则让 B_j 的值增加 1.	师：找出教材 P183 练习 A 组第 1 题中数据的最大值、最小值. 极差等于什么？组距可定为多少？可分为几组？写出各组.	教师讲完前三个步骤后，让学生通过课后题目只练这三步，让学生及时参与到教学中来. 这样分步练习，可以有效防止学生因为整个题目冗长复杂而产生厌学情绪.

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>新
课</td>
<td>
频率分布表

<table>
<tr><th>分组</th><th>个数累计</th><th>频数</th><th>频率</th></tr>
<tr><td>25.235 ～ 25.265</td><td>1</td><td>1</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>25.265 ～ 25.295</td><td>2</td><td>2</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>25.295 ～ 25.325</td><td>5</td><td>5</td><td>0.05</td></tr>
<tr><td>25.325 ～ 25.355</td><td>12</td><td>12</td><td>0.12</td></tr>
<tr><td>25.355 ～ 25.385</td><td>18</td><td>18</td><td>0.18</td></tr>
<tr><td>25.385 ～ 25.415</td><td>25</td><td>25</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>25.415 ～ 25.445</td><td>16</td><td>16</td><td>0.16</td></tr>
<tr><td>25.445 ～ 25.475</td><td>13</td><td>13</td><td>0.13</td></tr>
<tr><td>25.475 ～ 25.505</td><td>4</td><td>4</td><td>0.04</td></tr>
<tr><td>25.505 ～ 25.535</td><td>2</td><td>2</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>25.535 ～ 25.565</td><td>2</td><td>2</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>合计</td><td>100</td><td>100</td><td>1.00</td></tr>
</table>

(5) 绘制频率分布直方图.

在直角坐标系中，用横轴表示产品尺寸，纵轴表示频率与组距的比值，得到频率分布直方图.



容易看出，小长方形面积 $=$ 组距 $\times \dfrac{频率}{组距} =$ 频率.

看图回答问题：

产品尺寸落在区间 25.385 ～ 25.415 内的占百分之多少？产品尺寸落在区间 25.355 ～ 25.415 内的占百分之多少？产品尺寸落在区间 25.325 ～ 25.475 内的占百分之多少？

用频率分布直方图能够很容易地表示大量数据，能非常直观地表明分布的状态，使我们能看到在频率分布表中看不出的原始数据信息．但是从频率
</td>
<td>师：试试列出教材 P183 练习 A 组第 1 题的频率分布表，画出频率分布直方图.

图中小长方形的面积等于什么？在频率分布直方图中，每个小矩形的面积等于什么？</td>
<td>将五个步骤分为两大段，小步走，学会一步再进行下一步.</td>
</tr>
</table>

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	分布直方图本身不能得出原始数据，也就是说，把数据表示成频率分布直方图后，原有的具体数据信息就被抹掉了.		
小结	绘制频率分布直方图的步骤： (1) 计算极差； (2) 决定组距与组数； (3) 决定分点； (4) 列频率分布表； (5) 绘制频率分布直方图.		总结绘图步骤，也是整节课的总结.
作业	教材P184练习A组第1，2题，练习B组第1，2题.		巩固知识.

10.3.3 用样本估计总体

【教学目标】

1. 理解样本平均数和总体平均数，会用样本平均数估计总体平均数.

2. 理解样本标准差的意义和作用，学会计算样本标准差，并能用样本标准差估计总体标准差.

3. 通过实例，让学生体会从特殊到一般的数学思想方法，通过感性认识帮助学生理解统计在社会生活中的重要作用.

【教学重点】

理解样本平均数、样本标准差的意义和作用，学会计算样本平均数和样本标准差.

【教学难点】

理解样本平均数及样本标准差的意义和作用.

【教学方法】

采用支架式教学方法. 教师提供研究的材料和问题，即向上攀登的支架，从学生的认知规律出发，通过大量实例，引导学生自主探索解决问题的方法，通过合作讨论互相学习，取长补短，并归纳总结成一般规律，使得原有的认知结构得到进一步补充和完善.

【教学过程】

环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	用随机抽样的方法从总体中抽取样本后，如何用样本来估计总体呢？怎样从大量的样本数据中得到有用的信息呢？	教师设疑，引出新课.	使学生产生疑问，增加学习兴趣.
新课	1. 用样本平均数估计总体平均数. 例 1　假设某人要去一家公司应聘，了解到这家公司 50 名员工的月工资数据如下(单位：元)： 800　800　800　800　800　1 000 1 000　1 000　1 000　1 000　1 000　1 000 1 000　1 000　1 000　1 000　1 200　1 200 1 200　1 200　1 200　1 200　1 200　1 200 1 200　1 200　1 200　1 200　1 200　1 200 1 200　1 200　1 200　1 200　1 200　1 200 1 500　1 500　1 500　1 500　1 500　1 500 1 500　2 000　2 000　2 000　2 000　2 000 2 500　2 500　2 500 问题 1：这 50 名员工的月平均工资数为多少？这个企业员工的月平均工资估计为多少呢？ 解　这 50 名员工的月平均工资为 $\dfrac{800+800+\cdots+2\ 500}{50}=1\ 320$(元). 由此可以估计这家大型企业员工的月平均工资为 1 320 元. 问题 2：再随机抽取 50 名员工的工资，计算所得的样本平均数与例 1 中的一定相同吗？ 分析　不一定. 用样本平均数估计总体平均数时，样本平均数只是总体平均数的近似值. 小结：平均数描述了数据的平均水平，定量地反映了数据的集中趋势所处的水平，样本平均数是估计总体的一个重要指标.	学生用计算器计算，简单叙述计算公式，并给出结果.	通过例 1 引出用样本的平均数估计总体平均数，让学生体会到统计在现代社会中的重要地位. 平均数是学生初中学过的知识，通过学生自己运算，加深记忆.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例2　从甲、乙两名学生中选拔一人参加射击比赛，对他们的射击水平进行了测试，两个人在相同条件下各射击10次，命中的环数如下： 甲：7 8 6 8 6 5 9 10 7 4 乙：9 5 7 8 7 6 8 6 7 7 (1) 计算甲、乙两人射击命中环数的平均数. 解：计算得$\overline{x}_甲=7$，$\overline{x}_乙=7$. (2) 比较两人的成绩，然后决定选择哪一人参赛. 这时仅通过平均数是无法看出来的，在数学上可以通过什么来区分呢？这就是我们下面要学习的估计总体的第二种方法：方差和标准差. 2. 用样本标准差估计总体标准差. 设样本的元素为x_1，x_2，…，x_n，样本的平均数为$\overline{x}$，定义 $s^2=\dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$， $s=\sqrt{\dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$， 其中$s^2$表示样本方差，$s$表示样本标准差. 样本方差描述了一组数据围绕平均数波动的大小，即数据的离散程度. 练习一 计算数据5，7，7，8，10，11的标准差. 由练习总结计算标准差的步骤： S1　算出样本数据的平均数；	学生自己计算. 学生记忆公式. 学生计算，教师引领学生根据公式分析求标准差的步骤.	通过例2让学生看出仅有平均数是无法全面反映数据的特征的，引出用样本标准差估计总体标准差，让学生认识到学习样本标准差的必要性. 样本方差和样本标准差是学生初中所学内容，可能有部分学生已经遗忘，可以直接给出公式，并留出时间让学生记忆. 先由简单的练习总结出求标准差的步骤，然后再解决例2中的选手参赛问题.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	S2　算出每个样本数据与样本平均数的差； S3　算出 S2 中每个数据的平方； S4　算出 S3 中平方数的平均数，即样本方差； S5　计算 S4 中平均数的算术平方根，即为样本标准差. 计算例 2 中两人射击环数的标准差，观察标准差的大小与总体稳定程度的关系. 计算得 $s_甲=1.73$，$s_乙=1.10$. 由此看出，乙的成绩比甲的成绩稳定一些，从成绩的稳定性考虑，可以选择乙参赛. 例 3　从某灯泡厂生产的一批灯泡中随机抽取 10 支进行寿命测试，得数据如下(单位：h)： 1 458　1 395　1 562　1 614　1 351 1 490　1 478　1 382　1 536　1 496 使用函数型计算器求样本平均数和样本标准差. 解　用计算器可算得 $\overline{x}=1\ 476.2$， $s=78.730\ 934\ 2$. 练习二 求 10.3.2 节从一批产品中抽取的 100 个钢管内径尺寸的样本标准差，并估计这批产品的标准差. 3. 样本标准差和频率分布直方图的关系 学生阅读教材 P189 的内容.	 例 3 在规定时间内学生独立解答.	 让学生通过实例感受方差和标准差的作用，体会两种方法的应用. 进一步巩固所学的平均数和方差的计算方法. 练习计算器的使用. 了解标准差的大小与总体稳定程度的关系.

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	本节主要知识： (1) 样本平均数的计算； (2) 用样本平均数估计总体平均数的方法； (3) 样本方差和样本标准差的计算； (4) 用样本标准差估计总体标准差的方法； (5) 样本频率直方图、样本平均数、样本标准差三种方法估计总体的差异.	复习和归纳已有知识，以达到新旧知识的融合.	归纳总结，培养由特殊到一般的数学思想.
作业	教材 P190 练习 A 组题，练习 B 组题.	学生根据自己的能力自选题目.	巩固知识.

10.3.4 一元线性回归

【教学目标】

1. 了解相关关系、回归分析、散点图、回归直线方程的概念.

2. 掌握散点图的画法，掌握回归直线方程的求解方法，会求回归直线方程.

3. 让学生参与回归直线的探求，结合身边的实例，发现散点图的线性特征，主动构建线性回归直线方程的模型.

【教学重点】

散点图的画法，回归直线方程的求解方法.

【教学难点】

回归直线方程的求解方法.

【教学方法】

这节课主要采取启发引导和讲练结合的教学方法. 通过创设情境、设置问题等手段对学生进行了启发、诱导，结合讨论法、讲授法组织学生自主探究. 然后结合例题及课后练习巩固求回归直线方程的步骤.

【教学过程】

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>导
入</td><td>1. 请说出正方形面积 S 与边长 x 之间的关系.
正方形边长 $x \xrightarrow{\text{确定的函数关系}}$ 面积：$S=x^2$.
2. 人的身高不能确定体重，但平均说来“身高者，体也重”．那么身高和体重具有什么关系？
身高和体重之间具有不确定的关系.
3. 类似的情况生活中还有：
(1) 商品销售收入与广告支出经费；
(2) 粮食产量与施肥量.</td><td>教师引导学生得出结论：两个变量之间除了函数关系外还有相关关系.</td><td>通过生活实例认识现实生活中存在大量的非确定性的相关关系.</td></tr>
<tr><td>新
课</td><td>1. 相关关系与函数关系的异同点
<table><tr><th></th><th>相关关系</th><th>函数关系</th></tr><tr><td>相同点</td><td colspan="2">均是指两个变量的关系</td></tr><tr><td rowspan="2">不同点</td><td>非确定的关系</td><td>确定的关系</td></tr><tr><td>两个随机变量的关系</td><td>两个非随机变量的关系</td></tr></table>
2. 一元回归分析
通常把研究两个变量间的相关关系叫做一元回归分析.

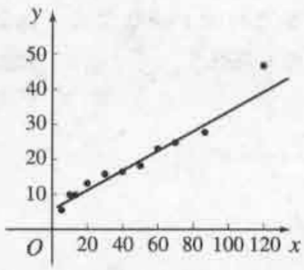
看下面的例子.
例 1　在某种产品表面进行腐蚀刻线试验，得到腐蚀深度 Y 与腐蚀时间 x 之间的一组观察值如下表：
<table><tr><td>x/s</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>90</td><td>120</td></tr><tr><td>$Y/\mu m$</td><td>6</td><td>10</td><td>10</td><td>13</td><td>16</td><td>17</td><td>19</td><td>23</td><td>25</td><td>29</td><td>46</td></tr></table>
由表中数据看出，Y 有随 x 增加而增加的趋势，但它们之间的这种关系无法用函数式准确表达，是一种相关关系.</td><td>教师用课件展示表格，学生讨论总结.

教师强调，我们只研究一元线性回归分析.

教师设置问题：(1) 表中各数据的变化趋势是什么？(2) 在直角坐标系内作出图象，观察图象有什么特点？
学生解答.</td><td>让学生对相关关系的概念从感性认识上升到理性思维.

用具体的例子来引入散点图和线性回归，学生比较容易理解.</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td rowspan="4">新
课</td><td>作出下图.


结论：表示具有相关关系的两个变量的一组数据的图形，叫做散点图.
所有散点大致分布在图中画出的一条直线附近.</td><td>教师指导学生用 excel 作图.</td><td>让学生体验信息技术在数学学习中的乐趣.</td></tr>
<tr><td>显然这样的直线还可以画出许多条，而我们希望找出其中的一条，它能最好地反映 x 与 Y 之间的关系，这条直线就叫回归直线，记此直线方程为
$$\hat{y}=a+bx. \quad ①$$
则①式叫做 Y 对 x 的回归方程，b 叫做回归系数. 而且</td><td>教师问如何才能确定回归直线方程.
学生回答，只要确定 a 与回归系数 b.</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} \\ \quad =\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ a=\overline{y}-b\overline{x} \end{cases} \quad ②$$</td><td>学生记忆公式.</td><td>公式的推导较复杂，故让学生直接记忆.</td></tr>
<tr><td>下面用公式②来求例 1 中，腐蚀深度 Y 对腐蚀时间 x 的回归直线方程.
<table><tr><th>序号</th><th>x</th><th>y</th><th>x^2</th><th>y^2</th><th>xy</th></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>25</td><td>36</td><td>30</td></tr><tr><td>2</td><td>10</td><td>10</td><td>100</td><td>100</td><td>100</td></tr><tr><td>3</td><td>15</td><td>10</td><td>225</td><td>100</td><td>150</td></tr><tr><td>4</td><td>20</td><td>13</td><td>400</td><td>169</td><td>260</td></tr><tr><td>5</td><td>30</td><td>16</td><td>900</td><td>256</td><td>480</td></tr></table></td><td>教师列出表格.
学生完成计算.</td><td>让学生在计算过程中树立严谨的科学态度.</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>新
课</td>
<td>
续表
<table>
<tr><td>6</td><td>40</td><td>17</td><td>1 600</td><td>289</td><td>680</td></tr>
<tr><td>7</td><td>50</td><td>19</td><td>2 500</td><td>361</td><td>950</td></tr>
<tr><td>8</td><td>60</td><td>53</td><td>3 600</td><td>529</td><td>1 380</td></tr>
<tr><td>9</td><td>70</td><td>25</td><td>4 900</td><td>625</td><td>1 750</td></tr>
<tr><td>10</td><td>90</td><td>29</td><td>8 100</td><td>841</td><td>2 610</td></tr>
<tr><td>11</td><td>120</td><td>46</td><td>1 400</td><td>2 116</td><td>5 520</td></tr>
<tr><td>$\sum$</td><td>510</td><td>214</td><td>36 750</td><td>5 422</td><td>13 910</td></tr>
</table>
由上表算得，x 的平均数为$\frac{510}{11}$，y 的平均数为$\frac{214}{11}$，代入公式②得
$b \approx 0.304\ 336$，$a \approx 5.34$.
即所求回归直线方程为
$\hat{y} = 0.304x + 5.34$.
这里回归系数 $b = 0.304$ 的意义是：腐蚀时间 x 每增加一个单位，深度 Y 平均增加 0.304 个单位.

例 2　设对变量 x，Y 有观察数据：
<table>
<tr><td>x</td><td>151</td><td>152</td><td>153</td><td>154</td><td>156</td><td>157</td><td>158</td><td>160</td><td>160</td><td>162</td><td>163</td><td>164</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>40</td><td>41</td><td>41</td><td>41.5</td><td>42</td><td>42.5</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>45</td><td>46</td><td>45.5</td></tr>
</table>
使用函数型计算器求 Y 对 x 的回归直线方程.（结果保留到小数点后三位数字）
解：按教材 P193 页所示步骤可得
$a \approx -27.759$，$b \approx 0.450$.
所以 Y 对 x 的回归直线方程为
$\hat{y} = 0.450x - 27.759$.
特别指出：
应用回归直线方程可以把非确定性问题转化成确定性问题，把“无序”变为“有序”，并对情况进行估测、补充．因此，应用回归直线方程可解决相关的实际问题．
</td>
<td>教师指导学生使用计算器求回归直线方程.

教师给出总结，帮助学生构建新知识．</td>
<td>通过例 2 体现使用计算器处理的优越性.

使学生认识学习回归直线方程的意义．</td>
</tr>
</table>

续表

环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	求回归直线方程的步骤： (1) 计算平均数$\overline{x}$，$\overline{y}$； (2) 计算x_i与y_i的积，求$\sum x_iy_i$； (3) 计算$\sum x_i^2$； (4) 将结果代入公式求b； (5) 用$a=\overline{y}-b\overline{x}$求$a$； (6) 写出回归方程．	教师引导学生一起回顾求回归直线方程的步骤．	
作业	教材P193练习A组题．		

Ⅳ 测 验 题

1. 填空题

(1) 一班有三好学生5人，二班有三好学生4人，三班有三好学生6人，从这三个班中选出一名三好学生出席表彰会，有______种不同的选法；若从这三个班中各选一名三好学生出席表彰会，共有______种不同的选法.

(2) 在同一平面内有7个点，其中有5个点在同一条直线上，此外无三点共线．由这7个点可以连出不同的直线______条.

(3) 从1，2，3，4，5五个数字中任取两个数，它们都是奇数的概率是______.

(4) 某工人师傅欲用系统抽样的方法将1 503个机器零件(编号为0001 ~ 1503)中抽取35个零件，在确定分段时，要使分段的间隔数最大，则至少应从总体中删除零件的个数是______，此时分段的间隔数是______.

(5) 从含2件次品的100件产品中任取5件，观察其中的次品数，这个随机试验的样本空间为$\Omega=$______.

(6) 袋中有10个球，其中6个是黑球，4个是白球，任取2个，这两个球颜色不相同的概率是______.

(7) 某个工厂中共有职工3 000人，其中中、青、老年职工的比例为5∶3∶2，要用分层抽样的方法从所有职工中抽出一个样本容量为400人的样本，则中、青、老年职工应分别抽取的人数为______、______、______.

2. 选择题

(1) 一个口袋中有5个不同的白球，3个不同的黑球，2个不同的红球，从中任取一个球，共有不同的取法种数为(　　).

(A)10 (B)30 (C)5 (D)3

(2) 由数字 1，2，3，4 能组成数字允许重复的三位数的个数为(　　).

(A)12 (B)24 (C)81 (D)64

(3) 下列事件中，为不可能事件的是(　　).

(A) 三角形的内角和是 180°

(B) 三角形中大边所对的角大，小边所对的角小

(C) 锐角三角形中两个内角的和小于第三个角

(D) 三角形中任意两边的和大于第三边

(4) 在简单随机抽样中，某一个物体被抽到的可能性(　　).

(A) 与第几次抽样有关，第一次抽到的可能性大一些

(B) 与第几次抽样无关，每次抽到的可能性都相等

(C) 与第几次抽样有关，最后一次抽到的可能性要大些

(D) 与第几次抽样无关，每次都是等可能的抽取，但各次抽取的可能性不一定

(5) 某单位有老年人 28 人、中年人 54 人、青年人 81 人，为了调查他们身体状况的某项指标，需从中抽取一个容量为 36 的样本，适合抽取样本的方法是(　　).

(A) 简单随机抽样 (B) 系统抽样

(C) 分层抽样 (D) 先从老年人中排除一人，然后分层抽样

(6) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$，其中 a，b，$c\in\{0,1,2,3,4,5\}$，由此可以得到不同的二次函数的个数为(　　).

(A)180 (B)216 (C)120 (D)18

(7) 下列抽样问题中，最适合用分层抽样法抽样的是(　　).

(A) 从全班 48 名学生中随机抽取 8 人参加一项活动

(B) 一个城市有 210 家百货商店，其中大型商店 20 家，中型商店 40 家，小型商店 150 家，为了掌握各商店的营业情况，要从中抽取一个容量为 21 的样本

(C) 从参加模拟考试的 1 200 名高中生中随机抽取 100 人分析试题作答情况

(D) 从参加模拟考试的 1 200 名高中生中随机抽取 10 人了解某些情况

3. 为了解加工某种零件的工时定额，随机地测得 12 个工人的加工工时，数据(分钟)如下：

9.0 7.8 8.2 10.5 7.5 8.8 10.0 9.4 8.5 9.5 8.4 9.8

求加工工时的平均值和标准差.

4. 某职业学院对三个班的新生进行摸底考试，从每班各抽 10 名学生，他们的数学成绩如下表所示.

甲	85	75	80	82	78	70	66	72	75	74
乙	85	95	78	92	56	60	58	90	82	63
丙	75	65	70	52	60	68	78	62	56	42

请据此判断哪一个班学生的数学成绩比较稳定.

5. 一个地区共有 5 个乡镇，人口 60 000 人，各乡镇的人口比例为 2∶3∶5∶2∶3. 要从 60 000 人中抽取 600 人进行肝炎发病分析，已知肝炎与不同地理位置与水土有关，问应该采用什么样的抽样方法，并写出具体方法.

6. 某种合成纤维的强度 y 与其拉伸倍数 x 有关. 下表是 10 个纤维样品的强度与相应的拉伸倍数的实测记录.

拉伸倍数 x_i	2.0	2.1	2.7	3.5	4.0	5.0	6.5	7.1	8.0	9.0
强度 y_i/μPa	13	18	25	30	40	55	60	55	70	80

(1) 画出表中数据的散点图；

(2) 求 y 对 x 的回归直线方程；

(3) 试预测拉伸倍数为 7.5 时，纤维的强度为多少？

测验题答案

1. (1)15，120；(2)12；(3) $\frac{3}{10}$；(4)33，42；(5){0，1，2}；(6) $\frac{8}{15}$；(7)200，120，80.

2. (1)A；(2)D；(3)C (4)B (5)D (6)A (7)B

3. 8.95；0.88.

4. 因为 $s_{甲}^2=29.41$，$s_{乙}^2=208.29$，$s_{丙}^2=106.76$，$s_{乙}^2>s_{丙}^2>s_{甲}^2$.

所以甲班的学生的数学成绩比较稳定.

5. 因为肝炎与地理位置与水土均有关系，因而不同的乡镇的发病情况差异明显，因而应采用分层抽样方法，具体步骤为：

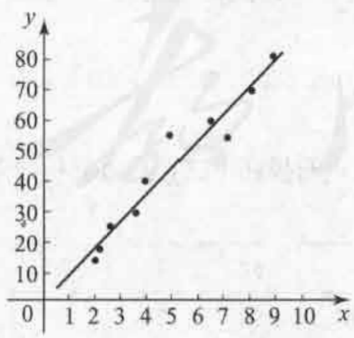
(1) 将 60 000 人分成 5 层，其中一个乡镇一层；

(2) 按照样本容量与总体容量的比例及各乡镇的人口比例随机抽取各乡镇应抽取的样本，因为总体个数为 60 000，样本容量为 600，故比例为 100∶1，这 5 个乡镇人口数依次是 8 000，12 000，20 000，8 000，12 000. 通过计算，易知各乡镇应抽取的样本数分别为 80，120，200，80，120 个.

6. (1) 以表中的 10 对数据(x_i，y_i)为坐标，即

$$(2.0，13)，(2.1，18)，\cdots，(9.0，80)，$$

在坐标系中描点，得散点图，如图所示.



(2) 因为 $n=10$，$\overline{x}=4.99$，$\overline{y}=44.6$，$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=306.61$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=2\,731.8$，所以

$$b=\frac{2\,731.8-10\times4.99\times44.6}{306.61-10\times4.99^2}=8.8,$$

$$a=44.6-8.8\times4.99=0.7.$$

于是得到该种合成纤维的强度 y 与其拉伸倍数 x 的回归直线方程

$$\hat{y}=0.7+8.8x.$$

(3) 根据上面求得的回归直线方程．当拉伸倍数为 7.5 时，

$$\hat{y}=0.7+8.8x=0.7+8.8\times7.5=66.7(\mu\text{Pa}).$$

所以当拉伸倍数为 7.5 时，预测该种合成纤维的强度为 66.7 μPa.

V 习题答案、提示和解答

习题(第 165 页)

1. $5+4=9$.

2. $2+2+3=7$.

3. $3\times4\times5=60$.

4. $2\times3+4\times2=14$.

5. (1)$5+4=9$；　　(2)$5\times4=20$.

习题(第 172 页)

1. 设 a_1，a_2 为正品，b 为次品．从中任取两件，样本空间为 $\{a_1a_2，a_1b，a_2b\}$，共有 3 个基本事件，且它们的发生是等可能的．“恰好有一件次品”包含 a_1b，a_2b 两个基本事件，所以“恰有一件次品”的概率为 $\frac{2}{3}$．这个结果和例 4 中的“不放回地连续取两次，取出的两件中恰有一件次品”的概率相等．

2. $\frac{3}{10}$.

3. $\frac{3}{10}$.

4. $\frac{28}{45}$.

5. 两枚都是正面的概率为 $\frac{1}{4}$，“一正一反”的概率为 $\frac{1}{2}$.

6. 乙的根据是概率的性质：$0\leqslant P(A)\leqslant1$.

7. (1) $\frac{1}{6}$；　　(2) $\frac{5}{12}$；　　(3) $\frac{1}{12}$；　　(4)7.

8. (1) 击中靶心的频率分别是 0.8，0.95，0.88，0.92，0.89，0.91；

(2) 击中靶心的概率约是 0.9.

练习 A 组(第 177 页)

1. 一般地，从元素个数为 N 的总体中不放回地抽取容量为 n 的样本，如果每一次抽取时总体中的各个个体有相同的可能性被抽到，这种抽样方法叫做简单随机抽样．

2. 作一般"调查"最好是对每一个个体逐一进行"调查"，但这样做有时费时、费力，有时根本无法实现．一个行之有效的办法就是在每一个个体被抽取的机会均等的前提下从总体中抽取部分个体，进行抽样调查．

3. 略．

练习 B 组(第 177 页)

1. 036，136，236，336，436，536，636，736，836，936.

2. 随机数表法：(用课本中的随机数表)

(1) 将 730 户居民编号为 001，002，…，730；

(2) 给出的随机数表是 5 个数一组，使用各个 5 位数组的后 3 位，从各个数组中任选后 3 位小于或等于 730 的数作为起始号码，如从第 2 行的第 6 组数开始，取出 640 作为 25 户中的第 1 个代号．

(3) 继续向右读，每组后 3 位符合要求的数取出，和已取出重复的跳过，到行末转下一行从左向右继续读，得数据：640，328，195，699，620，613，364，659，526，236，063，398，246，529，168，299，402，378，201，114，048，491，529，155，410，编号为以上所选的 25 个号码的居户被选中．

3. 略．

练习 A 组(第 178 页)

1. 将总体分成均衡的若干部分，然后按照预先制定的规则，从每一部分抽取一个个体，得到需要的样本，这种抽样叫做系统抽样．它的优点是适用于总体容量比较大、抽取的样本容量也比较大的抽样．

2. 按编号顺序分成 9 组，每组 100 个号，先在第 1 组用简单随机抽样方式抽出 $k(1\leqslant k\leqslant 100)$ 号，其余的 $k+100n(n=1,2,\cdots,8)$ 号也被抽到，即可得所需样本．

练习 B 组(第 178 页)

1. 采用随机方式将 1 563 件产品从 0001 至 1563 编号，借用简单随机抽样法从中剔除 3 件产品；将剔除后的 1 560 件产品从 0001 至 1560 重新随机编号，按编号顺序分成 15 组，每组 104 件；先在第 1 组中用简单随机抽样方式抽出 $k(1\leqslant k\leqslant 104)$ 号，其余的 $k+104n(n=1,2,\cdots,14)$ 号也被抽到，即可得所需样本．

2. 略．

练习 A 组(第 179 页)

1. 喜欢数学的抽取 15 人，不喜欢数学的抽取 20 人，介于二者之间的抽取 15 人.

2. 不到 35 岁的抽取 25 人，35～49 岁的抽取 56 人，50 岁以上的抽取 19 人.

3. 文科学生抽取 67 名，理科学生抽取 106 名，其余科学生抽取 27 名．

练习 B 组(第 179 页)

东城区、西城区、南城区、北城区分别抽取的人数为 12，23，19，6.

练习 A 组(第 183 页)

1. 频率分布表：

分组	频数	频率
651～711	1	0.02
711～771	0	0.00
771～831	4	0.08

续表

分　组	频　数	频　率
831～891	10	0.20
891～951	21	0.42
951～1 011	9	0.18
1 011～1 071	3	0.06
1 071～1 131	2	0.04
合　计	50	1.00

频率分布直方图略.

2. 频率分布表：

分　组	频　数	频　率
151～156	1	0.012 5
156～161	3	0.037 5
161～166	10	0.125 0
166～171	12	0.150 0
171～176	23	0.287 5
176～181	16	0.200 0
181～186	6	0.075 0
186～191	6	0.075 0
191～196	3	0.037 5
合　计	80	1.000 0

频率分布直方图略.

练习 B 组(第 184 页)

1. 频率分布表：

分　组	频　数	频　率
483～489	5	0.10
489～495	12	0.24
495～501	17	0.34
501～507	9	0.18
507～513	5	0.10
513～519	2	0.04
合　计	50	1.00

频率分布直方图略.

2. (1) 频率分布表：

分　组	频　数	频　率
[22.7，25.7]	6	0.06
[25.7，28.7]	16	0.16
[28.7，31.7]	18	0.18
[31.7，34.7]	22	0.22
[34.7，37.7]	20	0.20
[37.7，40.7]	10	0.10
[40.7，43.7)	8	0.08
合　计	100	1.00

(2) 略.

练习 A 组(第 190 页)

1. 糖的平均质量为 99.92 kg；标准差为 1.13. 估计包装好的这批糖的平均质量为 99.92 kg；标准差为 1.13.

2. 这 5 只节日彩灯的平均使用寿命为 1 274.8 h，使用寿命的标准差为 171.4；估计这种节日彩灯的平均使用寿命为 1 274.8 h，使用寿命的标准差为 171.4.

练习 B 组(第 190 页)

1. 估计该厂生产的滚珠直径的平均数为 14.925，标准差为 0.156.

2. 样本的平均数为 22.351，标准差为 0.017.

练习 A 组(第 193 页)

$\hat{y}=1.44x-15.84$.

练习 B 组(第 194 页)

$\hat{y}=3.474x+0.89$.

习题(第 194 页)

1. (1) 频率分布表：

分　组	频　数	频　率
157 ~ 162	4	0.08
162 ~ 167	11	0.22
167 ~ 172	11	0.22
172 ~ 177	18	0.36
177 ~ 182	6	0.12
合　计	50	1.00

频率分布直方图略；

(2) 样本的平均值为 170.1，标准差为 5.6；

(3) $\overline{x}=170.1$，$s=5.6$，落入区间(164.5，175.7) 的数据有 36 个.

2. (1) 频率分布表：

分　组	频　数	频　率
25 ~ 85	11	0.183 333
85 ~ 145	5	0.083 333
145 ~ 205	5	0.083 333
205 ~ 265	8	0.133 333
265 ~ 325	13	0.216 667
325 ~ 385	18	0.300 000
合　计	60	1.000 000

频率分布直方图略；

(2) 样本的平均值为 238，标准差为 113.941 8.

(3) 数据全部落入$(\overline{x}-2s,\ \overline{x}+2s)$.

3. 运动员成绩的平均数为 1.69 m.

4. 甲、乙两名运动员成绩的样本标准差分别为 0.104，0.156；甲运动员的成绩比较稳定.

5. 样本方差为 3.8，样本标准差为 1.95.

6. 平均数为$\overline{x}+\overline{y}$，因为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\overline{x}+\overline{y}$.

7. $\hat{y}=0.007\ 6x+2.482$.