中等职业教育课程改革国家规划新教材
全国中等职业教育教材审定委员会审定

数学

（基础模块）下册

人民教育出版社 课程教材研究所
职业教育课程教材研究开发中心 编著

审定专家：丁百平 刘春佳

人民教育出版社

顾　　问：丁尔陞
主　　编：房艮孙
本册主编：龙正武　孙超英
编　　者：宁卫平　王旭刚　叶思义　龙正武　孙明红　隋　军
责任编辑：龙正武
审　　读：高尚华　王存志

图书在版编目（CIP）数据

数学：基础模块. 下册 / 人民教育出版社，课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心编著. —北京：人民教育出版社，2009.12（2019.8重印）
中等职业教育课程改革国家规划新教材
ISBN 978-7-107-22032-6

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①人…　②课…　Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教材　Ⅳ. ①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 037385 号

中等职业教育课程改革国家规划新教材　数学（基础模块）下册

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　北京天宇星印刷厂
版　　次　2009 年 12 月第 1 版
印　　次　2019 年 8 月第 35 次印刷
开　　本　787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张　13
字　　数　220 千字
定　　价　26.00 元

出版说明

为贯彻《国务院关于大力发展职业教育的决定》(国发〔2005〕35号)精神，落实《教育部关于进一步深化中等职业教育教学改革的若干意见》(教职成〔2008〕8号)关于“加强中等职业教育教材建设，保证教学资源基本质量”的要求，确保新一轮中等职业教育教学改革顺利进行，全面提高教育教学质量，保证高质量教材进课堂，教育部对中等职业学校德育课、文化基础课等必修课程和部分大类专业基础课教材进行了统一规划并组织编写，从2009年秋季学期起，国家规划新教材将陆续提供给全国中等职业学校选用.

国家规划新教材是根据教育部最新发布的德育课程、文化基础课程和部分大类专业基础课程的教学大纲编写，并经全国中等职业教育教材审定委员会审定通过的. 新教材紧紧围绕中等职业教育的培养目标，遵循职业教育教学规律，从满足经济社会发展对高素质劳动者和技能型人才的需要出发，在课程结构、教学内容、教学方法等方面进行了新的探索与改革创新，对于提高新时期中等职业学校学生的思想道德水平、科学文化素养和职业能力，促进中等职业教育深化教学改革，提高教育教学质量将起到积极的推动作用.

希望各地、各中等职业学校积极推广和选用国家规划新教材，并在使用过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高.

教育部职业教育与成人教育司

2009年5月

前 言

根据教育部对中等职业学校德育课、文化基础课等必修课程和部分大类专业基础课教材的统一规划，教育部课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心组织对职业数学教育有深入研究的专家学者、中等职业学校的数学教研员和一线数学教师，依据教育部“以科学发展观为指导，实现中等职业教育快速健康发展”的精神和“以就业为导向，推进职业教育的改革发展”的要求，并结合中等职业学校学生学习的实际编写了这套文化基础课程数学教材．本套教材经全国中等职业教育教材审定委员会审定通过，列为中等职业教育课程改革国家规划新教材．

本套教材共分为三个模块：基础模块（上册、下册），职业模块（理工类、服务类），拓展模块．本套教材从 2009 年秋季起供全国三年制各类中等职业学校选用．

一、教材编写的指导思想

认真贯彻《国务院关于大力发展职业教育的决定》，落实教育部职成司关于中等职业学校文化课改革的各项精神．

1．履行“以就业为导向，以学生发展为本”的职业教育思想，突出培养学生的就业能力、生活能力和生产实践能力．教材力求体现对于中职学生适度、够用的数学知识，使他们在学习后能够更好地就业与发展．

2．改革传统数学课程逻辑推理的思想体系，贯彻“学以致用”的思想，全书采用问题—算法操作步骤及案例教学的模式编写，给出解决一类问题的基本操作步骤，学生在学习后即可通过模仿、操作解题．

3．做好与九年义务教育衔接，温故知新、深入浅出．

4．每章内容层次分明，加强基础、增加拓展．

二、教材编写的原则

1．深入贯彻教育部以“就业为导向”的中等职业教育改革的指导思想．

2．突出基本数学方法和算法操作步骤的教育．

3．为其他文化课程和专业课程的学习打好数学基础．

4．注意引入现代计算技术来改进教学．

5．严格执行国家有关的技术标准和规定．

三、编写结构与学时说明

1．本套教材由基础模块、职业模块和拓展模块构成．基础模块为必修内容，采用代数、分析和几何混合统一编写以加强知识之间的联系．职业模块分为理工类分册（涵盖制造业、运输业等理工科类专业）和服务类分册（涵盖现代服务业、物流业、电子信息技术等服务类专业）．拓展模块全一册，供对数学有较高要求的专业或需要

进入高一级职业院校的学生选用．教材各册内容包括：

基础模块上册：集合，不等式，函数，指数函数和对数函数，三角函数，合计 60 学时；

基础模块下册：数列，平面向量，直线和圆的方程，立体几何，概率与统计初步，合计 68 学时；

职业模块理工类：三角计算及其应用，坐标变换与参数方程，复数及其应用，数据表格信息处理，逻辑代数初步，合计 64 学时，可根据专业需要选择 32～64 学时的内容进行教学；

职业模块服务类：算法与程序框图，逻辑代数初步，数据表格与信息处理，编制计划的原理与方法，线性规划初步，合计 64 学时，可根据专业需要选择 32～64 学时的内容进行教学；

拓展模块：三角公式及其应用，椭圆、双曲线、抛物线，概率与统计，合计 32 学时．

2．本套教材每章分为问题、例题、练习 A 组、练习 B 组、习题、复习与提问、阅读材料等进行编写．并设置了思考与讨论、探索与研究、知识延伸、计算机上的练习等栏目．

这套教材是在原职业高中数学教材和中等职业教育国家规划数学教材的基础上编写的．在编写过程中，得到了教育部课程教材研究所高存明研究员的细心指导和热情鼓励，他还帮助审读了全书，并对教材提出了很多建设性的意见和很好的修改思路．我们向他表示衷心的感谢．

教育部特邀丁百平、刘春佳（按姓氏笔画排序）两位专家对本套教材进行了细致的审查．他们对教材作出了积极的评价，认为本套教材："语言简明、流畅""提示解题步骤，有利于学生掌握""有利于分层教学"；"注重数学知识的科学性、严谨性、拓展性""有利于培养学生的数学思维能力""配有的电子教材完整，利于课堂教学的直观呈现"．同时又对教材提出了很多中肯的意见，我们向他们表示深深的谢意．

由于编者水平限制，本书难免存在不少缺点和错误，诚恳希望教师和同学们以及数学教学研究人员批评指正，以便进一步修改与完善这套教材．

通信地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼

邮　　编：100081

联系电话：010-58758523/32

电子邮箱：wangxg@pep.com.cn，longzw@pep.com.cn

职业教育课程教材研究开发中心

2009 年 5 月

编者寄语

数学是科学的大门钥匙，忽视数学必将伤害所有的知识，因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的．更为严重的是，忽视数学的人不能理解他自己这一疏忽，最终将导致无法寻求任何补救的措施．

——英国哲学家 弗兰西斯·培根（Francis Bacon）

你知道吗？数学作为一门课程进入学校，这在两千多年以前就开始了，而且现在全世界最普遍开设的课程就是数学！

人们之所以如此重视数学，一个很重要的原因是数学的应用非常广泛．实际上，不论是机械制造、交通运输、经济金融、电子技术等行业，还是新兴的现代服务、信息技术、物流等行业，都离不开数学，数学已渗透到社会生活的各个方面．另外，数学是人类文化的重要组成部分，是人类思维训练的主要工具，是提高学习能力的重要手段，数学素质已成为公民素质的一个重要组成部分．

不过，有些人可能认为，数学就只是算数，只要学会加减乘除就可以了，其他的都没用；另外，还有人觉得数学很难，学不会．其实，这些很可能只是一种误解．力图减少这些误解是我们这套数学教材要达到的目标之一．

本教材的主要特点有：

1．降低起点、化解难点

有些同学可能会担心自己的数学基础不好．在编写时，编者特别注意了这一点．例如，在讲授新的内容之前，都力图先复习以前的有关知识，降低知识的起点．这样一来，就算以前学过的东西已经不太记得了，也能查漏补缺，顺利地进行相关知识的学习．

在呈现知识时，对于比较难的内容，教材力图从各个方面去阐述，将难点化解掉．例如，既强调从直观上去理解，也强调通过实例去阐述，适当地降低了抽象化和形式化的要求，注意利用各种素材帮助同学们理解相关知识，从而帮助同学们更好、更快地理解知识的本质．

2．贴近实际、贴近生活

教材内容处处从实际出发，先从实际问题引出相关内容，然后利用实际例子讲解有关知识，并特别注意了数学在社会实践中的应用，从而提高同学们学习数学的兴趣，让同学们感觉到数学绝不只是算算数，而是在日常生产生活中有广泛的应用．

3. 呈现方式多样

在编写时，我们在遵循同学们的认知规律方面花了很大的力气，做到了采用多种形式，图文并茂、生动有趣地呈现知识. 比如，精心制作了多媒体课件帮助大家学习，设置了“思考与讨论”“探索与研究”“计算机上的练习”等栏目，来帮助同学们理解数学. 我们相信，只要同学们认真努力，就一定能够读懂这套教材，进而喜欢上数学!

4. 具有一定的弹性

教材兼顾了不同学生的需要. 例如，设置了“知识延伸”栏目，以供有兴趣的学生对知识做进一步的探讨，而这些内容就算略去不学也不会影响知识的完整性，给同学们提供了选择的空间.

总之，本教材力图利用各种形式激发同学们学习数学的兴趣，让大家深深地体会到学习数学是不难的，学习数学是有用的!

同学们，我们的国家正处于快速发展阶段，各行各业都离不开数学，而你们正处于接受数学基本训练、打好数学基础的黄金时期，在这一时期下一番功夫，学好数学，一定能为将来建设祖国做好准备，为实现你们的人生理想打下基础. 学好数学肯定会使你们受益终生!

尽管我们在编写教材时，做了很大的努力，希望帮助同学们学好数学. 但数学毕竟是比较抽象的，要想感悟数学的美与理，自己不下一番功夫是不行的. 预祝同学们学好数学，使数学成为你们人生拼搏的一把利剑.

由于时间仓促，教材中一定会有一些不妥之处，恳请广大师生多提宝贵意见和建议，这些都是对我们工作的极大支持，并将鼓励我们继续努力，不断完善，精益求精!

编　者

2009 年 5 月

目 录

第六章 数 列

6.1 数列的概念

6.2 等差数列

6.3 等比数列

6.4 数列的应用

在某次知识抢答比赛中，出现了这样一道题：观察

1，3，9，27，(　　)，243，

依照规律，说出括号中应该填什么数．你能快速地解答此题吗？

剧场的座位一般是排成圆弧形的，如下图所示．

小张所在的公司要为某剧场定做椅子，已知这个剧场座位的排列规律是：第一排 36 个，以后每一排比前一排多 3 个，共有 7 排．

为了估算这批椅子的成本，小张需要算出这个剧场总共有多少个座位．当然，他可以将这 7 排座位一一列出来，即

36，39，42，45，48，51，54，

然后再逐个相加．但是，有没有更加快捷的算法呢？毕竟，如果座位的排数很多的话，一一列举是非常费时间的，而且容易出错．

以上这两个问题，都跟我们这一章要学习的数列有关．在学完这一章以后，类似的问题你将很快就能解决．

简单地来讲，数列就是一列有顺序的数，数列讨论的是这些数彼此之间的关系以及变化规律．本章我们将首先讨论数列的概念，然后在此基础上研究常见的等差数列和等比数列的性质，最后讨论数列的应用．

6.1 数列的概念

6.1.1 数列的定义

牛年邮票

问题 我国有用十二生肖纪年的习俗，每年都用一种动物来命名，12 年轮回一次. 2009 年（农历己丑年）是 21 世纪的第一个牛年，请列出 21 世纪所有牛年的年份.

解 由于 12 年就轮回一次，所以 21 世纪的第二个牛年的年份是

$$2\,009+12=2\,021,$$

21 世纪的第三个牛年的年份是

$$2\,009+12\times 2=2\,033,$$

……

21 世纪的第八个牛年的年份是

$$2\,009+12\times 7=2\,093.$$

把 21 世纪所有牛年的年份排成一列，得到

$$2\,009,\ 2\,021,\ 2\,033,\ 2\,045,\ 2\,057,\ 2\,069,\ 2\,081,\ 2\,093. \quad ①$$

像①这样按一定次序排列的一列数，叫做**数列**. 在数列中的每一个数叫做这个数列的**项**，各项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项）、第 2 项……第 n 项. 比如，2 009 是数列①的第 1 项，2 093 是数列①的第 8 项.

我们还可举出一些数列的例子. 例如，大于 3 且小于 11 的自然数排成一列

$$4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10; \quad ②$$

正整数的倒数排成一列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots; \quad ③$$

$\sqrt{2}$ 精确到 1，0.1，0.01，0.001，…的近似值排成一列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots; \quad ④$$

-1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，…排成一列

$$-1, 1, -1, 1, -1, \cdots; \quad ⑤$$

无穷多个 2 排成一列

$$2, 2, 2, 2, \cdots; \quad ⑥$$

这些都是数列.

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**. 例如，上面的数列①②是有穷数列，数列③④⑤⑥是无穷数列.

探索与研究

使用计算器或计算机产生一列数：

(1) 用函数型计算器随机地产生一列数；

(2) 用电子工作表任意产生一列数；

(3) 用电子工作表产生一列数：21 世纪中所有虎年的年份.

思考与讨论

你能用电子工作表产生一个无穷数列吗？

练习

A 组

1. 已知数列 $\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{15}$，…，则 $3\sqrt{3}$ 是它的第____项.

2. 已知数列 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}, \cdots$，那么它的第 10 项为（　）.

(A) -1　　(B) 1　　(C) $-\frac{1}{10}$　　(D) $\frac{1}{10}$

B 组

试用电子工作表解答 A 组中的问题.

6.1.2 数列的通项

数列从第 1 项开始，按顺序与正整数对应. 所以数列的一般形式可以写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项，叫做**数列的通项**，n 叫做 a_n 的序号，并且整个数列可记作 $\{a_n\}$.

如果 a_n（$n=1, 2, 3, \cdots$）与 n 之间的关系可用

$$a_n = f(n)$$

来表示，那么这个关系式叫做这个数列的**通项公式**，其中 n 的所有取值是正整数集的一个子集. 由此可知，数列的通项可以看成以正整数集的子集为定义域的函数.

> 结合课件 601，学习数列的通项公式.

例如，数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 可记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，其通项公式为

$$a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}_+.$$

如果数列通项的定义域是正整数集，定义域通常略去不写. 如果已知一个数列的通项公式，则可依次用限定的正整数 1，2，3，…去代替公式中的 n，就可求出数列中的各项.

例1 根据通项公式，求出下面数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项：

(1) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$；　　　　(2) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

解 (1) 在通项公式中依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$，得到数列的前 5 项为

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$，得到数列的前 5 项为

$$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5.$$

例2 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 1，3，5，7；

(2) $\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$；

(3) $-\frac{1}{1\times2}$，$\frac{1}{2\times3}$，$-\frac{1}{3\times4}$，$\frac{1}{4\times5}$.

解 (1) 数列的前 4 项 1，3，5，7 都是序号的 2 倍减 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=2n-1;$$

(2) 数列前 4 项$\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$的分母都等于序号加 1，分子都等于分母的平方减 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列的前 4 项$-\frac{1}{1\times2}$，$\frac{1}{2\times3}$，$-\frac{1}{3\times4}$，$\frac{1}{4\times5}$的绝对值都等于序号与序号加上 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

例3 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 1，以后各项由公式

$$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}\quad(n\geqslant2)$$

给出，写出这个数列的前 5 项.

解 $a_1=1$,

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}.$$

递推公式在计算机科学中是非常有用的，因为计算机利用递推来计算时可有效地减少运算次数.

例 3 中的数列表达式，表达的是任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} 之间的关系（其中 $n\geqslant2$）. 这样的关系式叫做数列的**递推公式**. 如果给出数列的第 1 项或前几项，由数列的递推公式同样可给出整个数列，它是给出数列的另一种方法.

探索与研究

使用电子工作表解答上面的例 1 和例 3.

练习

A 组

1. 一个数列的前 4 项分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{8}$，…，则它的一个通项公式是__________.

2. 已知数列 $a_n=n^2-2n+3$，则 $a_{10}=$ __________.

B 组

1. 数列 $\frac{2^3-1}{2}$，$\frac{3^3-1}{3}$，$\frac{4^3-1}{4}$，$\frac{5^3-1}{5}$，…的一个通项公式是（　　）.

(A) $a_n=\frac{n(n^2-1)}{n+1}$　　(B) $a_n=\frac{n(n^2+1)}{n}$

(C) $a_n=\frac{n(n^2+3n+3)}{n+1}$　　(D) $a_n=\frac{n(n^2+2)}{n}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1\,981$，且 $a_n=a_{n-1}+12$，$n\geqslant2$，写出这个数列的前 5 项.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=2\,009$，且 $a_n=a_{n-1}+7$，$n\geqslant2$. 求 a_1.

习 题

1. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n = n^3$；　　(2) $a_n = 5(-1)^{n+1}$.

2. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的第 7 项和第 10 项：

(1) $a_n = \frac{1}{n^2}$；　　(2) $a_n = n(n+2)$；

(3) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$；　　(4) $a_n = -2^n + 3$.

3. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 2，4，6，8；　　(2) $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$.

4. 观察下列数列的特点，用适当的数填空：

(1) 2，4，(　)，8，10，(　)，14；

(2) 2，4，(　)，16，32，(　)，128；

(3) (　)，4，9，16，25，(　)，49.

5. 写出一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 3，6，9，12；　　(2) 0，-2，-4，-6；

(3) $\frac{2}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$；　　(4) 1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{16}$.

6. 已知无穷数列 1×2，2×3，3×4，4×5，…，$n(n+1)$，…：

(1) 求这个数列的第 10 项，第 31 项，第 48 项；

(2) 420 是这个数列的第几项？

7. 写出下面数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项：

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$；

(2) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$；

(3) $a_1=3$，$a_2=6$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$；

(4) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.

6.2 等差数列

6.2.1 等差数列的概念

问题 某工厂的仓库里堆放着一批钢管（图 6-1），共堆放了 7 层，试从上至下列出每层钢管的数量.

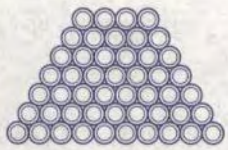


图 6-1

分析 由图 6-1 可知，相邻的两层钢管中，下面一层堆放的钢管数比上面一层多 1，所以可从上至下列出每层钢管数为

$$4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10.$$

考察上面的数列，我们可以发现，这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于 1.

一般地，如果一个数列从它的第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一常数，则这个数列叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 来表示. 例如，数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots$$

就是等差数列，它的公差 $d=2$.

特别地，数列

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots$$

也是等差数列，它的公差为 0. 公差为 0 的数列叫做**常数列**.

已知一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公差是 d，如何算出它的任意项 a_n 呢？我们由等差数列的定义知道，

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
……

由此可知，首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可表示为

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

结合课件 602，学习等差数列.

根据这个通项公式，如果已知首项与公差，就可算出等差数列的任意项 a_n. 例如，如果一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 1，公差是 2，那么将它们代入上面的公式，就得到这个数列的通项公式

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2,$$

即这个数列的第 n 项为 $a_n = 2n - 1$.

事实上，在等差数列通项公式中，共有四个变量，知道其中三个，就可求出第四个.

例1 求等差数列 8，5，2，…的通项公式和第 20 项.

解 因为 $a_1 = 8$，$d = 5 - 8 = -3$，所以这个等差数列的通项公式是

$$a_n = 8 + (n-1) \times (-3),$$

即 $a_n = -3n + 11$. 所以

$$a_{20} = -3 \times 20 + 11 = -49.$$

例2 等差数列 -5，-9，… 的第多少项是 -401？

解 因为

$a_1 = -5$，$d = -9 - (-5) = -4$，$a_n = -401$，

所以

$$-401 = -5 + (n-1) \times (-4).$$

解得 $n = 100$.

即这个数列的第 100 项是 -401.

例3 在 3 与 7 之间插入一个数 A，使 3，A，7 成等差数列. 求 A 的值.

解 因为 3，A，7 成等差数列，所以 $A - 3 = 7 - A$，即 $2A = 3 + 7$.

解得 $A=5$.

一般地，如果 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

从例 3 知，5 是 3 与 7 的等差中项.

如果 A 是 a，b 的等差中项，则

$$A-a=b-A,$$

解得 $A=\dfrac{a+b}{2}$.

这就表明，两个数的等差中项就是它们的算术平均值.

容易看出，在等差数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…中，

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2},$$

$$a_3=\frac{a_2+a_4}{2},$$

……

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

……

这就是说，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项.

例4 已知一个等差数列的第 3 项是 5，第 8 项是 20，求它的第 25 项.

解 因为 $a_3=5$，$a_8=20$，根据通项公式，得

$$\begin{cases}a_1+(3-1)d=5\\a_1+(8-1)d=20\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}a_1+2d=5\\a_1+7d=20\end{cases}$$

解此方程组，得 $a_1=-1$，$d=3$.

所以

$$a_{25}=-1+(25-1)\times3=71.$$

例5 梯子的最高一级宽是 33 cm，最低一级宽是

89 cm，中间还有 7 级，各级的宽度成等差数列，求中间各级的宽度.

解 用 $\{a_n\}$ 表示题中的等差数列. 已知

$$a_1=33,\ a_n=89,\ n=9,$$

则 $a_9=33+(9-1)d$，即

$$89=33+8d,$$

解得 $d=7$.

于是

$$a_2=33+7=40,$$
$$a_3=40+7=47,$$
$$a_4=47+7=54,$$
$$a_5=54+7=61,$$
$$a_6=61+7=68,$$
$$a_7=68+7=75,$$
$$a_8=75+7=82.$$

即梯子中间各级的宽度从上到下依次是 40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm，75 cm，82 cm.

例6 已知一个直角三角形的三条边的长度成等差数列，求证：它们的比是 3∶4∶5.

分析 当已知三个数成等差数列时，可将这三个数表示为

$$a-d,\ a,\ a+d,$$

其中 d 是公差. 由于这样表示具有对称性，运算时往往容易化简. 这样表示后，可根据勾股定理得出它们之间的关系.

证明 设这个直角三角形的三边长分别为

$$a-d,\ a,\ a+d.$$

根据勾股定理，得

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2,$$

解得 $a=4d$.

于是这个直角三角形的三边长是 $3d$，$4d$，$5d$，即这个直角三角形三条边长的比是 3∶4∶5.

练 习

A 组

1. (1) 求等差数列 3, 7, 11, …的第 7 项;

(2) 求等差数列 10, 8, 6, …的第 20 项.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中:

(1) $d=-\frac{1}{3}$, $a_7=8$, 求 a_1;

(2) $a_1=12$, $a_6=27$, 求 d.

3. 求下列各组数的等差中项:

(1) 732 与 -136;　　(2) $\frac{49}{2}$ 与 42.

B 组

1. 求等差数列 2, 9, 16, … 的第 n 项.

2. 求等差数列 0, $-\frac{7}{2}$, … 的第 $n+1$ 项.

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $a_n=21$, $d=2$, 求 n.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=10$, $a_5=6$, 求 a_8 和 d.

6.2.2 等差数列的前 n 项和

问题 求出 6.2.1 节问题中堆放的那批钢管的总数.

分析 怎样求得钢管总数呢? 显然, 把各层钢管数直接相加就可得出结果.

下面我们用另外一个办法来求.

把图 6-1 上下倒置后放在旁边, 得到图 6-2, 我们发现新"钢管堆"共有 7 层, 每一层的钢管数相等, 都等于 14, 总数即为 14×7, 新"钢管堆"中钢管总数是原来那批钢管总数的两倍, 所以问题中的钢管总数为新

“钢管堆”中钢管总数的一半.

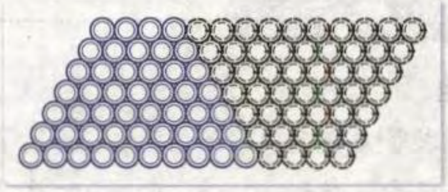


图 6-2

解 用 S_7 来表示钢管的总数，则

$$S_7 = 4+5+6+7+8+9+10; \quad ①$$

把上式右边各项的次序反过来，S_7 又可写成

$$S_7 = 10+9+8+7+6+5+4. \quad ②$$

把①②两式上下对应项相加，我们发现其和都等于 14，所以把①②的两边分别相加，得

$$2S_7=(4+10)\times 7,$$

$$S_7=\frac{(4+10)\times 7}{2},$$

$$S_7=49.$$

由上我们可以总结出求任一等差数列各项和的算法：**等差数列各项的和等于首末两项的和乘项数除以 2.**

一般地，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记作 S_n，即

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

可以得到等差数列前 n 项和公式

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

知识延伸

等差数列前 n 项和公式的推导

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + \cdots + [a_1+(n-1)d]; \quad ③$$

再把各项次序反过来，S_n 又可写成

$$S_n = a_n + (a_n-d) + \cdots + [a_n-(n-1)d]. \quad ④$$

把③④两边分别相加，得

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n\text{个}(a_1+a_n)}$$

$$=n(a_1+a_n).$$

上式两边同时除以 2 即可得 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

在这两个公式中，都包含四个变量，只要知道其中任意三个，就可求出第四个.

例1 如图 6-3 所示，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比下面一层多放一支，最上面放有 120 支，这个 V 形架上共放有多少支铅笔?

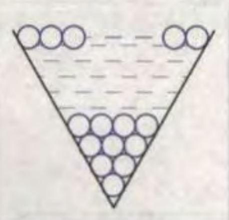


图 6-3

解 由题意可知，这个 V 形架上共放 120 层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，$d=1$，$a_{120}=120$.

已知 $n=120$，根据等差数列前 n 项和公式，得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7\ 260.$$

即 V 形架上共放有 7 260 支铅笔.

例2 在小于 100 的正整数的集合中，有多少个数是 7 的倍数？并求它们的和.

解 在小于 100 的正整数的集合中，以下各数是 7 的倍数

$$7，7\times2，7\times3，\cdots，7\times14.$$

即 7，14，21，…，98.

显然，这个数列是一个等差数列，其中 $a_1=7$，$d=7$，它的项数为小于 $\dfrac{100}{7}$ 的最大整数值，即 $n=14$，于是 $a_{14}=98$.

因此

$$S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735.$$

即在小于 100 的正整数的集合中，有 14 个数是 7 的倍数，它们的和等于 735.

例3 在等差数列 -5，-1，3，7，…中，前多少项的和是 345?

解 由已知得

$$a_1=-5,\ d=-1-(-5)=4,\ S_n=345.$$

根据等差数列前 n 项和公式得

$$345=-5n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4,$$

整理得 $2n^2-7n-345=0$. 因式分解得

$$(n-15)(2n+23)=0.$$

解得 $n_1=15$，$n_2=-\frac{23}{2}$（不合题意，舍去）.

所以 $n=15$.

即这个等差数列的前 15 项的和是 345.

练习

A 组

1. 根据下列各题条件，求相应等差数列 $\{a_n\}$ 的 S_n：
   (1) $a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$；
   (2) $a_1=100$，$d=-2$，$n=50$；
   (3) $a_1=\frac{2}{3}$，$a_n=-\frac{3}{2}$，$n=14$；
   (4) $a_1=14.5$，$d=0.7$，$a_n=32$.
2. (1) 求由全体正整数从小到大排列构成的数列中前 1 000 个数的和；
   (2) 求由全体正整数从小到大排列构成的数列中前 500 个偶数的和.
3. 在等差数列 -4，1，6，11，…中，前多少项的和是 77?

B 组

1. 在 7 与 35 之间插入 6 个数，使它们与已知的两个数成等差数列. 求这 6 个数.

2. 有多少个三位正整数是 6 的倍数？求它们的和.

习 题

1. (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 5.6，第 6 项是 20.6，求它的第 4 项；
   (2) 一个等差数列第 3 项是 9，第 9 项是 3，求它的第 12 项.

2. 求下列各组数的等差中项：
   (1) 647 与 895；　　(2) -180 与 360.

3. 正整数集合中有多少个三位数？求它们的和.

4. 求等差数列 10，7，4，…，-47 各项的和.

5. 根据下列条件，求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 的有关未知数：
   (1) $a_1=20$，$a_n=54$，$S_n=999$，求 d 和 n；
   (2) $d=\frac{1}{3}$，$n=37$，$S_n=629$，求 a_1 和 a_n；
   (3) $a_1=\frac{5}{6}$，$d=-\frac{1}{6}$，$S_n=-5$，求 n 和 a_n；
   (4) $d=2$，$n=15$，$a_n=-10$，求 a_1 和 S_n.

6. 三个数成等差数列，它们的和等于 18，平方和等于 116，求这个数列.

7. 已知一个等差数列的首项为-20，第 50 项为 120，求它的前 50 项的和.

8. 求由全体正整数从小到大排列构成的数列中，前 $2n$ 个奇数的和.

9. 在-5 和 16 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成的是和为 88 的等差数列，求公差 d.

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_2=-6$，k 为自然数且 $a_{k-1}+a_k=26$，$S_k=50$，求 k 的值.

6.3 等比数列

6.3.1 等比数列的概念

问题 小明做折纸游戏，把一张纸连续对折 5 次，试列出每次对折后纸的层数.

解 通过动手操作可得：

第 1 次对折后纸的层数是 $1\times 2=2$；

第 2 次对折后纸的层数是 $2\times 2=4$；

第 3 次对折后纸的层数是 $4\times 2=8$；

第 4 次对折后纸的层数是 $8\times 2=16$；

第 5 次对折后纸的层数是 $16\times 2=32$.

所以可列出折纸的层数是

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32.$$

这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它前面一项的比都等于常数 2.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于同一个常数，则这个数列叫做**等比数列**，这个常数叫做等比数列的**公比**. 公比通常用字母 q 表示. 例如，数列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{32}$$

就是一个等比数列，它的公比是 $-\frac{1}{2}$.

因为在一个等比数列里，从第 2 项起每一项与它前一项的比都等于公比，所以每一项都等于它的前一项乘

公比. 这就是说，如果等比数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ 的公比是 $q\ (q \neq 0)$，那么

$$a_2 = a_1 q,$$
$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2,$$
$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3,$$
$$\cdots\cdots$$

由此可知，等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}.}$$

其中，a_1 与 q 均不为 0.

结合课件 603，学习等比数列.

例1 已知一个等比数列的首项为 1，公比为 -1，求这个数列的第 10 项.

解 记这个数列为 $\{a_n\}$，公比为 q，则

$$a_1 = 1,\ q = -1.$$

由等比数列的通项公式可知

$$a_{10} = a_1 q^9 = 1 \times (-1)^9 = -1.$$

即第 10 项为 -1.

例2 一个等比数列的第 3 项和第 4 项分别是 12 和 18，求它的第 1 项和第 2 项.

解 设这个数列的第 1 项是 a_1，公比是 q，则

$$a_1 q^2 = 12, \qquad ①$$
$$a_1 q^3 = 18. \qquad ②$$

解①②所组成的方程组，得

$$q = \frac{3}{2},\ a_1 = \frac{16}{3},\ a_2 = a_1 q = \frac{16}{3} \times \frac{3}{2} = 8.$$

即这个数列的第 1 项是 $\frac{16}{3}$，第 2 项是 8.

例3 将 20，50，100 三个数分别加上相同的常数，使这三个数依次成等比数列，求它的公比 q.

解 设所加常数为 a，依题意 $20+a, 50+a, 100+a$ 成等比数列，则

$$\frac{50+a}{20+a} = \frac{100+a}{50+a},$$

去分母，得 $(50+a)^2=(20+a)(100+a)$，即

$$2\,500+100a+a^2=2\,000+120a+a^2,$$

解得 $a=25$.

代入计算，得

$$\frac{50+a}{20+a}=\frac{50+25}{20+25}=\frac{5}{3},$$

所以公比 $q=\frac{5}{3}$.

如果在 2 与 8 中间插入一个数 4，那么 2，4，8 这三个数成等比数列.

一般地，如果 a，G，b 成等比数列，则 G 叫做 a 与 b **的等比中项**.

例如，由 2，4，8 是等比数列知，4 是 2 与 8 的等比中项. 实际上，-4 也是 2 与 8 的等比中项，因为 2，-4，8 也是等比数列.

如果 G 是 a 与 b 的等比中项，那么 $\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$，则

$$G^2=ab，即 G=\pm\sqrt{ab}.$$

容易看出，**一个等比数列从第 2 项起，每一项（有穷等比数列的末项除外）是它的前一项与后一项的等比中项.**

练习

A 组

1. 求下列等比数列的第 4 项和第 8 项：

(1) $5, -15, 45, \cdots$；　　(2) $1.2, 2.4, 4.8, \cdots$；

(3) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \cdots$；　　(4) $\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \cdots$.

2. (1) 一个等比数列的第 9 项是 $\frac{4}{9}$，公比是 $-\frac{1}{3}$，求它的第 1 项；

(2) 一个等比数列的第 2 项是 10，第 3 项是 20，求它的第 1 项和第 4 项.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的 $a_2=2$，$a_5=54$，求 q.

4. 求下列各组数的等比中项：

(1) 2 与 18；　　(2) 16 与 4.

B 组

1. 一个等比数列的第 2 项是 3，第 3 项是 9，求它的第 1 项和第 4 项.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1=1$，末项 $a_n=256$，公比 $q=2$，求这个等比数列的项数.

3. 在 8 与 200 之间插入 3 个数，使 5 个数成等比数列，求这 3 个数.

6.3.2 等比数列的前 n 项和

问题 怎样求等比数列

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots,\ a_1q^{n-1},\cdots$$

的前 n 项和 S_n？

很显然，当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$.

当 $q\neq 1$ 时，可推得

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.}$$

知识延伸

等比数列前 n 项和公式的推导

因为

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1},\qquad ①$$

而且我们知道，把等比数列的任意一项乘公比，就可得到它后面相邻的一项，现将①式的两边分别乘公比 q，得到

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n.\qquad ②$$

比较①②两式，我们看到①式的右边从第 2 项到最后一项，与②式的右边的第 1 项到倒数第 2 项完全相同. 于是将①式的两边分别减去②式的两边，可以消去相同的项，得到

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n.$$

当 $q \neq 1$ 时，$1-q \neq 0$，上式两边同时除以 $1-q$ 即可得出

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

等比数列前 n 项和的公式，包含四个变量，只要知道其中任意三个，就可求出第四个.

例1 求等比数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ 的前 8 项的和.

解 因为

$$a_1 = \frac{1}{2},\ q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},\ n = 8,$$

所以

$$S_8 = \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{255}{256}.$$

例2 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = -\frac{1}{3}$，前 4 项的和为 $\frac{5}{9}$，求这个等比数列的首项.

解 根据等比数列前 n 项和公式及已知条件可得

$$\frac{5}{9} = \frac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)},$$

解得 $a_1 = \frac{3}{4}$.

即首项为 $\frac{3}{4}$.

探索与研究

使用电子工作表解答上面的例 1，并验证例 2 的结果.

练习

A组

1. 根据下列各组条件，求相应的等比数列 $\{a_n\}$ 的 S_n：

(1) $a_1=3,\ q=2,\ n=6$；　　(2) $a_1=8,\ q=\frac{1}{2},\ n=5$.

2. 求等比数列 1，2，4，… 从第 5 项到第 10 项的和.

B组

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$，$a_1=36,\ a_5=\frac{9}{4}$，求 q 和 S_5.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$，$a_n=1\,296,\ q=6,\ S_n=1\,554$，求 n 和 a_1.

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，如果 $a_7-a_5=a_6+a_5=48$，求 a_1，q 和 S_{10}.

习题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $a_4=27,\ q=-3$，求 a_7；　　(2) $a_2=18,\ a_4=8$，求 a_1 及 q.

2. 求下列各组数的等比中项：

(1) 45 与 80；　　(2) $7+3\sqrt{5}$ 与 $7-3\sqrt{5}$.

3. 在 9 与 243 之间插入两个数，使这 4 个数成等比数列，求插入的数.

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $a_1=-1.5,\ a_4=96$，求 q 和 S_4；

(2) $q=\frac{1}{2},\ S_5=\frac{31}{8}$，求 a_1 和 a_5.

5. 三个数成等比数列，它们的和等于 14，积等于 64，求这个数列.

6. 求 $(2-3\times5^{-1})+(2^2-3\times5^{-2})+\cdots+(2^n-3\times5^{-n})$ 的值.

6.4 数列的应用

在科学研究与工农业生产中，经常会碰到等差数列与等比数列. 下面举例说明它们的应用.

例1 某林场计划造林 0.5 km²，以后每年比上一年多造林 0.1 km²，问 6 年后林场共造林多少？

解 依题意，林场每年造林数成等差数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=0.5$，$d=0.1$，$n=6$.

所以

$$S_6=0.5\times6+\frac{6\times(6-1)}{2}\times0.1$$
$$=4.5.$$

即 6 年后林场共造林 4.5 km².

例2 某种电子产品自投放市场以来，经过三次降价，单价由原来的 174 元降到 58 元，这种产品平均每次降价的百分率大约是多少？（精确到 1%）

解 设平均每次降价的百分率是 x，则每次降价后的单价是降价前的 $(1-x)$ 倍. 这样，将原单价与三次降价后的单价依次排列，就组成一个等比数列，记为 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=174,\ a_4=58,\ n=4,\ q=1-x.$$

由等比数列的通项公式，得

$$58=174\times(1-x)^{4-1}.$$

整理，得

$$(1-x)^3=\frac{1}{3},$$

$$1-x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\approx0.693.$$

因此

$$x \approx 1 - 0.693 \approx 31\%,$$

即上述电子产品平均每次降价的百分率大约是 31%.

例3 一对夫妇为了 5 年后能购买一辆车，准备每年到银行去存一笔钱. 假设银行储蓄年利率为 5%，按复利计算，为了使 5 年后本利和共有 10 万元，问他们每年约需存多少钱？（精确到 1 元）

> 复利是指经过一段时间（例如一年），将所生的利息和本金一起做为本金，再计算利息.

解 设每年他们存入 x 元，一年后存的本利和为

$$x(1+5\%),$$

两年后的本利和为

$$x(1+5\%)+x(1+5\%)^2,$$

$$\cdots\cdots$$

5 年后的本利和为

$$x(1+5\%)+x(1+5\%)^2+\cdots+x(1+5\%)^5.$$

依题意，列方程得

$$x(1+5\%)+x(1+5\%)^2+\cdots+x(1+5\%)^5 = 100\ 000.$$

即 $1.05x \times \dfrac{1.05^5-1}{1.05-1} = 100\ 000.$

解此方程，得 $x \approx 17\ 236$ 元.

所以，他们每年约需存入 17 236 元.

习题

1. 下面是全国统一鞋号中，成年女鞋的各种尺码（表示鞋底长，单位是 cm）：

$$21,\ 21\frac{1}{2},\ 22,\ 22\frac{1}{2},\ 23,\ 23\frac{1}{2},\ 24,\ 24\frac{1}{2},\ 25.$$

这些尺码是否成等差数列？如果是，公差是多少？

2. 全国统一鞋号中，成年男鞋共 14 种尺码，这 14 种尺码成等差数列，其中最小尺码是 $23\frac{1}{2}$ cm，公差为 $\frac{1}{2}$ cm，把全部尺码从小到大列出.

3. 在通常情况下，从地面到 10 000 m 高空，每增加 1 km，气温就下降

某一固定数值. 如果 1 km 高度的气温是8.5 ℃，5 km 高度的气温是 −17.5 ℃，求 2 km，4 km 及8 km高度的气温.

4. 安装在一根公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，且最大和最小的皮带轮的直径分别是 216 mm 与 120 mm，求中间三个皮带轮的直径.

5. 一个剧场，设置了 20 排座位，第一排有 38 个座位，往后每一排都比前一排多 2 个座位，这个剧场一共设置了多少个座位？

6. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面的一层铺了 21 块瓦片，往下每层均比上一层多铺一块，斜面上铺了 19 层瓦片，这个斜面上共铺瓦片多少块？

7. 某林场计划第 1 年造林 2 km^2，以后每一年比上一年多造林 5%，第 5 年造林多少？(保留两位小数)

8. 某种细菌在培养过程中，每 30 min 分裂一次（一个分裂为两个），经过 4 h，一个这种细菌可分裂成多少个？

9. 某家庭打算用 10 年时间储蓄 20 万元购置一套商品房，为此每年需存入银行额数相同的专款. 假设年利率为 4%，按复利计算，问每年应存入银行多少钱？(精确到 1 元)

10. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 和 45，求其余各齿轮的齿数.

11. 抽气机的活塞每运动一次，从容器里抽出$\frac{1}{8}$的空气，因而使容器里的空气的压强降低为原来的$\frac{7}{8}$. 已知最初容器里的压强是 101.3 kPa，求活塞运动 5 次后，容器里空气的压强.（保留一位小数）

12. 一个工厂今年生产某种机器 1 080 台，计划到后年，把产量提高到每年生产 1 920 台，如果每一年比上一年增长的百分率相同，这个百分率是多少？(精确到 0.1%)

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 什么是数列？
2. 什么是数列的通项公式？
3. 什么样的数列是等差数列？如何求等差数列的通项及它的前 n 项和？
4. 什么样的数列是等比数列？如何求等比数列的通项及它的前 n 项和？
5. 什么是两数 a,b 的等差中项、等比中项？如何求 a,b 的等差中项和等比中项？
6. 等比数列和等差数列在你所学习的专业里有哪些应用？

数列趣题

在我国古代数学著作中，对数列作了大量的研究，很早就建立了正确的等差数列的理论. 早在《周髀算经》中就已有了数列的运用. 例如，在天文数学上曾以直径 2×(19 832 里 200 步) 递进“七衡”(日、月运行的圆周，用七个同心圆表示)；二十四节气以 9 寸 $9\frac{1}{6}$ 分递为加减等等. 在《九章算术》中，给出了等差数列问题：“今有女子善织，日自倍，五日织五尺. 问日织几何?”早在《庄子·天下》中就有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的论述，这都是有名的关于等比数列的例子.

古人常常把生活中的一些趣闻编成数学题目，以提高人们对数学的兴趣. 下面我们来看几个这样的题目.

“耗子穿墙”（《九章算术》）

“今有垣厚五尺，两鼠相对．大鼠日一尺，小鼠亦一尺．大鼠日自倍，小鼠日自半．问几何日相逢？各穿几何？”

九章算术的作者将这个问题变为“盈不足术”问题，“盈”为“多余”．“亏”为“不足”．这实际上是一个等比数列求和的问题．这个题的解法也很简单．答案是两天不足，三天有余．请同学自已完成．

如果将墙厚改为 100 尺，答案就不是一眼能看出的．这个问题实际上是一个等比数列求和问题．小鼠第一天打 1 尺，接下去无论打多少天也超不过1 尺．我们要计算的只是大鼠的情况．设等比数列 $\{a_n\}$ 为

$$1,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots.$$

解不等式

$$S_{n-1} < 100-1 \leqslant S_n$$

就可以得出答案．

《张邱建算经》题

“今有女善织，日益功疾．初日织五尺，今一月，织九匹三丈．问日益几何？”该题的大意是说，有一女子很会织布，一天比一天织得快，而且每天增加的长度都是一样的．已知第一天织了 5 尺，一个月后共织布 390 尺，问该女子织布每天增加多少？这是一道利用等差数列求和公式求解的题，答案是 $5\frac{15}{29}$寸．

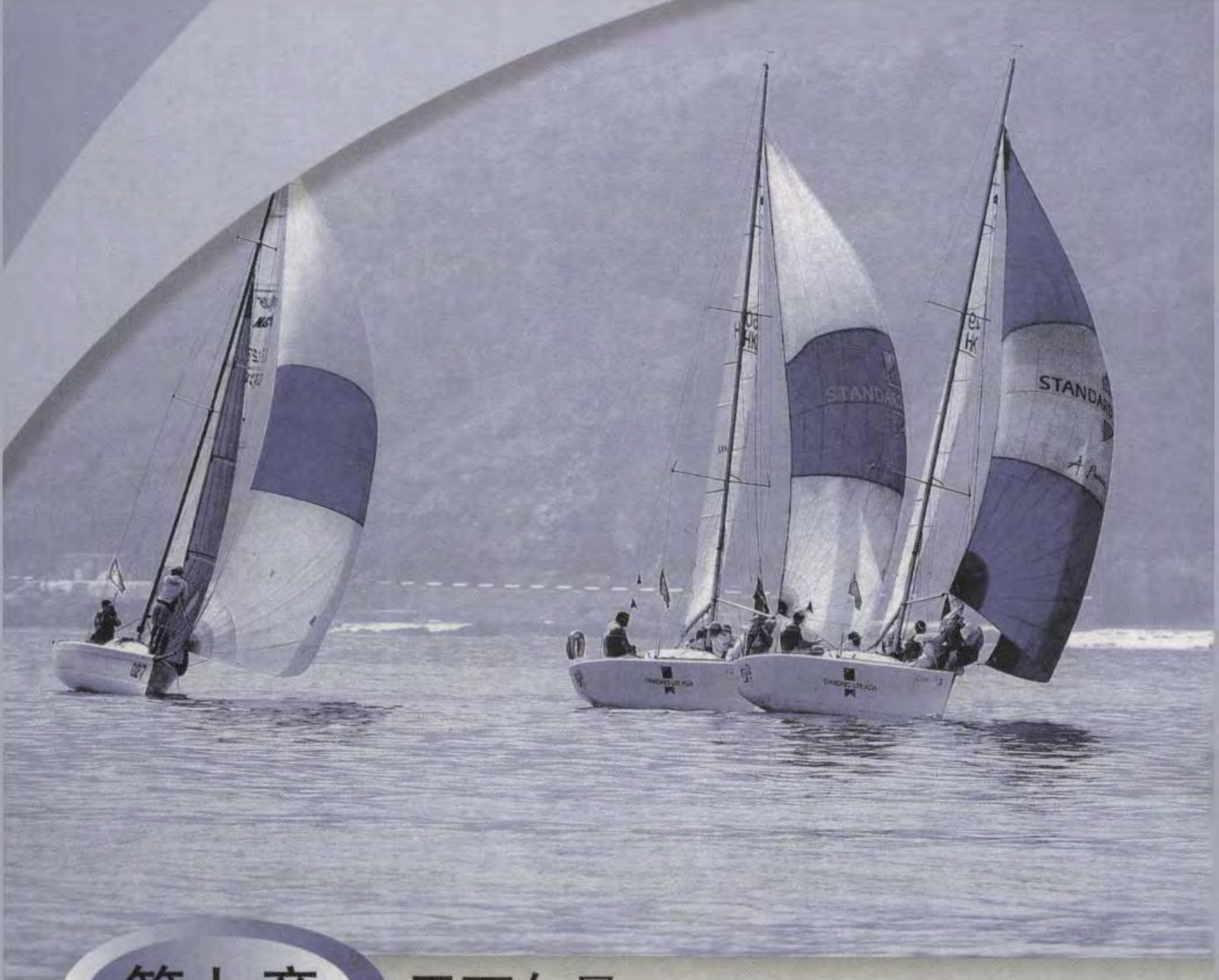
我国古代数学家在数列方面的成就是很高的，这里就不一一列举了，仅介绍杨辉在《详解九章算法》中给出的三个高阶等差数列求和公式：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$\begin{aligned}&a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+[a+(n-1)]^2\\&=\frac{n}{6}(6a^2+6an-6a+2n^2-3n+1);\end{aligned}$$

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

后来，宋代沈括对数列继续进行研究，以上这三个公式只是沈括的一个公式的特例．由此可见我国古代数学成就之高．



第七章 平面向量

7.1 向量的加减运算

7.2 数乘向量

7.3 向量的坐标表示

7.4 向量的内积及其运算

7.5 向量的应用

你肯定有过在大风中骑车或走路的经历，顺风时，有如神助，逆风时，气喘吁吁，有了风力的助推或者阻碍，骑车或走路时的感受就大不相同；射箭运动员在把箭射出的一瞬间，不仅要考虑重力对箭飞行的影响，还要考虑风力对箭飞行的干扰；摆渡船在向河对岸航行时，需要调整船的航向，才能够以最短的路程到达对岸的码头. 但是，你可能不知道，所有的这些现象都可以用数学中的向量来描述.

那么，向量和我们原来学过的知识有何联系呢？我们知道，如何确定物体所在的位置，是几何学研究的基本问题之一. 当选定一个点之后，如果知道了物体到这个定点的距离和相对方向，那么物体的位置也就唯一确定了. 因此，相对方向和距离就可以确定物体的位置. 在数学中，为了把方向和距离结合起来，我们引入了新的几何量：向量.

向量是近代数学中最基本和最重要的概念之一，是沟通几何、代数、三角等内容的桥梁，利用向量来研究这些知识之间的联系，具有极大的优越性. 向量还是研究力学、电学和其他自然科学的有效工具. 此外，向量还在经济活动、社会生产中有着广泛的应用.

本章我们将会通过一些生产生活中的实例，了解向量的实际背景，理解平面向量的运算法则及其意义，并学会应用向量的思想和方法解决一些实际问题. 随着学习的不断深入，你将会发现向量是很有用的知识，学好这一章的内容也将会为今后的学习打下基础.

7.1 向量的加减运算

7.1.1 位移与向量的表示

在物理学和其他的一些学科中，经常遇到的一些量，如距离、时间、面积、质量等，在选定度量单位后，就可用一个实数确切地表示它们，这种只有大小的量叫做**数量**（也称为**标量**）. 另外一些量，它们不但有大小，而且还有方向.

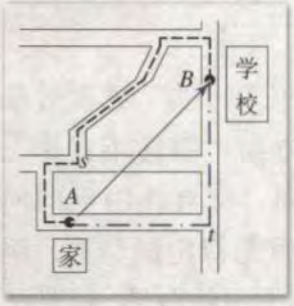


图 7-1

让我们先来看一个生活中的例子. 如图 7-1，张明从家走到学校上学，可以走不同的路到达，从路径 s 和路径 t 走到学校，走过的路程是不一样的. 但是就位置的改变来说，无论张明走哪条路，都是由初始位置 A 点北偏东 $45°$方向移动 1 500 m 到 B 点. 我们把这种质点位置的变化用位移来表示. 位移就是一个既有大小又有方向的量.

我们把位移这一类具有大小和方向的量叫做**向量**（也称为**矢量**）.

问题 1　如何描述平面上一点的位移?

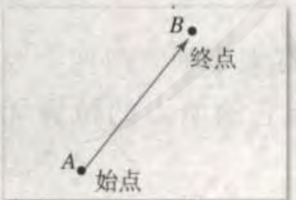


图 7-2

假设一个质点从始点 A 移动到终点 B，显然，最直观的方法，是用线段 AB，并在终点 B 处画上箭头表示 A 到 B 的方向，来描述这个位移（图 7-2）.

上述标有方向的线段，叫做**有向线段**.

这就是说，平面内任意一点的位移，都可以转化为用一条有向线段来表示.

以 A 为始点，以 B 为终点的有向线段，记作 $\overrightarrow{AB}$. 应注意，始点一定要写在终点的前面.

位移，在物理学中只表示质点位置的变化，而与质点实际运动的始点和路线无关. 在图 7-3 中，点 A' 相对于点 A 的位移，点 B' 相对于点 B 的位移，点 C' 相对于点 C 的位移，都是同一个位移或相等的位移：北偏东 45°，3 个单位.

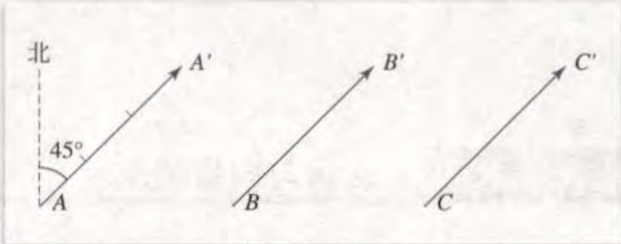


图 7-3

印刷时，向量常用黑体小写英文字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，… 表示，手写时，用带箭头的小写英文字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，… 表示.

向量的例子是很多的. 例如，位移、力、速度等都是向量. 有些向量不仅有大小和方向，而且还有作用点. 例如，力就是既有大小、方向，又有作用点的向量. 有些向量只有大小和方向，而无特定的位置. 例如，位移、速度等就是只有大小和方向的向量. 通常把后一类向量叫做**自由向量**. 在本章学习的主要是自由向量，以后我们说到向量，如不特别说明，指的都是自由向量. 这就是说，本章所学的向量只有大小、方向两个要素. 如果两个向量的大小相等，方向相同，则说这两个**向量相等**.

结合课件 701，观察相等的两个向量的特征.

由于我们所研究的向量只含有大小和方向两个要素，用有向线段表示向量时，与它的始点的位置无关，即：

同向且等长的有向线段表示同一向量，或相等的向量.

在图 7-3 中，有向线段 $\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$ 都表示同一向量 $\boldsymbol{a}$，这时可记作 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\boldsymbol{a}$.

已知向量 $\overrightarrow{AB}$，则线段 AB 的长度叫做 $\overrightarrow{AB}$ 的**长度**（**或模**），记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 长度等于 0 的向量，叫做**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向不确定.

如果表示一些向量的有向线段所在直线互相平行或重合，则称这些向量**平行或共线**（图 7-4）. 平行向量的方向相同或相反. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线，记作 $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$.

特别地，我们规定零向量与任意向量平行.

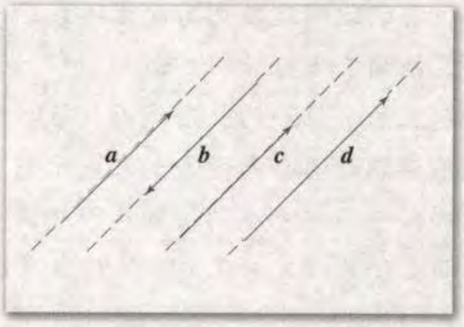


图 7-4

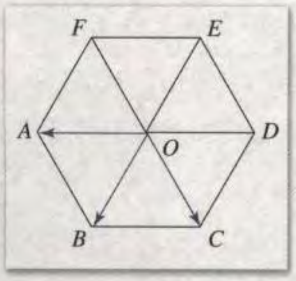


图 7-5

例 如图 7-5 所示，设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，分别写出与 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 相等的向量.

解 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DO}$,

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EO}$,

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{FO}$.

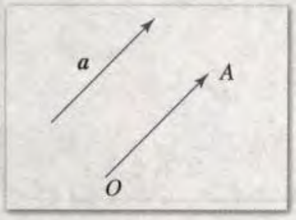


图 7-6

问题 2 如何用向量确定平面内一点的位置呢？

任给一定点 O 和向量 $\boldsymbol{a}$（图 7-6），过点 O 作有向线段

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},$$

则点 A 相对于点 O 的位置被向量 $\boldsymbol{a}$ 所唯一确定. 这时向量 $\overrightarrow{OA}$ 通常叫做点 A 相对于点 O 的**位置向量**.

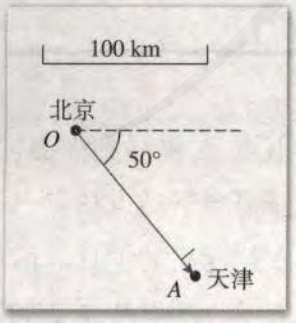


图 7-7

例如，在谈到天津相对于北京的位置时，我们说，“天津位于北京东偏南 50°，114 km”. 如图 7-7，点 O 表示北京的位置，点 A 表示天津的位置，那么向量 $\overrightarrow{OA}$= “东偏南 50°，114 km” 就是天津相对于北京的位置向量.

有了位置向量的概念，我们就可以利用位置向量来确定一点相对于另一点的位置．这样，我们就可以用向量来研究几何了．

练习

A组

1. 选择适当的比例尺，用有向线段表示下列位移：

(1) 飞机向南飞行 50 km；　　(2) 飞机向西飞行 50 km.

试问以上两个位移的长度是否相等？两个位移是否相等？

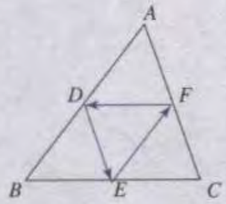
2. 对于不相等的两个向量，如果表示它们的有向线段的始点的位置相同，那么它们的终点的位置是否相同？

3. 在平面上任意确定一点 O，点 P 在点 O“东偏北 60°，3 cm”处，点 Q 在点 O“南偏西 30°，3 cm”处，画出点 P 和点 Q 相对于点 O 的位置向量.

B组

1. 一人从点 A 出发，向东走 500 m 到达点 B，接着向东偏北 30°走300 m到达点 C，然后再向东北走 100 m 到达点 D. 选择适当的比例尺，用向量表示这个人的位移.

2. 已知 D，E，F 是 $\triangle ABC$ 三边 AB，BC，CA 的中点，分别写出图中与 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FD}$ 相等的向量.



（第 2 题）

7.1.2 向量的加法

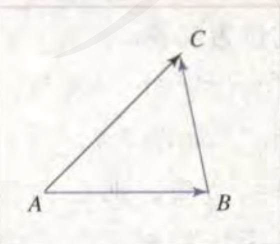


图 7-8

如图 7-8 所示，如果一个动点由点 A 位移到点 B，再由点 B 位移到点 C，那么这个过程相当于动点从点 A 直接位移到点 C．也就是说，从点 A 到点 C 的位移与两次连续位移的效果相同．这时我们就说，动点从 A 到 C 的位移，是动点由 A 到 B，再由 B 到 C 两次位移的和.

从位移求和，我们可以引出下述向量的加法法则：

如图 7-9 所示，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面上任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作向量 $\overrightarrow{AC}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**（或**和向量**），记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

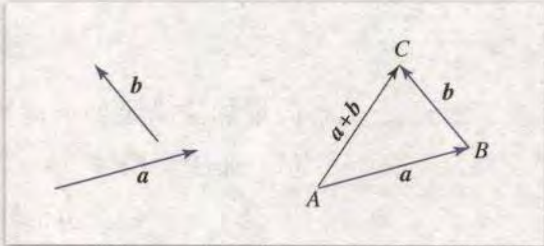


图 7-9

上述求两个向量和的作图法则，叫做向量求和的**三角形法则**. 图 7-10 表示求两个平行向量和的特殊情况.

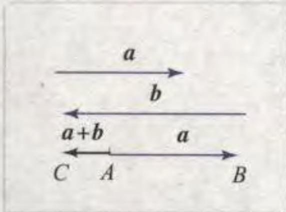


图 7-10

对于零向量与任一向量 $\boldsymbol{a}$ 的和，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

例 某人先向东走 3 km（用向量 $\boldsymbol{a}$ 表示），接着再向北走 3 km（用向量 $\boldsymbol{b}$ 表示），求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

解 如图 7-11 所示，适当选取比例尺，作

$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=$“向东走 3 km”，

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}=$“向北走 3 km”，

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{km}).$$

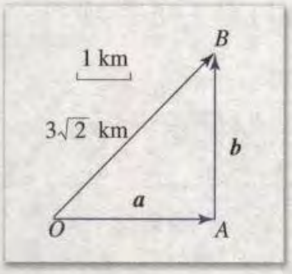


图 7-11

又 $\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{OB}$ 的夹角是 45°，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示“向东北走$3\sqrt{2}$ km”.

根据两个向量的求和法则，可以得到多个向量的求和法则. 现以四个向量为例说明如下（图 7-12）.

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$. 在平面上任选一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{d}$，则

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.$$

结合课件 702，学习向量的加法.

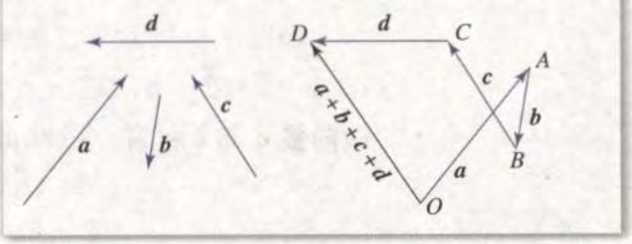


图 7-12

向量加法满足如下运算律：

(1) 加法交换律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$

(2) 加法结合律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

知识延伸

验证向量加法的交换律

若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，如图 7-13 所示，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

再作 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，连接 DC，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形（为什么?），于是 $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$. 因此

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC},$$

即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

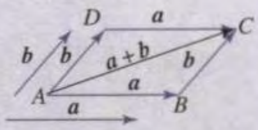


图 7-13

对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的情况，请同学们自己验证.

从加法交换律的验证过程，我们可得到求两个向量和的另一作图法则（图 7-13）：

若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作 $\square ABCD$，则对角线上的向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这个法则叫做向量求和的**平行四边形法则**.

练习

A组

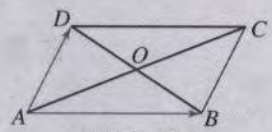
1. 已知下列各组向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$. 求作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$：

2. 如图，填空：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$______；

(2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=$______；

(3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=$______.



(第 2 题)

3. 已知任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 是否正确？为什么？

B组

1. 某人从点 A 向东位移 60 m 到达点 B，又从点 B 向东偏北 30° 方向位移 50 m 到达点 C，又从点 C 向北偏西 60° 方向位移 30 m 到达点 D，选用适当的比例尺作图，求点 D 相对于点 A 的位置.

2. 一轮渡向北以航速 20 km/h 航行，此时吹来西风，风速 5 m/s，用作图法求轮渡的实际航行速度和方向.

7.1.3 向量的减法

图 7-14

在某地的一条大河中（图 7-14），水流的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，摆渡船需要以 $\boldsymbol{v}_2$ 的实际航行速度到达河对岸，那么摆渡船自身应以怎样的航行速度行驶呢？

这实际上是一个向量减法的问题. 下面我们就来学习向量减法的知识.

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$（图 7-15），作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则由向量求和的三角形法则，得

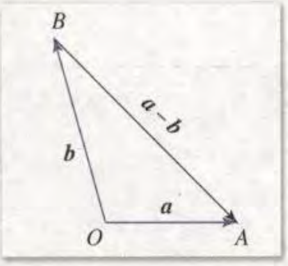


图 7-15

$$\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}. \qquad ①$$

向量 $\overrightarrow{BA}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}. \qquad ②$$

由此可见，如果把两个向量的始点放在一起，则这两个向量的差是减向量的终点到被减向量的终点的向量.

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 等长且方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$（图 7-16）. 显然，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

思考与讨论

向量减法运算是加法运算的逆运算吗？

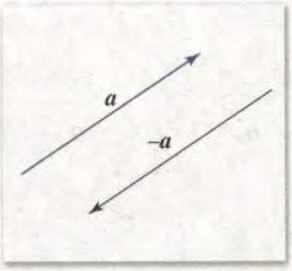


图 7-16

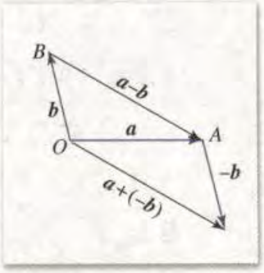


图 7-17

在①式两边同加 $(-\boldsymbol{b})$，得 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 这就是说，向量做减法运算时，减去一个向量等于加上这个向量的相反向量（图 7-17）.

例1 已知 $\square ABCD$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$（图 7-18）.

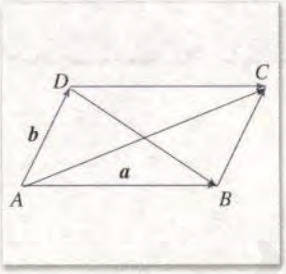


图 7-18

解 连接 AC，DB，由向量求和的平行四边形法则有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

依减法定义得

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

例2 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$，求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$（图 7-19）.

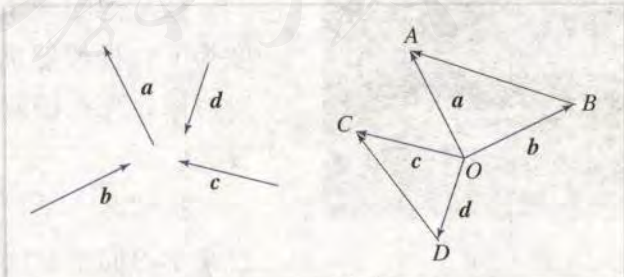


图 7-19

解 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 作$\overrightarrow{BA}$, 则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA};$$

作$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$, 作$\overrightarrow{DC}$, 则

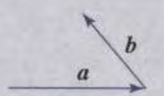
$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}.$$

练习

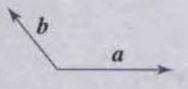
A组

1. 已知$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 求作$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$:

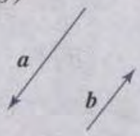
(1)



(2)



(3)

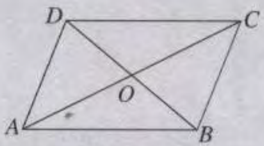


2. 如图, 填空:

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$ ______;

(2) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=$ ______;

(3) $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=$ ______.



(第 2 题)

B组

1. 已知$\square ABCD$, 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 试用$\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{b}$表示:

(1) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$; (2) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$.

2. 已知$\square ABCD$, 它的顶点A, B, C, D相对于平面内任一点O的位置向量分别记作$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. 试验证$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$.

习题

1. 作五边形$ABCDE$, 求作下列各题中的和向量:

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; (2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}$.

2. 化简:

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$; (2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$;

(3) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}$; (4) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}$.

3. 已知三个非零向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$满足条件$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 试问表示它们的有向线段是否一定能构成三角形? $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$满足什么条件才能构成三角形?

7.2 数乘向量

如图 7-20 所示，已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，可作出如下向量的和：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$；

(2) $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$.

数乘向量也叫做向量的数乘.

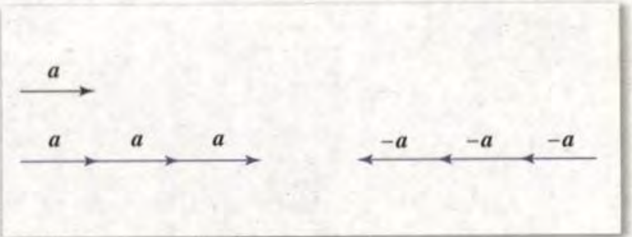


图 7-20

3 个 $\boldsymbol{a}$ 连加，记作 $3\boldsymbol{a}$，3 个 $(-\boldsymbol{a})$ 连加，记作 $-3\boldsymbol{a}$. 由图 7-20我们可以看到，3 个 $\boldsymbol{a}$ 连加仍是一个向量，它的长等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；3 个 $(-\boldsymbol{a})$ 连加仍是一个向量，它的长等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

如图 7-21 所示，已知 $\overrightarrow{AB}$，把线段 AB 三等分，分点为 P，Q，则称

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BP}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

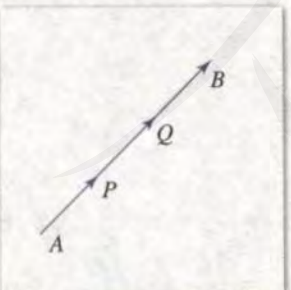


图 7-21

由上述分析，我们可引出数乘向量的一般定义.

一般地，实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作

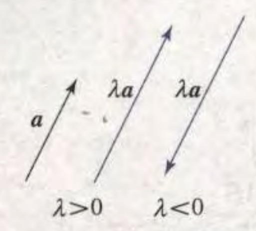


图 7-22

$\lambda\boldsymbol{a}$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的长 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

$\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\lambda\neq 0)$ 在 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；在 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反方向（图 7-22）.

当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

数乘向量的几何意义就是把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向（或反方向）放大（或缩小）.

设 λ, μ 为实数，则不难证明数乘向量运算满足下列运算律：

(1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

> 请你对数乘向量的运算律与实数乘法的运算律进行比较.

向量的加法、减法、数乘向量及其综合运算，通常叫做向量的线性运算.

例1 计算下列各式：

(1) $(-2)\times\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$；

(2) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

解 (1) $(-2)\times\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\left(-2\times\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

(2)
$$\begin{aligned}&2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\=&2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\\=&-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b};\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\=&(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}-(\lambda+\mu)\boldsymbol{b}-(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}-(\lambda-\mu)\boldsymbol{b}\\=&(\lambda+\mu-\lambda+\mu)\boldsymbol{a}-(\lambda+\mu+\lambda-\mu)\boldsymbol{b}\\=&2\mu\boldsymbol{a}-2\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

例2 设 $\boldsymbol{x}$ 是未知向量，解方程 $5(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$.

解 原式可变形为

$$5\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$
$$8\boldsymbol{x}=-5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{x}=-\frac{5}{8}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}.$$

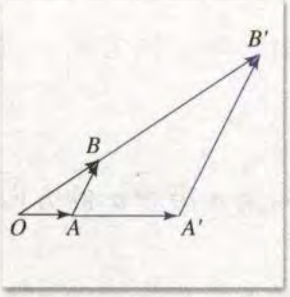


图 7-23

例3 如图 7-23 所示，已知 $\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{AB}$，说明向量 $\overrightarrow{OB}$ 与$\overrightarrow{OB'}$ 的关系.

解 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB'}&=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'}\\&=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AB}\\&=3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})=3\overrightarrow{OB},\end{aligned}$$

所以$\overrightarrow{OB'}$与$\overrightarrow{OB}$共线且同方向，$\overrightarrow{OB'}$的长度是$\overrightarrow{OB}$ 的长度的 3 倍.

由向量平行和数乘向量的定义可得到：

平行向量基本定理 **如果 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则一定存在一个实数 λ，使**

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.$$

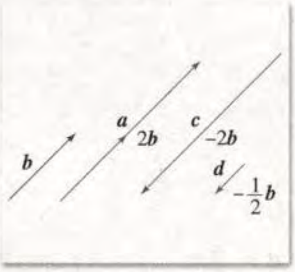


图 7-24

如图 7-24 所示，如果 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；如果 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{b}$；如果 $\boldsymbol{d}\parallel\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}$ 的长度是 $\boldsymbol{b}$ 的长度的一半，并且方向相反，则 $\boldsymbol{d}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

长度为 1 的向量叫做**单位向量**.

给定一个非零向量 $\boldsymbol{a}$，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向且长度等于 1 的向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**. 由数乘向量的定义易知，非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例4 如图 7-25，MN 是 $\triangle ABC$ 的中位线，求证：

$$MN=\frac{1}{2}BC\text{，且 }MN\parallel BC.$$

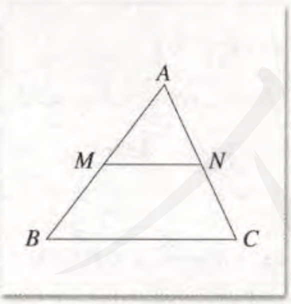


图 7-25

证明 因为 M，N 是 AB，AC 边上的中点，所以

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

所以

$$MN=\frac{1}{2}BC,\ MN\parallel BC.$$

习题

1. 化简：

(1) $2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

(2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $4(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+5(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$；

(4) $2(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-3(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$.

2. 解关于 $\boldsymbol{x}$ 的方程：

(1) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$；

(2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{x})=3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$；

(3) $\boldsymbol{x}+2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$；

(4) $3\boldsymbol{a}+4(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，设 D 为边 BC 的中点，求证：

(1) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$；

(2) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{AD}$.

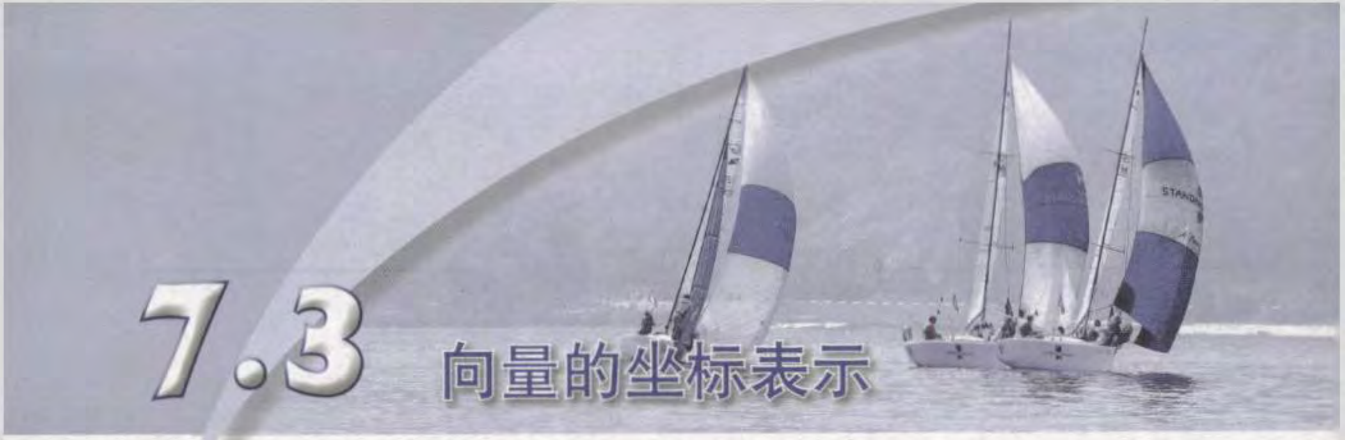
4. 根据下列各题中的条件，判断四边形 $ABCD$ 的形状：

(1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$；

(2) $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$，且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 不平行；

(3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$.

5. 已知点 E，F，G，H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点，求证：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.



7.3 向量的坐标表示

7.3.1 向量的分解

本节我们研究下面的问题.

问题 在平面内至少需要几个向量，才能把平面内的每一个向量都表示出来？

如图 7-26，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不平行的向量，容易看出

$$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2,\ \overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2,$$
$$\overrightarrow{EF}=4\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2,\ \overrightarrow{GH}=-2\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2.$$

结合课件 703，学习平面向量基本定理.

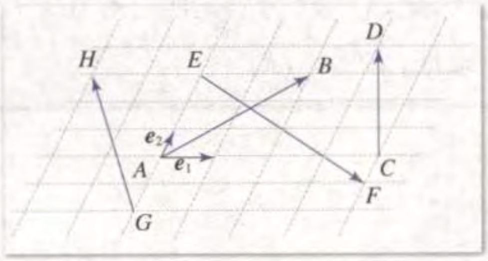


图 7-26

一般地，我们有：

平面向量基本定理　如果 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是平面上的两个不平行的向量，那么对该平面上的任一向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一的一对实数 a_1，a_2，使

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2.$$

这个定理告诉我们：平面上任一向量都可沿两个不平行的方向分解为唯一一对向量的和.

例 已知 $\square ABCD$ 的两条对角线相交于点 M，设

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$（图 7-27）.

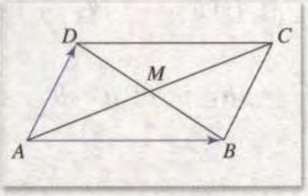


图 7-27

解 因为

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

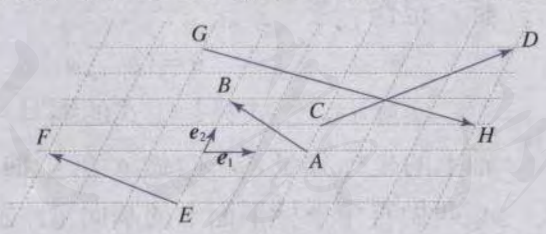
所以

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$
$$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b};$$
$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b};$$
$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b};$$
$$\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

练习

A 组

1. 已知▱$ABCD$ 的两条对角线交于点 O，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}$.
2. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，求满足下面向量等式的实数 x，y：
$$3x\boldsymbol{a}+(10-y)\boldsymbol{b}=(4y+7)\boldsymbol{a}+2x\boldsymbol{b}.$$
3. 如图，已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{GH}$.

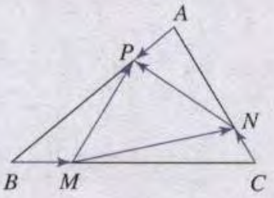


（第 3 题）

B 组

1. 在 $\triangle ABC$ 中，DE 平行 BC 并分别与边 AB，AC 交于点 D，E，如果 $AD=\frac{1}{3}AB$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{EC}$.

2. 如图，已知 M, N, P 分别是 $\triangle ABC$ 三边上的点，且 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NP}$.



（第 2 题）

7.3.2 向量的直角坐标运算

1. 向量的直角坐标

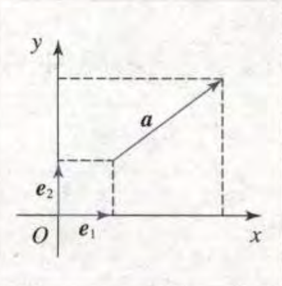


图 7-28

在平面直角坐标系 xOy 内（图 7-28），分别取与 x 轴和 y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$. 在 xOy 平面上任作一向量 $\boldsymbol{a}$，由平面向量分解定理可知，存在唯一的有序实数对(a_1, a_2)，使得

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2, \quad ①$$

(a_1, a_2) 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面直角坐标系 xOy 中的**坐标**，记作

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2). \quad ②$$

实际上，②式只是①式的缩写. 其中 a_1 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标分量，a_2 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标分量. $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫做直角坐标平面上的基向量. 显然

$$\boldsymbol{0}=(0, 0), \boldsymbol{e}_1=(1, 0), \boldsymbol{e}_2=(0, 1).$$

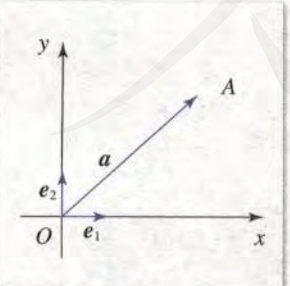


图 7-29

在平面直角坐标系中，一点 A 的位置被点 A 的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 所唯一确定（图 7-29）. 设点 A 的坐标为 (x, y)，容易看出

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=(x, y),$$

即点 A 的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标(x, y)，也就是点 A 的坐标；反之，点 A 的坐标也是点 A 相对于坐标原点的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标.

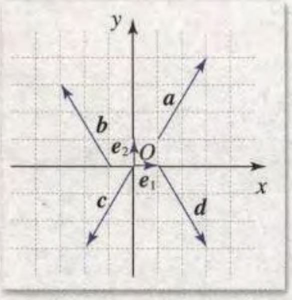


图 7-30

例1 如图 7-30 所示，用基向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分别表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，并求出它们的坐标.

解 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=(2, 3)$；

$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=(-2, 3)$；

$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=(-2, -3)$；

$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=(2, -3)$.

在几何画板软件中，作平面直角坐标系 xOy 和有向线段 $\overrightarrow{AB}$，如图 7-31 所示. 并让有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 进行连续的平移，观察它在 x 轴、y 轴上的投影的变化. 由此你能得出什么结论?

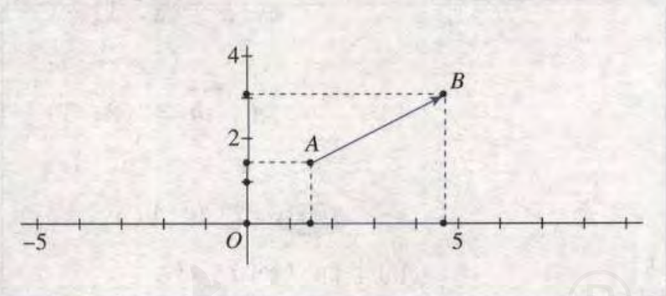


图 7-31

2. 向量的直角坐标运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2);$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1, a_2)-(b_1, b_2)=(a_1-b_1, a_2-b_2);$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1, a_2)=(\lambda a_1, \lambda a_2).$$

知识延伸

向量坐标运算的推导

由向量坐标的定义有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)+(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)\\ &=(a_1+b_1)\boldsymbol{e}_1+(a_2+b_2)\boldsymbol{e}_2\\ &=(a_1+b_1,\ a_2+b_2).\end{aligned}$$

其他两式请同学们自己证明.

上述向量的坐标运算公式，也可用语言分别表述为：

两个向量的和与差的坐标等于两个向量相应坐标的和与差；数乘向量积的坐标等于数乘上向量相应坐标的积.

结合课件 704，学习向量的坐标运算内容.

例2 已知 $\boldsymbol{a}=(2,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,\ 4)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,\ 1)+(-3,\ 4)=(2+(-3),\ 1+4)=(-1,\ 5)$；

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,\ 1)-(-3,\ 4)=(2-(-3),\ 1-4)=(5,\ -3)$；

$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=3(2,\ 1)+4(-3,\ 4)=(6,\ 3)+(-12,\ 16)=(-6,\ 19)$.

例3 已知 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标（图 7-32）.

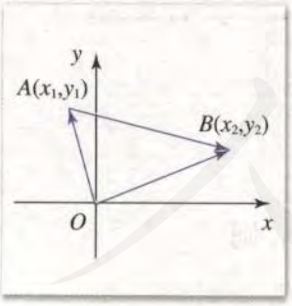


图 7-32

解 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)$

$=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

例 3 所得结果用语言可表述为：

一个向量的坐标等于向量终点的坐标减去始点的相应坐标.

例4 已知 $A(-2,\ 1)$，$B(1,\ 3)$，求线段 AB 中点 M 的坐标（图 7-33）.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$
$$=\frac{1}{2}[(-2,\ 1)+(1,\ 3)]$$
$$=\left(-\frac{1}{2},\ 2\right).$$

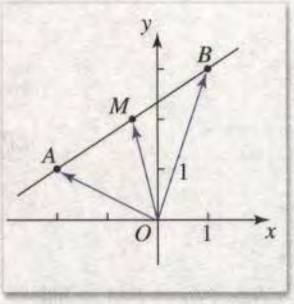


图 7-33

因此 $M\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$.

练习

A 组

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$：

(1) $\boldsymbol{a}=(-2,\ 4)$，$\boldsymbol{b}=(5,\ 2)$； (2) $\boldsymbol{a}=(4,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(-3,\ 8)$；

(3) $\boldsymbol{a}=(2,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\ -3)$；(4) $\boldsymbol{a}=(3,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ 4)$.

2. 已知 A，B 两点的坐标，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$ 的坐标：

(1) $A(3,\ 5)$，$B(6,\ 9)$； (2) $A(-3,\ 4)$，$B(6,\ 3)$；

(3) $A(0,\ 3)$，$B(0,\ 5)$； (4) $A(-3,\ 6)$，$B(-8,\ -7)$.

3. 已知作用在坐标原点的三个力 $\boldsymbol{F}_1=(3,\ 4)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,\ -5)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,\ 1)$，求 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$.

B 组

1. 已知 $\square ABCD$ 的顶点 $A(-2,\ -1)$，$B(3,\ 0)$，$C(2,\ 3)$，试用向量的坐标运算，求顶点 D 的坐标.

2. 已知点 $A(-3,\ -2)$，$B(3,\ 4)$，求线段 AB 的中点的坐标.

3. 用向量的坐标表示向量平行的条件

我们知道，如果 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，则存在唯一实数 λ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；反之，如果存在一个实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

如果$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，则条件 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 可化为 $(a_1, a_2)=\lambda(b_1, b_2)=(\lambda b_1, \lambda b_2)$，即

$$a_1=\lambda b_1, \quad ①$$

$$a_2=\lambda b_2, \quad ②$$

①②两式的两边分别乘 b_2，b_1，得

$$a_1b_2=\lambda b_1b_2, \quad ③$$

$$a_2b_1=\lambda b_2b_1, \quad ④$$

③－④得

$$a_1b_2-a_2b_1=0.$$

事实上，若向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，则

$$\boxed{\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0.}$$

例5 已知点 $A(-2, -1)$，$B(0, 4)$ 和向量 $\boldsymbol{a}=(1, y)$，并且 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$，求 y 的值.

解 由已知条件得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=(0, 4)-(-2, -1)\\&=(2, 5).\end{aligned}$$

因为 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$，所以

$$1\times5-2\times y=0,$$

解此方程得

$$y=\frac{5}{2}.$$

例6 已知点 $A(-2, -3)$，$B(0, 1)$，$C(2, 5)$，求证：A，B，C 三点共线.

证明 由已知条件，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=(0, 1)-(-2, -3)\\&=(2, 4),\\\overrightarrow{AC}&=(2, 5)-(-2, -3)\\&=(4, 8).\end{aligned}$$

因为 $2\times8-4\times4=0$，所以

$$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}.$$

又线段 AB 和 AC 有公共点 A，所以 A，B，C 三点共线.

练习

A组

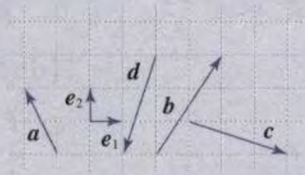
1. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,-4)$，$\boldsymbol{b}=(2, y)$，并且 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$，求 y.
2. 已知点 $A(-1,-3)$，$B(0,-1)$，$C(1,1)$，求证：A，B，C 三点共线.
3. 已知点 $A(0,1)$，$B(1,0)$，$C(1,2)$，$D(2,1)$，求证：$AB \parallel CD$.

B组

已知点 $A(-1,1)$，$B(0,-2)$，$C(3,0)$，$D(2,3)$，求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

习题

1. 如图，用向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$.



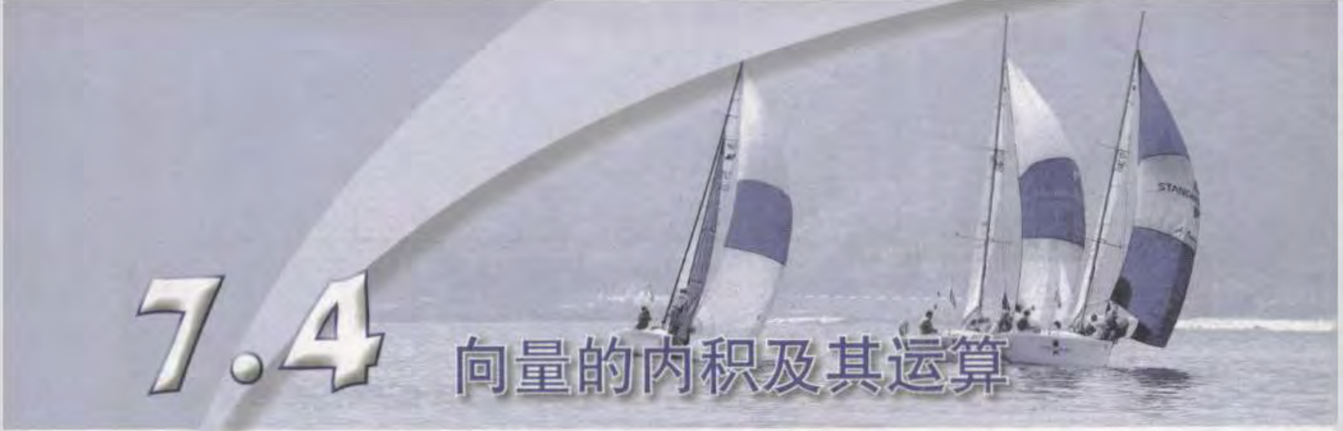
（第1题）

2. 计算下列各式：

(1) $(-1,3)+(2,-2)$；

(2) $\frac{1}{2}(-2,-4)-\frac{1}{3}(3,-6)$.

3. 已知点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，并验证
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}.$$
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，实数 x，y 满足等式 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=(3,4)$，求 x，y.
5. 已知点 $A(-2,3)$，$B(3,5)$，分别求点 A，B 关于点 $M(1,1)$ 的中心对称点 A'，B' 的坐标，并说明 $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$.
6. 已知点 $A(-1,1)$，$B(-4,5)$ 及 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，求点 C，D，E 的坐标.



7.4 向量的内积及其运算

7.4.1 向量的内积

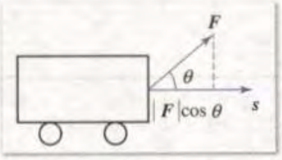


图 7-34

如图 7-34 所示，一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于一个物体，使该物体位移 $\boldsymbol{s}$，如何计算这个力所做的功？由于图示的力的方向与前进方向有一个夹角 θ，真正使物体前进的是 $\boldsymbol{F}$ 在前进方向上的分力，这个分力与物体的位移距离的乘积才是力 $\boldsymbol{F}$ 做的功．即力 $\boldsymbol{F}$ 使物体位移 $\boldsymbol{s}$ 所做的功 W 可用下式计算：

$$W=|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{F}|\cos\theta.$$

其中 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ 就是 $\boldsymbol{F}$ 在物体前进方向上的分量．运算 $|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{F}|\cos\theta$ 叫做位移 $\boldsymbol{s}$ 与力向量 $\boldsymbol{F}$ 的内积．

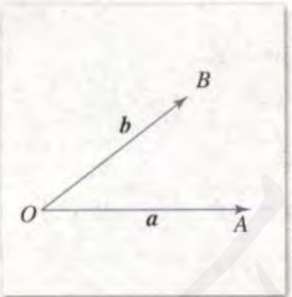


图 7-35

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$（图 7-35），作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 就叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$．我们规定，

$$0^\circ\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant180^\circ.$$

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=90^\circ$ 时，我们说向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}.$$

我们把 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的乘积叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**．记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．即

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.}$$

由上述定义可知，两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积是一个实数，而且它可以是正数、负数或零．

根据向量内积的定义，可以得到两个向量内积有如

下重要性质：

(1) 如果 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}\rangle;$$

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\geqslant 0$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

(4) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

向量的内积运算还满足如下运算律：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

例1 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=120°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 由定义得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle\\&=5\times4\times\cos 120°\\&=-10.\end{aligned}$$

例2 求证：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$；

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$.

证明 (1)

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\=&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\=&|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2;\end{aligned}$$

> 例 2 (2) 的几何意义是：平行四边形的两条对角线的平方和等于两组对边的平方和.

(2) 因为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2,\\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2,\end{aligned}$$

所以

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2).$$

练习

A组

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 分别为

(1) 6；　　(2) -6；　　(3) 8；　　(4) -8.

求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

2. 已知$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1) $|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$；

(2) $|\boldsymbol{a}|=7$，$|\boldsymbol{b}|=12$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$；

(3) $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$；

(4) $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=0$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，求$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=10$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=16$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-25$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=25$；

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=12$.

B组

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=8$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$，求 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

7.4.2 向量内积的坐标运算与距离公式

借助于向量的坐标表示，可以很方便地计算向量的内积. 事实上，我们有：

定理　在直角坐标平面 xOy 内，如果向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，则

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2.}$$

知识延伸

向量内积坐标运算公式的推导

下面来推导上述向量内积的坐标运算公式.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)\\&=a_1b_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+a_1b_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+a_2b_1\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1+a_2b_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1=0$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

如图 7-36，已知 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，则

$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)\cdot(a_1,\ a_2)=a_1^2+a_2^2,$$

所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

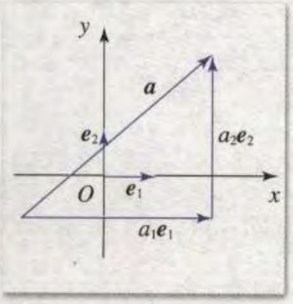


图 7-36

这就是根据向量的坐标求向量长度的计算公式.

如果 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

$\overrightarrow{AB}$ 的长就是 A，B 两点之间的距离，所以上式也就是求两点的距离公式. 这个公式可用语言表述为：

两点间的距离等于两点相应的坐标差的平方和的算术平方根.

例1 已知 $\boldsymbol{a}=(3,\ -1)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ -2)$. 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times(-2)=3+2=5,$

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{3\times3+(-1)\times(-1)}=\sqrt{10},$

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{1\times1+(-2)\times(-2)}=\sqrt{5}.$

因为

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$.

例2 已知 $A(2,-4)$，$B(-2,3)$，求 $|\overrightarrow{AB}|$.

解 因为

$$\overrightarrow{AB}=(-2,3)-(2,-4)=(-4,7),$$

所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+7^2}=\sqrt{65}.$$

例3 已知点 $A(1,2)$，$B(3,4)$，$C(5,0)$. 求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明 因为

$$\overrightarrow{AB}=(3-1,4-2)=(2,2),$$
$$\overrightarrow{AC}=(5-1,0-2)=(4,-2),$$
$$\overrightarrow{BC}=(5-3,0-4)=(2,-4),$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20},$$
$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20},$$

所以 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$.

即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

例4 已知点 $A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$（图 7-37）. 求证：$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

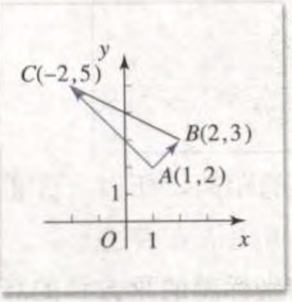


图 7-37

证明 由

$$\overrightarrow{AB}=(2,3)-(1,2)=(1,1),$$
$$\overrightarrow{AC}=(-2,5)-(1,2)=(-3,3),$$

可得

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,1)\cdot(-3,3)=0,$$

所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

注 两个非零向量互相垂直，当且仅当它们的内积等于零，因此可通过计算两向量的内积来判定两个向量是否垂直.

练习

A 组

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 及 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $\boldsymbol{a}=(4,5)$，$\boldsymbol{b}=(-4,3)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(3,5)$，$\boldsymbol{b}=(-5,3)$；

(3) $\boldsymbol{a}=(8, 5)$, $\boldsymbol{b}=(-7, -8)$;

(4) $\boldsymbol{a}=(-11, 2)$, $\boldsymbol{b}=(3, 9)$.

2. 已知 $A(1, 2)$, $B(-5, 8)$, $C(-2, -1)$. 求证：$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$.

B组

1. 已知 x 轴上的点 B 与点 $A(5, 12)$ 的距离等于13，求点 B 的坐标.

2. 已知点 P 的横坐标是7，点 P 到点 $N(-1, 5)$ 的距离等于10，求点 P 的坐标.

习　题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，$\angle BAC=120°$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 是3，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(1, 2)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 3)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;　　(4) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

4. 已知 $A(-10, 3)$，$B(-2, 3)$，$C(0, -1)$，求 $\triangle ABC$ 各边的长.

5. 已知点 $P(x, 2)$，$Q(-2, -3)$，$M(1, 1)$，且 $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PM}|$，求 x 的值.

6. 已知 $A(7, 5)$，$B(2, 3)$，$C(6, -7)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

7. 下面各对向量是否垂直？

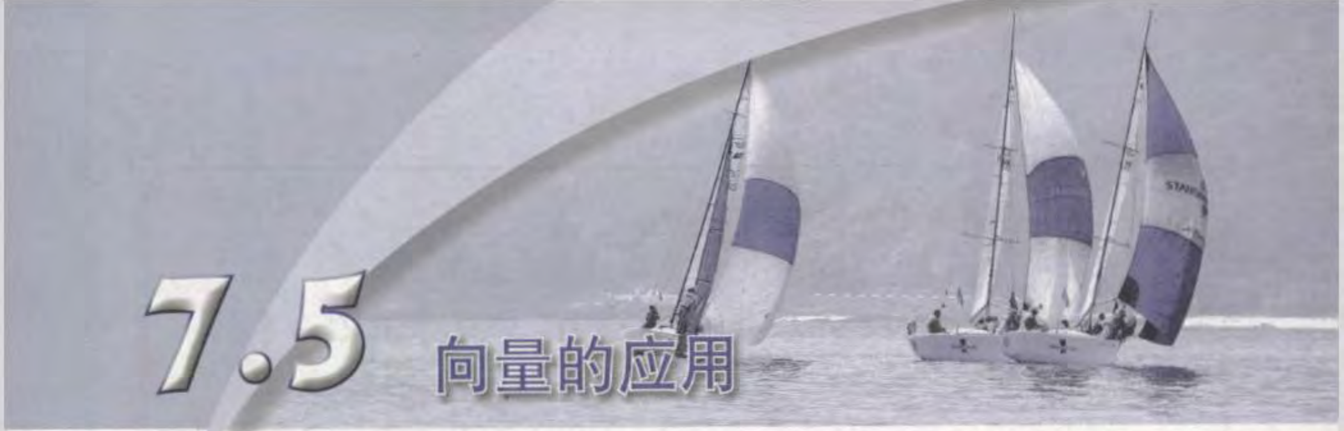
(1) $\boldsymbol{a}=(-3, 2)$，$\boldsymbol{b}=(4, 6)$;　　(2) $\boldsymbol{a}=(7, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 14)$;

(3) $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(2, -\dfrac{2}{3}\right)$;　　(4) $\boldsymbol{a}=(3, 5)$，$\boldsymbol{b}=(5, 3)$.

8. 已知 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，$\boldsymbol{b}=(-y, x)$，$\boldsymbol{c}=(y, -x)$. 求证：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$.

9. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 的余弦值：

(1) $\boldsymbol{a}=(3, 4)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 5)$;　　(2) $\boldsymbol{a}=(-2, -3)$，$\boldsymbol{b}=(1, 2)$.



7.5 向量的应用

1. 力向量

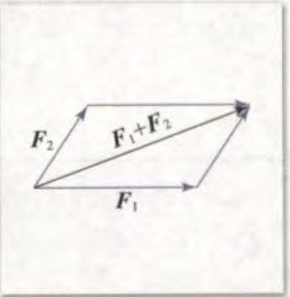


图 7-38

力向量与前面学过的自由向量有些不同，它不仅包括大小、方向两个要素，而且还有作用点. 大小和方向相同的两个力，如果作用点不同，那么它们是不相等的. 但力是具有大小和方向的量，在不计作用点的情况下，可利用向量运算法则进行计算. 例如，求作用于同一点的两个力的合力，可用向量求和的平行四边形法则(图 7-38).

同一平面上，作用于同一点的两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 或三个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 处于平衡状态（图 7-39），可分别表示为

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}.$$

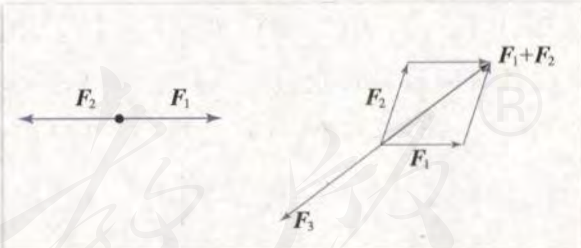


图 7-39

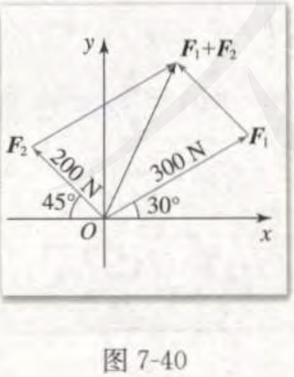


图 7-40

例1 已知两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的大小和方向如图 7-40 所示，求两个力的合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向.

解 设 $\boldsymbol{F}_1=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{F}_2=(b_1,\ b_2)$，则

$$a_1=300\cos 30^\circ\approx 259.8,$$

$$a_2 = 300\sin 30^\circ = 150,$$
$$b_1 = 200\cos 135^\circ \approx -141.4,$$
$$b_2 = 200\sin 135^\circ \approx 141.4,$$

所以

$$\boldsymbol{F}_1 \approx (259.8,\ 150),\ \boldsymbol{F}_2 \approx (-141.4,\ 141.4),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \\ &\approx (259.8,\ 150) + (-141.4,\ 141.4) \\ &= (118.4,\ 291.4),\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{118.4^2 + 291.4^2} \approx 314.5.$$

设 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴的正向夹角为 θ，则

$$\tan\theta \approx \frac{291.4}{118.4} \approx 2.4611.$$

又由 $\boldsymbol{F}$ 的坐标知 θ 是第一象限的角，所以

$$\theta \approx 67^\circ 53'.$$

即两个力的合力约为 314.5 N，与 x 轴的正方向的夹角约为 $67^\circ 53'$，与 y 轴正方向的夹角约为 $22^\circ 7'$.

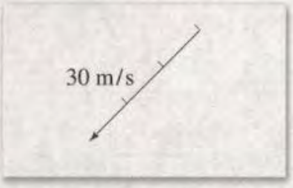


图 7-41

2. 速度向量

一质点在运动中每一时刻都有一个速度向量. 例如，“东北风 30 m/s”可用图 7-41 中的有向线段表示.

例2 河水从东向西流，流速为 2 m/s，一轮船以 2 m/s 垂直水流方向向北航行，求轮船的实际航行的方向和航速（图 7-42）.

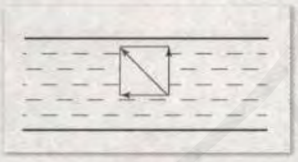


图 7-42

解 设

$$\boldsymbol{a} = \text{“向西方向，2 m/s”},$$
$$\boldsymbol{b} = \text{“向北方向，2 m/s”},$$

则

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| &= \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \\ &\approx 2.8(\text{m/s}).\end{aligned}$$

由 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$. 可得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向为西北方向.

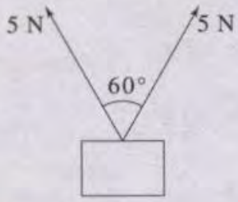
所以轮船实际航行速度为“向西北方向，2.8 m/s”.

以上我们以力、速度向量为例，说明了向量的应

用. 此外，向量在电学、力学、工程和机械等学科中也都有着十分广泛的应用.

习题

1. 某飞机在无风时的航速是 320 km/h，现在飞机向东北飞行，而风速是向北 80 km/h，求这架飞机实际的航行方向和航速.（保留一位小数）
2. 由坐标原点引 $\overrightarrow{OF_1}=(3,\ 1)$，$\overrightarrow{OF_2}=(-4,\ 5)$ 分别表示两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，如果力 $\boldsymbol{F}_3$ 满足 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$. 求 $\boldsymbol{F}_3$ 的大小.
3. 在平面内同时作用于一点的三个大小相等的力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$，彼此所成的角是 $120°$，作图验证 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$.
4. 已知向量 $\overrightarrow{OF_1}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{OF_2}=(-2,\ 3)$ 分别表示两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，求 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 的大小.
5. 如图，用两条绳提一个物体，每条绳用力 5 N，这时两条绳的夹角为 $60°$，且物体处于受力平衡状态，求物体所受重力 G 的大小.



（第 5 题）

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 向量包括哪两个要素？什么叫做两个向量相等？
2. 如何求两个向量及多个向量的和？
3. 向量加法运算满足哪些运算律？
4. 如何作两个向量的差？
5. 什么是向量求和的平行四边形法则？
6. 什么是数乘向量的运算，数乘向量运算的几何意义是什么？
7. 数乘向量运算满足哪些运算律？
8. 什么是平行向量，两个非零向量平行的条件是什么？

9. 叙述平面向量分解定理. 什么是基向量? 平面直角坐标系中的基向量有什么性质?

10. 什么是向量的直角坐标? 如何进行向量的加、减和数乘向量的坐标运算?

11. 什么是两个向量的内积? 向量内积满足哪些运算律? 如何进行向量内积的坐标运算?

阅读材料

向量概念的推广与应用

学习了平面向量我们知道，在平面上建立了坐标系后，坐标平面上的任一向量，都可以用一个有序实数对 (a_1, a_2) 表示. 以后我们可能还将学习空间向量. 空间向量可用一个三元有序实数组 (a_1, a_2, a_3) 来表示. 平面向量、空间向量我们都称之为**几何向量**.

在实际问题中，往往会遇到一些量，需要更多的实数来表示. 比如:

期末进行了五门考试，每个学生的考试成绩情况可用顺序排列的五科成绩来表示;

在汽车生产线上，对装配好的汽车进行制动距离、最高车速、每千米油耗量、滑行距离、噪声、废气排放量等六项指标的测试，那么每辆新车可用六元有序实数组刻画.

n 元有序实数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，叫做 n 维向量，它是几何向量的推广，其中每一个数都称为这个向量的一个分量. 所有 n 维向量的全体构成的集合，叫做 n **维向量空间**，它的一个元素可看成 n 维向量空间的一点.

对于 n 维向量，类似于平面向量，可定义加法和数乘运算、向量的长度(模)、两点的距离等.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$. 则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n).$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \cdots,\ \lambda a_n),\ \lambda\in\mathbf{R}.$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

- n 维空间中，点 $A(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 与 $B(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ 的距离

$$|AB|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}.$$

利用向量的运算可以解决许多实际问题.

为研究某种商品的销售量是否随季节的变化而出现规律性的变化，采集了5年该种商品每月销售量的数据. 每年该商品的销售量可用12个月的销售量所形成的12维向量表示. 不妨设5年的销售向量分别为

$$\boldsymbol{a}_1=(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1\,12});$$

$$\boldsymbol{a}_2=(a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2\,12});$$

$$\boldsymbol{a}_3=(a_{31},\ a_{32},\ \cdots,\ a_{3\,12});$$

$$\boldsymbol{a}_4=(a_{41},\ a_{42},\ \cdots,\ a_{4\,12});$$

$$\boldsymbol{a}_5=(a_{51},\ a_{52},\ \cdots,\ a_{5\,12}).$$

计算这5年的月平均销售向量

$$\frac{1}{5}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5).$$

观察这一向量的12个分量，就可看出这5年月平均销售量是否与季节的变化有关.

上面是一个应用向量线性运算的例子，下面我们来看用“距离”概念解决实际问题的例子.

某企业要为一万名职工制作工作服，每人测量身高、胸围、腰围三个指标. 每个人的身材用三维向量表示，并把它看成三维空间中的一个点. 现准备制作五种型号，需要测量每种型号的服装制作多少套. 用数学语言来描述，就是如何将一万个点分成五类. 一种常用的分类方法是依据“距离”来分. 五种标准型号为五个点，得用两点距离的计算公式，计算每个人的身材点与五个标准点的距离，与哪个标准点的距离最近就归入哪一类. 最后，计算出属于每一类的点数，就是这一类服装所需要的套数（实际计算中应将数据标准化）. 如今是计算机的世界，上述计算不再令人生畏，向计算机输入数据，计算机能在很短时间内完成计算任务.

如果同学们留意的话，会发现有关向量应用的例子比比皆是.

从以上两个例子可以看出，有序实数组构成的向量，比几何向量的应用更加广泛. 在日常生活和科学研究中，有许多量都可以用实数组构成的向量来表示，并可用向量理论研究这些量的性质.

第八章 直线和圆的方程

在实际生活中，常常用数字来确定位置．例如，用经度和纬度这两个数字来确定地球表面点的位置．你去看电影，进电影院后根据电影票上标出的几排几号，就可找到自己的座位．

为了表示空间任意一点的位置，我们需要的不是两个数字，而是三个．例如，为了确定一架正在航行的飞机的位置，我们不仅需要知道飞机所在的经度和纬度，还需要确定它距离地球表面的高度．

除用数字表示位置外，还可用字母或一些确定的符号表示．如下图所示，在一张电子工作表中，每一个长方形单元格的位置可用字母和数字表示．垂直于水平边界的列用字母 A，B，C，D，…表示，水平的行用数字 1，2，3，…表示．于是这张表的每一个长方形单元格的位置，都可用一个字母来表示它的横向位置（所在列），用一个数字来表示它的纵向位置（所在行）．在下图中，第 A 列第 2 行的单元格用 A2 表示．第 C 列第 6 行的单元格用 C6 表示．A2 就是第 A 列第 2 行单元格的坐标．

在数学中，用数字或其他符号来确定一个点或图形位置的方法叫做**坐标方法**．

坐标方法非常重要，它使得现代计算机不仅可以进行各种数值计算，还能解决几何问题，研究图形的性质与图形之间的关系．

这一章，将初步地学习坐标方法，并学习平面解析几何中直线与圆的方程及其应用．

8.1 坐标系中的基本公式

8.1.1 数轴上的距离公式与中点公式

我们知道，数轴上的点与实数是一一对应的. 如图 8-1 所示就是一条数轴❶.

❶如不特别说明，我们约定数轴水平放置，正方向从左到右.

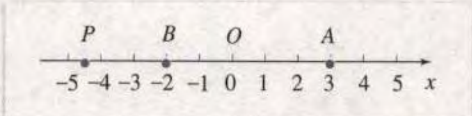


图 8-1

为了方便起见，如果点 P 与数 x 对应，则称点 P 的坐标为 x，记作 $P(x)$. 如图 8-1 所示，点 P 的坐标为 -4.5，记作 $P(-4.5)$；点 B 的坐标为 -2，记作 $B(-2)$；点 A 的坐标为 3，记作 $A(3)$.

探索与研究

如果数轴上的单位长取成 1 cm，你能在数轴上标出对应数 0.001，0.000 1 和 $\sqrt{2}$ 的点吗？你能说明在数轴上确实存在这些点吗？

问题 1 已知数轴上的两点，如何求它们之间的距离？

如图 8-2 所示，我们知道，$A(-1)$，$B(2)$，$C(-3)$. 而且

$$|AB|=|2-(-1)|=3,$$

$$|AC|=|-1-(-3)|=2,$$
$$|BC|=|2-(-3)|=5.$$

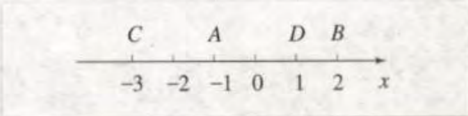


图 8-2

一般地，在数轴上，如果 $A(x_1)$，$B(x_2)$，则这两点之间的距离公式为

$$|AB|=|x_2-x_1|.$$

问题 2 在数轴上给出两点的坐标，如何确定这两点的中点坐标？

如图 8-2 所示，我们知道，$A(-1)$，$C(-3)$ 的中点坐标为 -2，而

$$\frac{(-1)+(-3)}{2}=-2,$$

$A(-1)$，$D(1)$ 的中点坐标为 0，而

$$\frac{(-1)+1}{2}=0.$$

一般地，在数轴上，$A(x_1)$，$B(x_2)$ 的中点的坐标 x 满足关系式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

例 已知点 $A(-3)$，$B(5)$，求：

(1) $|AB|$；

(2) A，B 两点的中点坐标.

解 (1) $|AB|=|5-(-3)|=8$；

(2) 设点 $M(x)$ 是 A，B 两点的中点，则

$$x=\frac{-3+5}{2}$$
$$=1.$$

即 A，B 两点的中点坐标为 1.

练习

A组

1. 已知点 $A(-5)$，$B(-1)$，$C(3)$，$D(4)$，$E(8)$，求：

(1) $|AB|$，$|AC|$，$|BD|$，$|DE|$；

(2) A，B 的中点坐标，B，E 的中点坐标.

2. 在数轴上标出坐标满足下列条件的所有点：

(1) $x<2$；　　(2) $x\geqslant 5$；

(3) $2<x<5$；　　(4) $-3\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 0$.

B组

1. 在数轴上，画出对应代数式 $\frac{|x|}{x}$ $(x\neq 0)$ 值的所有点.

2. 符合下列条件的点 $P(x)$，位于数轴上何处？

(1) $|x|=3$；　　(2) $|x|>1$.

3. 在数轴上求点的坐标，使它到点 $A(-9)$ 的距离是到点 $B(-3)$ 距离的 2 倍.

8.1.2 平面直角坐标系中的距离公式与中点公式

1. 平面直角坐标系中的距离公式

平面直角坐标系内两点之间的距离公式，前面我们已经用向量的知识推导过，下面用数轴上的距离公式和勾股定理再推导一次.

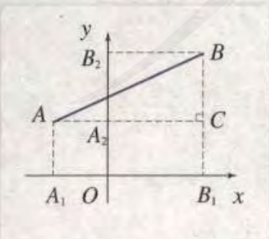


图 8-3

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，如图 8-3 所示. 从 A，B 分别向 x 轴、y 轴作垂线 AA_1，AA_2 和 BB_1，BB_2，垂足分别为

$$A_1(x_1, 0), A_2(0, y_1), B_1(x_2, 0), B_2(0, y_2),$$

其中直线 BB_1 和 AA_2 相交于点 C.

由数轴上的距离公式知

$$|AC| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|,$$
$$|BC| = |A_2B_2| = |y_2 - y_1|.$$

在 Rt△ ACB 中，由勾股定理得

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.\end{aligned}$$

由此得到计算 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点的距离公式

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

已知两点的坐标，为了正确地计算两点之间的距离，我们可分步骤计算：

S1 给两点的坐标赋值

$$x_1 = ?,\ y_1 = ?,\ x_2 = ?,\ y_2 = ?;$$

S2 计算两个坐标的差，并赋值给另外两个变量，即

$$d_x = x_2 - x_1,\ d_y = y_2 - y_1;$$

S3 计算 $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$；

S4 给出两点的距离 d.

通过以上步骤，对任意两点，只要给出两点的坐标，就可以一步步地算出两点的距离.

例1 已知 $A(2, -4)$，$B(-2, 3)$，求 $|AB|$.

解 因为

$$x_1 = 2,\ y_1 = -4,\ x_2 = -2,\ y_2 = 3,$$

所以

$$d_x = x_2 - x_1 = -2 - 2 = -4,$$
$$d_y = y_2 - y_1 = 3 - (-4) = 7.$$

因此

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{65}.\end{aligned}$$

2. 平面直角坐标系内的中点公式

在前面一章中，我们遇到过已知两点坐标求中点坐标的问题. 下面我们借助数轴上的中点公式来得到一般

结论.

问题 在坐标平面内，已知两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，如何计算这两点的对称中心的坐标？即如何计算这两点的中点坐标？

设点 $M(x, y)$ 是 A，B 的对称中心，即线段 AB 的中点.

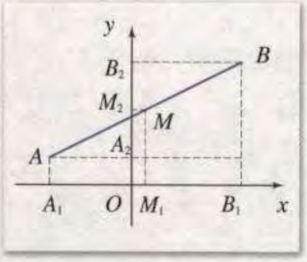


图 8-4

如图 8-4 所示，过点 A，B，M 分别向 x 轴、y 轴作垂线 AA_1，AA_2，BB_1，BB_2，MM_1，MM_2，垂足分别为

$$A_1(x_1, 0),\ A_2(0, y_1),\ B_1(x_2, 0),$$
$$B_2(0, y_2),\ M_1(x, 0),\ M_2(0, y).$$

因为 M 是 AB 的中点，所以点 M_1 和点 M_2 分别是 A_1B_1 和 A_2B_2 的中点.

由数轴上的中点公式，可得

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

这就是线段中点坐标的计算公式，简称**中点公式**.

例2 求证：平面直角坐标系内，点 $P(x, y)$ 与点 $P'(-x, -y)$ 关于坐标原点成中心对称.

证明 设 P 与 P' 的对称中心为 (x_0, y_0)，则

$$x_0=\frac{x+(-x)}{2}=0,$$

$$y_0=\frac{y+(-y)}{2}=0.$$

所以坐标原点为 P 与 P' 的对称中心.

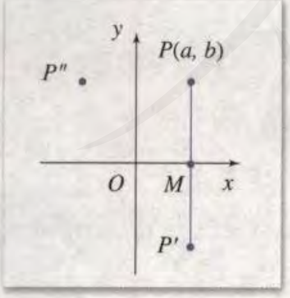


图 8-5

例3 已知坐标平面内的任意一点 $P(a, b)$，分别求它关于 x 轴的对称点 P'，关于 y 轴的对称点 P'' 的坐标（图8-5）.

解 因为 P 与 P' 关于 x 轴对称，PP' 垂直于 x 轴，所以 P' 的横坐标仍等于 a. 容易看到 PP' 与 x 轴的交点是线段 PP' 的中点 M，显然点 M 的纵坐标为 0. 由中点公式可得 P' 的纵坐标为 $-b$. 所以 P' 的坐标为 $(a, -b)$.

同理可得点 P 关于 y 轴对称点 P'' 的坐标为 $(-a, b)$.

例4 已知 $\square ABCD$ 的三个顶点 $A(-3, 0)$, $B(2, -2)$, $C(5, 2)$, 求顶点 D 的坐标 (图 8-6).

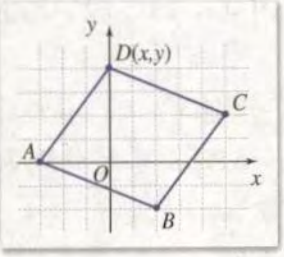


图 8-6

解 因为平行四边形的两条对角线的中点相同，所以它们的坐标也相同. 设点 D 的坐标为 (x, y)，则

$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{-3+5}{2}=1\\ \dfrac{y-2}{2}=\dfrac{0+2}{2}=1\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$

所以顶点 D 的坐标为 $(0, 4)$.

练习

A 组

1. 求两点之间的距离：

(1) $A(6, 2)$, $B(-2, 5)$； (2) $C(2, -4)$, $D(7, 2)$.

2. 求线段 AB 中点的坐标：

(1) $A(3, 4)$, $B(-3, 2)$； (2) $A(-8, -3)$, $B(5, -3)$.

3. 求下列各点关于坐标原点的对称点：

$A(2, 3)$, $B(-3, 5)$, $C(-2, -4)$, $D(3, -5)$.

4. 求下列各点关于 x 轴，y 轴的对称点的坐标：

$A(1, 3)$, $B(-3, 2)$, $C(-5, -4)$, $D(3, -5)$.

B 组

1. 已知点 $A(a, 0)$, $B(0, 10)$ 的距离等于 17，求 a 的值.

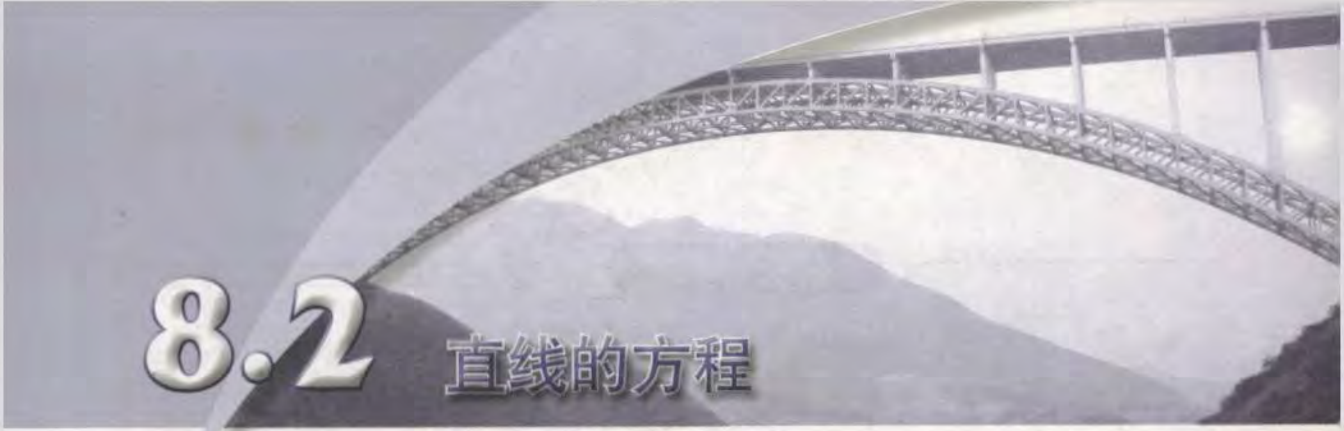
2. 在 x 轴上求满足条件的点 P，使它到点 $A(2, 3)$ 的距离等于 5.

3. 已知 $\square ABCD$ 的三个顶点 $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$, $C(0, 2)$，求顶点 D 的坐标.

习　题

1. 已知点 $A(-10, 30)$，$B(-2, 3)$，$C(0, 1)$，求每两点间的距离.
2. 已知点 $A(-5, 12)$，在 x 轴上求与点 A 的距离等于 13 的点的坐标.
3. 已知点 $A(1, 5)$，$B(5, -2)$，在 x 轴上求一点，使它与点 A，B 的距离相等.
4. 求下列两点的距离和对称中心的坐标：

   (1) $A(7, 4)$，$B(3, 2)$；　　(2) $C(6, -4)$，$D(-2, -2)$.
5. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(2, 1)$，$B(-2, 3)$，$C(0, -1)$，求三条中线的长度.
6. 在 x 轴和 y 轴上各求一点，使它到点 $A(1, 2)$ 和点 $B(5, -2)$ 的距离相等.
7. 已知点 $A(4, 1)$，$B(-3, 2)$，在 y 轴上求点 C，使 $\triangle ABC$ 面积等于 12.
8. 已知 $A(1, 1)$，$B(5, 3)$，$C(0, 3)$，求证：$\triangle ABC$ 为直角三角形.



8.2 直线的方程

8.2.1 直线与方程

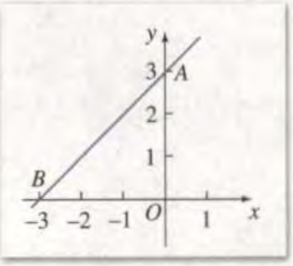


图 8-7

我们知道，一次函数的图象是一条直线．如图 8-7 所示，$y=x+3$ 的图象是直线 AB．不过，这个结论中还蕴含着一个对应关系：$y=x+3$ 是一个代数方程，而直线 AB 是一个几何图形，也就是说，代数方程可以用几何图形表示，几何图形也可以用代数方程来表示．

平面直角坐标系中的任意一条直线，都是由点组成的．但是，已知任意一点的坐标，怎样才能判断它是不是在给定的直线上呢？这需要找出该直线上的点的特征性质，即只有这条直线上的点具有的性质．

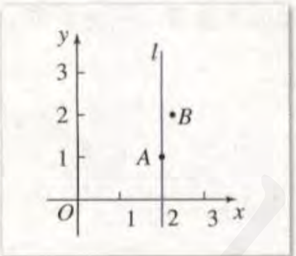


图 8-8

例如，通过点（2，0）且垂直于 x 轴的直线 l，它的特征性质是什么呢？如图 8-8 所示，显然，在直线 l 上的点的横坐标都是 2；反之，横坐标是 2 的点也一定在直线 l 上．所以直线 l 的特征性质可以表述为

$$x=2.$$

这样一来，对于平面直角坐标系中的任意一点，我们只需要看它的坐标是否满足上述方程，就能判断出它是否在直线 l 上．比如，点 $A(2,1)$ 的坐标满足上述方程，所以它在直线 l 上；点 $B(2.3,2)$ 不满足上述方程，所以点 B 不在直线 l 上，如图 8-8 所示．

一般地，在平面直角坐标系中，给定一条直线，如果直线上点的坐标都满足某个方程，而且满足这个方程的坐标所表示的点都在给定的直线上，那么这个方程叫

做直线的方程.

由上面的例子可知，图 8-8 中直线 l 的方程是

$$x=2.$$

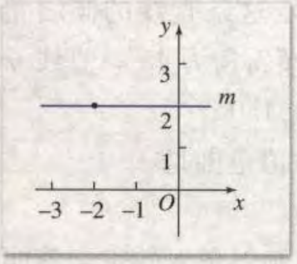


图 8-9

例 分别写出下列直线的方程：

(1) 直线 m 平行于 x 轴，且通过点 $(-2, 2)$；

(2) y 轴所在的直线.

解 (1) 如图 8-9 所示，显然直线 m 上点的纵坐标都是 2；而且，纵坐标是 2 的点都在直线 m 上. 所以直线 m 的方程是

$$y=2.$$

(2) 因为 y 轴上点的横坐标都是 0；而且，横坐标是 0 的点显然都在 y 轴上. 所以 y 轴所在的直线的方程是

$$x=0.$$

练习

A 组

1. 写出垂直于 x 轴，且过点 $\left(-\dfrac{1}{3}, 4\right)$ 的直线的方程.

2. 判断下列各点是否在方程为 $y=-x+1$ 的直线上：

$$A(1, 0), B(3, 2), C(-1, 2), D(0, 1).$$

B 组

1. 已知点 $(1, a)$ 在方程为 $y=3$ 的直线上，求 a 的值.

2. 已知点 $(b, -2)$ 在方程为 $y=4x+1$ 的直线上，求 b 的值.

8.2.2 直线的倾斜角和斜率

如图 8-10 所示，$y=x+3$ 和 $y=3x+3$ 的图象 AB 和 AC 都是直线，直观上可以看出，相对于 x 轴的倾斜程度来讲，直线 AC 比直线 AB 更陡一些. 在数学中，

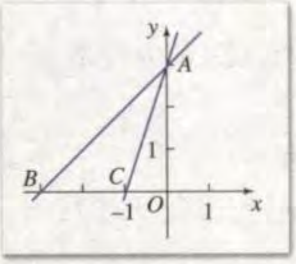


图 8-10

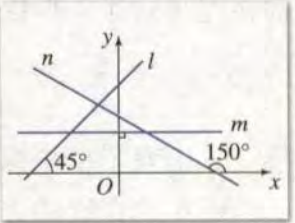


图 8-11

我们用倾斜角和斜率来衡量直线相对于 x 轴的倾斜程度.

一般地，平面直角坐标系内，直线向上的方向与 x 轴正方向所成的最小正角 α 叫做这条直线的**倾斜角**. 特别地，当直线与 y 轴垂直时，规定这条直线的倾斜角为 $0°$. 如图 8-11 所示，直线 l 的倾斜角为 $45°$，直线 m 的倾斜角为 $0°$，直线 n 的倾斜角为 $150°$.

不难看出，直线倾斜角 α 的取值范围是

$$0°\leqslant\alpha<180°.$$

倾斜角不是 $90°$ 的直线，它的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的**斜率**，通常用 k 表示，即

$$\boxed{k=\tan\alpha.}$$

倾斜角是 $90°$ 的直线，斜率不存在.

我们知道，在平面直角坐标系中，给定两个不同的点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，通过这两点的直线 P_1P_2 是确定的. 这样一来，这条直线的倾斜角也是确定的，如果倾斜角不是 $90°$ 的话，它的斜率也是确定的. 下面我们来研究 P_1，P_2 的坐标与直线 P_1P_2 的斜率以及倾斜角之间的关系.

不难看出，当 $x_1=x_2$ 时，直线 P_1P_2 垂直于 x 轴，此时它的倾斜角为 $90°$，斜率不存在，如图 8-12(1) 所示.

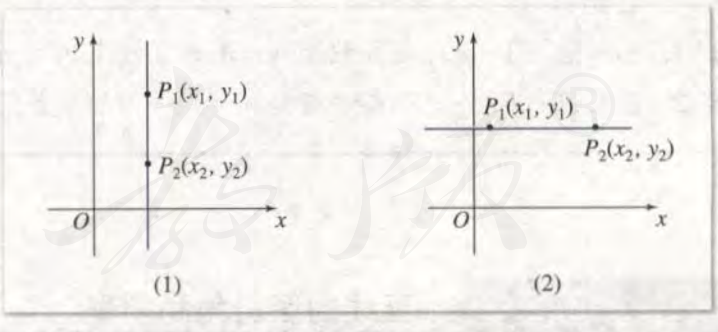


图 8-12

当 $y_1=y_2$ 时，直线 P_1P_2 垂直于 y 轴，此时它的倾斜角为 $0°$，斜率

$$k=\tan 0°=0,$$

如图 8-12(2)所示.

当 $x_1 \neq x_2$ 且 $y_1 \neq y_2$ 时，设直线 P_1P_2 的倾斜角为 α，则 α 要么是锐角，要么是钝角. 此时，利用图 8-13 可以证明，直线 P_1P_2 的斜率满足关系式

$$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

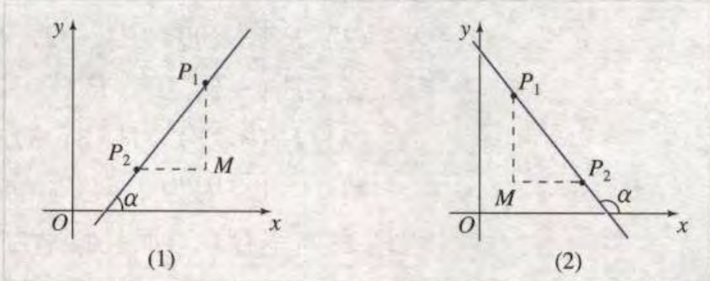


图 8-13

知识延伸

证明图 8-13 中直线的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

如图 8-13 所示，过 P_1 作 x 轴的垂线，过 P_2 作 y 轴的垂线，假设它们相交于点 M，则 $\triangle P_1MP_2$ 是一个直角三角形. 又由 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 可知 M 的坐标为 (x_1, y_2).

如果 α 是锐角，如图 8-13(1)所示，此时

$$\alpha=\angle P_1P_2M,$$
$$|P_1M|=y_1-y_2, |P_2M|=x_1-x_2,$$

因此直线 P_1P_2 的斜率为

$$k=\tan\alpha=\tan\angle P_1P_2M=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

如果 α 是钝角，如图 8-13(2)所示，此时

$$\alpha=180°-\angle P_1P_2M,$$
$$|P_1M|=y_1-y_2, |P_2M|=x_2-x_1,$$

因此直线 P_1P_2 的斜率为

$$k=\tan\alpha=\tan(180°-\angle P_1P_2M)=-\tan\angle P_1P_2M=-\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

一般地，若 $x_1 \neq x_2$，则过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率为

$$\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.}$$

例 判断直线 P_1P_2 的斜率是否存在．若存在，求出它的值：

(1) $P_1(3, 4)$，$P_2(-2, 4)$；

(2) $P_1(-2, 0)$，$P_2(-5, 3)$；

(3) $P_1(3, 8)$，$P_2(3, 5)$．

解 (1) 因为 P_1，P_2 的横坐标不同，所以直线 P_1P_2 的斜率存在，而且斜率为

$$k=\frac{4-4}{-2-3}=0;$$

(2) 因为 P_1，P_2 的横坐标不同，所以直线 P_1P_2 的斜率存在，而且斜率为

$$k=\frac{3-0}{-5-(-2)}=-1;$$

(3) 因为 P_1，P_2 的横坐标相同，所以直线 P_1P_2 的斜率不存在．

练 习

A 组

1. 已知直线的倾斜角 α，求对应的斜率 k：

(1) $\alpha=0°$； (2) $\alpha=30°$； (3) $\alpha=45°$； (4) $\alpha=60°$；

(5) $\alpha=150°$； (6) $\alpha=135°$； (7) $\alpha=120°$．

2. 判断直线 P_1P_2 的斜率是否存在．若存在，求出它的值：

(1) $P_1(1, -1)$，$P_2(-3, 2)$； (2) $P_1(1, -2)$，$P_2(5, -2)$；

(3) $P_1(3, 4)$，$P_2(3, -1)$； (4) $P_1(3, 0)$，$P_2(0, \sqrt{3})$．

B 组

1. 已知直线通过点 $A(2, -1)$，$B(4, 1)$，求这条直线的斜率和倾斜角．

2. 已知直线 l 的斜率为 -2，且直线 l 通过点 $(1, 2)$ 和 $(t, t+2)$，求 t 的值．

8.2.3 直线方程的几种形式

1. 直线的点斜式方程和斜截式方程

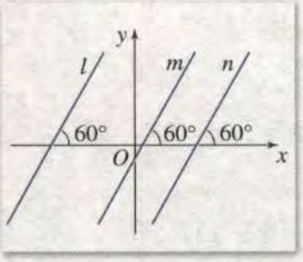


图 8-14

任意给定一个角 $\alpha(0°\leqslant\alpha<180°)$，都可以作出无数条直线，使得它们的倾斜角为 α. 例如，图 8-14 中的直线 l，m，n 的倾斜角都是 60°.

由倾斜角和斜率的关系式 $k=\tan\alpha$ 可知，倾斜角相同的直线，斜率也相等. 因此，给定斜率，不能确定一条直线. 图 8-14 中三条直线的斜率都是

$$\tan 60°=\sqrt{3}.$$

问题 如果直线的倾斜角为 60°（即斜率为$\sqrt{3}$），而且通过点（0，0），那么这样的直线是唯一的吗?

不难看出，上述问题中满足条件的直线唯一.

一般地，给定实数 k 和定点 $P_0(x_0, y_0)$，通过点 P_0 且斜率为 k 的直线 l 是确定的. 下面我们来求 l 的方程.

设直线 l 上不同于 P_0 的任意一点的坐标为 $P(x, y)$，则由 l 的斜率为 k 可知

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

整理得

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0).}$$

上式叫做直线的**点斜式方程**.

一条直线，如果与 y 轴交于点（0，b），则称这条直线在 y 轴上的**截距**为 b.

由直线的点斜式方程可知，如果直线的斜率为 k，截距为 b，则直线的方程为 $y-b=k(x-0)$，即

$$\boxed{y=kx+b.}$$

上式叫做直线的**斜截式方程**.

例1 求下列直线的方程：

(1) 过点 (0，0)，斜率为 2；

(2) 过点 (4，5)，斜率为 1；

(3) 过点 (5，5)，倾斜角为 0°；

(4) 过点 (1，2)，倾斜角为 30°；

(5) 截距为 −3，倾斜角为 45°.

解 (1) 直线的方程为 $y-0=2(x-0)$，即

$$y=2x;$$

(2) 直线的方程为 $y-5=1\times(x-4)$，即

$$y=x+1;$$

(3) 直线的斜率为 $k=\tan 0°=0$，因此它的方程为 $y-5=0\times(x-5)$，即

$$y=5;$$

(4) 直线的斜率为 $k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此它的方程为$y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(x-1)$，即

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2-\frac{\sqrt{3}}{3};$$

(5) 直线的斜率为 $k=\tan 45°=1$，因此它的方程为$y=1\times x+(-3)$，即

$$y=x-3.$$

例2 求下列直线的方程：

(1) 过点 (0，0) 和 (1，5)；

(2) 过点 (5，0) 和 (0，6).

解 (1) 直线的斜率

$$k=\frac{5-0}{1-0}=5,$$

所以直线方程为 $y-0=5\times(x-0)$，即

$$y=5x;$$

(2) 直线的斜率

$$k=\frac{6-0}{0-5}=-\frac{6}{5},$$

所以由直线的斜截式方程得

$$y=-\frac{6}{5}x+6.$$

练习

A组

1. 求下列直线的方程：
   (1) 过点 $(-3,\ 2)$，斜率为 -1；
   (2) 过点 $(3,\ 0)$，斜率为 $\sqrt{2}$；
   (3) 过点 $(-3,\ 1)$，倾斜角为 $135°$；
   (4) 过点 $(0,\ 7)$，倾斜角为 $120°$.
2. 求下列直线的方程：
   (1) 过点 $(-2,\ 2)$ 和 $(-4,\ 3)$；
   (2) 过点 $(-1,\ 0)$ 和 $(0,\ -2)$.

B组

1. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(-1,\ 2)$，$B(3,\ 4)$，$C(-2,\ 5)$：
   (1) 求直线 AB 的方程；
   (2) 求 BC 边上中线所在的直线方程.
2. 已知直线过点 $P_1(a,\ 0)$ 和 $P_2(0,\ b)$，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$，求该直线的方程.
3. 已知直线过点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 和 $P_2(x_2,\ y_2)$，且 $x_1\neq x_2$，求该直线的方程.

2. 直线的一般式方程与方向向量

由前面的知识我们知道，平面直角坐标系中的直线，如果斜率存在，那么它的方程一定可以表示成为 $y=kx+b$ 的形式；如果斜率不存在，那么它的方程可以表示成 $x=a$ 的形式. 不难看出，直线的方程都可以表示成

$$Ax+By+C=0$$

的形式，其中 A，B 不同时为零.

例如，直线 $y=3x-4$ 可表示为 $3x-y-4=0$；直

线 $y=3$ 可表示为 $y-3=0$；直线 $x=-5$ 可表示为 $x+5=0$.

不仅如此，我们还能够证明，二元一次方程

思考与讨论

直线的一般式方程唯一吗？

$$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$$

在平面直角坐标系内对应的一定是直线，上式叫做直线的**一般式方程**.

知识延伸

证明二元一次方程对应的是直线

给定一个二元一次方程

$$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0). \quad ①$$

如果 $B\neq 0$，则①式可以改写为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

这表示的是斜率为 $-\frac{A}{B}$，截距为 $-\frac{C}{B}$ 的直线.

如果 $B=0$，由 $A^2+B^2\neq 0$ 可知 $A\neq 0$，因此①式可以改写为

$$x=-\frac{C}{A},$$

这表示的是与 x 轴垂直，且跟 x 轴交于点 $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ 的直线.

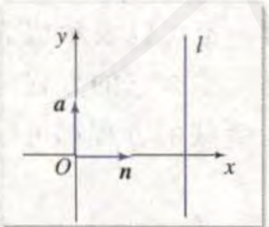


图 8-15

如果非零向量 $\boldsymbol{a}$ 所在的直线与直线 l 平行，则称 $\boldsymbol{a}$ 为直线 l 的一个**方向向量**；如果非零向量 $\boldsymbol{n}$ 所在的直线与直线 l 垂直，则称 $\boldsymbol{n}$ 为直线 l 的一个**法向量**.

如图 8-15 所示，向量 $\boldsymbol{a}=(0, 1)$ 是直线 $x=2$ 的一个方向向量，向量 $\boldsymbol{n}=(1, 0)$ 是直线 $x=2$ 的一个法向量.

显然，如果直线 l 过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，

则$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$是直线 l 的一个方向向量.

另外，如果 $x_1\neq x_2$，则直线 l 的斜率存在，设为 k，令 $\lambda=x_2-x_1$，由

$$(x_2-x_1, y_2-y_1)=\lambda\left(1, \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)=\lambda(1, k)$$

可知，$(1, k)$ 也是直线 l 的一个方向向量.

更进一步，如果 l 的一般式方程为 $Ax+By+C=0$，则由 $P_2(x_2, y_2)$和 $P_1(x_1, y_1)$都在直线上，有

$$Ax_2+By_2+C=0,$$
$$Ax_1+By_1+C=0,$$

两式相减有 $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$，从而向量 $\boldsymbol{n}=(A, B)$与向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的内积为零，即 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$，$\boldsymbol{n}=(A, B)$是 l 的一个法向量.

因此，如果知道直线的斜截式方程 $y=kx+b$，则$(1, k)$是它一个方向向量；如果知道直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$，则(A, B)是它的一个法向量.

例3 求下列直线的一般式方程，并指出它的一个方向向量和法向量：

(1) 过点 $(-3, -2)$，且斜率为-2；

(2) 过点 $(5, 5)$，且倾斜角为 $120°$.

解 (1) 直线的点斜式方程为 $y-(-2)=(-2)\times[x-(-3)]$，化简得 $y=-2x-8$，所以该直线的一般式方程为

$$2x+y+8=0.$$

由此可知，$(1, -2)$ 为直线的一个方向向量，$(2, 1)$ 为直线的一个法向量.

(2) 因为直线的斜率为 $k=\tan 120°=-\sqrt{3}$，所以直线的点斜式方程为 $y-5=(-\sqrt{3})\times(x-5)$，化简得 $y=-\sqrt{3}x+5+5\sqrt{3}$，因此该直线的一般式方程为

$$\sqrt{3}x+y-5-5\sqrt{3}=0.$$

由此可知，$(1, -\sqrt{3})$为直线的一个方向向量，$(\sqrt{3}, 1)$为直线的一个法向量.

例4 求下列直线的一般式方程：

(1) (1, 4) 是直线的一个方向向量，且直线在 y 轴上的截距为 5；

(2) (3, 4) 是直线的一个法向量，且直线通过点 $(-1, -2)$.

解 (1) 由已知可得直线的斜率为 4，所以直线的斜截式方程为 $y=4x+5$，因此一般式方程为

$$4x-y+5=0;$$

(2) 由已知可设直线方程为 $3x+4y+C=0$，其中 C 为待定系数. 代入点 $(-1, -2)$，有

$$3\times(-1)+4\times(-2)+C=0,$$

解得 $C=11$. 因此直线的一般式方程为

$$3x+4y+11=0.$$

练习

A 组

1. 根据条件求下列直线方程的一般式，并指出它的一个方向向量和法向量：

(1) 斜率为 $-\frac{1}{2}$，过点 $A(6, -2)$；

(2) 经过点 $B(3, -3)$ 且平行于 x 轴；

(3) 经过点 $C(-2, 0)$ 和 $D(0, -2)$.

2. 求下列直线的斜率和在 y 轴上的截距：

(1) $3x+y-5=0$； (2) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$；

(3) $x+2y-1=0$； (4) $7x-6y+4=0$；

(5) $3x+4=0$； (6) $7y-2=0$.

B 组

1. 直线 $Ax+By+C=0$ 的系数 A，B，C 满足什么条件时，该直线通过原点？

2. 若 A，B，C 均为常数，那么直线 $Ax+By+C=0$ 的斜率一定存在吗？说明理由.

3.* 求下列直线的一般式方程：

(1) $\left(1,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 是直线的一个方向向量，且直线过点 $(0,\ -1)$；

(2) $(-1,\ -2)$ 是直线的一个法向量，且直线过点 $(3,\ 0)$.

8.2.4 直线与直线的位置关系

问题 在平面几何中，我们知道，同一平面内不重合的两条直线，要么相交，要么平行. 那么，给定平面直角坐标系中的两条直线，我们能否借助于方程来判断它们的位置关系呢？

1. 两直线平行或相交

给定平面直角坐标系中的两直线

$$l_1: y=k_1x+b_1,$$
$$l_2: y=k_2x+b_2,$$

怎样判断它们有没有交点呢？如果有的话，交点怎么求呢？

我们知道，l_1 上的点满足 $y=k_1x+b_1$，l_2 上的点满足 $y=k_2x+b_2$，因此如果一个点是 l_1 和 l_2 的交点，那么它的坐标必定满足

$$\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases} \qquad ①$$

因此，只须解上述方程组，就可知 l_1 和 l_2 有没有交点了.

①中的两式相减，整理得

$$(k_1-k_2)x=-(b_1-b_2). \qquad ②$$

如果 $k_1 \neq k_2$，那么②有唯一解，从而①有唯一解，也就是说 l_1 和 l_2 有一个交点，且①的解就是两直线的

交点坐标.

如果 $k_1=k_2$，而且 $b_1\neq b_2$，那么②无解，从而①无解，也就是说 l_1 和 l_2 没有交点，即 l_1 和 l_2 平行.

如果 $k_1=k_2$，而且 $b_1=b_2$，那么②有无穷多个解，从而①也有无穷多解，也就是说 l_1 和 l_2 有无数个交点，即 l_1 和 l_2 重合.

事实上，如果 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，那么：

> l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow k_1\neq k_2$；
> l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$；
> l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1=b_2$.

如果知道的是两直线的一般式方程，也只要用类似的方法就可以判断出它们的位置关系.

知识延伸

用方向向量推导两直线的位置关系

因为 $\boldsymbol{a}_1=(1, k_1)$ 为 l_1 的一个方向向量，$\boldsymbol{a}_2=(1, k_2)$ 为 l_2 的一个方向向量，而且不难得到

$$\boldsymbol{a}_1 \text{ 与 } \boldsymbol{a}_2 \text{ 平行} \Leftrightarrow k_1=k_2.$$

所以 l_1 与 l_2 平行或重合时，当且仅当 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 平行，即 $k_1=k_2$；l_1 与 l_2 相交时，当且仅当 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 不平行，即 $k_1\neq k_2$.

例1 判断下列各对直线的位置关系（相交、平行或重合），如果相交，求出交点：

(1) $l_1: y=3x+4$，$l_2: y=3x-4$；

(2) $l_1: y=-3$，$l_2: y=1$；

(3) $l_1: y=-3x+4$，$l_2: y=x-8$.

解 (1) 因为两直线斜率都为 3，而截距不相等，所以 l_1 与 l_2 平行；

(2) 因为两直线斜率都为 0，而截距不相等，所以 l_1 与 l_2 平行；

(3) 因为两直线斜率不相等，所以 l_1 与 l_2 相交. 联立得方程组

$$\begin{cases} y=-3x+4 \\ y=x-8 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$

因此，l_1 与 l_2 的交点为 $(3, -5)$.

例2 判断下列各对直线的位置关系（相交、平行或重合），如果相交，求出交点：

(1) $l_1: x-1=0$，$l_2: y+4=0$；

(2) $l_1: x-y-3=0$，$l_2: x+y+1=0$；

(3) $l_1: x-2y+3=0$，$l_2: 2x-4y+6=0$.

解 (1) 联立得方程组

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y+4=0 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

因此，l_1 与 l_2 相交，且交点为 $(1, -4)$.

(2) 联立得方程组

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

因此，l_1 与 l_2 相交，且交点为 $(1, -2)$.

(3) 联立得方程组

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x-4y+6=0 \end{cases}$$

第二式减第一式的 2 倍得 $0=0$，所以上述方程组有无穷多组解，即 l_1 与 l_2 有无穷多个交点.

因此，l_1 与 l_2 重合.

练习

A 组

1. 判断下列各对直线的位置关系（相交、平行或重合），如果相交，求出交点：

(1) $l_1: y=-\sqrt{2}x+1$，$l_2: y=-\sqrt{2}x-1$；

(2) $l_1: y=2x+3$，$l_2: y=-2x+3$；

(3) $l_1: y=\frac{x}{3}+4$，$l_2: y=\frac{x}{2}+2$；

(4) $l_1: y=5x-3$，$l_2: y=\frac{x}{5}+1$.

2. 判断下列各对直线的位置关系（相交、平行或重合），如果相交，求出交点：

(1) $l_1: 3x-4=0$，$l_2: 4y-3=0$；

(2) $l_1: 2x-y+1=0$，$l_2: x-2y+1=0$；

(3) $l_1: \frac{x}{3}-\frac{y}{4}+1=0$，$l_2: 4x-3y+12=0$；

(4) $l_1: 2x-3y=0$，$l_2: 3x-2y=0$.

B 组

1. 求与直线 $y=-3x+1$ 平行，且过点 (2，3) 的直线的方程.
2. 求与直线 $x-y+4=0$ 平行，且截距为 -2 的直线的方程.
3. 已知 $A\neq0$ 且 $B\neq0$，求证：直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax-By+C_2=0$ 相交，并求出交点.

2. 直线与直线垂直

问题 已知直线

$$l_1: y=k_1x+b_1,$$
$$l_2: y=k_2x+b_2,$$

当它们的方程满足什么条件时，l_1 与 l_2 垂直？

因为 l_1 与 l_2 垂直，当且仅当它们的方向向量相互垂直. 又 $\boldsymbol{a}_1=(1, k_1)$ 为 l_1 的一个方向向量，$\boldsymbol{a}_2=(1, k_2)$ 为 l_2 的一个方向向量，且

$$\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=0 \Leftrightarrow 1+k_1k_2=0,$$

所以

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

例3 判断下列各对直线是否垂直：

(1) $l_1: y=-2x+1$，$l_2: y=\frac{1}{2}x-1$；

(2) $l_1: y=3x+1$，$l_2: y=\frac{1}{3}x-4$.

解 (1) 因为$(-2)\times\frac{1}{2}=-1$，所以 $l_1\perp l_2$；

(2) 因为 $3\times\frac{1}{3}=1\neq-1$，所以 l_1 与 l_2 不垂直.

如果已知直线

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0,$$

那么怎么判断它们是否垂直呢？

因为 l_1 与 l_2 垂直，当且仅当它们的法向量相互垂直. 又 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1)$为 l_1 的一个法向量，而且 $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2)$为 l_2 的一个法向量，又

$$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0,$$

所以

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$$

例4 判断下列各对直线是否垂直：

(1) $l_1: 2x-3y+4=0$，$l_2: x-y+6=0$；

(2) $l_1: 3x-4y-11=0$，$l_2: 8x+6y+3=0$.

解 (1) 因为

$$2\times1+(-3)\times(-1)=5\neq0,$$

所以 l_1 与 l_2 不垂直；

(2) 因为

$$3\times8+(-4)\times6=0,$$

所以 $l_1\perp l_2$.

练 习

A 组

1. 判断下列各对直线是否垂直：

(1) $y=x$，$y=-x+2$；

(2) $y=3x$，$y=\frac{1}{3}x-1$；

(3) $y=x-1$，$y=x+1$；

(4) $y=\frac{1}{7}x+2$，$y=-7x+2$.

2. 判断下列各对直线是否垂直：

(1) $x+3=0$，$y-4=0$；

(2) $2x+3y-7=0$，$3x+2y-9=0$；

(3) $2x-3y-7=0$，$3x+2y-1=0$；

(4) $x-4y-5=0$，$4x-3y-5=0$.

B 组

1. 已知 $A(2,5)$，$B(6,-1)$，$C(9,1)$，求直线 AB 和 BC 的方程，并证明 $AB\perp BC$.

2. 求过点 $(3,-5)$ 且与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 垂直的直线方程.

3. 求过点 $(4,-3)$ 且与直线 $x+5y-3=0$ 垂直的直线方程.

8.2.5 点到直线的距离

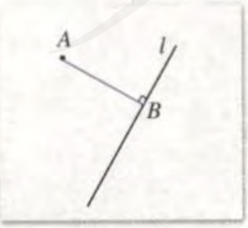


图 8-16

我们知道，直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离. 如图 8-16 所示，点 A 到直线 l 的距离即为线段 AB 的长度.

问题 给定平面直角坐标系内一点的坐标和直线的方程，如何求点到直线的距离？

若点 $P(3,4)$，直线 l 的方程为 $x-5=0$，则由直

线 l 垂直于 x 轴不难得出，点 P 到直线 l 的距离为

$$|3-5|=2.$$

一般地，求点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 到直线 l:$Ax+By+C=0$ 的距离 d 的公式是

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

由以上公式可知，只要知道点的坐标和直线的一般方程，就可求出点到直线的距离. 而且，不难看出，若点 P 在直线 l 上，则点 P 到 l 的距离为零；反之也成立.

知识延伸

点到直线距离公式的推导

设 $P(x,\ y)$ 是直线 l 上任一点，$P_0(x_0,\ y_0)$ 到直线 l 的距离 d，就是向量 $\overrightarrow{PP_0}$ 在直线法向量方向上正射影的长度（图 8-17).

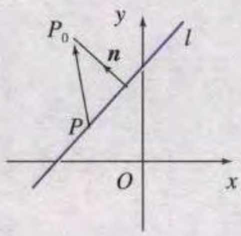


图 8-17

直线 l 的一个法向量为

$$\boldsymbol{n}=(A,\ B).$$

由内积运算的几何意义，$\overrightarrow{PP_0}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上正射影的长度就是点 P_0 到直线 l 的距离 d，即

$$\begin{aligned} d&=\frac{|\overrightarrow{PP_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(x_0-x,\ y_0-y)\cdot(A,\ B)|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\ &=\frac{|A(x_0-x)+B(y_0-y)|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\ &=\frac{|Ax_0+By_0-(Ax+By)|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \end{aligned}$$

由于 $P(x,\ y)$ 是直线 l 上一个点，所以 $Ax+By+C=0$. 从而得

$$C=-(Ax+By),$$

所以

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

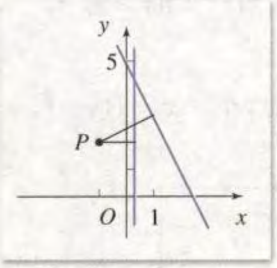


图 8-18

例1 求点 $P(-1, 2)$ 分别到直线 $l_1: 2x+y=5$，$l_2: 3x=1$ 的距离 d_1 和 d_2（图 8-18）.

解 将直线 l_1，l_2 的方程分别化为一般式

$$2x+y-5=0,\ 3x-1=0.$$

由点到直线的距离公式，得

$$d_1=\frac{|2\times(-1)+1\times2-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5};$$

$$d_2=\frac{|3\times(-1)-1|}{3}=\frac{4}{3}.$$

注 由于 $3x=1$ 是平行于 y 轴的一条直线（图 8-18），不用公式就可直接计算

$$d_2=\left|-1-\frac{1}{3}\right|=\frac{4}{3}.$$

例2 求平行线 $2x-7y+8=0$ 和 $2x-7y-6=0$ 之间的距离.

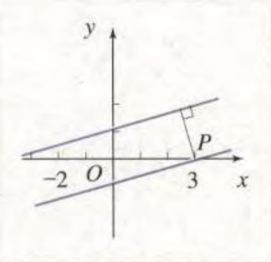


图 8-19

解 在直线 $2x-7y-6=0$ 上任取一点，例如取 $P(3, 0)$（图 8-19），则所求距离就是点 $P(3, 0)$ 到直线

$$2x-7y+8=0$$

的距离.

因此

$$d=\frac{|2\times3-7\times0+8|}{\sqrt{2^2+(-7)^2}}=\frac{14}{\sqrt{53}}=\frac{14\sqrt{53}}{53}.$$

练习

A 组

1. 求下列点到直线的距离：

(1) $O(0, 0)$，$3x+4y-5=0$；

(2) $A(2, -3)$，$x+y-1=0$；

(3) $B(1, 0)$，$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$；

(4) $C(1, 2)$, $3x+y=0$;

(5) $D(-2, 3)$, $y-7=0$.

2. 求 x 轴上到直线 $x-y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点的坐标.

B 组

1. 求两条平行线 $2x+3y-8=0$ 和 $2x+3y+18=0$ 之间的距离.

2. 求两条平行线 $3x-2y-1=0$ 和 $6x-4y+3=0$ 之间的距离.

习　题

1. 求过点 $(5, 107)$，且与 x 轴平行的直线方程.

2. 求过点 $(3, 4)$，且在 y 轴上的截距为 2 的直线方程.

3. 求经过以下两点的直线方程，并指出直线的一个方向向量和法向量：

(1) $A(3, 7)$, $B(3, 0)$;

(2) $C(4, 5)$, $D(7, -1)$;

(3) $E(2, -2)$, $F(100, -2)$;

(4) $G(-5, 0)$, $H(0, 7)$.

4. 求过点 P，且平行于直线 l 的直线方程：

(1) $P(5, 2)$, $l: 3x-y+1=0$;

(2) $P(-1, 4)$, $l: 5x-3y+2=0$;

(3) $P(-3, -4)$, $l: x+y=0$;

(4) $P(1, 2)$, $l: x+3y=0$.

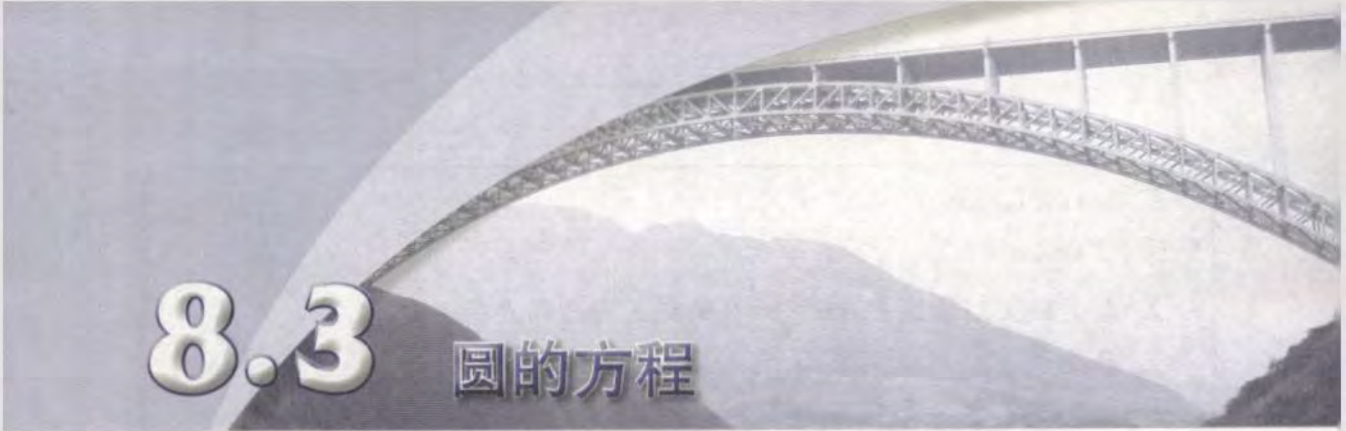
5. 求过点 P，且垂直于直线 l 的直线方程：

(1) $P(-2, 1)$, $l: 3x+y-3=0$;

(2) $P(2, 0)$, $l: x-3y-4=0$;

(3) $P(-1, 4)$, $l: x-3=0$.

6. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(0, 0)$, $B(4, 6)$, $C(7, 1)$. 求 BC 边上的高所在的直线方程.



8.3 圆的方程

8.3.1 圆的标准方程

我们知道，圆是平面内到一定点的距离等于定长的点的轨迹. 定点是圆心，定长是圆的半径.

问题 如何求出以 $C(a, b)$ 为圆心，以 r 为半径的圆的方程？（图 8-20）

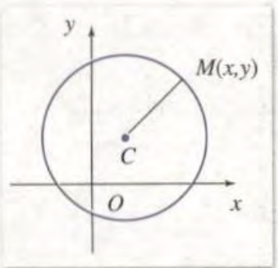


图 8-20

设 $M(x, y)$ 是所求圆上任一点，所求的圆就是点集

$$\{M(x, y) \mid |CM| = r\}.$$

点 M 在圆 C 上，当且仅当

$$|CM| = r. \qquad ①$$

由距离公式，①式换用坐标表示，得

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$

两边平方，得

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.} \qquad ②$$

方程②就是以 $C(a, b)$ 为圆心，以 r 为半径的圆的方程，叫做**圆的标准方程**.

如果圆心在原点，这时 $a = 0$，$b = 0$，圆的标准方程就是

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2.}$$

例如，以 $C(1, -2)$ 为圆心，半径为 3 的圆的方程是

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9;$$

以原点为圆心，半径为 3 的圆的方程是

$$x^2+y^2=9.$$

例1 求过点 $A(6,0)$，且圆心 B 的坐标为 $(3,2)$ 的圆的方程.

分析 求一个圆的方程，就是确定该圆的圆心坐标和半径. 由于圆心坐标已知，故只要求半径即可. 显然，半径等于 $|AB|$.

解 因为圆的半径

$$r=|AB|=\sqrt{(3-6)^2+(2-0)^2}=\sqrt{13},$$

所以所求圆的方程是

$$(x-3)^2+(y-2)^2=13.$$

例2 求以直线 $x-y+1=0$ 和 $x+y-1=0$ 的交点为圆心，半径为$\sqrt{3}$的圆的方程.

解 由方程组

$$\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-1=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

即所求圆的圆心坐标为 $(0,1)$，又因为半径为$\sqrt{3}$，所以所求圆的方程为

$$x^2+(y-1)^2=3.$$

练习

A 组

1. 求符合下列条件的圆的方程：

(1) 圆心在原点，半径为 2；

(2) 圆心在点 $(-2,1)$，半径为$\sqrt{3}$；

(3) 圆心在点 $(2,1)$，半径为$\sqrt{5}$；

(4) 圆心在点 $(0,1)$，半径为 2.

2. 求符合下列条件的圆的方程：

(1) 已知点 $A(2, 3)$，$B(4, 9)$，以线段 AB 为直径；

(2) 圆心在 $(0, -3)$，过点 $(3, 1)$.

B组

1. 求过点 $(0, 1)$ 和 $(0, 3)$，且半径为 1 的圆的方程.
2. 求圆心在 $x+y+3=0$ 上，且过点 $A(6, 0)$，$B(1, 5)$的圆的方程.

8.3.2 圆的一般方程

上一节我们已得到圆心在 (a, b)，半径为 r 的圆的标准方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

将其展开，得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

可见，任何一个圆的方程都可以表示成

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.} \qquad ①$$

其中 D，E，F 为常数.

那么，方程①表示的一定是圆吗？

我们将方程①左边配方，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \qquad ②$$

(1) 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，将方程②与圆的标准方程比较，可以看出方程①表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆；

(2) 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程①只有实数解 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，所以方程①表示一个点

$\left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$;

(3) 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程①没有实数解，因而它不表示任何图形.

因此，只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程①才表示一个圆，这时方程①叫做**圆的一般方程**.

圆的标准方程明确指出了圆的圆心和半径，而圆的一般方程表明了方程形式上的特点.

要求圆的标准方程，需确定圆的圆心坐标和半径，而要求圆的一般方程，则需确定方程的三个系数 D，E，F.

例1 求过三点 $O(0, 0)$，$M(1, 1)$，$N(4, 2)$ 的圆的方程，并求出这个圆的半径和圆心坐标.

解 设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

其中 D，E，F 待定. 因点 O，M，N 在圆上，所以它们的坐标是方程的解，把它们的坐标依次代入上面的方程，得到关于 D，E，F 的三元一次方程组

$$\begin{cases} F=0 \\ D+E+F+2=0 \\ 4D+2E+F+20=0 \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} D=-8 \\ E=6 \\ F=0 \end{cases}$$

于是得到所求圆的方程为

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

将这个方程配方，得

$$(x-4)^2+(y+3)^2=25.$$

所以所求圆的圆心坐标是 $(4, -3)$，半径是 5.

例2 已知一曲线是与两个定点 $O(0,0)$，$A(3,0)$ 距离的比为 $\dfrac{1}{2}$ 的点的轨迹，求这个曲线的方程，并画出

曲线.

解　在给定的坐标系中，设$M(x, y)$是曲线上的任意一点，点M在曲线上当且仅当

$$\frac{|OM|}{|AM|}=\frac{1}{2}.$$

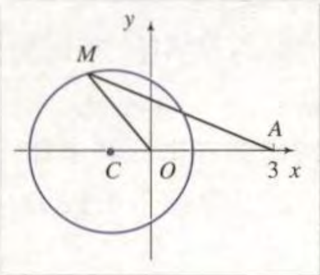


图 8-21

由两点间的距离公式，上式可用坐标表示为

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2}.$$

两边平方并化简，得曲线方程为

$$x^2+y^2+2x-3=0.$$

将方程配方，得

$$(x+1)^2+y^2=4.$$

所以所求曲线是以$C(-1, 0)$为圆心，半径为2的圆，如图8-21所示.

练习

A组

1. 求出下列圆的圆心坐标和半径：

(1) $x^2+y^2-6x=0$；

(2) $x^2+y^2-6y=0$；

(3) $x^2+y^2-4x-6y+12=0$；

(4) $2x^2+2y^2-4x+8y+5=0$.

2. 求经过三点$(0, 0)$，$(3, 2)$，$(-4, 0)$的圆的方程.

B组

1. 求与两定点$A(-1, 2)$，$B(3, 2)$的距离的比为$\sqrt{2}$的点的轨迹方程.

2. 已知圆的一般方程为$x^2+y^2-2x-2y+F=0$，且该圆通过点$(0, -1)$，求该圆的半径.

习　题

1. 求出下列圆的方程，并画出图形：

(1) 圆心在点 $C(-1, 1)$，过直线 $x+3y+7=0$ 与 $3x-2y-12=0$ 的交点；

(2) 过点 $A(-1, 1)$ 和 $D(1, 3)$，圆心在 x 轴上；

(3) 已知点 $A(-2, 4)$，$B(8, -2)$，且 AB 为圆的直径.

2. 求过点 $A(1, 1)$，$B(-3, 5)$，且圆心在直线 $2x+y+2=0$ 上的圆的方程.

3. 求下列各圆的圆心坐标和半径，并画出图形：

(1) $x^2+y^2-2x-5=0$；　　(2) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$；

(3) $x^2+y^2+4x=0$；　　(4) $x^2+y^2-5y+1=0$.

4. 已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x+6y+6=0$，圆 C_2：$x^2+y^2-4x-8y+7=0$，求两圆的圆心距.

5. 求经过两圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 和 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点，且圆心在直线 $x-y-4=0$ 上的圆的方程.

6. 已知圆的直径端点为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，求证：该圆的方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

8.4 直线与圆的位置关系

我们知道，平面内直线和圆的位置关系有三种，如图8-22所示：当直线与圆没有公共点时，它们相离；有且只有一个公共点时，它们相切；有两个公共点时，它们相交.

图 8-22

问题 给定坐标平面内的直线和圆，如何根据它们的方程判断它们的位置关系？

例1 判断直线 $l: y=x+2$ 和圆 $O: x^2+y^2=2$ 的位置关系.

分析 可以通过直线和圆的公共点数目来判定它们之间的关系，而一个点若是它们的公共点，那么这个点的坐标一定同时满足它们的方程.

解 将直线和圆的方程联立，得

$$\begin{cases} y=x+2 & ① \\ x^2+y^2=2 & ② \end{cases}$$

将①式代入②式，整理得

$$x^2+2x+1=0,$$

解得 $x=-1$. 将 $x=-1$ 代入①式得 $y=1$.

所以上述方程组的解为

$$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$$

因此直线 l 和圆 O 有且只有一个公共点 $(-1, 1)$，即直线 l 和圆 O 相切.

我们还知道，如果圆的半径为 r，圆心到直线的距离为 d，则：$d>r$ 时，直线和圆相离；$d=r$ 时，直线和圆相切；$d<r$ 时，直线和圆相交. 因此，也可通过比较圆心到直线的距离和圆的半径来判断直线和圆的位置关系.

上述例 1 中，圆 O 的圆心 $(0, 0)$ 到直线 l 的距离为

$$\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},$$

正好等于圆的半径，所以由此同样可以得到直线 l 和圆 O 相切.

例2 已知直线 l：$x+y+C=0$ 和圆 M：$(x-1)^2+(y+1)^2=4$，问 C 为何值时，直线 l 和圆 M 相离、相切、相交？

解 显然，圆 M 的圆心为 $M(1, -1)$，半径 $r=2$. 圆心 M 到直线 l 的距离 d 为

$$d=\frac{|1+(-1)+C|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|C|}{\sqrt{2}}.$$

当 $d>r$ 时，即 $\frac{|C|}{\sqrt{2}}>2$，$C>2\sqrt{2}$ 或 $C<-2\sqrt{2}$ 时，直线 l 和圆 M 相离；

当 $d=r$ 时，即 $\frac{|C|}{\sqrt{2}}=2$，$C=2\sqrt{2}$ 或 $C=-2\sqrt{2}$ 时，直线 l 和圆 M 相切；

当 $d<r$ 时，即 $\frac{|C|}{\sqrt{2}}<2$，$-2\sqrt{2}<C<2\sqrt{2}$ 时，直线 l 和圆 M 相交.

例3 求过圆 O：$x^2+y^2=10$ 上一点 $M(2, \sqrt{6})$，且与圆相切的直线 l 的方程.

解 显然，直线 l 与直线 OM 垂直，而直线 OM 的斜率为

$$\frac{\sqrt{6}-0}{2-0}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

由此可知直线 l 的斜率为 $(-1)\div\frac{\sqrt{6}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由直线的点斜式方程可知直线 l 的方程为

$$y-\sqrt{6}=-\frac{\sqrt{6}}{3}(x-2),$$

即 $\sqrt{6}x+3y-5\sqrt{6}=0$.

习　题

1. 判断直线 $4x-3y+6=0$ 与圆 $(x-4)^2+(y+1)^2=25$ 的位置关系.
2. 已知直线 $x+5y+C=0$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 相切，求 C 的值.
3. 求过圆 $x^2+y^2=4$ 上一点 $(-1,\sqrt{3})$ 的切线方程.
4. 求过点（8，1）且与两坐标轴都相切的圆的方程.（提示：考虑与两坐标轴相切的圆的圆心坐标有什么特点，与半径有什么关系.）
5. 求半径为 5，过点（1，2）且与 x 轴相切的圆的方程.
6. 已知圆 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 与直线 $y=2x+b$，问 b 为何值时，直线与圆相交、相切、相离？
7. 求通过圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 上的一点 $A(6,8)$ 的圆的切线方程.（提示：设圆心为 C，则 $\overrightarrow{CA}$ 就是所求切线的一个法向量.）
8. 设 $M(x_0,y_0)$ 是圆 $O:x^2+y^2=r^2$ 上一点，求证：过 M 且与圆 O 相切的直线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

8.5 直线与圆的方程的应用

例1 在一次设计电路板的实验中，张明设计的电路板如图 8-23 所示（单位：cm），现在张明要从 P 点连一条线到线段 AB 上，他想知道这条线的最短长度，你能替他计算出来吗？（精确到 0.01 cm）

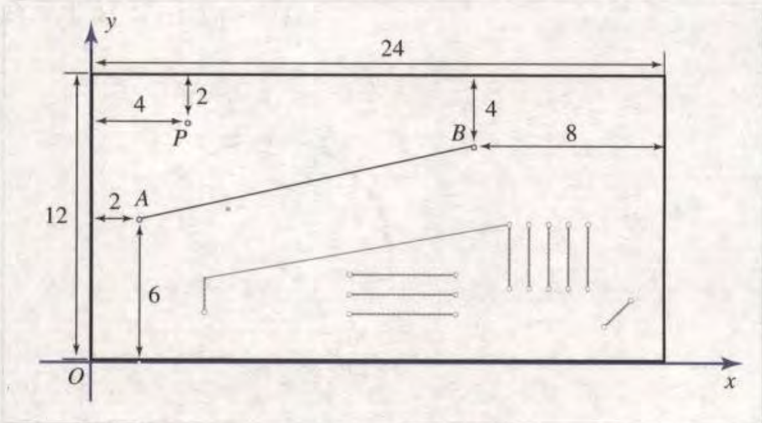


图 8-23

解 不难看出，点 P 到直线 AB 的距离就是张明想知道的，所以可以利用直线的有关知识来解.

以这块电路板的左下角为原点，建立如图 8-23 所示的平面直角坐标系，由图中尺寸可知

$$A(2,\ 6),\ B(16,\ 8),\ P(4,\ 10).$$

因此直线 AB 的斜率 $k=\frac{8-6}{16-2}=\frac{1}{7}$，所以直线 AB 的方程为 $y-6=\frac{1}{7}(x-2)$，即

$$x-7y+40=0.$$

从而可知点 P 到直线 AB 的距离为

$$\frac{|4-7\times10+40|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{26}{\sqrt{50}}\approx3.68,$$

所以张明想知道的那条线的最短长度约为 3.68 cm.

例2 某次生产中，一个圆形的零件损坏了，只剩下了如图 8-24 所示的一部分.

现在陈阳所在的车间准备重新做一个这样的零件，为了获得这个圆形零件的半径，陈阳在零件上画了一条线段 AB（如图 8-24），并作出了 AB 的垂直平分线 MN，而且测得 $AB=8$ cm，$MN=2$ cm. 根据已有数据，试帮陈阳求出这个零件的半径.

解 以 AB 中点 M 为原点，建立如图 8-25 所示的平面直角坐标系，由已知有

$$A(-4,\ 0),\ B(4,\ 0),\ N(0,\ 2).$$

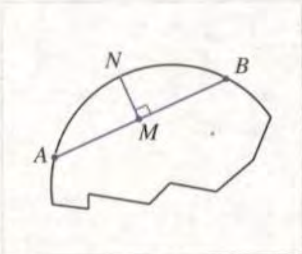


图 8-24

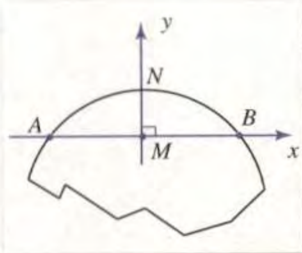


图 8-25

设过 A，B，N 的圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

代入 A，B，N 的坐标，可得

$$\begin{cases}16-4D+F=0\\16+4D+F=0\\4+2E+F=0\end{cases}\text{解得}\begin{cases}D=0\\E=6\\F=-16\end{cases}$$

因此所求圆的方程为 $x^2+y^2+6y-16=0$，化为标准方程是

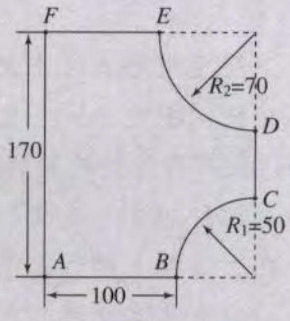
$$x^2+(y+3)^2=5^2,$$

所以这个零件的半径为 5 cm.

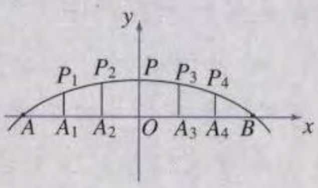
习 题

1. 一个工件的截面如图所示，试建立适当的平面直角坐标系，分别标出点 A，B，C，D，E，F 的坐标.

2. 某圆拱桥的一孔圆拱如图所示，该圆拱跨度 $|AB|=24$ m，拱高 $|OP|=4$ m，在建造时每隔 4 m 需用一根支柱支撑，求支柱 A_2P_2 的高度.（精确到 0.01 m）



（第 1 题）



（第 2 题）

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 什么叫做坐标方法？学完本章后，你对坐标方法有怎样的理解？
2. 数轴上与平面直角坐标系中两点的距离公式和中点公式分别是怎样的？
3. 什么是直线的斜率和倾斜角？
4. 什么是直线的点斜式方程？
5. 直线的斜截式方程是怎样的？
6. 直线与二元一次方程的关系是什么？什么是直线的一般式方程？
7. 两条直线平行或垂直的条件是什么？
8. 什么是圆的标准方程和一般方程？
9. 直线与圆的位置关系有哪几种？怎样判定？

阅读材料

笛卡儿

笛卡儿是法国伟大的数学家、哲学家和物理学家. 1596 年 3 月 31 日他出生在法国图伦的一个贵族家庭，自幼丧母，体弱多病. 8 岁入拉弗莱什公学读书. 教师考虑他的特殊情况，允许他每天早上可以晚起床多休息. 但笛卡儿利用这段时间进行晨读，并养成了善于思考的习惯. 传说笛卡儿躺在床上观察虫子在天花板上爬行的位置，激发了灵感，使他产生了坐标的概念.

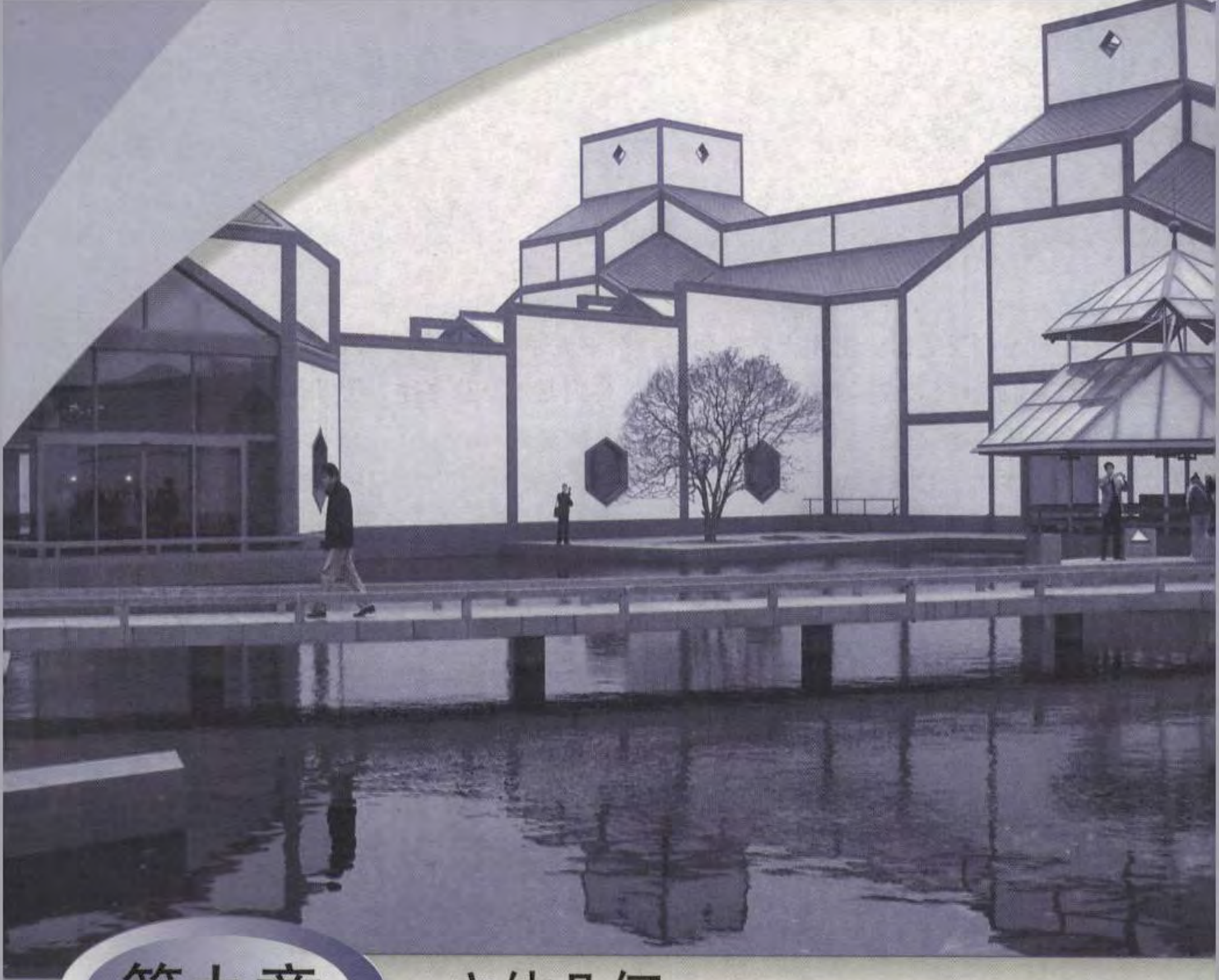
笛卡儿博览群书，曾自述："别人学的，我都学了. 我并不以此为满足，那些认为最奇怪、最不寻常的有关各种学科的书，凡是我能搞到的，我都要把它们读完." 他有好的思考习惯，每当读书时，总是把书拿来先弄清作者的主要意图，随之读完开头的部分就细细品味，并力求得出下面的结论.

1612 年笛卡儿去普瓦捷大学攻读法学，四年后获博士学位，后去巴黎当律师. 1618 年参军，部队到荷兰南部的小城市布勒达时，一次巧遇街头小报上征解数学难题，笛卡儿成功应征，这使他对数学发生兴趣，并坚定了他终生研究数学的决心. 1619 年 11 月，部队到达多瑙河上的一个小村镇时，他不断地思考数学、哲学上的新方法——怎样把代数应用到几何中去. 他曾说："我想去寻求一种新的，包含这两门学科的好处，而又没有它们缺点的方法." 他致力于研究数学中这一完全崭新的领域，这个领域后来被牛顿称之为解析几何.

1621 年笛卡儿退伍去荷兰、瑞士、意大利旅行. 1625 年返回巴黎. 1628 年定居荷兰进行研究和写作. 这时他研究哥白尼学说，1634 年写成《论世界》一书. 1637 年写成《折光学》、《气象学》和《几何学》三篇论文.

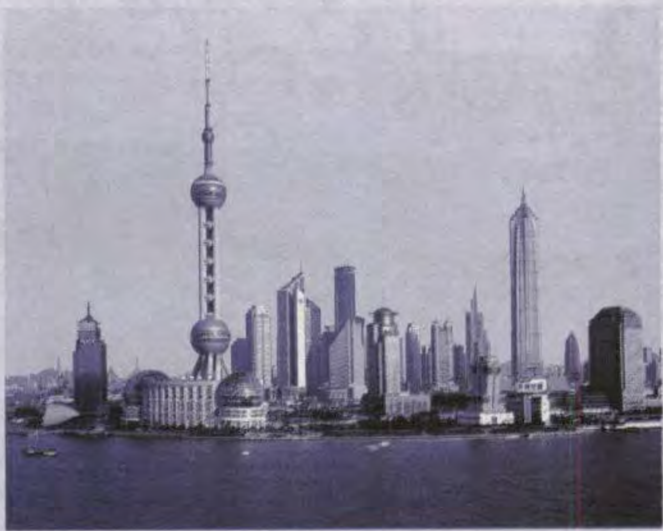
1644 年笛卡儿出版了《哲学原理》，1649 年出版了《论心灵的感情》等重要著作. 同年冬，笛卡儿应瑞典女王克利斯蒂娜的邀请移居斯德哥尔摩为女王讲授哲学课，后因患感冒转肺炎，于 1650 年 2 月 11 日去世. 笛卡儿研究的解析几何，使用的是坐标法. 这种方法是在平面上建立点的坐标 (x, y)，用坐标 (x, y) 表示点的位置. 于是一条曲线就可用两个变量的代数方程来表示. 这样，笛卡儿把一个几何问题通过坐标归结为代数方程式，用代数方法研究方程的性质，然后再翻译成几何语言，得出图形的几何性质. 笛卡儿用这种方法研究了含有两个变量的二次方程，指出根据方程的次数可将曲线分类，并得出一般二次方程可分别表示椭圆、双曲线、抛物线等曲线的结论.

坐标法使代数学和几何学结合起来，开创了数学发展的一个崭新时代.



第九章 立体几何

看到下面这张图片大家就知道，图中显示的是一些高楼大厦，而且这些大厦给我们以柱体、球体等几何体的形象．你们想过吗？为什么我们看到平面的图片能有立体的感觉呢？

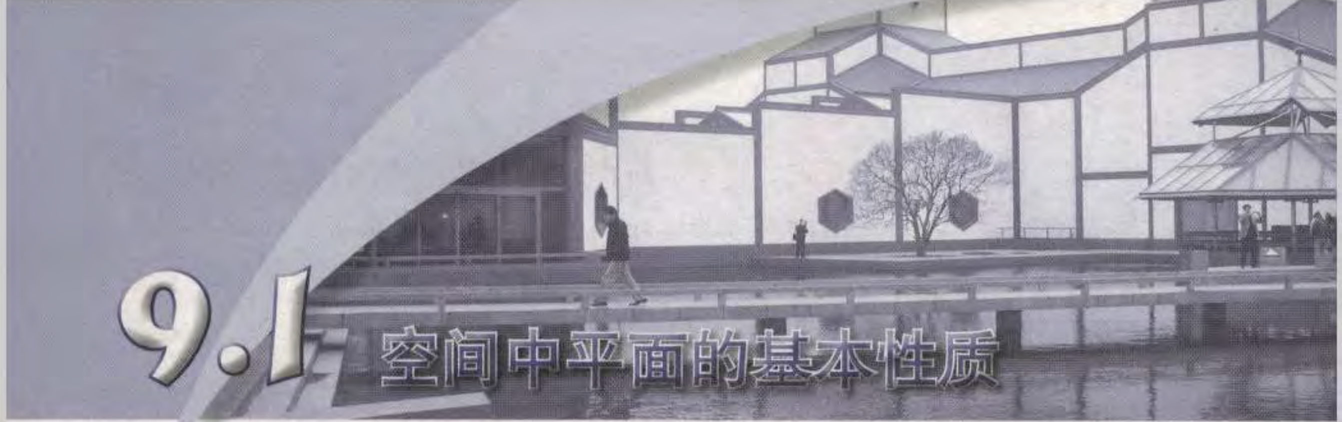


实际上，从孩童时代开始，我们就已经通过观察和玩耍各种玩具，不断地在学着区分不同人和物之间的形状差异．正因为如此，很小的时候我们就能够辨别出谁是父亲、谁是母亲．也就是说，实际上我们已经积累了不少空间图形的知识了．

本章的立体几何内容将进一步增加同学们的空间图形知识．

事实上，人们为了生产、生活的需要，不得不去研究各种图形的性质，比如制造汽车、建造房屋时都必须先把设计图画出来．从能够区分各种物体的形状到把这些物体画在纸上表达它们，一直到利用计算机画图，都需要学习和研究空间图形的性质．认识空间图形的基本性质是现代公民应具有的基本素质．

这一章我们将先学习怎样利用平面图形来表示立体图形，然后通过实验和观察归纳出平面的基本性质，分析点、线、面之间的位置关系，接着把平面内的平行和垂直的概念推广到空间，讨论空间中的平行与垂直关系，最后从理性上认识几何体的特征性质，并给出常见几何体的体积计算公式．



9.1 空间中平面的基本性质

9.1.1 立体图形及其表示方法

在初中，我们已经接触过很多几何图形，例如直线、正方形、梯形、圆等，又例如正方体、棱柱、圆柱等．我们还知道，正方形是一个平面图形，正方体是一个立体图形．

几何图形都可以看成点的集合．如果构成几何图形的点，都在某一个平面上，那么这个几何图形是一个**平面图形**；否则，这个几何图形就是一个**立体图形**．

问题 怎样用平面图形来表示立体图形？

图 9-1(1)(2)分别是一个立体图形（魔方）从不同角度拍摄的照片．显然，图 9-1(1) 具有立体感，使得我们能认出它是一个立体图形；而图 9-1(2) 则不然．

由此可见，给定的一个几何图形，可以用具有立体感的平面图形去表示．这种平面图形通常叫做**直观图**．

(1) (2)

图 9-1

下面我们用实例来给出画几何图形直观图的方法．

例1 画出图 9-2 所示的梯形 $ABCD$ 的直观图．

画法 (1) 在梯形 $ABCD$ 上，以 AB 为 x 轴，A

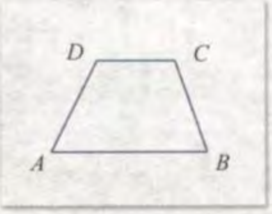


图 9-2

为原点，建立平面直角坐标系，如图 9-3(1) 所示.

画对应的 x'轴和 y'轴，使它们相交于 A'点，而且

$$\angle x'A'y'=45°.$$

如图 9-3(2) 所示.

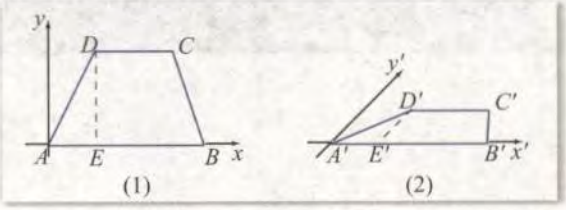


图 9-3

(2) 过 D 点作 AB 的垂线，设垂足为 E，如图 9-3(1).

(3) 在图 9-3(2) 中的 x' 轴上截取 $A'E'=AE$，$E'B'=EB$. 然后作 $E'D'\,/\!/\,y'$轴，且 $E'D'=\dfrac{1}{2}ED$.

(4) 过 D' 作 x' 轴的平行线 $D'C'$，且 $D'C'=DC$.

(5) 连接 $A'D'$，$B'C'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 就是梯形 $ABCD$ 的直观图.

一般地，画平面图形直观图的步骤如下：

S1 在平面图形上取互相垂直的 x 轴和 y 轴，作出与之对应的 x'轴和 y'轴，使得它们的夹角为 45°；

S2 图形中平行于 x 轴的线段画成平行于 x'轴的线段，且长度不变；

S3 图形中平行于 y 轴的线段画成平行于 y'轴的线段，且长度为原来长度的一半；

S4 连接有关线段.

例2 画长为 4，宽为 3，高为 2 的长方体的直观图.

画法 (1) 首先用例 1 所示的方法画一个长为 4，宽为 3 的长方形的直观图 $ABCD$，如图 9-4(1)所示.

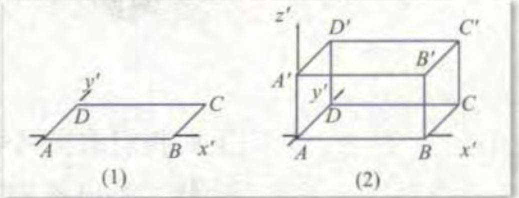


图 9-4

(2) 过 A 作 z' 轴，使之垂直于 x' 轴. 在 z' 轴上截取 $AA'=2$.

(3) 过 B，C，D 分别作 z' 的平行线 BB'，CC'，DD'，并使 $BB'=CC'=DD'=2$.

连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$.

(4) 擦去 x' 轴、y' 轴和 z' 轴，并把看不到的线段 AD，DC，DD' 改成虚线.

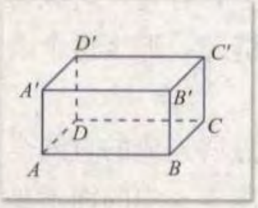


图 9-5

由此所得到的图形即为所求长方体的直观图，如图 9-5 所示.

一般地，画立体图形直观图的方法的步骤如下：

S1 在立体图形中取水平平面，在其中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，作出水平平面上图形的直观图（包括 x' 轴和 y' 轴）；

S2 在立体图形中，过 x 轴和 y 轴的交点取 z 轴，并使 z 轴垂直于 x 轴和 y 轴，过 x' 轴和 y' 轴的交点作 z 轴对应的 z' 轴，且 z' 垂直于 x' 轴；

S3 图形中平行于 z 轴的线段画成平行于 z' 轴的线段，且长度不变；

S4 连接有关线段，擦去有关辅助线.

上述画直观图的方法叫做**斜二测画法**.

练习

A 组

1. 作边长为 3 cm 的等边三角形的直观图.

2. 作边长为 2 cm 的正方体的直观图.

B 组

1. 作边长为 2 cm 的正六边形的直观图.

2. 作长为 3 cm，宽为 4 cm，高为 8 cm 的长方体的直观图.

9.1.2 平面的基本性质

问题 空间中的面，有些是弯曲的，有些是平直的. 那么，怎样才能判断一个面是不是平面呢？换句话讲，什么是平面的特征性质呢？

工程人员在检查一个物体的表面是不是平的时，通常在各个方向上将直尺放在物体表面上，看直尺边缘与物体表面有没有缝隙. 如果都不出现缝隙，那么这个表面就是平的.

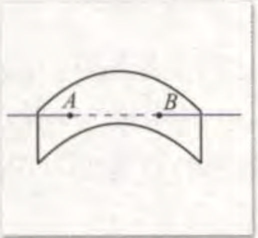


图 9-6

也就是说，如果一个面上任意两点所连成的直线全部在这个面上，那么它是一个平面. 图 9-6 中的面不是一个平面，因为直线 AB 不全在那个面上.

平面是无限延展的，我们通常用平行四边形来表示平面（如图 9-7），但把它想象成可以向四周无限延伸.

思考与讨论

在平面几何中，怎样用图形来表示一条直线？

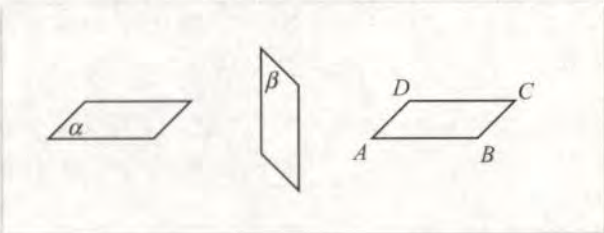


图 9-7

平面一般用希腊字母 α，β，γ，…来命名，还可以用表示平行四边形的顶点或对角顶点的字母来命名. 例如，图 9-7 中的平面依次称为平面 α，平面 β，平面 $ABCD$ 或平面 AC.

由前面的讨论可以得到平面的一个基本性质.

基本性质 1　如果一条直线上有两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

这时，我们就说直线在平面内或平面经过直线.

几何图形都可以看成点的集合，因此通常借助于集合符号来表示几何图形之间的关系. 例如，点 A 在直线 a 上，记作 $A\in a$，反之记作 $A\notin a$；点 A 在平面 α

内，记作 $A\in\alpha$，反之记作 $A\notin\alpha$；直线 l 在平面 α 内，记作 $l\subset\alpha$，反之记作 $l\not\subset\alpha$.

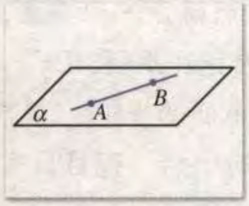


图 9-8

如图 9-8 所示，基本性质 1 可表示为：如果 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，那么直线 $AB\subset\alpha$. 利用这个性质，可以判断一条直线是否在一个平面内.

观察教室的墙面和地面，不难看出，它们的公共点组成了一条线段. 另外，如图 9-9 所示，在用裁纸刀时，一开始裁纸刀与纸面的边缘接触，然后裁纸刀沿它所在的面运动下来时，就能把纸切开.

图 9-9

由此可以得到平面的另一个基本性质.

基本性质 2　如果不重合的两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

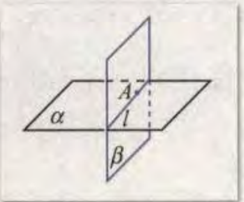


图 9-10

如图 9-10 所示，基本性质 2 可以表示为：如果 $A\in\alpha$，$A\in\beta$，则存在直线 l，使得 $A\in l$，且 $l\subset\alpha$，$l\subset\beta$. 此时，我们称平面 α 和平面 β 相交于直线 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$. 在画两个平面相交时，当其中一个平面被另一个平面遮住时，应把被遮住的部分画成虚线或不画，如图 9-10 所示.

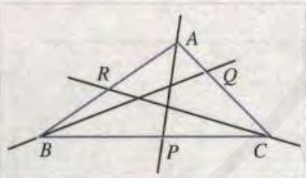


图 9-11

在空间中，给定不共线的三点 A，B，C（图 9-11），作直线 AB，BC，CA，再在直线 BC，CA，AB 上分别取动点 P，Q，R，作直线 AP，BQ，CR，让 P，Q，R 分别在直线 BC，CA，AB 上运动，我们可看到这些直线编织成一个平面. 由以上试验可得到：

基本性质 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面（图 9-12）.

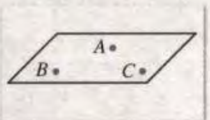


图 9-12

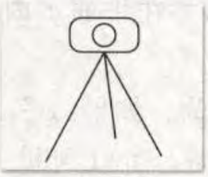


图 9-13

例如，照相机可用三条腿的架子支撑在地面上，就是根据这个性质（图 9-13）.

基本性质 3 也就是，**不共线的三点确定一个平面.** 过不共线三点的 A，B，C 的平面，通常记作平面 ABC.

由平面的基本性质，还可以得到下面的推论：

推论 1　经过一条直线和直线外的一点，有且只有一个平面(图 9-14(1)).

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面(图 9-14(2)).

两条直线 a 与 b 相交于点 P，通常记作 $a\cap b=P$.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面(图 9-14(3)).

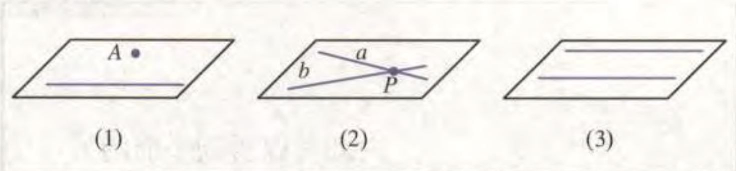


图 9-14

如果空间内的几个点或几条直线都在同一平面内，那么我们就说它们**共面**.

练　习

A 组

1. 判断下列说法是否正确：

   (1) 过一条直线的平面有无数多个；

   (2) 两个相交平面存在不在一条直线上的三个公共点.

2. 如果线段 AB 在平面 α 内，那么直线 AB 是否在平面 α 内？为什么？

3. 怎样检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内？

4. 过一点，有多少个平面？过一条直线有多少个平面？过三点有多少个平面？

B组

1. 一个平面能把空间分成几部分？任意两个平面呢？

2. 用集合符号表示下列语句：

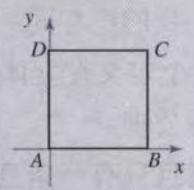
(1) 点 A 在平面 α 内，点 B 不在平面 α 内；

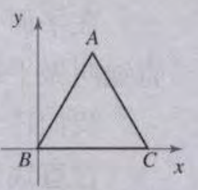
(2) 直线 l 在平面 α 内，直线 m 不在平面 α 内；

(3) 平面 α 与平面 β 相交于直线 l.

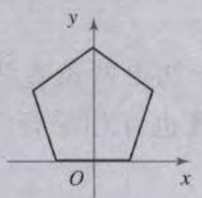
习　题

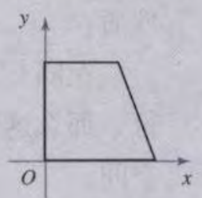
1. 用斜二测画法画出下列水平放置的正方形和等边三角形的直观图.





2. 用斜二测画法画出下列图中水平放置的正五边形和四边形的直观图：





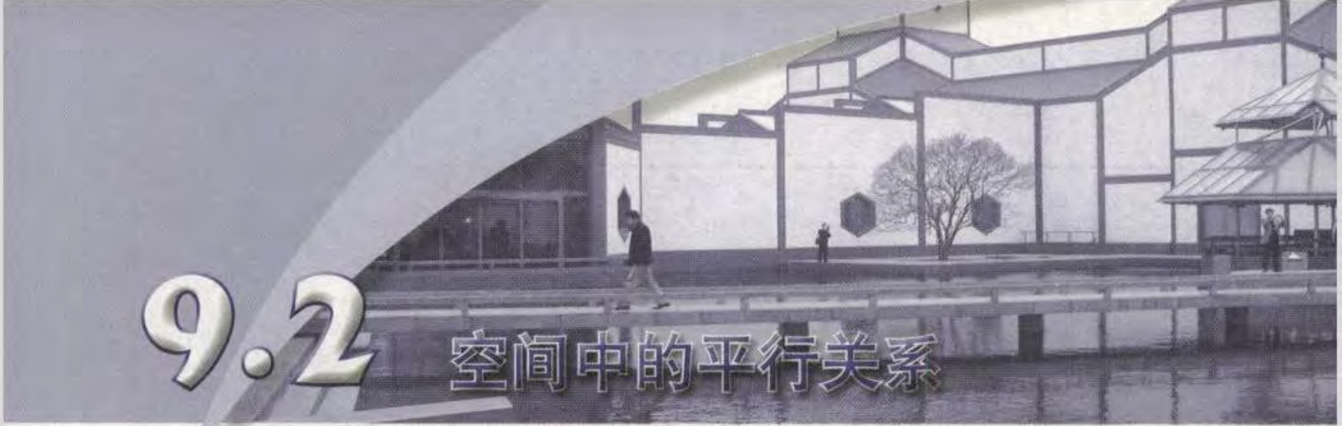
3. 判断下列说法是否正确：

(1) 如果两个平面有两个公共点 A, B, 那么它们就有无数多个公共点，并且这些公共点都在直线 AB 上；

(2) 两个平面的公共点的集合，可能是一条线段；

4. 角一定是平面图形吗？为什么？

5. 为什么说平行四边形和梯形都是平面图形？



9.2 空间中的平行关系

9.2.1 空间中的平行直线

1. 平行线的基本性质

问题 在平面内直线间的平行关系，如何推广到空间？

在平面几何中，我们把在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线. 这个定义在立体几何中不变.

我们还学过平行公理：

过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

在平面几何中，我们还学过平行线的另一条重要性质：

在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行. 这条性质可推广到空间：

平行于同一条直线的两条直线互相平行.

即如果直线 $a \parallel b$，$c \parallel b$，则 $a \parallel c$（图 9-15）.

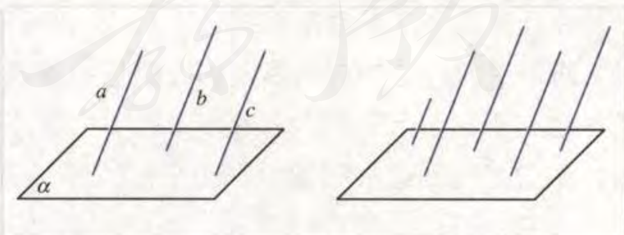


图 9-15

上述性质通常又叫做**空间平行线的传递性**.

下例中涉及空间四边形的概念，我们先对空间四边

形下一个定义.

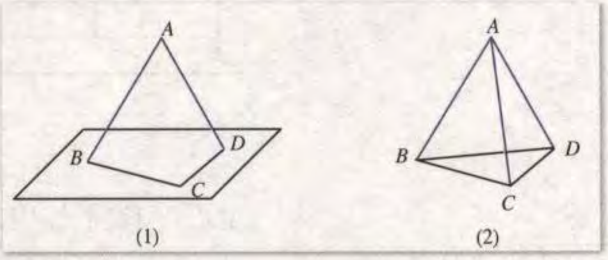


图 9-16

如图 9-16 所示，顺次连接不共面的四点所构成的图形，叫做**空间四边形**，每个点叫做空间四边形的顶点，相邻顶点间的线段叫做空间四边形的边，连接不相邻的顶点的线段叫做这个空间四边形的对角线. 空间四边形用表示顶点的四个字母表示. 例如，图 9-16(1) 中的四边形叫做空间四边形 $ABCD$，而图 9-16(2) 中 AC，BD 是它的对角线.

在很多的问题中，我们要借助于平行线的传递性，判断两条直线平行，下面举例说明.

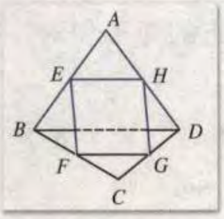


图 9-17

例 已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形（图 9-17）.

证明 连接 BD，在 $\triangle ABD$ 中，因为 E，H 分别是 AB，AD 的中点，所以

$$EH \parallel BD, EH = \frac{1}{2}BD.$$

同理 $FG \parallel BD$，且 $FG = \frac{1}{2}BD$.

所以 $EH \parallel FG$，$EH = FG$.

因此四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

2. 空间中图形的平移

如果空间图形 F 中的所有点都沿同一方向移动相同的距离到 F' 的位置，则就说图形 F 在空间中作了一次**平移**（图9-18）.

下面我们通过三角形的平移来研究空间平移的性质.

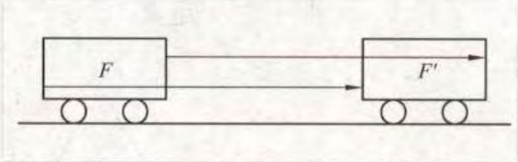


图 9-18

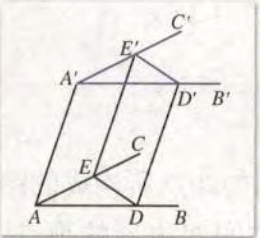


图 9-19

将 $\triangle ADE$ 平移到 $\triangle A'D'E'$ 的位置（图 9-19）. 因为

$$AA' \mathrel{\underline{\parallel}} DD' \mathrel{\underline{\parallel}} EE',$$

所以四边形 $ADD'A'$，$DD'E'E$，$EE'A'A$ 都是平行四边形. 因此

$$AD \mathrel{\underline{\parallel}} A'D',\ DE \mathrel{\underline{\parallel}} D'E',\ EA \mathrel{\underline{\parallel}} E'A'.$$

从而 $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$. 所以

$$\angle DAE = \angle D'A'E',$$
$$\angle ADE = \angle A'D'E',$$
$$\angle DEA = \angle D'E'A'.$$

由上面的论证，我们可以得到空间图形平移的性质.

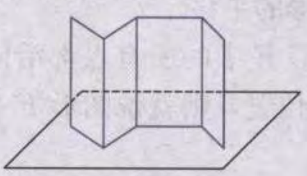
图形平移后与原图形相等. 对应两点的距离和对应角保持不变.

同时我们还可以看到，如果一个角（$\angle A$）的两边与另一角（$\angle A'$）的两边方向分别相同，则 $\angle A = \angle A'$.

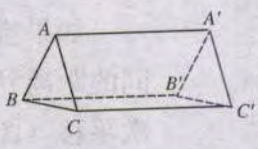
练习

A 组

1. 把一张长方形的纸对折两次，打开以后如图所示，说明为什么这些折痕是互相平行的.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知 AA'，BB'，CC' 不共面，且 $AA' \perp\!\!\!\!= BB'$，$BB' \perp\!\!\!\!= CC'$，求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

3. 作线段 AB，然后把 AB 沿与射线 AB 成 $60°$ 角的方向平移 3 cm 到 $A'B'$，求证：$AB = A'B'$.

B 组

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 如果 $\angle ABC = \angle A'B'C'$，且 $AB \parallel A'B'$，则 $AC \parallel A'C'$；

(2) 如果 $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 的两条边分别平行，则 $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

2. 已知空间四边形 $ABCD$ 的两条对角线 $AC = BD$，E，F，G，H 分别为边 AB，BC，CD，DA 的中点. 试问：四边形 $EFGH$ 是菱形吗？说明理由.

9.2.2 异面直线

问题 在空间中，两条没有公共点的直线一定是平行线吗？

在空间中，除相交、平行外，两条直线还有另外的位置关系吗？

观察图 9-20 正方体中的各条棱所在直线，可以看到空间两条直线除相交和平行的情形外，还有既不相交也不平行的情形. 例如，棱 AA' 和 BC 所在的两条直线. 如果两条直线既不相交也不平行，那么它们一定不会共面.（为什么？）我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**.

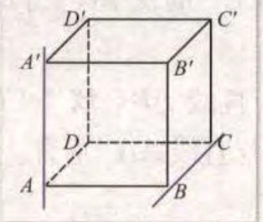


图 9-20

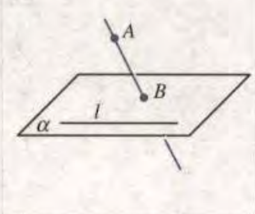


图 9-21

以下是一个判定异面直线的方法（如图 9-21）：

连接平面内一点与平面外一点的直线和这平面内不经过该点的任意直线是异面直线.

如图 9-22，已知空间中两条不平行的直线 a，b，经过空间中任一点 O，作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，根据角平移的性质，a' 与 b' 所成角的大小和点 O 的选择无关. 我们把 a' 与 b' 所成的锐角（或直角），叫做**直线 a，b 所成的角或夹角.**

结合课件 901，学习异面直线.

如果两条直线平行，我们说它们所成的角或夹角为 0°.

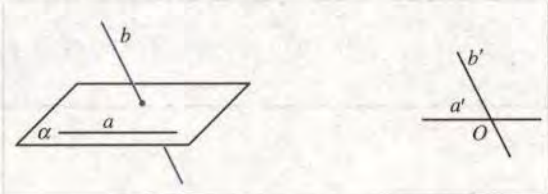


图 9-22

如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说两条异面直线互相垂直. 如图 9-23 中，直线 AA' 与 BC 互相垂直. 两条异面直线 a，b 互相垂直，仍记作 $a \perp b$.

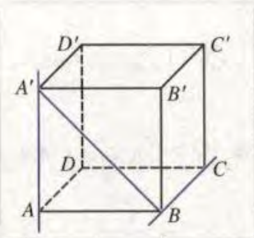


图 9-23

例 图 9-23 所表示的是一个正方体：

(1) 哪些棱所在直线与直线 BA' 是异面直线?

(2) 求直线 BA' 与 CC' 所成的角的度数；

(3) 哪些棱所在直线与直线 AA' 垂直?

解 (1) 由异面直线的判定方法可知，与直线 BA' 成异面直线的有直线 $B'C'$，AD，CC'，DC，$D'C'$，DD'；

(2) 因为 $BB' \parallel CC'$，所以 $\angle B'BA'$ 等于异面直线 BA' 与 CC' 的夹角，由此得 BA' 与 CC' 所成的角为 45°；

(3) 直线 AB，BC，CD，DA，$A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$ 都与直线 AA' 垂直.

练 习

A 组

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 若直线 $a \subset$ 平面 α，直线 $b \not\subset$ 平面 α，则 a 与 b 成异面直线；

(2) 若直线 $a \subset$ 平面 α，直线 $b \subset$ 平面 α，则 a 与 b 相交或平行；

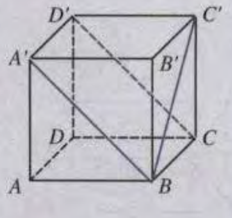
(3) 过直线外一点只可作一条直线与已知直线垂直.

2. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中：

(1) 直线 $A'B$ 与 $C'D'$ 是______直线，直线 $A'B$ 与直线 $C'D'$ 所成的角=______；

(2) 直线 BC 与 $C'D'$ 是______直线，直线 BC 与 $C'D'$ 所成的角=______；

(3) 直线 $A'B$ 与 BC' 是______直线，直线 $A'B$ 与 BC' 所成的角=______；



（第 2 题）

B 组

已知 A，B，C，D 是空间中的四个点，且 AB，CD 是异面直线，则 AC，BD 一定是异面直线吗？为什么？

9.2.3 直线与平面平行

问题 是否存在这样的直线，它与一个确定的平面没有公共点？

让我们进行以下操作与思考，看看这样的直线是否存在.

如图 9-24 所示，直线 m 在平面 α 内，让 m 沿某个方向平移出平面 α 到直线 l 的位置，这时 $l \parallel m$，l 与 m 确定一个平面. 我们可以推测，直线 l 与平面 α 不可能相交.

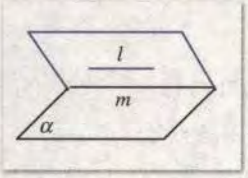


图 9-24

如果直线与平面没有公共点，则称这条**直线与平面平行**.

直线 l 平行于平面 α，记作 $l \parallel \alpha$.

由以上操作与观察，我们可归纳出**直线与平面平行的判定定理**：

如果一个平面外的一条直线与平面内的一条直线平行，那么这条直线与这个平面平行.

平常用平行吊线挂灯管就利用了上述性质，只要两根吊线平行且等长，则灯管平行于吊盒的连线，灯管就和天花板平行.

根据上述定理，画一条直线与已知平面平行，通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形的外面，并且使它与平行四边形的一边平行或与平行四边形内的一条线段平行（图 9-25）.

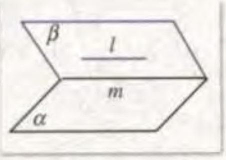


图 9-25

另外，不难得到如下**直线与平面平行的性质定理**：

如果一条直线与一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线与交线平行.

如图 9-25，若 $l \parallel \alpha$，$l \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = m$，则 $l \parallel m$.

例 已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点（图 9-26）.

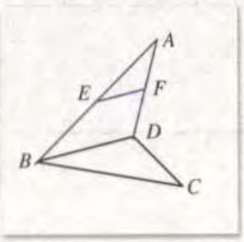


图 9-26

求证：$EF \parallel$ 平面 BCD.

证明 连接 BD，在 $\triangle ABD$ 中，因为 E，F 分别是 AB，AD 的中点，所以

$$EF \parallel BD.$$

其中 BD 是平面 ABD 与平面 BCD 的交线.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 BCD，所以由直线和平面平行的判定定理知 $EF \parallel$ 平面 BCD.

至此，我们知道直线和平面的位置关系，有以下三种：

(1) **直线在平面内**，即直线和平面有两个公共点（图 9-27(1)）；

(2) **直线与平面相交**，即直线和平面只有一个公共点，这个公共点叫做直线与平面的交点（图 9-27(2)）；

图 9-27(2) 中，直线 a 与平面 α 交于点 A，记作 $a \cap \alpha = A$.

(3) **直线与平面平行，即直线与平面没有公共点**（图 9-27(3)）.

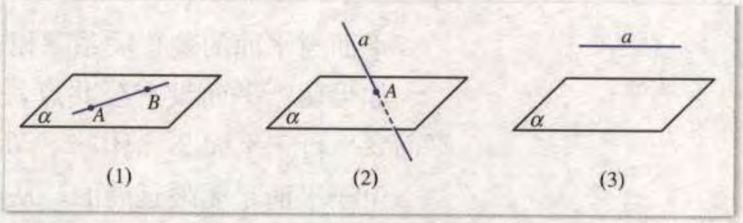
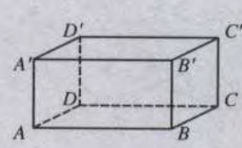


图 9-27

练习

A 组

1. 如图所示长方体中：



（第 1 题）

(1) 与直线 AB 平行的平面有______；

(2) 与直线 AA' 平行的平面有______；

(3) 与直线 AD 平行的平面有______.

2. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

(1) 如果一条直线不在平面内，则这条直线就与这个平面平行；

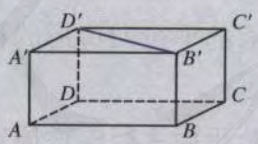
(2) 过直线外一点，可以作无数个平面与这条直线平行；

(3) 如果一条直线与一个平面平行，则它与这个平面内的任何直线平行.

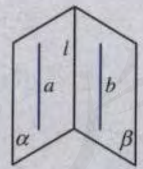
B 组

1. 如图，在长方体 AC' 中，求证：

$$B'D' \parallel \text{平面 } ABCD.$$



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知 $\alpha \cap \beta = l$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，且 $a \parallel b$. 求证：$a \parallel l$，$b \parallel l$.

9.2.4 平面与平面的平行关系

平面与平面的位置关系除相交外，还有一种情况.

如果两个平面没有公共点，则称这两个平面**平行**. 平面 α 平行于平面 β，记作 $\alpha \parallel \beta$.

由于平面是无限延展的，从直观上很难判定是否存在两个没有公共点的平面. 下面我们仍像探究直线与平面平行的问题那样，采用直观操作和思辨论证的方法，归纳出平面与平面平行的判定定理.

我们知道，两条相交的直线确定一个平面. 这启发我们用两条相交直线来讨论平面的平行问题.

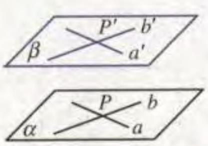


图 9-28

如图 9-28，在平面 α 内，作两条相交直线 a，b，并且 $a \cap b = P$，将直线 a，b 同时平移出平面 α 到直线 a'，b' 的位置，$a' \cap b' = P'$，由线面平行的判定定理可知

$$a' \parallel \alpha,\ b' \parallel \alpha.$$

此时，由相交直线 a'，b' 所确定的平面（记为 β）与平面 α 不会有公共点.

由以上操作和观察，我们可归纳出两个**平面平行的判定定理**：

如果一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

推论 **如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线，则这两个平面平行.**

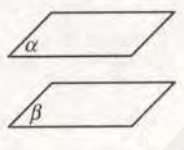


图 9-29

根据上述定理和推论，在画两个平行平面时，通常把表示这两个平面的平行四边形的相邻两边分别画成互相平行的（图9-29）.

可以得到两个**平面平行的性质定理**：

如果两个平行平面同时与第三个平面相交，则它们的交线平行.

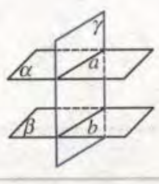


图 9-30

事实上，由于两条交线分别在两个平行平面内，所以它们不相交，它们又都在同一平面内，由平行线的定义可知它们是平行的（图 9-30）.

例1 已知空间四边形 $PABC$，连接 PB，AC，且 D，E，F 分别是棱 PA，PB，PC 的中点（图 9-31）.

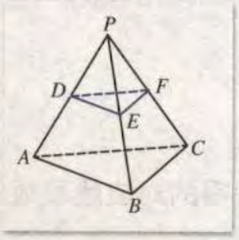


图 9-31

求证：平面 DEF // 平面 ABC.

证明 在 $\triangle PAB$ 中，因为 D，E 分别是 PA，PB 的中点，所以

$$DE \parallel AB.$$

又由 $DE \not\subset$ 平面 ABC，所以

$$DE \parallel \text{平面 } ABC.$$

同理 EF // 平面 ABC.

又由 $DE \cap EF = E$，$AB \cap BC = B$，可知

$$\text{平面 } DEF \parallel \text{平面 } ABC.$$

例2 已知平面 α // 平面 β，AB 和 CD 为夹在 α，β 间的平行线段（图 9-32）. 求证：$AB = CD$.（即**夹在两个平行平面间的两条平行线段相等**.）

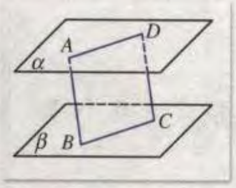


图 9-32

证明 连接 AD，BC，因为 $AB \parallel CD$，所以 AB 和 CD 确定平面 AC.

又因为

平面 $AC \cap \alpha = AD$，平面 $AC \cap \beta = BC$，$\alpha \parallel \beta$，

所以 $AD \parallel BC$，从而 $ABCD$ 是平行四边形. 因此

$$AB = CD.$$

例3 已知平面 α // 平面 β // 平面 γ，且两条直线 l，m 分别与平面 α，β，γ 相交于点 A，B，C 和点 D，E，F（图9-33）. 求证：$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

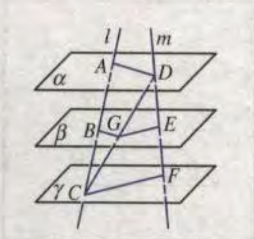


图 9-33

证明 连接 DC，与平面 β 相交于点 G，则平面 ACD 与平面 α，β 分别相交于直线 AD，BG，平面 DCF 与平面 β，γ 分别相交于直线 GE，CF.

因为 $\alpha \parallel \beta$，$\beta \parallel \gamma$，所以

$$BG \parallel AD,\ GE \parallel CF.$$

所以

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DG}{GC},\ \frac{DG}{GC} = \frac{DE}{EF}.$$

因此

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

本例通常可叙述为：

两条直线被三个平行平面所截，截得的对应线段成比例.

练习

A组

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 如果两个平面不相交，那么它们就没有公共点；

(2) 如果一个平面内的两条直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

(3) 如果一个平面内的任何一条直线都平行于另一平面，那么这两个平面平行；

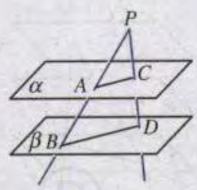
(4) 已知两个平行平面中的一个平面内有一条直线，则在另一个平面内有且只有一条直线与已知直线平行；

(5) 分别在两个平面内的两条直线平行.

2. 如图，已知 $\alpha // \beta$，点 P 是平面 α，β 外的一点，直线 PAB，PCD 分别与 α，β 相交于点 A，B 和 C，D：

(1) 求证：$AC // BD$；

(2) 已知 $PA = 4$ cm，$AB = 5$ cm，$PC = 3$ cm，求 PD 的长.



（第 2 题）

B组

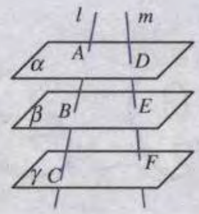
1. 归纳平面与平面的位置关系.

2. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

(1) 过平面外一点，有且只有一个平面与这个平面平行；

(2) 过平面外一条直线，有且只有一个平面与这个平面平行.

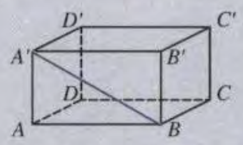
3. 如图，已知平面 α // 平面 β // 平面 γ，且与两条直线 l，m 分别相交于点 A，B，C 和点 D，E，F，$AC = 15$ cm，$DE = 5$ cm，$AB : BC = 1 : 3$，求 AB，BC，EF 的长.



（第 3 题）

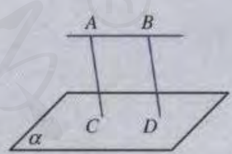
习　题

1. 判断下列说法是否正确：
   (1) 如果直线 $a \parallel b$，且 $b \parallel c$，则 $a \parallel c$；
   (2) 如果直线 a // 平面 α，且直线 b // 平面 α，则 $a \parallel b$；
   (3) 如果直线 a // 平面 α，过平面 α 内的一点作直线 $b \parallel a$，则 b 一定在平面 α 内；
   (4) 对任意两条异面直线 a，b，存在平面 α，β，使 $a \subset \alpha$，$b \subset \beta$ 且 $\alpha \parallel \beta$.
2. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中：
   (1) 哪些棱所在直线与直线 AA' 成异面直线，且互相垂直？
   (2) 已知 $AB = \sqrt{3}$，$AA' = 1$，求直线 BA' 分别与直线 CC' 和 $A'A$ 所成的角.



（第 2 题）

3. 如图，已知 AB // 平面 α，$AC \parallel BD$，且 AC，BD 与平面 α 分别相交于点 C，D，求证：$AC = BD$.



（第 3 题）

4. 判断下列说法是否正确，并说明理由：
   (1) 如果直线 a 平行于直线 b，则 a 平行于经过 b 的任何平面；
   (2) 过平面外一点，可以作无数条直线与已知平面平行.
5. 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，求直线 AC' 与直线 $A'D'$ 所成角的余弦值.

9.3 空间中的垂直关系和角

9.3.1 直线与平面垂直

1. 直线与平面垂直的判定

让我们把平面中垂直和对称的概念推广到空间.

教室中两墙面的交线与地面的关系，直立的旗杆与地面的关系，都给我们以直线与平面垂直的形象（图9-34）.

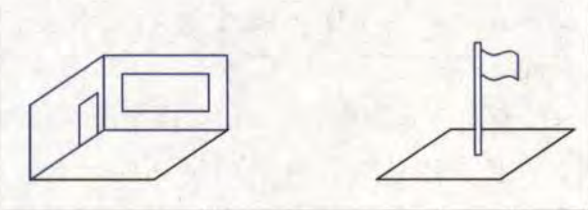


图 9-34

前面我们已经知道，如果不在同一平面内的两条直线经过平移后相交于一点，并且互相垂直，则这两条空间直线是互相垂直的.

在平面几何中我们学习过一条重要定理：

平面内到两定点距离相等的点的轨迹是连接这两点线段的垂直平分线.

设 l 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 M（图9-35）. 由上述定理可知，l 上任一点到 A，B 两点的距离相等；到 A，B 两点距离相等的点也一定在 l 上，也就是说，到 A，B 距离不等的点都不在 l 上. 这时，我们说 A，B 两点关于直线 l 成轴对称.

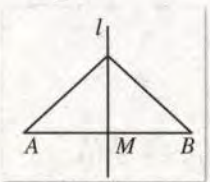


图 9-35

想想看，如果 A, B 是空间中的两点，线段 AB 的垂直平分线有多少条？这些 AB 的垂直平分线构成的集合形成怎样的图形？可以看出，线段 AB 的所有垂直平分线构成的集合是一个平面.

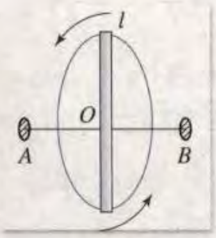


图 9-36

同学们还可以进行如下操作：取一根细的直钢丝 AB，通过 AB 的中点 O 固定一条与 AB 垂直的金属棒 l，然后把金属棒两端放在固定的槽内. 通过外力让其旋转，观察 l 的轨迹，看它是什么样的图形（图 9-36）.

由以上操作，我们引出空间直线与平面垂直的定义：

如果一条直线和一个平面内的任何直线都垂直，我们就说**这条直线和这个平面互相垂直**，直线叫做**平面的垂线**，平面叫做**直线的垂面**，交点叫做**垂足**. 垂线上任一点到垂足间的线段，叫做这点到这个平面的**垂线段**.

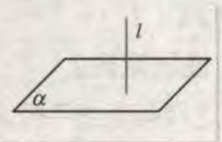


图 9-37

画直线和平面垂直时，通常要把直线画成和表示平面的平行四边形的一边垂直，如图 9-37 所示. 直线 l 和平面 α 互相垂直，记作 $l \perp \alpha$.

用直线与平面垂直的定义，直接检验直线是否与平面垂直是困难的. 想想看，是否有容易操作又比较简单的方法判定直线与平面垂直.

我们已经知道，一个平面被其上的两条相交直线所完全确定. 因此，我们有理由猜测，只要检验这条直线与平面内两条相交直线是否垂直就可以了.

事实上，我们有如下的**直线与平面垂直的判定定理**：

如果一条直线与平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直.

推论　**如果在一组平行直线中，有一条垂直于平面，则另外的直线也都垂直于这个平面.**

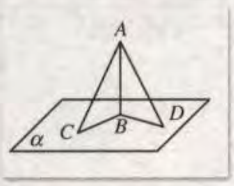


图 9-38

例　有一根旗杆 AB 高 8 m（图 9-38），它的顶端 A 挂有一条 10 m 的绳子. 拉紧绳子，并把它的下端放在地面上 C, D 两点（和旗杆底端不在同一条直线上）. 如果这两点都和旗杆底端 B 的距离是 6 m，那么旗杆就和地面垂直，为什么？

解 在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中，因为

$$AB = 8\text{ m},\ BC = BD = 6\text{ m},$$
$$AC = AD = 10\text{ m},$$

所以

$$AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = AC^2,$$
$$AB^2 + BD^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = AD^2.$$

因此$\angle ABC = \angle ABD = 90°$，即

$$AB \perp BC,\ AB \perp BD.$$

又知B，C，D三点不共线，所以$AB \perp$平面BCD，即旗杆和地面垂直.

2. 直线垂直于平面的性质

如果两条直线l,m都垂直于平面α，试问这两条直线平行吗?

从直观感知，我们会得出结论：直线l和m平行. 事实上，我们可得到**直线与平面垂直的性质定理**：

如果两条直线同垂直于一个平面，则这两条直线平行.

如图 9-39，若直线$l \perp$平面α，直线$m \perp$平面α，则$l \parallel m$.

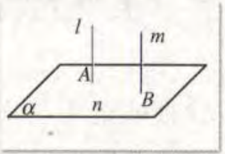
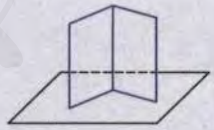


图 9-39

练习

A组

1. 在空间中过任一点都能作任一条直线的垂线吗？为什么？
2. 已知长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，分别写出与下列直线垂直的平面：
   (1) AA_1；　(2) AB；　(3) B_1C_1.
3. 如图，拿一张矩形的纸对折后略微展开，竖立在桌面上，说明折痕为什么和桌面垂直.



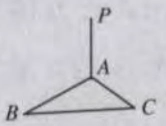
(第 3 题)

4. 如果一条直线垂直于一个平面内的：
   (1) 三角形的两条边；
   (2) 梯形的两条边；
   (3) 圆的两条直径.

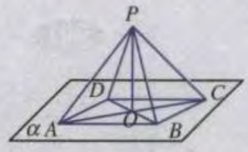
   试问这条直线是否与该平面垂直?

B组

1. 求证：如果三条直线共点，且两两垂直，那么其中一条直线垂直于另两条直线确定的平面.
2. 如图，已知$\triangle ABC$，直线$AP \perp AB$，$AP \perp AC$，求证：$AP \perp BC$.



（第2题）



（第3题）

3. 如图，已知在平面α内有$\square ABCD$，O是它对角线的交点，点P在α外，且$PA = PC$，$PB = PD$. 求证：$PO \perp \alpha$.
4. 三角形的两边可以都垂直于同一个平面吗？为什么？

9.3.2 直线与平面所成的角

如果一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，那么这条直线叫做这个**平面的斜线**，斜线和平面的交点叫做**斜足**. 斜线上一点与斜足之间的线段叫做**斜线段**.

如图9-40所示，AB是平面α的斜线，B是斜足，AB是斜线段.

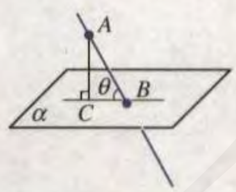


图9-40

从斜线上斜足以外的一点向平面作垂线，过垂足与斜足的直线叫做**斜线在这个平面内的射影**. 斜线和它在平面内的射影的夹角叫做**斜线和平面所成的角**（或**夹角**）. 如图9-40所示，若$AC \perp \alpha$，则BC为AB在平面α内的射影，$\angle ABC$即为AB与平面α所成的角，其大小为θ.

如果直线垂直于平面，则规定直线与平面所成的角是直角（90°），如果直线与平面平行，则规定直线与平面所成的角为0°.

一条线段与平面所成的角指的是，线段所在直线与平面所成的角.

如图 9-41 所示，设线段 AB 在平面 α 内的射影为 $A'B'$，且 AB 与平面 α 所成的角为 θ. 则易证

$$|A'B'|=|AB|\cos\theta.$$

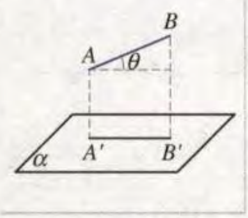


图 9-41

例1 如图 9-42 所示，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，求对角线 A_1C 与面 $ABCD$ 所成的角.

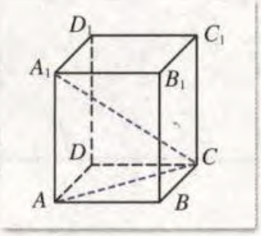


图 9-42

解 连接 AC，由题知$\triangle A_1AC$ 为直角三角形，且$\angle A_1AC=90^\circ$. 又由题意，可知

$$\begin{aligned}AC&=\sqrt{AB^2+BC^2}\\&=\sqrt{1^2+1^2}\\&=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

而 $AA_1=\sqrt{2}$，所以

$$\angle ACA_1=45^\circ.$$

因此，A_1C 与面 $ABCD$ 所成的角为 45°.

例2 如图 9-43 所示，PA 是平面 α 的斜线，$PO\perp\alpha$，$a\subset\alpha$，$a\perp AO$. 求证：$a\perp PA$.

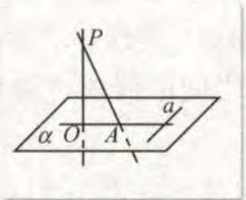


图 9-43

证明 因为 $PO\perp\alpha$，$a\subset\alpha$，所以

$$PO\perp a.$$

又因为

$$AO\perp a,$$
$$PO\cap AO=O,$$

所以由直线与平面垂直的判定定理知

$$a\perp \text{平面 } PAO.$$

又 $PA\subset$平面 PAO，因此

$$a\perp PA.$$

上述例题中，AO 是斜线 PA 在平面 α 内的射影，通常例题的结论也叫做**三垂线定理**：

在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

练习

A组

1. 设线段 $AB=l$，且 AB 与平面 α 所成的角为 θ，求线段 AB 在平面内的射影 $A'B'$ 的长：

(1) $l=6$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$；　(2) $l=10$，$\theta=0$；　(3) $l=8$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

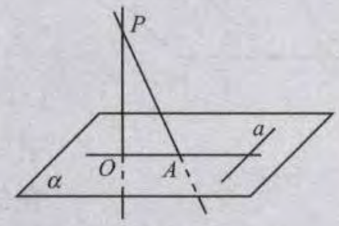
2. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，写出对角线 BD_1 与平面 AC、平面 BA_1、平面 BC_1 所成的角，并求这些角的余弦.

3. 已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，$AA_1=AD=a$，$AB=2a$，求对角线 BD_1 与长方体各面所成角的余弦值.

B组

1. 已知平面内的一条直线与平面的一条斜线的夹角为 $60°$，这条直线与斜线在平面内的射影的夹角为 $30°$，求平面的斜线与平面所成角的余弦值.

2. 如图所示，PA 为平面 α 的斜线，$PO\perp\alpha$，$a\subset\alpha$，$a\perp PA$. 求证：$a\perp AO$. （该结论叫做三垂线定理的逆定理：**在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.**）



（第 2 题）

9.3.3 平面与平面所成的角

问题 日常生活中，经常可以看到两个平面成一定夹角的实例. 例如，在沿着山脚修筑公路时，为了防止山体滑坡，通常要修一堵与水平面成一定角度的防护墙；在使用笔记本电脑时，为了方便操作，两个面板要成一定的角度. 如何刻画这些角呢？

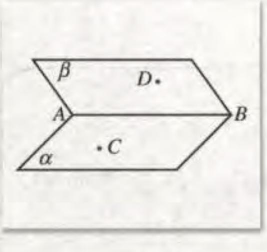


图 9-44

平面内的一条直线把一个平面分成两部分，其中的每一部分都分别叫做一个**半平面**. 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**，这条直线叫做**二面角的棱**，这两个半平面叫做**二面角的面**.

如图 9-44 所示，以 AB 为棱，α 和 β 为半平面的二面角，通常记作二面角 α-AB-β. 如果 C 和 D 分别是半平面 α 和 β 内的点，那么这个二面角也可记作 C-AB-D.

在打开笔记本电脑的过程中，直观上我们可以感受到两个面板所成的角度是在慢慢变大的，如图 9-45 所示. 那么如何来刻画二面角的大小呢？

图 9-45

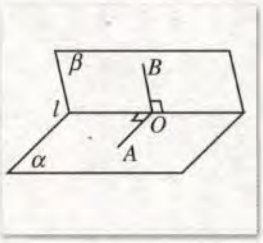


图 9-46

如图 9-46 所示，在二面角 α-l-β 的棱上任取一点 O，以 O 为垂足，分别在半平面 α 和 β 内作垂直于棱的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 所成的角叫做**二面角的平面角**.

二面角的大小用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角的大小是多少度. 特别地，平面角是直角的二面角叫做**直二面角**.

思考与讨论

你能用空间中图形平移的性质说明二面角的平面角的大小与 O 的选取无关吗？

例 如图 9-47 所示，在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，求二面角 D'-AB-D 的大小.

解 连接 $D'A$ 和 $C'B$. 因为 $AB\perp$ 平面 $ADD'A'$，所以 $AD'\perp AB$，$AD\perp AB$. 因此 $\angle D'AD$ 即为二面角 D'-AB-D 的平面角.

由于 $\triangle D'AD$ 是等腰直角三角形，因此 $\angle D'AD=45^\circ$，所以二面角 D'-AB-D 的大小是 45°.

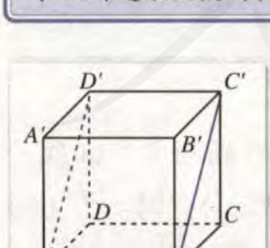


图 9-47

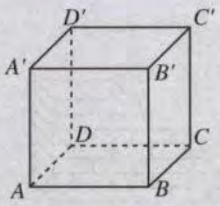
两个平面相交会形成四个二面角，它们两两相等，通常把其中不大于 90° 的角称为这两个相交平面所成的二面角.

练习

A组

1. 一个平面垂直于二面角的棱，它和二面角的两个面的交线组成的角就是二面角的平面角，对吗？为什么？

2. 如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，求二面角 $A'\text{-}AB\text{-}D$ 的大小.

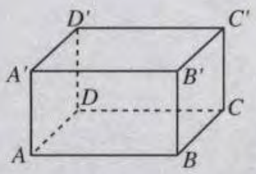


（第2题）

B组

1. 如图所示，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，已知 $AB=\sqrt{3}$，$BB'=1$，求二面角 $B'\text{-}AD\text{-}B$ 的大小.

2. 已知大小为 60° 的二面角的一个面内有一点到另一个面的距离是 3，求这个点到二面角的棱的距离.



（第1题）

9.3.4 平面与平面垂直

问题 观察我们周围的建筑，许多建筑的表面都给我们两两互相垂直的形象. 如何来刻画平面与平面垂直的概念呢？

事实上，我们有：

如果两个相交平面组成的二面角为直角，则称这两个相交平面互相垂直.

平面 α 和 β 互相垂直，记作 $\alpha\perp\beta$.

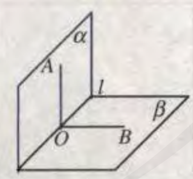


图 9-48

怎样判断两个平面是否互相垂直呢？如图 9-48 所示，如果 $\alpha\perp\beta$，$\angle AOB$ 为二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角，则不难推知 $OA\perp\beta$. 这就是说平面 α 过平面 β 的垂线 OA. 现在要问，过平面 β 的垂线 OA 的平面 α 是否与平面 β 一定垂直呢？

答案是肯定的. 事实上，我们可以得到**平面与平面垂直的判定定理**：

如果一个平面过另一个平面的一条垂线，则两个平面互相垂直.

建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线来检查所砌的墙是否和水平面垂直（图 9-49）. 实际上就是依据这个定理.

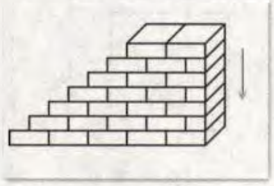


图 9-49

下面我们再来研究平面垂直的性质.

由图 9-48 可知，如果 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$, 又 α 内的直线 $OA \perp l$, 则 OA 垂直于平面 β.

事实上，我们有如下的**平面与平面垂直的性质定理**：

如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

例1 如图 9-50，已知平面 $\alpha \perp$ 平面 β, $\alpha \cap \beta = l$, 在 l 上取线段 $AB = 4$, AC, BD 分别在平面 α 和平面 β 内，并且垂直于它们的交线 AB，另外 $AC = 3$, $BD = 12$, 求 CD 长.

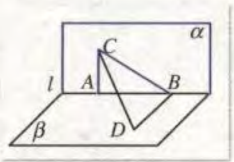


图 9-50

解 连 BC, CD. 因为 $AC \perp AB$, 所以

$$AC \perp \beta,\ AC \perp BD.$$

又 $BD \perp AB$, 所以

$$BD \perp \alpha,\ BD \perp BC.$$

所以 $\triangle BAC$ 和 $\triangle CBD$ 都是直角三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC$ 中，有

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，有

$$CD = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

例2 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = AC = a$, AD 是斜边上的高，以 AD 为折痕使 $\angle BDC$ 成直角（图 9-51）. 求证：

(1) 平面 $ABD \perp$ 平面 BDC, 平面 $ACD \perp$ 平面 BDC;

(2) $\angle BAC = 60°$.

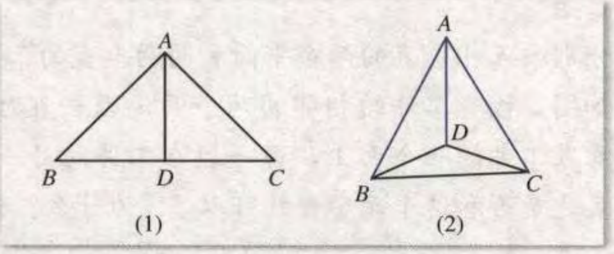


图 9-51

证明 (1) 如图 9-51(2)，因为 $AD \perp BD$，$AD \perp DC$，所以

$$AD \perp \text{平面 } BDC.$$

因为平面 ABD 和平面 ACD 都过 AD，所以平面 $ABD \perp$ 平面 BDC，平面 $ACD \perp$ 平面 BDC.

(2) 如图 9-51(1)，在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC$ 中，因为 $AB = AC = a$，所以

$$BC = \sqrt{2}a,\ BD = DC = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

如图 9-51(2)，因为 $\triangle BDC$ 是等腰直角三角形，所以

$$BC = \sqrt{2}BD = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = a.$$

所以 $AB = AC = BC$. 因此

$$\angle BAC = 60^\circ.$$

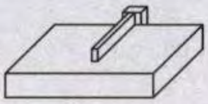
练习

A 组

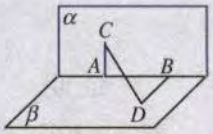
1. 将一张长方形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 进行折叠，如何才能使两部分所在平面互相垂直？
2. 长方体形状教室的墙面之间是否互相垂直？
3. 已知三条直线 OX，OY，OZ 两两垂直. 求证：三个平面 XOY，YOZ，ZOX 两两互相垂直.

B 组

1. 分别画互相垂直的两个平面和两两垂直的三个平面.
2. 如图，检查工件的相邻的两个面是否垂直时，只要用曲尺的一边紧靠在工件的一个面上，另一边在工件的另一个面上转动一下，观察尺边是否和这个面密合就可以了. 为什么？如果不转动呢？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知互相垂直的两个平面 α，β，在其交线上有两个点 A，B，AC，BD 分别是在这两个面内，且都垂直于交线 AB. 已知 $AB = 5$ cm，$AC = 3$ cm，$BD = 8$ cm，求 CD 长.

习　题

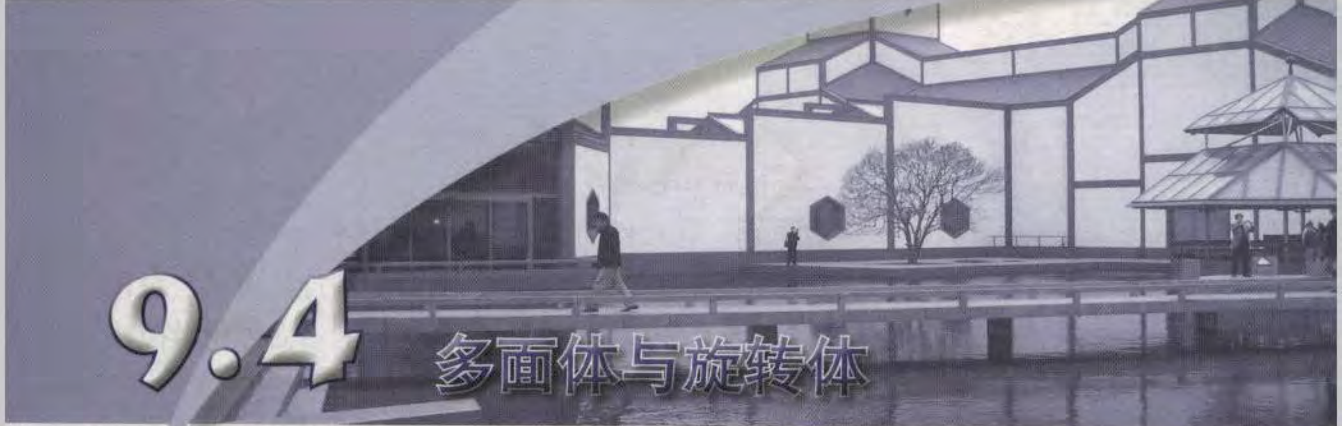
1. 判断下列说法是否正确：

   (1) 过直线上一点可以作无数条直线与这条直线垂直，并且这些直线都在同一平面内；

   (2) 同一平面的两条垂线一定共面；

   (3) 过已知平面的一条斜线的平面一定不与已知平面垂直.

2. “如果 $a \parallel \alpha$，且 $b \perp a$，则 $b \perp \alpha$” 是否正确？为什么？
3. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AB = AC$，$DB = DC$. 求证：$BC \perp AD$.
4. 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角，点 E，F 分别是 AD，BC 的中点，点 O 为原正方形的中心，求折起后 $\angle EOF$ 的大小.



9.4 多面体与旋转体

9.4.1 棱柱

1. 多面体的概念

> ❶这里的多边形是指多边形及其所围成的平面部分.

问题1 什么样的几何体叫做多面体?

由若干个多边形❶围成的封闭的空间图形，叫做**多面体**. 自然界许多物体都呈多面体的形状（图 9-52). 围成多面体的各个多边形叫做**多面体的面**，两个相邻面的公共边叫做**多面体的棱**，棱和棱的公共点叫做**多面体的顶点**，连接不在同一面上的两个顶点的线段叫做**多面体的对角线**.

一个多面体至少有四个面. 多面体依照它的面数分别叫做**四面体**、**五面体**、**六面体**等.

把一个多面体的任一个面伸展成平面，如果其余的面，都位于这个平面的同一侧，这样的多面体叫做**凸多面体**. 如图 9-52(1)(2)(3)中的多面体都是凸多面体. 图 9-52 中（4）所示的多面体就是非凸多面体.

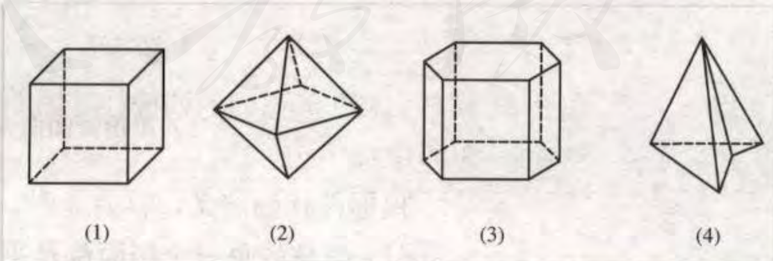


图 9-52

2. 棱柱和它的性质

问题 2　什么样的多面体叫做棱柱？

一个多面体，如果有两个面互相平行，而其余每相邻的两个面的交线都互相平行，这样的多面体叫做**棱柱**（图 9-53）.

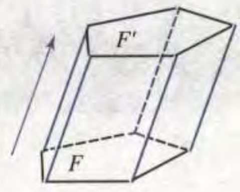


图 9-53

棱柱可看成一个多边形 F（包括它围成的平面部分）平移（同向且等长）到新的位置 F'，移动轨迹所产生的几何体.

棱柱的两个平行的面叫做**棱柱的底面**．其余各面叫做**棱柱的侧面**．两侧面的公共边叫做**棱柱的侧棱**．两个底面所在平面的公垂线段或它的长度叫做**棱柱的高**.

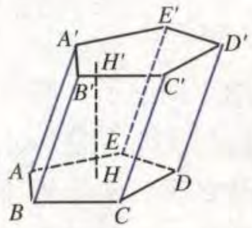
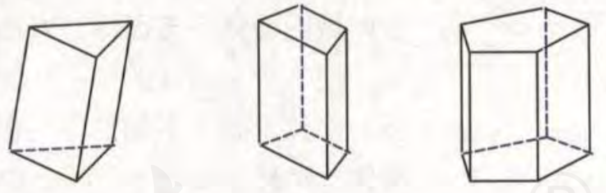


图 9-54

棱柱用底面记号并按照对应顶点的顺序来表示，如图9-54中的棱柱，记作棱柱 $ABCDE\text{-}A'B'C'D'E'$，或用表示一条对角线的端点的字母来表示，例如棱柱 AC'. 侧棱不垂直底面的棱柱叫做斜棱柱（图 9-55(1)）；侧棱垂直底面的棱柱叫做直棱柱（图 9-55(2)）. 底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱（图 9-55(3)）.

结合课件 902，学习棱柱.

棱柱的侧棱至少有三条. 棱柱的底面可以是三角形、四边形、五边形……我们把这样的棱柱分别叫做三



(1)　(2)　(3)

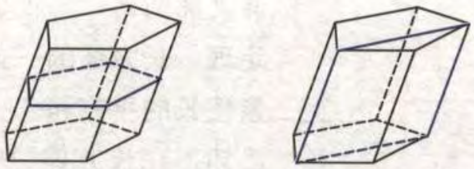
图 9-55

棱柱（图9-55(1)）、四棱柱（图 9-55(2)）、五棱柱（图 9-55(3)）……

根据棱柱的定义，容易证明，棱柱具有下列性质：

(1) 棱柱的每一个侧面都是平行四边形，所有的侧棱都相等；直棱柱的每一个侧面都是矩形，正棱柱的各个侧面都是全等的矩形.

（**2**）**两个底面与平行于底面的截面是对应边互相平行的全等多边形**（图 9-56(1)）.



(1)　　(2)

图 9-56

（**3**）**过不相邻的两条侧棱的截面都是平行四边形**（图9-56(2)）.

3. 平行六面体和长方体

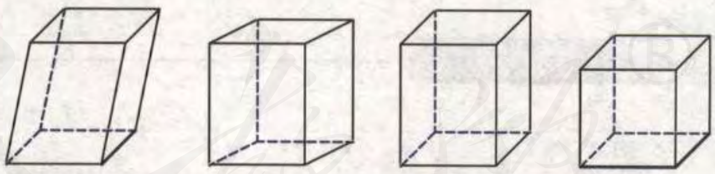
现在研究四棱柱的特殊情形.

底面是平行四边形的四棱柱叫做**平行六面体**（图 9-57(1)）.

侧棱与底面垂直的平行六面体叫做**直平行六面体**（图 9-57(2)）.

底面是矩形的直平行六面体叫做**长方体**（图 9-57(3)）.

棱长都相等的长方体叫做**正方体**（图9-57(4)）.



(1)　(2)　(3)　(4)

图 9-57

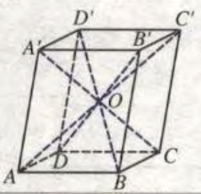


图 9-58

定理　**平行六面体的对角线（不包括面对角线）交于一点，并且在交点处互相平分**（图 9-58）.

探索与研究

有兴趣的同学可以尝试证明上述定理.

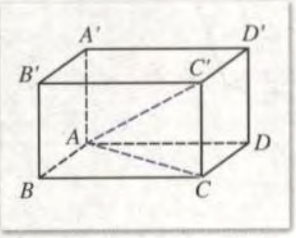


图 9-59

定理 **长方体的一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱长的平方和.**

已知，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，AC' 是一条对角线(图 9-59). 求证：$AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$.

证明 连接 AC. 因为

$$CC' \perp 平面 ABCD,$$

所以 $CC' \perp AC$.

因此 $AC'^2 = AC^2 + CC'^2$. 又

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AD^2,$$
$$AA' = CC',$$

所以 $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$.

例 一个长方体的长是 12 cm，宽是 9 cm，高是 8 cm，求对角线的长 d.

解 因为

$$d^2 = 12^2 + 9^2 + 8^2 = 289.$$

于是得

$$d = \sqrt{289} = 17(\text{cm}).$$

练习

A 组

1. 面数最少的多面体是几面体？它有几条棱？几个顶点？

2. 什么是棱柱？什么是棱柱的高？直棱柱的高是否与侧棱等长？

3. 四棱柱集合、平行六面体集合、直平行六面体集合、长方体集合、正方体集合之间有怎样的包含关系？用图表示出来.

B组

1. 有一个侧面是矩形的棱柱是不是直棱柱？有两个相邻的侧面是矩形的棱柱呢？为什么？
2. 直棱柱的底面与侧面是否垂直？为什么？
3. 已知一长方体的一个顶点上的三条棱长 a，b，c，求它的对角线长：
   (1) $a = 2$ cm，$b = 2$ cm，$c = 3$ cm；
   (2) $a = 2$ cm，$b = 3$ cm，$c = 6$ cm；
   (3) $a = 7$ dm，$b = 8$ dm，$c = 13$ dm.
4. 已知正方体的棱长为 a，求它的对角线长.
5. 已知正方体的对角线长为 d，求它的棱长.

9.4.2 棱锥

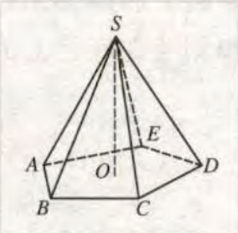


图 9-60

如果一个多面体有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，那么这个多面体就叫做**棱锥**（图 9-60）.

如图 9-60 所示，在棱锥中有公共顶点 S 的各三角形，叫做**棱锥的侧面**；多边形面叫做**棱锥的底面**或**底**，两个相邻侧面的公共边叫做**棱锥的侧棱**，各侧面的公共顶点 S，叫做**棱锥的顶点**，由顶点所引的底面所在平面的垂线段 SO，叫做**棱锥的高**（垂线段的长也称为高）.

棱锥用表示顶点和底面各顶点的字母，或者用表示顶点和底面的一条对角线端点的字母来表示. 例如，图 9-60中棱锥可表示为 S-$ABCDE$ 或者棱锥 S-AC.

棱锥的底面可以是三角形、四边形、五边形……我们把这样的棱锥分别叫做**三棱锥**（图 9-61(1)）、**四棱锥**（图 9-61(2)）、**五棱锥**（图 9-61(3)）.

下面是棱锥具有的性质.

定理 **如果棱锥被平行于底面的平面所截，则所得**

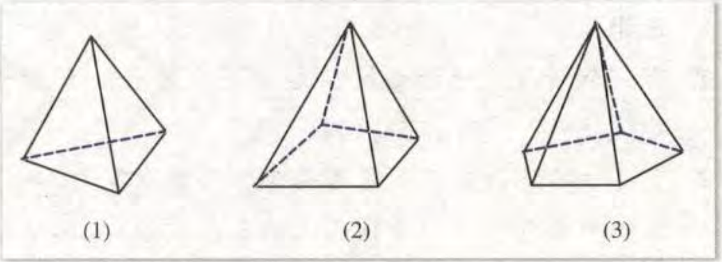


图 9-61

的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离的平方和棱锥高平方的比.

如果一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面内的射影是底面的中心，这样的棱锥叫做**正棱锥**. 正棱锥有下面的性质：

（1）正棱锥各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰三角形.

各等腰三角形底边上的高相等，它叫做正棱锥的斜高（图 9-62）.

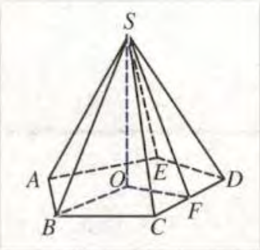


图 9-62

（2）正棱锥的高、斜高和斜高在底面上的射影组成一个直角三角形；正棱锥的高、侧棱和侧棱在底面上的射影也组成一个直角三角形（图 9-62）.

练习

A 组

1. 底面是正多边形的棱锥一定是正棱锥吗？

2. 已知正六棱锥底面边长为 8，高为 6，求它的侧棱长.

B 组

1. 一棱锥的底面面积为 16.9 cm^2，一平行于底的截面将高从顶点起分成6∶7的比，求此截面的面积.

2. 已知正四棱锥的底面面积为 16 cm^2，且高为 5 cm. 求这个正四棱锥的侧棱长和斜高.

9.4.3 直棱柱和正棱锥的侧面积

把棱柱、棱锥的侧面沿一条侧棱剪开后展在一个平面上所得的图形，叫做它们的**侧面展开图**，侧面展开图的面积就是它们的**侧面积**.

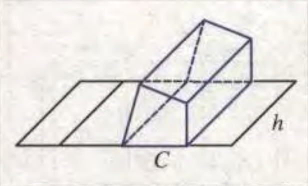


图 9-63

图 9-63 是直棱柱的侧面展开图. 从中可以看到其侧面展开图是矩形. 这个矩形的一边长等于棱柱底面的周长，另一边长等于棱柱的高. 设棱柱底面多边形的周长为 C，高为 h，则我们就可得到直棱柱侧面面积计算公式

$$S_{\text{直棱柱侧面积}}=Ch.$$

即直棱柱的侧面积等于它的底面周长和高的乘积.

由于正棱锥的每个侧面都是等腰三角形，它的侧面展开图是一些全等的等腰三角形. 所以正棱锥的侧面积等于各侧面三角形面积的和.

又由于正棱锥的侧棱都相等，底面是正多边形，如果设正棱锥的底面边长为 a，周长为 C，斜高为 h'，容易得到正 n 棱锥的侧面积的计算公式

$$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}nah'=\frac{1}{2}Ch'.$$

即正棱锥的侧面积等于它的底面的周长和斜高乘积的一半.

棱柱、棱锥的全面积等于侧面积与底面积的和.

例 已知正四棱锥底面边长为 4，斜高为 3，求这个棱锥的全面积.

解 由题知该棱锥底面面积为 $4\times4=16$.

侧面面积为

$$4\times\left(\frac{1}{2}\times4\times3\right)=24.$$

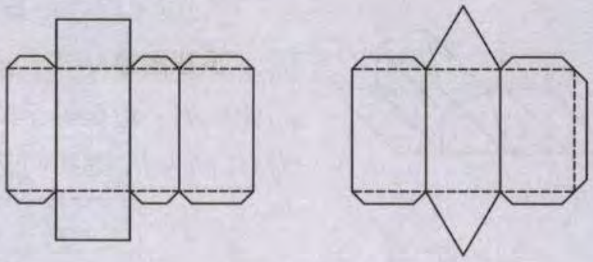
所以全面积为

$$16+24=40.$$

练习

A组

1. 求底面边长是 2.5 cm，高是 3.5 cm 的正四棱柱的侧面积和全面积.
2. 求底面边长为 30 cm，高为 20 cm 的正六棱锥的侧面积和全面积.
3. 用较厚的纸板按右图的样子画好剪下，再把它折起来粘好，做成棱柱的模型.



(第 3 题)

B组

1. 一个长方体共顶点的三条棱长之比是 1∶2∶3，全面积是 88 cm^2，求这三条棱的长.
2. 正三棱锥的底面边长是 a，高是 $2a$，计算它的全面积.

9.4.4 圆柱、圆锥

1. 圆柱、圆锥

圆钢呈圆柱形，铅锤呈圆锥形（图 9-64）. 这样形状的物体是很多的.

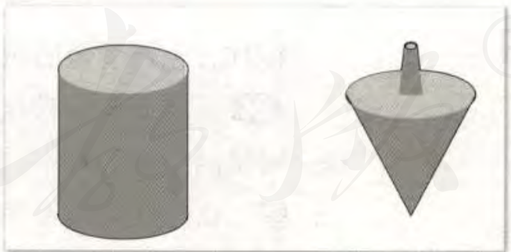


图 9-64

分别以矩形的一边、直角三角形的一直角边为旋转轴旋转一周，其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体分别叫做**圆柱**、**圆锥**（图 9-65）. 旋转轴叫做它的**轴**，

在轴上的这条边（或它的长度）叫做它的**高**，垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做它的**底面**，不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做**侧面**，无论旋转到什么位置，这条边都叫做**侧面的母线**. 如图 9-65 中，直线 $O'O$，SO 是轴，线段 $O'O$，SO 是高，$A'A$，$B'B$，SA，SB 等都是母线.

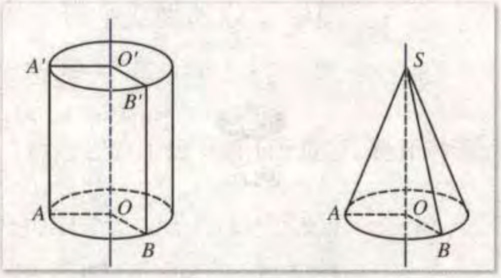


图 9-65

圆柱、圆锥用表示它的轴的字母表示. 如圆柱 $O'O$、圆锥 SO.

圆柱、圆锥有下面的性质：

(1) 平行于底面的截面是圆；

(2) 过轴的截面（轴截面）分别是矩形、等腰三角形.

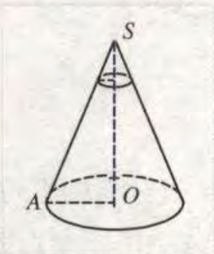


图 9-66

例1 用一个平行于圆锥底面的平面截这个圆锥，截得的小圆锥的底面与圆锥底面半径的比是 1 : 4，小圆锥的母线长是 3 cm，求圆锥的母线长（图 9-66).

解 设圆锥的母线长为 y，小圆锥底面与圆锥底面半径分别是 x，$4x$（图 9-67），根据相似三角形的性质得

$$\frac{3}{y}=\frac{x}{4x},$$

所以 $y=12$.

即圆锥母线长为 12 cm.

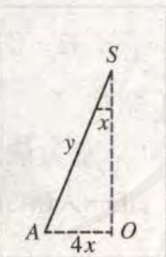


图 9-67

2. 圆柱、圆锥直观图

圆柱、圆锥的底面都是圆. 画带有圆的几何体的直观图，一般不用斜二测画法，而用**正等测画法**. 下面先介绍如何用正等测画法画水平放置的平面图形的直观图.

用正等测画法画水平放置的图形的直观图的步

骤是：

S1　在已知图形中取互相垂直的轴 Ox，Oy，画直观图时，把它们画为对应的轴 $O'x'$，$O'y'$，$\angle x'O'y'=120°$（或 $60°$），它们确定的平面表示水平平面；

S2　已知图形上平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中，分别画成平行于 x' 轴和 y' 轴的线段；

S3　平行于 x 轴或 y 轴的线段长度不变.

例2　画水平放置的圆的直观图.

画法　(1) 如图 9-68，在圆上取一对互相垂直的直径 AB，CD，分别以它们所在的直线为 x 轴、y 轴. 画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y'=120°$.

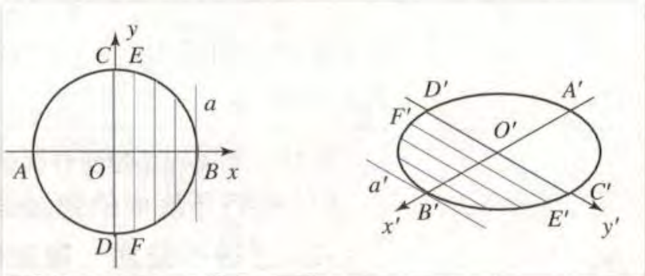


图 9-68

(2) 将圆 O 的直径 AB 分为 n 等份，过分点画平行于 y 轴的弦 CD，EF，…，在 x' 轴上以 O' 为中点画线段 $A'B'$，使 $A'B'=AB$，将 $A'B'$ 也分成 n 等份，以各分点为中点画 y' 轴的平行线段 $C'D'$，$E'F'$，…，使 $C'D'=CD$，$E'F'=EF$，….

(3) 用平滑的曲线顺次连接 A'，D'，F'，B'，E'，C'，…，A'，就得到圆的直观图，它是一个椭圆.

我们看到，在这种画法中，圆的中心 O，变为椭圆的中心 O'，圆的一对互相垂直的直径 AB，CD 变为椭圆中的线段 $A'B'$，$C'D'$，它们叫做椭圆的共轭直径，圆的切线 a 变为椭圆的切线 a'（与椭圆有且仅有一个公共点的直线）.

上面画圆的直观图方法比较繁琐，在实际画圆的直观图椭圆时，常常使用椭圆模板.

在用正等测画法画圆柱、圆锥的直观图时，先用上述方法画出底面，其余部分的画法，与棱柱、棱锥的直观图的画法相类似. 下面举例说明它们的画法.

例3 画底面圆半径为 0.8 cm，高为 2.5 cm 的圆锥的直观图.

画法 (1) 画轴：取 x 轴、y 轴、z 轴，使它们两两相交成 120°角（图 9-69(1)).

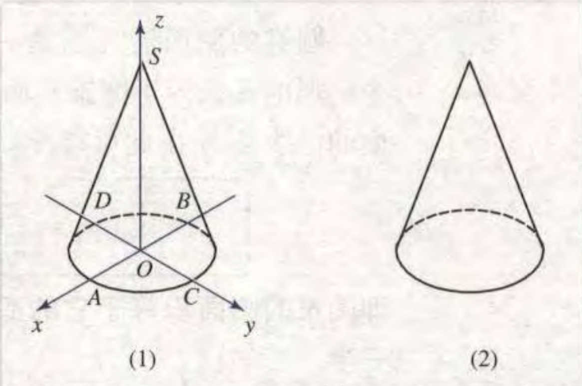


图 9-69

(2) 画底面：以 O 为中心，按 x 轴、y 轴画半径等于 0.8 cm 的圆的直观图，然后在 z 轴上，取线段 $OS=2.5$ cm.

(3) 成图：画圆锥的两条母线 SA, SB 与底面椭圆相切，再加以整理就得到所要画的圆锥直观图(图 9-69(2)).

3. 圆柱、圆锥的侧面积

将圆柱沿一条母线剪开，把侧面展开的平面图形是一个矩形（图 9-70(1)). 这个矩形的一边长等于圆柱底面的周长 C, 另一边长等于圆柱的母线长（也是高).

由此得，如果圆柱底面半径为 r, 周长为 C, 母线长为 l, 那么它的侧面积的计算公式是

$$S_{圆柱侧}=Cl=2\pi rl.$$

即圆柱的侧面积等于它的底面的周长与母线长的乘积.

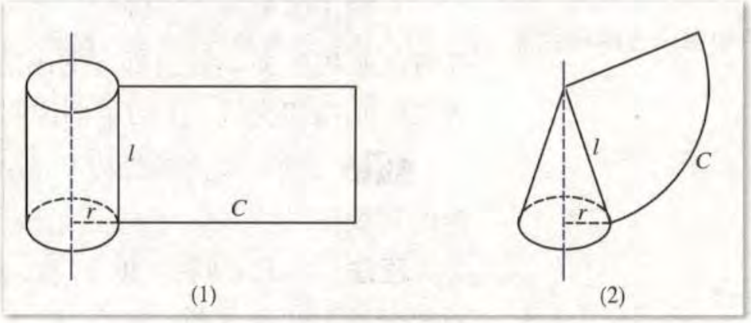


图 9-70

圆锥的侧面展开图是一个扇形（图 9-70(2)），这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长 C，半径等于圆锥侧面的母线长 l，由此可得计算圆锥侧面积的公式

$$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}Cl=\pi rl.$$

即圆锥的侧面积等于它的底面的周长与母线长乘积的一半.

由侧面积和底面积就可计算它们的全面积.

圆柱、圆锥的全面积，分别等于它们的侧面积与底面积的和.

练习

A 组

1. 用一张 4 cm×8 cm 的矩形硬纸卷成圆柱的侧面，求轴截面的面积(接头忽略不计).

2. 求证：**平行于圆锥底面的截面与底面的面积比，等于顶点到截面的距离与圆锥高的平方比.**

3. 画水平放置的半径等于 4 cm 的圆的直观图（不写画法).

4. 已知圆柱的底面半径为 2 cm，高为 6 cm，画出它的直观图（不写画法).

B组

1. 一圆锥母线长 20 cm，母线与轴的夹角为 30°，一个平行于该圆锥底面的平面截该圆锥，底面半径是截面半径的 2 倍，求底面和截面的面积，截面与底面的距离.

2. 已知圆柱的轴截面相邻边长的比为 2∶3，侧面积为 $54\ \text{cm}^2$，求圆柱的高与轴截面的面积.

3. 将半径为 r 的圆形薄铁板沿三条半径裁成全等的三个扇形，做成三个圆锥筒（无底），求圆锥筒的高（不计接头）.

9.4.5 球

1. 球的概念和性质

常见的排球、足球和滚珠等物体，都呈球形.

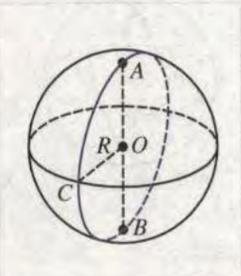


图 9-71

半圆以它的直径为旋转轴，旋转一周所成的曲面叫做**球面**. 球面所围成的几何体叫做**球体**，简称**球**. 半圆的圆心叫做**球心**. 连接球心和球面上任一点的线段叫做**球的半径**. 连接球面上两点并且通过球心的线段叫做**球的直径**. 如图9-71的球中，点 O 是球心，线段 OC 是球的半径，线段 AB 是球的直径.

球面可以看成与定点（球心）距离等于定长（半径）的点构成的集合（轨迹）.

一个球用表示它的球心的字母来表示，例如球 O.

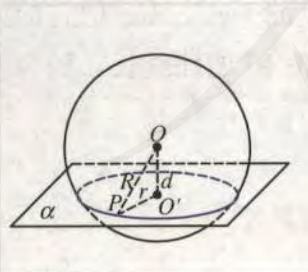


图 9-72

用一个平面 α 去截一个球 O（图 9-72），设 OO' 是平面 α 的垂线段，并且 $OO'=d$，则对它们交线上的任一点 P，有 $r=\sqrt{OP^2-d^2}$ 是一个定值. 这说明交线是到定点 O' 距离等于定长 $\sqrt{OP^2-d^2}$ 的点的集合. 所以一个平面截一个球面所得的交线是以球心在截面上的射影为圆心、以

$$r=\sqrt{R^2-d^2}\ (R\text{ 是球的半径})$$

为半径的一个圆，截面是一个圆面.

球面被经过球心的平面截得的圆叫做**大圆**，被不经过球心的平面截得的圆叫做**小圆**.

结合课件 903，学习球的有关知识.

当我们把地球看成一个球时，经线就是球面上从北极到南极的半个大圆，赤道是一个大圆，其余的纬线都是小圆（图 9-73）.

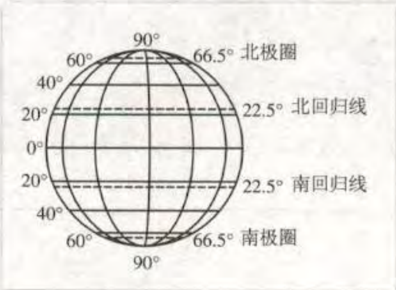


图 9-73

知识延伸

球面距离

在球面上，两点之间的最短距离，就是经过两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度. 我们把这个弧长叫做两点的**球面距离**. 例如，图9-74中的 $\overset{\frown}{PQ}$ 的长度就是 P，Q 两点的球面距离. 飞机、轮船都是尽可能以大圆弧为航线航行的.

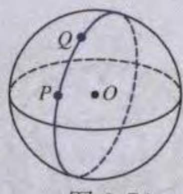


图 9-74

例1 我国首都北京靠近北纬 40°纬线上. 求北纬 40°纬线的长度约为多少？（地球半径约为 6 370 km）

解 如图 9-75，A 是北纬圈上的一点，AK 是它的半径，所以 $OK \perp AK$. 设 c 是北纬 40°的纬线长，因为 $\angle AOB = \angle OAK = 40°$，所以

图 9-75

$$
\begin{aligned}
c &= 2\pi \cdot AK \\
&= 2\pi \cdot OA\cos\angle OAK \\
&= 2\pi \cdot OA\cos 40° \\
&\approx 2 \times 3.141\,6 \times 6\,370 \times 0.766\,0 \\
&\approx 30\,658\ (\text{km}).
\end{aligned}
$$

即北纬 40°纬线长约为 30 658 km.

2. 球的表面积

前面我们学过，柱、锥的表面都可展开成平面，这样我们就可以根据平面图形的性质，求它们的表面积. 但球面不能展成平面，我们得寻求其他方法来求球的表面积.

求球的表面积的方法需要用到高等数学的知识，这里只给出球的表面积的公式. 如果球的半径是 R，则球的表面积是

$$S = 4\pi R^2.$$

即球面面积等于大圆面积的四倍.

例2 已知圆柱的底面直径与高都等于球的直径，求证：球的表面积等于圆柱的侧面积.

证明 设球的半径为 R，则圆柱的底面半径为 R，高为 $2R$，得

$$S_{球} = 4\pi R^2,$$
$$S_{圆柱侧} = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2.$$

所以 $S_{球} = S_{圆柱侧}$.

即结论成立.

练习

A 组

1. 海面上，地球球心角 $1'$ 所对的大圆弧长为 1 n mile，1 n mile是多少千米？（地球的半径取为 6 370 km，保留三位小数）
2. 用一个平面截半径为 25 cm 的球，截面面积是 $49\pi\ \text{cm}^2$，求球心到截面的距离.

B 组

计算地球表面积.（保留四位有效数字）

9.4.6 多面体与旋转体的体积

1. 长方体体积和祖暅原理

在生产建设和科学实验中，经常会遇到关于物体体积的问题，这些问题与各种几何体的体积有关．这一节我们就来研究几何体的体积问题．

几何体占有空间部分的大小叫做几何体的**体积**．

同度量长度、面积一样，要度量一个几何体的体积，首先要选一个单位体积作为标准（图 9-76），然后求出几何体的体积是单位体积的多少倍，这个倍数就是这个几何体的体积的数值．通常取棱长为单位长度（例如 1 cm、1 m）的正方体体积作为**体积单位**．

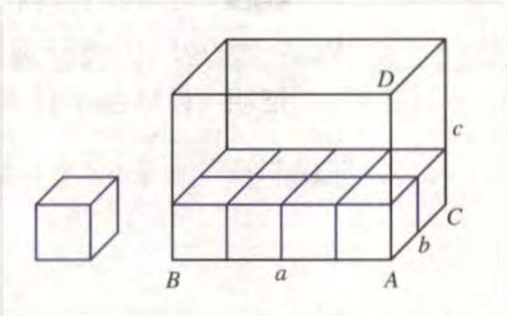


图 9-76

我们知道，**长方体的体积等于它的长、宽、高的积**．如果长、宽、高分别用 a，b，c 表示，则

$$V_{长方体}=abc.$$

从长方体体积公式可直接得到如下的结论：

推论 1　长方体的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积． 即

$$V_{长方体}=Sh.$$

推论 2　正方体的体积等于它的棱长 a 的立方． 即

$$V_{正方体}=a^3.$$

根据长方体的体积计算公式和下面介绍的祖暅原理可以推出其他几何体的体积计算公式.

结合课件 904，学习祖暅原理.

祖暅原理　夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积相等，那么这两个几何体的体积相等.

如图 9-77 所示，夹在平行平面 α, β 之间的两个形状不同的几何体，被平行于平面 α, β 的任意平面所截，如果截面 P, Q 的面积总相等，那么它们的体积一定相等.

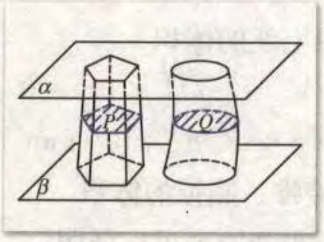


图 9-77

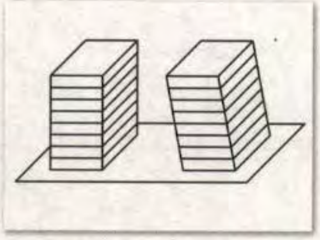


图 9-78

例如，取一摞书或一摞纸张堆放在桌面上，将它们如图 9-78 那样改变一下形状，这时高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而这摞书或纸的体积与变形前相等.

我国古代数学家祖暅，早在 5 世纪就在实践的基础上总结出这个性质，并首先用这个性质证明了球的体积公式. 因而我们把它叫做**祖暅原理**. 在欧洲直到 17 世纪，才由意大利的卡发雷利提出这个事实.

2. 棱柱、圆柱的体积

利用祖暅原理可以证明：

定理　柱体（棱柱、圆柱）的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积. 即

$$V_{柱体} = Sh.$$

推论　底面半径是 r, 高是 h 的圆柱体的体积是

$$V_{圆柱} = \pi r^2 h.$$

例1　有一个六角螺母毛坯（图 9-79），它的底面六边形的边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是

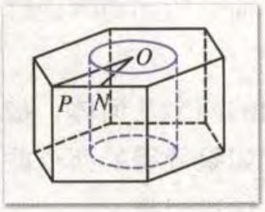


图 9-79

10 mm，求这个毛坯的体积.

解　六角螺母的毛坯的体积是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积的差. 因为

$$V_{\text{正六棱柱}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2\times 6\times 10$$
$$\approx 3.741\times 10^3(\text{mm}^3),$$

$$V_{\text{圆柱}}=3.142\times\left(\frac{10}{2}\right)^2\times 10$$
$$\approx 0.785\times 10^3(\text{mm}^3).$$

所以毛坯的体积

$$V=3.741\times 10^3-0.785\times 10^3$$
$$\approx 2.96\times 10^3(\text{mm}^3)=2.96\ (\text{cm}^3).$$

3. 棱锥、圆锥的体积

应用祖暅原理可以证明：

定理　**等底面积等高的两个锥体的体积相等.**

由此，可以得到棱锥的体积公式.

定理　**如果一个锥体（棱锥、圆锥）的底面积是 S，高是 h，那么它的体积是**

$$V_{\text{锥体}}=\frac{1}{3}Sh.$$

推论　**如果圆锥的底面半径是 r，高是 h，那么它的体积是**

$$V_{\text{圆锥}}=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

例2　一块正方形薄铁板的边长是 22 cm，以它的一个顶点为圆心，边长为半径画弧，沿弧剪下一个扇形. 用这块扇形铁板围成一个圆锥筒，求它的容积.（保留两位有效数字）

解　如图 9-80，扇形弧长是 $\frac{\pi}{2}\times 22=11\pi$. 设所围圆锥筒的底面半径为 r，则

$$2\pi r=11\pi.$$

解得 $r=5.5$.

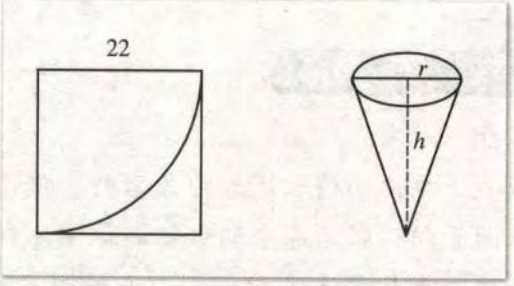


图 9-80

因为圆锥筒底的母线长是 22 cm，所以圆锥的高

$$h=\sqrt{22^2-5.5^2}\approx 21.3\ (\mathrm{cm}),$$

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\times 5.5^2\times 21.3$$

$$\approx 6.7\times 10^2(\mathrm{cm}^3).$$

即圆锥的容积约为 $6.7\times 10^2\ \mathrm{cm}^3$.

4. 球的体积

和柱体、锥体一样，球的体积也可以用祖暅原理推出.

定理 **如果球的半径是 R，那么它的体积是**

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

例3 有一种空心钢球，质量为 142 g，外径为 5.0 cm，求钢球的内径.（钢的密度是 $7.9\ \mathrm{g/cm^3}$，保留两位有效数字）

解 设空心钢球的内径为 $2x$ cm，那么钢球壳的体积是

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{125}{8}-x^3\right).$$

由 $7.9\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{125}{8}-x^3\right)=142$，得

$$x^3=\frac{125}{8}-\frac{142\times 3}{7.9\times 4\times\pi}\approx 11.335,$$

所以 $x\approx 2.25$，$2x=4.5$ (cm).

即钢球的内径约为 4.5 cm.

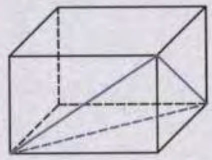
练习

A组

1. 一个正方体的棱长增加为原来的 3 倍，它的体积变为原来的多少倍？

2. 球面面积膨胀为原来的 3 倍，试问体积变为原来的多少倍？

3. 如图，将长方体沿相邻三个面的对角线截去一个三棱锥，这个三棱锥的体积是原长方体体积的几分之几？



（第 3 题）

B组

1. 如果一个正方体的棱长增加 2 cm，那么它的体积增加98 cm^3，求这正方体的棱长.（提示：设棱长为 x，依题意列方程求解.）

2. 已知圆锥的底面周长是 C，高是 h. 求证：它的体积

$$V=\frac{C^2h}{12\pi}.$$

3. 一个正方体的顶点都在球面上，它的棱长是 4 cm，求这个球的体积.

习题

1. 在正四棱柱中，底面面积是 144 cm^2，高是 5 cm，求棱柱的对角线长.

2. 已知棱锥的底面面积是 320 cm^2，把棱锥的高 4 等分，并过各分点作底面的平行平面，求截出的各截面的面积.

3. 一圆柱的高为 8 cm，底面半径为 5 cm，一平面截该圆柱得到的截面为正方形，求这个截面与轴的距离.

4. 已知球的半径为 41 cm，一个球的截面与球心的距离为9 cm，求该截面的面积.

5. A，B，C 是球 O 上的三点，$AB=10$，$AC=6$，$BC=8$，球 O 的半径等于 13，求球心到平面 ABC 的距离.

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 什么是平面图形？什么是立体图形？
2. 平面有哪些基本性质？
3. 有哪些条件可以确定一个平面？
4. 如何判定直线与平面平行？
5. 如何判定平面与平面平行？
6. 什么是平行线的传递性？
7. 什么是异面直线？如何判定两条直线是异面直线？什么是异面直线所成的角，如何计算？
8. 如何判定直线与平面垂直？
9. 如何判定平面与平面垂直？
10. 什么是多面体和凸多面体？
11. 什么是棱柱？怎样的棱柱叫直棱柱？怎样的直棱柱叫正棱柱？什么是平行六面体、长方体和正方体？
12. 棱柱有哪些主要性质？
13. 什么是棱锥？怎样的棱锥叫正棱锥？正棱锥有哪些主要性质？
14. 什么是圆柱和圆锥？它们各有哪些主要性质？
15. 棱柱和棱锥、圆柱和圆锥的表面积和体积公式是怎样的？
16. 知道球的半径，如何计算球的表面积和体积？

阅读材料

散发着数学芳香的碑文

在古代几位数学家的墓碑上，人们根据他们的遗愿，有的刻着图形，有的写着数字，用图形和数表达他们一生的追求和业绩.

下面举出几例，以学习他们的敬业精神.

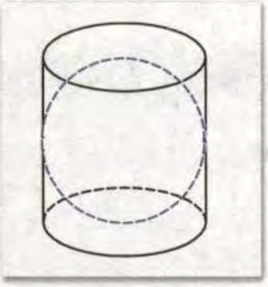


图 1

一

古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内切一个球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等（图 1）. 相传这个图形表达了阿基米德最引为自豪的发现：图中圆柱的体积是球体积的$\frac{3}{2}$，圆柱的全面积（包括上下底的表面积）也是球表面积的$\frac{3}{2}$.

二

古希腊数学家丢番图的碑文：

“过路人，这座墓里安葬着丢番图. 他生命的$\frac{1}{6}$是幸福的童年，生命的$\frac{1}{12}$是青少年时期，又过了生命的$\frac{1}{7}$他才结婚. 婚后 5 年有了一个孩子，孩子活到父亲的一半年纪就死去了. 孩子死后，丢番图在深深的悲哀中活了 4 年，也结束了尘世生涯. 过路人，你知道丢番图的年纪么?”

丢番图是古希腊最后一位数学家. 他的碑文写得多么绝妙！多么奇特！这是用未知的方式写出了他已知的一生. 谁想知道丢番图的年纪，谁就得解一元一次方程

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

解得 $x=84$，即丢番图享年 84 岁. 碑文是一个方程应用题，丢番图写这个碑文的目的是，提醒前来瞻仰的人们，不要忘记他所献身的事业.

三

图 2 是德国数学家鲁道夫的墓碑文. 1610 年鲁道夫把 π 的近似值算到了小数点后 35 位，是当时的世界纪录.

鲁道夫的一生献给了圆周率的研究，德国为尊崇他的功绩，至今还把 π 称为“鲁道夫数”.

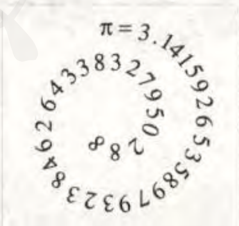
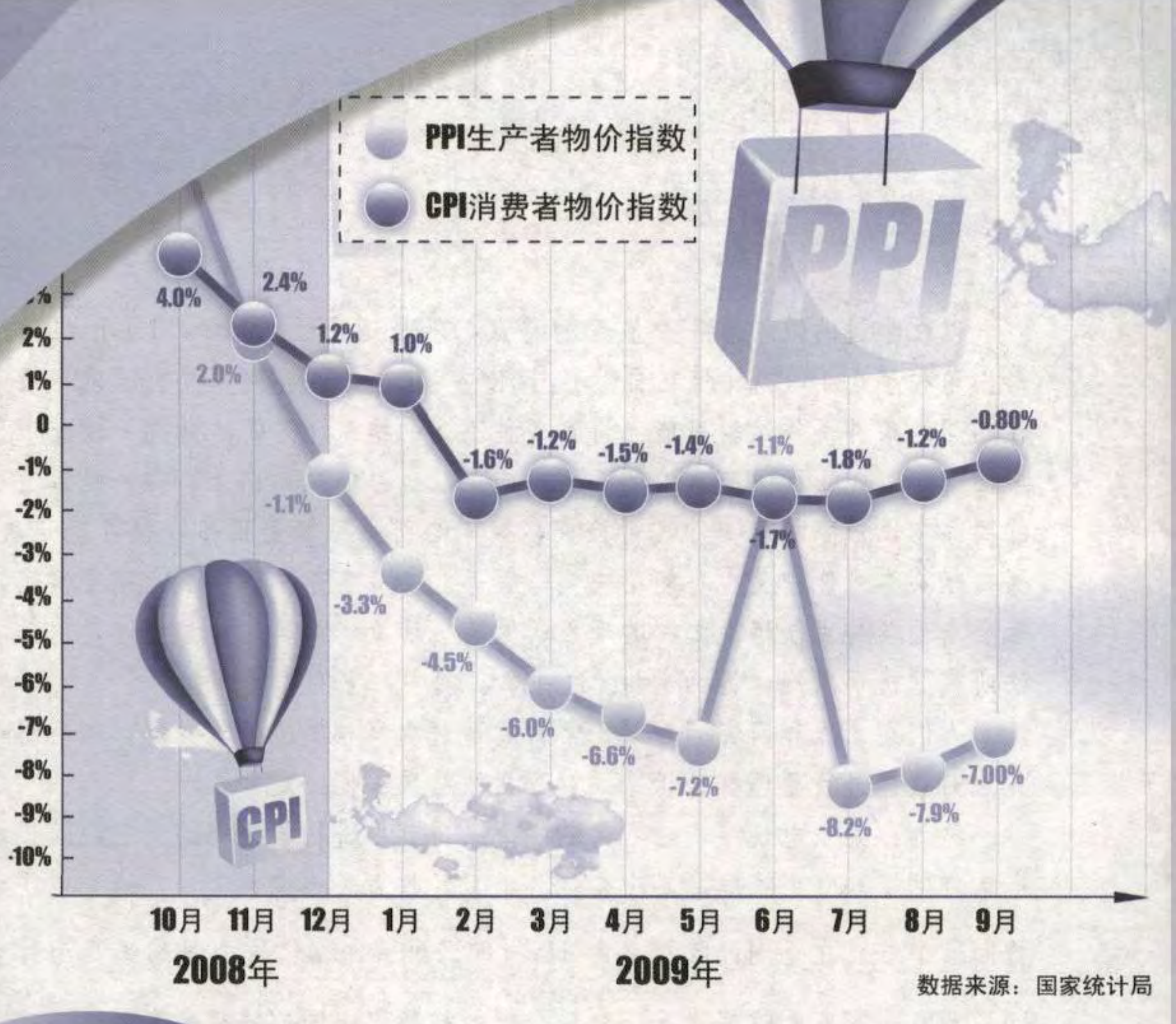


图 2



第十章 概率与统计初步

10.1 计数原理

10.2 概率初步

10.3 统计初步

以往学过的数学有一个显著的特点，就是确定性．例如，$1+1=2$，三角形内角和等于180°等．但在自然界与科学实验中，许多问题具有不确定性，即在相同的条件下作试验可能会得到多种不同的结果．例如，抛掷一枚硬币落在桌面上，可能正面（有币值的一面）向上，也可能反面向上；在一批混有次品的商品中，任意抽取一件进行检查，抽取的商品可能是正品，也可能是次品；买一张奖券可能中奖也可能不中奖；等等．我们把这种事前不能完全确定，事后会出现各种可能情况之一的现象叫做随机现象．概率与数理统计是用数学方法研究随机现象规律性的学科．这一章我们学习它们的初步知识．

人们在工作和研究问题时，常常要通过观察和实验收集数据，然后用一些方法对数据进行整理和分析，并对分析的结果作出一定的推断．

例如：某个电视台，对本台的一个电视节目进行收视率的调查，随机地打电话询问了500个家庭，其中有320个家庭收看了该电视节目，这个电视台就推断这个节目在全国的收视率为64%$\left(即\frac{320}{500}\right)$．你相信这个推断吗？为什么询问了500个家庭的收视情况，电视台就能推断出全国的收视率呢？

某研究机构，在研究吸烟与肺癌的关系问题时，调查了3 000个成年人，记录每个人是否吸烟与是否患肺癌的情况．通过分析发现两者之间有一定的关系．这个研究机构就做出论断：地球上全体成年人中，吸烟与肺癌这两者之间有一定的关系．你相信这个推断吗？

以上两个问题都涉及要对问题进行观察和实验，收集、整理和分析数据并作出一定的推断．现在要问，如何对问题进行观察和实验呢？如何收集与整理数据呢？如何根据整理出的数据信息作出推断与决策？这都是统计这门学科要研究的内容．统计学就是用科学方法收集、整理、描述和分析所得数据资料，并由此进行推断或决策的学科．

统计学具有广泛的用途，在日常生活、生产实践、科学实验及商业活动中普遍使用，本章要学习统计这门学科的初步知识．了解统计的初步常识是每个公民必备的素质．希望同学们能对统计内容感兴趣，学到一些统计学的常识并在自己的生活与学习中应用．

10.1 计数原理

问题 1 从甲地去乙地，可以乘火车，也可以乘汽车. 一天中，火车有 2 班，汽车有 4 班，那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地有多少种不同的选择？

在一天中，从甲地到乙地乘火车有 2 种选择，乘汽车有 4 种选择，以上每一种选择，都可以从甲地到达乙地. 因此，一天当中乘坐这些交通工具从甲地到乙地的不同选择共有

$$2+4=6\ (\text{种}).$$

一般地，有如下原理：

分类计数原理　完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法.

例1 书架上层有不同的数学书 15 本，中层有不同的语文书 18 本，下层有不同的物理书 7 本. 现从其中任取一本书，问有多少种不同的取法？

解 从书架上任取一本书，有三类取法：

第 1 类取法是从书架的上层取出一本数学书，可以从 15 本中任取一本，有 15 种取法；

第 2 类取法是从书架的中层取出一本语文书，可以从 18 本中任取一本，有 18 种取法；

第 3 类取法是从书架的下层取出一本物理书，可以从 7 本中任取一本，有 7 种取法.

只要在书架上任意取出一本书，任务即完成，根据分类计数原理，不同的取法一共有

$$N=m_1+m_2+m_3=15+18+7=40\text{ (种)}.$$

例2 某班同学分成甲、乙、丙、丁四个小组，甲组 9 人，乙组 11 人，丙组 10 人，丁组 9 人. 现要求该班选派一人去参加某项活动，问有多少种不同的选法?

解 该班同学分成甲、乙、丙、丁四个小组，从任何一个小组中选出一名同学去参加活动，则任务完成. 甲组有 9 种选法，乙组有 11 种选法，丙组有 10 种选法，丁组有 9 种选法，所以一共有

$$N=9+11+10+9=39$$

种选法.

问题 2 由 A 地去 C 地，中间必须经过 B 地，且已知由 A 地到 B 地有 3 条路可走，再由 B 地到 C 地有 2 条路可走 (图 10-1)，那么由 A 地经 B 地到 C 地有多少种不同的走法?

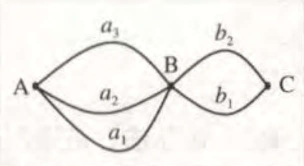


图 10-1

这里，从 A 地到 C 地不能由一个步骤直接到达，必须经过 B 地，从 A 地到 B 地有 3 种不同的走法，分别用 a_1，a_2，a_3 表示，而从 B 地到 C 地有 2 种不同的走法，分别用 b_1，b_2 表示. 所以从 A 地经 B 地到 C 地的全部走法有

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_1,\ a_3b_2,$$

共计 6 种. 就是从 A 地到 B 地的走法数 3 与从 B 地到 C 地的走法数 2 的乘积，即

$$3\times 2=6\text{ (种)}.$$

一般地，有如下原理:

分步计数原理 **完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有**

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法.

例3 书架上层有不同的数学书 15 本，中层有不同的语文书 18 本，下层有不同的物理书 7 本. 现从中取出数学、语文、物理书各一本，问有多少种不同的取法?

解 从书架上取数学、语文、物理书各一本，可以分成三个步骤完成：

第 1 步，取数学书一本，有 15 种不同的取法；

第 2 步，取语文书一本，有 18 种不同的取法；

第 3 步，取物理书一本，有 7 种不同的取法.

符合分步计数原理的条件，利用分步计数原理，得到

$$N = 15 \times 18 \times 7 = 1\ 890$$

种不同的取法.

例4 某农场要在 4 种不同类型的土地上，试验种植 A，B，C，D 这 4 种不同品种的小麦，要求每种土地上试种一种小麦，问有多少种不同的试验方案?

解 第 1 步，先考虑 A 种小麦，可在 4 种不同类型的土地中任选 1 种，有 4 种选法；

第 2 步，考虑 B 种小麦，可在剩下的 3 种不同类型的土地中任选 1 种，有 3 种选法；

第 3 步，考虑 C 种小麦，再在剩下的 2 种不同类型的土地中任选 1 种，有 2 种选法；

第 4 步，最后考虑 D 种小麦，只剩下 1 种类型的土地，因此只有 1 种选法.

以上 4 步依次完成，才算完成，依据分步计数原理，可知有

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

种不同的试验方案.

例5 由数字 1，2，3，4，5 可以组成多少个三位数?（各位上的数字可以重复）

解 用 1，2，3，4，5 这 5 个数字组成三位数可以分成三个步骤完成：

第 1 步，确定百位上的数字，从上面 5 个数字中任

取 1 个数字，共有 5 种取法；

第 2 步，确定十位上的数字，因为数字可以重复，所以仍有 5 种取法；

第 3 步，确定个位上的数字，同理，亦有 5 种取法.

根据分步计数原理，组成不同的 3 位数的个数共有

$$5\times5\times5=125\text{（个）}.$$

上述两个基本原理的共同点是，都是研究“完成一件事，共有多少种不同的方法”，它们的区别在于一个与“分类”有关，一个与“分步”有关.

如果完成一件事有 n 类不同的办法，无论哪一类办法中的哪一种都能单独地完成这件事，求完成这件事的方法的总数，就用分类计数原理；如果完成一件事，需要分成 n 个步骤，各个步骤都不可缺少，需要完成所有的步骤才能完成这件事，而完成每一个步骤又各有若干方法，求完成这件事方法的种数，就用分步计数原理.

例6 甲班有三好学生 8 人，乙班有三好学生 6 人，丙班有三好学生 9 人：

（1）由这 3 个班中任选 1 名三好学生，出席三好学生表彰会，有多少种不同的选法？

（2）由这 3 个班中各选 1 名三好学生，出席三好学生表彰会，有多少种不同的选法？

分析 （1）可以这样想：要完成由 3 个班中任选 1 名三好学生这件事，有几种选法？

当由甲班产生 1 名时，有多少不同的选法？

当由乙班产生 1 名时，有多少不同的选法？

当由丙班产生 1 名时，有多少不同的选法？

由于这 3 种办法都能完成“由 3 个班中任选 1 名三好学生”这一件事，故符合分类计数原理.

（2）可以这样想：要完成由 3 个班中各选 1 名三好学生这件事要分哪几步？各步分别有几种不同的选法？由于这几步中的任何一步，都不能单独完成“由 3 个班中各选 1 名三好学生”这件事，所以不符合分类计数原理，但当依次完成这 3 步时，就能完成这件事，故符合

分步计数原理.

解 (1) 依分类计数原理，不同的选法种数是

$$N = m_1 + m_2 + m_3 = 8 + 6 + 9 = 23;$$

(2) 依分步计数原理，不同的选法种数是

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 8 \times 6 \times 9 = 432.$$

即由 3 个班中任选 1 名三好学生，有 23 种不同的选法；由 3 个班中各选 1 名三好学生，有 432 种不同的选法.

习 题

1. 一件工作可以用两种方法完成，有 5 人会用第 1 种方法，另外有 4 人会用第 2 种方法完成，要选出 1 个人来完成这件工作，共有多少种选法?
2. 一个学生要从 2 本科技书、2 本政治书、3 本文艺书中任取 1 本，共有多少种不同的取法?
3. 代数式
$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$$
展开后共有多少项?
4. 从 A 地到 B 地有 2 条路可通，从 B 地到 C 地有 3 条路可通，从 A 地到 D 地有 4 条路可通，从 D 地到 C 地有 2 条路可通，从 A 地到 C 地共有多少种不同的走法?
5. 一个口袋内有 5 个小球，另一个口袋内有 4 个小球，所有这些小球的颜色互不相同:
(1) 从两个口袋内任取 1 个小球，有多少种不同的取法?
(2) 从两个口袋内各取 1 个小球，有多少种不同的取法?

10.2 概率初步

先看下面的例子.

例1 抛掷一枚硬币，假设硬币的构造是均匀的，并且掷得的结果只可能是“正面向上”或“反面向上”，问掷得“正面向上”的可能性有多大?

解 由于硬币的构造是均匀的，因而出现“正面向上”与“反面向上”的机会是均等的，又排除了其他可能，所以我们可以断言，抛掷一枚硬币，掷得“正面向上”和“反面向上”的可能性都是$\frac{1}{2}$.

例2 抛掷一颗骰子，设骰子的构造是均匀的，问掷得的可能结果有哪些？掷得6点的可能性有多大?

解 抛掷一颗骰子，只可能出现以下6种结果之一：“掷得1点”“掷得2点”“掷得3点”“掷得4点”“掷得5点”和“掷得6点”. 由于骰子的构造是均匀的，因而出现这6种结果的机会是均等的，于是我们可以断言：抛掷一颗骰子，“掷得6点”的可能性是$\frac{1}{6}$.

例3 连续抛掷两枚均匀的硬币，问可能出现的结果有哪些？两枚都出现正面向上的可能性有多大?

解 我们分别用“正”表示“正面向上”，“反”表示“反面向上”，那么连续抛掷两枚硬币可能出现的所有结果组成的集合是

$$\Omega=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\},$$

其中(正，正)表示两枚都正面向上；(正，反)表示第一枚正面向上，第二枚反面向上；(反，正)表示第一枚反面向上，第二枚正面向上；(反，反)则表示两枚都反面

向上.

因为每一枚硬币“出现正面”与“出现反面”机会是均等的，所以这四种结果的出现是等可能的. 因而我们说两枚硬币均出现“正面向上”的可能性是$\frac{1}{4}$.

通常把对某种现象的一次观察、测量或进行一次科学实验，统称为一个试验. 如果这个试验在相同的条件下可以重复进行，且每次试验的结果事先不可预知，则称此试验为**随机试验**，也简称为**试验**.

在随机试验中，如果其可能出现的结果只有有限个，且它们出现的机会是均等的，我们称这样的随机试验为**古典概型**. 容易看出，上述三个例子均属古典概型.

我们把一个随机试验的一切可能结果构成的集合叫做这个试验的**样本空间**，常用大写希腊字母 Ω 表示.

显然，古典概型的样本空间是有限集.

例 1 中的样本空间

$$\Omega = \{正, 反\}.$$

例 2 中的样本空间

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

其中 1，2，3，4，5，6 表示掷得的点数.

例 3 中的样本空间

$$\Omega = \{(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)\}.$$

在古典概型中，有时需要进一步研究一些问题. 例如，在例 2 中我们还需求“掷得偶数点”的可能性；在例 3 中还需求“恰有一枚掷得正面”的可能性等等.

我们知道，在例 2 中“掷得偶数点”是由“掷得 2 点”“掷得 4 点”和“掷得 6 点”这三种结果组成的，是样本空间的一个子集；在例 3 中“恰有一枚正面”是由(正，反)和(反，正)这两个结果组成的，也是例 3 的样本空间的一个子集，我们把样本空间的子集，叫做**随机事件**，简称**事件**. 常用大写英文字母 A，B，C 等表示. 只含有一个元素的事件通常叫做**基本事件**.

每一个事件由若干基本事件组成. 例如，在例 3 中

“恰有一枚掷得正面”就是{(正，反)，(反，正)}，例2中“掷得偶数点”就是{2，4，6}.

为了方便，我们把某一试验中不可能发生的事件(即空集$\varnothing$)叫做**不可能事件**，在做某一试验时，必然发生的事件（即全集）叫做**必然事件**.

如在例2中“掷得7点”“掷得8点”，样本空间中没有这里所说的两个元素，它们都是空集，是不可能事件，而

“掷得的点数不大于6”$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}=\Omega$

为这个试验的样本空间，一定是必然事件.

在例2中，“掷得偶数点”$=\{2, 4, 6\}$，就是出现“掷得2点”“掷得4点”“掷得6点”这三者之一时发生，因而“掷得偶数点”的可能性应该是这三者可能性之和，即$\frac{3}{6}\left(=\frac{1}{2}\right)$.

在例3中，“恰有一枚掷得正面”是由(正，反)和(反，正)这两个结果组成的. 出现“恰有一枚掷得正面”就是出现上述结果之一. 因为每一个结果出现的可能性为$\frac{1}{4}$，所以“恰有一枚掷得正面”的可能性为$\frac{2}{4}\left(=\frac{1}{2}\right)$.

一般地，对于古典概型，如果试验的基本事件总数为n，随机事件A所包含的基本事件数为m，我们就用$\frac{m}{n}$来描述事件A出现的可能性大小，称它为事件A的**概率**，记作$P(A)$，即

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

显然事件A的概率满足

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

而且，必然事件的概率是 1，不可能事件的概率是 0，即

$$P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0.$$

可以用古典概型计算的概率叫做**古典概率**.

例4 从含有两件正品 a_1, a_2 和一件次品 b_1 的三件产品中每次任取一件，每次取出后不放回，连续取两次，求取出的两件中恰好有一件次品的概率.

解 每次取后不放回地连续取两次，其一切可能的结果组成的样本空间为

$$\Omega=\{(a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_2, a_1), (a_2, b_1), (b_1, a_1), (b_1, a_2)\},$$

其中括号内左边的字母表示第一次取出的，右边的字母表示第二次取出的.

Ω 由 6 个基本事件组成，由于每一件产品被取到的机会是均等的，因此这些基本事件的出现是等可能的. 用 A 表示“取出的两件中，恰好有一件次品”这一事件，则

$$A=\{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (b_1, a_1), (b_1, a_2)\}.$$

事件 A 由 4 个基本事件组成. 因而

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

例5 在例 4 中，把“每次取出后不放回”这一条件换成“每次取出后放回”，其余不变，求取出的两件中恰好有一件次品的概率.

解 有放回地连续两次取得的两件，其一切可能的结果组成的样本空间

$$\Omega=\{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, b_1), (b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_1, b_1)\}$$

由 9 个基本事件组成. 由于每一件产品被取到的机会均等，因此这些基本事件的出现是等可能的. 用 B 表示“恰有一件次品”这一事件，则

$$B=\{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (b_1, a_1), (b_1, a_2)\},$$

事件 B 由 4 个基本事件组成，因而

$$P(B)=\frac{4}{9}.$$

当一个古典概型的样本空间所含基本事件数比较多时，我们就很难(或事实上不可能)把基本事件一一列出后进行数数，这时要用到一些其他的计数工具，如前面学的计数原理等，下面我们举两个例子.

例6 某号码锁有 6 个拨盘，每个拨盘上有从 0～9 共 10 个数字. 当 6 个拨盘上的数字组成某一个六位数字号码（开锁号码）时，锁才能打开. 如果不知道开锁号码，试开一次就把锁打开的概率是多少?

解 号码锁每个拨盘上的数字有 10 种可能的取法. 根据分步计数原理，6 个拨盘上的数字组成的六位数字号码共有 10^6 个，又试开时采用每一个号码的可能性都相等，且开锁号码只有一个，所以试开一次就把锁打开的概率为

$$\frac{1}{10^6}=\frac{1}{1\ 000\ 000}.$$

例7 抛掷两颗骰子，求：

(1) 出现点数之和为 7 的概率；

(2) 出现两个 4 点的概率.

像例 7 这样，把全体基本事件用坐标系中的点表示，在求古典概率时常常用到. 它可以帮助我们准确地找出某事件所包含的基本事件数.

解 作图 10-2，从图中容易看出基本事件全体构成的集合与点集

$S=\{P(x,\ y)\mid x\in\mathbf{N},\ y\in\mathbf{N},\ 1\leqslant x\leqslant 6,\ 1\leqslant y\leqslant 6\}$

中的元素一一对应. 因为 S 中点的总数是 $6\times6=36$，所以基本事件总数 $n=36$.

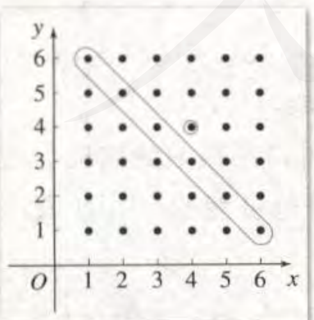


图 10-2

(1) 记“出现点数之和为 7”的事件为 A，从图中可看到事件 A 包含的基本事件共 6 个，为

(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6).

所以

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

(2) 记“出现两个 4 点”的事件为 B，则从图中可看到事件 B 包含的基本事件只有 1 个，为

$$(4, 4).$$

所以

$$P(B)=\frac{1}{36}.$$

不是所有的随机试验都是古典概型. 例如，在适宜的条件下种下一粒种子，种子“发芽”或“不发芽”这两种结果出现的机会不是均等的. 某篮球运动员投篮时，“命中”或“不命中”这两种结果出现的机会也不是均等的. 那么，如何来求这类随机事件的概率呢？

先来看抛掷硬币的试验. 我们知道，构造均匀的硬币掷得正面的概率为$\frac{1}{2}$. 历史上曾经有许多人做过掷硬币的试验，以验证这一结果，如下表所示.

试验者	抛掷次数 (n)	正面向上次数（频数 m）	频率$\frac{m}{n}$	$\left\lvert\frac{m}{n}-0.5\right\rvert$
棣莫佛	2 048	1 061	0.518 1	0.018 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9	0.006 9
费　勒	10 000	4 979	0.497 9	0.002 1
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6	0.001 6

从这些试验可以看出：在多次重复试验中，硬币掷得正面发生的频率在 0.5 附近摆动，而且随着试验次数的增加，频率越来越集中在 0.5 附近.

一般地，**在大量重复进行同一试验时，事件 A 发生的频率$\frac{m}{n}$总是在某个常数附近摆动，随着 n 的增加，$\frac{m}{n}$可能越来越接近于这个常数，这时就把这个常数叫做事件 A 的概率**，记作 $P(A)$.

因此，求事件 A 概率的基本方法，是通过大量的重复试验，用事件 A 发生的频率近似地作为它的概率.

习 题

1. 从含有两件正品和一件次品的三件产品中任取两件，求取出的两件中恰有一件次品的概率，并与例 4 比较异同.
2. 从 1，2，3，4，5 中，任取两个数，求两个数都是奇数的概率.
3. 在 40 根纤维中，有 12 根的长度超过 30 mm. 从中任取 1 根，取到长度超过 30 mm 的纤维的概率是多少？
4. 在 10 支铅笔中，有 8 支正品和 2 支次品. 从中任取 2 支，恰好都取到正品的概率是多少？
5. 同时抛掷 2 分和 5 分的两枚硬币，计算：
   (1) 两枚都出现正面的概率；
   (2) 一枚出现正面，一枚出现反面的概率.
6. 甲同学在求事件 A 的概率时，算得事件 A 的概率 $P(A)=1.2$，乙知道后说“你一定算错了”. 试问乙的根据是什么？
7. 抛掷两颗骰子，计算：
   (1) 事件“两颗骰子点数相同”的概率；
   (2) 事件“点数之和小于 7”的概率；
   (3) 事件“点数之和等于或大于 11”的概率；
   (4) 在点数和里最容易出现的数是几？
8. 某射手在同一条件下进行射击，结果如下表所示：

射击次数 n	10	20	50	100	200	500
击中靶心次数 m	8	19	44	92	178	455
击中靶心频率 $\frac{m}{n}$						

   (1) 计算表中击中靶心的各个频率；
   (2) 这名射手射击一次，击中靶心的概率约是多少？

10.3 统计初步

10.3.1 总体、样本和抽样方法

问题 某校有高中学生 900 人，校医务室想对全校高中学生的身高情况做一次调查，为了不影响正常教学活动，准备抽取 50 名学生作为调查对象. 你能帮助医务室设计一个抽取方案吗？

由问题可知，要统计的变量是某校全体高中学生的身高，变量的一个取值就是某一特定学生的身高. 在具体问题中，我们往往不考察对象的所有属性，而只考察对象的某项数值指标，如上面某校全体高中学生的身高. 因此，我们一般把所考察对象的某一数值指标的全体作为**总体**，构成总体的每一个元素作为**个体**. 从总体中抽出若干个体所组成的集合叫做**样本**. 样本中包含的个体数量叫做**样本容量**.

所以，上面问题中的总体是某校全体高中学生的身高，其中每一名学生的身高是个体. 问题是要从总体中抽取容量为 50 的样本来做调查.

又如，把某个学生高中毕业时各科的会考成绩作为考察对象，这样“成绩”的全体就构成总体，每一个成绩值就是个体.

在上面的问题中，要得到全校高中学生的身高情况，最好的办法是对全校高中学生的身高逐一进行测量、记录. 但这样做费时费力，还有可能干扰正常的教学活动. 在更多的情况下，很难做到对所有考察的对象

图 10-3

做全面的观测，有时根本无法施行. 例如测试灯泡的寿命（图 10-3），了解中央电视台春节文艺晚会的收视率，判断山东省成年人平均身高是否为全国之最等，这些试验有的是破坏性的，有的由于测试的总体包含的成员数量很大，如果逐一观测，要消耗大量时间、人力、物力，得不偿失. 一个行之有效的方法是从总体中选取部分个体（这部分个体就是总体的一个样本）记录下来，并通过这组数据来推断总体的情况.

在上述问题中，应当如何选出 50 名学生作为样本呢？能否从高一年级选出 50 名学生，作为样本来估计全校高中学生的身高呢？由于学生的身高会随着年龄的增长而增高，这样的抽样方案有很大的局限性. 我们希望从样本的身高值去推断全体高中学生的身高状况，使样本能充分地代表总体. 如何抽取样本，直接关系到对总体估计的准确程度，因此抽样时要保证每一个个体都可能被抽到，且每一个个体被抽到的机会是均等的，满足这样条件的抽样是**随机抽样**. 在进行抽样时，如何做才能满足抽样的随机性和个体被抽取机会的均等性，统计工作者设计了许多方法. 下面介绍几种经常采用的随机抽样方法.

1. 简单随机抽样

一种最简单、最基本的抽样方法是简单随机抽样，简单随机抽样有两种选取个体的方法：放回和不放回. 我们这里研究的是不放回抽样，也就是每次从总体中抽取元素后不再将这个元素放回总体.

我们先来看一个例子. 一个布袋中有 6 个同样质地的小球，从中不放回地抽取 3 个小球作为样本，第 1 次抽取时，6 个小球中的每一个被取到的机会是均等的，所以每个小球都有 $\frac{1}{6}$ 的可能性被抽到；第 2 次抽取时，余下的 5 个小球中的每一个都有 $\frac{1}{5}$ 的可能性被抽到；第 3 次抽取时，余下的 4 个小球中的每一个都有 $\frac{1}{4}$ 的

可能性被抽到. 也就是说，每次抽取时各个个体有相同的可能性被抽到.

一般地，从元素个数为 N 的总体中不放回地抽取容量为 n 的样本，如果每一次抽取时总体中的各个个体有相同的可能性被抽到，这种抽样方法叫做**简单随机抽样**，这样抽取的样本，叫做**简单随机样本**.

常用的简单随机抽样办法有抽签法和随机数表法，下面我们分别介绍用这两种办法如何抽出简单随机样本.

(1) 抽签法

从一个 100 支日光灯管的总体中，用不放回的方法抽取 10 支日光灯管构成一个简单随机样本. 我们可以给这 100 支日光灯管编号，每一支日光灯管对应 1～100 中的唯一一个数，再把这 100 个号分别写在相同的 100 张纸片（或小球、竹签）上，然后把它们放在一个容器里搅拌均匀，就可以抽样了. 抽出一张纸片，记下上面的号码，然后再搅拌均匀，继续抽取第 2 张纸片，记下号码. 重复这个过程直到取得 10 个号码时终止. 于是，和这 10 个号码对应的日光灯管就构成了一个简单随机样本.

探索与研究

如果从有 3 000 个元素的总体中抽取 100 个元素的样本，用抽签法有没有困难?

抽签法的优点是简单易行. 缺点是，当总体的容量非常大时，费时、费力又不方便. 况且，如果标号的纸片（或小球、竹签）搅拌得不均匀，可能导致抽样的不公平.

(2) 随机数表法

随机数表是由 0，1，2，…，9 这 10 个数字组成的数表，并且表中的每一位置出现各个数字的可能性相同. 通过随机数生成器，例如使用计算器或计算机的应用程序生成随机数的功能，可以生成一张随机数表，通常根据实际需要和使用方便的原则，将几个数组合成一

组，如 5 个数一组，然后通过随机数表抽取样本.

随机数表

48628	50089	38155	69882	27761	73903	53014	98720	41571	79413
53666	08912	48395	32616	34905	63640	57931	72328	49195	17699
00620	79613	29901	92364	38659	64526	20236	29793	09063	99398
98246	18957	91965	13529	97168	97299	68402	68378	89201	67871
01114	19048	00895	91770	95934	31491	72529	39980	45750	14155
41410	51595	89983	82330	96809	93877	92818	84275	45938	48490
30009	18573	58934	35285	14684	35260	44253	64517	66128	14585
64687	84771	97114	93908	65570	33972	15539	31126	56349	82215
78379	70304	75649	86829	28720	57275	10695	25678	60880	15603
31238	95419	34708	07892	34373	25823	60086	33523	39773	75483

要考察某种品牌的 850 颗种子的发芽率，从中抽取 50 颗种子作为样本进行实验. 用随机数表抽取样本的步骤如下：

对 850 颗种子进行编号，可编为 001，002，…，850. 给出的随机数表中是 5 个数一组，我们使用各个 5 位数组的前 3 位，任选一个小于或等于 850 的数作为起始数字. 例如从第 1 行第 1 个数字开始，取出 486 作为样本中的第 1 个个体的代号，继续向右读数，得到 500 作为第 2 个个体的代号，继续向右读，前 3 位数不大于 850 且不与前面取出的数重复，我们就取出，否则就跳过不取，如此下去直到得出在 001～850 之间的 50 个三位数.

上面我们是从左到右读数，也可以用从上到下读数或其他有规则的读数方法.

目前，计算器和许多计算机数学软件都能很方便地生成随机数序列，大家可使用它们抽取随机样本.

探索与研究

使用函数型计算器或 Scilab 软件的随机数生成功能生成 3 个数字一组的随机数表，并用所生成的随机数表给出上述问题的一个简单随机抽样方案.

练习

A组

1. 什么是简单随机抽样?
2. 在进行一般“调查”时，为什么要进行抽样调查?
3. 如果想了解你所在班上同学爱上数学课的比例，计划抽取 8 名同学做调查. 请你用抽签法抽取一个样本.

B组

1. 某种福利彩票有 1 000 个有机会中奖的号码（设号码为 000～999），有关机构按随机抽取的方式确定最后两位数为 36 的号码为中奖号码. 试写出 10 个中奖号码.
2. 某居民区有 730 户居民，居委会计划从中抽取 25 户调查其家庭收入状况，你能帮助居委会抽出一个简单随机样本吗?
3. 使用计算器或计算机制作一张 1 000 个一位数的随机数表，并检查 0～9这 10 个数在表中出现的可能性是否相同.

2. 系统抽样

实际抽样中，总体包含的元素个数往往很大，例如某省农村家庭的年平均收入状况，某电视机厂生产的某种型号的电视机的质量是否合格. 这时样本容量越大越能更好地反映总体特征，但工作量也随之增大. 当总体元素个数很大时，样本容量就不宜太小，采用简单随机抽样，就显得费事. 这时，可将总体分成均衡的若干部分，然后按照预先制定的规则，从每一部分抽取一个个体，得到所需要的样本，这种抽样的方法叫做**系统抽样**.

为了解某地区今年高一学生期末考试数学科的成绩，拟从参加考试的 15 000 名学生的数学成绩中抽取容量为 150 的样本. 对全体学生进行编号，号码为 1～15 000. 样本容量与总体容量的比为 150 : 15 000＝1 : 100，我们可将总体平均分为 150 个部分，其中每一部分包含 100 个个体，然后从 1 号到 100 号进行简单随机

抽样，抽取一个号码，比如说是 56，接下来顺次取出号码为 156，256，…，14 956 的学生. 这样就可得到容量为 150 的一个样本.

从元素个数为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本，如果总体容量能被样本容量整除，设 $k=\frac{N}{n}$，可先由数字 1 到 k 中随机地抽取一个数 s 作为起始数，然后再顺次抽取第 $s+k, s+2k, \cdots, s+(n-1)k$ 个数，这样就得到容量为 n 的样本. 如果总体容量不能被样本容量整除，可随机地从总体中剔除余数，然后再按系统抽样方法进行抽样.

在进行大规模的抽样调查时，系统抽样比简单随机抽样方便得多，因而应用的范围很广. 由于抽样的间隔相等，因此系统抽样也被称为**等距抽样**.

练习

A 组

1. 什么是系统抽样？系统抽样有什么优点？

2. 从编号为 1～900 的总体中用系统抽样的办法抽取 9 个样本.

B 组

1. 某批产品共有 1 563 件，产品按出厂顺序编号，号码为 1～1 563. 检测员要从中抽取 15 件产品作检测，请你给出一个系统抽样方案.

2. 要考察某商场的 2008 年的日销售额，从一年时间中抽取 52 天的销售额作为样本，请给出你的系统抽样方案. 并说说你的抽样方案的优点和不足.

3. 分层抽样

当总体由差别明显的几部分组成时，为了使抽取的样本更好地反映总体的情况，常采用分层抽样. 将总体中各个个体按某种特征分成若干个互不重叠的几部分，每一部分叫做层，在各层中按层在总体中所占比例进行简单随机抽样，这种抽样方法叫做**分层抽样**.

例如，某中学高中学生有 900 名. 为了考查他们的体重状况，打算抽取容量为 45 的一个样本. 已知高一有 400 名学生，高二有 300 名学生，高三有 200 名学生. 采用分层抽样，样本容量与总体容量的比为 45∶900=1∶20，所以在高一、高二、高三 3 个层面上取的学生数分别为$\frac{400}{20}$，$\frac{300}{20}$，$\frac{200}{20}$，即分别抽取 20，15，10 名学生. 在 3 个层面上抽样时，采用简单随机抽样方法.

分层抽样的优点是，使样本具有较强的代表性，而且在各层抽样时，又可灵活地选用不同的抽样方法. 因此，分层抽样的方法应用比较广泛.

练习

A 组

1. 某校高一学生共 500 名，经调查，喜欢数学的学生占全体学生的 30%，不喜欢数学的人数占 40%，介于两者之间的学生占 30%. 为了考察学生的期中考试的数学成绩，如何用分层抽样抽取一个容量为 50 的样本.

2. 某公司有员工 500 人，其中不到 35 岁的有 125 人，35～49 岁的有 280 人，50 岁以上的有 95 人. 为了调查员工的身体健康状况，从中抽取 100 名员工作为样本，用分层抽样的方法应当怎样抽取？

3. 某大学就餐中心为了了解新生的饮食习惯，以分层抽样的方式从 1 500名新生中抽取 200 名进行调查，新生中的文科生有 500 名，理科生有 800 名，其余学科新生有 200 名. 应如何抽取样本？

B 组

某市电视台在因特网上征集电视节目现场参与观众，报名的总人数为 12 000，分别来自四个城区，其中东城区2 400人，西城区 4 605 人，南城区 3 795 人，北城区 1 200 人. 用分层抽样的方式从中抽取 60 人参加现场节目，应当如何抽取？

10.3.2 频率分布直方图

从一个总体得到一个包含大量数据的样本时，我们很难从一个个数字中直接看出样本所包含的信息. 如果把这些数据形成频数分布或频率分布，就可以比较清楚地看出样本数据的特征.

我们先来看一个例子. 某钢铁加工厂生产内径为25.40 mm的钢管，为了检验产品的质量，从一批产品中任取 100 件检测，测得它们的实际尺寸如下：

25.39	25.36	25.34	25.42	25.45	25.38	25.39	25.42	25.47	25.35
25.41	25.43	25.44	25.48	25.45	25.43	25.46	25.40	25.51	25.45
25.40	25.39	25.41	25.36	25.38	25.31	25.56	25.43	25.40	25.38
25.37	25.44	25.33	25.46	25.40	25.49	25.34	25.42	25.50	25.37
25.35	25.32	25.45	25.40	25.27	25.43	25.54	25.39	25.45	25.43
25.40	25.43	25.44	25.41	25.53	25.37	25.38	25.24	25.44	25.40
25.36	25.42	25.39	25.46	25.38	25.35	25.31	25.34	25.40	25.36
25.41	25.32	25.38	25.42	25.40	25.33	25.37	25.41	25.49	25.35
25.47	25.34	25.30	25.39	25.36	25.46	25.29	25.40	25.37	25.33
25.40	25.35	25.41	25.37	25.47	25.39	25.42	25.47	25.38	25.39

把这批产品看成一个总体，那么这 100 件产品的实际尺寸就是一个容量为 100 的样本，我们来列出这组样本数据的频率分布表、绘制频率分布直方图. 算法步骤如下：

(1) 计算极差.

极差又叫做全距，是一组数据的最大值和最小值的差. 计算极差时，需要找出这组数据的最大值和最小值. 当数据很多时，怎样求出一组数据的最大值呢?

找出这组数据最大值的算法如下：

S1 把这 100 个数据命名为 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{100}$，并设最大值为变量 x；

S2 让 x 的值等于 A_1；

S3 把 $A_i (i = 2, \cdots, 100)$ 逐个与 x 比较，如果 $A_i > x$，则让 x 的值等于 A_i.

想一想，怎样求出这组数据的最小值？

运用上面的算法得出这组样本数据的最大值是 25.56，用类似的算法可以得出最小值是 25.24，它们的差为 25.56－25.24＝0.32，所以极差等于 0.32.

（2）决定组距与组数.

样本数据有 100 个，样本容量比较大，可以把样本分为 8～12 组. 由上面算得极差为 0.32，取组距为 0.03，由

$$\frac{极差}{组距}=\frac{0.32}{0.03}=10\frac{2}{3},$$

于是将样本数据分成 11 组.

（3）决定分点.

将第一组的起点定为 25.235，组距为 0.03，这样所分的 11 个组是：

第 1 组：25.235～25.265

第 2 组：25.265～25.295

第 3 组：25.295～25.325

第 4 组：25.325～25.355

第 5 组：25.355～25.385

第 6 组：25.385～25.415

第 7 组：25.415～25.445

第 8 组：25.445～25.475

第 9 组：25.475～25.505

第 10 组：25.505～25.535

第 11 组：25.535～25.565

（4）列频率分布表.

通过下面的算法，对落在各个小组内数据的个数进行累计，这个累计数叫做各个小组的频数，各小组的频数除以样本容量，得各小组的频率.

求各个小组频数的算法如下：

S1　设 B_j 为落在第 j 个小组内的数据个数，且 B_j 的值等于 0 $(j=1,2,\cdots,11)$；

S2　逐一判断 $A_i\,(i=1,2,\cdots,100)$ 落入哪一个小组，如果落入第 j 个小组，则让 B_j 的值增加 1.

表 2　频率分布表

分组	个数累计	频数	频率
25.235～25.265	1	1	0.01
25.265～25.295	2	2	0.02
25.295～25.325	5	5	0.05
25.325～25.355	12	12	0.12
25.355～25.385	18	18	0.18
25.385～25.415	25	25	0.25
25.415～25.445	16	16	0.16
25.445～25.475	13	13	0.13
25.475～25.505	4	4	0.04
25.505～25.535	2	2	0.02
25.535～25.565	2	2	0.02
合计	100	100	1.00

(5) 绘制频率分布直方图.

在直角坐标系中，用横轴表示产品尺寸，纵轴表示频率与组距的比值，得到频率分布直方图（图 10-4）.

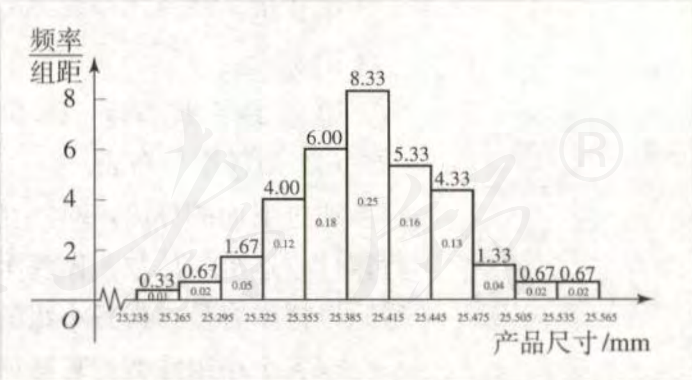


图 10-4

容易看出

$$小长方形面积 = 组距 \times \frac{频率}{组距} = 频率.$$

这就是说，各个小长方形的面积等于相应各组的频率，显然，所有长方形面积之和等于 1. 从图中可以看到产品尺寸有 25%落在区间 25.385～25.415 内；产品尺寸落在 25.355～25.445 之间的产品有 59%；有 84%的产品尺寸落在区间 25.325～25.475 内.

从频率分布直方图可以清楚地看出数据分布的总体态势，但是从直方图本身得不出原始的数据内容. 所以，把数据表示成直方图后，原有的具体数据信息就被抹掉了.

练习

A 组

1. 测试 50 只灯泡的使用寿命（单位：h），所得数据如下：

886	928	999	946	950	864	1 050	927	949	852
1 027	928	978	816	1 000	918	1 040	854	1 100	900
866	905	954	890	1 006	926	900	999	886	1 120
893	900	800	938	864	919	863	981	916	818
946	926	895	967	921	978	821	924	651	850

根据上面的数据列出频率分布表，画出频率分布直方图.

2. 从某职业学校二年级随机抽取 80 名男生的身高如下（单位：cm）：

168	184	175	182	168	190	170	188	176	193
173	179	170	173	171	193	171	159	186	175
161	165	175	187	174	162	173	178	163	172
166	178	182	175	194	177	169	174	168	170
180	178	189	161	175	173	160	179	183	171
179	162	167	166	178	185	176	165	171	175
165	180	173	157	188	178	162	176	153	174
175	167	173	181	172	163	176	175	168	177

根据上面的数据列出频率分布表，画出频率分布直方图.

B组

1. 抽查 50 袋洗衣粉，测得的质量数据如下（单位：g）：

494	498	493	505	496	492	490	490	500	499
494	495	483	485	502	493	505	485	501	491
493	500	509	512	484	509	510	495	497	498
504	498	483	510	503	497	502	498	497	500
493	499	505	493	491	497	515	503	498	518

列出频率分布表并画出频率分布直方图.

2. 有一个容量为 100 的样本，数据分组及各组的频数如下：

分组	频数
[22.7，25.7]	6
[25.7，28.7]	16
[28.7，31.7]	18
[31.7，34.7]	22
[34.7，37.7]	20
[37.7，40.7]	10
[40.7，43.7]	8

(1) 列出样本的频率分布表；

(2) 画出频率分布直方图.

10.3.3 用样本估计总体

用随机抽样的方法从总体中抽取样本后，如何用样本来估计总体呢？比如为了知道一颗钻石的质量，用天平进行了很多次称量，从中任选 5 次，结果为（单位：mg）

$$201，203，201，205，204.$$

哪一个结果是这颗钻石的质量呢？我们可以从这 5 个测量结果较为准确地估计出这颗钻石的质量. 怎样从大量

的样本数据中得到有用的信息呢？我们在初中已经学习过一些数据处理的办法，例如用统计图表来表示数据，用样本的平均数、方差估计总体的平均数和方差．这里我们将在初中的基础上继续学习用样本估计总体．

1. 用样本的平均数估计总体平均数

我们在初中学过，平均数描述了数据的平均水平，定量地反映了数据的集中趋势所处的水平．那么，怎样用样本的平均数估计总体的平均数呢？

例1 某公司 50 名员工的月工资资料如下（单位：元）：

800	800	800	800	800	1 000	1 000	1 000	1 000
1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 200	1 200	1 200
1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200
1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 500
1 500	1 500	1 500	1 500	1 500	1 500	2 000	2 000	2 000
2 000	2 000	2 500	2 500	2 500				

试计算这 50 名员工的月平均工资数，并估计这个企业员工的平均工资．

解 月平均工资为

$$\frac{800+800+\cdots+2\ 500}{50}=1\ 320\ (\text{元}).$$

由此可以估计这家大型企业员工的月平均工资为 1 320元．

假设你去这家企业应聘职位，月平均工资水平应是你要考虑的重要因素．一般来讲，月平均工资可以用来与同类企业的工资待遇作比较．

同样，再随机抽取 50 名员工的工资，计算所得的样本平均数一般会与例 1 中的样本平均数不同．所以，用样本平均数估计总体的平均数时，样本的平均数只是总体的平均数的近似．

2. 用样本标准差估计总体标准差

数据的离散程度可以用极差、方差或标准差来描述．我们知道，极差反映了一组数据变化的幅度，样本

方差描述了一组数据围绕平均数波动的大小. 为了得到以样本数据的单位表示的波动幅度，通常要求出样本方差的算术平方根. 一般地，设样本的元素为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，样本的平均数为 $\bar{x}$，定义

$$s^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n};$$

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}.$$

其中 s^2 表示**样本方差**❶，s 表示**样本标准差**.

计算样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的标准差的步骤是：

S1 算出样本数据的平均数 $\bar{x}$；

S2 算出每个样本数据与样本平均数的差

$$x_i-\bar{x}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n);$$

S3 算出 S2 中 $x_i-\bar{x}$ ($i=1$，2，…，n)的平方；

S4 算出 S3 中 n 个平方数的平均数，即为样本方差；

S5 算出 S4 中平均数的算术平方根，即为样本标准差.

例2 计算数据 5，7，7，8，10，11 的标准差.

解 S1 $\bar{x}=\frac{5+7+7+8+10+11}{6}=8$；

数据 x_i	S1 $\bar{x}$	S2 $x_i-\bar{x}$	S3 $(x_i-\bar{x})^2$
5	8	−3	9
7	8	−1	1
7	8	−1	1
8	8	0	0
10	8	2	4
11	8	3	9

S4 $s^2=\frac{9+1+1+0+4+9}{6}=4$；

S5 $s=\sqrt{4}=2$.

❶有些书上采用的样本方差公式是

$$s^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}.$$

所以这组数据的标准差为 2.

例3 从某灯泡厂生产的一批灯泡中随机地抽取 10 只进行寿命测试. 得数据如下(单位：h)：

1 458　1 395　1 562　1 614　1 351

1 490　1 478　1 382　1 536　1 496

使用函数型计算器求样本平均数 $\bar{x}$ 和样本标准差 s.

解 按键

$\boxed{\text{MODE}}$ 2 (进入统计计算状态)

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CLR}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ (将计算器存储器设置成初始状态)

1458 $\boxed{\text{DT}}$ 1395 $\boxed{\text{DT}}$ 1562 $\boxed{\text{DT}}$ 1614 $\boxed{\text{DT}}$ 1351 $\boxed{\text{DT}}$

1490 $\boxed{\text{DT}}$ 1478 $\boxed{\text{DT}}$ 1382 $\boxed{\text{DT}}$ 1536 $\boxed{\text{DT}}$ 1496 $\boxed{\text{DT}}$

(键入数据)

继续按下表按键

按键	显示结果
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$	1476.2
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$	78.7309342

即样本平均数 $\bar{x}=1\,476.2$，样本标准差

$$s=78.730\,934\,2.$$

这里，我们更关心的是这批灯泡寿命的情况. 我们可以用算出的样本标准差 $s=78.730\,934\,2$ 来估计这批灯泡寿命的变化幅度的大小，也就是说用样本的标准差可以估计总体的标准差. 如果再抽取 10 只，算得的标准差一般会与例 3 的标准差不同. 这就表明样本标准差具有随机性.

当数据很多时，用电子工作表软件和 Scilab 软件可以更方便、快捷地求出一组数据的标准差，你可以尝试使用这些软件来计算样本的数字特征.

例4 求 10.3.2 节从一批产品中抽取的 100 件钢管内径尺寸的样本标准差，并估计这批产品的标准差.

解 按照下面的算法求样本数据的标准差：

(1) 样本数据的平均数 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=25.401$；

(2) 100 个产品尺寸与平均数差的平方和为

$$(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2=0.310;$$

(3) 样本标准差 $s=\sqrt{\dfrac{0.310}{100}}=0.056$.

用样本标准差可估计这批产品的总体标准差为 0.056. 也就是每件产品对于平均数的平均波动幅度是 0.056.

例5 从甲、乙两名学生中选拔一人参加射击比赛，对他们的射击水平进行了测试，两人在相同条件下各射击 10 次，命中的环数如下：

甲： 7 8 6 8 6 5 9 10 7 4

乙： 9 5 7 8 7 6 8 6 7 7

(1) 计算甲、乙两人射击命中环数的平均数和标准差；

(2) 比较两人的成绩，然后决定选择哪一人参赛.

解 (1) 计算得 $\overline{x}_{甲}=7$，$\overline{x}_{乙}=7$；$s_{甲}=1.73$，$s_{乙}=1.10$.

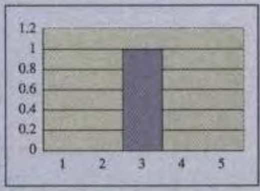
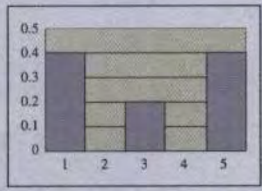
(2) 由(1)可知，甲、乙两人的平均成绩相等，但 $s_{乙}<s_{甲}$，这表明乙的成绩比甲的成绩稳定一些，从成绩的稳定性考虑，可以选择乙参赛.

样本标准差和频率分布直方图有什么关系呢？从标准差的定义可知，如果样本各数据值都相等，则标准差得 0，表明数据没有波动幅度，数据没有离散性；若各项的值与平均数的差较大，则标准差也越大，表明数据的波动幅度也很大，数据离散程度很高. 因此标准差描述了数据对平均数的离散程度（表 10.1).

表 10.1

	A	B
样本数据	3 3 3 3 3	1 1 3 5 5
样本平均数	3	3
样本标准差	0	1.79

续表

	A	B
频率分布直方图	 数据没有离散性	 数据离散程度很高

再来看钢管内径尺寸的例子，它的频率分布直方图呈“钟形”分布（图 10-5）．样本平均值为 25.401，样

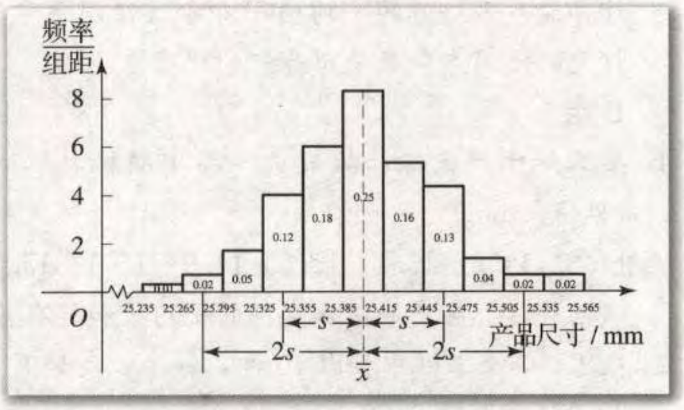


图 10-5

本标准差为 0.056．在直方图中用虚线标出平均值所在的位置，并画出距平均数一倍标准差和两倍标准差的区域．可以看到有大约 70％的钢管内径尺寸落在平均数两侧一倍标准差的区域内，即区间 $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ 内，大约有 95％的钢管内径尺寸落在平均数两侧两倍标准差的区域内，即区间 $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$ 内．由此我们估计总体中也有大致比率的产品尺寸落在相应的区域内．实际生产、生活中有大量的例子符合这样的统计规律，比如同一年龄段的人群的身高、体重，同一生产线生产的产品的质量等．

练习

A组

1. 用自动包装机包糖，现从包装的一批糖中任取 9 包，称得净质量数据如下（单位：kg）：

99.2 98.6 100.3 101.3 98.3 99.8 99.4 101.9 100.5

求出这 9 包糖的平均质量和质量的标准差，并估计这批糖的平均质量和标准差.

2. 随机抽取某种白炽灯泡 5 只测得使用寿命（单位：h）如下：

1 502　1 453　1 067　1 156　1 196

计算这 5 只灯泡的平均使用寿命及使用寿命的标准差，并估计这种灯泡的使用寿命及使用寿命的标准差.

B组

1. 某工厂生产滚珠，从某批产品中随机抽取 8 粒，量得直径分别为（单位：mm）：

14.8　14.6　15.1　15.0　14.9　15.1　15.0　14.9

试估计该厂生产的滚珠直径的平均数和标准差.

2. 从 1 000 个零件中抽取 10 件，每件长度如下（单位：mm）：

22.36　22.35　22.33　22.35　22.37　22.34　22.38　22.36　22.32　22.35

计算样本的平均数和标准差，并估计这批零件长度的平均数和标准差.

10.3.4 一元线性回归

变量与变量之间的关系常见的有两类：一类是确定性的函数关系；另一类是变量间确实存在关系，但又不具备函数关系所要求的确定性，它们的联系带有随机性．例如，人的身高并不能确定体重，但平均说来“身高者，体也重”．我们说身高与体重这两个变量具有相

关关系．通常把研究两个变量间的相关关系叫做一元回归分析．本节我们研究一元线性回归分析．

看下面的例子．

例1 在某种产品表面进行腐蚀刻线试验，得到腐蚀深度 Y 与腐蚀时间 x 之间相应的一组观察值如下表：

x/s	5	10	15	20	30	40	50	60	70	90	120
Y/μm	6	10	10	13	16	17	19	23	25	29	46

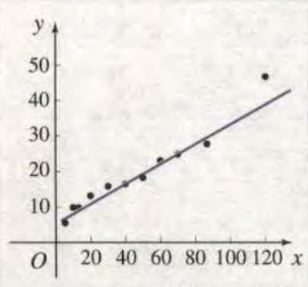


图 10-6

由表中数据可以看出，Y 有随 x 增加而增加的趋势，它们之间的这种关系无法用函数式准确表达，是一种相关关系．为了探求两者之间的定量关系，我们以腐蚀时间 x 的取值作横坐标，把 Y 的相应取值作为纵坐标，在直角坐标系中描点$(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, 11)$，如图 10-6 所示．这样的图形叫做**散点图**．

由图可见，所有点都分布在图中画出的一条直线附近．显然这样的直线还可以画出许多条，而我们希望找出其中的一条，它能最好地反映 x 与 Y 之间的关系．记此直线方程为

$$\hat{y}=a+bx, \qquad ①$$

这里在 y 的上方加记号“ˆ”，是为了区分 Y 的实际值 y，表示当 x 取值 x_i（$i=1, 2, \cdots, 11$）时，Y 相应的观察值为 y_i，而直线上对应于 x_i 的纵坐标是 $\hat{y}_i=a+bx_i$．

①式叫做 Y 对 x 的**回归直线方程**，b 叫做回归系数．要确定回归直线方程①，只要确定 a 与回归系数 b．

一般地，a，b 满足公式

$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ a=\overline{y}-b\overline{x}. \end{cases} \qquad ②$$

符号 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 表示 $x_1+x_2+\cdots+x_n$. $\sum$ 为希腊字母，读作“希格玛”．

下面利用公式②来求例 1 中，腐蚀深度 Y 对腐蚀时间 x 的回归直线方程. 先把数据列成表 10. 2.

表 10. 2

序号	x	y	x^2	y^2	xy
1	5	6	25	36	30
2	10	10	100	100	100
3	15	10	225	100	150
4	20	13	400	169	260
5	30	16	900	256	480
6	40	17	1 600	289	680
7	50	19	2 500	361	950
8	60	23	3 600	529	1 380
9	70	25	4 900	625	1 750
10	90	29	8 100	841	2 610
11	120	46	14 400	2 116	5 520
$\sum$	510	214	36 750	5 422	13 910

由上表算得，$\bar{x}=\frac{510}{11}$，$\bar{y}=\frac{214}{11}$，代入前面的公式②得(注意：不必把 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 化为小数，以减小误差)

$$b=\frac{13\ 910-11\times\frac{510}{11}\times\frac{214}{11}}{36\ 750-11\times\left(\frac{510}{11}\right)^2}\approx 0.304\ 336.$$

$$a=\frac{214}{11}-0.304\ 336\times\frac{510}{11}\approx 5.34.$$

腐蚀深度 Y 对腐蚀时间 x 的回归直线方程为

$$\hat{y}=0.304x+5.34.$$

这里的回归系数 $b=0.304$，它的意义是：腐蚀时间 x 每增加一个单位(s)，深度 Y 平均增加 0.304 个单位(μm).

例2 设对变量 x，Y 有如下观察数据：

x	151	152	153	154	156	157	158	160	160	162	163	164
Y	40	41	41	41.5	42	42.5	43	44	45	45	46	45.5

使用函数型计算器求 Y 对 x 的回归直线方程.（结

果保留到小数点后 3 位数字）

解 按键

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$（进入线性回归计算状态）

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CLR}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$（将计算器存储器设置成初始状态）

151 $\boxed{,}$ 40 $\boxed{\text{DT}}$ 152 $\boxed{,}$ 41 $\boxed{\text{DT}}$ 153 $\boxed{,}$ 41 $\boxed{\text{DT}}$ 154 $\boxed{,}$ 41.5 $\boxed{\text{DT}}$ 156 $\boxed{,}$ 42 $\boxed{\text{DT}}$ 157 $\boxed{,}$ 42.5 $\boxed{\text{DT}}$ 158 $\boxed{,}$ 43 $\boxed{\text{DT}}$ 160 $\boxed{,}$ 44 $\boxed{\text{DT}}$ 160 $\boxed{,}$ 45 $\boxed{\text{DT}}$ 162 $\boxed{,}$ 45 $\boxed{\text{DT}}$ 163 $\boxed{,}$ 46 $\boxed{\text{DT}}$ 164 $\boxed{,}$ 45.5 $\boxed{\text{DT}}$

继续按下表按键

按键	显示结果
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$	−27.75938967
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$	0.449530516

即$a\approx-27.759$，$b\approx0.450$.

所以 Y 对 x 的回归直线方程为

$$\hat{y}=0.450x-27.759.$$

练 习

A 组

1971 年至 1980 年，某城市居民的年收入金额与皮鞋销售额如下表：

年度	t_i	年收入 x_i/亿元	皮鞋销售额 y_i/万元
1971	1	32.2	25.0
1972	2	31.1	30.0
1973	3	32.9	34.0
1974	4	35.8	37.0
1975	5	37.1	39.0
1976	6	38.0	41.0

续表

年度	t_i	年收入 x_i/亿元	皮鞋销售额 y_i/万元
1977	7	39.0	42.0
1978	8	43.0	44.0
1979	9	44.6	48.0
1980	10	46.0	51.0
合计		379.7	391.0

用函数型计算器求 Y 对 x 的回归直线方程.

B组

现对 x，Y 有如下观察数据：

x	−2.0	0.6	1.4	1.3	0.1	−1.6	−1.7	0.7	−1.8
Y	−6.1	−0.5	7.2	6.9	−0.2	−2.1	−3.9	3.8	−7.5

用函数型计算器求 Y 对 x 的回归直线方程.

习 题

1. 为了解中学生的身体发育情况，对某一中学同年龄的 50 名男生的身高进行了测量，结果如下（单位：cm）：

175 168 170 176 167 181 162 173 171 177

179 172 165 157 172 173 166 177 169 181

160 163 166 177 175 174 173 174 171 171

158 170 165 175 165 174 169 163 166 166

174 172 166 172 167 172 175 161 173 167

(1) 列出样本的频率分布表，画出频率分布直方图；

(2) 计算样本的平均值 $\overline{x}$ 和标准差 s；

(3) 样本数据中有多少数据落入区间 $(\overline{x}-s,\overline{x}+s)$?

2. 在一批棉花中抽测了 60 根棉花的纤维长度，结果如下（单位：mm）：

82 202 352 321 25 293 293 86 28 206

323	355	357	33	325	113	233	294	50	296
115	236	357	326	52	301	140	328	238	358
58	255	143	360	340	302	370	343	260	303
59	146	60	263	170	305	380	346	61	305
175	348	264	383	62	306	195	350	265	385

(1) 列出样本的频率分布表，画出频率分布直方图；

(2) 计算样本的平均值 $\overline{x}$ 和标准差 s；

(3) 样本数据中有多少数据落入区间 $(\overline{x}-2s, \overline{x}+2s)$？

3. 在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的 17 名运动员的成绩如下表所示：

成绩/m	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
人数	2	3	2	3	4	1	1	1

计算这些运动员成绩的平均数（精确到 0.01）.

4. 两名跳远运动员在 10 次测试中的成绩分别如下（单位：m）：

甲：5.85 5.93 6.07 5.91 5.99 6.13 5.89 6.05 6.00 6.19

乙：6.11 6.08 5.83 5.92 5.84 5.81 6.18 6.17 5.85 6.21

分别计算两个样本标准差，并根据计算结果估计哪位运动员的成绩比较稳定？

5. 计算下列各样本的方差与标准差：

28 24 25 23 27 24 22 24 25 28

6. 如果两组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的平均数分别是 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$，那么一组数 $x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n$ 的平均数是什么？为什么？

7. 某厂生产一种混纺织毛毯，某年 1 至 8 月份的产量与生产费用支出的统计资料如下：

月　份	1	2	3	4	5	6	7	8
产　量/条	1 200	800	1 150	1 300	1 500	1 400	850	1 050
生产费用/千元	11.6	8.5	11.4	12.2	13.8	13.2	8.9	10.5

试用函数型计算器求生产费用与产量之间的回归直线方程.

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 什么是总体、个体、样本、总体容量、样本容量？

2. 什么叫做简单随机抽样？

3. 什么叫做系统抽样？

4. 什么叫做分层抽样？

5. 怎样用样本的频率分布估计总体的分布？

6. 怎样用样本的数字特征估计总体的数字特征？

阅读材料

蚂蚁和大象谁的力气更大

在小时候你可能听到过关于蚂蚁和大象谁的力气更大的故事，论搬起的物体的重量，蚂蚁与大象的力气不可同日而语，但是这样比较显然对蚂蚁并不公平. 换个标准来比，如果按搬起自身重量的倍数的大小来比较，则蚂蚁的力气远远超过大象.

在统计中也常常会遇到这样不同变量之间的比较，这时就需要有一个“合理的标准”. 我们知道，标准差是样本数据相对于平均数的平均波动幅度的度量，它能够描述样本数据中各数据同平均数的偏差的大小，有时也可用作比较的标准. 拿同一科目的不同次的考试来说，由于试卷的难易程度很难一致，我们还可以用“标准分数”来考查学习成绩. 假设一次考试中，全班平均分 $\overline{x}=80$，标准差 $s=10$，小明的成绩 $X=70$ 分，说明小明的成绩比平均分低一个标准差. 如果定义标准分数为样本数据比平均数高多少个标准差，则

$$\text{小明的标准分数}=\frac{X-\overline{x}}{s}=\frac{70-80}{10}=-1.$$

如果另外一次考试中小明的成绩 $X=80$ 分，而全班平均分 $\overline{x}=85$，标准差 $s=5$，可算出小明的标准分数仍然为-1. 这样，与通常的考试分数相比，小明的标准分数更能反映出他与全班平均水平的差别大小.

索　引