义务教育教科书

教师教学用书

数学

七年级

下册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬　李海东

本册主编：薛　彬　吴晓燕　雷晓莉
主要编者：李海东　李龙才　薛　彬　张劲松　王　嵘　张唯一
　　　　　吴晓燕　雷晓莉
责任编辑：宋莉莉

图书在版编目（CIP）数据

义务教育教科书教师教学用书．数学．七年级．下册 / 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．— 北京：人民教育出版社，2012.11

ISBN 978-7-107-25285-3

Ⅰ．①义… Ⅱ．①义… Ⅲ．①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ．① G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 277607 号

义务教育教科书教师教学用书　数学　七年级　下册

出版发行　人民教育出版社
　　　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　××× 印刷厂
版　　次　2012 年 10 月第 1 版
印　　次　　　年　月第　次印刷
开　　本　787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　　张　20.5
字　　数　476 千字
定　　价　　　元

说　明

人教版义务教育教材数学（七～九年级），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源. 基本教材是教科书和教师教学用书；配套教学资源包括同步解析与测评、教学设计与案例、人教数字校园、自读课本等.

人教版《义务教育教科书·数学（七～九年级）》是根据教育部制定的《义务教育数学课程标准（2011年版）》编写的. 全套书分为六册，每学期一册，内容包括“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域，在体系结构的设计上力求反映这些内容之间的联系与综合，使它们成为一个有机的整体，其中对于“综合与实践”领域的内容，以“课题学习”和“数学活动”等形式分散地编排于各章之中.

本套教科书在体例安排上有如下特点：

1. 每章开始均用反映本章主要内容的章前图和引言引入本章内容，使学生了解本章内容的概貌，了解本章的主要思想方法和学习方法，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料.

2. 正文中设置了“思考”“探究”“归纳”等栏目，栏目中以问题、留白或填空等形式引导学生通过观察、分析、猜想、实验、推理、反思、交流等活动获取数学知识，积累学习经验.

3. 适当安排了“阅读与思考”“观察与猜想”“实验与探究”“信息技术应用”等选学栏目，为加深学生对相关内容的认识，扩大学生的知识面，运用现代信息技术手段学习等提供资源.

4. 正文的边空设有“小贴士”和“云朵”，“小贴士”介绍与正文内容相关的背景知识，“云朵”中是一些有助于理解正文的问题.

5. 每章安排了几个有一定综合性、实践性、开放性的“数学活动”，体现数学知识的综合应用，可供教师结合相关知识的教学或全章复习时选用.

6. 每章安排了“小结”，包括本章的知识结构图和对本章内容的回顾与思考. “本章知识结构图”体现了本章知识要点、发展脉络和相互联系；“回顾与思考”对本章主要内容及其反映的思想方法进行提炼与概括，并通过在重点、难点和关键环节上提出的有思考力度的具体问题，深化学生对本章核心内容及其反映的数学思想方法的理解.

7. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类. 练习供课上使用，有些练习是对所学内容的巩固，有些练习是相关内容的延伸；习题供课内或课外作业时选用；复习题供复习全章时选用. 其中习题、复习题按照习题的功能分为“复习巩固”“综合应用”“拓广探索”三类.

这套教师教学用书与《义务教育教科书·数学（七～九年级）》相对应，供教师教学时参考使用. 全套书分为六册，每册书按章编排，每章内容与相应教科书内容对应. 教师教学用书的每一章主要包括以下六部分：

第一部分是总体设计，包括本章学习目标、本章知识结构框图、内容安排、课时安排、编

写本章时考虑的问题、对本章教学的建议等内容.

第二部分是教材分析，这部分含有教科书相应章节的正文，正文旁有教科书正文的注释及教科书中练习的答案和说明，正文下部按小节分条阐述各小节的编写意图，说明本节内容的知识结构、知识点及其发生发展过程（逻辑关系）、重点、学生学习过程中可能出现的困难和问题等.

第三部分是本章习题的参考答案.

第四部分提供了几个教学案例，供教师教学时参考. 每一个教学案例是一个课时的课堂教学设计，内容包括内容和内容解析、目标和目标解析、教学问题诊断分析、教学支持条件分析、教学过程设计、目标检测设计等几方面.

第五部分是拓展资源. 根据每章的教学内容，为教师提供相应的拓展资料，包括知识内容的拓广延伸和相关史料、拓展性问题等.

第六部分是评价建议与测试题. 评价建议从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度等几方面为教师提出本章评价建议，并提供了一套测试题供参考，并说明了每道测试题的设计意图.

本书是七年级下册的教师教学用书，内容包括“相交线与平行线”“实数”“平面直角坐标系”“二元一次方程组”“不等式与不等式组”“数据的收集、整理与描述”六章，各章授课时间大致分配如下（仅供参考）：

第五章　相交线与平行线	14 课时
第六章　实数	8 课时
第七章　平面直角坐标系	7 课时
第八章　二元一次方程组	12 课时
第九章　不等式与不等式组	11 课时
第十章　数据的收集、整理与描述	10 课时

除已列出的主要编写者外，参加本册教师教学用书编写、讨论的还有何鸾，梁燕，李维军，韩芃，鞠秀华，胥世菊，张玉梅，曹自由，任子中，孙梅，王琨，王伟，张韬，陈艳等.

本书在编写过程中征求了全国各地部分教师和教研人员的意见，在此表示衷心感谢.

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2012 年 8 月

目 录

第五章　相交线与平行线

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

1. 理解对顶角、邻补角的概念，识别同位角、内错角、同旁内角，探索并掌握对顶角相等的性质.

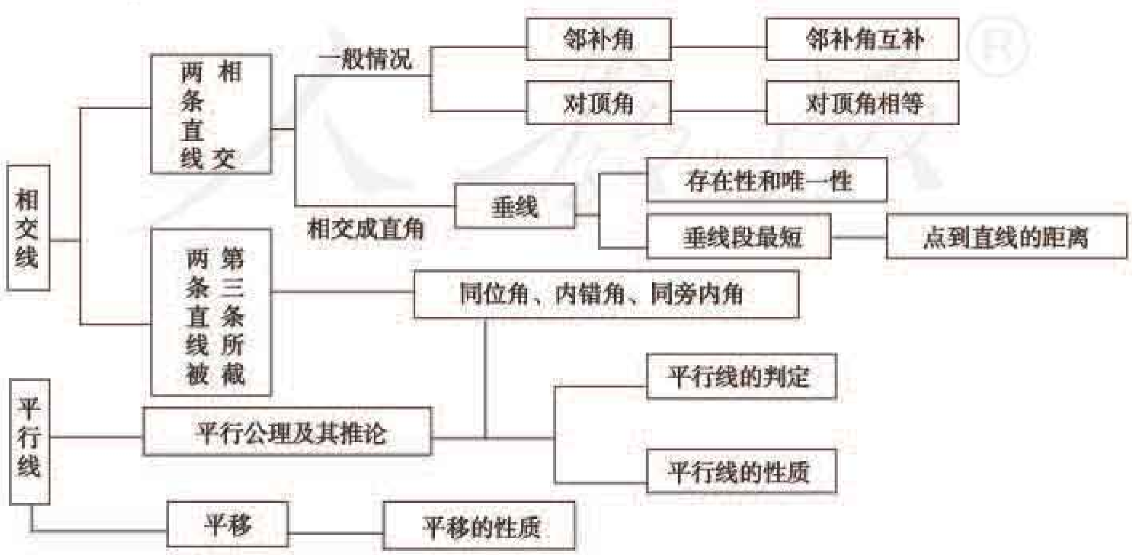
2. 理解垂线、垂线段等概念，能用三角尺或量角器过一点画已知直线的垂线．理解点到直线的距离的意义，能度量点到直线的距离．掌握基本事实：过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

3. 理解平行线概念，能用三角尺和直尺过已知直线外一点画这条直线的平行线，了解平行于同一条直线的两条直线平行．掌握基本事实：过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行；两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行．掌握平行线的性质定理：两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等．探索并证明平行线的判定定理：两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等（或同旁内角互补），那么两直线平行．掌握平行线的性质定理：两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等（或同旁内角互补）.

4. 通过具体实例认识平移，探索它的基本性质：一个图形和它经过平移所得的图形中，两组对应点的连线平行（或在同一条直线上）且相等．认识并欣赏平移在自然界和现实生活中的应用．运用图形的平移进行图案设计.

5. 通过具体实例，了解定义、命题、定理、证明的意义，会区分命题的条件和结论．知道证明的意义和证明的必要性，知道证明要合乎逻辑．了解反例的作用，知道利用反例可以判断一个命题是错误的.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

平面内两条直线的位置关系是“图形与几何”所要研究的基本问题，本章在学生已有知识和经验的基础上，继续研究平面内两条直线的位置关系，首先研究了两条直线相交的情形，探究了两条直线相交所成的角的位置和大小关系，给出了邻补角和对顶角概念，得出了“对顶角相等”的结论. 垂直作为两条直线相交的特殊情形，在生活中有着广泛的应用，与它有关的概念和结论也是学习“平面直角坐标系”的直接基础. 本章对垂直的情形进行了专门的研究，探索得出了“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”“垂线段最短”等结论，并给出点到直线的距离的概念，为学习在平面直角坐标系中确定点的坐标打下基础. 接下来，教科书研究了两条直线被第三条直线所截的情形，给出了同位角、内错角、同旁内角的概念，为接下来研究平行作准备.

对于平面内两条直线平行的位置关系，教科书首先引入一个基本事实（平行公理），即过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行，以此为出发点探讨平行线的判定和平行线的性质. 对于平行线的判定，教科书首先结合推三角尺画平行线的方法给出“同位角相等，两直线平行”，并由此推理得出“内错角相等，两直线平行”和“同旁内角互补，两直线平行”. 平行线的性质也是类似，即通过探究得出性质 1，再由性质 1 推理得出性质 2 和性质 3. 由于学生已经接触了一些命题（定理），教科书接下来对命题、命题的构成、真假命题、定理作了简单介绍，使学生初步接触有关形式逻辑的概念和术语，并以“在同一平面内，如果一条直线垂直于两条平行线中的一条，那么它也垂直于另一条”为例，介绍了什么是证明.

本章在最后一节安排了有关平移的内容. 从《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（以下简称《课标》）看，图形的变化是“图形与几何”领域中一块重要的内容，通过将图形的平移、旋转、折叠等活动，使图形动起来，有助于在运动变化的过程中发现图形不变的几何性质，因此图形的变化是研究几何问题、发现几何结论的有效工具. 平移是一种基本的图形变化，也是本套教科书中引进的第一个图形变化. 教科书将“平移”安排在本章最后一节，一方面是将其作为平行线的一个应用，另一方面引入平移，可以尽早渗透图形变化的思想，使学生尽早接触利用平移分析和解决问题的方法. 在“平移”一节中，教科书首先给出几个美丽图案，分析这些图案的共同特点，由此引出图形的平移；接着通过一个“探究”栏目让学生画雪人，体会动手平移的过程；再观察两个相邻的雪人，分析它们之间对应点连线的位置和长短关系，发现平移的基本性质，给出了平移的概念；最后学习利用平移设计图案和分析解决实际生活中的问题.

本章的重点是垂线的概念与平行线的判定和性质，因为这些知识是“图形与几何”领域的基础知识，在以后的学习中经常要用到，这部分内容掌握不好，将会影响后续内容的学习. 学好这部分重点内容的关键是要使学生理解与相交线、平行线有关的角的知识，因为直线的位置关系是通过有关的角的知识反映出来的.

对于推理能力的培养，在本章，不仅要求学生通过观察、思考、探究等活动归纳出图形的概念和性质，还要求“说理”和“简单推理”，并了解证明，把推理和证明作为探究得出结论的自然延续. 本章这样的地方还是很多的，例如“对顶角相等”性质的得出，由判定两直线平行的方法 1，得出方法 2，3，由平行线的性质 1，得出性质 2，3，以及一些例、习题，等等. 对于推理，由于

学生还比较陌生，不知道应由什么，根据什么，得出什么，对于推理所用的三段论的形式——由小前提得到结论，以大前提作为理由，一下子也很难适应. 因此，逐步深入地让学生学会说理，是本章的一个难点.

解决以上难点的关键是要按照教科书的安排，一步一步地，循序渐进地引入推理论证的内容. 在本章，结合正文的相关内容，进行初步的说理训练；在本章最后，学习了命题及命题的构成后，学生也能对推理的理由、三段论的表达形式有进一步的认识. 用这样前一步为后一步作准备，逐步提高，慢慢教会的办法克服难点.

四、课时安排

本章教学约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）：

5.1　相交线	约 3 课时
5.2　平行线及其判定	约 3 课时
5.3　平行线的性质	约 4 课时
5.4　平移	约 2 课时
数学活动	
小结	约 2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 内容呈现上充分体现认知过程，给学生提供探索与交流的时间和空间

在内容处理上，教科书加强了推理的成分，将实验几何与论证几何有机结合.

对于本章中的一些概念、性质、公理和定理，教科书大多是通过设问、设置“思考”“探究”“归纳”以及“数学活动”等栏目，让学生通过探索活动来发现结论，然后再对结论进行说明、解释或论证，为由实验几何到论证几何的过渡做好铺垫. 例如，对于“对顶角相等”，教科书首先设置一个“探究”栏目，让学生度量两条相交直线所成的角的大小，通过学生的充分讨论，探究发现对顶角相等这个结论，然后再对这个结论进行说理，这样就将实验几何与论证几何相结合. 再如，平行线性质的处理也是采用的这种处理方式. 在本章最后的活动 1“你有多少种画平行线的方法”中，学生通过讨论书中提供的三位同学画平行线的方法，结合本章所学内容和生活经验，不同的学生会得到不同的画平行线的方法. 通过这样的“数学活动”培养学生的探究能力和创新意识.

2. 注意加强直观性

密切联系实际，体现知识的形成和应用过程，以实际问题为出发点和归宿是编写这套教科书特别关注的问题. 几何图形是从实际中抽象出来的，所以几何图形的定义、性质都是比较抽象的，这一点对于学生来说有一定的困难. 为了减少学生学习的困难，在编写这一章时，我们注意根据七年级学生的认知特点，加强了直观教学，使教学内容尽量贴近学生的生活. 许多概念、性质、定理的引入都是从解决实际问题的需要来出发的（如从剪刀剪开布片的过程引入研究两条相交直线所成角的问题，从灌溉挖渠的问题引入垂线段最短的性质，等等）. 在教材编写时，也注意为利用实物、模型、计算机等多种教学手段提供材料，让学生在运动变化中寻找图形的不变的位置关系和数量关

系，从而有利于发现图形的性质（如对顶角的性质，垂线、平行线的概念的引入等等）．在研究有关数学概念、性质后，再注意把所学知识应用到实际生活中（例如画交通路口示意图、检验一些平行问题、绘制住房平面图等等）．教学时，也应注意从实际问题出发，引导学生自己多观察、多动手、勤思考，结合适合当地特点的一些问题，抽象出隐含在这些实际问题中的数学问题，引入本章要学习的相关内容，通过对数学问题的研究，学习有关的数学概念和方法，并利用所学知识解决更多的实际问题，体现具体——抽象——具体的过程，提高学生学习数学的兴趣，培养他们应用所学知识解决问题的能力．

3．循序渐进地安排技能训练

这一章的教学，除了要学习一些数学知识以外，还担负着一些技能和能力的培养和训练的任务．这既有几何语言、图形方面的，也有说理、推理方面的．这些内容，都是进一步学习空间与图形知识的基础．教科书在这方面也作了精心安排，在教学时应当注意按照由简单到复杂、由模仿到独立操作的顺序，逐步提高要求．

在这一章，要求学生进行说理和简单推理，为今后进行推理论证作准备．因此，也就要求学生能用较准确的语言表达学过的概念、性质，学会一些简单的、基本的推理语言（如“因为……所以……”“由……得……”等），要能区分命题的条件和结论等，能用文字语言表达说理过程，能用符号语言表达简单的推理过程，为今后进行推理论证打下一个良好的基础．对此，教科书也进行了周密的安排．例如，教科书在通过说理的方式得出了“对顶角相等”的性质的基础上，进一步把这个说理过程写成“因为……所以……”的形式；把利用垂直的定义判断角的关系的推理过程写成“因为……所以……”的形式；后续说明“在同一平面内，如果两条直线都垂直于同一条直线，那么这两条直线平行”以及证明“在同一平面内，如果一条直线垂直于两条平行线中的一条，那么它也垂直于另一条”的过程中，采用严格的证明形式，等等．这样安排，目的就是让学生循序渐进地接触推理与证明，逐步养成言之有据的习惯，并逐渐学会用符号语言表达推理过程．

承接“几何图形初步”，本章仍旧要重视图象语言、文字语言、符号语言等几种不同语言的相互转化，注意“几何模型→图形→文字→符号”这个抽象的过程，使抽象和直观结合起来，在图形的基础上发展其他语言．教科书也注意了从不同方向对图形语言、文字语言和符号语言间转化的设计安排，安排了一些练习、习题，教学时也要注意这方面的训练．本章也要求学生能用各种绘图工具画出垂线、平行线，平移一个简单的图形等，教科书还安排了“你有多少画平行线的方法”的数学活动，通过这些内容，让学生较快适应，把几何图形与语句表示、符号表示联系起来，使学生能从多角度表示图形、认识图形、把握图形．

4．渗透研究几何问题的内容和方法

“相交线与平行线”是“图形与几何”领域的基础内容，对这部分内容的研究也包含了研究几何图形的基本内容、思路和方法，教科书在这方面也注意加强渗透．例如，本章内容呈现时，注意让学生通过观察实物、模型和图形，通过观察、测量、实验、归纳、对比、类比等来寻找图形中的位置关系和数量关系，从而发现图形的性质．同时，注意通过“推理”获得数学结论的方法，培养学生言之有据的习惯和有条理地思考、表达的能力，完成由实验几何到论证几何的过渡．

再如，图形的性质、图形的判定是研究几何图形的基本问题，本章重点研究的就是相交线的性

质（主要是对顶角和邻补角的关系），垂直、平行的判定和性质等. 为了更好地让学生认识什么是“性质”，什么是“判定”，教科书在小结部分对此专门做了阐述，即“图形的判定”讨论的是确定某种图形需要什么条件（两条直线与第三条直线相交，具备“同位角相等”，就有“两直线平行”）；“图形的性质”讨论的是这类图形有怎样的共同特性（两条直线只要平行，它们被第三条直线所截时，就一定有同位角相等）. 另外，在很多情况下，图形的判定与性质具有互逆的关系，对此，教科书在“平行线的性质”一节的开头，通过提问“利用同位角相等，或者内错角相等，或者同旁内角互补，可以判定两条直线平行. 反过来，如果两条直线平行，同位角、内错角、同旁内角又各有什么关系呢？这就是我们下面要学习的平行线的性质”渗透了这种关系.

还有，在“相交线”一节，教科书从“两条直线相交”到“三条直线相交（两条直线被第三条直线所截）”，都是研究它们所成的角的关系. 通过“根据结构特征对这些角进行分类”，得到了对顶角、邻补角、三线八角. 垂直是两条直线相交的特殊情形，两条平行线被第三条直线所截是三条直线相交的特殊情形，这些特殊情形不仅在后续的几何图形研究中起着重要的作用，而且在生活中也有广泛的应用，这也是我们研究这些“特例”的重要原因. 这些思路和方法也都是几何图形研究的重要内容和方法，教科书也都进行了渗透.

六、对本章教学的建议

1. 有意识地培养学生有条理的思考和表达

对于推理能力的培养，本套教科书按照“说点儿理”“说理”“简单推理”“用符号表示推理”等不同层次分阶段逐步加深地安排. 本章对于推理的要求还处在初级阶段，只是结合知识的学习，识图、画图、几何语言的训练从“说理”过渡到“简单推理”. 例如，在推导“对顶角相等”这个结论时，采用了用语言叙述的方式进行“说理”，在平行线的判定（由判定方法 1 得到判定方法 2），平行线的性质（由性质 1 得出性质 2）时，教科书展示了一个简单推理的过程. 这些过程中，都没有采用“已知……求证……证明……”的形式逻辑格式，而是用说理和简单推理的方式展示推理的过程，但强调让学生经历推理的过程，感受推理论证的作用，使说理、推理作为观察、实验、探究得出结论的自然延续. 教学中要注意循序渐进地提高学生的推理能力，鼓励学生用自己的语言说明理由，在书写格式上不作统一要求，可以用自然语言，可以结合图形进行说明，可以用箭头等形式表明自己的思路，也可以用数学符号语言表示说理、简单推理的过程，等等. 总之，要注意逐步提高，不要急于要求学生用数学符号语言书写.

在“平行线的性质”一节的最后，在介绍了命题、定理等概念的基础上，教科书结合一个完整的证明过程介绍了什么是证明. 同时，教科书也安排了一些在给出的推理过程中，填写一些关键步骤和推理的理由的练习和习题. 教学中，要把握好对证明的教学要求，即要求学生知道什么是证明，能在给出的推理过程中，填出一些关键步骤和理由，不要求学生写出完整的证明过程. 这样做，目的在于逐步培养学生言之有据的习惯，为完成由实验几何到论证几何的过渡打下基础. 而不是几何证明的方法和技巧.

2. 注意突出重点内容

这一章的内容比较丰富，除了要研究平面内两条直线间的位置关系（重点是垂直和平行关系），

还包括平移以及一些有关命题的内容．由于教学时间有限，为了使学生集中精力掌握最基础的知识，并形成一定的能力，教学时应注意突出重点．例如，研究两条直线的位置关系时，重点是要研究一些图形的性质，如对顶角相等、垂线的性质，以及平行线的判定和性质等，对于一些定义，不要作严格的形式化的要求．教科书中邻补角、对顶角的概念都是结合图形，分析其位置关系给出的；垂直、平行的概念则是承接了前面学段学过的概念．对于同位角、内错角、同旁内角的内容，教科书是在研究两条直线相交的基础上，进一步研究三条直线相交的角度引人的，主要是为接下来研究平行作准备．这里要求学生掌握基本概念即可，不要做过多的变式训练．再如，对于命题、定理、证明等概念，在本章，要求学生在学过的一些命题（包括数与代数的以及图形与几何的）的基础上，了解命题的概念以及命题的构成（“如果……那么……”的形式)，知道命题的真假，了解定理的概念，知道什么是证明等，不要在这里过多要求．

由于内容较多，每课教学时都要突出一两个重点，课堂活动也要围绕这一两个重点进行．例如，讲5.1.1相交线这一小节时，要抓住“对顶角相等”这个重点．对于教科书中的探究栏目，可以设计一个表格，由两条直线相交的图形，让学生寻找其中所成的角，对它们进行分类，根据位置关系对它们“命名”，然后寻找它们的大小关系，最后再进行说理．在课堂上识图、画图、语言训练、做练习都可以主要围绕找“对顶角”或应用“对顶角相等”进行．

3．处理好平移内容

对于平移的内容，本章只是一个初步认识，本册书在“平面直角坐标系”中还安排了“用坐标表示平移”的内容，从数的角度用代数的方法研究平移，将平移从数和形两方面联系起来，使学生对平移有更深刻的了解，为今后使用平移发现几何结论，研究几何问题打下基础；在九年级上册“旋转”中，还要求学生能综合应用平移、轴对称、旋转等图形变化进行图案设计，认识和欣赏它们在现实生活的应用．这样处理平移内容，能使学生从感性到理性、从静态到动态逐步加深对平移的理解，有助于他们逐步掌握平移的内容．在教学时要注意教科书的安排，完成好这部分内容的教学．

4．重视信息技术的应用

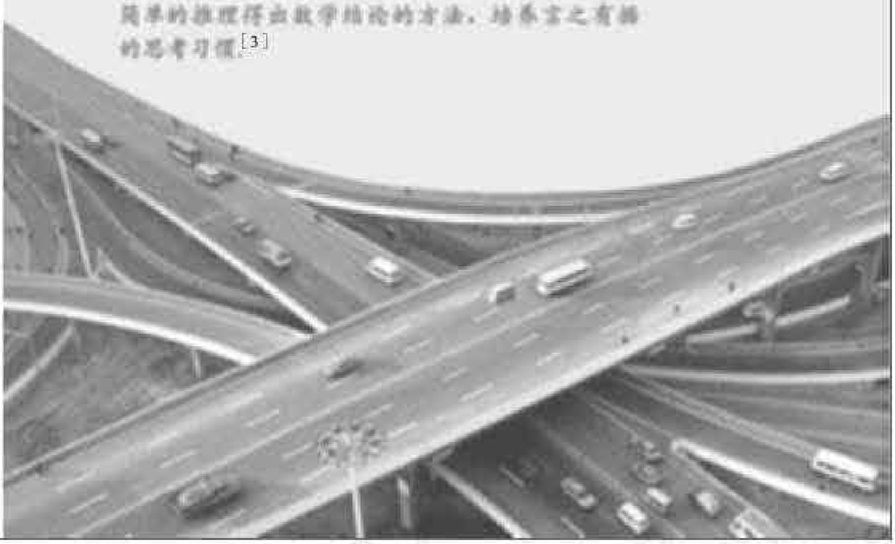
信息技术工具的使用能为学生的数学学习和发展提供丰富多彩的教育环境和有力的学习工具．利用信息技术工具，可以很方便地制作图形，并让图形动起来．许多计算机软件还具有测量功能，这也有利于我们在图形的运动变化的过程中去发现其中不变的位置关系和数量关系，有利于发现图形的性质，这可以使得许多传统的数学教学做不到或做不好的事情变得容易起来．

在这一章，信息技术工具是大有用武之地的，教科书还专门安排了一个“信息技术应用”的选学栏目，对教科书中一些可以应用信息技术的地方进行了举例说明．例如，我们随意画两条相交直线，就得到了一个相交线的“模型”，这个模型比我们用木条做成的模型又进一步，它不仅可以随意转动，通过寻找转动过程中角的不变的位置关系得到邻补角和对顶角；还可以利用软件的测量功能，测出这些角的大小，再观察转动过程中角的大小的变化，去发现邻补角、特别是对顶角之间的数量关系，这是传统方法所不能做到的，也正是信息技术工具的优势所在．其他探索垂线的性质、探索平行线的性质和判定方法也是类似的．因此，有条件的学校，应尽可能多地使用计算机或图形计算器等信息技术工具，帮助学生的数学学习．

第五章　相交线与平行线

同学们对两条直线相交、平行一定不陌生吧！纵横交错的道路，棋盘中的横线和竖线，操场上的双杠，教室中的课桌面、黑板面相邻的两条边与相对的两条边[1]……都给我们以相交线或平行线的形象。你能再举出一些相交线和平行线的实例吗？[2]

上一章我们认识了几何图形，并学习了一些基本的平面图形——直线、射线、线段和角。本章将研究平面内不重合的两条直线的位置关系：相交与平行。对于相交，我们要研究两条直线相交所成的角的位置关系和数量关系；对于平行，我们要借助于一条直线与另外两条直线相交所成的角，研究平行线的判定和性质。在此基础上，再学习平移的有关知识。本章我们还将学习通过简单的推理得出数学结论的方法，培养言之有据的思考习惯。[3]



Ⅱ 教材分析

［1］在现实生活中，这样的例子还是很多的，如一些吊拉桥的横梁和钢索等，里面有很多相交线和平行线．教学时可结合当地实际，举出一些例子，引入相交线、平行线内容的学习．

［2］相交线、平行线的概念学生在前面学段都接触过，生活中也有很多实例，学生并不陌生．可让学生多举出一些例子，体会相交线、平行线在实际生活中的应用．

［3］这里给出了本章学习的主要内容和学习方法．

1. 相交线、平行线在学生生活中是很常见的，教科书给出了一些实例，再让学生找出一些身边的相交线和平行线的例子，引出本章的内容．这样做，一方面可以通过实例，让学生了解相交线、平行线等图形是我们生活中经常见到的，我们这里研究的问题，对今后的工作和学习都是有用的；另一方面可以通过画面，培养学生的空间想象能力；还可以通过让学生举例的活动，启发学生广泛的联想，让学生知道，相交线、平行线的概念是从实物中抽象出来的，通过学生熟悉的事物，激发学生学习的兴趣．

2. 在“几何图形初步”中，学生已经接触了简单说理，在这一章，不仅要求学生通过观察、思考、实验探究出结论，还要求学生进行说理和简单推理，这些也是本章的重点内容，对于后续内容的学习，养成言之有据的习惯也是很重要的，教学时要充分注意这一点．

[1] 剪刀剪开布片的过程中，随着两个把手之间的角逐步变小，剪刀刃之间的角也相应变小．现实生活中这样的例子还很多，如用钳子夹物体等．教学中也可以结合第3页练习中用木条做成的相交线模型来引入．

[2] 这个“探究”栏目内容十分丰富．先通过∠1与∠2、∠1与∠3的位置关系引出邻补角、对顶角的概念，再通过度量，发现它们的数量关系．

[3] 两个角之间的位置关系，指的是它们的组成要素之间的位置关系，也就是它们的顶点与顶点、边与边之间的位置关系．

[4] 注意“互为”的含义，邻补角和对顶角都是要两个角互为邻补角或对顶角．要注意，邻补角不仅仅是在两条直线相交时出现，“邻”“补”这两个字突出了它的本质特征，如果一条直线与射线相交（端点在直线上），也可以得到一对邻补角．

5.1 相交线

5.1.1 相交线

如图5.1-1，观察剪刀剪开布片过程中有关角的变化[1]．可以发现，握紧剪刀的把手时，随着两个把手之间的角逐渐变小，剪刀刃之间的角也相应变小，直到剪开布片．如果把剪刀的构造看作两条相交的直线，这就关系到两条相交直线所成的角的问题．

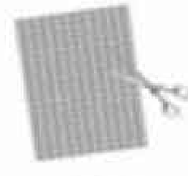


图5.1-1

探究[2]

任意画两条相交的直线，形成四个角（图5.1-2），∠1和∠2有怎样的位置关系？[3]∠1和∠3呢？

分别量一下各个角的度数，∠1和∠2的度数有什么关系？∠1和∠3呢？在图5.1-1剪刀把手之间的角变化的过程中，这个关系还保持吗？为什么？

图5.1-2

∠1和∠2有一条公共边OC，它们的另一边互为反向延长线（∠1和∠2互补），具有这种关系的两个角，互为**邻补角**[4]（adjacent angles on a straight line）．

∠1和∠3有一个公共顶点O，并且∠1的两边分别是∠3的两边的反向延长线，具有这种位置关系的两个角，互为**对顶角**（opposite angles）．

图5.1-2中还有没有其他的邻补角与对顶角？

在图5.1-2中，∠1与∠2互补，∠3与∠2互补，由“同角的补角相等”，可以得出∠1=∠3．类似地，∠2=∠4．这样，我们得到对顶角的性质：

对顶角相等．

1．本节的主要内容是研究两条直线相交的情况，包括一般情况（研究邻补角和对顶角）和特殊情况（研究垂直）以及两条直线被第三条直线所截（研究同位角、内错角、同旁内角）．

2．第1小节的主要内容是相交线所成的角——邻补角和对顶角，重点是对顶角的性质．教科书从剪刀剪开布片过程中角的变化来引出研究两条相交直线所成的角的问题，如果把剪刀的构造看作是两条相交的直线，剪刀就构成了一个相交线的模型，握紧把手时，两个把手之间的角不断变化，两条相交线形成的角也在不断变化，但是这些角之间存在不变的位置关系，这就引出了邻补角和对顶角．

3．邻补角和对顶角的概念都是结合图形描述的．这样描述，便于学生在图形中辨认．教学时要引导学生抓住概念的本质，教会学生如何在图形中辨认它们．邻补角是两个互补的角，它们又有一条公共边，它的名称反映了其中的位置关

上面推出“对顶角相等”这个结论的过程，可以写成下面的形式：

因为 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补，$\angle 3$ 与 $\angle 2$ 互补（邻补角的定义），

所以 $\angle 1=\angle 3$（同角的补角相等）.[1]

例1 如图5.1-3，直线 a，b 相交，$\angle 1=40^\circ$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.

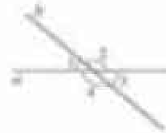


图5.1-3

解：由邻补角的定义，得

$$\angle 2=180^\circ-\angle 1=180^\circ-40^\circ=140^\circ.$$

由对顶角相等，得

$$\angle 3=\angle 1=40^\circ,$$
$$\angle 4=\angle 2=140^\circ.$$

练习

如图，取两根木条 a，b，将它们钉在一起，并把它们想象成两条直线，就得到一个相交线的模型.[2] 你能说出其中的一些邻补角与对顶角吗？两根木条所成的角中，如果 $\angle\alpha=35^\circ$，其他三个角各等于多少度？如果 $\angle\alpha$ 等于 90°，115°，m° 呢？

5.1.2 垂线

在相交线的模型（上面练习插图）中，固定木条 a，转动木条 b，当 b 的位置变化时，a，b 所成的 $\angle\alpha$[3] 也会发生变化. 当 $\angle\alpha=90^\circ$ 时（图5.1-4），我们说 a 与 b 互相**垂直**（perpendicular），记作 $a\perp b$.[4]

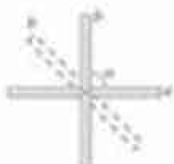


图5.1-4

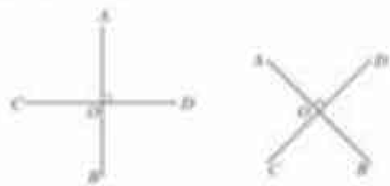


图5.1-5

垂直是相交的一种特殊情形，两条直线互相垂直，其中的一条直线叫做另一条直线的**垂线**（perpendicular line），它们的交点叫做**垂足**（foot of a perpendicular）. 在图5.1-5中，$AB\perp CD$，垂足为 O.[5]

[1] 这里进一步将“对顶角相等”的说理过程写成“因为……所以……”的形式，是为了逐步培养学生规范的推理表达.

[2] 用两根木条做成相交线的模型，一方面可以复习这一小节的内容，也为后面引入垂线作准备.

练习答案

如果 $\angle\alpha$ 是 35°，其他三个角分别是 145°，35°，145°；$\angle\alpha$ 是 90°，其他三个角都是 90°；$\angle\alpha$ 是 115°，其他三个角分别是 65°，115°，65°；$\angle\alpha$ 是 m°，其他三个角分别是 $(180-m)^\circ$，m°，$(180-m)^\circ$.

[3] α 可以是四个角中任意一个.

[4] 垂直是两条直线的位置关系，如果 a 是 b 的垂线，那么 b 也是 a 的垂线.

[5] 在垂足上标注字母，便于用直角表示垂直关系，也便于测量点到直线的距离. 点到直线的距离实际上就是这点到垂足的距离.

系和数量关系. 要注意，邻补角不一定是两条直线相交形成的，每个角的邻补角有两个. 对顶角是两条相交直线构成的，这是一个前提条件，其中有公共顶点没有公共边（相对）的两个角，互为对顶角. 邻补角和对顶角的名称也反映了它的本质特征，教学时可以结合习题5.1第1题，举出一些变式图形，来巩固概念，纠正错误.

4. “对顶角相等”是这一小节的重点内容，在以后的学习中经常要用到. 教科书在学生探究的基础上，用文字语言叙述了这个说理过程，这是一个简单的三段论推理. 这里要使学生明白思考问题的过程，即由什么条件，根据什么道理，得出什么结果. 要让学生知道，这个过程每一步都要有根据，初步养成言之有据的习惯.

5. 第2小节的主要内容是垂线的概念和性质，这也是全章的重点内容之一. 垂线是相交线的特殊情况，两条直线互相垂直时，相交线所成的四个角中有一个是直角即可. 教科书用前面练

[1] 类似于“对顶角相等”，这里也用“因为……所以……”的形式给出了应用垂直时常见的推理形式.

[2] 教科书给的图形是用三角尺来画，是利用三角尺的直角. 用量角器画时，实际上也是画出过点 A 或 B 的另一条直角边.

注意让学生多做几次，自己验证结论.

根据两条直线垂直的定义可知，如果两条直线相交所成的四个角中的任意一个角等于 $90°$，那么这两条直线垂直. 图 5.1-5 中，如果直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle AOD=90°$，那么 $AB\perp CD$. 这个推理过程可以写成下面的形式：

因为 $\angle AOD=90°$，

所以 $AB\perp CD$（垂直的定义）.[1]

日常生活中，两条直线互相垂直的情形很常见. 说出图 5.1-6 中的一些互相垂直的木条. 你能再举出其他例子吗？

图 5.1-6

探究

如图 5.1-7.

(1) 用三角尺或量角器画已知直线 l 的垂线，[2]这样的垂线能画出几条？

(2) 经过直线 l 上一点 A 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

(3) 经过直线 l 外一点 B 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

图 5.1-7

4 第五章 相交线与平行线

习中的相交线的模型作演示，应让学生注意观察：转动木条 b 时，它和木条 a 互相垂直的位置有几个，从而认识垂线的唯一性；当角 α 是直角时，其他三个角也都是直角.

两条直线垂直的定义学生前面学段已经学过，这里并没有再给出它的定义，而是结合相交线的模型进行说明，再给出垂直的符号语言和图形语言的表示，从不同角度认识垂直. 由对顶角和邻补角的性质，无论形成的角中哪一个角是直角，都可以判断两条直线互相垂直. 反过来，两条直线互相垂直，它们的四个交角都是直角.

6. 垂线有两个性质，第一个性质是垂线的存在性和唯一性，这是垂线作图的保证. 教科书通过一个“探究”来让学生体会这条性质. 用三角尺画垂线，学生前面学段已经学过. 教学时，除了让学生画图外，还可以结合习题 5.1 第 4 题，让学生通过折纸作垂线. 通过动手操作，体

经过一点（已知直线上或直线外），能画出已知直线的一条垂线，并且只能画出一条垂线．即

在同一平面内，过一点有且只有[1]一条直线与已知直线垂直．

练习

1. 当两条直线相交所成的四个角都相等时，这两条直线有什么位置关系？为什么？
2. 画一条线段或射线的垂线，就是画它们所在直线的垂线．如图，请你过点 P 画出射线 AB 或线段 AB 的垂线．[2]

（第 2 题）

思考

如图 5.1-8，在灌溉时，要把河中的水引到农田 P 处，如何挖渠能使渠道最短？[3]

图 5.1-8

探究

如图 5.1-9，连接直线 l 外一点 P 与直线 l 上各点 O，A_1，A_2，A_3，…，其中 $PO \perp l$（我们称 PO 为点 P 到直线 l 的垂线段）．比较线段 PO，PA_1，PA_2，PA_3，…的长短，这些线段中，哪一条最短？[4]

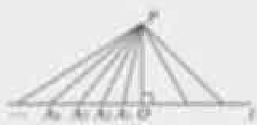


图 5.1-9

连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短．

简单说成：**垂线段最短．**

直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做**点到直线的距离．**[5]

第五章 相交线与平行线 5

[1] “有”表示存在，“只有”表示唯一，就是肯定有一条并且不能多于一条，要让学生理解这个词的意思，这也体现了数学语言的丰富和精练．

[2] 对于 (3)，需要先延长线段 AB，这时，垂足在 AB 的延长线上．

练习答案

1. 这两条直线互相垂直．
2. （图略）．

[3] 举出这样的实际例子，让学生思考，体会数学来源于实际．

[4] 要让学生自己动手画图、测量，自己总结得出结论，体会垂线段最短的性质．

[5] 结合图形，指出点 P 到直线 l 的距离是线段 PO 的长度，距离是一个数量概念．

会垂线的存在性和唯一性．

7. 两条直线垂直是它们相交的一种特殊情况，两条线段垂直、两条射线垂直、线段与射线垂直、线段与直线垂直、射线与直线垂直，都是指它们所在的直线垂直，这一点要提醒学生注意．

过一点作线段的垂线，垂足可以在线段上，也可以在线段的延长线上．教科书接下来的练习就说明了这一点，这也体现了“练习、习题是正文的自然延续”的安排．要注意，画一条线段或射线的垂线，就是画它们所在直线的垂线．

8. 垂线的第二个性质是“垂线段最短”，教科书首先提出了一个挖渠的实际问题，接下来通过探究，让学生比较垂线段与其他点到直线的连线的长短，从而发现“垂线段最短”的性质，再进一步解决开始提出的思考问题．“垂线段最短的性质”在日常生活中的应用也是很广泛的，如习题中测量跳远成绩的例子．在教学时，也可多举一些这方面的例子，体会这一性质的应用．

现在，你知道水渠该怎么挖了吗？在图 5.1-8 中画出来。如果图中比例尺为1∶100 000，水渠大约要挖多长？

练习

如图，三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

(1) 分别指出点 A 到直线 BC，点 B 到直线 AC 的距离是哪些线段的长；

(2) 三条边 AB，AC，BC 中哪条边最长？为什么？

5.1.3 同位角、内错角、同旁内角

前面我们研究了一条直线与另一条直线相交的情形。接下来，我们进一步研究一条直线与两条直线分别相交的情形。

如图 5.1-10，直线 AB，CD 与 EF 相交（也可以说两条直线 AB，CD 被第三条直线 EF 所截），构成八个角。我们看那些没有公共顶点的两个角的关系。

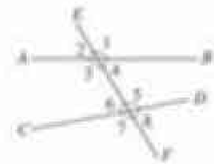


图 5.1-10

∠2 和∠5 是同位角吗？图中还有没有其他的同位角？若有，标记出它们。

图中还有没有其他的内错角与同旁内角？若有，标记出它们。

先看图中的∠1 和∠5，这两个角分别在直线 AB，CD 的同一方（上方），并且都在直线 EF 的同侧（右侧），具有这种位置关系的一对角叫做**同位角**[1]（corresponding angles）。

再看∠3 和∠5，这两个角都在直线 AB，CD 之间，并且分别在直线 EF 两侧（∠3 在直线 EF 左侧，∠5 在直线 EF 右侧），具有这种位置关系的一对角叫做**内错角**[2]（alternate interior angles）。图中∠3 和∠6 也都在直线 AB，CD 之间，但它们在直线 EF 的同一旁（左侧），具有这种位置关系的一对角叫做**同旁内角**[3]（interior angles on the same side）。

6 第五章 相交线与平行线

练习答案

(1) 点 A 到直线 BC 的距离、点 B 到直线 AC 的距离分别是线段 AC，BC 的长；

(2) 根据“垂线段最短”，可知线段 AB 最长.

[1] 对于同位角的概念，要注意它们位置上的两个“同”字，在截线的同旁、被截直线的同方.

[2] 辨析内错角要注意：在被截两直线之间，在截线的两侧.

[3] 辨析同旁内角要注意：在截线同侧，在被截两直线之间.

定义点到直线的距离是以垂线段最短为根据的，这一点可不对学生讲，但要强调距离是一个数量，而不能说垂线段是距离，要纠正学生“作出点到直线的距离”这类错误.

9. 第 3 小节主要内容是两条直线被第三条直线所截成的不共顶点的角的位置关系，主要是同位角、内错角、同旁内角的概念. 教科书以两条直线相交构成四个角的知识为基础，进一步研究一条直线分别与两条直线相交构成的八个角中，不共顶点的角的位置关系. 同位角、内错角、同旁内角的概念都是结合具体图形的描述性定义，不要求学生背诵，但要求学生能在图形中正确地辨认这样一对一对的角. 这些角的名称很好地反映了它们的位置关系，掌握辨别这些角的关键是分清哪两条直线被哪一条直线所截. 在截线的同旁，找同位角、同旁内角，在截线的不同旁，找内错角. 通过比较这些角的位置关系，结合图形多做辨认练习，让学生掌握辨认这些角的

例2[1] 如图5.1-11，直线 DE，BC 被直线 AB 所截.

(1) $\angle 1$ 和 $\angle 2$，$\angle 1$ 和 $\angle 3$，$\angle 1$ 和 $\angle 4$ 各是什么位置关系的角？

(2) 如果 $\angle 1=\angle 4$，那么 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 相等吗？$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 互补吗？为什么？

图5.1-11

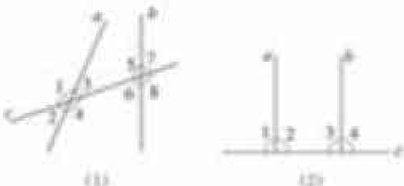
答：(1) $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是内错角，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是同旁内角，$\angle 1$ 和 $\angle 4$ 是同位角.

(2) 如果 $\angle 1=\angle 4$，由对顶角相等，得 $\angle 2=\angle 4$，那么 $\angle 1=\angle 2$.

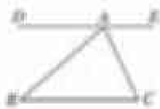
因为 $\angle 4$ 和 $\angle 3$ 互补，即 $\angle 4+\angle 3=180°$，又因为 $\angle 1=\angle 4$，所以 $\angle 1+\angle 3=180°$，即 $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 互补.

练习

1. 分别指出下列图中的同位角、内错角、同旁内角.



(第1题)



(第2题)

2. 如图，$\angle B$ 与哪个角是内错角，与哪个角是同旁内角？它们分别是哪两条直线被哪一条直线所截形成的？对 $\angle C$ 进行同样的讨论.[2]

习题5.1

复习巩固

1. 下列各图中，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是不是对顶角？

(第1题)

第五章 相交线与平行线 7

[1] 这个例题，一方面让学生复习同位角、内错角、同旁内角的概念，另一方面也要求学生进行说理，为后面学习平行线做好铺垫.

练习答案

1. 图（1）中，同位角有 $\angle 1$ 与 $\angle 5$，$\angle 2$ 与 $\angle 6$，$\angle 3$ 与 $\angle 7$，$\angle 4$ 与 $\angle 8$；内错角有 $\angle 4$ 与 $\angle 5$，$\angle 3$ 与 $\angle 6$；同旁内角有 $\angle 3$ 与 $\angle 5$，$\angle 4$ 与 $\angle 6$. 图（2）中，同位角有 $\angle 1$ 与 $\angle 3$，$\angle 2$ 与 $\angle 4$，同旁内角有 $\angle 2$ 与 $\angle 3$.
2. $\angle B$ 与 $\angle DAB$ 是内错角；$\angle B$ 与 $\angle C$，$\angle BAE$，$\angle BAC$ 是同旁内角. $\angle C$ 与 $\angle EAC$ 是内错角，$\angle C$ 与 $\angle DAC$，$\angle BAC$，$\angle B$ 是同旁内角.

[2] 在一些变式图形中辨别同位角、内错角、同旁内角时要注意，要分析出是哪两条直线被哪条直线所截，这时截线一般是两个角的公共边所在直线.

位置关系的要领.

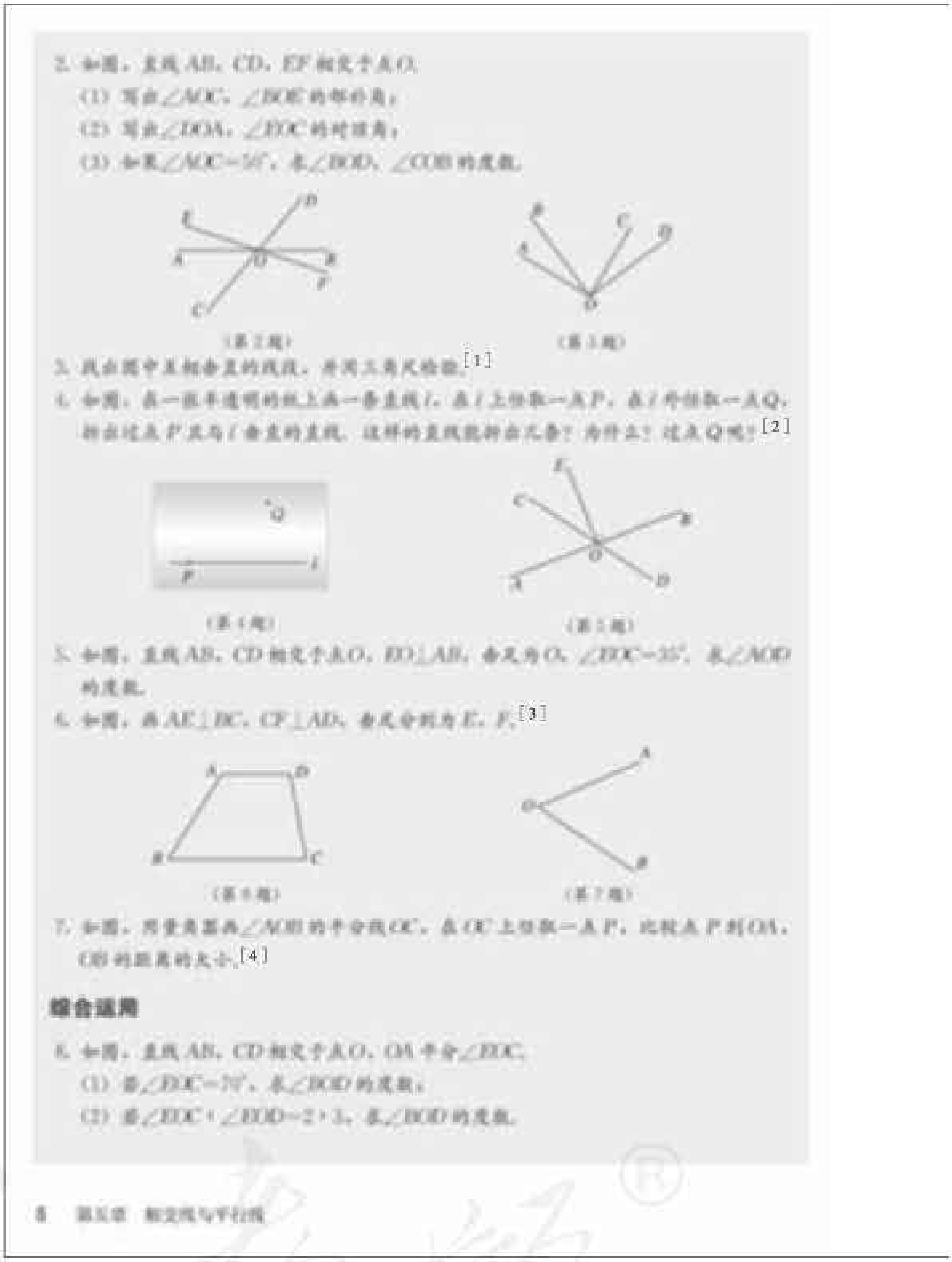
10. 本节的同位角、内错角、同旁内角的概念，主要是为学习平行线作准备的. 练习中安排的变式图形的识图训练，目的是培养学生的识图能力，使学生在比较复杂的图形中，能找出某个角的同位角、内错角或同旁内角. 研究平行线时，有时需要学生根据研究的对象，排除其他图形的干扰，把有关的图形抽象出来. 例如，练习2的图形就比较复杂，首先要确定 $\angle B$ 是哪条直线截哪两条直线所形成的角. 若把 $\angle B$ 的 AB 边所在直线看成是截线，被截直线是 BC 与 DE 时，$\angle B$ 与 $\angle DAB$ 是内错角，$\angle B$ 与 $\angle BAE$ 是同旁内角；被截直线是 BC 与 AC 时，则 $\angle B$ 与 $\angle CAB$ 也是同旁内角；若直线 BC 看成是截线，$\angle B$ 与 $\angle C$ 是同旁内角. 学生若能找到这些角的关系，说明学生已有一定的识图能力，并已掌握了这些角的辨别方法.

[1] 也可以用量角器检验，培养学生对直角大小的估计能力.

[2] 多做几次，复习垂线的定义和“过一点有且只有一条直线和已知直线垂直”的性质.

[3] 用三角尺和量角器都可以画垂线. 但过直线外一点画垂线，用三角尺更方便些，可以让学生注意选择画图工具.

[4] 可以让学生互相比较，看看他们的结论是否一致.



2. 如图，直线 AB，CD，EF 相交于点 O.

(1) 写出 $\angle AOC$，$\angle BOC$ 的邻补角；

(2) 写出 $\angle DOA$，$\angle EOC$ 的对顶角；

(3) 如果 $\angle AOC=50^\circ$，求 $\angle BOD$，$\angle COB$ 的度数.

(第2题)　　(第3题)

3. 找出图中互相垂直的线段，并用三角尺检验.[1]

4. 如图，在一张半透明的纸上画一条直线 l，在 l 上任取一点 P，在 l 外任取一点 Q，折出过点 P 且与 l 垂直的直线. 这样的直线能折出几条？为什么？过点 Q 呢？[2]

(第4题)　　(第5题)

5. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$EO\perp AB$，垂足为 O，$\angle EOC=35^\circ$，求 $\angle AOD$ 的度数.

6. 如图，画 $AE\perp BC$，$CF\perp AD$，垂足分别为 E，F.[3]

(第6题)　　(第7题)

7. 如图，用量角器画 $\angle AOB$ 的平分线 OC，在 OC 上任取一点 P，比较点 P 到 OA，OB 的距离的大小.[4]

综合运用

8. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，OA 平分 $\angle EOC$.

(1) 若 $\angle EOC=70^\circ$，求 $\angle BOD$ 的度数；

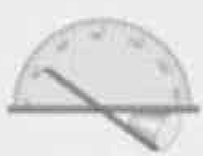
(2) 若 $\angle EOC:\angle EOD=2:3$，求 $\angle BOD$ 的度数.

8　第五章　相交线与平行线

习题 5.1

1. 本节习题“复习巩固”的第 1 题是要复习对顶角的概念，要注意构成对顶角的条件：两个角有公共顶点，两边互为反向延长线. 第 2 题除了要学生找出其中的一些邻补角和对顶角，还要用到它们之间的数量关系. 第 3 题是考查学生对直角的大小估计能力. 安排第 4 题，一方面加强对学生动手操作能力的培养，同时也使学生更深入地理解垂直、垂线的概念、以及垂线“在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”的性质，教学时，这道题目可结合垂线的性质的教学进行. 第 5 题是综合运用对顶角、邻补角以及垂直的概念的计算题. 第 6，7 题都是要求学生画图的题目，都是一些基本的画图训练. 第 6 题画垂线时涉及到延长线段的情况，实际上作的都是这个梯形的高. 第 7 题复习点到直线的距离的概念，学生还会发现这两个距离是相

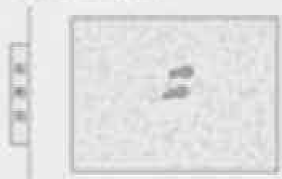
（第8题）



（第9题）

9. 图中是对顶角量角器，你能说出用它测量角的原理吗？[1]

10. 如图，这是小明同学在体育课上跳远后留下的脚印，他的跳远成绩是多少（比例尺为1∶150）？



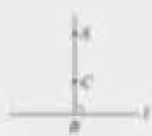
（第10题）

（第11题）

11. 如图，∠1和∠2，∠3和∠4各是哪两条直线被哪一条直线所截形成的？它们各是什么位置关系的角？[2]

拓广探索

12. 如图，AB⊥l，BC⊥l，B为垂足，那么A，B，C三点在同一条直线上吗？[3]



（第12题）

13. 直线AB，CD相交于点O.

(1) OE，OF分别是∠AOC，∠BOD的平分线，画出这个图形.

(2) 射线OE，OF在同一条直线上吗？

(3) 画∠AOD的平分线OG，OE与OG有什么位置关系？

第五章　相交线与平行线　9

[1] 这种对顶角量角器经常用于测量如图所示的工件的角，是对顶角的性质的一个实际应用.

[2] 测量跳远成绩时，要测量出脚印上最后的点到起跳线的距离，复习点到直线的距离的概念，注意比例尺的换算.

[3] 说明理由时，实际上要利用反证法，如果点 A，B，C 不在同一条直线上，那么过点 B 就有两条直线和直线 l 垂直了，这与所学的垂线的性质是矛盾的.

等的，为后面学习角平分线的性质做准备.

2. “综合运用”的第8题仍然是应用邻补角和对顶角的性质. 第9题是“对顶角相等”的一个应用实例，结合图形可以看出，活动指针的读数，就是两条直线相交成的一个角的度数. 第10题是结合实际，使学生加深对点到直线的距离的理解，也是学生认识到这个概念的实际意义，还可以让学生自己举出一些实际应用的例子. 第11题是一个辨析同位角、内错角、同旁内角的题目，这样的图形在涉及平行线时经常要用到，要注意让学生分清哪两条直线被哪条直线所截.

3. “拓广探索”的第12题. 是一个三点共线的问题，这个习题实际上仍是复习“在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”的性质. 第13题要让学生按照语句画出图形，将文字语言翻译成图形语言，发现规律，再利用所学知识说明理由.

［1］这样的例子还很多，教学时可以用一些实物或计算机进行演示，先让学生观察、回答问题，再通过测量等检验.

［2］感觉上第 1，3 个图形 a 比 b 短，第 2 个图形 a 比 b 长，实际上它们的长度是相等的.

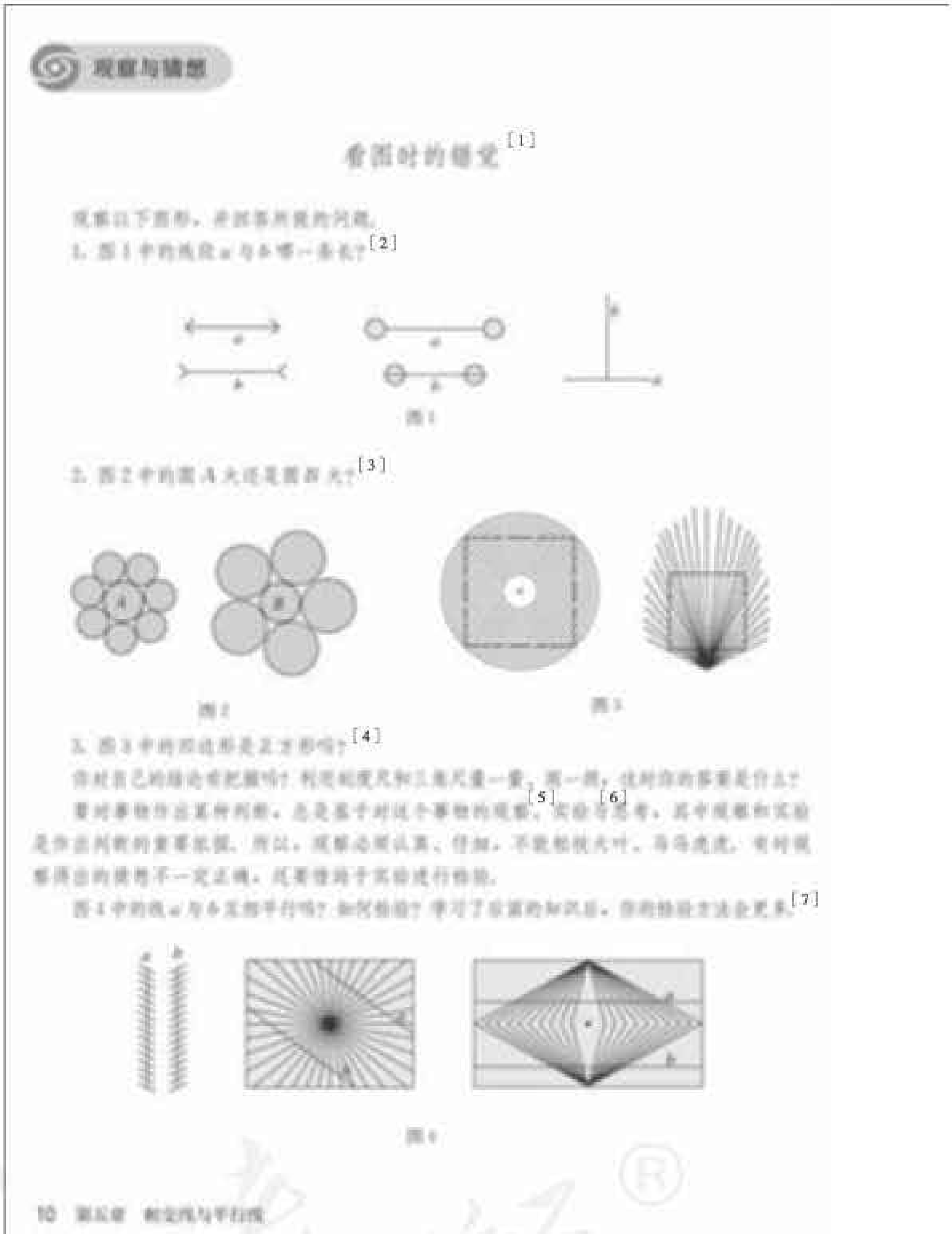
［3］感觉上圆 A 比圆 B 大，实际上它们的半径是相同的，它们一样大.

［4］它们都是正方形.

［5］观察是就事物在自然条件下所发生的形态，通过感官认识对象的方法.

［6］实验是为了检验某种科学理论或假设而进行某种操作或从事某种活动.

［7］它们是互相平行的，也为后面学习平行线的判定方法作铺垫.



观察与猜想

1. 观察、实验、猜想是科技创新过程中的一个非常重要的方法，通过观察和实验提出问题，再提出猜想和假设，然后通过说理、推理去证明假设和猜想，也是教科书呈现内容的一个重要方式. 教科书的许多公理都是让学生通过观察和实验来认识的，许多概念、性质也都是在观察、实验的基础上总结出来的.

2. 在这个观察与猜想中，教科书安排的几个问题，都是一些视错觉的问题，这时学生观察得到的结论，由于视错觉原因经常不正确，要实验检验. 到下一册，教科书还安排了一个阅读与思考“为什么要证明”，那时，学生还将认识到，观察、实验得出的结论都不一定正确，还要经过推理来证明结论，这也体现了教科书对推理证明的安排原则“使推理证明成为学生观察、实验得出结论的自然延续”，逐步培养学生在观察、实验得出结论后还要问个为什么的习惯，同时自然而然地引入证明.

5.2 平行线及其判定

5.2.1 平行线

思考

如图5.2-1，分别将木条a，b与木条c钉在一起，并把它们想象成在同一平面内两端可以无限延伸的三条直线．转动a，直线a从在c的左侧与直线b相交逐步变为在c的右侧与b相交．想象一下，在这个过程中，有没有直线a与直线b不相交的位置呢？[1]

图5.2-1

可以发现，在木条转动过程中，存在直线a与b不相交的情形，这时我们说直线a与b互相平行（parallel），记作$a /\!/ b$．

平行线在生活中是很常见的（图5.2-2），你还能举出其他一些例子吗？[2]

在同一平面内，不重合的两条直线只有两种位置关系：相交和平行．[3]

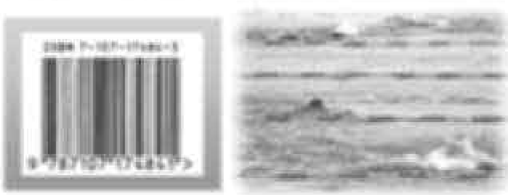


图5.2-2

第五章 相交线与平行线 11

[1] 要注意发挥想象力，把三个木条看成是三条直线，想象在转动过程中不相交的情况．

[2] 实际生活中，大量存在的是平行线段，要把它们看成是平行直线．

[3] 在同一平面内，两条直线的位置关系只有相交、平行两种．要注意，我们说两条直线，是指不重合的两条直线．对于学有余力的学生，也可以向它们解释为什么要加上“在同一平面内”．

1. 这一节的主要内容是平行线的概念、平行公理及其推论以及平行线的判定方法．

在第1小节，教科书首先给出了一个两条直线被第三条直线所截的模型，说明在转动a的过程中，存在两条直线不相交的情况，由此给出平行线的概念和表示方法．平行线是学生已有的概念，一般地，平行线是用“不相交”这种否定方式来定义的，这种否定的方式包含了对空间的想象．因为在实际生活中只有平行线段的形象，学生理解平行线是无限延伸着的，无论怎样延伸也不会相交是一个难点．利用这个模型引入概念，直线a从在直线c的左侧与直线b相交逐步变为在直线c的右侧与直线b相交，中间存在一个不相交的位置．这样可以帮助学生直观理解平行线的概念．同时，教科书还利用这个模型引入平行公理，这个模型还是三线八角的模型，也可以用它来引入平行线的判定方法的学习，因此，要重视这个模型在教学中的应用．

思考

在图 5.2-1 转动木条 a 的过程中，有几个位置使得直线 a 与 b 平行？如图 5.2-3，过点 B 画直线 a 的平行线，能画出几条？再过点 C 画直线 a 的平行线，它和前面过点 B 画出的直线平行吗？[1]

图 5.2-3

通过观察和画图，可以发现一个基本事实（平行公理）：

经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

由平行公理，进一步可以得到如下结论：

如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

也就是说，如果 $b /\!/ a$，$c /\!/ a$，那么 $b /\!/ c$[2]（图 5.2-4）.

图 5.2-4

练习

读下列语句，并画出图形：

(1) 点 P 是直线 AB 外一点，直线 CD 经过点 P，且与直线 AB 平行；

(2) 直线 AB，CD 是相交直线，点 P 是直线 AB，CD 外的一点，直线 EF 经过点 P 且与直线 AB 平行，与直线 CD 相交于点 E.

5.2.2 平行线的判定

根据平行线的定义，如果平面内的两条直线不相交，就可以判断这两条直线平行. 但是，由于直线无限延伸，检验它们是否相交有困难，所以难以直接根据定义来判断两条直线是否平行. 那么，有没有其他判定方法呢？

思考

我们以前已学过用直尺和三角尺画平行线（图 5.2-5）. 在这一过程中，三角尺起着什么样的作用？[3]

图 5.2-5

12 第五章 相交线与平行线

[1] 通过这个思考栏目，让学生体验后面的平行公理及其推论.

[2] 可以用反证法证明. 假设 b 与 c 相交，交点为 P，那么过点 P 就有两条直线 b 和 c 都于直线 a 平行，而根据前面的平行公理，这是不可能的，因此 $b /\!/ c$.

[3] 实际画图就是画相等的同位角，因为直尺和三角尺靠着的角度是不变的. 让学生多做几遍，找到这个过程中的不变量.

练习答案

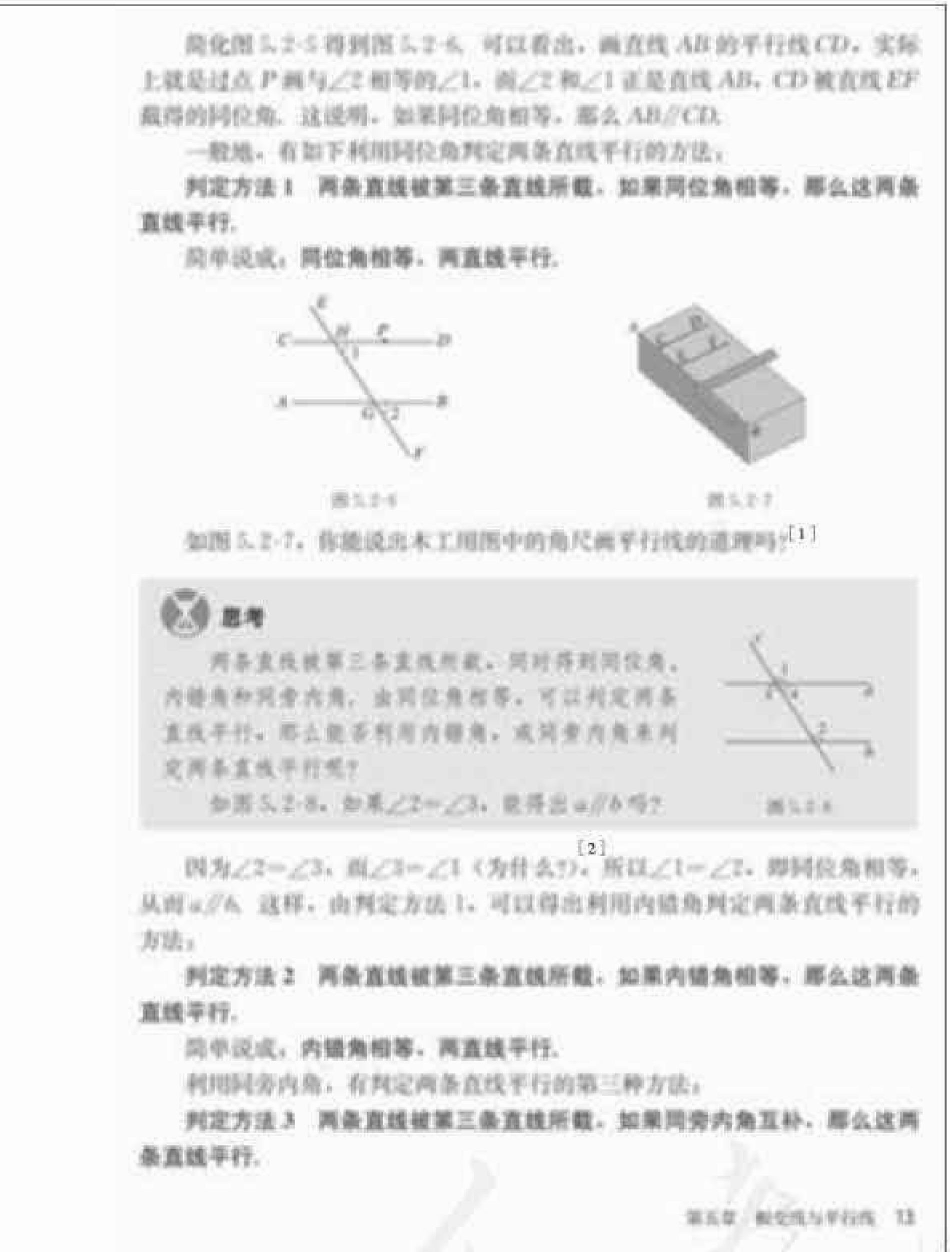
（图略）.

2. 平行公理是几何中的重要公理，承认平行线唯一的几何是欧氏几何，否则是非欧几何. 因此平行公理的地位十分重要. 在欧氏几何中平行公理只保证了平行线的唯一性，存在性是可以证明的. 教科书的平行公理实际上是扩大的平行公理，对于存在性、唯一性都没有给出证明.

对于平行公理，教科书是结合本节开头的木条模型，让学生讨论转动木条过程中，有几个位置使得 a 与 b 平行，以及通过动手过直线外一点画平行线的活动，让学生体验平行公理，并进一步给出了平行公理的推论，都不要求证明.

实际上，平行公理的推论就是平行线的传递性，平行公理和它的推论是完全等价的，也可以用这个推论作为公理，把平行线的存在性和唯一性作为推论. 根据教科书对于证明的安排，这里都不要求推理，只要学生能通过观察、实验，体验这些结论就可以了.

3. 第 2 小节的主要内容是平行线的判定方



简化图 5.2-5 得到图 5.2-6，可以看出，画直线 AB 的平行线 CD，实际上就是过点 P 画与 $\angle 2$ 相等的 $\angle 1$，而 $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 正是直线 AB，CD 被直线 EF 截得的同位角．这说明，如果同位角相等，那么 $AB \parallel CD$．

一般地，有如下利用同位角判定两条直线平行的方法：

判定方法 1　两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行．

简单说成：**同位角相等，两直线平行．**

图 5.2-6

图 5.2-7

如图 5.2-7，你能说出木工用图中的角尺画平行线的道理吗？[1]

思考

两条直线被第三条直线所截，同时得到同位角、内错角和同旁内角．由同位角相等，可以判定两条直线平行．那么能否利用内错角，或同旁内角来判定两条直线平行呢？

如图 5.2-8，如果 $\angle 2=\angle 3$，能得出 $a \parallel b$ 吗？

图 5.2-8

因为 $\angle 2=\angle 3$，而 $\angle 3=\angle 1$（为什么？）[2]，所以 $\angle 1=\angle 2$，即同位角相等，从而 $a \parallel b$．这样，由判定方法 1，可以得出利用内错角判定两条直线平行的方法：

判定方法 2　两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行．

简单说成：**内错角相等，两直线平行．**

利用同旁内角，有判定两条直线平行的第三种方法：

判定方法 3　两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行．

第五章　相交线与平行线　13

［1］用角尺画平行线，实际上是画出了两个直角，根据“同位角相等（也可以根据内错角相等，同旁内角互补），两直线平行”，这样画出的就是平行线．

［2］根据对顶角相等．

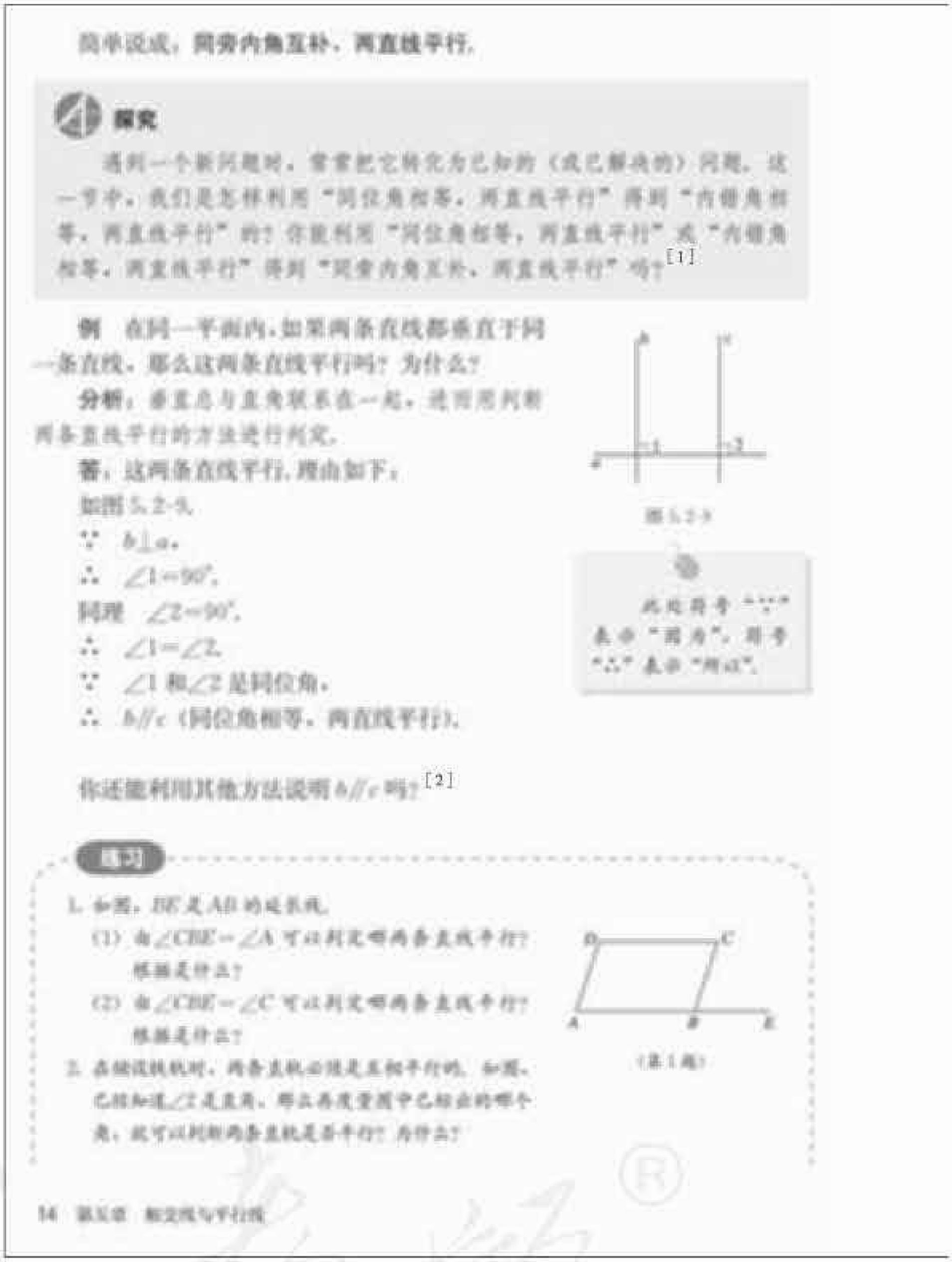
法，这也是本章的重点内容之一．

利用同位角判定两条直线平行的方法是结合平行线的画法给出的，在画平行线时，三角尺在移动时紧靠直尺，由三角尺的角的大小不变，也就是同位角相等，引出判定方法 1．接下来，举出了它的一个实际应用．

对于利用内错角和同旁内角来判定两条直线平行，教科书安排了一个思考栏目，首先提出能否用内错角和同旁内角判定两条直线平行的问题，然后引导学生经过推理得出结论．实际上，在欧氏几何中，利用同位角、内错角、同旁内角来判定两条直线平行的方法都是可以证明的．为了降低难度，教科书是把方法 1 作为扩大了的公理，再由方法 1 经过简单推理得出方法 2．而由方法 1 或方法 2 得出方法 3，则要求学生自己去完成．在这里，对于推理证明的要求已经到了“简单推理”的层次，教科书中根据平行线的判定方法 1 推出方法 2 以及后面的例题都要求学生

［1］自己由“同位角相等，两直线平行”或“内错角相等，两直线平行”得出“同旁内角互补，两直线平行”，初步进行一些简单推理的训练，同时也体会其中的由未知向已知转化的思想.

［2］还可以利用内错角相等或同旁内角互补来说明 $b/\!/c$.



简单说成：**同旁内角互补，两直线平行.**

探究

遇到一个新问题时，常常把它转化为已知的（或已解决的）问题. 这一节中，我们是怎样利用“同位角相等，两直线平行”得到“内错角相等，两直线平行”的？你能利用“同位角相等，两直线平行”或“内错角相等，两直线平行”得到“同旁内角互补，两直线平行”吗？[1]

例 在同一平面内，如果两条直线都垂直于同一条直线，那么这两条直线平行吗？为什么？

分析：垂直总与直角联系在一起，进而用判断两条直线平行的方法进行判定.

答：这两条直线平行，理由如下.

如图 5.2-9，

∵ $b \perp a$，

∴ $\angle 1 = 90°$.

同理 $\angle 2 = 90°$.

∴ $\angle 1 = \angle 2$.

∵ $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同位角，

∴ $b/\!/c$（同位角相等，两直线平行）.

图 5.2-9

此处符号“∵”表示“因为”，符号“∴”表示“所以”.

你还能利用其他方法说明 $b/\!/c$ 吗？[2]

练习

1. 如图，BE 是 AB 的延长线.

 (1) 由 $\angle CBE = \angle A$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？

 (2) 由 $\angle CBE = \angle C$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？

2. 在铺设铁轨时，两条直轨必须是互相平行的. 如图，已经知道 $\angle 2$ 是直角，那么再度量图中已标出的哪个角，就可以判断两条直轨是否平行？为什么？

（第 1 题）

14 第五章 相交线与平行线

练习答案

1. (1) $AD/\!/BC$，根据是“同位角相等，两直线平行”；

 (2) $DC/\!/AB$，根据是“内错角相等，两直线平行”.

能进行一些简单推理，而不仅仅是观察、实验、探究得出一些结论.

4. 在介绍完平行线的三个判定方法后，教科书还安排了一个探究栏目，回顾了本节课由判定方法 1 得到判定方法 2，3 的过程. 这里涉及到转化的思想方法——由未知转化为已知、转化为已解决的问题. 这实际上也是推理论证最常用的方法. 结合这一部分的内容，可以让学生有意识地整理一下，但要真正理解并掌握这种方法，要在以后的学习中逐步训练.

5. “垂直于同一直线的两条直线互相平行”也是一个重要结论，教科书是用一个例题的形式呈现的. 解决这个问题，要用平行线的判定方法进行推理. 在本章的数学活动中，还用到了这个结论. 在这个例题中，还首次出现了“∵”“∴”这种符号表示，逐步渗透用符号表示推理过程.

（第 2 题）　　（第 3 题）

3. 如图，这是小明同学自己制作的英语抄写纸的一部分，其中的横格线互相平行吗？你有多少种判别方法？[1]

习题 5.2

复习巩固

1. 如图，为了加固房屋，要在屋架上加一根横梁 DE，使 $DE \parallel BC$. 如果 $\angle ABC=31^\circ$，$\angle ADE$ 应为多少度？[2]

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，一个弯形管道 $ABCD$ 的拐角 $\angle ABC=120^\circ$，$\angle BCD=60^\circ$，这时说管道 $AB \parallel CD$ 对吗？为什么？[3]

3. 如图，这是两条道路互相垂直的交叉路口，你能画出它的平面示意图吗？类似地，你能画出两条道路成 75° 角的交叉路口的示意图吗？

（第 3 题）

4. 如图，直线 a，b，c 被直线 l 所截，量得 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.
   (1) 从 $\angle 1=\angle 2$ 可以得出哪两条直线平行？根据是什么？
   (2) 从 $\angle 1=\angle 3$ 可以得出哪两条直线平行？根据是什么？
   (3) 直线 a，b，c 互相平行吗？根据是什么？

（第 4 题）

第五章　相交线与平行线　15

练习答案

2. 因为 $\angle 2$ 是直角，$\angle 4$ 和 $\angle 2$ 是同位角，如果度量出 $\angle 4=90^\circ$，根据“同位角相等，两直线平行”，就可以判断两条直轨平行. 类似地，$\angle 5$ 和 $\angle 2$ 是内错角，$\angle 3$ 和 $\angle 2$ 是同旁内角，如果度量出它们是直角，也可以判断两条直轨平行.
3. （略）.

[1] 学生的方法可能会很多，除了本节学到的三个判定方法外，本节例题也提供了一种方法. 推三角尺画平行线也是一种方法.

[2] 图中的线比较多，要注意抽象出与题目有关的线和角，寻找 $\angle ADE$ 和 $\angle ABC$ 的关系，利用平行线的判定方法.

[3] 要把管道 AB，CD 想象成直线，BC 是它们的截线，再利用平行线的判定方法.

习题 5.2

1. “复习巩固”的第 1，2 题都是具有实际意义的题目，要注意抽象出与题目有关的线和角，再利用平行线的判定方法. 第 3 题是要画出交通路口的示意图，需要学生画出平行线，按照角度画出相交线等，通过这样的动手操作，复习相关的知识. 第 4 题可以应用平行线的判定方法和平行公理. 解决第 5 题的方法可以有多种，鼓励学生用多种方法，互相交流. 对于第 6 题，根据题中所给的角度，再利用对顶角和邻补角的关系，可以找出相等的同位角、内错角、或互补的同旁内角，利用这些条件，来判断两条直线平行或垂直.

2. “综合运用”的第 7 题是要综合运用平行线的判定方法来判定两条直线平行. 第 8 题要求学生利用平行线设计一些图案，也体现了平行线的美学价值，要鼓励学生充分发挥想象力，互相

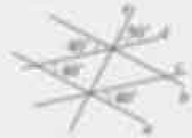
[1] 检验的方法很多，可以直接利用同旁内角的关系，也可以延长边，利用同位角、内错角、同旁内角的关系，还可以在上面画出截线，等等.

[2] 这里不仅仅是利用平行线，还要与以前所学的知识结合起来，进行图案设计.

[3] 通过度量一些角，利用平行线的判定方法和垂线的定义.

5. 如图，有一块方形玻璃，用什么方法可以检验它相对的两条边是否平行？[1]

（第5题）



（第6题）

6. 根据图中所给出的条件，找出互相平行的直线和互相垂直的直线.

综合运用

7. 如图，E 是 AB 上一点，F 是 DC 上一点，G 是 BC 延长线上一点.

(1) 如果 $\angle B=\angle DCG$，可以判断哪两条直线平行？为什么？

(2) 如果 $\angle D=\angle DCG$，可以判断哪两条直线平行？为什么？

(3) 如果 $\angle D+\angle DFE=180^\circ$，可以判断哪两条直线平行？为什么？

（第7题）

8. 如图，这些图案中有一些平行条纹，请你设计一些类似图案，并把你的设计与同学们交流一下.[2]

（第8题）

9. 借助直尺、三角尺和量角器，在图中找出互相平行的直线和互相垂直的直线.[3]

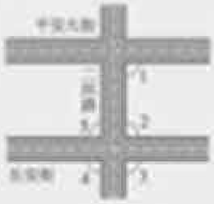
（第9题）

16 第五章 相交线与平行线

交流. 第9题类似于“复习巩固”的第6题，但没有给出角度，是要学生利用三角尺、量角器等工具，综合性更高，方法也更多. 第10题与前面第15页练习第2题类似，直接应用平行线的判定方法就可以了.

3.“拓广探索”安排了2个题目. 第11题是找出长方体中的一些垂直、平行关系，学生已经学习了平面内的垂直、平行关系，再辅以现实生活中（例如教室中）的实例，应当不难完成. 这里要注意，不要给学生介绍严格的空间垂直、平行的判定方法，学生能结合实际认识到这些垂直、平行关系即可. 第12题要利用对顶角相等和邻补角互补的性质将题目中的已知角相等转化为同位角相等，进而得到两直线平行. 本题要求学生进行简单推理.

10. 如图，为了说明示意图中的平安大街与长安街是互相平行的，在地图上量得 $\angle 1=90^\circ$，你能通过度量图中已标出的其他的角来验证这个结论吗？说出你的理由。[1]

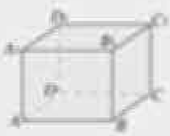


（第 10 题）

拓广探索

11. 观察如图所示的长方体，用符号表示下列两棱的位置关系：[2] A_1B_1 ______ AB，AA_1 ______ AB，A_1D_1 ______ C_1D_1，AD ______ BC。

你能在教室里找到这些位置关系的实例吗？与同学们讨论一下。



（第 11 题）

（第 12 题）

12. 如图，当 $\angle 1=\angle 3$ 时，直线 a，b 平行吗？当 $\angle 2+\angle 3=180^\circ$ 时，直线 a，b 平行吗？为什么？[3]

第五章 相交线与平行线 17

[1] 这个题和教科书第 14 页练习类似，注意抽象出两条直线被第三条直线所截的图形.

[2] 这实际上涉及到空间的平行和垂直关系. 有教室里垂直和平行的实例，学生应不难理解.

[3] 提示：转化为同位角相等.

[1] 引导学生联系上一节平行线的判定，从同位角、内错角、同旁内角的角度考虑平行线的性质. 反过来就是把已知和未知掉换过来，也就是已知是平行，未知是角有什么关系. 渗透判定与性质的互逆关系.

[2] 教科书提供了通过测量探索平行线性质的活动，还可以鼓励学生利用其他方法进行探索. 例如，可以剪下一组同位角中的一个，把它贴到另一个上面，观察两个角是否重合，等等.

[3] 让学生多做几次，互相交流，有助于发现结论.

[4] 可让学生对比一下平行线的判定方法，找一找它们分别是知道什么，得出了什么. 要注意已知条件，不能一提到同位角，就认为它们是相等的. 其实同位角相等、内错角相等、同旁内角互补是平行线特有的.

5.3 平行线的性质

5.3.1 平行线的性质

利用同位角相等，或者内错角相等，或者同旁内角互补，可以判定两条直线平行. 反过来，如果两条直线平行，同位角、内错角、同旁内角又各有什么关系呢？这就是我们下面要学习的平行线的性质.[1]

类似于研究平行线的判定，我们先来研究两条直线平行时，它们被第三条直线截得的同位角的关系.

探究

如图5.3-1，利用坐标纸上的直线，或者用直尺和三角尺画两条平行线 $a \parallel b$. 然后，画一条截线 c 与这两条平行线相交，度量所形成的八个角的度数，把结果填入下表.

角	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
度数				
角	$\angle 5$	$\angle 6$	$\angle 7$	$\angle 8$
度数				

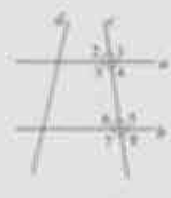


图5.3-1

$\angle 1$，$\angle 2$，…，$\angle 8$ 中，哪些是同位角？它们的度数之间有什么关系？由此猜想两条平行线被第三条直线截得的同位角有什么关系.[2]

再任意画一条截线 d，同样度量并比较各对同位角的度数，你的猜想还成立吗？[3]

一般地，平行线具有性质：[4]

性质1 两条平行线被第三条直线所截，同位角相等.

简单说成：**两直线平行，同位角相等.**

18 第五章 相交线与平行线

1. 本节的主要内容是平行线的三个性质以及命题、定理、证明等内容，其中，平行线的性质也是本章的重点内容.

由于学生前面已经学习了平行线的判定方法，了解到研究平行线与两条直线被第三条直线所截所形成的角有关，学生很自然地会想到研究平行线的性质也要研究同位角、内错角、同旁内角的关系. 因此，教科书在本节开始首先提出一个思考问题，引入对平行线性质的研究，同时也向学生渗透判定与性质的互逆关系. 利用判定（性质）研究性质（判定），也是今后几何研究时常用的方法.

2. 对于平行线的性质的研究，教科书是类比平行线的判定来进行的. 即关于同位角的性质通过探究得出，关于内错角和同旁内角的性质通过推理得出. 为此，教科书也专门对此进行了说明，向学生渗透类比地研究问题的思想.

接下来，教科书设置了一个通过测量来探索

思考

上一节，我们利用"同位角相等，两直线平行"推出了"内错角相等，两直线平行"．类似地，你能由性质 1，推出两条平行线被第三条直线截得的内错角之间的关系吗？[1]

如图 5.3-2，直线 $a /\!/ b$，c 是截线．根据"两直线平行，同位角相等"，可得 $\angle 2=\angle 3$．而 $\angle 3$ 和 $\angle 1$ 互为对顶角，所以 $\angle 3=\angle 1$．所以 $\angle 1=\angle 2$．这样，我们就得到了平行线的另一个性质．

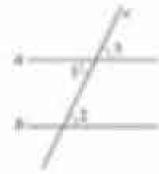


图 5.3-2

性质 2　两条平行线被第三条直线所截，内错角相等．

简单说成：**两直线平行，内错角相等．**

类似地，由"两直线平行，同位角相等"，我们可以推出平行线关于同旁内角的性质（请你自己完成推理过程）．[2]

性质 3　两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补．

简单说成：**两直线平行，同旁内角互补．**

例 1　图 5.3-3 是一块梯形铁片的残余部分，量得 $\angle A=100^\circ$，$\angle B=115^\circ$，梯形的另外两个角分别是多少度？[3]

解：因为梯形上、下两底 AB 与 DC 互相平行，根据"两直线平行，同旁内角互补"，可得 $\angle A$ 与 $\angle D$ 互补，$\angle B$ 与 $\angle C$ 互补．

图 5.3-3

于是

$$\angle D=180^\circ-\angle A=180^\circ-100^\circ=80^\circ,$$
$$\angle C=180^\circ-\angle B=180^\circ-115^\circ=65^\circ.$$

所以梯形的另外两个角分别是 80°，65°．

第五章　相交线与平行线　19

［1］这一小节三个性质的得出，是完全类比上一节三个判定的得出，即通过探究让学生发现关于同位角的性质，再通过推理得出关于内错角和同旁内角的性质．

［2］启发学生试着写出推理过程．不会或写错，都是正常的，要逐步进行这方面的训练．

［3］要求学生会用平行线的性质计算出所求角的度数即可．学生自己计算时，不一定要求书写得这样完整．

平行线的性质 1 的探究活动，通过任意画平行线的一些截线，来探索两条平行线被第三条直线所截所形成的同位角的数量关系，从而得出平行线的性质 1．教学时，要给学生留有充分的探索和交流的空间，鼓励学生运用多种方法进行探索．在这个过程中，要注意关注学生的实际操作以及在操作过程中的思考，这对于发展学生的空间观念，理解平行线的性质是十分重要的．

3．在探索得出平行线的性质 1 后，教科书安排了一个思考栏目，让学生由性质 1 推出性质 2．实际上，在欧氏几何中，平行线的三条性质都是可以证明的（"两直线平行，同位角相等"可以用反证法来证明），教科书是承认了性质 1（九年级上册加以证明），再去推导性质 2 和性质 3．

在进行推导时，可以回顾上一节利用平行线的判定方法 1 来推出判定方法 2 的过程．这个问题就是已知同位角相等，推出内错角也相等．这样做，也是循序渐进地引导学生思考，使学生初

练习答案

1. $\angle 2=54^\circ$，$\angle 3=126^\circ$，$\angle 4=54^\circ$.
2. （1）因为$\angle ADE=\angle B=60^\circ$，根据“同位角相等，两直线平行”，可得$DE\parallel BC$；（2）因为$DE\parallel BC$，根据“两直线平行，同位角相等”，可得$\angle C=\angle AED=40^\circ$.

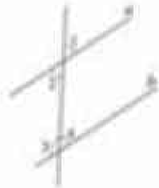
[1] 这几个例子包括了命题叙述的几种不同情况，为后续的教学提供方便. 再举例时，也应注意这一点.

[2] 结合学生前面已经学过的一些命题，让学生了解命题的概念，主要是要对某一件事情作出判断.

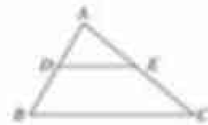
[3] 如果两条平行线被第三条直线所截，那么同旁内角互补；如果在等式的两边加同一个数，那么结果仍是等式.

练习

1. 如图，直线$a\parallel b$，$\angle 1=54^\circ$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$各是多少度？



（第1题）



（第2题）

2. 如图，三角形ABC中，D是AB上一点，E是AC上一点，$\angle ADE=60^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle AED=40^\circ$.
（1）DE和BC平行吗？为什么？
（2）$\angle C$是多少度？为什么？

5.3.2 命题、定理、证明

前面，我们学过一些对某一件事情作出判断的语句，例如：[1]

（1）如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行；
（2）两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补；
（3）对顶角相等；
（4）等式两边加同一个数，结果仍是等式.

像这样判断一件事情的语句，叫做**命题**[2]（proposition）. 命题由题设和结论两部分组成. 题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项.

数学中的命题常可以写成“如果……那么……”的形式，这时“如果”后接的部分是题设，“那么”后接的部分是结论. 例如，上面命题（1）中，“两条直线都与第三条直线平行”是题设，“这两条直线也互相平行”是结论.

有些命题的题设和结论不明显，要经过分析才能找出题设和结论，从而将它们写成“如果……那么……”的形式. 例如，命题“对顶角相等”可以写成“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”.

请你将命题（2）（4）改写成“如果……那么……”的形式.[3]

20 第五章 相交线与平行线

步养成言之有据的习惯，从而能逐步进行简单推理. 学生能跟着老师或教科书由性质1推导出性质2后，可以让他们自己推导出性质3.

4. 上一节的内容是平行线的判定，这一节是平行线的性质，怎样区分判定和性质，是教学的一个难点. 其实判定和性质互为逆命题，学过命题和命题的关系后，学生自然就明白了. 在这里要告诉学生，从角的关系去得到两直线的平行，就是判定；由已知直线的平行得到角的相等或互补关系，是平行线的性质. 判定和性质是几何研究的核心问题，这一点在小结时还要讲到，对此要逐步渗透. 这里要让学生引起注意，不要把它们混用.

5. 对于命题的相关知识，整套教科书是分散安排的，在这里主要是命题的概念、命题的构成、真假命题、定理与证明的概念等.

命题是判断一件事情的句子，任何一个判断，或者是真的或者是假的. 因此，命题就是肯

上面所举出的命题都是正确的，就是说，如果题设成立，那么结论一定成立[1]，这样的命题叫做**真命题**．还有一些命题，如“如果两个角互补，那么它们是邻补角”“如果一个数能被2整除，那么它也能被4整除”等，这些命题中，题设成立时，不能保证结论一定成立[2]，这样的命题叫做**假命题**．

练习

1. 指出下列命题的题设和结论：
   (1) 如果 $AB \perp CD$，垂足为 O，那么 $\angle AOC=90^\circ$；
   (2) 如果 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$，那么 $\angle 1=\angle 3$；
   (3) 两直线平行，同位角相等．
2. 举出你学过的2~3个真命题．

在前面，我们学过的一些图形的性质，都是真命题．其中有些命题是基本事实，如“两点确定一条直线”“经过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”等．还有一些命题，如“对顶角相等”“内错角相等，两直线平行”等，它们的正确性是经过推理证实的，这样得到的真命题叫做**定理**（theorem）．定理也可以作为继续推理的依据．

在很多情况下，一个命题的正确性需要经过推理才能作出判断，这个推理过程叫做**证明**（proof）．下面，我们以证明命题“在同一平面内，如果一条直线垂直于两条平行线中的一条，那么它也垂直于另一条”为例，来说明什么是证明．[3]

例2 如图5.3-4，已知直线 $b \parallel c$，$a \perp b$．求证 $a \perp c$．

证明：∵ $a \perp b$（已知），[4]

∴ $\angle 1=90^\circ$（垂直的定义）．

∵ $b \parallel c$（已知），

∴ $\angle 1=\angle 2$（两直线平行，同位角相等）．

∴ $\angle 2=\angle 1=90^\circ$（等量代换）．

∴ $a \perp c$（垂直的定义）．

证明中的每一步推理都要有根据，不能“想当然”．这些根据，可以是已知条件，也可以是学过的定义、基本事实、定理等．

判断一个命题是假命题，只要举出一个例子（反例），它符合命题的题设，但不满足结论就可以了．

第五章 相交线与平行线 21

[1] 这里要强调“一定成立”，无一例外，为判断假命题做准备．

[2] 这里要强调“不能保证结论一定成立”，与真命题的“一定成立”作对比．

练习答案

1. (1) 题设：$AB \perp CD$，垂足为 O；结论：$\angle AOC=90^\circ$．
   (2) 题设：$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$；结论：$\angle 1=\angle 3$．
   (3) 题设：如果两条直线平行；结论：它们被第三条直线截得的同位角相等．
2. (略)．

[3] 推理和证明是有区别的，推理是证明过程中的组成部分．

[4] 以后注明的理由主要是依据的性质、定理、基本事实等，“已知”式的理由可以不注．

定一个事物是什么或者不是什么，不能同时既肯定又否定．教学中关于区分什么是命题，什么不是命题，可以结合学生已经学过的一些具体例子说明，让学生了解就可以了，不必深究．

关于找出一个命题的题设和结论，特别是对那些题设和结论不明显的命题，是一个难点．解决这一难点的方法是让学生多做练习，并且有时还需要结合图形来区分，这个内容不能要求学生在本节内就掌握，要在以后的教学中逐步练习．

对于真假命题，教学时最好能结合一些具体例子对照起来讲．要向学生说明真命题是无一例外，总是正确的；而假命题就不能保证总是正确的，让学生理解这些概念的区别．

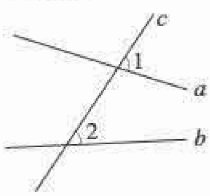
6. 本节还介绍了定理与证明的概念．给出这些概念后，通过一个实例让学生了解什么是证明．

对于证明，重在让学生理解证明的必要性和证明的过程要步步有据．在本节，是要求学生理解什么是证明，会填写出一些证明的关键步骤和

［1］举反例是判断一个命题是假命题的常用方法. 举反例的问题在生活中也常遇到，可以向学生举一些例子. 但要注意，例子要恰当，不能把不是命题的例子当命题讲.

练习答案

1. 同旁内角互补，两直线平行；两直线平行，同旁内角互补.
2. 不是真命题. 例如，下图中的$\angle 1=\angle 2$是直线a，b被直线c截得的同位角，但它们不相等.



［2］方向相同说明两次转弯前后汽车行进的路线是互相平行的，根据"两直线平行，内错角相等"第二次的拐角也是135°.

［3］不用度量的方法，无法利用所学的知识求得$\angle D$的度数.

图5.3-4　　图5.3-5

例如，要判定命题"相等的角是对顶角"是假命题，可以举出如下反例：图5.3-5中，OC是$\angle AOB$的平分线，$\angle 1=\angle 2$，但它们不是对顶角.[1]

练习

1. 在下面的括号内，填上推理的根据.
   如图，$\angle A+\angle B=180°$，求证$\angle C+\angle D=180°$.
   证明：∵ $\angle A+\angle B=180°$，
   ∴ $AD\parallel BC$（____________），
   ∴ $\angle C+\angle D=180°$（____________）.
   （第1题）
2. 命题"同位角相等"是真命题吗？如果是，说出理由；如果不是，请举出反例.

习题5.3

复习巩固

1. 如图，一条公路两次转弯后，和原来的方向相同. 如果第一次的拐角$\angle A$是135°，第二次的拐角$\angle B$是多少度？为什么？[2]

（第1题）　　（第2题）

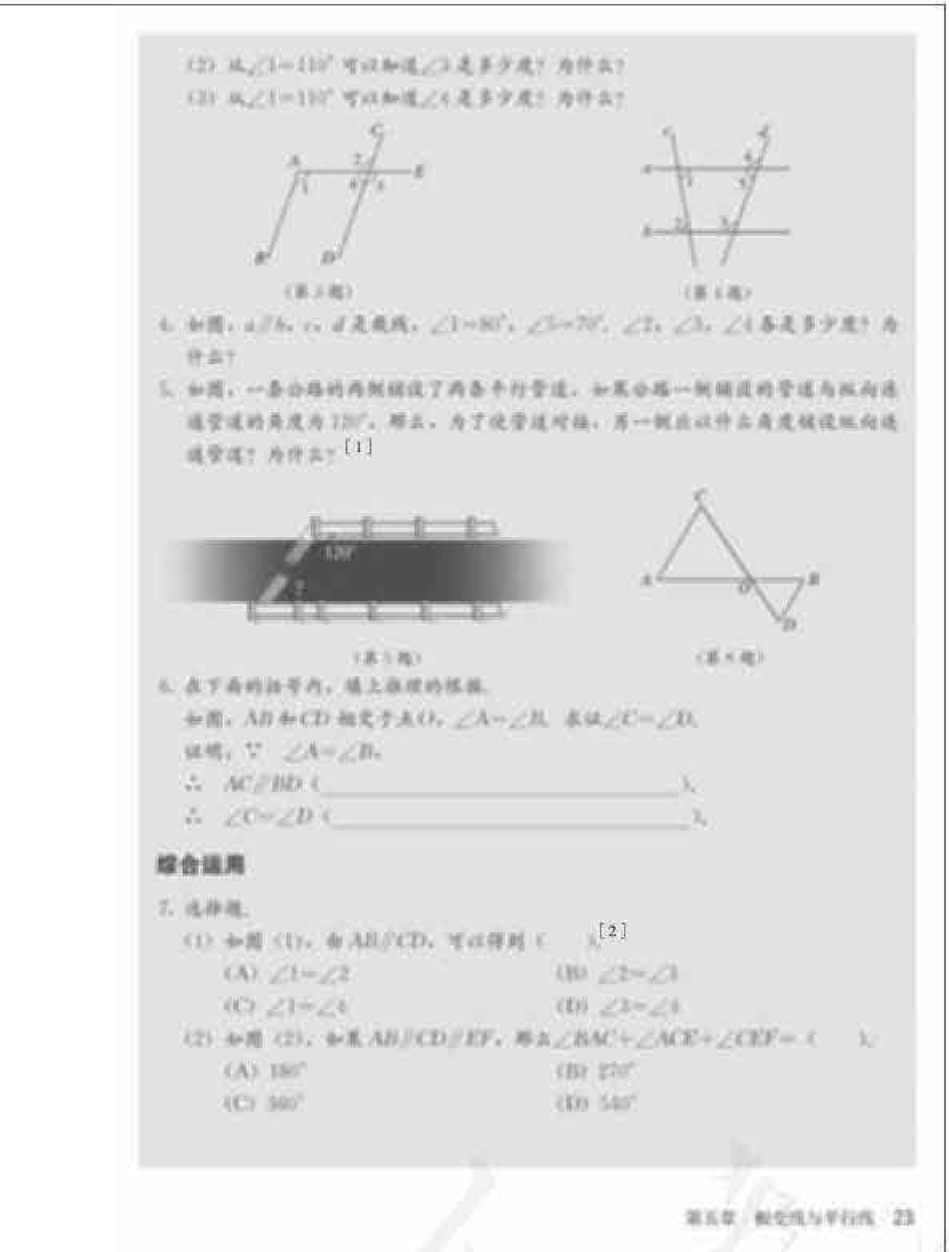
2. 如图，在四边形$ABCD$中，如果$AD\parallel BC$，$\angle A=60°$，求$\angle B$的度数. 不用度量的方法，能否求得$\angle D$的度数？[3]
3. 如图，平行线AB，CD被直线AE所截.
   (1) 从$\angle 1=110°$可以知道$\angle 2$是多少度？为什么？

22 第五章 相交线与平行线

理由，而不要求学生能进行完整的证明. 这一要求可参考教科书的练习、习题来把握. 关于什么是推理，教科书中没有定义或说明. 推理就是根据一个或几个判断得出另一个判断的思维形式，这些概念比较抽象，学生理解有困难，所以教科书只是结合具体例子讲推理过程，而不讲什么是推理.

这一学段，为教学需要，教科书只选择一些最基本、最常用的命题作为定理，可以以它们为依据推证其他命题，定理在教科书中是用黑体色字印刷的，还有许多经过证明是正确的命题没有作为定理.

总之，在这一部分，学生对命题的概念、命题的构成、命题的真假（正确与否）、定理、证明有一个初步了解，就达到了教学的要求，不要影响本章主要内容的学习.



(2) 从$\angle 1=110^\circ$可以知道$\angle 3$是多少度？为什么？

(3) 从$\angle 1=110^\circ$可以知道$\angle 4$是多少度？为什么？

（第3题）　　（第4题）

4. 如图，$a\parallel b$，c，d是截线，$\angle 1=80^\circ$，$\angle 5=70^\circ$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$各是多少度？为什么？

5. 如图，一条公路的两侧铺设了两条平行管道，如果公路一侧铺设的管道与纵向连通管道的角度为120°，那么，为了使管道对接，另一侧应以什么角度铺设纵向连通管道？为什么？[1]

（第5题）　　（第6题）

6. 在下面的括号内，填上推理的根据．

如图，AB和CD相交于点O，$\angle A=\angle B$．求证$\angle C=\angle D$．

证明：∵ $\angle A=\angle B$，

∴ $AC\parallel BD$（____________），

∴ $\angle C=\angle D$（____________）．

综合运用

7. 选择题．

(1) 如图(1)，由$AB\parallel CD$，可以得到（　）．[2]

(A) $\angle 1=\angle 2$　　(B) $\angle 2=\angle 3$

(C) $\angle 1=\angle 4$　　(D) $\angle 3=\angle 4$

(2) 如图(2)，如果$AB\parallel CD\parallel EF$，那么$\angle BAC+\angle ACE+\angle CEF=$（　）．

(A) 180°　　(B) 270°

(C) 360°　　(D) 540°

第五章　相交线与平行线　23

[1] 把公路两侧的管道看作是平行线，对接的管道看作截线，应用“两直线平行，同旁内角互补”．

[2] 注意辨认其中的内错角，由于题目中并没有给出$AD\parallel BC$，因此不能断定内错角$\angle 2=\angle 3$．

习题 5.3

1．“复习巩固”层次的几个习题都是为了复习平行线的性质而设计的．其中第1，5题是有实际意义的题目．第1题首先要理解题意，把马路的中心线（图中的虚线）改变方向时，小于平角的角看成是拐角，应用“两直线平行，内错角相等”的性质．第5题要用到“两直线平行，同旁内角互补”的性质．第2，3，4题都是直接应用平行线的性质的问题，注意其中第3题的图形，不是常规的两条平行线被第三条直线所截的图形，因此$\angle 1$和$\angle 2$是内错角不易一眼看出，为辨认方便，可让学生将这个图形补齐．第6题是要求学生填推理的依据的问题，培养学生言之有据的习惯．

2．“综合运用”的第7题是一个选择题，解决其中第（1）小题的关键仍是辨认其中的内错角，注意到$AB\parallel CD$，AC是截线，因此其中的

[1] 注意水面和杯底也是互相平行的.

[2] 国际象棋的棋盘纸中有很多平行线、垂线，其他如中国象棋、围棋棋盘中也有很多平行线和垂线，这样可以引起学生兴趣.

[3] 操场中相交线、垂线、平行线的例子很多，让学生多举一些，感受所学知识无处不在；对于在纸上模拟画一个篮球场地的问题，要注意使学生把关注点集中到如何保证所画线垂直、平行上，紧扣所学知识. 比如，在操场上画平行线不可能用推三角尺的方法，为保证所画线平行，要用到平行线的判定方法.

[4] 在符合题设的情况下，不满足结论的例子，也就是反驳命题成立的例子.

[5] 这里的要求也就是本章对学生的关于证明方面的要求.


(1)　(2)

(第7题)

8. 光线在不同介质中的传播速度是不同的，因此当光线从水中射向空气时，要发生折射. 由于折射率相同，所以在水中平行的光线，在空气中也是平行的. 如图，$\angle 1=45^\circ$，$\angle 2=122^\circ$，求图中其他角的度数.[1]

(第8题)　(第9题)

9. 如图，用式子表示下列句子：

(1) 因为$\angle 1$和$\angle 2$相等，根据“内错角相等，两直线平行”，所以AB和EF平行；

(2) 因为DE和BC平行，根据“两直线平行，同位角相等”，所以$\angle 1=\angle B$，$\angle 3=\angle C$.

10. 如图，这是一个国际象棋棋盘的示意图，它共有8行8列. 仿照它做出一张国际象棋的棋盘纸. 类似地，你还能做出一张中国象棋的棋盘纸吗？[2]

(第10题)

11. 操场中的相交线与平行线.[3]

(1) 举出操场中一些相交线、垂线、平行线的例子；

(2) 如果要你画出一个篮球场地，你怎样做才能保证相应的线垂直或平行呢？不妨在纸上试一试.

12. 判断下列命题是真命题还是假命题，如果是假命题，举出一个反例.[4]

(1) 两个锐角的和是锐角；

(2) 邻补角是互补的角；

(3) 同旁内角互补.

13. 完成下面的证明.[5]

(1) 如图(1)，$AB\parallel CD$，$CB\parallel DE$. 求证$\angle B+\angle D=180^\circ$.

证明：$\because$ $AB\parallel CD$，

24　第五章　相交线与平行线

$\angle 1$和$\angle 4$是内错角，它们相等. 第8题除了涉及两对平行光线外，还要注意水面和杯底也是互相平行的这个隐含条件，否则无法求出$\angle 5$和$\angle 6$的度数. 第9题让学生用式子表示一些三段论推理的句子，这样，一方面，培养不同几何语言相互转化的能力，另一方面，通过用符号表示一些简单的推理过程，为后面学生进一步学习证明做准备. 学校的操场是学生学习生活中每天都要接触到的，安排第11题，让学生举出一些操场中的相交线、垂线、平行线的例子，可以使学生感到所学的知识就在身边，同时，为了画好一个篮球场地，要用到许多垂线、平行线的知识，通过解决这样一个问题，也使学生感到所学知识的实际应用，提高学习的兴趣. 第12题是判断命题的真假，让学生体会判断假命题时反例的作用. 第13题是让学生填出证明时的一些关键步骤和理由，这也是本章中对学生关于证明的要求，教学时要注意把握.

∴ ∠B=______ (________________________).

∵ CB∥DE，

∴ ∠C+∠D=180° (________________________).

∴ ∠B+∠D=180°.

(第13题)

(2) 如图 (2)，∠ABC=∠A′B′C′，BD，B′D′分别是∠ABC，∠A′B′C′的平分线．求证∠1=∠2．

证明：∵ BD，B′D′分别是∠ABC，∠A′B′C′的平分线，

∴ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，∠2=______ (________________________).

又[2] ∠ABC=∠A′B′C′，

∴ $\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle A'B'C'$，

∴ ∠1=∠2 (________________________).

拓广探索

14. 如图，直线 DE 经过点 A，DE∥BC，∠B=44°，∠C=57°.

(1) ∠DAB 等于多少度？为什么？

(2) ∠EAC 等于多少度？为什么？

(3) ∠BAC 等于多少度？

(通过这道题，你能说明为什么三角形的内角和是 180°吗？)

(第14题)

15. 如图，潜望镜中的两面镜子是互相平行放置的，光线经过镜子反射时，∠1=∠2，∠3=∠4，∠2和∠3有什么关系？为什么进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线是平行的？(提示：分析这两条光线被哪条直线所截．)[1]

(第15题)

第五章　相交线与平行线　25

[1] 注意分析进入潜望镜的光线和离开的光线被哪条直线所截，从而应用平行线的判定方法．

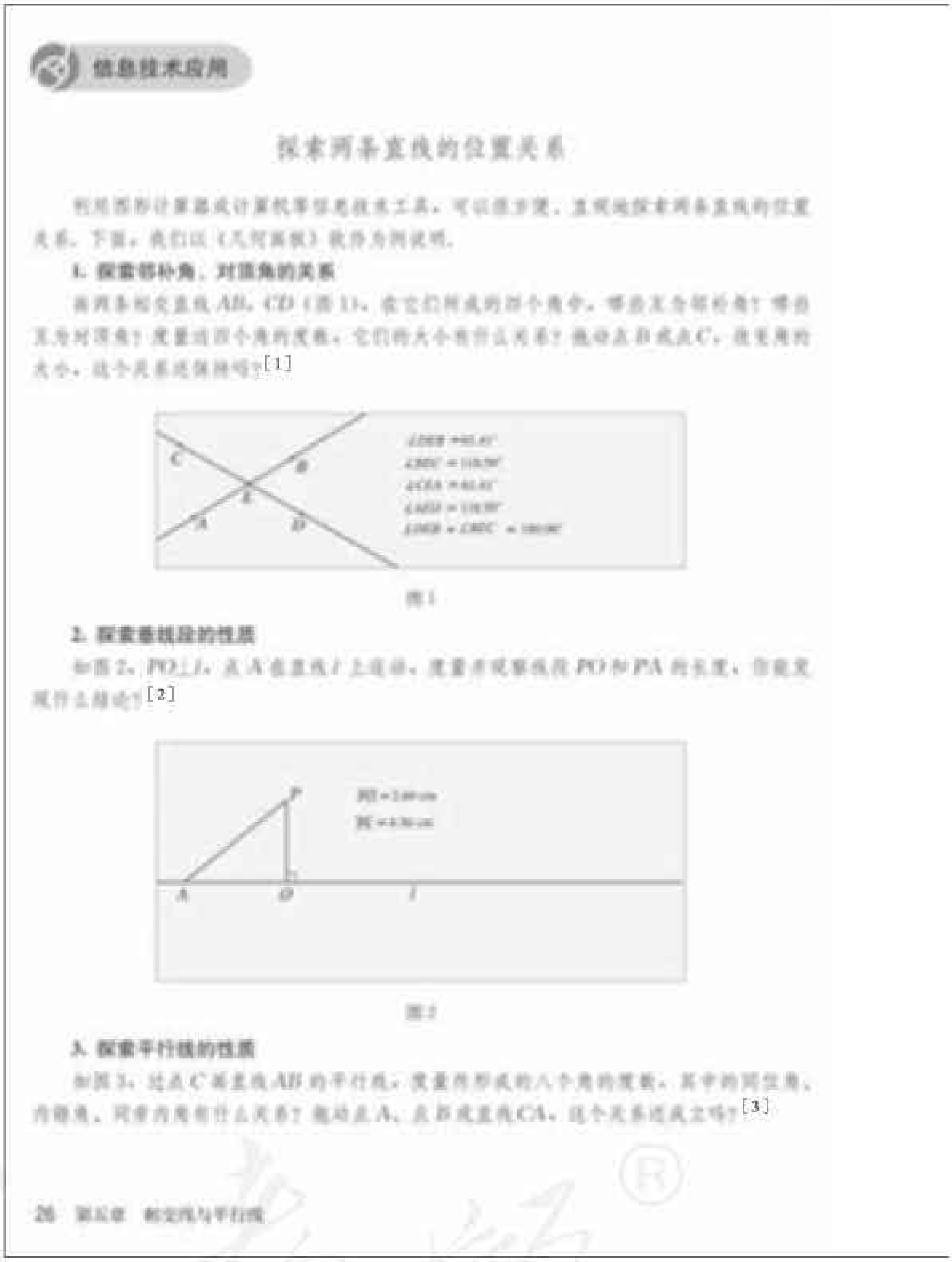
[2] 这里的“又”表示“又因为”．在证明过程中，我们习惯上把“又因为”或“又∵”简写成“又”．

3．“拓广探索”的第 14 题是应用平行线的性质的问题，也是证明三角形内角和定理的一种方法，可以有意识地引导一下，让学生认识到 $\angle DAE$ 是三角形三个角的和，为后面学习三角形内角和作准备．解决第 15 题，要把两面镜子看成是平行线，分析图形中的内错角和同旁内角，综合运用平行线的性质和平行线的判定方法．

[1] 观察测得的角的度数的变化，发现邻补角、对顶角之间的数量关系.

[2] 通过观察 PA 的长度逐渐接近又越来越大于 PO 的长度的过程，发现垂线段最短的性质.

[3] 在图形的变化过程中，只要 DE 和 AB 保持平行，就能使同位角、内错角保持相等，同旁内角保持互补. 计算机软件所提供的这种动态变化非常有利于我们发现其中的不变的关系，从而发现图形（平行线）的性质.



信息技术应用

1. 在这一章，信息技术工具是大有用武之地的. 这个“信息技术应用”的选学栏目也举了一些例子，以《几何画板》软件为例进行了说明. 例如，第1个探索中，我们随意画两条相交直线，就得到了一个相交线的“模型”，这个模型和我们用木条做的模型又更进一步. 它不仅可以随意转动，通过寻找转动过程中角的不变的位置关系得到邻补角和对顶角，还可以利用软件的测量功能，测出这些角的大小，再观察转动过程中角的大小的变化，去发现邻补角和对顶角的性质. 这是传统方法所不能做到的，这也正是信息技术工具的优势所在. 用信息技术工具探索垂线的性质、平行线的性质和判定方法也是类似.

2. 为方便起见，教科书把本章应用信息技术的内容安排在一起. 教学时，不要拘泥于这种安排，要把它们分散到相应的内容中去，随时随

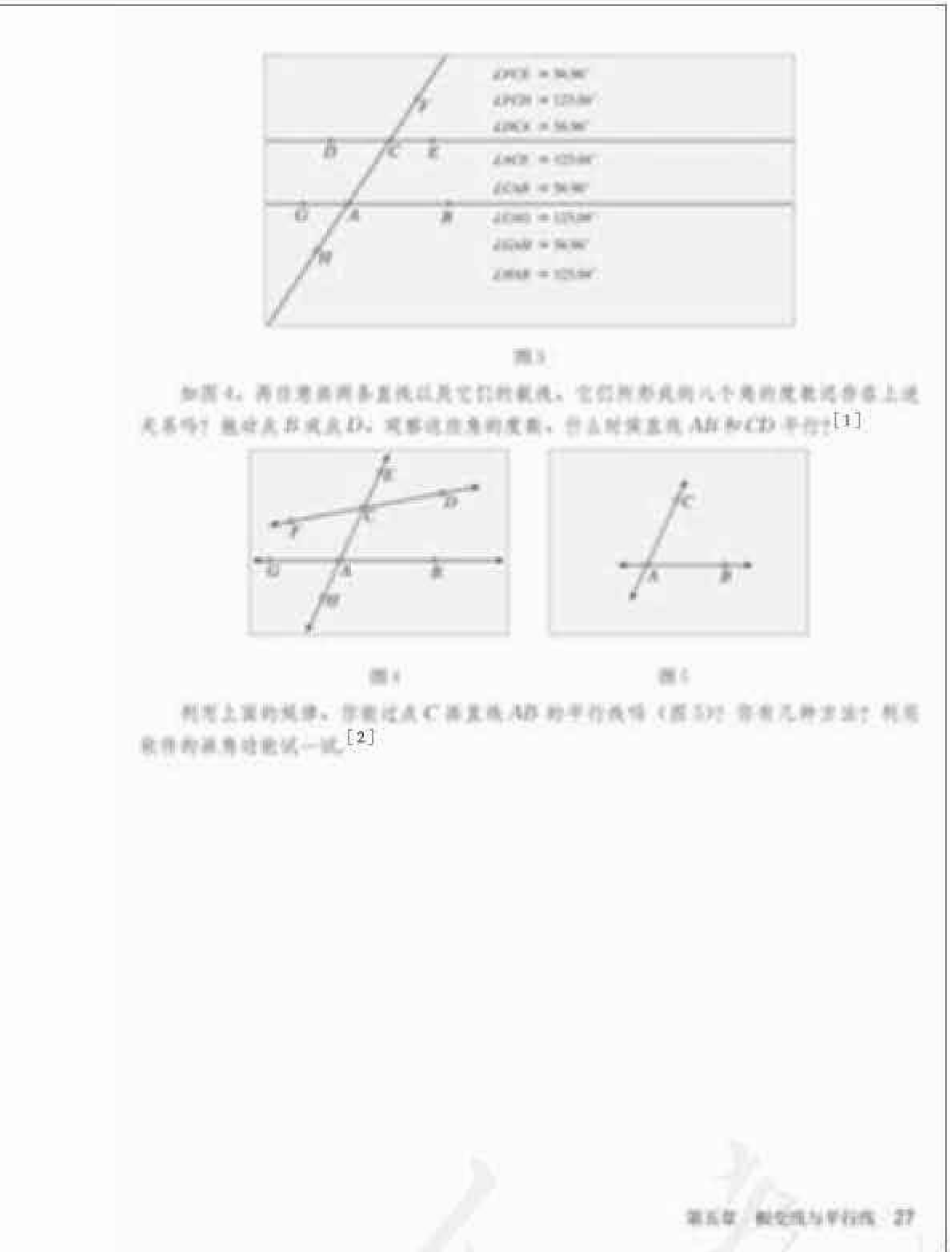


图3

如图4，再任意画两条直线以及它们的截线，它们所形成的八个角的度数还存在上述关系吗？拖动点F或点D，观察这些角的度数，什么时候直线AB和CD平行？[1]

图4　　图5

利用上面的规律，你能过点C画直线AB的平行线吗（图5）？你有几种方法？利用软件的画角功能试一试。[2]

第五章　相交线与平行线　27

[1] 利用这种方法，发现平行线的判定方法.

[2] 也可以结合后面的活动1一起完成.

地发挥信息技术的优势，为我们的教学服务.

[1] 教学时，可以选用其他的图形，比如简单的平面几何图形等. 选图时注意选择那些容易找到几组对应点的图形，这样有利于发现平移的基本特征.

[2] 也可以移动雪人.

[3] 教学时可以结合图形解释对应点的概念.

5.4 平移

仔细观察下面一些美丽的图案（图 5.4-1），它们有什么共同的特点？能否根据其中的一部分绘制出整个图案？[1]

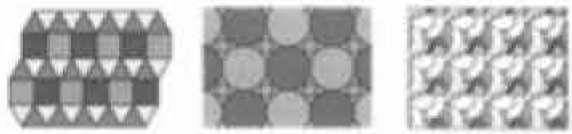


图 5.4-1

探究

如何在一张半透明的纸上，画出一排形状和大小如图 5.4-2 的雪人呢？

图 5.4-2

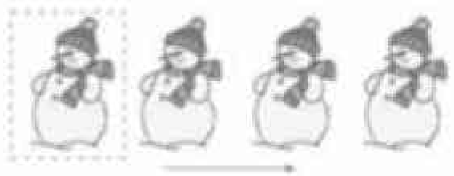


图 5.4-3

可以把半透明的纸盖在图 5.4-2 上，先描出一个雪人，然后按同一方向陆续移动这张纸，再描出第二个，第三个……（图 5.4-3）.[2]

思考

如图 5.4-4，在所画出的相邻两个雪人中，找出三组对应点[3]（例如，它们的鼻尖 A 与 A'，帽顶 B 与 B'，纽扣 C 与 C'），连接这些对应点，观察得出的线段，它们的位置、长短有什么关系？

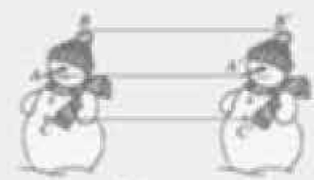


图 5.4-4

28 第五章 相交线与平行线

1. 平移是一种基本的图形变化，通过本节的学习，应使学生理解“对应点的连线平行（或在同一直线上）且相等”等平移的基本特征，能够按照要求画出简单平面图形平移后的图形，能利用平移进行简单的图案设计等.

2. 本节开始，教科书首先让学生观察几个图案，分析这些图案的共同特点，这些图案都可以通过平行移动这个图案中的某一个图形得到，由此引出本节内容. 教学时，可以让学生寻找几个生活中利用平移得到的图案，使他们感受平移现象与生活的密切联系.

3. 对于平移基本性质的探讨，教科书是通过设置三个栏目，让学生在探究、观察等活动的基础上归纳得出的. 教科书首先设置了一个“探究”栏目，栏目中要求学生动手活动，在一张半透明的纸上画出一排形状和大小都相同的雪人. 接着，在“思考”栏目中，教科书要求学生观察画出的两个相邻的雪人，分析它们之间对应点连

可以发现，$AA' \parallel BB' \parallel CC'$，并且 $AA' = BB' = CC'$.

再画出一些连接其他对应点的线段，它们是否仍有前面的关系？[1]

归纳

1. 把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小完全相同.

2. 新图形中的每一点，都是由原图形中的某一点移动后得到的，这两个点是对应点. 连接各组对应点的线段平行（或在同一条直线上）且相等.

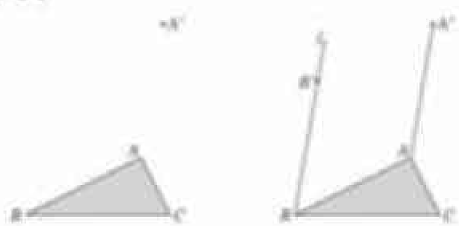
图形的这种移动，叫做**平移**（translation）.

图形平移的方向，不限于是水平的.[2] 如图5.4-5.

平移在我们日常生活中是很常见的，利用平移也可以制作很多美丽的图案. 你能举出生活中一些利用平移的例子吗？[3]

图5.4-5

例 如图5.4-6（1），平移三角形 ABC，使点 A 移动到点 A'，画出平移后的三角形 $A'B'C'$.



（1）　　（2）

图5.4-6

第五章 相交线与平行线 29

[1] 教学时要注意落实这个问题，让学生充分体会上面的结论，以便下面归纳得出平移变化的基本特征.

[2] 图形的平移，实际上就是按一个向量平移，不一定都是水平或竖直的.

[3] 这段话说明了平移在实际生活中的广泛应用. 教学时，可以让学生多举几个例子，体会平移与生活的联系，提高对平移的认识.

线的位置和长短关系，通过这个观察活动，可以让学生发现平移前后两个图中“连接各组对应点的线段平行（或在同一直线上）且相等”等平移的基本性质. 最后教科书通过一个“归纳”栏目，对平移的基本特征进行全面概括，并在此基础上给出平移的概念.

4. 对于平移，除了有水平方向的平移外，还有其他方向的平移. 平移的基本性质，教科书是针对水平方向的平移展开的讨论. 教学时，可以引导学生体会，平移的基本性质对于其他方向的平移也是适用的.

5. 本节安排了一个例题. 这个例题是要画出平移后的三角形. 能够作出简单平面图形平移后的图形是本节的一个基本要求，教学中要注意让学生根据平移的基本性质作出平移后的图形，落实教学要求.

6. 教科书将“平移”安排在本章最后一节，一方面是考虑将其作为平行线的一个应用，另一

[1] 注意这里三角形的顶点是关键点，找到它们平移后的点，就能完成三角形的平移.

[2] 两次平移三角形，和最后直接平移三角形，使顶点 A 移到点 N，所得结果是一样的. 这里渗透了平移的合成，即向量的加法的问题.

分析：图形平移后的对应点有什么特征？作出点 B 和点 C 的对应点 B'，C'，能确定三角形 $A'B'C'$ 吗？

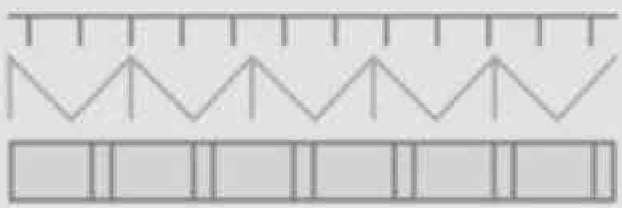
解：如图5.4-6（2），连接 AA'，过点 B 作 AA' 的平行线 l，在 l 上截取 $BB'=AA'$，则点 B' 就是点 B 的对应点.

类似地，你能作出点 C 的对应点 C'，并进一步得到平移后的三角形 $A'B'C'$ 吗？动手试一试.[1]

习题 5.4

复习巩固

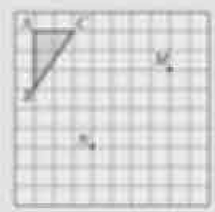
1. 下列图案可以由什么图形平移而成？



（第1题）

2. 如图，有一个由4个三角形组成的图形，通过平移，你能用它组成什么图案？试一试，把你的图案与同学们交流一下.

（第2题）



（第3题）

3. 如图，在方格纸中平移三角形 ABC，使点 A 移到点 M，点 B 和点 C 应移到什么位置？再将点 A 由点 M 移到点 N，分别画出两次平移后的三角形. 如果直接平移三角形 ABC，使点 A 移到点 N，它和我们前面得到的三角形位置相同吗？[2]

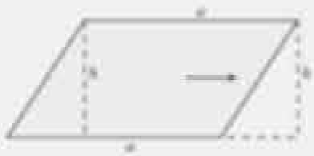
方面考虑引入平移，可以尽早渗透图形变化的思想，使学生尽早接触利用平移分析和解决问题的方法. 对于平移，教科书在不同阶段有不同的要求. 在本章主要探讨平移的基本性质，在“平面直角坐标系”一章中将学习用坐标表示平移的内容，这些为在后续学习利用平移变换探索几何性质以及综合运用平移、旋转、轴对称、相似等进行图案设计等打下基础.

习题 5.4

1. “复习巩固”的3道题对本节内容进行了全面复习，其中第1题是分析一个图案可以由什么图形平移得到，这道题与本节开始的引入对应. 第2题是利用平移进行图案设计. 第3题是利用平移的基本性质将一个三角形平移到指定的位置，两次变化的结果和一次变化的结果相同，渗透了向量的加法.

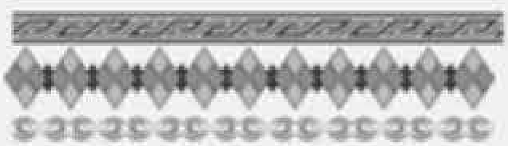
综合运用

4. 如图，用平移方法说明怎样得出平行四边形的面积公式 $S=ah$.



（第 4 题）

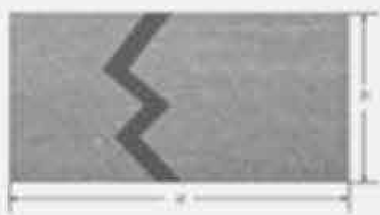
5. 许多美丽的图案都是用平移的方法绘制而成的．观察下面图案的绘制规律，你能类似地设计一些图案吗？



（第 5 题）

拓广探索

6. 如图，在一块长为 a m、宽为 b m 的长方形草地上，有一条弯曲的小路，小路的左边线向右平移 1 m 就是它的右边线．求这块草地的绿地面积．[1]



（第 6 题）

第五章 相交线与平行线 33

[1] 将小路左侧的草地向右平移 1 m，即可得到一个长为 $(a-1)$ m，宽为 b m 的长方形．

2. “综合运用”有 2 道题．第 4 题是利用平移后“新图形与原图形的形状和大小完全相同”这个平移的特征来得到平行四边形的面积．第 5 题是进行图案设计．

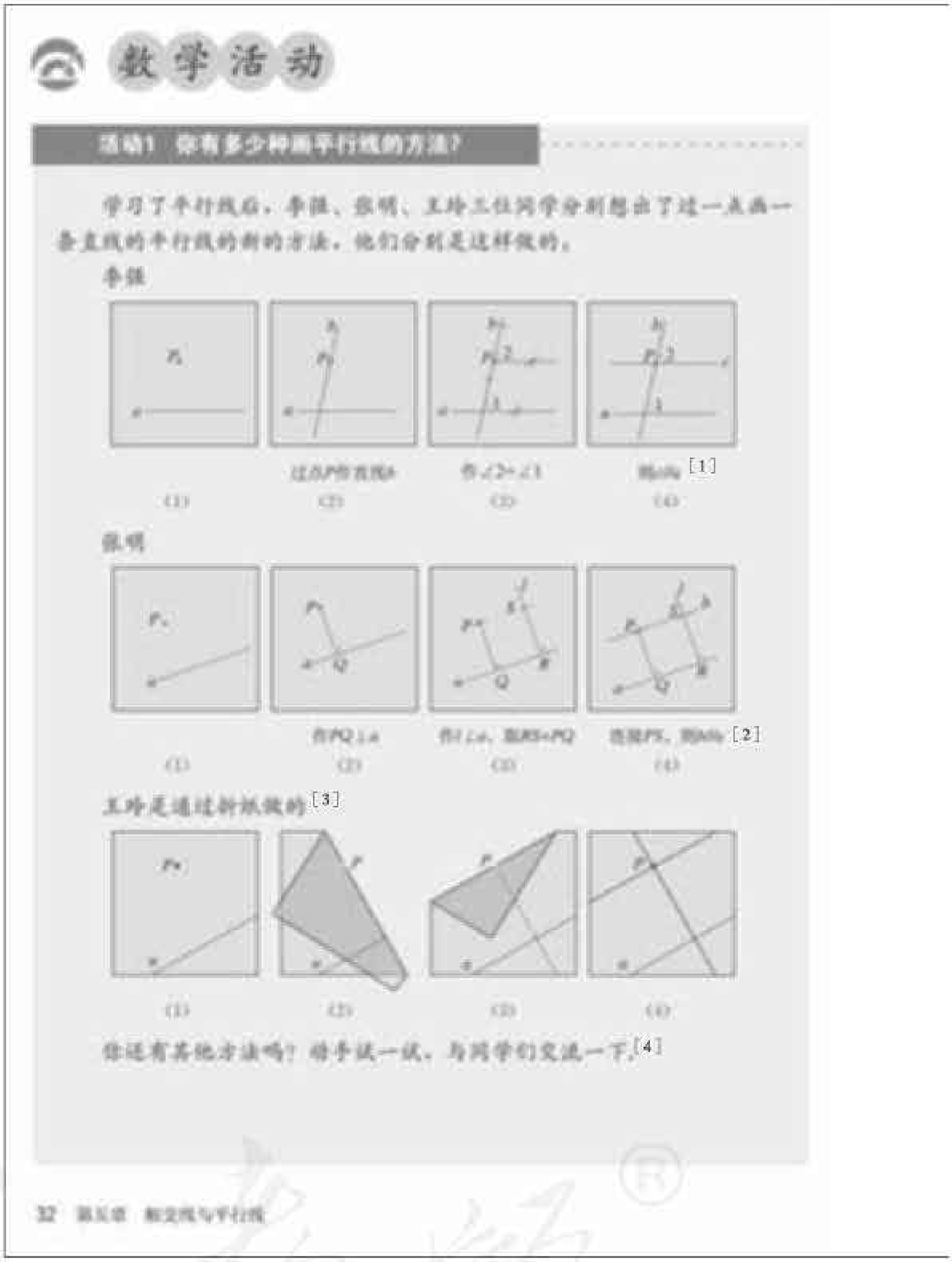
3. “拓广探索”中的这道题，是利用平移变换的基本性质解决生活中的问题．将左侧的草地平移，即可得到一个长方形，草地的面积就是这个长方形的面积．

[1] 这里是画出了相等的同位角，利用了“同位角相等，两直线平行”．类似地，还可以利用画出相等的内错角、互补的同旁内角来画出平行线．

[2] 严格证明 $b//a$，要用到后面平行四边形的知识．

[3] 两次折出的都是垂线，利用两个交点处的角都是直角，很容易通过角的关系说明得到的是平行线．

[4] 这里仅仅提供了几个参考方法，提示学生从多个角度思考．要鼓励学生勤思考，多交流．



数学活动

活动1 你有多少种画平行线的方法？

学习了平行线后，李强、张明、王玲三位同学分别想出了过一点画一条直线的平行线的新的方法，他们分别是这样做的．

李强

(1)　过点P作直线b (2)　作∠2=∠1 (3)　则b//a[1] (4)

张明

(1)　作PQ⊥a (2)　作l⊥a，截RS=PQ (3)　连接PS，则b//a[2] (4)

王玲是通过折纸做的[3]

(1) (2) (3) (4)

你还有其他方法吗？动手试一试，与同学们交流一下．[4]

32　第五章　相交线与平行线

1. 本章安排了 2 个数学活动，供教学时选择使用．

在前面学段，学生只会通过平移三角尺的方法画平行线．而在学习了本章平行线的判定方法和性质后，画平行线的方法就很多了．本章安排的活动 1，不仅可以让学生了解更多的画平行线的方法，通过这个活动，还可以复习本章所学的相关知识．

教科书提供了三种画平行线的方法，这仅仅是一个提示．例如，李强的方法实际上是通过画相等的同位角来得到平行线，可以启发学生通过画相等的内错角或互补的同旁内角来构造平行线，甚至有的学生会通过画出相等的外错角（内错角的对顶角）或互补的同旁外角（同旁内角的邻补角）的方法来得到平行线，这都是可以的．要鼓励学生充分利用所学知识，发挥想象力，想出更多的画平行线的方法，再互相交流，共同提高．


活动2 设计美丽的图案

利用平移，可以设计非常美丽的图案．例如图1中每一匹马都可以由正方形上的平移得到，如图2所示．[1]

图1

图2

类似地，你还能用平移设计一些图案吗？

第五章 相交线与平行线 33

[1] 这种正方形上的平移，因为是从一个地方剪下，移到另一处（上移到下、下移到上、左移到右、右移到左），所以能保证平移（复制）后各个图案能互相吻合，不留缝隙，形成一个美丽的图案．

许多计算机软件都有画角、测量等功能，利用这些功能，也可以更方便地画出平行线．有条件的话可以多利用．

2．利用平移，可以设计一些美丽的图案，活动2给出了一个例子．用这种正方形上的平移的方法，可以得到多种形态各异的图形，再将它们平移，形成美丽的图案．如果学生有兴趣，还可以让他们用这种方法自己设计，互相交流、展示．利用一些计算机软件的剪切、复制、粘贴的功能，可以让这个工作更容易完成，再赋以不同的颜色，图案就更加丰富多彩了，有条件的可以试一试．

［1］可鼓励学生自己梳理全章主要内容，画出知识结构图，再与教科书进行比较．

［2］在数学研究中，我们经常要研究一些特例，特例在生产和生活中有着广泛的应用．

［3］这里说明了什么是图形的性质，什么是图形的判定，这也是几何研究的主要内容．

［4］“图形与几何”就是研究图形的性质的，要教会学生充分利用图形，重视图形在解决问题中的作用．

小　结

一、本章知识结构图[1]

二、回顾与思考

本章我们学习了平面内不重合的两条直线的位置关系——相交与平行．当两条直线只有一个公共点时，这两条直线相交．在相交线的学习中，我们研究了两条直线相交所形成的邻补角和对顶角的位置和数量关系，这也是相交线的性质．垂直是相交的特殊情形，[2]它在实际生产和社会生活中具有广泛的应用．当两条直线没有公共点时，这两条直线平行．借助两条直线被第三条直线所截形成的同位角、内错角和同旁内角，我们研究了平行线的判定与性质．

“图形的判定”讨论的是确定某种图形需要什么条件．例如，两条直线与第三条直线相交，具备“同位角相等”，就有“两直线平行”．“图形的性质”讨论的是这类图形有怎样的共同特性．例如，两条直线只要平行，它们被第三条直线所截时，就一定有同位角相等．[3]

学习本章时，要注意观察实物、模型和图形，通过观察、测量、实验、归纳、对比、类比等来寻找图形中的位置关系和数量关系，从而发现图形的性质．[4]同时，还要注意体会通过“推理”获得数学结论的方法，培养言之有据的习惯和有条理地思考、表达的能力．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

34　第五章　相交线与平行线

1．本章的概念、性质都比较多，要让学生在学完全章后注意梳理所学的知识，寻找一些重点内容之间的内在联系，建立知识的体系．

本章知识结构框图中分别列出了相交线和平行线两个分支的内容及其联系，使学生明白所学知识的系统性，以及为什么研究直线的位置关系时要研究一些角的关系．用这个框图时，可以把一些主要的定义、基本事实、判定定理、性质定理补充上，使这个表作为全章复习的提纲．

2．在回顾与思考部分，教科书首先回顾了本章学习的主要内容以及本章的展开过程，接下来对图形的性质和判定的内涵给予了界定，又介绍了本章的学习方法．本章是学生从学习实验几何到论证几何的过渡，从本章开始，学生将开始比较系统地学习几何．因此，了解几何研究的内容和方法是非常必要的．教学时可让学生结合本章内容逐步体会．

1. 下面是本章学到的一些数学名词，你能用自己的语言描述它们吗？你能分别画一个图形表示它们吗？

对顶角、邻补角、垂直、平行、同位角、内错角、同旁内角、平移.[1]

2. 两条直线相交形成四个角，它们具有怎样的位置关系和数量关系？

3. 什么是点到直线的距离？你会度量吗？请举例说明.

4. 怎样判定两条直线是否平行？平行线有什么性质？对比平行线的性质和直线平行的判定方法，它们有什么异同？

5. 什么是命题？如何判断一个命题是真命题还是假命题？请结合具体例子说明.

6. 图形平移时，连接各对应点的线段有什么关系？你能利用平移设计一些图案吗？

复习题5

复习巩固

1. 判断题（正确的画√，错误的画×）.

(1) a，b，c 是直线，若 $a/\!/b$，$b/\!/c$，则 $a/\!/c$；（　　）

(2) a，b，c 是直线，若 $a\perp b$，$b\perp c$，则 $a\perp c$.[2]（　　）

2. 如图，两条直线 a，b 相交.

(1) 如果 $\angle 1=60°$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数；

(2) 如果 $2\angle 3=3\angle 1$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.[3]

（第2题）

（第3题）

3. 如图，直线 $AB\perp CD$，垂足为 O，直线 EF 经过点 O，$\angle 1=26°$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.

4. 根据下列语句画出图形.

(1) 过线段 AB 的中点 C，画 $CD\perp AB$；

(2) 点 P 到直线 AB 的距离是 3 cm，过点 P 画直线 AB 的垂线 PC；

(3) 过三角形 ABC 内的一点 P，分别画 AB，BC，CA 的平行线.

第五章　相交线与平行线　35

[1] 这些都是本章的一些主要概念，要注意让学生结合图形理解和掌握. 学生如果能用自己的语言描述它们，画出一个图形表示它们，就真正理解了这些概念.

[2] 平行有传递性，垂直没有传递性.

[3] 可以列一个方程来解.

接下来，教科书以问题的形式让学生复习本章的主要内容，可以结合建立全章知识结构框图同步提出这些问题.

3. 复习本章时，要围绕相交线和平行线这个中心，对一些内容要求的把握，要注意循序渐进. 例如对于推理证明、命题的相关内容的要求，要服从整套书的安排，对于一些定义等，要结合图形掌握等.

复习题 5

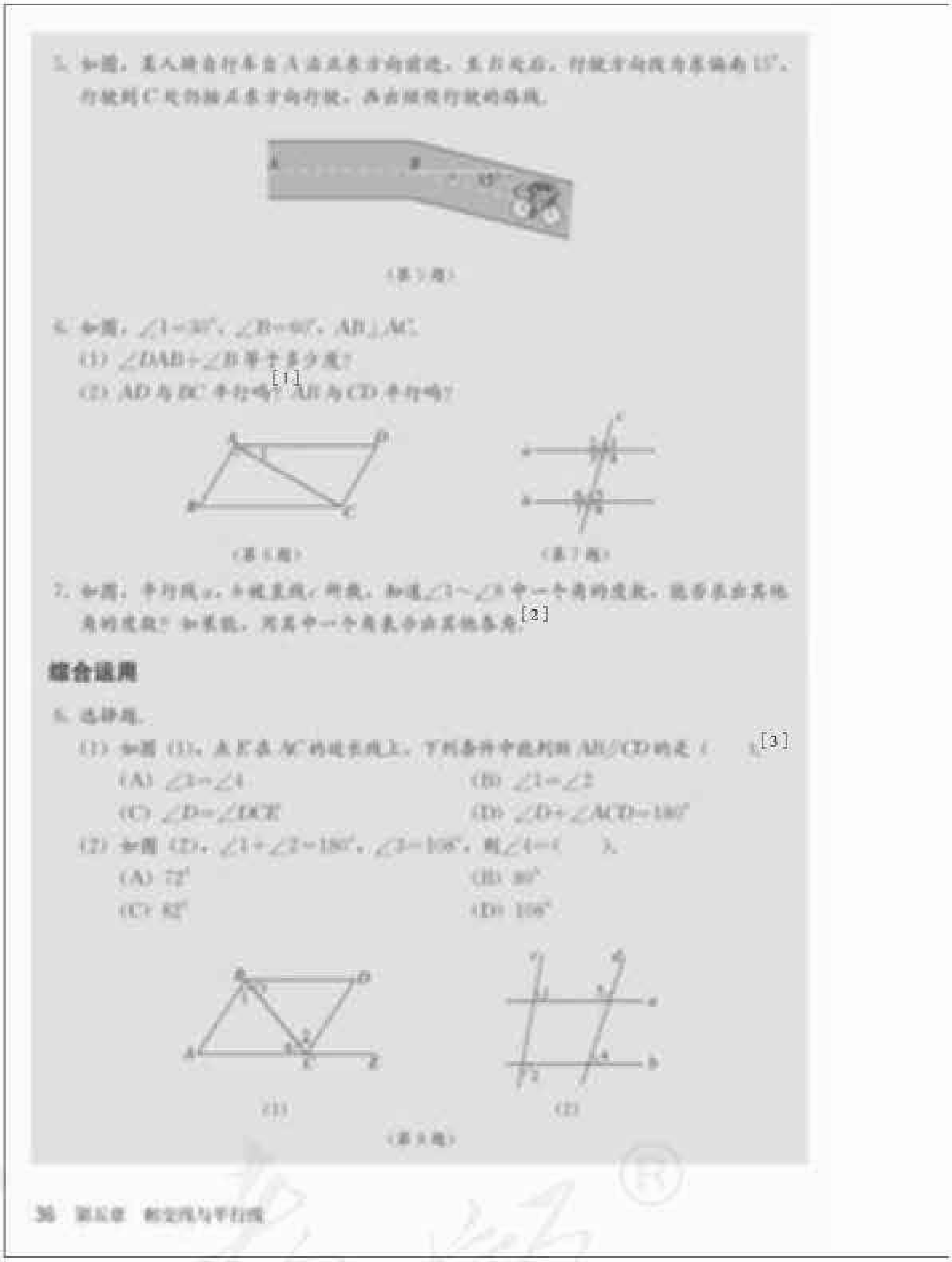
1. 复习题中共安排了 15 道题，可以在复习时选用，也可以在平时的学习中供学有余力的学生选用.

2. “复习巩固”共安排了 7 个题目，都是围绕本章所学的主要内容进行的，其中涉及了对顶角、邻补角的概念和性质，垂直的相关性质，平行公理，平行线的判定方法和性质等，都是基本题目.

［1］可以根据“同旁内角互补，两直线平行”判断 $AD // BC$. 也可以利用三角形的内角和等于 $180°$，得到 $\angle ACB = 30°$，再利用“内错角相等，两直线平行”来得到 $AD // BC$.

［2］两条平行线被第三条直线所截形成的 8 个角中，知道其中一个角，利用对顶角相等、邻补角互补、平行线的性质，就可以求出其余 7 个角.

［3］要注意辨认这些角中，哪一对是 BC 截 AB，CD 形成的内错角.



5. 如图，某人骑自行车自 A 沿正东方向前进，至 B 处后，行驶方向改为东偏南 $15°$，行驶到 C 处仍按正东方向行驶，画出他行驶的路线.

（第 5 题）

6. 如图，$\angle 1=30°$，$\angle B=60°$，$AB \perp AC$.

(1) $\angle DAB+\angle B$ 等于多少度？

(2) AD 与 BC 平行吗？[1] AB 与 CD 平行吗？

（第 6 题）　（第 7 题）

7. 如图，平行线 a，b 被直线 c 所截，知道 $\angle 1 \sim \angle 8$ 中一个角的度数，能否求出其他角的度数？如果能，用其中一个角表示出其他各角.[2]

综合运用

8. 选择题.

(1) 如图 (1)，点 E 在 AC 的延长线上，下列条件中能判断 $AB // CD$ 的是（　　）.[3]

(A) $\angle 3=\angle 4$　　(B) $\angle 1=\angle 2$

(C) $\angle D=\angle DCE$　　(D) $\angle D+\angle ACD=180°$

(2) 如图 (2)，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3=108°$，则 $\angle 4=$（　　）.

(A) $72°$　　(B) $80°$

(C) $82°$　　(D) $108°$

(1)　(2)

（第 8 题）

36 第五章 相交线与平行线

3. “综合运用”的第 8 题第 (1) 小题要注意分析图形中对判断 $AB // CD$ 有用的角，必要时可把一些线延长，便于发现它们之间的关系；第 (2) 小题要综合运用平行线的性质和判定方法.

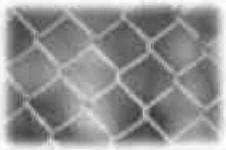
第 9 题是一个实际题目，实际中为了美观，经常要用一些平行线，这就有一个判断它们是否平行的问题，需要用到我们所学的知识.

第 10 题和复习巩固第 4 题都是根据语句画图题，让学生进行不同几何语言之间的转化，这样反过来也潜移默化地培养学生用规范的几何语言表达的能力.

第 11 题是通过平移画立体图，设计艺术字，实际上是应用平行投影，也为后面学习投影与视图作铺垫.

第 12 题是为复习命题的相关概念设计的，通过对一些具体的命题进行分析，复习本章所学的命题的构成、真假命题的概念，以及判断命题

9. 图中所示为一组护网的示意图，它可看成由两组平行线组成。你能通过测量一些角的大小来判断其中的线段是否平行吗？说出你的理由。[1]



（第9题）

（第10题）

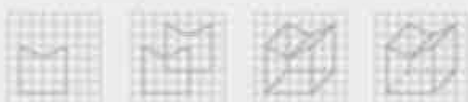
10. 如图，$\angle AOB$ 内有一点 P。

(1) 过点 P 画 $PC\parallel OB$ 交 OA 于点 C，画 $PD\parallel OA$ 交 OB 于点 D；

(2) 写出图中互补的角；

(3) 写出图中相等的角。[2]

11. 如图，利用平移可以画出一些立体图形。在方格纸上写出你的名字或你的校名，用类似的方法画出它的立体图。变换不同的长度和方向多试几次，你认为哪一种更具艺术效果？[3]



（第11题）

12. 指出下列命题的题设和结论，并判断它们是真命题还是假命题，如果是假命题，举出一个反例。

(1) 两个角的和等于平角时，这两个角互为补角；

(2) 内错角相等；

(3) 两条平行线被第三条直线所截，内错角相等。

13. 完成下面的证明。

(1) 如图(1)，点 D，E，F 分别是三角形 ABC 的边 BC，CA，AB 上的点，$DE\parallel BA$，$DF\parallel CA$。求证 $\angle FDE=\angle A$.

证明：∵ $DE\parallel BA$，

∴ $\angle FDE=$______（________________），

∵ $DF\parallel CA$，

∴ $\angle A=$______（________________），

∴ $\angle FDE=\angle A$.

[1] 注意从中抽象出两条直线被第三条直线所截形成的图形.

[2] 图中相等和互补的角很多，要注意依次寻找．也可以分组寻找，共有哪几对相等的角，哪几对互补的角.

[3] 这样画出的立体图形，实际上是通过平行投影．把原象平移到象的位置，再把对应点连接起来.

真假的方法.

第 13 题要求学生填出推理过程中的关键步骤和理由．要注意，这也是本章在推理证明方面对学生的要求.

现在住房广告很多，住房的平面图中有很多垂线、平行线，像“拓广探索”的第 14 题这样的画图过程既有趣味，又能复习所学的知识.

台球不仅是许多人喜爱的体育活动，打台球的技巧也与我们所学的角和线有密切的关系．通过第 15 题，学生可以认识到学好相交线和平行线的知识也能提高打台球的技巧．既提高了学习兴趣，又复习了相关知识.

[1] 住房平面图中有许多相交线、垂线、平行线，这样的活动可以让学生在画图中复习所学的知识，体会知识的应用.

[2] 注意分析 CD 和 AB 被哪条直线所截，再寻找内错角的相等关系.

(1)　　　　(2)

（第13题）

(2) 如图 (2)，AB 和 CD 相交于点 O，$\angle C=\angle COA$，$\angle D=\angle BOD$，求证 $AC\parallel BD$.

证明：∵ $\angle C=\angle COA$，$\angle D=\angle BOD$，

又 $\angle COA=\angle BOD$ (________________)，

∴ $\angle C=$________.

∴ $AC\parallel BD$ (________________).

拓广探索

14. 如图，这是一套住房的平面图，图中有许多相交线和平行线，查看你家的住房，选择适当的比例尺，画出它的平面图，你能自己设计一个户型吗？[1]

（第14题）

（第15题）

15. 一个台球桌的桌面如图所示，一个球在桌面上的点 A 滚向桌边 PQ，碰着 PQ 上的点 B 后便反弹而滚向桌边 RS，碰着 RS 上的点 C 便反弹而滚向点 D. 如果 $PQ\parallel RS$，AB，BC，CD 都是直线，且 $\angle ABC$ 的平分线 BN 垂直于 PQ，$\angle BCD$ 的平分线 CM 垂直于 RS，那么，球经过两次反弹后所滚的路径 CD 是否平行于原来的路径 AB？[2]

Ⅲ 习题解答

习题 5.1

1. (2) 是，(1) (3) (4) 不是.

2. (1) $\angle AOC$ 的邻补角是$\angle AOD$ 和$\angle BOC$，
$\angle BOE$ 的邻补角是$\angle AOE$ 和$\angle BOF$；
(2) $\angle DOA$ 的对顶角是$\angle BOC$，$\angle EOC$ 的对顶角是$\angle DOF$；
(3) $\angle BOD=50^\circ$，$\angle COB=130^\circ$.

3. $AO\perp CO$，$BO\perp DO$.

4. 过点 P 与直线 l 垂直的直线只能折出一条，过点 Q 与直线 l 垂直的直线也只能折出一条．这是因为“在同一平面内，过一点有且仅有一条直线与已知直线垂直”.

5. $\angle AOD=\angle BOC=90^\circ+\angle EOC=125^\circ$.

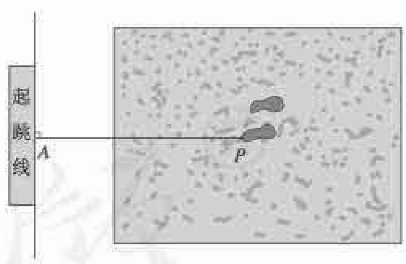
6. (图略，用三角尺或量角器来画).

7. (图略，可以用量角器、三角尺、刻度尺).

8. (1) 因为 OA 平分$\angle EOC$，所以$\angle AOC=\frac{1}{2}\angle EOC=35^\circ$，从而$\angle BOD=\angle AOC=35^\circ$.
(2) 设$\angle EOC=2x^\circ$，则$\angle EOD=3x^\circ$．由$\angle EOC$ 和$\angle EOD$ 互补，可得$\angle EOC+\angle EOD=180^\circ$，从而 $x=36$. 所以$\angle EOC=72^\circ$．因为 OA 平分$\angle EOC$，所以$\angle AOC=36^\circ$，从而$\angle BOD=\angle AOC=36^\circ$.

9. 根据“对顶角相等”，活动指针的读数，就是所测角的度数.

10. 如图，跳远成绩应是落在沙坑中的脚印上最后的点 P 到起跳线的距离，也就是垂线段 PA 的长．用刻度尺量得图中 $PA\approx 2.7$ cm，$2.7\times 150=405$(cm)，因此小明同学的跳远成绩大约是 4.05 m.

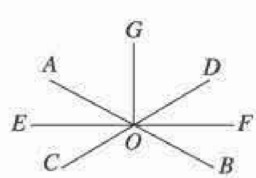


(第 10 题)

11. 图 (1) 中，$\angle 1$ 和$\angle 2$ 是直线 AB，CD 被直线 BD 所截形成的，它们是内错角；$\angle 3$ 和$\angle 4$ 是直线 AD，BC 被直线 BD 所截形成的，它们是内错角.
图 (2) 中，$\angle 1$ 和$\angle 2$ 是直线 AE，DC 被直线 BC 所截形成的，它们是同旁内角；$\angle 3$ 和$\angle 4$ 是直线 AD，BC 被直线 AE 所截形成的，它们是同位角.

12. A，B，C 三点在同一条直线上．这是因为如果 A，B，C 三点不在同一条直线上，那么过点 B 就有两条直线和直线 l 垂直，而这是不可能的.

13. (1) 如图；



(第 13 题)

(2) 由于 AB，CD 相交于点 O，所以$\angle AOC$ 与$\angle BOD$，$\angle AOD$ 与$\angle BOC$ 是对顶角，而 OE，OF 分别是$\angle AOC$，$\angle BOD$ 的平分线，所以$\angle AOE+\angle AOD+\angle DOF=\frac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ$，从而射线 OE，OF 在同一条直线上；

（3）因为 OG 平分 $\angle AOD$，所以 $\angle AOE+\angle AOG=\frac{1}{2}$（$\angle AOC+\angle AOD$）$=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$，所以 $OE\perp OG$.

习题 5.2

1. 由 $DE/\!/BC$，可知 $\angle ADE=\angle ABC=31^\circ$.
2. 根据“同旁内角互补，两直线平行”，可知 $AB/\!/CD$.
3. （略）.
4. （1）由 $\angle1=\angle2$，根据“同位角相等，两直线平行”，可得 $a/\!/b$；
   （2）由 $\angle1=\angle3$，根据“内错角相等，两直线平行”，可得 $a/\!/c$；
   （3）由 $a/\!/b$，$a/\!/c$，根据“如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行”，可得 $b/\!/c$，从而 a，b，c 互相平行.
5. 可以根据“同旁内角互补，两直线平行”，分别量出一对同旁内角，看它们是否互补．也可以在它上面画截线，利用平行线的其他判定方法.
6. $a/\!/b$，$c/\!/d$，$e\perp b$，$e\perp a$.
7. （1）由 $\angle B=\angle DCG$，根据“同位角相等，两直线平行”，可得 $AB/\!/CD$；
   （2）由 $\angle D=\angle DCG$，根据“内错角相等，两直线平行”，可得 $AD/\!/BC$；
   （3）由 $\angle D+\angle DFE=180^\circ$，根据“同旁内角互补，两直线平行”，可得 $AD/\!/EF$.
8. （略）.
9. $a/\!/b$，$d/\!/e$，$f/\!/g$，$a\perp d$，$b\perp d$，$a\perp e$，$b\perp e$，$g\perp h$，$f\perp h$.
10. 通过度量图中的 $\angle2$，$\angle3$，$\angle4$，$\angle5$ 等于 90°，都可以说明平安大街与长安街是互相平行的．其中 $\angle3$，$\angle5$，$\angle2$ 分别是 $\angle1$ 的同位角、内错角和同旁内角，可以直接利用平行线的判定方法；$\angle4$ 与 $\angle2$ 互为对顶角，又与 $\angle3$，$\angle5$ 互补，也可以与 $\angle1$ 建立联系，从而应用平行线的判定方法.
11. $A_1B_1/\!/AB$，$AA_1\perp AB$，$A_1D_1\perp C_1D_1$，$AD/\!/BC$.
12. 当 $\angle1=\angle3$ 时，由 $\angle1$ 和 $\angle4$ 互为对顶角，得 $\angle1=\angle4$，从而 $\angle3=\angle4$，因此 $a/\!/b$.
    当 $\angle2+\angle3=180^\circ$ 时，由 $\angle2$ 和 $\angle4$ 互为邻补角，得 $\angle2+\angle4=180^\circ$，从而 $\angle3=\angle4$，因此 $a/\!/b$.

习题 5.3

1. 根据“两直线平行，内错角相等”，可知第二次的拐角也是 135°.
2. 由 $AD/\!/BC$，$\angle A=60^\circ$，根据“两直线平行，同旁内角互补”，可知 $\angle B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$．不用度量的方法，仅根据平行线的性质，不能求得 $\angle D$ 的度数.
3. （1）由 $\angle1=110^\circ$，根据“两直线平行，内错角相等”，可知 $\angle2=110^\circ$；
   （2）由 $\angle1=110^\circ$，根据“两直线平行，同位角相等”，可知 $\angle3=110^\circ$；
   （3）由 $\angle1=110^\circ$，根据“两直线平行，同旁内角互补”，可知 $\angle4=70^\circ$.
4. 因为 $a/\!/b$，根据“两直线平行，内错角相等”，可得 $\angle2=\angle1=80^\circ$．根据“两直线平行，同旁内

角互补”，可得$\angle 3=180^\circ-\angle 5=110^\circ$. $\angle 4$与$\angle 5$互为邻补角，因此$\angle 4=180^\circ-\angle 5=110^\circ$.

5. 根据“同旁内角互补，两直线平行”，为了使管道对接，另一侧应以$180^\circ-120^\circ=60^\circ$的角度铺设.
6. 内错角相等，两直线平行；两直线平行，内错角相等.
7. (1) C；(2) C.
8. 利用平行线的性质，可得$\angle 3=\angle 1=45^\circ$，$\angle 4=\angle 2=122^\circ$，$\angle 5=180^\circ-\angle 2=58^\circ$，$\angle 6=\angle 5=58^\circ$，$\angle 7=180^\circ-\angle 1=135^\circ$，$\angle 8=\angle 7=135^\circ$.
9. (1) $\because$ $\angle 1=\angle 2$,

   $\therefore$ $AB \parallel EF$（内错角相等，两直线平行）；

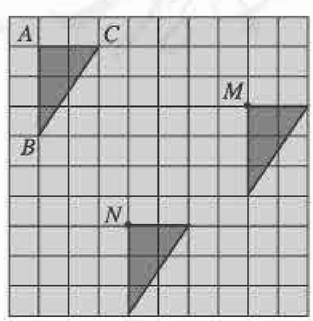
   (2) $\because$ $DE \parallel BC$,

   $\therefore$ $\angle 1=\angle B$，$\angle 3=\angle C$（两直线平行，同位角相等）.
10. （略）.
11. （略）.
12. (1)(3) 是假命题，（反例略）；(2) 是真命题.
13. (1) $\angle C$；两直线平行，内错角相等；两直线平行，同旁内角互补.

    (2) $\frac{1}{2}\angle A'B'C'$，角平分线的定义，等量代换.
14. 因为$DE \parallel BC$，根据“两直线平行，内错角相等”，可得$\angle DAB=\angle B=44^\circ$，$\angle EAC=\angle C=57^\circ$. 而$\angle DAE$是平角，从而$\angle BAC=180^\circ-\angle DAB-\angle EAC=180^\circ-44^\circ-57^\circ=79^\circ$. 这种方法实际上说明了三角形的内角和等于$180^\circ$.
15. 因为两面镜子是平行放置的，$\angle 2$和$\angle 3$是内错角，所以$\angle 2=\angle 3$. 而$\angle 5=180^\circ-\angle 1-\angle 2$，$\angle 6=180^\circ-\angle 3-\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，所以$\angle 5=\angle 6$. 再根据“内错角相等，两直线平行”，可得进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线是平行的.

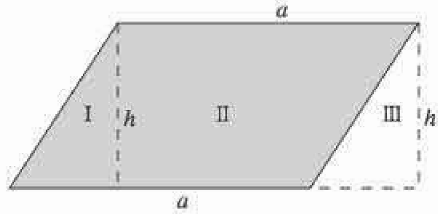
习题 5.4

1. 它们可以分别由、、平移而成.
2. （略）.
3. 两次平移后的三角形如图所示. 如果直接平移三角形ABC，使点A移到点N，所得的三角形和前面得到的三角形的位置相同.



（第3题）

4. 如图，平行四边形可以看作由Ⅰ，Ⅱ两部分组成的，将Ⅰ平移到Ⅲ，这时Ⅱ与Ⅲ构成一个长方形，这个长方形的面积与原来的平行四边形的面积相等，都等于 ah.



（第 4 题）

5. （略）.

6. 将小路左半部分的草地向右平移，与小路的右半部分对接，可以得到一个长为 $(a-1)$ m，宽为 b m 的长方形，其面积为 $(a-1)b$ m^2.

复习题 5

1. (1) √；(2) ×.

2. (1) $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 都是 $\angle 1$ 的邻补角，因此 $\angle 2=\angle 3=180°-\angle 1=120°$. $\angle 4$ 是 $\angle 1$ 的对顶角，所以 $\angle 4=\angle 1=60°$.

   (2) 如果 $2\angle 3=3\angle 1$，则有 $2(180°-\angle 1)=\angle 3$，解得 $\angle 1=72°$，从而 $\angle 2=\angle 3=180°-\angle 1=108°$，$\angle 4=\angle 1=72°$.

3. $\angle 2=90°-\angle 1=64°$，$\angle 3=\angle 1=26°$，$\angle 4=90°+64°=154°$.

4. （略）.

5. （过点 C 画直线 AB 的平行线，图略）.

6. (1) 由 $\angle 1=30°$，$AB\perp AC$，可知 $\angle DAB=\angle 1+\angle BAC=30°+90°=120°$，从而 $\angle DAB+\angle B=180°$；

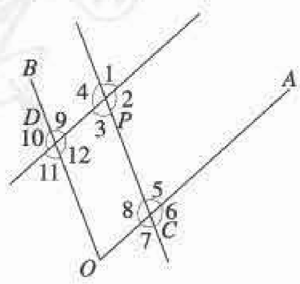
   (2) 根据“同旁内角互补，两直线平行”，可知 $AD/\!/BC$. 根据已知条件，不能判断 AB 与 CD 是否平行.

7. 知道 $\angle 1\sim\angle 8$ 中一个角的度数，根据对顶角、邻补角的关系以及平行线的性质，可以求出其他角的度数. 例如，如果 $\angle 1=\alpha$，那么 $\angle 3=\angle 5=\angle 7=\alpha$，$\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=180°-\alpha$.

8. (1) B；(2) A.

9. 提示：利用平行线的判定方法.

10. (1) 如图所示；(2) $\angle 1$，$\angle 3$，$\angle 5$，$\angle 7$，$\angle 9$，$\angle 11$，$\angle O$ 分别与 $\angle 2$，$\angle 4$，$\angle 6$，$\angle 8$，$\angle 10$，$\angle 12$ 互补； (3) $\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=\angle 9=\angle 11=\angle O$，$\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=\angle 10=\angle 12$.



（第 10 题）

11. （略）.

12. (1) 题设是“两个角的和等于平角”，结论是“这两个角互为补角”，是真命题；

    (2) 题设是“两个角是两条直线被第三条直线截得的内错角”，结论是“这两个角相等”，是假命题，（反例略）；

(3) 题设是“两条平行线被第三条直线所截”，结论是“内错角相等”，是真命题.

13. (1) $\angle BFD$；两直线平行，内错角相等；$\angle BFD$；两直线平行，同位角相等.

(2) 对顶角相等；$\angle D$；内错角相等，两直线平行.

14. (略).

15. 因为 $PQ/\!/RS$，由“两直线平行，内错角相等”，可得$\angle QBC=\angle SCB$，所以$\angle CBN=90^\circ-\angle QBC=90^\circ-\angle SCB=\angle MCB$. 而 BN 平分$\angle ABC$，CM 平分$\angle BCD$，所以$\angle ABC=\angle BCD$. 根据“内错角相等，两直线平行”，可以得到 $CD/\!/AB$.

Ⅳ 教学设计案例

5.1 相交线（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

对顶角、邻补角的概念，对顶角的性质.

2. 内容解析

本节课在学生已经学习了直线、射线、线段和角的有关知识的基础上，进一步研究平面内不重合的两条直线的一种位置关系——相交，研究相交线所形成的邻补角、对顶角的位置和数量关系. 作为本章的第一节，本节内容是学习本章知识的基础，同时也体现了研究几何图形的思路和方法，即从位置关系和数量关系两方面来研究.

两条直线相交时所形成的角的位置关系和数量关系是不变的，而角的数量的大小又刻画了两条直线相交的位置关系. 当两条直线相交时，就出现了邻补角和对顶角，它们的名称也反映了它们的本质特征. 从邻补角和对顶角的定义出发，推出“对顶角相等”这一重要性质，为学生提供了一种通过简单推理得到数学结论的方法，培养学生言之有据的学习习惯，体现了由实验几何到论证几何的过渡.

基于以上分析，可以确定本节课的教学重点：对顶角相等的性质.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 理解邻补角和对顶角的概念.

(2) 掌握“对顶角相等”的性质.

2. 目标解析

达成目标 (1) 的标志是：学生能从图中辨认邻补角与对顶角，能画图表示邻补角、对顶角.

达成目标 (2) 的标志是：学生掌握平面内两条直线相交时，所形成的邻补角、对顶角的数量

关系，能通过简单推理得到“对顶角相等”这一重要性质，并会运用它进行简单的说理.

三、教学问题诊断分析

在第四章“几何图形初步”的学习中，学生已经接触了通过说理得出两角相等的性质. 本节课通过度量等方法，学生能够猜想出“对顶角相等”的性质，但是通过推理才能得到一般结论. 从实验到推理，是学生对知识从感性认识到理性认识的发展. 另外，如何把图形语言翻译成符号语言，也是对学生提出的新的挑战.

基于以上分析，本节课的教学难点是：推出“对顶角相等”的性质.

四、教学过程设计

1. 创设情境，导入新知

多媒体显示第五章章头图等图片（图 1）.

图 1

问题 1　观察这些图片，你能否看到相交线、平行线?

师生活动：学生积极踊跃发言，相互补充. 教师总结：同学们对相交线平行线一定不陌生，大桥上的钢梁和钢索，棋盘上的横线和竖线，笔直的高速公路……都给我们以相交线、平行线的形象. 从这一章开始，我们正式开始研究平面内不重合的两条直线的位置关系.

设计意图：让学生借助已有的几何知识从现实生活中发现数学问题，能由实物的形状想象出相交线、平行线的几何图形，使新知识的产生建立在对周围环境的直接感知的基础上，让学生增强对生活中的相交线、平行线的认识，建立直观的、形象化的数学模型.

问题 2　如图 2，这里有一把剪刀，握紧剪刀的把手，就能剪开物体，你能说出其中的道理吗?

师生活动：教师引导学生发现，握紧把手时，随着两个把手之间的角逐渐变小，剪刀刃之间的角也相应变小，直到剪开物体.

追问：如果把剪刀的构造抽象成一个几何图形，会是什么样的图形？请你在纸上画出来.

师生活动：教师总结：剪刀的构造可看作两条相交的直线，剪刀刃之间的角就是相交直线所成的角. 我们可以利用角的数量关系来研究两条直线相交的位置关系.

图 2

设计意图：从现实生活中发现并提出简单的数学问题吸引学生的注意，同时为得出两条直线相交所成角的关系提供生活背景.

2. **细心观察，归纳定义**

问题 3 仔细观察你所画的图形（图 3），当两条直线相交时，所形成的 4 个角中，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 有怎样的位置关系？

追问（1）：$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的顶点所在的位置有什么特点？$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的边所在的位置有什么特点？

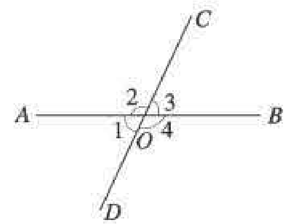


图 3

师生活动：教师引导学生从角的定义出发说出 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的位置特点．当学生直观地感知这两个角有“相邻”的关系时，引导学生用几何语言准确地表达，进而得到邻补角的定义：$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 有一条公共边 OA，它们的另一边互为反向延长线，即 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互补，具有这种关系的两个角，互为邻补角．

追问（2）：图 3 中还有哪些邻补角？

师生活动：学生回答 $\angle 2$ 和 $\angle 3$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$，$\angle 1$ 和 $\angle 4$．

设计意图：引导学生从位置关系观察邻补角的特点，并归纳概括邻补角的定义．

问题 4 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 有怎样的位置关系？

师生活动：教师引导学生从角的定义出发说出 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 的位置特点．当学生直观地感知这两个角有“相对”的关系时，引导学生用几何语言准确地表达，进而得到对顶角的定义：$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 有一个公共顶点 O，并且 $\angle 1$ 的两边分别是 $\angle 3$ 的两边的反向延长线，具有这种位置关系的两个角，互为对顶角．

追问：图中还有哪些对顶角？

师生活动：学生回答 $\angle 2$ 和 $\angle 4$．

设计意图：引导学生从位置关系观察对顶角的特点，并归纳概括对顶角的定义．

例 1 （1）图 4 的各图中，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是邻补角吗？为什么？

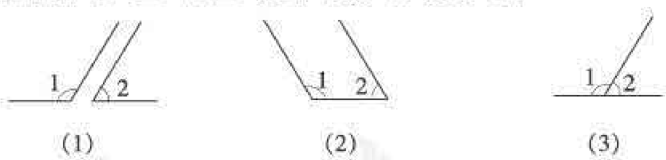


图 4

（2）图 5 的各图中，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角吗？为什么？

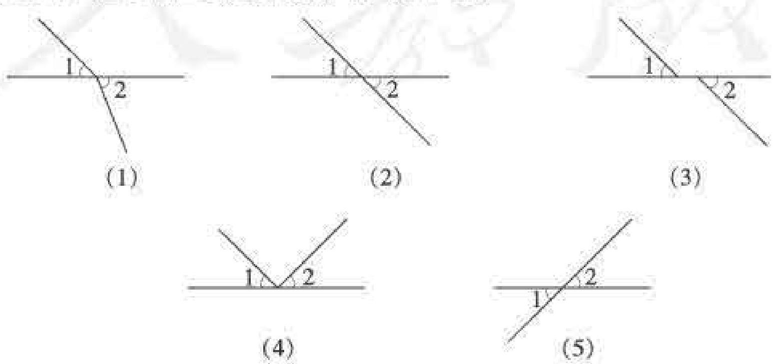


图 5

(3) 请分别画出图 6 中$\angle 1$的对顶角和$\angle 2$的邻补角.


图 6

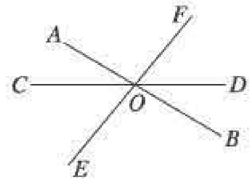


图 7

(4) 如图 7，三条直线 AB，CD，EF 相交于点 O，$\angle AOE$ 的对顶角是______，$\angle EOD$ 的邻补角是____________.

设计意图：这组题目是巩固邻补角、对顶角的概念，通过辨、画、找，及时反馈学生思维上的一些偏差，加深对两个概念的理解，在画邻补角和找邻补角的过程中体会分类思想. 教学时要注意提醒学生：对顶角形成的前提条件是两条直线相交，而邻补角不一定是两条直线相交形成的，每个角的对顶角只有一个，而每个角的邻补角有两个.

3. **动手操作，推出性质**

问题 5 前面我们研究了邻补角和对顶角的位置关系，下面我们来研究一下它们的数量关系. 如图 8，$\angle 1$与$\angle 2$有怎样的数量关系？

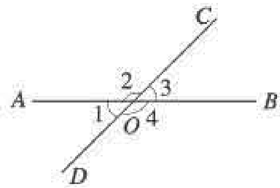


图 8

师生活动：学生根据已有的知识得到邻补角的数量关系是互补.

设计意图：使学生用已经学过的知识解决新问题.

问题 6 如图 8，$\angle 1$与$\angle 3$有怎样的数量关系？你是怎么得到的？

师生活动：学生能够猜到对顶角相等，但不是很肯定. 为了验证猜想，可以让学生用量角器度量这两个角，也可以用剪刀把这两个角剪下来并加以比较，或者用图形计算器或几何画板对这两个角进行动态测量.

追问：你能用说理的方法推出$\angle 1=\angle 3$吗？

师生活动：

因为$\angle 1$与$\angle 2$互补，$\angle 3$与$\angle 2$互补（邻补角的定义），

所以$\angle 1=\angle 3$（同角的补角相等）

同理$\angle 2=\angle 4$.

这就是说：对顶角相等.

设计意图：让学生充分经历动手操作、独立思考的探究过程，并且在这一过程中，渗透由特殊到一般的研究问题的方法. 然后通过推理证明猜想，使学生经历从实验几何到论证几何的过渡，使推理成为观察、实验的自然延续.

例 2 如图 9，直线 a，b 相交，$\angle 1=40°$，求$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$的度数.

变式 1 若$\angle 1+\angle 3=80°$，求各个角的度数.

变式 2 若$\angle 2$是$\angle 1$的 3.5 倍，求各个角的度数.

变式 3 若$\angle 1:\angle 2=2:7$，求各个角的度数.

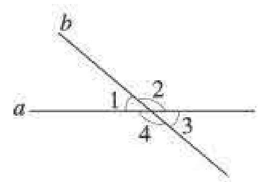


图 9

设计意图：通过设计变式问题，提高思维度，使学生的推理能力得到深

化和提高.

练习

完成教科书第3页的练习.

设计意图：巩固本节内容. 可通过相交线模型使学生领会为什么研究相交线时要研究它们相交所成的角. 由于两条直线相交的位置变化了，所成的角也随之改变，所以这个交角的数量大小就能够刻画两直线相交的位置关系.

4. **归纳小结**

教师与学生一起回顾本节课所学的主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 什么是邻补角？邻补角与补角有什么区别？

(2) 什么是对顶角？对顶角有什么性质？

设计意图：通过小结，使学生梳理本节课所学内容，掌握本节课的核心——对顶角的性质.

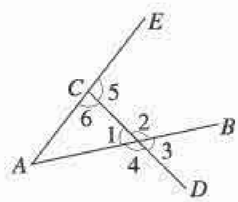
5. **布置作业**

教科书习题5.1第1，2题.

五、目标检测设计

1. 图中的哪些角是邻补角？哪些角是对顶角？

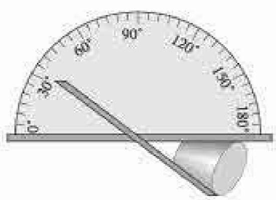
设计意图：本题主要考查学生对邻补角、对顶角概念的理解.



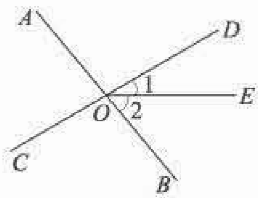
（第1题）

2. 图中是对顶角量角器，你能说出用它测量角的原理吗？

设计意图：本题主要考查学生对对顶角相等的性质的理解.



（第2题）



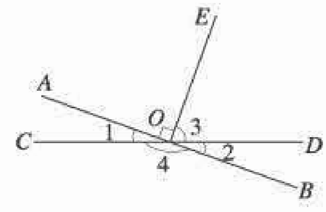
（第3题）

3. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle BOC$ 的对顶角是________，邻补角是________. 若 $\angle AOC=80°$，$\angle 1=30°$，则 $\angle 2$ 的度数是________.

设计意图：本题主要考查学生对邻补角、对顶角概念的理解，以及对对顶角相等的性质的掌握.

4. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle AOE=90°$. 如果 $\angle 1=20°$，那么 $\angle 2=$____，$\angle 3=$____，$\angle 4=$____.

设计意图：本题主要考查学生对邻补角、对顶角概念的理解，以及对对顶角相等的性质的掌握.



（第4题）

5.3 平行线的性质 （第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

平行线的性质.

2. 内容解析

平行线的性质是证明角相等、研究角的关系的重要依据，是研究几何图形位置关系与数量关系的基础，是平面几何的一个重要内容和学习简单的逻辑推理的素材. 它不但为三角形内角和定理的证明提供了转化的方法，而且也是今后学习三角形、四边形、平移等知识的基础.

图形的性质是研究图形构成要素之间的关系，它和图形的判定是几何中研究的两个重要方面. 平行线的性质是学生对图形性质的第一次系统研究，对今后学习其他图形性质有“示范”的作用.

教科书由平行线的判定引入对平行线性质的研究，既渗透了图形的判定和性质之间的互逆关系，又体现了知识的连贯性. 平行线的三条性质都是需要证明的，但是为了与学生思维发展水平相适应，性质1是通过操作确认的方式得出的（在九年级“圆”一章中再用反证法证明），在性质1的基础上经过进一步推理，得到性质2和性质3. 这一过程体现了由实验几何到论证几何的过渡，渗透了简单推理，体现了数学在培养良好思维品质方面的价值.

因此，可以确定本节课的教学重点：得到平行线的性质的过程.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 理解平行线的性质.

(2) 经历平行线性质的探究过程，从中体会研究几何图形的一般方法.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：学生知道平行线性质的内容，并会运用性质进行简单推理.

达成目标（2）的标志是：学生通过实验探究、操作确认获得性质1，再借助已有相关知识，通过推理得到另外两条性质. 知道平行线的判定和性质的异同，能用自己的语言叙述获得性质的过程.

三、教学问题诊断分析

平行线的性质是学生对图形性质的第一次系统研究，对于研究过程和研究方法都是陌生的，所以学生需要在老师的引导下类比研究平行线判定的过程来构建平行线性质的研究过程.

对于作为培养学生推理能力的内容——性质2和性质3的得出，学生可以做到“说理”，但把推理过程从逻辑上叙述清楚存在困难，需要教师先做示范，然后进行模仿. 推理过程的符号化，对于刚刚接触平面几何的七年级学生而言，具有一定的难度. 为此，在推理过程符合逻辑的前提下，对学生在证明过程中使用文字语言还是符号语言进行表述不作限制，更多关注学生对证明本身的

理解.

本节课的教学难点是：性质 2 和性质 3 的推理过程的逻辑表述.

四、教学支持条件分析

本节教学目标的实现，可以使用图形计算器或计算机软件，有利于学生在运动变化中寻找图形中不变的数量关系，从而发现图形的性质. 学生进行探究活动时还需准备白纸、直尺、三角尺、量角器、剪刀等.

五、教学过程设计

1. 梳理旧知，引出新课

问题 1　上节课，我们学习了三种平行线的判定方法，分别是什么？

（1）你认为三种判定方法中条件和结论分别是什么？

（2）在三种判定方法中的条件下，都可以得到两条直线平行的结论；反过来，在两条直线平行的条件下，同位角、内错角、同旁内角又各有什么关系呢？

师生活动：学生代表回答，如出现错误或不完整，请其他学生修正或补充. 教师点评.

设计意图：复习上节课所学的平行线的三种判定方法并引入探究课题，有意识地让学生回顾上节课内容，为后面类比研究平行线判定的过程来构建平行线性质的研究过程作好铺垫.

2. 动手操作，归纳性质

类比研究平行线判定的思路，首先来研究两条直线平行时，同位角的数量关系.

问题 2　两条平行线被第三条直线截得的同位角会具有怎样的数量关系？

师生活动：学生首先对结论进行猜想，然后在老师的引导下独立探究，学生代表演示、说明.

追问（1）：两条平行线被第三条直线所截，在图 1 形成的 8 个角中，哪些是同位角？猜想在两条平行线被第三条直线所截的条件下，同位角有什么关系. 你能验证你的猜想吗？

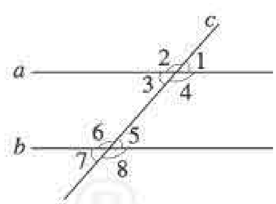


图 1

师生活动：学生自己画出图形并进行猜想. 在此过程中教师关注学生能否准确标记角，能否准确找出同位角，能否正确使用工具比较角的大小.

追问（2）：你能与同学交流一下你的验证方法吗？

师生活动：给学生提供充分的展示机会，如果出现操作或表达不规范的地方教师给予指正. 学生可能想到的方法：①度量法，用量角器进行测量或使用图形计算器进行验证；②叠合法，通过剪纸、拼图进行比较.

追问（3）：如果改变截线的位置，你发现的结论还成立吗？

师生活动：学生小组合作，制定方案，进行说明. 学生可能作出多个图形，可以分别通过度量验证，也可以使用图形计算器或计算机软件的相关功能让截线运动起来，发现同位角的不变的数量关系.

追问（4）：你能用文字语言表述你发现的结论吗？

（性质 1　两直线平行，同位角相等.）

追问（5）：你能用符号语言表达性质 1 吗？

（如图 1，如果 $a // b$，那么 $\angle 1=\angle 5$.）

设计意图：让学生充分经历动手操作—独立思考—合作交流—验证猜想的探究过程，并且在这一过程中，锻炼学生由图形语言转化为文字语言、文字语言转化为符号语言的归纳能力和表达能力，为下一步推理性质 2、性质 3，及今后进一步学习推理打下基础.

3. 应用转化，推出性质

问题 3 上节课，我们利用“同位角相等，两直线平行”推出了“内错角相等，两直线平行”. 类似地，你能由性质 1，推出两条平行线被第三条直线截得的内错角之间的关系吗？

追问（1）：你能用性质 1 和其他相关知识说明理由吗？

师生活动：学生口述推理过程（学生可能使用邻补角或对顶角的关系推导内错角的关系），学生之间进行点评，指出问题或互相补充.

追问（2）：你能写出推理过程吗？

师生活动：学生代表板演. 根据板演情况，师生共同修改或补充. 在此更多关注推理过程是否符合逻辑，不过多强调格式，多给学生鼓励.

追问（3）：类比性质 1，你能用文字语言表达上述结论吗？

（性质 2　两直线平行，内错角相等.）

追问（4）：你能用符号语言表达性质 2 吗？

（如图 1，如果 $a // b$，那么 $\angle 3=\angle 5$.）

设计意图：在教师引导下逐步构建研究思路，循序渐进地引导学生思考，从“说理”向“简单推理”过渡.

问题 4 在两条直线平行的条件下，我们研究了同位角和内错角，那么同旁内角之间又有什么关系呢？你能由性质 1 推出同旁内角之间的关系吗？

（文字语言：性质 3　两直线平行，同旁内角互补.

符号语言：如图 1，如果 $a // b$，那么 $\angle 4+\angle 5=180°$.）

师生活动：学生独立完成，学生代表使用实物投影进行展示和说明.

设计意图：逐步培养学生的推理能力. 使学生初步养成言之有据的习惯，从而能进行简单的推理.

4. 巩固新知，深化理解

例 1 如图 2，平行线 AB，CD 被直线 AE 所截.

(1) 从 $\angle 1=110°$ 可以知道 $\angle 2$ 是多少度吗？为什么？

(2) 从 $\angle 1=110°$ 可以知道 $\angle 3$ 是多少度吗？为什么？

(3) 从 $\angle 1=110°$ 可以知道 $\angle 4$ 是多少度吗？为什么？

例 2 如图 3，$AB // CD$，$AE // CF$，$\angle A=39°$，$\angle C$ 是多少度？为什么？

师生活动：学生独立思考回答例 1，2 中的问题，教师组织学生互相补充，并演示准确形式.

设计意图：例 1，2 帮助学生巩固平行线的性质及文字语言、符号语言、

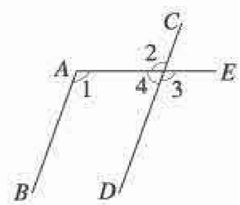


图 2

图形语言之间的相互转化，为今后进一步学习推理打下基础.

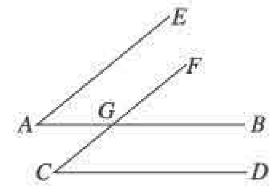


图 3

5. **归纳小结**

教师与学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 平行线的性质是什么？

(2) 你能用自己的语言叙述研究平行线性质的过程吗？

(3) 在推理论证中需要注意哪些问题？

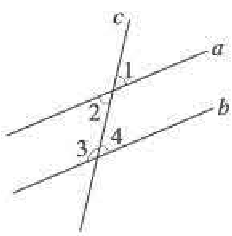
设计意图：通过小结，帮助学生梳理本节课所学内容，掌握本节课的核心——平行线的性质，引导学生回顾探究平行线性质的过程，体会研究几何问题的一般方法.

6. **布置作业**

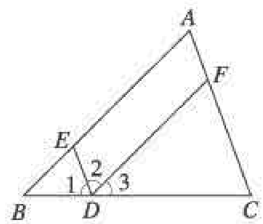
教科书习题 5.3 第 2，4，6 题.

六、目标检测设计

1. 如图，直线 $a /\!/ b$，$\angle 1=54^{\circ}$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 各是多少度？



（第 1 题）



（第 2 题）

设计意图：本题主要考查学生对平行线的性质的掌握.

2. 如图，填空：

(1) $\because ED /\!/ AC$（已知），

$\therefore \angle 1=\angle C$（　　　　　　　　）.

(2) $\because AB /\!/ DF$（已知），

$\therefore \angle 3=\angle$____（　　　　　　　　）.

(3) $\because AC /\!/ ED$（已知），

$\therefore \angle$____$=\angle$______（两直线平行，内错角相等）.

设计意图：本题利用较复杂的图形考查学生的识图能力，以及从不同角度应用性质的能力.

5.4　平移（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. **内容**

平移及其基本性质.

2. **内容解析**

“图形与几何”领域中的一块重要内容是图形的平移、轴对称、旋转和图形的相似等，它们是

研究几何问题、发现几何结论的有效工具. 平移、轴对称和旋转研究的都是一个图形经过某种运动与另一个图形重合时，图形所具有的性质. 这部分内容的学习使学生对图形之间的关系的认识从静态上升到动态，从而开辟了一个研究图形问题的新角度.

在本章，平移是作为平行线的一个应用引入的. 平移是图形整体沿某一直线方向移动一定的距离. 本节课主要是针对水平方向的平移展开讨论，在观察、动手操作等活动的基础上，从数量和位置两个角度研究平移前后图形的变化，从而归纳得出平移的基本性质，在此基础上给出平移的概念，并说明平移的基本性质对于其他方向的平移也是适用的. 平移是初中阶段学习的第一个图形运动变化的内容. 对于平移的学习，在研究方法上，也为今后研究轴对称、旋转等提供了参照.

因此，可以确定本节课的教学重点：平移的基本性质及其归纳过程.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 经历画图、观察、测量的探究过程，归纳平移的基本性质.

(2) 认识平移，理解平移的基本性质.

2. 目标解析

达成目标 (1) 的标志是：学生在平移前后的两个图形中，能够选择对应点，连接线段，通过观察、测量发现结论，从而归纳出平移的基本性质.

达成目标 (2) 的标志是：学生知道平移后图形的形状和大小都不变，能找到图形平移前后的对应点、对应线段，知道连接各组对应点所得线段平行（或在同一条直线上）且相等；能够运用性质作出简单平面图形平移后的图形.

三、教学问题诊断分析

虽然通过在小学的学习，学生对于平移已有一定的认识，能够在方格纸上认识图形的平移，能在方格纸上按水平或垂直方向将简单图形平移，并能从平移的角度欣赏生活中的图案. 但是，对于平移的基本性质的探讨，需要在具体图形中，通过研究对应点的关系进行归纳. 对于这一点，学生没有可借鉴的相关的学习经验. 所以，需要在教师引导下找到归纳性质的线索，并逐步构建起探究的思路. 这需要较强的思维能力，需要教师在长期的教学过程中不断地进行引导和渗透，学生不断感悟、领会，才能逐步养成.

所以，本节课的教学难点是：构建探究平移基本性质的思路.

四、教学过程设计

1. 创设情境，引入概念

问题 1 欣赏图 1 中美丽的图案，并回答问题：

(1) 这些图案有什么共同的特点？

(2) 能否根据其中的一部分绘制出整个图案？

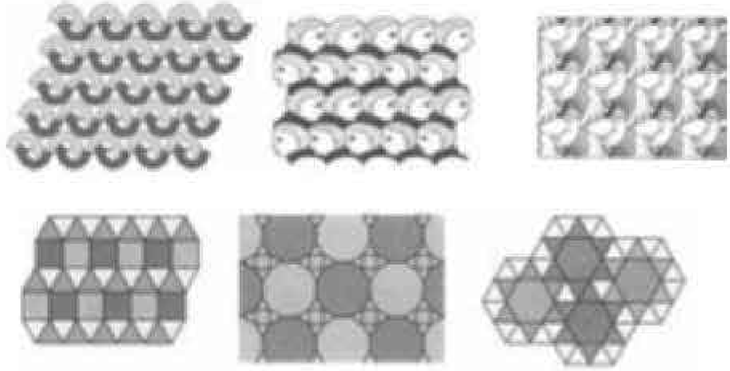


图 1

师生活动：教师展示图片，提出问题，学生观察、思考，回答问题.

设计意图：通过提问，引导学生从图形特点的角度去观察图案移动的共同特点，启发学生回忆在小学学习过的有关平移的知识并尝试描述，体现中小学知识的衔接.

2. **小组合作，探究性质**

问题 2　如何在一张半透明的纸上，画出一排形状和大小完全一样的雪人？

师生活动：学生可能会回答把透明的纸盖在图片上，先描出一个雪人，然后按同一方向陆续移动这张纸，再描出第二个、第三个（图 2）……学生可能会注意到，如果移动的方向不同，得到的效果不同（图 3）. 对于这一点，教师要对学生可能出现的方案，做好充分的预设，可以用准备好的幻灯片进行演示.

图 2

图 3

设计意图：让学生想象动手平移的过程，引导学生体会平移的方向不一定是水平的，激发学生的积极性，为下面的活动作好准备.

问题 3　把画出的这些雪人和描出的第一个雪人进行比较，什么改变了？什么没改变？

师生活动：学生代表回答，如出现错误或不完整，请其他学生修正或补充. 教师点评，归纳得到平移的性质 1：把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小完全相同.

设计意图：引导学生观察雪人的位置、形状和大小，进而归纳得出平移的性质 1.

问题 4　第 2 个雪人和第 3 个雪人都可以看成是第 1 个雪人沿某一直线方向移动得到的，它们

和第 1 个雪人的形状和大小完全相同，但是它们的位置不同.

（1）你认为位置不同的原因是什么？

（它们移动的距离不同.）

（2）如何刻画它们移动的距离呢？在图 4 所画的两个相邻雪人中，你能说明测量方法吗？

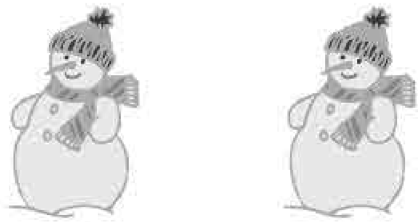


图 4

师生活动：在教师的引导下，学生想到用点到点的距离来描述雪人移动的距离，学生可能回答只要测量鼻尖到鼻尖的距离或帽顶到帽顶的距离就可以了. 此时，教师指出鼻尖 A 与 A' 叫做对应点，同样地，帽顶 B 与 B'，钮扣 C 与 C' 都是对应点（图 5）. 然后让学生在图中再找出几对对应点.

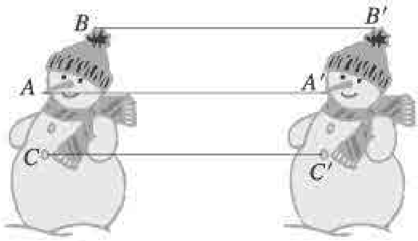


图 5

设计意图：点是构成图形的基本元素，图形的变化是图形上每个点都发生了相同变化的结果，所以，要深入研究图形在某种变化下的性质，应该从研究点的变化开始. 如果没有教师的引导，学生很难认识到这一点，这也是本节课的难点. 设置问题 4 是为了突破难点，引导学生很自然地进入对平移性质的进一步探究.

问题 5 把你找到的这些对应点分别连接起来，这些线段有怎样的关系呢？

师生活动：学生进行小组讨论，师生共同归纳平移的基本性质 2：连接各组对应点的线段平行（或在同一条直线上）且相等. 在此基础上，教师给出平移的概念.

设计意图：通过度量等简单易行的操作，调动所有学生参加到课堂教学的活动中来. 让学生先独立思考，再通过小组交流互相补充，在平移方向不同的情况下，验证自己的结论是否正确，从而归纳出平移的基本性质，培养学生全面思考的能力.

3. 运用新知，深化理解

例 1 （1）如图 6，图中哪条线段可以由线段 b 经过平移得到？如何进行平移？

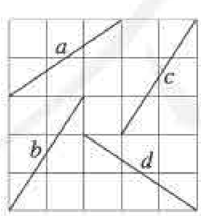


图 6

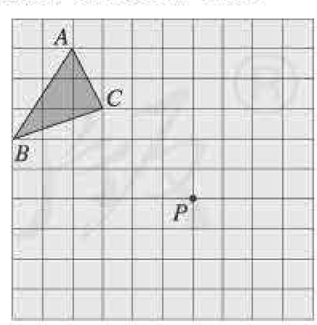


图 7

（2）如图 7，在网格中有 $\triangle ABC$，将点 A 平移到点 P，画出 $\triangle ABC$ 平移后的图形.

①将点 A 向____平移____格，再向____平移____格，得到点 P；

②点 B，C 与点 A 平移的________一样，得到 B'，C'；

③连接________，得到 $\triangle ABC$ 平移后的三角形________.

师生活动：学生独立思考，学生代表回答，其他学生补充，教师注意纠正学生可能出现的不规范的表述.

设计意图：应用平移的基本性质解决问题，为例 2 作铺垫.

例 2 如图 8，平移$\triangle ABC$，使点 A 移动到点 A'，画出平移后的$\triangle A'B'C'$.

通过提问引导学生作图：

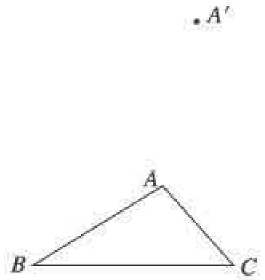


图 8

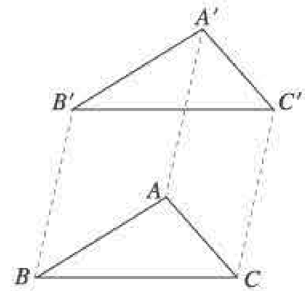


图 9

(1) 结合平移的性质，你是怎样理解由点 A 移动到点 A'这个条件的？

(2) $\triangle A'B'C'$的一个顶点 A'已经确定，你认为最少需要找到几个对应点就可以画出$\triangle A'B'C'$？

(3) 根据平移的性质，如何作出点 B 的对应点 B'？

(4) 类似地，你能作出点 C 的对应点 C' 吗？

师生活动：教师通过设问进行引导，学生思考后独立作图（图 9），并展示学生作品.

设计意图：问题（1）是引导学生从点 A 移动到点 A'来确定平移的距离及方向. 问题（2）是引导学生注意三角形的顶点是关键点，找到它们平移后的点，就能完成三角形的平移. 问题（3）（4）是让学生应用平移的性质完成作图.

例 3 荷兰图形艺术家埃舍尔在世界艺术中占有独一无二的位置，以其源自数学灵感的木刻、版画等作品而闻名. 数学是他的艺术之魂，他在数学的匀称、精确、规则、循序等特性中发现了难以言喻的美，同时运用他无与伦比的禀赋，创作出广受欢迎的迷人作品. 你能在报纸、图书或网络上找到埃舍尔的作品吗？你能再举出生活中一些利用平移的例子吗？

师生活动：教师鼓励学生充分发挥想象，互相交流.

设计意图：通过欣赏埃舍尔的作品，体现平移的美学价值并激发学生产生动手操作的想法. 让学生举例加深学生对平移基本性质的理解和掌握.

4. **归纳小结**

教师与学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 平移的基本性质是什么？

(2) 回顾探究平移基本性质的过程，你能说出归纳平移基本性质的思路吗？

设计意图：通过小结，使学生梳理本节课所学内容，掌握本节课的核心——平移的基本性质.

5. **布置作业**

(1) 教科书习题 5.4 第 1，3 题.

(2) 请你来做小小设计师，利用今天所学的平移知识，使用三角形、四边形、圆等简单的平面

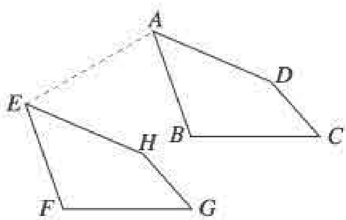
图形设计一些美丽的图案.

设计意图：通过书面作业，使学生更好地理解和掌握本节课的知识．借助图案设计，培养学生审美情趣和创造性思维，感受数学的美.

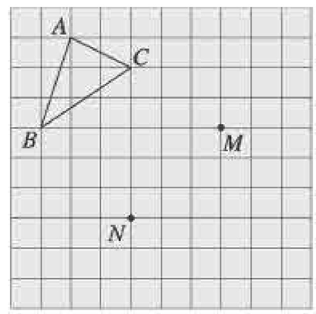
五、目标检测设计

1. 如图，把四边形 $ABCD$ 沿直线 AE 平行移动，得到了四边形 $EFGH$．四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGH$ 的____________完全相同，点 B 的对应点是点________，点 C 的对应点是点______，线段 AE 与 DH 的关系是______________.

设计意图：本题主要考查学生对平移的概念和性质的掌握.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在方格纸中平移△ABC，使点 A 移到点 M，点 B 和点 C 应移到什么位置，画出平移后的三角形．再将点 A 由点 M 移到点 N，画出平移后的三角形．如果直接平移△ABC，使点 A 移到点 N，它和上一步得到的三角形位置相同吗?

设计意图：本题主要考查学生按要求作出简单平面图形平移后的图形的能力.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 两条直线的位置关系

两条直线位置关系是以这两条直线是否在同一个平面内以及它们的公共点个数 m 进行分类的.

	公共点个数 m	名称
在同一个平面内	$m \geqslant 2$	重合直线
	$m=1$	相交直线
	$m=0$	平行直线
不在同一个平面内	$m=0$	异面直线

两条相交直线的相互关系是通过它们所成的角 α 来显示的. 当 $\alpha=90°$时，这两条直线互相垂直. 两条平行直线的相互关系是通过它们之间的距离来显示的.

2. 距离

距离是线段的长度，不是线段.

在平面几何里，距离有以下三种：

(1) 两点间距离　连接两点的线段的长度. 规定重合的两点间距离为 0.

(2) 点到直线的距离　直线外一点到这条直线的垂线段的长度. 规定直线上的点到这条直线的距离为 0.

(3) 两条平行线的距离　同时垂直于两条平行线，且夹在这两条平行线间的线段的长度. 规定重合的两条直线间的距离为 0.

3. 平移与几何变换

中学所研究的几何变换主要包括平移、旋转、轴对称、相似. 其中，平移、旋转、轴对称都是等距变换. 在等距变换下，图形的形状和大小都不变，即一个图形与它的等距变换下的象全等（也叫合同）. 欧氏几何学是研究经过一切等距变换不改变的性质，简称图形在等距变换下的不变性.

(1) 平移变换的概念

把平面上的任一点 A 在此平面内沿着一个定方向移动定距离，得到点 A'，这种变换称为平移变换，简称平移. 其中，定方向称为平移方向，定距离称为平移距离，点 A'称为点 A 在平移下的象，点 A 称为点 A'在平移下的原象，点 A 和点 A'称为在平移下的一对对应点. 简单地说，平移就是将平面内的每一点作相同的平行移动. 要刻画一个平移，需要平移方向和平移距离两个要素.

(2) 平移变换的特征

在平移下，连接每一对对应点的线段都互相平行（平行于平移方向）或在同一条直线上，每一对对应点之间的距离都相等（等于平移距离）. 反之，在一个一一变换下，若每一对对应点的连线都平行（或在同一条直线上）且相等，则这个变换就是平移.

(3) 平移变换的确定

如前所述，给定了平移方向和平移距离，就确定了平移. 根据平移变换的特征可知，给定一对对应点，也就确定了平移.

(4) 图形在平移下的不变性和不变量

平移把任一线段变成与它平行（或在同一条直线上）且相等的线段. 即在平移下，任一线段保持方向和长度不变.

平移把任一个角变成与它相等的角. 即在平移下，任一个角保持大小不变.

平移把任一图形变成与它全等的图形.

4. 逻辑体系的奇迹


欧几里得

几何学创建的初期，内容是繁杂和混乱的. 有必要将几何的内容，用逻辑的“锁链”整理、穿连起来. 第一个完成这件工作的是古希腊数学家欧几里得（Euclid).

欧几里得知识渊博，数学造诣精湛，尤其擅长几何证明，早年大概在雅典受过

教育．大约在公元前 300 年左右，在托勒密王的邀请下，来到亚历山大城教学．他是一位出色的教育家．传说一个不爱学习的青年学生，在开始学几何学的第一个命题时就问欧几里得："我学习几何后将得到什么？"欧几里得对旁边的学生说："给他三个钱币叫他走，因为他想在学习中获得实利．"

欧几里得写过不少数学和物理著作，如《数据》《论剖分》《数据》《光学》《镜面反射》等．其中最出名的就是《原本》．欧几里得在这本书中用公理法对当时的数学知识进行了系统化、理论化的总结，使得《原本》成为用公理法建立演绎的数学体系的最早典范．

《原本》共有 13 卷，在每一卷中都有一系列的命题或定理，最著名的是第 1 卷．

第 1 卷给出了一些最基本的定义，如"点是没有部分的""线是没有宽度的长""面是没有宽度和长度的"等．接着便列出了 5 条公设和 5 条公理．

5 条公设是：

（1）从任意点到任意点作直线是可能的．

（2）把有限直线不断沿直线延长是可能的．

（3）以任意点为中心和任意距离为半径作一圆是可能的．

（4）所有直角彼此相等．

（5）若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的另一点．

5 条公理是：

（1）跟同一件东西相等的一些东西，它们彼此也是相等的．

（2）等量加等量，总量仍相等．

（3）等量减等量，余量仍相等．

（4）彼此重合的东西是相等的．

（5）整体大于部分．

其余各卷虽然不如第 1 卷那么著名，在数学上却更高深一些．第 2 卷是第 1 卷的继续；第 3，4 卷讨论圆与圆、圆与直线的关系；第 5，6 卷是讲比例和相似三角形的；第 7，8，9 卷主要论述正整数的性质；第 10 卷讲的是无理数；第 11，12，13 卷讲空间图形，也就是立体几何．

《原本》几乎包括了我们初中所学平面几何的全部内容，尽管现在看来，《原本》也存在某些缺陷，但因其宏伟的结构，深谋远虑的安排、严密的推理过程，与我国的《九章算术》一同被誉为数学思想方法的两大源泉．历史上许多科学家都称自己得益于《原本》科学精神的熏陶．哥白尼、伽利略、牛顿以及许许多多的大科学家，年轻时都曾认真学习过这本书．据统计，自从中国的印刷术传入欧洲以后，《原本》已用各种文字重版了1 000多次，极其深刻地影响了世界数学的发展．

5．三种几何并存

长期以来，数学家们发现第五公设和前四个公设比较起来，显得文字叙述冗长，而且也不那么显而易见．有些数学家还注意到欧几里得在《原本》第 1 卷中，共给出了 23 个定义，其中最后一个是平行线的定义；而第五公设直到第 29 个命题中才用到，而且以后再也没有使用．因此，一些

数学家认为欧几里得之所以这样处理，不是因为第五公设是不能证明的，而是因为欧几里得一时找不到证明. 于是，这些数学家提出，第五公设能不能不作为公设，而作为定理，能不能依靠前四个公设来证明第五公设的问题. 这就是几何发展史上最著名的、长达两千多年的关于“平行线理论”的讨论. 由于证明第五公设的问题始终得不到解决，人们逐渐怀疑证明的路子走得对不对，第五公设到底能不能证明？

罗巴切夫斯基（Н. И. Лобачевский）从 1815 年开始试图证明平行公理，几年的努力都失败了. 失败使他逐渐认识到证明平行公理或第五公设是不可能的. 1826 年，罗巴切夫斯基在喀山大学发表了《简要论述平行线定理的一个严格证明》的演讲，勇敢地抛弃了第五公设，提出了完全相反的公设：过一点至少可以有两条直线与已知直线平行. 后来人们把这个公设叫做“罗氏公理”. 由罗氏公理很容易推出以下结论：过一条直线外一点可以引无数条直线与已知直线平行.

罗巴切夫斯基

罗巴切夫斯基保留了除平行公理以外的欧几里得几何（简称欧氏几何）的全部公理. 如果不涉及与平行有关内容，罗巴切夫斯基的新几何和欧氏几何没有任何不同. 但是只要与平行有关，那么结果就相差甚远. 例如，在欧氏几何中，三角形三个内角的和等于 180°. 而在罗巴切夫斯基几何（简称罗氏几何）中，三角形三个内角的和小于 180°. 1868 年意大利数学家贝尔特拉米（E. Beltrami）找到了一种曲面，人们给它起名叫“伪球面”（图 5-1）. 在“伪球面”上，三角形三个内角的和小于 180°.

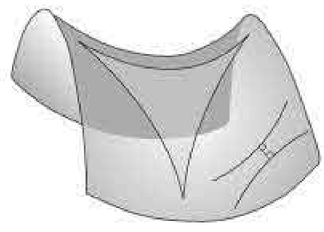


图 5-1

黎曼（G. F. B. Riemann）在 1854 年提出了一种与前两种几何完全不同的几何，叫做“黎曼几何”. 黎曼几何认为：在同一平面内，任何两条直线都有公共点（交点），也就是过直线外一点不存在直线和已知直线平行. 黎曼几何的模型是球面. 在黎曼几何中，三角形三个内角的和大于 180°（图 5-2）.

黎曼

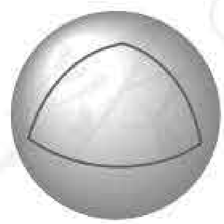


图 5-2

欧氏几何、罗氏几何、黎曼几何最根本的不同是关于平行公理的认识，这导致了诸多互不相容的结论. 虽然如此，这三种几何各自所有的命题都构成了一个严密的公理体系，各公理之间满足和谐性（也称不矛盾性）、完备性和独立性. 因此这三种几何都是正确的. 在我们的日常生活中，欧氏几何是适用的；在宇宙空间或原子核世界，罗氏几何更符合客观实际；在地球表面研究航海、航

空等实际问题中，黎曼几何更准确一些.

总之，从逻辑上说，三种几何学有同样的地位. 从数学的实现上说，三种几何学都有相应的模型. 从现实世界上说，三种几何学各在一定条件下成为现实世界的一种理论的近似. 因此，三种几何都是一定条件下的相对真理，并且可以在更高的观点下统一起来.

6. 欧氏几何中与平行公理等价的命题

在数学中，两个命题 A，B "等价" 的意思是，由命题 A 可推证出命题 B，反之，由命题 B 可推证出命题 A.

在欧氏几何中，与平行公理等价的命题有：

(1) 任意三角形的内角和等于二直角.

(2) 每一个三角形的内角和都相同.

(3) 通过一个角内的任意一点可作一直线与这个角的两边都相交.

(4) 存在两个相似而不全等的三角形.

(5) 平行于第三条直线的两条直线平行.

(6) 勾股定理（西方称为毕达哥拉斯定理).

(7) 圆内接正六边形的一边等于这个圆的半径.

7. 错觉

人们常说，"耳听为虚，眼见为实". 其实在我们的现实生活中，我们看到的很多现象却是假象，尤其是在某些不同参照的情况下，我们的眼睛常常欺骗我们自己.

在如图 5-3 的图片中，前面的线段短一些，对吗？事实上，这两条线段完全是一样长的. 不信？用尺子量量看！

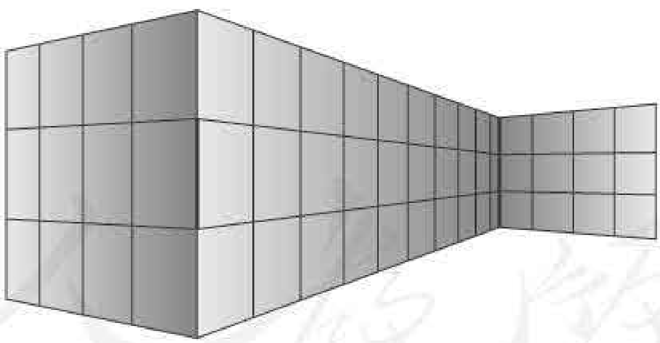


图 5-3

无论出于人眼睛的生理特点，还是人的心理特点，看"错"了图是常有的事. 而且这类错误几乎人人都不能避免，这实际上是一种错觉.

物理学家和心理学家对视错觉给出了以下几种解释：

(1) 是由画在平行线上不同方向的锐角之间的差异造成的；

(2) 是由眼睛里视网膜的弯曲程度造成的；

(3) 有层次的线段使我们的眼睛集中和分散，它造成了平行线视觉上的弯曲.

宇宙中充满了神奇的事物，等待我们去认知它们．我们对视觉不能想当然，错觉揭示了人类视觉的神奇之处及其局限性，所以它在人类视觉研究中起到很重要的作用．

二、拓展性问题

1. 平面内 n 条相交直线问题

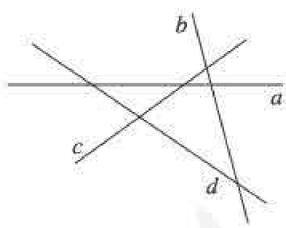
（1）在同一平面内有 4 条不重合直线，其中任何两条都不平行．请画出图形．

（2）数一数，你画的图形中，4 条直线相交成多少个小于 180°的角？和同学们交流一下，看谁的图形中相交所成的小于 180°的角最多？有什么规律？

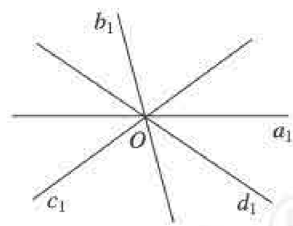
（3）你能在同一平面内画出 4 条不重合直线，使得其中任何两条都不平行，并且它们相交所成的最小角大于 45°？画一画，找一找规律，然后探究理由．

（4）如果在同一平面内有 n 条不重合直线，其中任何两条都不平行．那么你能对其中的最小交角得出什么结论吗？

答案：（1）（略）．（2）都是 24 个．（3）不可能．理由如下：图 5-4（1）是在同一平面内的两两不平行的 4 条不重合直线 a，b，c，d 的任一画法．在平面内任取一点 O，将 4 条直线平移过点 O，得到过点 O 的直线束（图 5-4（2））．由于这 4 条直线 a，b，c，d 两两不平行，因而平移后的对应直线 a_1，b_1，c_1，d_1 没有重合的．这样，左边某两条直线（例如 b 与 d）所成的角就转化成直线束中相应两条直线（b_1 与 d_1）所成的角．显然，最小角是由直线束中相邻两直线构成的，而直线束中相邻两直线构成的角共有 8 个，故其中最小角不超过 $360°\div 8=45°$，即最小角超过 45°是不可能的．（4）一般地，平面内有 n 条两两不平行的不重合直线，最小角的度数不超过 $\frac{180}{n}$．



（1）



（2）

图 5-4

2. 印刷线路板问题

工厂的技术人员在设计印刷线路板时，常要考虑哪些线与哪些线不能相交的问题．如图 5-5，图中标有相同字母的两个电器元件需要相连，而所有连线又不能相交．同时，为了美观起见，还要求沿着图中的格子连线．

从图 5-5 中元件 A 的位置可知，Ⓐ—Ⓐ之间的连线必须把相同字母的两个元件划在连线的同一侧，具体地说，B，D 和 E 都要在Ⓐ—Ⓐ连线的上侧，C 要在这条连线的下侧．于是即得如图 5-6 所示的印刷线路板．

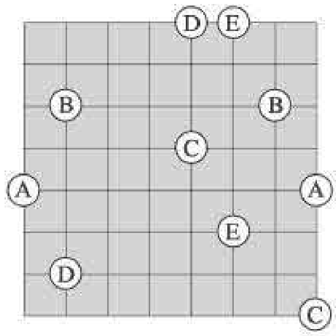


图 5-5

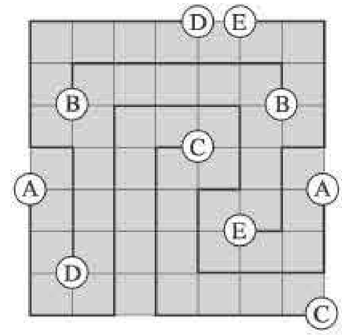


图 5-6

管道交叉问题是一个与上述问题类似的著名网络问题. 如图 5-7，A，B，C 三幢房屋分别要得到电、水和煤气的供应，向这三幢房子供应的九根管道都要正好紧贴地面. 那么能否做到这九根管道相互都不交叉？

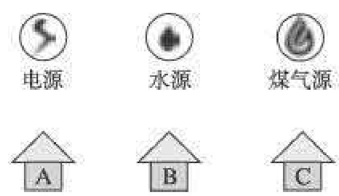


图 5-7

答案：不可能相互都不交叉. 如果先考虑 A，B 两房得到供应，可按图 5-8 连接，这样就把地面分割成①②③三个区域. 再考虑房屋 C，如果 C 位于③中，它要得到煤气，必然要和其他管道交叉；如果 C 位于②中，它要得到电，必然也要和其他管道交叉；如果 C 位于①中，它要得到水，也必然要和其他管道交叉. 于是不管 C 在什么位置，只要它要得到三种供应，所建管道都要和其他管道交叉.

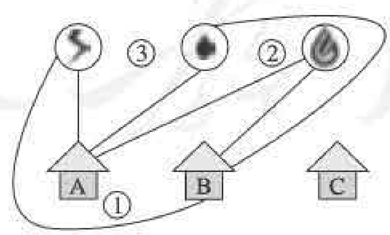


图 5-8

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容是：对顶角、邻补角的定义，对顶角的性质，垂线的概念及性质，点到直线的距离，同位角、内错角、同旁内角的概念，平行线的判定及性质，命题的概念以及图形的平移及其性质. 可以从以下几方面考查学生对本章知识的掌握：理解对顶角、邻补角、同位角、内错角、同旁内角的概念；掌握两条直线垂直的性质与判定方法；理解并应用平行线的判定及性质，能结合一些具体内容进行说理和简单推理，初步养成言之有据的习惯；能初步区分命题的题设和结论；对于图形的平移，理解连接对应点的线段平行（或在同一条直线上）且相等的性质，能按照要求画出简单平面图形平移后的图形.

2. 对本章的考查，应注意以下问题：

（1）在本章的学习中，大量的图形的有关性质都是通过学生自主探究、思考、交流得到的，应让学生充分经历观察、操作、想象、推理、交流的过程. 对于相交线与平行线的有关概念，不应单纯考查对概念的记忆，而应注意结合具体问题进行评价，避免死记硬背.

（2）本单元对学生的证明推理过程不做过多要求，教师在教学中可以书写规范的推理过程，为学生以后书写规范的证明过程打好基础. 同时要求学生说出每一步的理由，要关注学生能否有条理地表达自己的思考过程和结果. 学生可以用口头表达，而用书面表达时，只要清楚、正确即可.

3. 在评价中，要关注学生是否理解平行线判定和性质的得出过程. 要注意让学生体会用角之间的数量关系刻画直线之间的位置关系的方法.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 4 分，共 16 分）

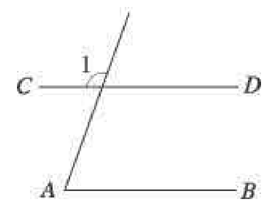
1. 下面四个图形中，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角的是（　　）.

(A)　　(B)　　(C)　　(D)

2. 如图，$AB /\!/ CD$，$\angle A=70^\circ$，则 $\angle 1$ 的度数是（　　）.

(A) 70°　　(B) 100°

(C) 110°　　(D) 130°



（第 2 题）

3. 下列说法正确的是（　　）.

(A) 在同一平面内，a，b，c 是直线，且 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，则 $a /\!/ c$

(B) 在同一平面内，a，b，c 是直线，且 $a \perp b$，$b \perp c$，则 $a \perp c$

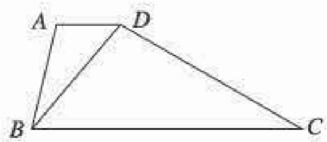
(C) 在同一平面内，a，b，c 是直线，且 $a /\!/ b$，$b \perp c$，则 $a /\!/ c$

(D) 在同一平面内，a，b，c 是直线，且 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，则 $a \perp c$

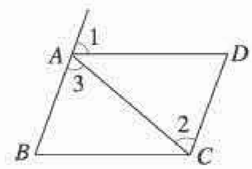
4. 如图，$AD /\!/ BC$，$\angle C = 30°$，$\angle ADB : \angle BDC = 1 : 2$，则 $\angle ADB$ 的度数是（　　）.

(A) $45°$　　　　(B) $30°$

(C) $50°$　　　　(D) $36°$



（第 4 题）



（第 5 题）

（二）**填空题**（每小题 4 分，共 24 分）

5. 如图，(1) 要证 $AD /\!/ BC$，只需 $\angle B =$______，根据是________________________________；

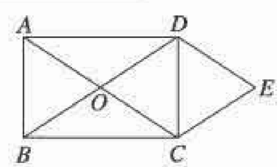
(2) 要证 $AB /\!/ CD$，只需 $\angle 3 =$______，根据是________________________________.

6. 把下列命题改写成“如果……，那么……”的形式：

(1) 内错角相等，两直线平行. ________________________________.

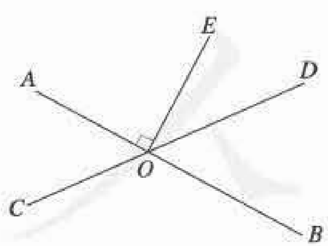
(2) 同角的补角相等. ________________________________.

7. 如图，长方形 $ABCD$ 中，线段 AC，BD 相交于点 O，$DE /\!/ AC$，$CE /\!/ BD$，$BC = 2$ cm，那么三角形 EDC 可以看作由________平移得到的，连接 OE，则 $OE =$________cm.

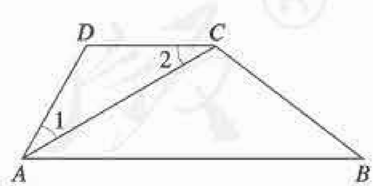


（第 7 题）

8. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$OE \perp AB$，垂足为 O，如果 $\angle EOD = 38°$，则 $\angle AOC =$________°，$\angle COB =$________°.



（第 8 题）



（第 9 题）

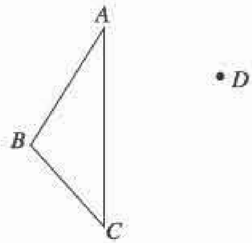
9. 如图，AC 平分 $\angle DAB$，$\angle 1 = \angle 2$. 填空：

因为 AC 平分 $\angle DAB$，所以 $\angle 1 =$________. 从而 $\angle 2 =$________. 因此 $AB /\!/$________.

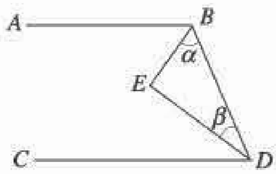
10. 如果两个角的两边两两互相平行，且一个角的 $\frac{1}{2}$ 等于另一个角的 $\frac{1}{3}$，则这两个角的度数分别是__________.

（三）**解答题**（每小题 15 分，共 60 分）

11. 如图，已知三角形 ABC 及三角形 ABC 外一点 D，平移三角形 ABC，使点 A 移动到点 D，并保留画图痕迹.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 完成下面的证明：

如图，BE 平分$\angle ABD$，DE 平分$\angle BDC$，且$\angle\alpha+\angle\beta=90^\circ$，求证 $AB\parallel CD$.

证明：∵ BE 平分$\angle ABD$（已知），

∴ $\angle ABD=2\angle\alpha$（　　　　　　　　　　　　　　）.

∵ DE 平分$\angle BDC$（已知），

∴$\angle BDC=$________（　　　　　　　　　　　　　　）.

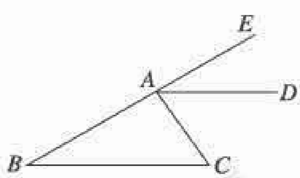
∴ $\angle ABD+\angle BDC=2\angle\alpha+2\angle\beta=2(\angle\alpha+\angle\beta)$（　　　　　　　　　　）.

∵ $\angle\alpha+\angle\beta=90^\circ$（已知），

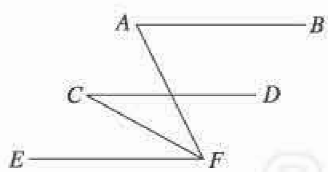
∴ $\angle ABD+\angle BDC=$________（　　　　　　　　　　　　）.

∴ $AB\parallel CD$（　　　　　　　　　　）.

13. 如图，AD 是$\angle EAC$ 的平分线，$AD\parallel BC$，$\angle B=30^\circ$，求$\angle EAD$，$\angle DAC$，$\angle C$ 的度数.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，$AB\parallel CD\parallel EF$，写出$\angle A$，$\angle C$，$\angle AFC$ 的关系并说明理由.

参考答案

1. C. 本题主要考查学生对对顶角概念的理解.
2. C. 本题主要考查学生对平行线性质的掌握.
3. A. 本题主要考查学生对平行线和垂线判定方法的掌握.
4. C. 本题主要考查学生对平行线性质的掌握和对方程思想的理解.
5. (1) $\angle 1$，同位角相等，两直线平行；(2) $\angle 2$，内错角相等，两直线平行. 本题主要考查学生对平行线判定方法的掌握.

6. (1) 如果两条直线被第三条直线所截，内错角相等，那么这两条直线互相平行；(2) 如果两个角是同一个角的补角，那么这两个角相等. 本题主要考查学生对命题的构成的理解.
7. 三角形 OAB，2. 本题主要考查学生对平移的定义的理解和对平移性质的掌握.
8. 52，128. 本题主要考查学生对垂直和邻补角的概念的理解，以及对顶角的性质的掌握.
9. $\angle CAB$，$\angle CAB$，DC. 本题主要考查学生用数学语言表达推理过程的能力.
10. $108°$，$72°$. 本题主要考查学生对平行线性质的掌握、对方程思想的理解和计算能力.
11. (图略). 本题主要考查学生对平移概念的理解和运用平移性质解决问题的能力.
12. 角的平分线的定义；$2\angle\beta$；角的平分线的定义；等量加等量，和相等；$180°$；等量代换；同旁内角互补，两直线平行. 本题主要考查学生对平行线的判定方法和性质的掌握.
13. $30°$，$30°$，$30°$. 本题主要考查学生对平行线的判定方法和性质的掌握.
14. $\angle AFC=\angle A-\angle C$. 理由如下：由 $AB\parallel EF$，得 $\angle A=\angle AFE$. 由 $CD\parallel EF$，得 $\angle C=\angle CFE$. 因为 $\angle AFC=\angle AFE-\angle CFE$，所以 $\angle AFC=\angle A-\angle C$. 本题主要考查学生对平行线性质的掌握和推理能力.

第六章　实　数

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

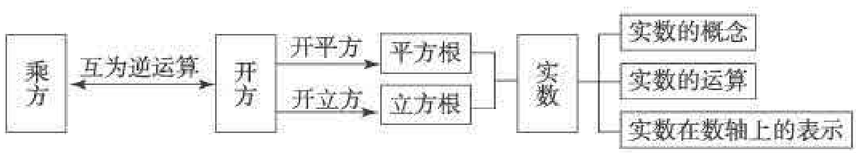
1. 了解算术平方根、平方根、立方根的概念，会用根号表示数的算术平方根、平方根、立方根.

2. 了解开方与乘方互为逆运算，会用平方运算求百以内整数的平方根，会用立方运算求百以内整数（对应的负整数）的立方根，会用计算器求平方根和立方根.

3. 了解无理数和实数的概念，知道实数与数轴上的点一一对应，能求实数的相反数与绝对值.

4. 能用有理数估计一个无理数的大致范围.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章主要包括算术平方根、平方根、立方根，以及实数的有关概念、运算和实数在数轴上的表示等内容. 本章的重点是算术平方根、平方根的概念和求法以及实数的概念，难点是平方根和实数的概念.

教科书从典型的实际问题（已知正方形的面积求边长）出发首先介绍算术平方根，给出算术平方根的概念和它的符号表示，这时教科书所涉及的被开方数都可以表示成有理数的平方. 接着，教科书设置一个“探究”栏目，让学生尝试将两个面积为 1 的小正方形剪拼成一个面积为 2 的大正方形，进而求出这个大正方形的边长. 这也是一个已知正方形的面积求它的边长的问题，由于这个大正方形的面积为 2，根据前面学过的算术平方根的概念和表示方法，可以求出这个大正方形的边长是$\sqrt{2}$，这样教科书就引进了用根号形式表示的无理数（但暂时不出现无理数的概念）. 这是教科书第一次出现这样的数. 接着，教科书采用用有理数夹逼的方法，利用不足近似值和过剩近似值来估计$\sqrt{2}$的大小，通过一步一步的估计，得到$\sqrt{2}$的越来越精确的近似值，进而指出$\sqrt{2}$是一个无限不循环小数的事实，并进一步指出$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$等也是无限不循环小数，这就为后面介绍无理数的概念打下基础. 用有理数估计无理数的大小，是本章学习中应该注意的一个问题，教科书结合一个实际问题（例 3）介绍了用有理数估计无理数的常用方法. 在算术平方根的基础上，教科书展开了对数的平方根的讨论，介绍利用平方与开平方互为逆运算求数的平方根的方法，探讨数的平方根的特征

等.

对于立方根，教科书采用了类似于平方根的方法进行讨论．首先从典型的实际问题（已知立方体的体积求棱长）出发引出立方根的概念，学习利用立方与开立方互为逆运算求立方根的方法，探讨数的立方根的特征，最后学习使用计算器求数的立方根的方法等.

学习了平方根、立方根以及开平方、开立方运算后，本章采用与有理数对照的方法引入无理数，并给出实数的概念和分类．随着无理数的引入，数的范围从有理数扩充到实数，这个扩充过程既体现了概念、运算等的一致性，又体现了它们的发展变化．教科书通过几方面的例子说明了这种一致性和发展变化．首先，教科书通过探究在数轴上画出表示 π 和$\sqrt{2}$的点，说明了无理数也可以用数轴上的点来表示，并指出当数的范围由有理数扩充到实数后，数轴上的点与实数就是一一对应的；接着，教科书通过设置思考问题，让学生体会，有理数范围内的一些概念（如绝对值、相反数等）可以推广到实数范围内；最后，教科书结合具体例子，指出有理数的运算（如加、减、乘、除、乘方运算等），以及运算律、运算性质（如交换律、分配律、结合律等）在实数范围内仍然成立，并且可以进行新的运算（如正数和 0 可以进行开平方运算、任何一个实数可以进行开立方运算）等.

四、课时安排

本章教学约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

6.1　平方根	约 3 课时
6.2　立方根	约 2 课时
6.3　实　数	约 2 课时
数学活动	
小结	约 1 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 加强与实际的联系

本章内容与实际的联系非常密切．例如，无理数是从现实世界中抽象出来的一种数，开平方运算和开立方运算也是实际中经常使用的两种运算，用有理数估计无理数的大小在现实生活中也经常遇到等．因此，在编写本章内容时注意了联系实际，对于一些重要的概念和运算紧密结合实际问题展开．例如，算术平方根是从已知正方形的面积求它的边长、立方根是从已知立方体的体积求它的棱长等典型的实际问题引出的；再如，用有理数估计无理数的大小也是紧密结合实际问题展开的（第 6.1 节的前两个探究和例 3）．将本章内容与实际紧密联系起来，可以使学生在解决实际问题的过程中，更好地认识实数的有关概念和运算.

2. 加强知识间的纵向联系，突出类比的作用

本章内容属于“数与代数”领域．有关数的内容，学生在七年级上册已经系统地学过有理数，对有理数的概念和运算等有了较深刻的认识．本章是在有理数的基础上学习实数的初步知识，本章很多内容是有理数相关内容的延续和推广，因此，编写时注意了加强知识间的相互联系，突出类比

的作用，使学生更好地体会数的扩充过程中表现出来的概念、运算等的一致性和发展变化. 例如，类比有理数，引入实数的绝对值和相反数的概念，实数的运算法则和运算性质，实数与数轴上的点一一对应关系；平方与开平方、立方与开立方的互为逆运算关系等都是在有理数的基础上展开的. 另外，本章前两节“平方根”“立方根”在内容和展开方式上是基本平行的，因此，编写“立方根”时，充分利用了类比的方法，通过类比“平方根”展开“立方根”的内容. 例如，类比平方根的概念的引入方式给出立方根的概念，类比开平方运算给出开立方运算，类比平方与开平方运算的互逆关系研究立方与开立方运算的互逆关系等. 这样的编写方法，有助于加强知识间的相互联系，通过类比已学的知识学习新知识，使学生的学习形成正迁移.

3. 留给学生探索交流的空间

根据本章内容的特点，对于一些重要的概念和结论，编写时注意了让学生通过观察、思考、探究等活动归纳得出结论. 例如，对于算术平方根的概念，教科书首先通过一个问题情境，引出已知正方形的面积求边长的问题，接着又让学生通过填表的方式，计算几个不同面积的正方形的边长，使学生感受到这些问题与以前学过的已知正方形的边长求面积的问题是一个相反的过程. 并由此指出，这些问题抽象成数学问题就是已知一个正数的平方，求这个正数的问题，在此基础上给出算术平方根的概念. 这样就让学生通过一些具体活动，在对算术平方根有一定的感性认识的基础上归纳给出这个概念. 再比如，在讨论数的立方根的特征时，教材首先设置“探究”栏目，在栏目中以填空的方式让学生计算一些具体的正数、负数和 0 的立方根，寻找它们各自的特点，通过学生讨论交流等活动，归纳得出“正数的立方根是正数，负数的立方根是负数，0 的立方根是 0”的结论. 这样就让学生通过探究活动经历了一个由特殊到一般的认识过程，在探究过程中发展思维能力，有效改变学生的学习方式.

六、对本章教学的建议

1. 加强数学思想方法的引导与渗透

本章类比有理数，引入实数的相反数、绝对值等概念，以及实数的运算和运算律，教学时应注意引导学生体会类比这种研究方法的作用. 实数与数轴上点是一一对应的，因此，可以利用数轴将“数”与“形”联系起来，这不仅对理解实数的有关概念及运算很有帮助，而且对后续学习数学乃至研究数学都将产生深远影响. 教学时，应注意让学生初步认识“数形结合”的思想方法的作用.

2. 把握好教学要求

与大纲教材和以往的课标教材相比，本章对开平方、开立方运算的要求有所降低，《课标》规定“会用平方运算求百以内整数的平方根，会用立方运算求百以内整数（对应的负整数）的立方根”，教学时要注意把握好这个变化.

实数理论非常高深，初中生不可能充分理解，这就决定了教学时应充分利用学生已有的有理数的经验，不能过于追求严密的逻辑体系. 例如，对于实数运算法则和运算性质，本章是通过一个实数的简单运算的例题来学习的. 这样安排的目的是，通过类比有理数的运算，指出有理数的运算法则和运算性质等在实数范围内仍然成立，此处不宜深究. 关于实数的运算，在后面的“二次根式”一章中还要继续研究.

3. 发挥计算器的作用，加强估算能力的培养

使用计算器进行比较复杂的运算，可以使学习的重点更好地集中到理解数学的本质上来，估算是一种具有实际应用价值的运算能力. 提倡使用计算器进行复杂运算，加强估算，综合运用笔算、计算器和估算等方式培养学生的运算能力，是本章的一个教学要求. 为了达到这个教学目的，本章专门安排了利用计算器求数的平方根和立方根以及利用有理数估计无理数的大致范围等内容. 因此，教学中应结合具体内容，综合利用各种途径培养学生的运算能力.

4. 关注实数的文化价值

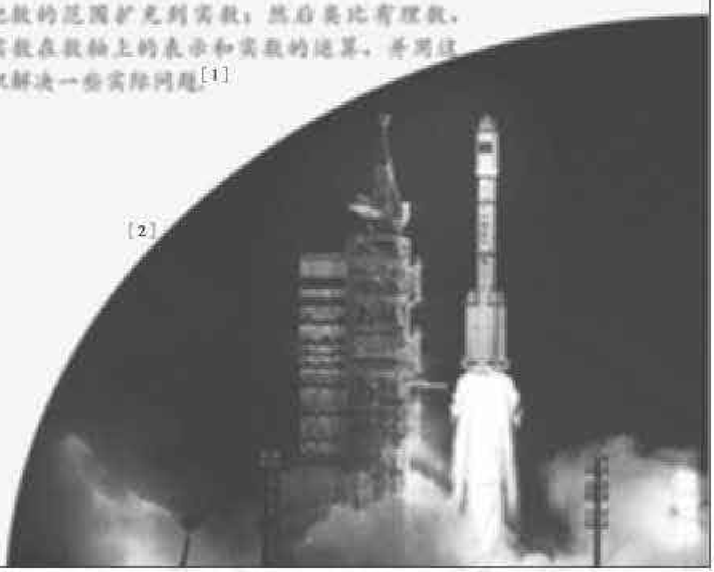
无理数的发现引发了数学史上的第一次危机，是数学发展史上的重要里程碑. 引入无理数经历了一个漫长而艰苦的过程，这个过程体现了人类为追求真理而不懈努力的精神. 因此，教学时可以结合无理数的发现和引入，挖掘数学知识的文化内涵，使学生感受丰富的数学文化，开阔他们的眼界，增长他们的见识.

第六章　实数

同学们，你们知道宇宙飞船离开地球进入地面附近轨道的速度在什么范围内吗？这时它的速度要大于第一宇宙速度 v_1（单位：m/s），而小于第二宇宙速度 v_2（单位：m/s）．v_1，v_2 的大小满足 $v_1^2=gR$，$v_2^2=2gR$，其中 g 是物理中的一个常数（重力加速度），$g\approx 9.8\ m/s^2$，R 是地球半径，$R\approx 6.4\times 10^6$ m．怎样求 v_1，v_2 呢？这就要用到平方根的概念．

随着对于数的认识的不断深入，人们发现，边长为 1 的正方形的对角线的长不是有理数，这就需要引入一种新的数——无理数．实际上，计算第一、第二宇宙速度等也要用到无理数．本章将首先学习平方根与立方根，在此基础上引入无理数，把数的范围扩充到实数；然后类比有理数，引入实数在数轴上的表示和实数的运算，并用这些知识解决一些实际问题．[1]

[2]



Ⅱ 教材分析

[1] 章引言与章前图相呼应，提出如何根据第一宇宙速度和第二宇宙速度的表达式，求出这两个速度的大小问题．这里的计算本质上是已知幂和乘方的指数求底数，即乘方的逆运算问题，这是学生以前没有见过的，教科书由此引出本章所要研究的主要内容以及大致的研究思路．

[2] 章前图是神舟七号宇宙飞船升空时的照片．数的范围不断扩大体现了人类在数的认识上的不断深入．就像“神舟”七号成功发射和安全着陆，标志着我国在攀登世界科技高峰的征程上又迈出具有重大历史意义的一步一样，实数的引入是人类对数的认识的又一次飞跃．

1. 本章的主要内容是平方根、立方根的概念和求法，实数的有关概念和运算．通过本章的学习，学生对数的认识就由有理数范围扩大到实数范围，本章之前的数学内容都是在有理数范围内讨论的，学习本章之后，将在实数范围内研究问题．虽然本章的内容不多，篇幅不大，但在中学数学中占有重要的地位，本章内容不仅是初中阶段学习二次根式、一元二次方程以及解三角形等知识的基础，也是学习高中数学内容的基础．

2. 本章的重点是算术平方根、平方根的概念和求法以及实数的概念，它们是理解立方根的概念和求法、实数的有关概念和运算的基础．

3. 本章的难点是平方根和实数的概念．学生对于正数开平方会有两个结果感到不习惯，容易将算术平方根和平方根混淆．对于负数没有平方根，学生接受起来也有一定的难度．实数的概念是一个构造性的定义，比较抽象，学生真正理解这个概念也有一定的困难．

6.1 平方根

问题 学校要举行美术作品比赛，小明想裁出一块面积为 25 dm² 的正方形画布，画上自己的得意之作参加比赛，这块正方形画布的边长应取多少？[1]

你一定会算出边长应取 5 dm．说一说，你是怎样算出来的？

因为 $5^2=25$，所以这个正方形画布的边长应取 5 dm．

填表．[2]

正方形的面积/dm²	1	9	16	36	$\frac{4}{25}$
正方形的边长/dm					

上面的问题，实际上是已知一个正数的平方，求这个正数的问题．

一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个正数 x 叫做 a 的**算术平方根**（arithmetic square root）．a 的算术平方根记为 $\sqrt{a}$，[3]读作"根号 a"，a 叫做**被开方数**（radicand）．

规定：**0 的算术平方根是 0**．

例 1 求下列各数的算术平方根：

(1) 100； (2) $\frac{49}{64}$； (3) 0.000 1．

解：(1) 因为 $10^2=100$，所以 100 的算术平方根是 10，即 $\sqrt{100}=10$；

(2) 因为 $\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$，所以 $\frac{49}{64}$ 的算术平方根是 $\frac{7}{8}$，即 $\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}$；

(3) 因为 $0.01^2=0.000\,1$，所以 0.000 1 的算术平方根是 0.01，即 $\sqrt{0.000\,1}=0.01$．[4]

从例 1 可以看出，被开方数越大，对应的算术平方根也越大．这个结论对所有正数都成立．

40 第六章 实数

[1] 这个问题抽象成数学问题就是已知正方形的面积求正方形的边长，这与学生已有经验——已知正方形的边长求它的面积的过程互逆，教学时可以让学生初步体会这种互逆的过程，为后面的学习作准备．

[2] 表格中应填写的数依次是 1，3，4，6，$\frac{2}{5}$．

[3] $\sqrt{a}$ 也可写成 $\sqrt[2]{a}$，读作"二次根号 a"．

因为 a 是正数 x 的平方，所以 a 是正数，即符号 $\sqrt{a}$ 中的被开方数 a 是正数，$\sqrt{a}$ 也是正数；0 的算术平方根是 0，可以记作 $\sqrt{0}$，即 $\sqrt{0}$．这样符号 $\sqrt{a}$ 中的被开方数 a 就可以是非负数，$\sqrt{a}$ 也是非负数．这一点可以根据学生的情况作适当解释，为后面研究平方根作准备．

[4] 例 1 中的解答展示了求数的算术平方根的思考过程．在开始阶段，宜让学生适当模仿，熟练后可以直接写出结果。

1. 本节主要介绍算术平方根、平方根的概念和求法．由于实际问题中所求的答案往往是正数的情况，教科书先介绍算术平方根，让学生看到算术平方根与实际的联系，在学习算术平方根的基础上再学习平方根．

2. 本节的开始设置了一个问题情境，把这个情境抽象成数学问题就是已知正方形的面积求正方形的边长，这是典型的求算术平方根的问题．由于学生熟悉平方运算，再结合正方形的面积与边长的关系，学生很容易解决这个问题．教学中，可以通过解决几个类似的问题（比如，填写教科书中的表格），揭示问题的本质：它们都是已知一个正数的平方，求这个正数的问题，进而从具体到抽象地给出算术平方根的概念，使学生理解算术平方根的意义．

3. 在算术平方根的概念之后给出了它的符号表示 $\sqrt{a}$，利用它可以方便地表示算术平方根（例如在解决本节第一个"探究"栏目中的问题

练习

1. 求下列各数的算术平方根：

(1) 0.002 5；　(2) 81；　(3) 3^2.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1}$；　(2) $\sqrt{\frac{9}{25}}$；　(3) $\sqrt{2^2}$.

探究

能否用两个面积为 1 dm^2 的小正方形拼成一个面积为 2 dm^2 的大正方形？

图 6.1-1

如图 6.1-1，把两个小正方形分别沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角形拼在一起，就得到一个面积为 2 dm^2 的大正方形．你知道这个大正方形的边长是多少吗？

设大正方形的边长为 x dm，则

$$x^2=2.$$

由算术平方根的意义可知

$$x=\sqrt{2}.$$

所以大正方形的边长是 $\sqrt{2}$ dm.

探究

$\sqrt{2}$ 有多大呢？

第六章　实数　41

练习答案

1. (1) 0.05；
   (2) 9；
   (3) 3.
2. (1) 1；
   (2) $\frac{3}{5}$；
   (3) 2.

[1] 小正方形的对角线的长即为大正方形的边长 $\sqrt{2}$，这也为在第 6.3 节中介绍用数轴上的点表示 $\sqrt{2}$ 作准备.

时，就可以用 $\sqrt{2}$ 表示面积为 2 的正方形的边长).

4. 教科书在例 1 之后从特殊到一般，给出结论：被开方数越大，对应的算术平方根也越大．如果学生有疑问，可以再举一些具体例子加以说明．在后面估计平方根大小的例习题中常用到这个结论.

5. 在本节的第一个“探究”栏目之前，重点介绍了算术平方根的概念，求一些数的算术平方根，所涉及的被开方数都可以表示成有理数的平方．在这个“探究”栏目中，要求学生通过动手操作，用两个面积为 1 的小正方形剪拼成一个面积为 2 的大正方形，进而求这个大正方形的边长．这也是一个已知正方形的面积求正方形的边长的问题，与前面问题不同的是正方形的面积不能表示成一个有理数的平方，因此它的边长只能用算术平方根的符号，即 $\sqrt{2}$ 表示出来．这是教科书引进的第一个带开平方符号的无理数（这时还没给出无理数的概念）.

[1] 教学中可以让学生根据使用的计算器品牌，参考使用说明书，学习使用计算器求算术平方根的方法.

[2] 可以和上面估计$\sqrt{2}$的大小呼应.

因为 $1^2=1$，$2^2=4$，

所以 $1<\sqrt{2}<2$；

因为 $1.4^2=1.96$，$1.5^2=2.25$，

所以 $1.4<\sqrt{2}<1.5$；

因为 $1.41^2=1.988\ 1$，$1.42^2=2.016\ 4$，

所以 $1.41<\sqrt{2}<1.42$；

因为 $1.414^2=1.999\ 396$，$1.415^2=2.002\ 225$，

所以 $1.414<\sqrt{2}<1.415$；

……

如此进行下去，可以得到$\sqrt{2}$的更精确的近似值. 事实上，$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\cdots$，它是一个无限不循环小数.

无限不循环小数是指小数位数无限，且小数部分不循环的小数. 你以前见过这种数吗？

实际上，许多正有理数的算术平方根（例如$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$等）都是无限不循环小数.

大多数计算器都有 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 键，用它可以求出一个正有理数的算术平方根（或其近似值）.

例 2 用计算器求下列各式的值：[1]

（1）$\sqrt{3\ 136}$；　　（2）$\sqrt{2}$[2]（精确到 0.001）.

解：（1）依次按键 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 3136 $\boxed{=}$，

显示：56.

$\therefore$ $\sqrt{3\ 136}=56$.

不同品牌的计算器，按键顺序有所不同.

（2）依次按键 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 2 $\boxed{=}$，

显示：1.414213562.

$\therefore$ $\sqrt{2}\approx1.414$.

计算器上显示的 1.414 213 562 是$\sqrt{2}$的近似值.

42 第六章 实数

6. 对于可以表示成有理数的平方的数，由于它们的算术平方根都是有理数，所以学生容易把握这些算术平方根的大小. 但是对于像 2 这样不能表示成一个有理数的平方的数，它的算术平方根$\sqrt{2}$到底有多大，对学生来讲是一个新问题. 教科书采用夹逼的方法，利用$\sqrt{2}$的一系列不足近似值和过剩近似值来估计它的大小，进而给出$\sqrt{2}$是无限不循环小数的结论. 并指出$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$也是无限不循环小数，为后面学习无理数概念打下基础. 在估计$\sqrt{2}$大小的过程中，实际上运用了例 1 之后给出的结论“被开方数越大，对应的算术平方根也越大”. 对于这种估计$\sqrt{2}$大小的方法，学生理解起来有一定困难，教学中要注意让学生充分经历这个估计的过程，重点是让学生对$\sqrt{2}$是无限不循环小数这个事实有所认识.

7. 对于无限不循环小数这个概念，教学时

下面我们来看引言中提出的问题.

由 $v_1^2=gR$，$v_2^2=2gR$，得 $v_1=\sqrt{gR}$，$v_2=\sqrt{2gR}$，其中 $g\approx 9.8$，$R\approx 6.4\times 10^6$.

用计算器求 v_1 和 v_2（用科学记数法把结果写成 $a\times 10^n$ 的形式，其中 a 保留小数点后一位），得

$$v_1\approx\sqrt{9.8\times 6.4\times 10^6}\approx 7.9\times 10^3,$$

$$v_2\approx\sqrt{2\times 9.8\times 6.4\times 10^6}\approx 1.1\times 10^4.$$

因此，第一宇宙速度 v_1 大约是 7.9×10^3 m/s，第二宇宙速度 v_2 大约是 1.1×10^4 m/s.

探究

（1）利用计算器计算下表中的算术平方根，并将计算结果填在表中，你发现了什么规律？你能说出其中的道理吗？[1]

…	$\sqrt{0.0625}$	$\sqrt{0.625}$	$\sqrt{6.25}$	$\sqrt{62.5}$	$\sqrt{625}$	$\sqrt{6\,250}$	$\sqrt{62\,500}$	…
…								…

（2）用计算器计算 $\sqrt{3}$（精确到 0.001），并利用你在（1）中发现的规律说出 $\sqrt{0.03}$，$\sqrt{300}$，$\sqrt{30\,000}$ 的近似值，你能根据 $\sqrt{3}$ 的值说出 $\sqrt{30}$ 是多少吗？[2]

在生活中，我们经常遇到估计一个数的大小的问题．请看下面的例子．

例 3 小丽想用一块面积为 400 cm^2 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 300 cm^2 的长方形纸片，使它的长宽之比为 3∶2．她不知能否裁得出来，正在发愁．小明见了说："别发愁，一定能用一块面积大的纸片裁出一块面积小的纸片．"[3] 你同意小明的说法吗？小丽能用这块纸片裁出符合要求的纸片吗？

第六章 实数 43

［1］表格中依次填 0.25，0.791，2.5，7.91，25，79.1，250．从运算结果可以发现，被开方数的小数点向右或向左移动 2 位，它的算术平方根的小数点就相应地向右或向左移动 1 位．

［2］由 $\sqrt{3}\approx 1.732$，得 $\sqrt{0.03}\approx 0.1732$，$\sqrt{300}\approx 17.32$，$\sqrt{30\,000}\approx 173.2$.

［3］学生一般会认为一定能用一块面积大的纸片裁出一块面积小的纸片，通过例 3 可以纠正学生的这种认识．

可以让学生适当回忆以前学过的数，通过比较，了解无限不循环小数的特征，为后面学习实数作铺垫．

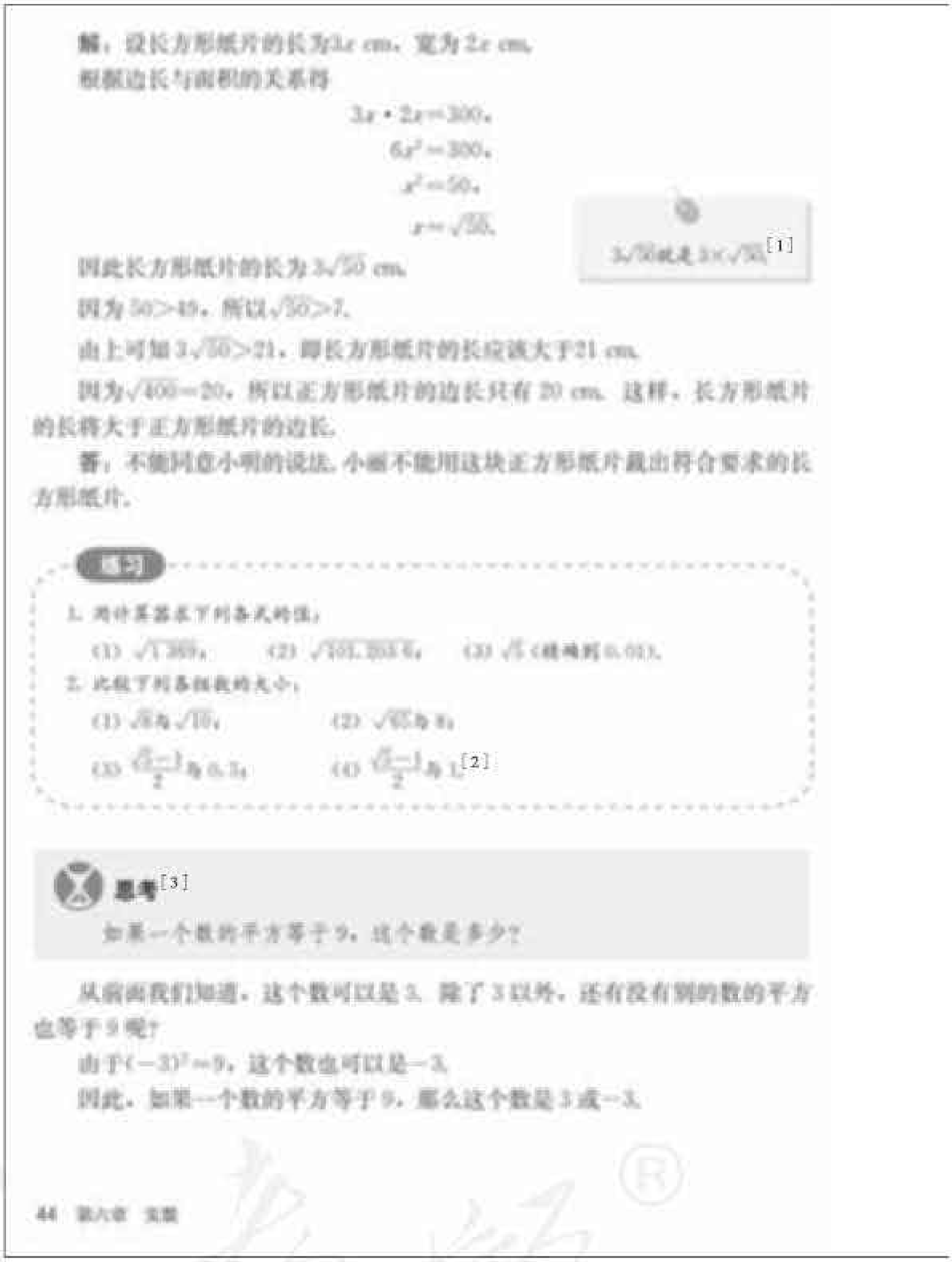
8．会使用计算器求平方根是本章的一个教学要求．例 2 是用计算器求算术平方根，第（1）小题的被开方数是一个完全平方数，第（2）小题的被开方数不是完全平方数．通过例 2，应使学生了解利用计算器可以求出任意一个正数的算术平方根．例 2 后面的"探究"栏目，研究的是用计算器求算术平方根并寻找规律的问题．教学时，应让学生自己完成．

9．会用有理数估计无理数的大小也是本章的教学要求．例 3 结合一个实际问题背景，给出了一种常见的用有理数估计无理数的方法，它利用与被开方数比较接近的完全平方数的算术平方根来估计这个被开方数的算术平方根的大小．通过例 3，也使学生感受到估算能力是生活中需要的一种能力．

[1] 教学中可向学生作适当解释，实数的运算在后面的“二次根式”一章还要学习.

[2] 第（3）（4）小题，要求学生借助已有经验估计$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的大致范围，这里不要求利用不等式进行严格证明.

[3] 从这个“思考”栏目开始，教科书转入对平方根的研究.



解：设长方形纸片的长为$3x$ cm，宽为$2x$ cm.

根据边长与面积的关系得

$$3x\cdot 2x=300,$$
$$6x^2=300,$$
$$x^2=50,$$
$$x=\sqrt{50}.$$

因此长方形纸片的长为$3\sqrt{50}$ cm.

$3\sqrt{50}$就是$3\times\sqrt{50}$.[1]

因为$50>49$，所以$\sqrt{50}>7$.

由上可知$3\sqrt{50}>21$，即长方形纸片的长应该大于21 cm.

因为$\sqrt{400}=20$，所以正方形纸片的边长只有20 cm. 这样，长方形纸片的长将大于正方形纸片的边长.

答：不能同意小明的说法. 小丽不能用这块正方形纸片裁出符合要求的长方形纸片.

练习

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1369}$； (2) $\sqrt{101.2036}$； (3) $\sqrt{5}$（精确到0.01）.

2. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{8}$与$\sqrt{10}$； (2) $\sqrt{65}$与8；

(3) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$与0.5； (4) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$与1.[2]

思考[3]

如果一个数的平方等于9，这个数是多少？

从前面我们知道，这个数可以是3. 除了3以外，还有没有别的数的平方也等于9呢？

由于$(-3)^2=9$，这个数也可以是-3.

因此，如果一个数的平方等于9，那么这个数是3或-3.

44 第六章 实数

练习答案

1. （1）37；
（2）10.06；
（3）2.24.

2. （1）$\sqrt{8}<\sqrt{10}$；
（2）由$65>64$，得$\sqrt{65}>8$；
（3）由$5>4$，得$\sqrt{5}>2$，从而$\frac{\sqrt{5}-1}{2}>0.5$；
（4）由$5<9$，得$\sqrt{5}<3$，从而$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$.

10. 教科书通过一个“思考”栏目提出问题“如果一个数的平方等于9，这个数是多少”，引出对平方根的探讨. 在这个“思考”栏目之前研究的是算术平方根，从这个栏目开始研究平方根的内容.

11. 平方根和算术平方根的概念是本章的重点内容，两者既有区别又有联系. 区别在于正数的平方根有两个，而它的算术平方根只有一个；联系在于正数的两个平方根互为相反数，其中正的那个平方根就是算术平方根. 因此，我们可以利用算术平方根来研究平方根. 此外，由于0只有一个平方根，它的平方根和算术平方根实际上是一回事. 鉴于这两个概念有上述联系，本章将它们放在同一节中，先学习算术平方根，再学习平方根. 教学时，应突出这两个概念之间的联系与区别，帮助学生更好地理解它们的本质.

12. 学生刚开始接触平方根时，可能有两点不太习惯，一是正数有两个平方根，即正数进行

填表：

[1]

x^2	1	16	36	49	$\frac{4}{25}$
x					

一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的**平方根**（square root）或**二次方根**[2]．这就是说，如果 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的平方根．

例如，3 和 -3 是 9 的平方根，简记为 ± 3[4] 是 9 的平方根．

几千年前，古埃及人就已经知道了平方根．[3]

求一个数 a 的平方根的运算，叫做**开平方**（extraction of square root）．

我们看到，± 3 的平方等于 9，9 的平方根是 ± 3，所以平方与开平方互为逆运算（图 6.1-2）．根据这种互逆关系，可以求一个数的平方根．

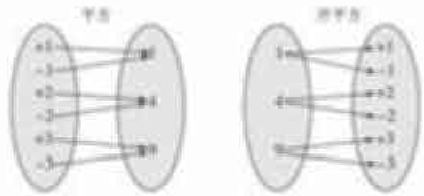


图 6.1-2

例 4 求下列各数的平方根：

(1) 100； (2) $\frac{9}{16}$； (3) 0.25．

解：(1) 因为 $(\pm 10)^2=100$，所以 100 的平方根是 ± 10；

(2) 因为 $\left(\pm\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，所以 $\frac{9}{16}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{4}$；

(3) 因为 $(\pm 0.5)^2=0.25$，所以 0.25 的平方根是 ± 0.5．

思考

正数的平方根有什么特点？0 的平方根是多少？负数有平方根吗？

我们发现，正数的平方根有两个，它们互为相反数，其中正的平方根就是这个数的算术平方根．

[1] 表格中依次填 ± 1，± 4，± 6，± 7，$\pm\frac{2}{5}$．

[2] 二次方根通常称为平方根．在研究有关 n 次方根的问题时，为使各次方根的说法协调起见，常采用二次方根的说法．

[3] 教学中可以引导学生通过查阅资料等方式，了解平方根产生、发展的过程．

[4] ± 3 表示 $+3$ 和 -3 两个数．这种写法学生不太习惯，在以后的教学中可以不断提及这一点．

开平方运算有两个结果，这与学生过去遇到的运算结果唯一的情况有所不同；二是负数没有平方根，即负数不能进行开平方运算，这种某个数不能进行某种运算的情况在有理数的加、减、乘、除、乘方五种运算中一般不会遇到（0 作除数的情况除外）．教学时，可以通过一些具体的例子说明这两点，并在本节以后的教学中继续强化．

13. 对于平方根的讨论，教科书也是先从一些具体的数入手，然后从具体到抽象地给出平方根的概念．对于平方与开平方互为逆运算，教科书用两个图描述了它们的运算过程，目的是突出它们的互逆过程，揭示开平方运算的本质．学习这部分内容时，可以和有理数的五种运算联系起来，强调加法与减法互为逆运算，乘法与除法互为逆运算，平方与开平方互为逆运算，使学生在六种运算的整体中认识开平方运算．这样在复习旧知识的基础上学习新知识，使学生的学习形成正迁移，符合学生的认知规律．

[1] 这里归纳出平方根的特征.

因为$0^2=0$，并且任何一个不为 0 的数的平方都不等于 0，所以 0 的平方根是 0.

正数的平方是正数，0 的平方是 0，负数的平方也是正数，即在我们所认识的数中，任何一个数的平方都不会是负数，所以负数没有平方根.

归纳

正数有两个平方根，它们互为相反数；

0 的平方根是 0；

负数没有平方根.[1]

我们知道，正数 a 的算术平方根可以用$\sqrt{a}$表示；正数 a 的负的平方根，可以用符号“$-\sqrt{a}$”表示．故正数 a 的平方根可以用符号“$\pm\sqrt{a}$”表示，读作“正、负根号 a”．例如，$\pm\sqrt{9}=\pm3$，$\pm\sqrt{25}=\pm5$.

符号$\sqrt{a}$只有当$a\geq0$时有意义，$a<0$时无意义．你知道为什么吗？

例 5 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{36}$；(2) $-\sqrt{0.81}$；(3) $\pm\sqrt{\dfrac{49}{9}}$.

解：(1) 因为$6^2=36$，所以$\sqrt{36}=6$；

(2) 因为$0.9^2=0.81$，所以$-\sqrt{0.81}=-0.9$；

(3) 因为$\left(\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{49}{9}$，所以$\pm\sqrt{\dfrac{49}{9}}=\pm\dfrac{7}{3}$.

知道一个数的算术平方根，就可以立即写出它的负的平方根．为什么？

练习

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 0 的平方根是 0；

(2) 1 的平方根是 1；

(3) -1 的平方根是 -1；

(4) 0.01 是 0.1 的一个平方根.

46 第六章 实数

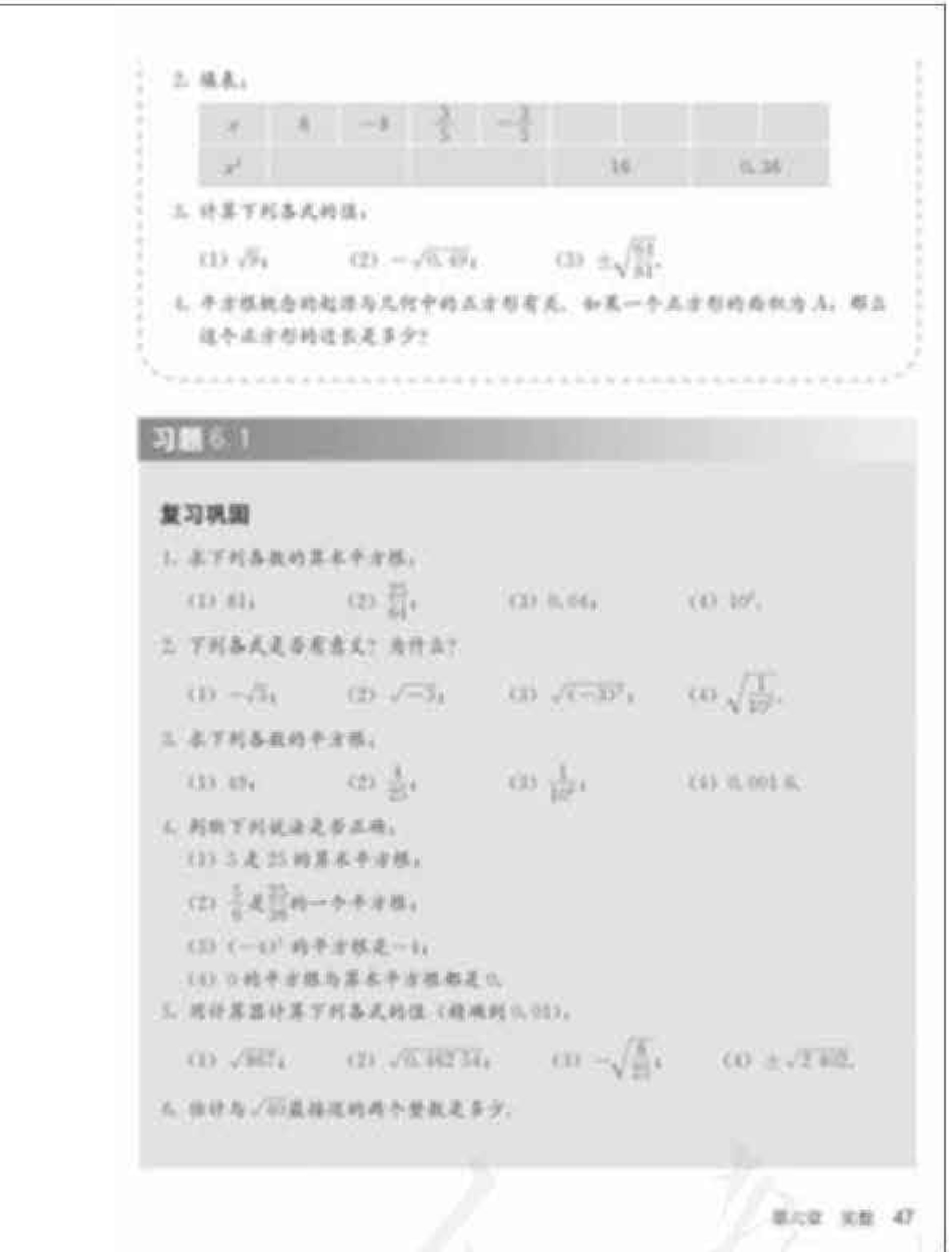
练习答案

1. (1) 正确；
   (2) 错误；
   (3) 错误；
   (4) 错误.

14. 例 4 是根据平方根的意义求几个正数的平方根，这个例题也为后面探讨平方根的特征作了准备.

15. 数的平方根的特征是本节的一个重要结论，教学中要注意调动学生思考的积极性，给学生留出足够的时间，在学生探索交流的基础上由他们自己得出“归纳”栏目中的结论.

16. 例 5 帮助学生进一步认识算术平方根与平方根之间的联系与区别.


2. 填表：

x	8	-8	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$				
x^2					16		0.36	

3. 计算下列各式的值：

(1) $\sqrt{9}$；　(2) $-\sqrt{0.49}$；　(3) $\pm\sqrt{\frac{64}{81}}$.

4. 平方根概念的起源与几何中的正方形有关．如果一个正方形的面积为 A，那么这个正方形的边长是多少？

习题 6.1

复习巩固

1. 求下列各数的算术平方根：

(1) 81；　(2) [illegible]；　(3) 0.04；　(4) [illegible].

2. 下列各式是否有意义？为什么？

(1) $-\sqrt{3}$；　(2) $\sqrt{-3}$；　(3) $\sqrt{(-3)^2}$；　(4) [illegible].

3. 求下列各数的平方根：

(1) 49；　(2) [illegible]；　(3) [illegible]；　(4) 0.001 6.

4. 判断下列说法是否正确：

(1) 5 是 25 的算术平方根；

(2) $\frac{5}{6}$ 是 $\frac{25}{36}$ 的一个平方根；

(3) $(-4)^2$ 的平方根是 -4；

(4) 0 的平方根与算术平方根都是 0.

5. 用计算器计算下列各式的值（精确到 0.01）：

(1) [illegible]；　(2) [illegible]；　(3) [illegible]；　(4) [illegible].

6. 估计与 [illegible] 最接近的两个整数是多少.

第六章　实数　47

练习答案

2. 表中的第 1 行依次填 4，-4，0.6，-0.6；第 2 行依次填 64，$\frac{9}{25}$.
3. (1) 3；
   (2) -0.7；
   (3) $\pm\frac{8}{9}$.
4. 面积为 A 的正方形的边长为 $\sqrt{A}$.

习题 6.1

1. “复习巩固”有 6 道题．前 4 道题是复习算术平方根和平方根的定义与求法的题目，第 5 题是用计算器求算术平方根和平方根的题目，第 6 题是复习用有理数估计无理数的题目．这 6 道题对本节所学的基本内容进行了复习．

2. “综合运用”有 4 道题，第 7 题涉及估计无理数大小的问题，通过表中的数据可以让学生看到：正数越大，它的算术平方根就越大．第 8 题实际上是解一元二次方程的问题，由于这些方程中不含一次式，可以根据平方根的意义求解．这类方程在以后的一元二次方程中还要学习．第 9，10 题是运用平方根解决实际问题的题目．

3. “拓广探索”的两道题是本节所学平方根内容的拓广．第 11 题要求学生通过一些具体的计算发现二次根式的两个性质．关于这两个性质，在以后的“二次根式”一章中还要学习，这

[1] $(\sqrt{4})^2$ 表示$\sqrt{4}\times\sqrt{4}$，教学时需要向学生解释这一点.

[2] 教学时可以让学生换几个数试一试.

综合运用

7. 根据下表回答下列问题：

x	16	16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.7	16.8	16.9	17
x^2	256	259.21	262.44	265.69	268.96	272.25	275.56	278.89	282.24	285.61	289

(1) 268.96的平方根是多少？

(2) $\sqrt{285.61}=$________.

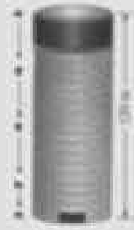
(3) $\sqrt{270}$在表中哪两个相邻的数之间？为什么？

8. 求下列各式中x的值：

(1) $x^2=25$；　　(2) $x^2-81=0$；

(3) $25x^2=36$.

9. 物体自由下落的高度h（单位：m）与下落时间t（单位：s）的关系是$h=4.9t^2$. 如图，有一个物体从120 m高的建筑物上自由落下，到达地面需要多长时间（结果取整数）？



（第9题）

10. 一个正方形的面积扩大为原来的4倍，它的边长变为原来的多少倍？面积扩大为原来的9倍呢？n倍呢？

拓广探索

11. (1) 求$\sqrt{2^2}$，$\sqrt{(-3)^2}$，$\sqrt{5^2}$，$\sqrt{(-6)^2}$，$\sqrt{7^2}$，$\sqrt{0^2}$的值. 对于任意数a，$\sqrt{a^2}$等于多少？

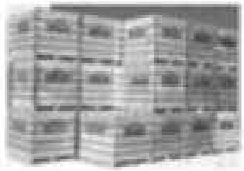
(2) 求$(\sqrt{4})^2$[1]，$(\sqrt{9})^2$，$(\sqrt{25})^2$，$(\sqrt{36})^2$，$(\sqrt{49})^2$，$(\sqrt{0})^2$的值. 对于任意非负数a，$(\sqrt{a})^2$等于多少？

12. 任意找一个正数，比如1 234，利用计算器对它开平方，再对得到的算术平方根开平方……如此进行下去，你有什么发现？[2]

48　第六章　实数

里只是让学生通过一些具体计算对它们有所感受，为以后的学习作准备. 第12题是要求利用计算器进行开平方运算，并通过分析运算结果发现规律的题目. 解这道题时，如果不使用计算器是很难完成的，使用计算器就会很容易发现规律，通过这道题可以使学生体会到使用计算器进行复杂运算的优越性.

6.2 立方根



问题 要制作一种容积为 $27\ m^3$ 的正方体形状的包装箱，这种包装箱的棱长应该是多少？

设这种包装箱的棱长为 x m，则

$$x^3=27.$$

这就是要求一个数，使它的立方等于 27.

因为 $3^3=27$，所以 $x=3$.

因此这种包装箱的棱长应为 3 m.

一般地，如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的**立方根**（cube root）或**三次方根**. 这就是说，如果 $x^3=a$，那么 x 叫做 a 的立方根.

在上面的问题中，由于 $3^3=27$，所以 3 是 27 的立方根.

求一个数的立方根的运算，叫做**开立方**（extraction of cube root）. 正如开平方与平方互为逆运算一样，开立方与立方也互为逆运算.[1] 我们可以根据这种关系求一个数的立方根.

探究

根据立方根的意义填空，你能发现正数、0 和负数的立方根各有什么特点吗？

因为 $2^3=8$，所以 8 的立方根是（ ）；

因为（ $)^3=0.064$，所以 0.064 的立方根是（ ）；

因为（ $)^3=0$，所以 0 的立方根是（ ）；

因为（ $)^3=-8$，所以 -8 的立方根是（ ）；

因为（ $)^3=-\frac{8}{27}$，所以 $-\frac{8}{27}$ 的立方根是（ ）.[2]

第六章 实数 49

[1] 对于立方与开立方互为逆运算的关系，教学中可以类比平方与开平方互为逆运算关系来学习.

[2] “探究”栏目中的问题是为后面归纳得出立方根的特征而设计的，其中的空白依次填 2；0.4，0.4；0，0；-2，-2；$-\frac{2}{3}$，$-\frac{2}{3}$.

1. 本节从内容上看与上一节平方根的内容基本平行，主要研究立方根的概念和求法；从知识的展开顺序上看也基本相同，本节也是先从具体的计算出发给出立方根的概念，然后讨论立方运算与开立方运算的互逆关系，研究立方根的特征，最后介绍使用计算器求立方根的方法. 因此，教学中可以类比平方根研究立方根，分析它们之间的联系与区别，这样把新旧知识联系起来，既有利于复习巩固平方根，又有利于理解和掌握立方根的内容.

2. 学习立方根的意义在于，一方面它有着广泛的应用，因为空间形体都是三维的，有关体积等的计算经常涉及开立方的问题；另一方面，就像平方根是偶次方根的特例一样，立方根是奇次方根的特例，它对进一步研究奇次方根的性质有典型的代表意义；同时，也能丰富学生对无理数的认识.

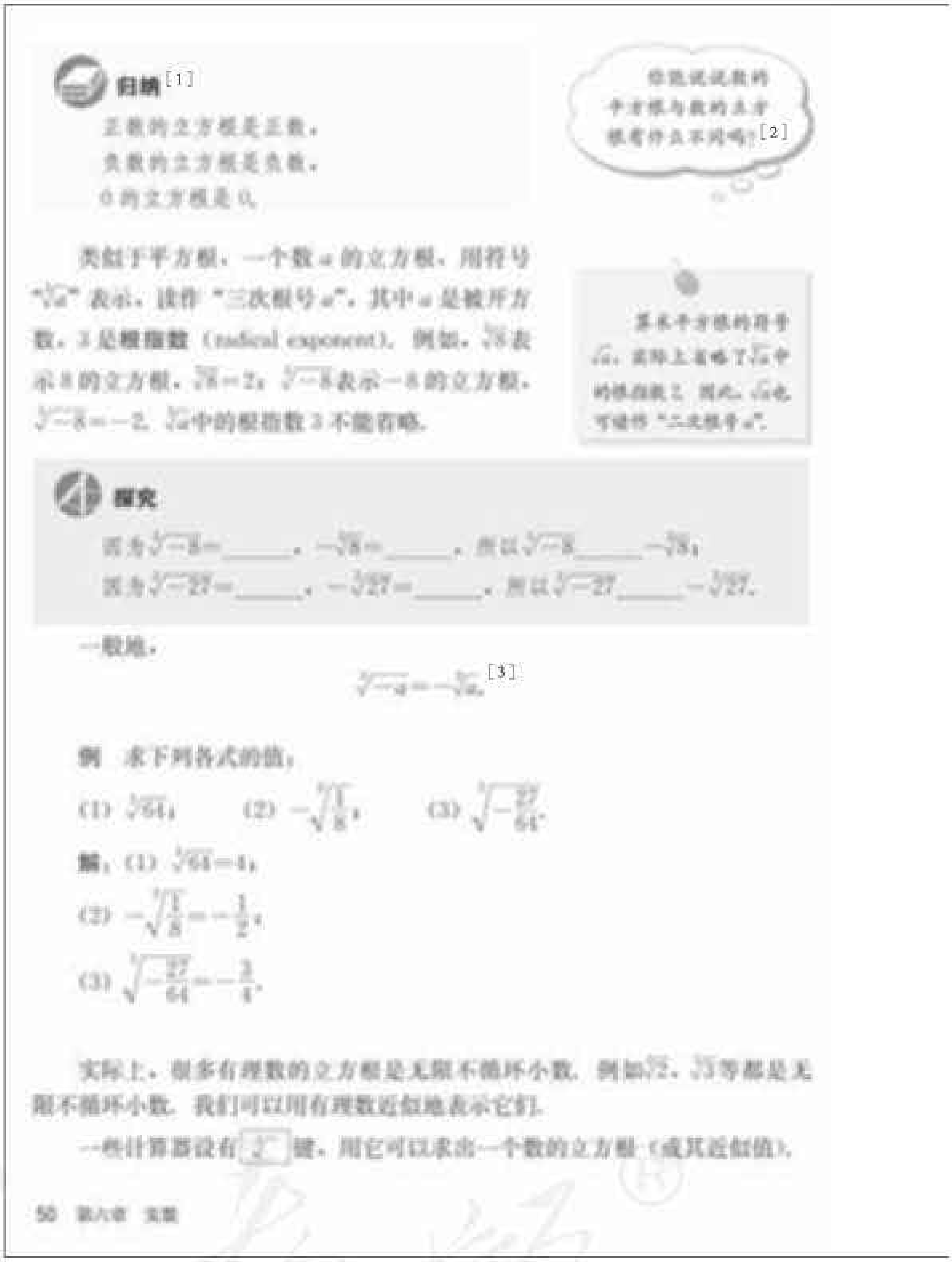
3. 本节首先结合一个实际背景，提出了如

[1] “归纳”栏目要求学生在前面探究活动的基础上，类比得出平方根的特征的过程，归纳出立方根的特征.

[2] 对照第 6.1 节中给出的平方根的特征，容易发现平方根与立方根的不同点.

[3] 这个关系式对于任意实数都成立，求负数的立方根，可以先求出这个负数的绝对值的立方根，然后再取它的相反数.

从函数观点看，这个关系式表明 $y=\sqrt[3]{x}$ 是奇函数.



归纳[1]

正数的立方根是正数，

负数的立方根是负数，

0 的立方根是 0.

你能说说数的平方根与数的立方根有什么不同吗？[2]

类似于平方根，一个数 a 的立方根，用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示，读作“三次根号 a”，其中 a 是被开方数，3 是**根指数**（radical exponent）．例如，$\sqrt[3]{8}$ 表示 8 的立方根，$\sqrt[3]{8}=2$；$\sqrt[3]{-8}$ 表示 -8 的立方根，$\sqrt[3]{-8}=-2$. $\sqrt[3]{a}$ 中的根指数 3 不能省略.

算术平方根的符号 $\sqrt{a}$，实际上省略了 $\sqrt[2]{a}$ 中的根指数 2．因此，$\sqrt{a}$ 也可读作“二次根号 a”.

探究

因为 $\sqrt[3]{-8}=$_____，$-\sqrt[3]{8}=$_____，所以 $\sqrt[3]{-8}$_____$-\sqrt[3]{8}$；

因为 $\sqrt[3]{-27}=$_____，$-\sqrt[3]{27}=$_____，所以 $\sqrt[3]{-27}$_____$-\sqrt[3]{27}$.

一般地，

$$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}.$$ [3]

例 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{64}$； (2) $-\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$； (3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$.

解：(1) $\sqrt[3]{64}=4$；

(2) $-\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$；

(3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=-\frac{3}{4}$.

实际上，很多有理数的立方根是无限不循环小数．例如 $\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$ 等都是无限不循环小数．我们可以用有理数近似地表示它们.

一些计算器设有 $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ 键，用它可以求出一个数的立方根（或其近似值）.

50 第六章 实数

何根据正方体的体积求它的棱长的问题，这是一个典型的求立方根的问题．教科书在解答这个问题的基础上，引出立方根、开立方等概念，利用立方与开立方互为逆运算的关系求立方根．对于上述内容，教学中要注意加强与平方根相关内容的类比．例如，通过解答本节开始提出的已知正方体的体积求棱长的问题，应该让学生认识到，这也是一个已知幂和指数求底数的问题，这一点与平方根的情况相同，所不同的是在平方根的情况下指数是 2，而现在的指数是 3，通过这样的方式类比着平方根的概念给出立方根的概念．再如，立方与开立方互为逆运算的关系也可以类比平方根的情况得出.

4．对于立方根的特征的探讨，教科书首先设置了一个“探究”栏目．在这个栏目中，要求学生根据立方根的意义，求出两个正数、两个负数和 0 的立方根，并分析它们的特点．在此基础上，教科书又通过一个“归纳”栏目，归纳出立

例如，用计算器求$\sqrt[3]{1\ 845}$，可以按照下面的步骤进行：

依次按键 $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ 1845 $\boxed{=}$，显示：12.26494081.

这样就得到$\sqrt[3]{1\ 845}$的近似值 12.264 940 81.

有些计算器需要用第二功能键求一个数的立方根．例如用这种计算器求$\sqrt[3]{1\ 845}$，可以依次按键 $\boxed{\text{2nd F}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ 1845 $\boxed{=}$，显示：12.26494081.

探究

用计算器计算…，$\sqrt[3]{0.000\ 216}$，$\sqrt[3]{0.216}$，$\sqrt[3]{216}$，$\sqrt[3]{216\ 000}$，…，你能发现什么规律？用计算器计算$\sqrt[3]{100}$（精确到 0.001），并利用你发现的规律求$\sqrt[3]{0.1}$，$\sqrt[3]{0.000\ 1}$，$\sqrt[3]{100\ 000}$的近似值.[1]

练习

1. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{1\ 000}$；　(2) $\sqrt[3]{-0.001}$；　(3) $\sqrt[3]{-1}$；　(4) $-\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$.

2. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{1\ 728}$；　(2) $\sqrt[3]{15\ 625}$；　(3) $\pm\sqrt[3]{2\ 197}$.

3. 比较 3，4，$\sqrt[3]{50}$的大小.

4. 立方根概念的起源与几何中的正方体有关．如果一个正方体的体积为 V，这个正方体的棱长为多少？

习题 6.2

复习巩固

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 2 是 8 的立方根；

(2) ± 4 是 64 的立方根；

(3) $-\frac{1}{3}$是$-\frac{1}{27}$的立方根；

(4) $(-4)^3$ 的立方根是-4.

第六章　实数　51

[1] 用计算器算得

$\sqrt[3]{0.000\ 216}=0.06$，

$\sqrt[3]{0.216}=0.6$，

$\sqrt[3]{216}=6$，

$\sqrt[3]{216\ 000}=60$.

可以发现被开方数的小数点向右或向左移动 3 位，它的立方根的小数点就相应地向右或向左移动 1 位.

由$\sqrt[3]{100}\approx 4.642$，得

$\sqrt[3]{0.000\ 1}\approx 0.046\ 42$，

$\sqrt[3]{0.1}\approx 0.464\ 2$，

$\sqrt[3]{100\ 000}\approx 46.42$.

练习答案

1. (1) 10；
   (2) -0.1；
   (3) -1；
   (3) $-\frac{4}{3}$.
2. (1) 12；
   (2) 25；
   (3) ± 13.
3. 由 $27<50<64$，得 $3<\sqrt[3]{50}<4$.
4. $\sqrt[3]{V}$.

方根的特征．由此可以看出，对于立方根的特征，教科书力求让学生通过充分的探索交流，由他们自己归纳得出相关结论．因此，教学中要注意留给学生足够的时间．另外，对于立方根的特征，教学中还要注意与平方根的特征进行对比，可以适当分析结论不同的原因（比如任何数的平方都是非负数等）.

5. 教科书在给出了立方根的符号表示之后，探讨了一个数的立方根与它的相反数的立方根之间的关系，由此可以将求负数的立方根的问题转化为求正数的立方根的问题．教学中要注意让学生体会这种转化的思想.

6. 对于很多有理数的立方根是无限不循环小数的结论，教科书是直接给出的，这样可以为后面学习无理数概念作铺垫.

7. 本节最后安排了使用计算器求立方根的内容，教学中可以类比平方根的相关内容进行.

习题 6.2

1. 本节立方根的习题和上一节平方根的习

［1］可以采用下面的方法进行比较：

因为 $9<2.5^3$，

所以 $\sqrt[3]{9}<2.5$.

［2］$(\sqrt[3]{8})^3$ 表示 $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{8}$，教学时可以对照平方根的情况进行解释.

［3］教学时可以让学生换几个数试一试.

通过这道题可以使学生体会使用计算器进行开立方运算的优越性.


2. 下列各式是否有意义？为什么？

(1) $-\sqrt[3]{3}$；(2) $\sqrt[3]{-3}$；(3) $\sqrt[3]{(-3)^2}$；(4) $\sqrt[3]{\frac{1}{10^3}}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt[3]{0.027}$；(2) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$；(3) $\sqrt[3]{1-\frac{37}{64}}$；(4) $\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}$.

4. 用计算器计算下列各式的值（精确到 0.001）：

(1) [illegible]；(2) [illegible]；(3) [illegible]；(4) [illegible].

综合运用

5. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^3=0.008$；(2) $x^3-3=\frac{3}{8}$；(3) $(x-1)^3=64$.

6. 一个正方体的体积扩大为原来的 8 倍，它的棱长变为原来的多少倍？扩大为原来的 27 倍呢？n 倍呢？

7. 如图，要生产一种容积为 50 L 的圆柱形热水器，使它的高等于底面直径的 2 倍，这种容器的底面直径应取多少分米（用计算器计算，结果保留小数点后一位）？

8. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt[3]{9}$ 与 2.5；[1]　(2) $\sqrt[3]{3}$ 与 $\frac{3}{2}$.

（第 7 题）

拓广探索

9. (1) 求 $\sqrt[3]{2^3}$，$\sqrt[3]{(-3)^3}$，$\sqrt[3]{(-5)^3}$，$\sqrt[3]{6^3}$，$\sqrt[3]{0^3}$ 的值. 对于任意数 a，$\sqrt[3]{a^3}$ 等于多少？

(2) 求 $(\sqrt[3]{8})^3$，[2] $(\sqrt[3]{-8})^3$，$(\sqrt[3]{27})^3$，$(\sqrt[3]{-27})^3$，$(\sqrt[3]{0})^3$ 的值. 对于任意数 a，$(\sqrt[3]{a})^3$ 等于多少？

10. 任意找一个数，比如 1 231，利用计算器对它开立方，再对得到的立方根开立方……如此进行下去，你有什么发现？[3]

52 第六章 实数

题在题目类型的设计上有很多相似之处. 教学时可以进行比较.

2. “复习巩固”中的 4 道题对本节所学的立方根的概念、开立方运算以及使用计算器求立方根等进行了复习.

3. 第 5～8 题是“综合运用”层次的题目. 第 5 题是解一元三次方程的问题，由于方程中只含有三次项和常数项，因此可以用求立方根的方法解决. 第 6，7 题是两道实际问题. 第 8 题是比较大小的问题，可以采用与平方根中比较大小类似的方法解决.

4. “拓广探索”第 9 题要求学生通过一些具体的计算发现规律. 第 10 题是要求利用计算器进行开立方运算，并通过分析运算结果发现规律的题目. 平方根的习题中也有这两种类型的题目，教学中可以适当进行比较.

6.3 实数

探究

我们知道有理数包括整数和分数，请把下列分数写成小数的形式，你有什么发现？

$$\frac{5}{2},\ -\frac{3}{5},\ \frac{27}{4},\ \frac{11}{9},\ \frac{9}{11}.$$

我们发现，上面的分数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式，即

$$\frac{5}{2}=2.5,\ -\frac{3}{5}=-0.6,\ \frac{27}{4}=6.75,\ \frac{11}{9}=1.\dot{2},\ \frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1}.$$

事实上，如果把整数看成小数点后是 0 的小数（例如，将 3 看成 3.0），那么任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式. 反过来，任何有限小数或无限循环小数也都是有理数.

通过前两节的学习，我们知道，很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数，无限不循环小数又叫做**无理数**（irrational number）. 例如，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$等都是无理数.[1] $\pi=3.141\ 592\ 65\cdots$也是无理数.[2]

像有理数一样，无理数也有正负之分. 例如，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，π是正无理数，$-\sqrt{2}$，$-\sqrt[3]{3}$，$-\pi$是负无理数.

有理数和无理数统称**实数**（real number）. 这样，我们学过的数可以这样分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{正有理数}\\0\\\text{负有理数}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

由于非 0 有理数和无理数都有正负之分，实数也有正负之分，所以实数还可以按大小分类如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\0\\\text{负实数}\end{cases}$$

第六章　实数　53

[1] 举例时，可以说明无理数的个数有无限多个.

[2] 这里可以点一下，π 这个无理数是不能用根号形式表示的，以避免学生将无理数和开方开不尽的数划等号.

1. 本节在数的开方的基础上引进无理数的概念，并将数的范围从有理数扩充到实数.

2. 从有理数到实数，是数的范围的一次重要扩充，对今后的数学学习有着重要意义. 在中学阶段，多数数学问题是在实数范围内研究的. 例如，函数的自变量和因变量都在实数范围内讨论，平面几何、立体几何中的几何量（长度、角度、面积、体积等）都用实数表示等.

3. 实数涉及的理论较深，其中有些问题即使放到高中也讲不清楚，因此一定要严格把握教学要求. 在本章只要学生了解无理数和实数的意义，了解有理数的运算律在实数范围内仍然成立等. 实数的知识贯穿于中学数学学习的始终，学生对实数的认识是逐步加深的. 例如，对于实数的运算，以后还要通过学习二次根式的运算来加深认识.

4. 本节从一个探究活动开始，活动中先回忆有理数的分类，即有理数包括整数与分数. 进

[1] 在第 6.1 节的第一个“探究”栏目中，用两个面积为 1 的小正方形剪拼成一个面积为 2 的大正方形，这个大正方形的边长就是小正方形的对角线长，因此以原点为圆心，以小正方形的对角线为半径画弧，与数轴的两个交点分别表示数 $-\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}$.

[2] 有理数与数轴上的点不是一一对应的，而实数与数轴上的点是一一对应的. 这一事实的重要意义在于：在实数范围内可以更好地建立起数与形的联系，并利用这种联系研究和解决问题.

[3] “思考”栏目中的空白依次填 $-\sqrt{2}$，π，0；$\sqrt{2}$，π，0.

我们知道，每个有理数都可以用数轴上的点来表示. 无理数是否也可以用数轴上的点表示出来呢？

探究

如图 6.3-1，直径为 1 个单位长度的圆从原点沿数轴向右滚动一周，圆上的一点由原点到达点 O'，点 O' 对应的数是多少？

图 6.3-1

从图中可以看出，OO' 的长是这个圆的周长 π，所以点 O' 对应的数是 π. 这样，无理数 π 可以用数轴上的点表示出来.

又如，以单位长度为边长画一个正方形（图 6.3-2），以原点为圆心，正方形的对角线长为半径画弧，与正半轴的交点就表示 $\sqrt{2}$，与负半轴的交点就表示 $-\sqrt{2}$.（为什么？）[1]

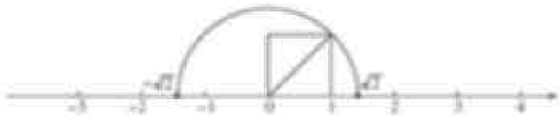


图 6.3-2

事实上，每一个无理数都可以用数轴上的一个点表示出来.

当数的范围从有理数扩充到实数后，实数与数轴上的点是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数.[2] 与规定有理数的大小一样，对于数轴上的任意两个点，右边的点表示的实数总比左边的点表示的实数大.

有理数关于相反数和绝对值的意义同样适合于实数.

思考

(1) $\sqrt{2}$ 的相反数是______，$-\pi$ 的相反数是______，0 的相反数是______；

(2) $|\sqrt{2}|=$____，$|-\pi|=$____，$|0|=$____.[3]

54 第六章 实数

而要求学生把几个具体的分数写成小数的形式，并分析这些小数的共同特征，规定“把整数看成小数点后是 0 的小数”. 最后从特殊到一般，给出有理数的特征：任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式. 对于反过来的结论，即任何有限小数和无限循环小数都是有理数，教科书是直接给出的，没作任何解释，这是考虑到无限循环小数可以化成分数这一事实，只有到大学学习无穷级数时才能证明. 这一点，教学时可以对学生说明.

5. 教科书将有理数与有限小数和无限循环小数等同起来以后，指出前两节学过的很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数，它们不同于有限小数和无限循环小数，是一类不同于有理数的数，由此引出无理数的概念. 无限不循环小数的概念在前面两节已经出现过，教学时可以强调无限不循环小数与有限小数、无限循环小数的区别，以使学生更好地理解有理数和无理数是两

数 a 的相反数是 $-a$，这里 a 表示任意一个实数.

一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0. 即设 a 表示一个实数，则

$$|a|=\begin{cases}a, & 当\ a>0\ 时；\\ 0, & 当\ a=0\ 时；\\ -a, & 当\ a<0\ 时.\end{cases}$$ [1]

例 1 (1) 分别写出 $-\sqrt{6}$，$\pi-3.14$ 的相反数；

(2) 指出 $-\sqrt{5}$，$1-\sqrt[3]{3}$ 分别是什么数的相反数；

(3) 求 $\sqrt[3]{-64}$ 的绝对值；

(4) 已知一个数的绝对值是 $\sqrt{3}$，求这个数.

解：(1) 因为

$$-(-\sqrt{6})=\sqrt{6},\quad -(\pi-3.14)=3.14-\pi,$$

所以，$-\sqrt{6}$，$\pi-3.14$ 的相反数分别为 $\sqrt{6}$，$3.14-\pi$.

(2) 因为

$$-(\sqrt{5})=-\sqrt{5},\quad -(\sqrt[3]{3}-1)=1-\sqrt[3]{3},$$

所以，$-\sqrt{5}$，$1-\sqrt[3]{3}$ 分别是 $\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{3}-1$ 的相反数.

(3) 因为

$$\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4,$$

所以

$$|\sqrt[3]{-64}|=|-4|=4.$$

(4) 因为

$$|\sqrt{3}|=\sqrt{3},\quad |-\sqrt{3}|=\sqrt{3},$$

所以绝对值为 $\sqrt{3}$ 的数是 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$.

实数之间不仅可以进行加、减、乘、除（除数不为 0）、乘方运算，而且正数及 0 可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立方运算. 在进行实数的运算时，有理数的运算法则及运算性质等同样适用.

随着数的进一步扩充，负数将可以进行开方运算，这是我们今后要学的.

第六章 实数 55

[1] 教学中，对含字母的绝对值问题不宜展开讨论.

类不同的数.

6. 引进无理数以后，学生对数的认识就扩大到了实数范围，就可以在实数范围对学过的数进行分类整理. 对于实数的分类，教科书给出两种，一种是按有理数、无理数分类，一种是按正数、0、负数分类. 教学时可以顺便提及，分类可以有不同的方法，但要按同一标准，不重不漏.

7. 有理数可以用数轴上的点表示出来，引入无理数后，自然地想到无理数是否也可以用数轴上的点表示的问题. 教科书通过一些探究活动，在数轴上找到了表示无理数 π 和 $\pm\sqrt{2}$ 的点，让学生看到无理数也可以用数轴上的点来表示，这对学生了解无理数的几何意义，认识无理数的存在性有一定帮助. 在此基础上，直接告诉学生，每个无理数都可以用数轴上的点表示；当数的范围从有理数扩充到实数后，实数与数轴上的点是一一对应的.

8. 与有理数一样，也可以规定实数的相反

例 2 计算下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}$； (2) $3\sqrt{3}+2\sqrt{3}$.

解：(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}$

$=\sqrt{3}+(\sqrt{2}-\sqrt{2})$ （加法结合律）

$=\sqrt{3}+0=\sqrt{3}$；

(2) $3\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

$=(3+2)\sqrt{3}$ （分配律）

$=5\sqrt{3}$.

在实数运算中，当遇到无理数并且需要求出结果的近似值时，可以按照所要求的精确度用相应的近似有限小数去代替无理数，再进行计算.

例 3 计算（结果保留小数点后两位）：

(1) $\sqrt{5}+\pi$； (2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$.

解：(1) $\sqrt{5}+\pi\approx 2.236+3.142\approx 5.38$；

(2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\approx 1.732\times 1.414\approx 2.45$.

练习

1. 请将图中数轴上标有字母的各点与下列实数对应起来：

$\sqrt{2}$，-1.5，$\sqrt{5}$，π，3.

（第 1 题）

2. 求下列各数的相反数与绝对值：

2.5，$-\sqrt{7}$，$-\frac{\pi}{2}$，$\sqrt{3}-2$，0.

3. 求下列各式中的实数 x：

(1) $|x|=\frac{2}{3}$； (2) $|x|=0$；

(3) $|x|=\sqrt{10}$； (4) $|x|=\pi$.

4. 计算：

(1) $2\sqrt{2}-3\sqrt{2}$； (2) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+2\sqrt{2}$.

56 第六章 实数

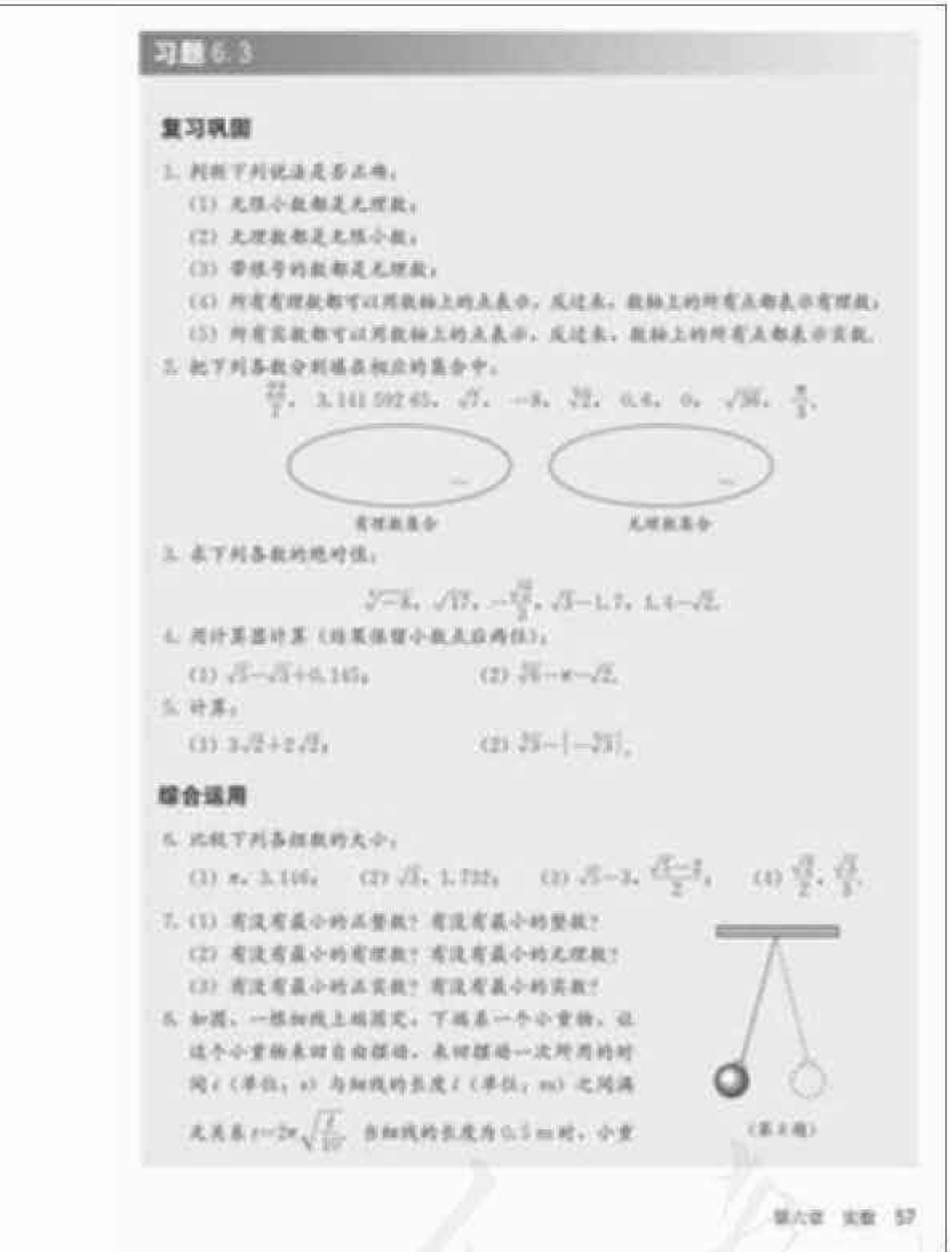
练习答案

1. 点 A，B，C，D，E 分别对应数 -1.5，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，3，π.
2. 相反数分别为：-2.5，$\sqrt{7}$，$\frac{\pi}{2}$，$2-\sqrt{3}$，0；绝对值分别为：2.5，$\sqrt{7}$，$\frac{\pi}{2}$，$2-\sqrt{3}$，0.
3. (1) $\pm\frac{2}{3}$；
   (2) 0；
   (3) $\pm\sqrt{10}$；
   (4) $\pm\pi$.
4. (1) $-\sqrt{2}$；
   (2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

数和绝对值. 教学时，先从复习有理数的相反数和绝对值入手，然后指出可以用类似的方式规定实数的相反数和绝对值，并通过例、习题加以巩固，以加深对它们的认识.

9. 对于实数的运算，可强调两点：一是有理数的运算律和运算性质在实数范围内仍然成立；二是涉及无理数的近似计算，可以取近似值，转化为有理数进行计算. 本节例 2 中的两道小题是关于二次根式的加减运算. 安排例 2 的目的是想通过具体例子说明，有理数的运算律和运算性质同样适合于实数的运算. 关于二次根式的运算以后还要进一步学习，因此，教学时要注意本节的教学要求.

10. 当数的范围从有理数扩充到实数后，有理数的一些概念和运算（包括运算律和运算性质）可以推广到实数范围内，教学时要注意突出这些在数的扩充中体现出来的一致性. 同时，教学中也要注意，随着数的范围的不断扩大，在扩



大的数的范围内，可以解决更多的问题．例如，在实数范围内可以对正数和0进行开平方运算，在复数范围内可以对负数进行开平方运算等．

习题6.3

1．“复习巩固”中的5道题分别对无理数的概念、实数的概念和运算等进行了复习．其中第2题涉及集合的概念，教学中不必对这个概念作过多的解释，只要学生能体会集合的意思，能将无理数和有理数填在相应的圆圈中即可．

2．“综合运用”的第6题是比较数的大小的问题，教学中可以引导学生运用多种方法，比如，可以先求出无理数的近似值，即用有理数近似代替无理数，再比较两个有理数的大小等．第7题通过几个设问，让学生对学过的数进行综合复习．第8题是一道应用题，解题过程中涉及实数的乘法运算．

3．“拓广探索”的第9题，要求学生依据有

细绳来回摆动一次所用的时间是多少（结果保留小数点后一位）？

拓广探索

9. 已知数 0.101 001 000 100 001…，它的特点是：从左向右看，相邻的两个 1 之间依次多一个 0. 这个数是有理数还是无理数？为什么？

阅读与思考

为什么说$\sqrt{2}$不是有理数

公元前6世纪古希腊的毕达哥拉斯学派有一种观点，即“万物皆数”，一切量都可以用整数或整数的比（分数）表示. 后来，当这一学派中的希帕索斯（Hippasus）发现边长为 1 的正方形的对角线的长度不能用整数或整数的比表示，即$\sqrt{2}$不是有理数时，毕达哥拉斯学派感到惊恐不安. 由此，引发了第一次数学危机.

随着人们认识的不断深入，毕达哥拉斯学派逐渐承认$\sqrt{2}$不是有理数，并给出了证明. 下面给出欧几里得《原本》中的证明方法.

毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580—约前 500），古希腊数学家，毕达哥拉斯学派的主要代表人物.

假设$\sqrt{2}$是有理数，那么存在两个互质的正整数 p，q，使得

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

于是
$$p=\sqrt{2}q,$$
两边平方得
$$p^2=2q^2.$$

由 $2q^2$ 是偶数，可得 p^2 是偶数. 而只有偶数的平方才是偶数，所以 p 也是偶数.

因此可设 $p=2s$，代入上式，得 $4s^2=2q^2$，即

$$q^2=2s^2.$$

所以 q 也是偶数. 这样，p 和 q 都是偶数，不互质，这与假设 p，q 互质矛盾.

这个矛盾说明，$\sqrt{2}$不能写成分数的形式，即$\sqrt{2}$不是有理数. 实际上，$\sqrt{2}$是无限不循环小数.

用类似的方法，你能证明$\sqrt{3}$不是有理数吗？

事实上，无理数只是一种命名，并非“无理”，而是实际存在的不能写成分数形式的数，它和有理数一样，都是现实世界中客观存在的量的反映.

58　第六章　实数

理数、无理数的特征，根据这个数的特点判断出它是一个无限不循环小数，进而确定它是无理数.

阅读与思考

在这个问题的介绍中，主要运用了反证法的思想，即由$\sqrt{2}$可以写成分数形式推出矛盾，从而说明$\sqrt{2}$不是有理数.

教学时，可以结合这个“阅读与思考”，引导学生查阅有关资料，了解无理数的发现过程，挖掘数学知识的文化内涵.

数学活动

活动1

1. 制作一个表面积为 12 dm^2 的正方体纸盒.

(1) 这个正方体的棱长是多少?[1]

(2) 做出这个正方体纸盒.[2]

2. 制作一个底面半径为 10 cm，高为 20 cm 的圆柱形纸盒.

(1) 圆柱的侧面展开图是什么形状?[3]

(2) 这个侧面展开图各边的长分别是多少?[4]

(3) 做出这个圆柱形纸盒.

活动2

据说，我国著名数学家华罗庚在一次出国访问途中，看到飞机上邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题：一个数是 59 319，希望求它的立方根.[5]华罗庚脱口而出：39. 邻座的乘客十分惊奇，忙问计算的奥妙.

华罗庚（1910—1985）

你知道华罗庚是怎样迅速准确地计算出来的吗? 请按照下面的问题试一试.

(1) 由 $10^3=1\ 000$，$100^3=1\ 000\ 000$，你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 是几位数吗?[6]

(2) 由 59 319 的个位上的数是 9，你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 的个位上的数是几吗?[7]

(3) 如果划去 59 319 后面的三位 319 得到数 59，而 $3^3=27$，$4^3=64$，由此你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 的十位上的数是几吗?[8]

已知 19 683，110 592 都是整数的立方，按照上述方法，你能确定它们的立方根吗?[9]

第六章 实数 59

[1] 这个正方体的棱长是$\sqrt{2}$ dm.

[2] 先作出长度为$\sqrt{2}$的线段，然后再做出棱长为$\sqrt{2}$的正方体.

[3] 圆柱的侧面展开图是长方形.

[4] 侧面展开图的长为 20π cm，宽为 20 cm.

[5] 这道智力题实际上默认 59 319 是一个完全立方数.

[6] 由 $10^3<59\ 319<100^3$，可得 $10<\sqrt[3]{59\ 319}<100$，故 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 是两位数.

[7] 个位上的数是 9.

[8] 十位上的数是 3.

[9] 它们的立方根分别为 27，48.

1. 活动 1 要求制作正方体和圆柱形纸盒. 在制作过程中需要作出长为$\sqrt{2}$ dm 和 20π cm 的边，这要用到在数轴上作出表示无理数的点等知识.

2. 如果一个整数是另一个整数的完全立方，那么我们就称这个数为完全立方数，也叫做立方数. 活动 2 是求一些完全立方数的立方根，华罗庚先生给出了求 59 319 的立方根的一种简捷的解法，教学中还可以引导学生在理解这种解题思路的基础上想出其他方法. 结合活动 2，可以让学生查找资料，了解有关华罗庚先生的事迹.

小　结

一、本章知识结构图

二、回顾与思考

本章我们学习了平方根和立方根，并通过开平方、开立方运算认识了一些不同于有理数的数，在此基础上引入无理数，使数的范围由有理数扩充到实数。随着数的扩充，数的运算也有了新的发展，在实数范围内，不仅能进行加、减、乘、除四则运算，而且对0和任意正数能进行开平方运算，对任意实数能进行开立方运算。

本章中，我们通过类比有理数及其运算，引入了实数的相反数、绝对值等概念，以及实数的运算和运算律。学习时应注意体会类比这种研究方法的作用。实数与数轴上的点是一一对应的，因此，我们可以利用数轴将“数”与“形”联系起来，这对理解实数的有关概念及运算很有帮助。

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧。

1. 数的概念是怎样从正整数逐步发展到实数的？随着数的不断扩充，数的运算有什么发展？加法与乘法的运算律始终保持不变吗？

2. 回顾平方根与立方根的概念，乘方运算与开方运算有什么关系？

3. 无理数和有理数的区别是什么？

4. 实数由哪些数组成？实数与数轴上的点有什么关系？

60　第六章　实数

1. 本章知识结构图展示了本章知识的内在联系：由于乘方与开方互为逆运算，所以开平方、开立方运算分别以平方、立方运算为基础，平方根和立方根的概念离不开平方和立方的概念．无理数的引入使得数的范围由有理数扩大到了实数．

2. 在“回顾与思考”中，教科书总结了本章的主要内容、本章知识的展开脉络，并总结出本章中最重要的两种数学思想方法：类比、数形结合．最后，通过一系列问题引导学生梳理本章的主要内容，突出强调了两点：一是有关概念、运算的联系与区别，例如平方根与立方根，乘方运算与开方运算，有理数与无理数等；二是数的范围由有理数扩大到实数后，有关概念和运算的变化情况，例如随着数的不断扩充，数的运算有什么发展，实数与数轴上的点有怎样的关系等．


复习题 6

复习巩固

1. 求下列各数的算术平方根及平方根：

(1) 64；　　(2) 0.25；　　(3) $\frac{4}{9}$；

(4) 2^4；　　(5) $\left(-\frac{5}{13}\right)^2$；　　(6) 10^6.

2. 求下列各数的立方根：

(1) $-\frac{1}{64}$；　　(2) -0.008；

(3) $\frac{27}{8}$；　　(4) 2^6.

3. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt{\frac{[illegible]}{[illegible]}}$；　　(2) $\sqrt[3]{-1}$；

(3) $\sqrt{0.16}$；　　(4) $\sqrt[3]{0.027}$.

4. 下列各数分别界于哪两个相邻的整数之间？

(1) $\sqrt{23}$；　　(2) $\sqrt{58}$；　　(3) $\sqrt[3]{95}$.

5. 用计算器求下列各式的值（精确到 0.001）：

(1) $-\sqrt{66.3}$；　　(2) $\sqrt[3]{21.43}$；

(3) $\sqrt{55\ 225}$；　　(4) $\sqrt[3]{34\ 012\ 224}$.

6. 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的平方根及立方根中，哪些是有理数？哪些是无理数？

7. 比较下列各组数的大小：

(1) $|-1.5|$，$1\frac{1}{2}$；　　(2) 1.414，$\sqrt{2}$；

(3) $\frac{2}{3}$，0.666 67.

8. 计算下列各式的值：[1]

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)$；　　(2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

综合运用

9. 已知 $(x-1)^2=4$，求 x 的值.

10. 已知 $|x|<2\pi$，x 是整数，求 x 的值，并在数轴上表示求得的数.

第六章　实数　61

[1] 这里让学生体会实数的运算律.

复习题 6

1. “复习巩固”中的第 1，2，3 题对算术平方根、平方根和立方根进行了复习. 通过复习，使学生比较熟悉百以内整数的平方根和百以内整数（对应的负整数）的立方根. 第 4 题是用两个相邻的整数估算一些数的平方根、立方根的大小. 第 5 题是利用计算器计算一些数的平方根、立方根的值或近似值. 第 6 题让学生对 0～10 这 11 个整数的平方根和立方根中哪些是有理数哪些是无理数作一个梳理. 第 7 题通过比较大小，进一步加强学生对无限循环小数和无限不循环小数的认识. 第 8 题是利用运算律进行实数的运算，其中用到二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2=a(a>0)$. 这条性质在习题 6.1 “拓广探索” 的第 11 题中遇到过，以后在二次根式的学习中还要专门研究，这里按照题目中给出的具体数字，根据平方根的意义直接计算即可，不必点出这个性质.

［1］这是一个经验公式，注意其中 h 的单位是 m，而 s 的单位是 km.

11. 天气晴朗时，一个人能看到大海的最远距离 s（单位：km）可用公式 $s^2=16.88h$ 来估计，其中 h（单位：m）是眼睛离海平面的高度．如果一个人站在岸边观察，当眼睛离海平面的高度是 1.5 m 时，能看到多远（精确到 0.01 km）？如果登上一个观望台，当眼睛离海平面的高度是 35 m 时，能看到多远（精确到 0.01 km）？[1]

12. 一个圆与一个正方形的面积都是 $2\pi\ \text{cm}^2$，它们中哪一个的周长比较大？你能从中得到什么启示？

13. 要生产一种容积为 500 L 的球形容器，这种球形容器的半径是多少分米（结果保留小数点后两位）？（球的体积公式是 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中 R 是球的半径．）

拓广探索

14. 填空：

(1) 一个数的平方等于它本身，这个数是_____；一个数的平方根等于它本身，这个数是_____；一个数的算术平方根等于它本身，这个数是_____．

(2) 一个数的立方等于它本身，这个数是_____；一个数的立方根等于它本身，这个数是_____．

2. “综合运用”中的第 9 题是一道解一元二次方程的题目，由于方程的左边是一个完全平方，右边是一个常数，故可用求平方根的方法解决．第 10 题涉及绝对值不等式，可借助数轴数形结合地加以解决．第 11 题是一道有趣的实际问题，解决这个问题要用到开平方运算．第 12 题是探讨面积相等的圆和正方形，它们的周长哪一个大的问题，要用到实数比较大小的方法．第 13 题是已知球的体积求它的半径问题，解这道题要用到开立方运算．

3. “拓广探索”第 14 题以填空的形式探究几个特殊的数（如 0，1 等）的平方根和立方根，解答这道题需要对平方根和立方根的概念有一定的理解．

Ⅲ 习题解答

习题 6.1

1. (1) 9；(2) $\frac{5}{8}$；(3) 0.2；(4) 10.

2. (1) 有意义；(2) 无意义；(3) 有意义；(4) 有意义.

3. (1) ±7；(2) $\pm\frac{2}{5}$；(3) $\pm\frac{1}{10^3}$；(4) ±0.04.

4. (1) 正确；(2) 正确；(3) 错误；(4) 正确.

5. (1) 29.44；(2) 0.68；(3) -0.57；(4) ±49.01.

6. 由 $36<40<49$，得 $6<\sqrt{40}<7$. 故与 $\sqrt{40}$ 最接近的两个整数是 6，7.

7. (1) ±16.4；(2) 16.9；(3) 在 16.4 与 16.5 之间. 因为 $16.4^2<270<16.5^2$，所以 $16.4<\sqrt{270}<16.5$.

8. (1) ±5；(2) ±9；(3) $\pm\frac{6}{5}$.

9. $t=\sqrt{\frac{1\,200}{49}}\approx5(\mathrm{s})$.

10. 2 倍，3 倍，$\sqrt{n}$ 倍.

11. (1) 2，3，5，6，7，0；$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a, & a\geqslant0;\\-a, & a<0.\end{cases}$

    (2) 4，9，25，36，49，0；对于任意非负数 a，$(\sqrt{a})^2=a$.

12. 对于 1，每次开平方所得的算术平方根均为 1；对于小于 1 的正数，每次开平方所得的算术平方根逐渐增大，并趋近于 1；对于大于 1 的正数，每次开平方所得的算术平方根逐渐减小，并趋近于 1.

习题 6.2

1. (1) 正确；(2) 错误；(3) 正确；(4) 正确.

2. (1) 有意义；(2) 有意义；(3) 有意义；(4) 有意义. 因为正数和负数都有立方根.

3. (1) -0.3；(2) $-\frac{2}{3}$；(3) $\frac{3}{4}$；(4) $-\frac{1}{2}$.

4. (1) 9.539；(2) 0.753；(3) -0.684；(4) ±13.392.

5. (1) 0.2；(2) $\frac{3}{2}$；(3) 5.

6. 2 倍，3 倍，$\sqrt[3]{n}$ 倍.

7. 3.2 dm.

8. (1) $\sqrt[3]{9}<2.5$；(2) $\sqrt[3]{3}<\frac{3}{2}$.

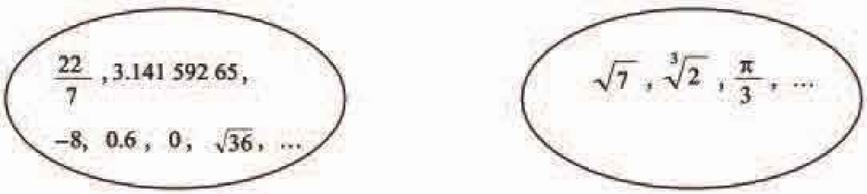
9. (1) 2，-2，-3，4，0；a. (2) 8，-8，27，-27，0；a.

10. -1，0，1 不断开立方的结果仍为它们本身；小于-1 的数不断开立方的结果逐渐增大，并趋近于-1；大于-1 的负数不断开立方的结果逐渐减小，并趋近于-1；小于 1 的正数不断开立方的结果逐渐增大，并趋近于 1；大于 1 的正数不断开立方的结果逐渐减小，并趋近于 1.

习题 6.3

1. (1) 错误；(2) 正确；(3) 错误；(4) 错误；(5) 正确.

2.



有理数集合　　　　无理数集合

3. 2，$\sqrt{17}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\sqrt{3}-1.7$，$\sqrt{2}-1.4$.

4. (1) 0.65；(2) -2.74.

5. (1) $5\sqrt{2}$；(2) 0.

6. (1) $\pi<3.141\ 6$；(2) $\sqrt{3}>1.732$；(3) $\sqrt{5}-3<\frac{\sqrt{5}-2}{2}$；(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. (1) 有，没有；(2) 没有，没有；(3) 没有，没有.

8. 1.4 s.

9. 无理数. 因为这个数是无限不循环小数，所以它是无理数.

复习题 6

1. (1) 8，± 8；(2) 0.5，± 0.5；(3) $\frac{2}{3}$，$\pm\frac{2}{3}$；

(4) 125，± 125；(5) $\frac{4}{13}$，$\pm\frac{4}{13}$；(6) 100，± 100.

2. (1) $-\frac{1}{4}$；(2) -0.2；(3) $\frac{3}{2}$；(4) 9.

3. (1) $-\frac{7}{5}$；(2) -1；(3) 0.4；(4) 0.3.

4. (1) 5 和 6；(2) 6 和 7；(3) 4 和 5.

5. (1) -9.711；(2) 0.755；(3) 235.000；(4) 324.000.

6. $\sqrt{0}$，$\sqrt[3]{0}$，$\pm\sqrt{1}$，$\sqrt[3]{1}$，$\pm\sqrt{4}$，$\sqrt[3]{8}$，$\pm\sqrt{9}$是有理数；

$\pm\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{2}$，$\pm\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[3]{4}$，$\pm\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{5}$，$\pm\sqrt{6}$，$\sqrt[3]{6}$，$\pm\sqrt{7}$，$\sqrt[3]{7}$，$\pm\sqrt{8}$，$\sqrt[3]{9}$，$\pm\sqrt{10}$，$\sqrt[3]{10}$是无理数.

7. (1) $|-1.5|<1.\dot{5}$；(2) $1.414<\sqrt{2}$；(3) $\frac{2}{3}<0.666\ 67$.

8. (1) $2+2\sqrt{2}$；(2) 4.
9. -1 或 3.
10. 0，±1，±2，±3，±4，±5，±6.
11. 约 5.03 km，约 24.31 km.
12. 正方形的周长较大. 在面积相等的圆和正方形中，圆的周长小于正方形的周长.
13. 4.92 dm.
14. (1) 0 或 1，0，0 或 1；(2) 0 或 ±1，0 或 ±1.

Ⅳ 教学设计案例

6.1 平方根（第 3 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

平方根的概念，平方根的特征.

2. 内容解析

一个正数有两个平方根，它们互为相反数，其中正的平方根就是前两节课研究的算术平方根，即一个正数的平方根有两个，而算术平方根只有一个. 平方与开平方互为逆运算，利用这种互逆关系，可以求一个数的平方根. 由平方根的概念，通过从特殊到一般以及逻辑推理的方法，可以得出平方根的特征.

本课既是前面学习的算术平方根的延续，又是用直接开平方法、公式法解一元二次方程的基础，同时本节课也为更好地理解立方根的概念和求法提供了思路和研究方法.

基于以上分析，可以确定本节课的教学重点：平方根的概念.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 了解平方根的概念，掌握平方根的特征.

(2) 能利用开平方与平方互为逆运算的关系，求某些非负数的平方根.

2. 目标解析

达成目标 (1) 的标志是：学生了解如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根或二次方根，并会归纳出平方根的特征. 即正数的平方根有两个，它们互为相反数，0 的平方根是 0，负数没有平方根.

达成目标 (2) 的标志是：学生知道开平方运算与平方运算互为逆运算，给出一个非负数 a，能找出所有满足 $x^2=a$ 的 x.

三、教学问题诊断分析

学生对于平方根与算术平方根的概念容易混淆，经常出现“$\sqrt{4}=\pm2$”的错误．在刚开始接触平方根时，可能还有两点不太习惯，一是正数有两个平方根，即正数进行开平方运算有两个结果，这与学生过去遇到的运算结果唯一的情况有所不同；二是负数没有平方根，即负数不能进行开平方运算，这种对运算对象有限定要求的情况以前一般不会遇到．

基于以上分析，本节课的教学难点是：平方根与算术平方根的区别与联系．

四、教学过程设计

1．归纳平方根的概念

问题 1　如果一个数的平方等于 9，这个数是多少？

师生活动：学生可能很快答出这个数可以是 3．

追问（1）：题目中的已知条件是什么？

师生活动：教师提示学生注意本题中没有限制所求的数是正数．学生回答：由于$(-3)^2=9$，那么这个数也可以是-3．教师总结：因此，如果一个数的平方等于 9，那么这个数是 3 或-3．

追问（2）：3 是前面学习过的 9 的算术平方根，这里的-3与 9 的算术平方根有什么关系？

（互为相反数．）

设计意图：直接进入主题，让学生感受平方等于 9 的数有两个，为归纳平方根的概念进行铺垫．

问题 2　根据上面的研究过程填表：

x^2	1	16	36	49	$\frac{4}{25}$
x					

设计意图：让学生在填空的过程中感受一个正数的平方根有两个，进而对平方根有一定的感性认识，为归纳平方根的概念作铺垫．

问题 3　如果我们把±1，±4，±6，±7，$\pm\frac{2}{5}$分别叫做 1，16，36，49，$\frac{4}{25}$的平方根，你能类比算术平方根的概念给出平方根的概念吗？

师生活动：教师引导学生仿照算术平方根的概念结合上面的实例归纳平方根的概念，学生可能一次总结不到位，教师加以修正从而得出平方根的概念：一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根或二次方根．这就是说，如果 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的平方根．

设计意图：通过一些具体实例，让学生对平方根有一定的感性认识．在此基础上，引导学生用文字语言仿照算术平方根的概念得到平方根的概念，使学生的学习形成正迁移．

2．认识开平方运算

问题 4　请完成图 1，2，并说明两图中的运算有什么关系？

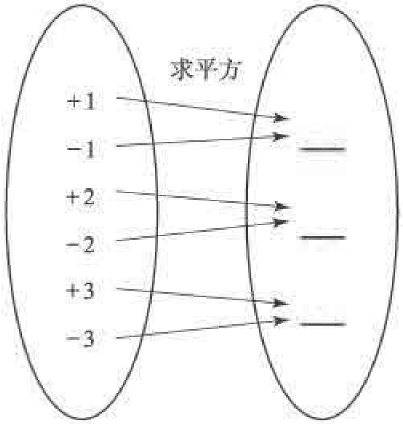


图 1

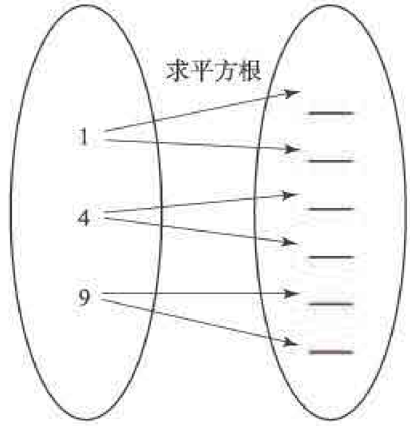


图 2

师生活动：学生填表. 若有错误，学生之间互相纠正，教师引导学生比较图 1 和图 2 中两种运算的特点，认识到开平方运算与平方运算互为逆运算.

设计意图：从图表中让学生直观感受开平方运算与平方运算互为逆运算，并依据这种互逆关系，求一个非负数的平方根.

例 1 求下列各数的平方根：

(1) 100； (2) $\frac{9}{16}$； (3) 0.25； (4) $2\frac{1}{4}$； (5) 0.

师生活动：教师引导学生从开平方运算与平方运算互为逆运算的角度解题，教师规范书写格式.

例 2 判断下列说法是否正确，并说明理由.

(1) 49 的平方根是 7；

(2) 2 是 4 的平方根；

(3) -5 是 25 的平方根；

(4) 64 的平方根是 ± 8；

(5) -16 的平方根是 -4.

师生活动：学生根据平方根的概念进行判断.

设计意图：例 1 再次强化学生对平方根概念的认识，注意一个正数的平方根有两个，0 的平方根是 0. 例 2 通过对平方根概念的辨析，强化对平方根概念的理解.

3. 归纳平方根的特征

问题 5 根据上面的例题思考：正数的平方根有什么特点？0 的平方根是多少？负数有平方根吗？为什么？

师生活动：教师引导学生归纳出平方根的特征：正数的平方根有两个，它们互为相反数；0 的平方根就是 0；负数没有平方根.

设计意图：通过讨论，使学生对平方根有比较全面的认识，并体会分类思想.

问题 6 我们已经学过一个正数的算术平方根的表示方法，你能表示一个正数的平方根吗？我们已经知道一个正数有两个平方根，它们互为相反数. 回忆一下如何表示正数 a 的算术平方根，那么正数 a 的负的平方根可以怎样表示呢？

师生活动：学生归纳，教师加以修正. 师生共同得出：正数 a 的算术平方根可以用$\sqrt{a}$表示；正数 a 的负平方根，可以用符号"$-\sqrt{a}$"表示. 数学中通常把正数 a 的平方根用符号"$\pm\sqrt{a}$"表示，读作"正、负根号 a". （注：这里要强调$\sqrt{a}$表示的是正的平方根，而$-\sqrt{a}$表示负的平方根，而$\pm\sqrt{a}$表示 a 的平方根. 例如，2 的算术平方根是$\sqrt{2}$，2 的负的平方根是$-\sqrt{2}$，2 的平方根是$\pm\sqrt{2}$. 9 的算术平方根是 3，9 的负的平方根是-3，9 的平方根是±3，即$\pm\sqrt{9}=\pm3$.）

设计意图：引导学生用符号语言表示一个正数的平方根，体会算术平方根与平方根的联系.

例 3 判断下列各式计算是否正确，并说明理由.

（1）$\sqrt{4}=\pm2$；（2）$\pm\sqrt{4}=\pm2$；（3）$-\sqrt{4}=\pm2$.

师生活动：学生根据符号的意义进行判断.

例 4 说出下列各式的意义，并求它们的值：

（1）$\sqrt{36}$；（2）$-\sqrt{0.81}$；（3）$\pm\sqrt{\frac{49}{9}}$.

师生活动：学生回答并求值.

设计意图：例 3 通过对平方根表示方法的辨析，强化对平方根概念的理解. 通过对例 3，4 的详解，使学生能准确地书写表达，规范他们书写平方根的格式，使他们掌握正确的符号化语言.

问题 7 如果知道一个数的算术平方根就可以立即写出它的负的平方根，为什么？

师生活动：学生回答，教师加以修正.

设计意图：通过问题 7 的提出，使学生思考平方根与算术平方根概念之间的关系.

4. 归纳小结

教师与学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答问题 8.

问题 8 你能总结一下平方根与算术平方根的概念的区别与联系吗？

（区别：正数的平方根有两个，而它的算术平方根只有一个；联系：正数的两个平方根中正的那个平方根就是它的算术平方根，0 的平方根就是它的算术平方根.）

设计意图：平方根与算术平方根的概念容易混淆，通过此问加深学生对它们区别与联系的理解.

5. 布置作业

教科书习题 6.1 第 3，4，7，8 题.

五、目标检测设计

1. 以下叙述中错误的是（　　）.

（A）$\pm\sqrt{0.25}=\pm0.5$　　（B）$\pm\sqrt{0.25}=0.5$

（C）0.5 是 0.25 的平方根　　（D）0 的平方根是 0

设计意图：本题主要考查学生对平方根概念的理解，以及用符号语言、文字语言表示平方根的能力.

2. 求下列各数的平方根：

（1）81；（2）0.49；（3）$6\frac{1}{4}$；（4）$\sqrt{16}$；（5）$(-8)^2$.

设计意图：本题主要考查学生对平方根概念的理解.

3. 说出下列各式的意义，并求它们的值：

(1) $\sqrt{0.04}$；(2) $-\sqrt{81}$；　(3) $\pm\sqrt{\frac{9}{100}}$.

设计意图：本题主要考查学生对平方根概念的理解，以及是否能正确使用符号化的语言.

4.（1）算术平方根是本身的数是________，平方根是本身的数是__________；

（2）若 13 是 m 的一个平方根，则 m 的另一个平方根是____________.

设计意图：本题主要考查学生对算术平方根与平方根的区别与联系的理解.

6.3　实数（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

无理数和实数的概念，实数与数轴上的点的一一对应关系.

2. 内容解析

本节在数的开方的基础上引进无理数的概念，并将数从有理数范围扩充到实数范围. 本章的内容在中学数学中占有重要地位，它不仅是后续学习二次根式、一元二次方程以及锐角三角函数等知识的基础，也是学习高中数学中函数、不等式等知识的基础.

学生在七年级上学期学习了有理数，在本章前两节的学习过程中知道了许多正有理数的算术平方根都是无限不循环小数. 本节先将有理数与有限小数和无限循环小数统一起来，再采用与有理数对照的方法引入无理数，揭示出有理数和无理数的联系与区别，有助于学生理解实数定义. 随着无理数的引入，实数概念出现了，数的范围由有理数扩充到实数. 接着类比用数轴上的点表示有理数，指出实数与数轴上的点的一一对应关系. 实数的概念贯穿于中学数学学习的始终，学生对实数的认识是逐步加深的.

基于以上分析，本节课的教学重点是：了解无理数和实数的概念，知道实数与数轴上的点的一一对应关系.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）了解无理数和实数的概念.

（2）知道实数与数轴上的点具有一一对应关系，初步体会“数形结合”的数学思想.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：给一些实数，学生会辨析哪些是有理数，哪些是无理数，并能自己举例说明.

达成目标（2）的标志是：学生能在数轴上找到表示$\sqrt{2}$，π 这样的无理数的点. 知道给定一个实数，数轴上就有唯一确定的点与之对应；反之，数轴上给定一个点，就有唯一的实数与之对应.

三、教学问题诊断分析

无理数是从现实世界中抽象出来的一种数，其严格的数学定义非常高深，再加上初中生对无理数几乎没有任何感性认识，甚至对无理数是否真正存在还有质疑，因此认识无理数就成了初中学习中的一个难点．为了突破这一难点，应从学生熟悉的有理数入手，通过与有理数对照的方法引入无理数的概念，进而揭示出有理数和无理数的联系与区别．

基于以上分析，本节课的教学难点是：对无理数的认识．

四、教学过程设计

1．探究新知

问题 1　有理数包括整数和分数，如果将下列分数写成小数的形式，你有什么发现？

$$\frac{5}{2},\ -\frac{3}{5},\ \frac{27}{4},\ \frac{11}{9},\ \frac{9}{11}.$$

预案：如果学生不能正确得到结论，教师追问：你能否从这些小数的形式特点上加以说明？如果学生能正确得到结论，教师追问：任意写一个分数，一定都能写成有限小数或是无限循环小数的形式吗？请举例说明．

师生活动：学生举例，可能会出现循环节是多位的循环小数，教师要充分引导，以进一步加强学生的认识．教师引导学生观察，得到结论：如果把整数看成小数点后是 0 的小数，任何一个有理数都可以写成有限小数或是无限循环小数的形式；反过来，任何有限小数和无限循环小数也都是有理数．

设计意图：让学生从探究活动开始，体会有理数都可以写成有限小数和无限循环小数的形式．

问题 2　你认为小数除了上述类型外，还会有什么类型？

师生活动：通过对数的归纳辨析，与有理数对照，师生共同归纳出前两节学过的一些平方根和立方根都是无限不循环小数，它们不同于有限小数和无限循环小数，是一类不同于有理数的数，由此教师给出无理数的概念：无限不循环小数叫无理数，并指出 $\pi=3.141\,592\,65\cdots$ 也是无理数．像有理数一样，无理数也有正负之分，例如 $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，π 是正无理数，$-\sqrt{2}$，$-\sqrt[3]{3}$，$-\pi$ 是负无理数．进而给出实数的概念及实数的如下分类．

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{正有理数}\\0\\\text{负有理数}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

设计意图：让学生回忆曾经学过的无限不循环小数是不同于有理数的数，为教师引出无理数概念作准备．

问题 3　因为非零有理数和无理数都有正负之分，那么你能类比有理数的分类方法，按大小关系对实数分类吗？

师生活动：教师在参与讨论时，启发学生类比有理数的分类，明确分类的基本原则：按照某个标准，不重不漏．学生独立思考后，小组讨论得到如下分类．

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\0\\\text{负实数}\end{cases}
$$

设计意图：通过学生互相的讨论和交流，可以加深对无理数和实数的理解，同时让学生明确实数的分类可以有不同的方法，初步形成对实数整体性的认识.

例 1 下列实数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

5，3.14，0，$\sqrt{3}$，$-\dfrac{4}{3}$，$0.\dot{5}\dot{7}$，$-\sqrt{4}$，$-\pi$，0.101 001 000 1…（相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1）.

师生活动：学生根据有关概念进行判断.

设计意图：对有关概念进行辨析.

问题 4 我们知道，每个有理数都可以用数轴上的点来表示，那么无理数是否也可以用数轴上的点表示出来呢？你能在数轴上找到表示无理数$\sqrt{2}$的点吗？

师生活动：学生独立思考后小组讨论交流，借助第 6.1 节$\sqrt{2}$的得出和手中的学具进行操作（图 1）.

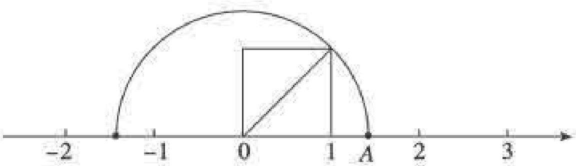


图 1

设计意图：通过具体操作，让学生知道无理数也可以在数轴上表示.

问题 5 直径为 1 个单位长度的圆从原点沿数轴向右滚动一周，圆上的一点由原点到达点 O'，点 O' 对应的数是多少？

师生活动：教师参与并指导实际操作，指出无理数 π 可以用数轴上的点表示出来（图 2）. 由于学生知识水平的限制，他们不可能也没有必要将所有无理数都用数轴上的点表示出来. 解决了问题 4，5 后，教师直接给出实数与数轴上的点是一一对应的结论.

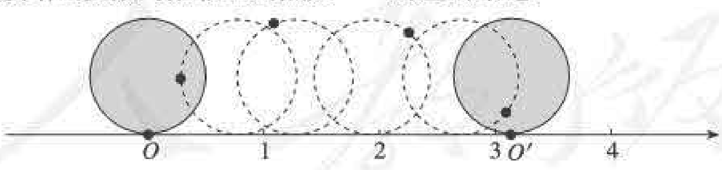


图 2

设计意图：通过直径为 1 个单位长度的圆在数轴上的滚动，让学生知道无理数 π 也可在数轴上表示.

2. 应用新知

例 2 判断正误，并说明理由.

（1）无理数都是无限小数；

（2）实数包括正实数、0、负实数；

(3) 不带根号的数都是有理数；

(4) 所有有理数都可以用数轴上的点表示，反过来，数轴上所有的点都表示有理数.

师生活动：学生根据有关概念进行判断.

设计意图：对有关概念进行辨析.

练习

(1) 把下列各数填入相应的集合内：$\sqrt{15}$，4，$\sqrt{16}$，$\frac{2}{3}$，$\sqrt[3]{-27}$，0.15，-7.5，$-\pi$，0，$2.\dot{3}$.

①有理数集合：{ …}；

②无理数集合：{ …}；

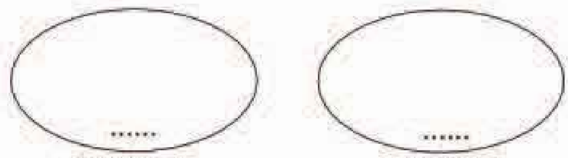
③正实数集合：{ …}；

④负实数集合：{ …}.

(2) 下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

$$0.4583，3.\dot{7}，-\pi，-\frac{1}{7}，18，-\sqrt{2}.$$

(3) 在下列每一个圈里，至少填入 3 个适当的数.



有理数集合　　　　无理数集合

3. 归纳小结

教师和学生一起回顾本节课所学内容，并请学生回答以下问题：

(1) 举例说明有理数和无理数的特点是什么？

(2) 实数是由哪些数组成的？

(3) 实数与数轴上的点有什么关系？

设计意图：让学生对本节课知识进行梳理，进一步落实相关概念.

4. 布置作业

教科书习题 6.3 第 1，2 题，复习题 6 第 6 题.

五、目标检测设计

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 无限小数都是无理数；

(2) 无理数包括正无理数、零、负无理数；

(3) 带根号的数都是无理数.

设计意图：本题主要考查学生对无理数概念的了解.

2. ______与数轴上的点一一对应.

设计意图：本题主要考查学生是否知道实数与数轴上的点一一对应.

3. 下列各数中的无理数是（　　）.

(A) $\sqrt{16}$　　(B) 3.14　　(C) $\frac{3}{11}$　　(D) $-\pi$

设计意图：本题主要考查学生是否会辨析有理数与无理数.

4. 把下列各数填入相应的集合内：$\frac{1}{3}$，$\sqrt{0}$，5，$-\sqrt{3}$，$\frac{2}{5}$，$\sqrt[3]{-7}$，0.15，-7.5，$-\pi$，

(1) 有理数集合：{　　　　…}；

(2) 无理数集合：{　　　　…}；

(3) 正实数集合：{　　　　…}；

(4) 负实数集合：{　　　　…}.

设计意图：本题主要考查学生是否会对实数进行分类.

5. 在数轴上画出表示$-\sqrt{2}$的点.

设计意图：本题主要考查学生是否会在数轴上表示$-\sqrt{2}$这个无理数.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 方根的相关史料

五千多年前，发源于现在土耳其境内的底格里斯河和幼发拉底河，流经现在的叙利亚和伊拉克，生活在两河流域的巴比伦民族，由于实际的需要很早就接触到开方运算. 从现在保存下来的古巴比伦人的泥板可以看到，远在公元前 2000 年古巴比伦人就已经能够很准确地进行开方运算了.

例如，在一块编号为 BM85196 的泥板上，有这样一个问题：

如图 6-1，有一根长为 0；30（这是六十进制表示法，即$\frac{30}{60}$，下同）的木梁（线段 AB）竖立靠在墙上，上端（点 A）下滑 0；6（至点 D），问下端（点 C）离墙根（点 B）多远?

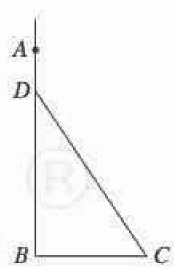


图 6-1

从现在的观点来看，就是要计算 $\sqrt{CD^2-BD^2}$，而泥板上恰好显示了正确的结果：0；18. 在另一块编号为 YBC7289 的泥板上，刻有一个画出对角线的正方形，在对角线上有一行数字：1；24，51，10. 这是一个六十进制数，化为十进制数是 $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.414\ 212\ 96\cdots$，这就是$\sqrt{2}$的近似值，与准确值的误差只有 6×10^{-7}. 古巴比伦人还制作了平方根表，对于完全平方数的平方根，表上列出了准确值.

公元 2 世纪，罗马数学家尼普萨斯（J. Nipsus）用拉丁语 Latus（意为“正方形的边”）记平方根，后来这个词的第一个字母“L”成为欧洲一个常用的平方根的符号. 直到 16 世纪，法国数学家拉米斯（P. Ramus）和韦达（F. Viete）等人仍这样使用. 16 世纪的德国数学家鲁多尔夫（C. Rudolff）是较早使用“$\surd$”表示平方根的人之一. 比利时数学家斯蒂文（S. Stevin）也用

"$\surd$"表示平方根，并用"$\surd c$"表示立方根. 法国数学家笛卡儿（R. Descartes）于 1637 年将"$\sqrt{\quad}$"作为平方根的符号. 数学家哈顿（E. Hatton）于 1721 年用"$^3\surd$"表示立方根，用"$^4\surd$"表示四次方根. 1732 年，卢贝尔（De la Loubere）开始用"$\sqrt[3]{25}$"表示 25 的 3 次方根. 后来人们用这种形式的符号"$\sqrt[n]{\quad}$"表示 n 次方根，一直沿用至今.

2. 中国发现无理数

在中国古代，很早就发现了无理数，而且有了对实数的系统认识. 中国古代就有乘方运算，因此不可避免地会遇到开方问题，也就不可避免地遇到无理数. 对于这种"开之不尽"，不能用分数来表示的数，刘徽在《九章算术》中注释"求其微数"，即用十进制小数来无限逼近无理数.

3. 中文"无理数"名称的含义

古希腊哲学家、数学家、天文学家毕达哥拉斯（Pythagoras）认为"万物皆数"，宇宙间各种关系都可以用整数或整数之比来表达. 但毕达哥拉斯后来发现正方形的对角线与边长的比不能表示成两个整数之比，从而打破了他们的这一信条. 这样就出现了两种数，即 rational number（可以写成两个整数之比的数）和 irrational number（不可以写成两个整数之比的数），它们的中文译名就是"有理数"和"无理数".

如何理解"理"的含义?《几何原本》是我国最早译自拉丁文的数学著作，明朝科学家徐光启在翻译时没有现成的、可对照的词，许多译名都是从无到有创造出来的. 徐光启将"ratio（比）"译成了"理"，即"理"就是比的意思. 所以，"有理数"应理解为"可以写成两个整数之比的数"，不应理解为"有道理的数"；同样，"无理数"应理解为"不可以写成两个整数之比的数"，不应理解为"没有道理的数". 因此，也有人建议，把"有理数"和"无理数"改称为"比数"和"非比数".

4. 无理数的性质

（1）无理数的有理逼近性与求无理数近似值的牛顿法

所谓"无理数的有理逼近性"，粗略地说，就是对于任意一个无理数都可以用有理数任意靠近. 换句话说，对于任意一个无理数，无论预先指定多么小的绝对误差界，都可以找到一个有理近似值，使它的误差不超过指定的绝对误差界. 这个性质可以用中学的无理数定义（无限不循环小数叫做无理数）加以说明. 不必说无理数发现之前的几千年里，就是在无理数发现之后，人们对无理数已经很了解的今天，实用中人们更关注的也是无理数的有理近似值.

用牛顿法求$\sqrt{m}$的有理近似值的方法如下：取一个正有理数 $a_1<\sqrt{m}$，则$\sqrt{m}<\frac{m}{a_1}$. 现在取 $a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{m}{a_1}\right)$，$a_3=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{m}{a_2}\right)$，$a_4=\frac{1}{2}\left(a_3+\frac{m}{a_3}\right)$，…. 可以证明 a_2，a_3，a_4，…是越来越接近$\sqrt{m}$的过剩近似值，而$\frac{m}{a_2}$，$\frac{m}{a_3}$，$\frac{m}{a_4}$，…是越来越接近$\sqrt{m}$的不足近似值.

（2）无理数对运算的不封闭性

有理数对加、减、乘、除是封闭的，即两个有理数的和、差、积、商仍是有理数. 但是，无理数对加、减、乘、除是不封闭的，即两个无理数的和、差、积、商不一定是无理数.

（3）无理数的个数

有理数的个数多，还是无理数的个数多？粗略地说，是无理数的个数多．这个结论可以用下面的定理形象地加以说明：在数轴上的全体有理数点可以被一些区间所覆盖，而这些区间的总长度可以任意小，就是说，要多小有多小．由此可以看出，数轴上的点几乎都是无理数点．

5. n 次方根和 n 次算术根

本章我们研究了数的平方根和立方根．实际上，数的方根的概念可以推广．

一般地，如果一个数的 n（n 是大于 1 的整数）次方等于 a，这个数就叫做 a 的 n 次方根．即：如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根．求 a 的 n 次方根的运算，叫做把 a 开 n 次方，a 叫做被开方数，n 叫做根指数．正数 a 的正的 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根．0 的 n 次方根也叫做 0 的 n 次算术根．

在实数范围内，正数的偶次方根有两个，它们互为相反数，正数的奇次方根是一个正数；负数没有偶次方根，负数的奇次方根是一个负数；0 的 n 次方根是 0．

6. 初中阶段常见的无理数

（1）带根号的数

如果 a 不是完全 n 次方数，则$\sqrt[n]{a}$是无理数．特别地，p 不是完全平方数时，$\sqrt{p}$是无理数．

（2）锐角三角函数

当一个锐角的大小是有理数度数 x（例如 $31°$，$46.7°$，$\left(\frac{4}{7}\right)°$等）时，$\sin x$，$\cos x$ 的有理数值只有 0，0.5，1 三个值．具体地说，就是 $\sin 0°=0$，$\sin 30°=0.5$，$\sin 90°=1$，$\cos 0°=1$，$\cos 60°=0.5$，$\cos 90°=0$．而 $\tan x$，$\cot x$ 的有理数值只有 0，1 两个值．具体地说，就是 $\tan 0°=0$，$\tan 45°=1$，$\cot 45°=1$，$\cot 90°=0$．

（3）圆周率 π

任意一个圆的周长与其直径之比为一个恒定的常数，此常数称为圆周率，圆周率一般用希腊字母 π 来表示．1706 年英国数学家琼斯（W. Jones）在他出版的《新数学引论》中首次使用 π 代表圆周率，但这个符号并未立刻被采用．直至 1736 年，在欧拉（L. Euler）的倡导下才逐渐推广开来．现在，已经成为圆周率的专有符号．1761 年兰伯特（J. H. Lambert）证明了 π 是无理数，1882 年林德曼（C. L. F. Lindemann）证明了 π 是超越数．

7. 实数

公元前 5 世纪，毕达哥拉斯学派的一个成员发现了一个既不能用整数，也不能用分数来表示的新数——无理数$\sqrt{2}$．他的发现，在当时的数学界掀起了一场巨大风暴，导致西方数学史上的“第一次数学危机”．后来，希腊的数学家们都竭力回避无理数．如欧多克索斯、欧几里得在他们的几何学里都生硬地把数和几何量割裂开来，无理数只被当作是附在几何量上的单纯符号，而不被当作真正的数．欧多克索斯的比例论（见《原本》第 5 卷）使几何学在逻辑上绕过了不可公度的障碍，解决了由无理数出现而引起的数学危机．

17，18 世纪微积分的发展几乎吸引了所有数学家的注意，人们再次关注无理数．无理数是什么？法国数学家柯西（A.-L. Cauchy）给出了回答：无理数是有理数序列的极限．然而按照柯西的极限定义，所谓有理数序列的极限，即预先存在一个确定的数，使它与序列中各数的差的绝对值，当序列趋于无穷时，可以任意小．但是，这个预先存在的“数”，又从何而来呢？在柯西看来，有

理数序列的极限，似乎是先验地存在的．这表明，柯西尽管是那个时代的大分析学家，但仍未能摆脱两千多年来以几何直觉为立论基础的传统观念的影响．

1872 年，实数的三大派理论：戴德金（R. Dedekind）的“分割”理论，康托尔（G. Cantor）的“基本序列”理论，以及维尔斯特拉斯（K. T. W. Weierstrass）的“有界单调序列”理论，同时在德国出现．实数的三大派理论从本质上给出了无理数的严格定义，从此无理数才真正在数学园地中扎下了根．无理数在数学中合法地位的确立，一方面使人类对数的认识从有理数拓展到实数，另一方面也真正彻底、圆满地解决了第一次数学危机．

1899 年，德国数学家希尔伯特（D. Hilbert）首先提出了实数的公理化定义，经后人改进成为下面的定义：

设 R 是一个集合，若它满足下列三组公理，则称为实数系，它的元素称为实数．

（1）（域公理）对任意 a，$b\in R$，有 R 中唯一的元素 $a+b$ 和 $a\cdot b$ 分别与之对应，依次称为 a，b 的和与积，满足：

①（交换律）对任意 a，$b\in R$，有 $a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$；

②（结合律）对任意 a，$b\in R$，有 $a+(b+c)=(a+b)+c$，$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$；

③（分配律）对任意 a，$b\in R$，有 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$；

④（单位元）存在 R 中两个不同元素，记为 0，1，分别称为加法的单位元与乘法的单位元，使对任意 $a\in R$，都有 $a+0=a$，$a\cdot 1=a$；

⑤（逆元）对任意 $a\in R$，存在 R 中唯一的元素，记为 $-a$，称为加法的逆元，使 $a+(-a)=0$；对任意 $a\in R\setminus\{0\}$，存在 R 中唯一的元素，记为 a^{-1}，称为乘法的逆元，使 $a\cdot a^{-1}=1$．

（2）（序公理）在任意两个元素 a，$b\in R$ 之间存在一种关系，记作“$>$”，使对于任意 a，b，$c\in R$，满足：

①（三歧性）有且仅有 $a>b$，$b>a$，$a=b$ 之一成立；

②（传递性）若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$；

③（与运算的相容性）若 $a>b$，则 $a+c>b+c$，若 $a>b$，且 $c>0$，则 $a\cdot c=b\cdot c$．

（3）（阿基米德公理）对任意 a，$b\in R$，$a>0$，存在正整数 n，使 $na>b$．

（4）（完备性公理）R 的任意基本列都在 R 中收敛．

二、拓展性问题

1. 归纳规律

填空：

（1）因为 $-1>-8$，所以 $\sqrt[3]{-1}$____ $\sqrt[3]{-8}$；

（2）因为 $0>-1$，所以 $\sqrt[3]{0}$____ $\sqrt[3]{-1}$；

（3）因为 $1>0$，所以 $\sqrt[3]{1}$____ $\sqrt[3]{0}$；

（4）因为 $8>1$，所以 $\sqrt[3]{8}$____ $\sqrt[3]{1}$

……

因此，我们可以归纳得到：如果 $a>b$，那么 $\sqrt[3]{a}$____ $\sqrt[3]{b}$．

答案：$>$，$>$，$>$，$>$，$>$．

2. 你知道$\sqrt[3]{5}$有多大吗

因为$1^3=1$，$2^3=8$，而$1<5<8$，

所以$1<\sqrt[3]{5}<2$；

因为$1.7^3=4.913$，$1.8^3=5.832$，而$4.913<5<5.832$，

所以$1.7<\sqrt[3]{5}<1.8$；

因为$1.70^3=4.913$，$1.71^3=5.000\ 211$，而$4.913<5<5.000\ 211$，

所以$1.70<\sqrt[3]{5}<1.71$

……

如此进行下去，可以得到$\sqrt[3]{5}$的更精确的近似值.

事实上，$\sqrt[3]{5}=1.70\cdots$，是一个无限不循环小数.

请你用上述方法求$\sqrt[3]{3}$的近似值（精确到0.01）.

答案：$\sqrt[3]{3}\approx1.44$.

3. 分数一定可以化为有限小数和无限循环小数吗

如果一个最简分数的分母只含有质因数2或5，则这个分数可化为有限小数. 例如，$\frac{7}{8}=0.875$，$\frac{3}{125}=0.024$，$\frac{1}{40}=0.025$.

如果一个最简分数的分母含有2或5以外的质因数（例如3，7，11，…），则这个分数一定能化为无限循环小数吗？

我们看到，$\frac{2}{15}=0.1\dot{3}$，$\frac{6}{7}=0.\dot{8}57\ 14\dot{2}$，$\frac{7}{11}=$________，$\frac{5}{6}=$________.

实际上，如果一个最简分数的分母含有2或5以外的质因数（例如3，7，11，…），设这个质因数为n，则这个分数一定能化为无限循环小数，并且循环节所包含的数的个数不会超过$n-1$.

答案：$0.\dot{6}\dot{3}$，$0.8\dot{3}$.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章主要内容包括算术平方根、平方根、立方根的概念，实数的有关概念和运算. 对于算术平方根、平方根、立方根的概念这部分内容，应考查学生是否了解算术平方根、平方根、立方根的概念，是否会用根号表示数的平方根、算术平方根、立方根；是否了解乘方与开方互为逆运算，是否能借助平方运算求百以内整数的平方根，借助立方运算求百以内整数（对应的负整数）的立方根，是否会用计算器求平方根和立方根. 对于实数的有关概念和运算这部分内容，应考查学生是否了解无理数和实数的概念，是否知道实数与数轴上的点是一一对应的，是否能求实数的相反数和绝

对值；是否能用有理数估计一个无理数的大致范围，是否会比较两个实数的大小；在解决实际问题时，是否能用计算器进行简单的实数运算，并按问题的要求对结果取近似值.

2. 对本章的考查，应注意以下问题：

(1) 对于算术平方根、平方根和立方根，应该重点考查算术平方根和平方根的概念之间的联系和区别，及运用平方根（或立方根）的概念求一个数的平方根（或立方根）.

(2) 考查用有理数估计无理数大小可以采用以下方法：判断无理数在哪两个相邻整数之间，比较实数大小，解决实际问题.

(3) 对于实数运算，应把握教科书的要求，循序渐进，不必考查复杂、烦琐的实数运算.

3. 在解决探究性问题的过程中，关注学生是否具有类比已有知识获取新知识的能力. 在解决实际问题的过程中，关注学生的估算能力是否得到发展.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. $\frac{1}{4}$的算术平方根是（　　）.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) $\pm\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{16}$

2. $(-0.7)^2$ 的平方根是（　　）.

(A) -0.7　　(B) ±0.7　　(C) 0.7　　(D) 0.49

3. 下列结论正确的是（　　）.

(A) 64 的立方根是±4　　(B) $-\frac{1}{8}$没有立方根

(C) 立方根等于本身的数是 0　　(D) $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}$

4. 下列说法中正确的是（　　）.

(A) 带根号的数都是无理数　　(B) 无限小数都是无理数

(C) 无理数是无限不循环小数　　(D) 无理数是开方开不尽的数

5. 下列各数中，界于 6 和 7 之间的数是（　　）.

(A) $\sqrt{28}$　　(B) $\sqrt{43}$

(C) $\sqrt{58}$　　(D) $\sqrt[3]{39}$

6. 若 $a^2=25$，$|b|=3$，则 $a+b$ 所有可能的值为（　　）.

(A) 8　　(B) 8 或 2

(C) 8 或-2　　(D) ±8 或±2

（二）填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 在 0，3.141 59，$\frac{\pi}{3}$，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{\frac{1}{16}}$，$\frac{22}{7}$，$\sqrt[3]{9}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$0.\dot{7}$ 中，其中________________是无理数；____________________是有理数.

8. $2-\sqrt{5}$的相反数是__________，绝对值是__________.

9. 已知$\sqrt{102.01}=10.1$，则$\sqrt{1.020\,1}=$________.

10. 绝对值小于$\sqrt{18}$的所有整数是________.

（三）解答题（共50分）

11. 计算（每小题5分，共20分）：

（1）$\sqrt{1-\frac{16}{25}}$；　　（2）$\sqrt{0.04}+\sqrt[3]{-8}-\sqrt{\frac{1}{4}}$；

（3）$3\sqrt{2}-|\sqrt{3}-\sqrt{2}|$；　　（4）$2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$（结果保留小数点后两位）.

12. 求下列各式中的x（每小题5分，共15分）：

（1）$x^3-0.027=0$；　（2）$49x^2=25$；　（3）$(x-2)^2=9$.

13. 比较下列各组数的大小（每小题5分，共15分）：

（1）$\sqrt{35}$与6；　（2）$\sqrt[3]{-25}$与-3；　（3）$\sqrt{5}-1$与$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（四）附加题（每小题10分，共20分）

14. 要生产一种容积为36πL的球形容器，这种球形容器的半径是多少分米？（球的体积公式是$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中R是球的半径.）

15. 一个正数x的平方根是$2a-3$与$5-a$，求a和x的值.

参考答案

1. A. 本题主要考查学生对算术平方根概念的理解.
2. B. 本题主要考查学生对平方根概念的理解.
3. D. 本题主要考查学生对立方根概念和性质的理解.
4. C. 本题主要考查学生对无理数概念的理解.
5. B. 本题主要考查学生的估算能力.
6. D. 本题主要考查学生综合运用平方根和绝对值性质的能力.
7. $\frac{\pi}{3}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{9}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$；0，3.141 59，$-\sqrt{\frac{1}{16}}$，$\frac{22}{7}$，$0.\dot{7}$. 本题主要考查学生对有理数和无理数概念的理解.
8. $\sqrt{5}-2$，$\sqrt{5}-2$. 本题主要考查学生对相反数、绝对值概念的理解.
9. 1.01. 本题主要考查学生对算术平方根概念的理解.
10. 0，±1，±2，±3，±4. 本题综合考查学生对绝对值概念的理解和学生的估算能力.
11. （1）$\frac{3}{5}$；（2）-2.3；（3）$4\sqrt{2}-\sqrt{3}$；（4）1.89. 本题主要考查学生的实数运算及近似运算能力.
12. （1）0.3；（2）$x=\pm\frac{5}{7}$；（3）$x=5$或$x=-1$. 本题主要考查学生对平方根、立方根概念的运用.
13. （1）$\sqrt{35}<6$；（2）$\sqrt[3]{-25}>-3$；（3）$\sqrt{5}-1>\frac{\sqrt{3}}{2}$. 本题主要考查学生估算和比较大小的能力.

14. 这种球形容器的半径是 3 dm. 本题主要考查学生对开立方运算的掌握.

15. $a=-2$，$x=49$. 提示：因为正数 x 的平方根互为相反数，所以 $(2a-3)+(5-a)=0$，解得$a=-2$，进而求得 $x=49$. 本题主要考查学生对平方根概念的理解和解一元一次方程的能力.

第七章　平面直角坐标系

Ⅰ总体设计

一、本章学习目标

1. 结合实例进一步体会用有序数对可以表示物体的位置.

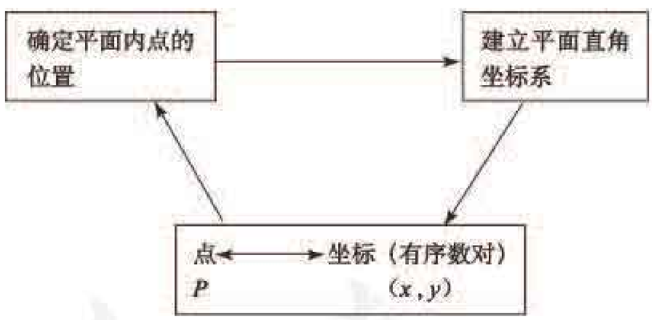
2. 认识平面直角坐标系，了解点与坐标的对应关系；在给定的直角坐标系中，能根据坐标描出点的位置，能由点的位置写出点的坐标.

3. 对给定的正方形，会选择合适的直角坐标系，写出它的顶点坐标，体会可以用坐标刻画一个简单图形.

4. 能建立适当的平面直角坐标系描述物体的位置，体会平面直角坐标系在解决实际问题中的作用；在平面上，能用方向和距离刻画两个物体的相对位置.

5. 在平面直角坐标系中，能用坐标表示平移. 通过研究平移与坐标的关系，体会数形结合的思想.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章的主要内容包括平面直角坐标系有关的概念和点与坐标的对应关系，以及用坐标表示地理位置和用坐标表示平移的内容.

教科书首先从实际中需要确定物体的位置（如电影院中座位的位置以及教室中学生座位的位置等）出发，引出有序数对的概念，指出利用有序数对可以确定物体的位置，由此联想到是否可以用有序数对表示平面内点的位置的问题，结合数轴上确定点的位置的方法，引出平面直角坐标系，学习平面直角坐标系的有关概念，如横轴、纵轴、原点、象限，建立点与坐标的一一对应关系等.

对于坐标方法的简单应用，本章主要学习平面直角坐标系在确定地理位置和表示平移中的应用. 用坐标表示地理位置体现了坐标系在实际生活中的应用. 本章在安排这部分内容时，首先设置一个“思考”栏目，让学生思考地图上是怎样利用坐标表示一个地点的地理位置的，学生从中得到

启发，再来学习建立坐标系，确定一个地点的地理位置的方法．接下来教科书设置了一个“探究”栏目，要求学生画出一幅示意图，标出学校和三位同学家的位置．要用坐标系表示地理位置，就要考虑如何建立坐标系的问题．首先是确定原点和坐标轴的正方向，教科书选用了以学校为原点，向东为 x 轴正方向，向北为 y 轴正方向建立坐标系，根据三位同学家的位置情况，在坐标系中标出了这些地点的位置，并归纳给出绘制平面示意图的一般过程．除了建立平面直角坐标系，用坐标表示地理位置，还可以用方向和距离表示平面内物体的位置．教科书设置一个“思考”栏目，让学生了解这种方法．

用坐标表示平移，从数的角度刻画了第五章有关平移的内容，主要研究点（或图形）的平移（上、下、左、右平移）引起的点（或图形上的点）坐标的变化，以及点（或图形上的点）坐标的变化引起的点（或图形）的平移．教科书首先设置一个“探究”栏目，分析在平面直角坐标系中，将一个已知点向右或向左平移某个单位长度得到一个新点，这个点的坐标与平移前的点的坐标有什么关系，同样，如果将这个点分别向上或向下平移某个单位长度得到新的点，这个点与平移前点的坐标又有什么关系．通过分析平移前后点的坐标的变化，发现坐标的变化规律，比如将一个点 (x, y) 向右平移某个单位长度，平移后得到的点的坐标是 $(x+a, y)$．对于图形的平移引起的图形上点的坐标的变化，以及将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到，教科书也设置了一个“探究”栏目，让学生确定一个正方形平移后顶点的坐标，得出有关的结论．接下来，教科书讨论了一个三角形顶点坐标的某种有规律变化引起的三角形的平移．比如，将三角形三个顶点的横坐标都减去某个正数，纵坐标不变，得到三个新的点，连接这三个点，得到一个新的三角形，这个新三角形与原来的三角形在大小、形状和位置上有什么关系等．通过探究发现这两个三角形大小形状完全相同，只是位置不同，实际上是对三角形进行了平移，在此基础上教科书归纳给出有关的规律．

四、课时安排

本章教学约需 7 课时，具体分配如下（仅供参考）：

7.1　平面直角坐标系	3 课时
7.2　坐标方法的简单应用	3 课时
数学活动	
小结	1 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 注意加强知识间的相互联系

平面直角坐标系是以数轴为基础的，两者之间存在着密切的联系．平面直角坐标系是由两条相互垂直、原点重合的数轴构成的，坐标平面内点的坐标是根据数轴上点的坐标定义的，平面内点与坐标的对应关系类似于数轴上点与坐标的对应关系等．本章编写时注意突出了平面直角坐标系与数轴的联系．对于平面直角坐标系的引入，教科书首先从学生熟悉的数轴出发，给出点在数轴上的坐标的定义，建立点与坐标的对应关系．在此基础上，教科书类比着数轴，探讨了在平面内确定点的

位置的方法，引出平面直角坐标系，给出平面直角坐标系的有关概念．这样通过加强平面直角坐标系与数轴的联系，可以帮助学生更好地理解点与坐标的对应关系，顺利地实现由一维到二维的过渡．

2．突出数形结合的思想

无论是在数学还是在其他领域，平面直角坐标系都有着非常广泛的应用．

在数学中，由于平面直角坐标系的引入，架起了数与形之间的桥梁，使得我们可以用几何的方法研究代数问题，又可以用代数的方法研究几何问题．对于平面直角坐标系的这种桥梁作用，本套教科书给予了充分重视．本章中，编写了利用坐标的方法研究平移的内容，从数的角度刻画平移，这就用代数的方法对几何问题进行了研究，体现了平面直角坐标系在数学中的作用．通过本章的学习，让学生看到平面直角坐标系的引入，加强了数与形之间的联系，它是解决数学问题的一个强有力的工具．

用坐标表示地理位置体现了坐标系在实际生活中的应用．用经纬度表示地球上一个地点的地理位置，用极坐标表示区域内地点的位置，以及用平面直角坐标表示区域内地点的位置等，实际上都是利用了有序数对与点的对应关系，是坐标与点一一对应思想的表现．教科书突出了这种对应关系，利用这种对应关系研究了如何建立坐标系用坐标表示地理位置的问题，使学生体会坐标思想在解决实际问题中的作用．

3．注重学生的认知规律

本章编写，不同于从数学的角度引出坐标系的做法，而是将内容紧紧围绕着确定物体的位置展开，从实际生活中确定物体的位置出发引出坐标系，也就是从实际需要引出坐标系这个数学问题，然后展开对坐标系的研究，认识坐标系的有关概念和建立坐标系的方法，最后再利用坐标系解决生活中确定地理位置的问题，让学生经历由实际问题抽象出数学问题，通过对数学问题的研究解决实际问题的过程．也就是经历了一个由实践—理论—实践的认识过程．

4．内容编写生动活泼

本章编写时，注意结合本章内容的特点，将枯燥的数学问题赋予有趣的实际背景，使内容更符合学生的年龄特点，激发学生学习数学的兴趣．例如，教科书习题 7.2 的第 1 题“三辆汽车 P，Q，R 保持编队行驶，分别写出它们的坐标．当汽车 P 行驶到 P' 位置时，汽车 Q，R 行驶到了什么位置？分别写出这三辆汽车新位置的坐标”，这个问题实际上是一个三角形平移的问题．再比如，让学生画出本学校的平面示意图，用坐标表示动画制作过程中小鸭子的位置变化，用坐标表示某地古树名木的位置等．从数学上讲，这些都是关于点与坐标对应关系的问题，本章编写时注意给这些数学问题加上一个有趣的背景，增加学生学习本章内容的兴趣．

六、对本章教学的建议

1．密切联系实际

本章内容的编写紧紧围绕着确定物体的位置展开．教科书首先从中华人民共和国成立 60 周年庆典中的背景图案、确定电影院中座位的位置以及教室中学生座位的位置等实际背景出发，引出有序数对，进而引出平面直角坐标系．通过对坐标系的研究，认识坐标系的有关概念和建立坐标系的

方法，然后再利用坐标系解决生活中确定地理位置的问题（如确定同学家的位置等），让学生经历由实际问题抽象出数学问题，通过对数学问题的研究解决实际问题的过程．这样的一种处理，不是从数学角度引入平面直角坐标系，而是密切联系生活实际，从实际的需要出发学习平面直角坐标系．教学中可以结合学生的实际情况，利用学生周围熟悉的素材学习本章内容，让学生充分感受平面直角坐标系在解决实际问题中的作用．

2．准确把握教学要求

对于某些重要的概念和方法，本套教科书采用了螺旋上升的编排方式．对于平移，教科书首先在上一章“相交线与平行线”中安排了一节“平移”，探讨得出平移的基本性质，在本章又安排了一小节“用坐标表示平移”的内容，从坐标的角度进一步认识平移，为在后续学习中利用平移探索几何性质以及综合运用平移、旋转、轴对称、相似等进行图案设计等打下基础．对于平面直角坐标系，本章只要求学生会建立平面直角坐标系，能根据坐标描出点的位置，能由点的位置写出点的坐标，并建立点与有序实数对的一一对应关系，为后续学习函数的图象、函数与方程和不等式的关系等问题打下基础．因此，教学中要注意内容安排的这个特点，准确把握本章对于平移和平面直角坐标系的教学要求，以一个动态的、发展的观点看待教学要求．

3．注意留给学生思考的空间

本章编写时，注意结合本章内容特点，利用一些“思考”“探究”“归纳”等栏目，给学生留出了较大的思考空间．例如，在第 7.2.2 小节中，教科书设置一个“探究”栏目，让学生探究将几个已知坐标的点上、下、左、右平移后得到新的点，各对应点之间的坐标有怎样的变化规律．这实际上让学生经历一个由特殊到一般的归纳过程．对于这个规律的获得，教科书仅用了一个栏目，很少的篇幅，这样实际上给学生留出了较大的探索空间．因此教学中，要注意留给学生足够的时间，使学生充分活动起来，通过探究发现并总结规律．对于这些规律，不要让学生死记硬背，要让学生在坐标系中，结合图形的平移理解．

第七章　平面直角坐标系[1]

在中华人民共和国成立60周年的庆典活动中，天安门广场上出现了壮观的背景图案，你知道它是怎么组成的吗？

原来，广场上有许多同学，每人都按图案设计的要求，按排号、列号站在一个确定的位置，随着指挥员的信号，他们举起不同颜色的花束，整个方阵就组成了壮观的背景图案.

类似于用“第几排第几列”来确定位置，在数学中可以通过建立坐标系，用有顺序的两个数来刻画平面内点的位置.

本章中，我们将学习平面直角坐标系等有关知识，由此建立图形与数量间的联系，这将为几何问题和代数问题的相互转化打下基础.

Ⅱ 教材分析

[1] 平面直角坐标又称为笛卡儿坐标，这是为了纪念法国数学家笛卡儿对数学所作出的贡献而命名的.

1. 笛卡儿创立了直角坐标系，进而又创立了解析几何学，将“数”与“形”联系了起来，为微积分的创立奠定了基础.

2. 本章章前图选用的是中华人民共和国成立60周年庆典活动中，在天安门广场上出现的一幅背景图案. 组成这幅背景图案，需要广场上手持红花或黄花的学生按照指挥员的口令，根据自己所在的行和列举起红花或黄花. 这实际上就是用有序数对来确定一个点的位置的问题.

3. 与章前图配合，引言说明了背景图案的组成方法，指出利用“第几排第几列”来确定学生的位置. 这样就从实际情境出发点出利用有序数对可以确定物体的位置，进而说明在数学中可以通过建立平面直角坐标系，利用有序数对来确定一个点的位置，点出本章所要研究的主要内容. 最后说明平面直角坐标系建立了点与有序实数对的一一对应，其意义在于使几何问题和代数问题可以互相转化.

[1] 教学中，可以让学生举出几个生活中利用有序数对的例子，让学生充分体会有序数对的特征.

7.1 平面直角坐标系

7.1.1 有序数对

我们都有去影剧院看电影的经历. 你一定知道，影剧院对观众席的所有座位都按“几排几号”编号，以便确定每一个座位在影剧院中的位置. 这样，观众就能根据入场券上的“排数”和“号数”准确地“对号入座”.

这种办法在日常生活中是常用的.[1] 比如，当发现一本书上某页有一处印刷错误时，你可以怎样告诉其他同学这一处的位置呢？又如，假设根据教室平面图（图 7.1-1）写出如下通知，你知道哪些同学参加讨论吗？

“请以下座位的同学今天放学后参加数学问题讨论：

(1，5)，(2，4)，(4，2)，(3，3)，(5，6).”

(2，1)和(1，2)是同一位置吗？

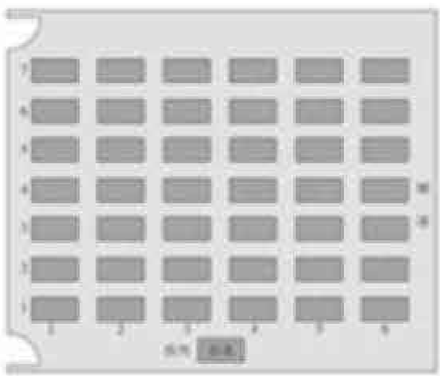


图 7.1-1

54 第七章 平面直角坐标系

1. 教科书利用几个生活中常见的例子介绍有序数对. 如在本章引言中通过背景图案的组成引出有序数对. 在本节一开始举出确定电影院中座位的位置的实例，对于这个例子，教科书做了较详细的说明，指出利用入场券上的“排数”和“号数”可以准确地确定位置. 这个例子配有一幅插图. 在图中，一名同学坐在“9 排 7 号”的座位上，另一名同学拿着座位是“7 排 9 号”的票找座位，这个插图的意思是要体现“7 排 9 号”和“9 排 7 号”对应着不同的座位，体现有序数对中的顺序的作用.

接着教科书又举出了如何说出一本书中某一页的印刷错误，如何在教室中确定学生座位的位置的问题等. 解决这些问题都可以利用有序数对简洁明白地说清楚.

2. 教科书围绕着确定教室中学生的座位这个例子展开对有序数对的讨论. 首先设置一个问题情境，要求学生根据一个通知，找到参加数学

思考

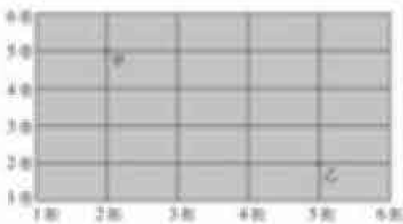
怎样确定教室里座位的位置？排数和列数的先后顺序对位置有影响吗？假设我们约定“列数在前，排数在后”，请你在图 7.1-1 上标出被邀请参加讨论的同学的座位.

上面的问题都是通过像“9 排 7 号”“第 1 列第 5 排”这样含有两个数的表达方式来表示一个确定的位置，其中两个数各自表示不同的含义，例如前边的表示“排数”，后边的表示“号数”. 我们把这种有顺序的两个数 a 与 b 组成的数对，叫做**有序数对**（ordered pair），记作 (a, b).

利用有序数对，可以准确地表示出一个位置. 生活中利用有序数对表示位置的情况是很常见的，如人们常用经纬度来表示地球上的地点等. 你能再举出一些例子吗？

练习

如图，甲处表示 2 街与 5 巷的十字路口，乙处表示 5 街与 2 巷的十字路口. 如果用 (2, 5) 表示甲处的位置，那么“(2, 5) → (3, 5) → (4, 5) → (5, 5) → (5, 4) → (5, 3) → (5, 2)”表示从甲处到乙处的一种路线. 请你用这种形式写出几种从甲处到乙处的路线.



7.1.2 平面直角坐标系

图 7.1-2 是一条数轴. 数轴上的点与实数是一一对应的. 数轴上每个点都对应一个实数，这个实数叫做这个点在数轴上的坐标. 例如，点 A 在数轴上的坐标为 -4，点 B 在数轴上的坐标为 2. 反过来，知道数轴上一个点的坐标，这个点在数轴上的位置也就确定了. 例如，数轴上坐标为 5 的点是点 C.

练习答案

从甲处到乙处的路线有多种，例如(2, 5) ⟶ (2, 4) ⟶ (2, 3) ⟶ (2, 2) ⟶ (3, 2) ⟶ (4, 2) ⟶ (5, 2) 等.

问题讨论的同学. 在通知中，参加数学讨论的学生是根据学生的座位来确定的，这些学生的座位是利用有序数对表示出来的. 接下来，教科书设置了一个“思考”栏目，根据这个问题情境，提出几个体现有序数对特征的问题，最后结合这些问题，给出有序数对的概念.

在这个问题情境中，确定学生的位置时，专门给出了两个有序数对 (2, 4)，(4, 2)，并在边空提出它们是否表示同一个位置的问题，这是为了强调有序数对中两个数的顺序的重要性.

3. 用经纬度表示地球上的地点，也是利用有序数对来确定位置的. 关于这个内容，教科书在本节后面安排了一个“阅读与思考”，可以引导有兴趣的学生阅读.

4. 对于有序数对的学习，教科书是密切联系实际的，教学中可以请学生再举出一些例子，让学生充分体会有序数对在实际中的作用.

[1] 教学中，可以建议学生查阅资料，了解数学家笛卡儿的生平、平面直角坐标系的产生以及它对数学的影响等.

[2] 点 B，C，D 的坐标分别是 $(-3，-4)$，$(0，2)$，$(0，-3)$.

图 7.1-2

思考

类似于利用数轴确定直线上点的位置，能不能找到一种办法来确定平面内的点的位置呢（例如图 7.1-3 中 A，B，C，D 各点）？

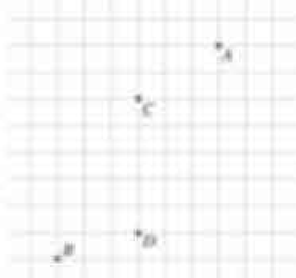


图 7.1-3

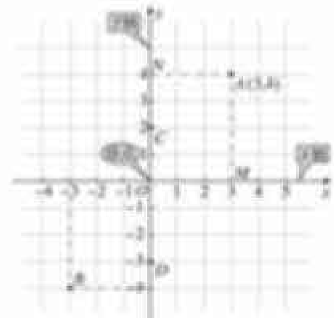


图 7.1-4

如图 7.1-4，我们可以在平面内画两条互相垂直、原点重合的数轴，组成**平面直角坐标系**（rectangular coordinate system）. 水平的数轴称为 x 轴（x-axis）或**横轴**，习惯上取向右为正方向；竖直的数轴称为 y 轴（y-axis）或**纵轴**，取向上方向为正方向；两坐标轴的交点为平面直角坐标系的**原点**.

法国数学家笛卡儿（Descartes，1596—1650），最早引入坐标系，用代数方法研究几何图形.[1]

有了平面直角坐标系，平面内的点就可以用一个有序数对来表示了. 例如，如图 7.1-4，由点 A 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足 M 在 x 轴上的坐标是 3，垂足 N 在 y 轴上的坐标是 4，我们说点 A 的横坐标是 3，纵坐标是 4，有序数对 $(3，4)$ 就叫做点 A 的**坐标**（coordinate），记作 $A(3，4)$. 类似地，请你写出点 B，C，D 的坐标：B(_，_)，C(_，_)，D(_，_).[2]

5. 第 7.1.2 小节首先从学生熟悉的数轴出发，给出点在数轴上的坐标的定义，建立了点与坐标的对应关系，从而得到确定直线上点的位置的方法. 接下去教科书设置了一个“思考”栏目，要求学生类比利用数轴确定直线上点的位置的方法，寻找一种方法来确定平面内的点的位置，从而引出本小节的主要课题——平面直角坐标系. 引入还要注意结合有序数对的内容.

6. 平面直角坐标系是以数轴为基础的，两者之间存在着密切的联系. 平面直角坐标系的构成是两条相互垂直、原点重合的数轴. 坐标平面内点的坐标是根据数轴上点的坐标定义的，具体来说，过这个点作 x 轴的垂线，垂足在 x 轴上的坐标叫做这个点的横坐标，类似地，可以定义这个点的纵坐标. 平面内点与坐标的对应关系类似于数轴上点与坐标的对应关系. 因此教学中可以充分体现平面直角坐标系与数轴的联系，利用类比，使学生容易掌握平面直角坐标系的有关内容.

思考

原点 O 的坐标是什么？x 轴和 y 轴上的点的坐标有什么特点？

可以看出，原点 O 的坐标为 $(0,0)$；x 轴上的点的纵坐标为 0，例如 $(1,0)$，$(-1,0)$，…；y 轴上的点的横坐标为 0，例如 $(0,1)$，$(0,-1)$，….

建立了平面直角坐标系以后，坐标平面就被两条坐标轴分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分（图 7.1-5），每个部分称为**象限**（quadrant），分别叫做第一象限、第二象限、第三象限和第四象限．坐标轴上的点不属于任何象限.

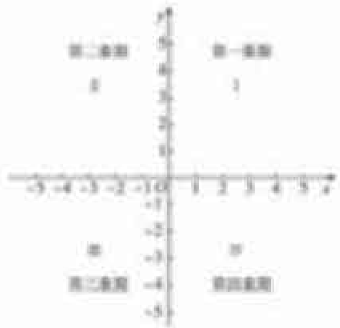


图 7.1-5

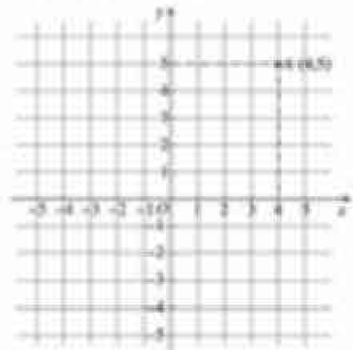


图 7.1-6

例 在平面直角坐标系（图7.1-6）中描出下列各点：

$A(4,5)$，$B(-2,3)$，$C(-4,-1)$，$D(2.5,-2)$，$E(0,-4)$.

解：如图7.1-6，先在 x 轴上找出表示 4 的点，再在 y 轴上找出表示 5 的点，过这两个点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂线的交点就是点 A.[1]

类似地，请你在图 7.1-6 上描出点 B，C，D，E.

我们知道，数轴上的点与实数是一一对应的．我们还可以得出，对于坐标平面内任意一点 M，都有唯一的一对有序实数 (x,y)（即点 M 的坐标）和它对应；反过来，对于任意一对有序实数 (x,y)，在坐标平面内都有唯一的一点 M（即坐标为 (x,y) 的点）和它对应．也就是说，坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的.

第七章　平面直角坐标系　67

[1] 这样描出点 A 的依据是点的坐标的定义．点 A 的横坐标是 4，表明点 A 在过 x 轴上表示 4 的点，且与 x 轴垂直的直线上；点 A 的纵坐标是 5，表明点 A 在过 y 轴上表示 5 的点，且与 y 轴垂直的直线上．这两条直线的交点就是横坐标是 4，纵坐标是 5 的点，即点 A.

7. 对于平面直角坐标系，教科书结合着它的画法介绍有关的概念．有关直角坐标系的概念较多，有横轴、纵轴、原点、坐标、象限等，教学时要紧密结合坐标系，让学生对这些概念有个初步的认识，不要死记硬背定义，而是在平面直角坐标系中理解相关的概念.

8. 在平面直角坐标系的几个概念中，坐标应该是较为重要的一个，点与坐标的对应关系是本小节所要研究的主要问题．点的坐标是用有序数对表示的，利用有序数对可以确定位置，这在上一个小节已经学习，因此很自然地过渡到利用点的坐标可以确定点的位置．教学中可以把第 7.1.1 节和第 7.1.2 节两个小节的内容联系起来，加深对平面直角坐标系的理解.

9. 教科书在边空给出了法国数学家笛卡儿的画像和简单的介绍，教学时可以结合本节内容，要求学生对笛卡儿以及他对数学的发展所作出的贡献有所了解，对学生进行数学文化方面的熏陶.

[1] y 轴是 AD 所在直线. 正方形顶点的坐标分别是 $A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(6,6)$，$D(0,6)$.

[2] 第1题给出了表示点 B 的有序数对 $(5,2)$，这就给出了对顺序的规定.

探究

如图7.1-7，正方形 $ABCD$ 的边长为6，如果以点 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，那么 y 轴是哪条线？写出正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标.[1]

请另建立一个平面直角坐标系，这时正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标又分别是什么？与同学们交流一下.

图7.1-7

练习

1. 写出图中点 A，B，C，D，E，F 的坐标.

（第1，2题）

2. 在图中描出下列各点：

$L(-5,-3)$，$M(4,0)$，$N(-6,2)$，$P(5,-3.5)$，$Q(0,5)$，$R(6,2)$.

习题7.1

复习巩固

1. 如图，写出表示下列各点的有序数对：[2]

A(__，__)；$B(5，2)$；C(__，__)；D(__，__)；E(__，__)；F(__，__)；G(__，__)；H(__，__)；I(__，__).

68 第七章 平面直角坐标系

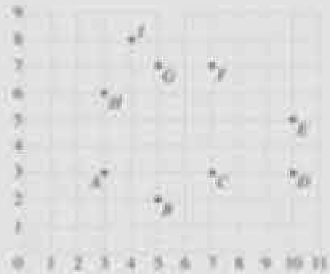
练习答案

1. $A(-2,-2)$，$B(-5,4)$，$C(5,-4)$，$D(0,-3)$，$E(2,5)$，$F(-3,0)$.
2. （图略）.

10. 坐标平面被两条坐标轴分成四个部分，区别这四个部分，可以利用象限的概念. 关于在不同象限中的点的坐标的符号问题，教科书在习题7.1的第2题做了专门的安排，教学中可以根据学生的实际情况，适当加以联系.

11. 例题要求在给定的直角坐标系中，根据点的坐标描出点的位置，例题针对一个第一象限的点 $A(4,5)$，详细介绍了描出这个点的方法，其余的几个点要求学生自己描出. 点 A 的坐标都是正数，而其余几个点的坐标有负数和0的情况，这些点留给学生描出，是希望给学生提供自己探索学习的机会.

12. 在第7.1.2小节的“探究”中，给出了边长为6的正方形 $ABCD$，建立平面直角坐标系，就可以写出正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标. 选定原点与坐标轴就建立了平面直角坐标系，“探究”中给出了一个平面直角坐标系，并要求学生另外建立平面直角坐标系. 建立合适的

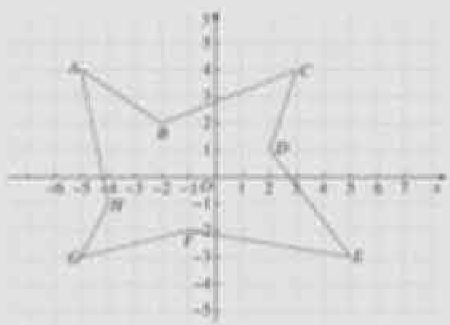


（第1题）

2. 根据点所在的位置，用“+”“-”填表.[1]

点的位置	横坐标符号	纵坐标符号
在第一象限	+	+
在第二象限		
在第三象限		
在第四象限		

3. 如图，写出图中标有字母的各点的坐标，并指出它们的横坐标和纵坐标.



（第3题）

4. 在平面直角坐标系中，描出下列各点：

点 A 在 y 轴上，位于原点上方，距离原点 2 个单位长度；

点 B 在 x 轴上，位于原点右侧，距离原点 1 个单位长度；

点 C 在 x 轴上方，y 轴右侧，距离每条坐标轴都是 2 个单位长度；

点 D 在 x 轴上，位于原点右侧，距离原点 3 个单位长度；

[1] 本题是讨论位于不同象限的点的坐标的符号问题. 要注意让学生对这些不同位置的点的坐标进行比较.

平面直角坐标系，便于写出正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标. 在这个探究中，可以以顶点 A，B，C，D，边的中点或正方形的中心为原点，以与正方形的边平行或垂直的直线为坐标轴建立坐标系. 另外一方面，由一个正方形的四个顶点的坐标，可以确定这个正方形的四个顶点的位置，进而确定这个正方形. 也就是说，可以用坐标刻画一个图形上的关键点，从而刻画这个图形. 可以让学生通过这个“探究”栏目对这一点也有所体会.

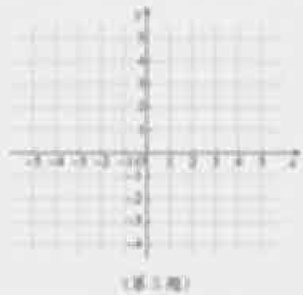
习题 7.1

1. 习题 7.1 通过 6 道“复习巩固”层次的题目要求学生对本节所学内容和方法进行全面复习. 第 1 题是复习有序数对的内容，让学生用有序数对表示一些点的位置. 第 2 题需要学生探索得出规律性的结论，有一定的思考难度. 第 3 题复习点的坐标的概念，让学生在给定的坐标系中

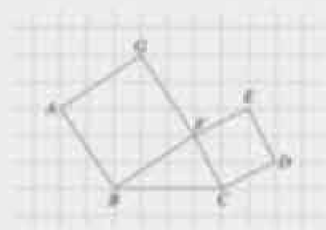
[1] 本题中给出 B，C 两点的坐标 $B(0, 0)$，$C(4, 0)$，实际上也就给出了原点、x 轴的位置和单位长度.

点 E 在 x 轴上方，y 轴左侧，距离 x 轴 2 个单位长度，距离 y 轴 4 个单位长度.
依次连接这些点，你能得到什么图形？

5. 如图，在所给的坐标系中描出下列各点.
$A(-4, -4)$，$B(-2, -2)$，$C(3, 3)$，$D(5, 5)$，$E(-3, -3)$，$F(0, 0)$.
这些点有什么关系？你能再找出一些类似的点吗？



（第 5 题）



（第 6 题）

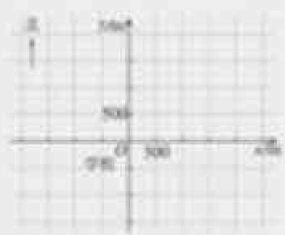
6. 如图，建立平面直角坐标系，使点 B，C 的坐标分别为 $(0, 0)$ 和 $(4, 0)$，写出点 A，D，E，F，G 的坐标，并指出它们所在的象限.[1]

综合运用

7. 在平面直角坐标系中描出下列各组点，并将各组内的点用线段依次连接起来.
(1) $(-5, 0)$，$(-4, 3)$，$(-3, 0)$，$(-2, 3)$，$(-1, 0)$，$(-5, 0)$；
(2) $(2, 1)$，$(6, 1)$，$(6, 3)$，$(7, 3)$，$(4, 6)$，$(1, 3)$，$(2, 3)$，$(2, 1)$.
观察得到的图形，你觉得它们像什么？求出所得到图形的面积.

8. 建立一个平面直角坐标系，描出点 $A(-2, 4)$，$B(3, 4)$，画直线 AB. 若点 C 为直线 AB 上的任意一点，则点 C 的纵坐标是什么？想一想：
(1) 如果一些点在平行于 x 轴的直线上，那么这些点的纵坐标有什么特点？
(2) 如果一些点在平行于 y 轴的直线上，那么这些点的横坐标有什么特点？

9. 李强同学家在学校以东 1 000 m 再往北 1 500 m 处，张明同学家在学校以西 2 000 m 再往南 500 m 处，王玲同学家在学校以南 1 500 m 处. 如图，在坐标系（规定一个单位长度代表 1 m 长）中画出这三位同学家的位置，并用坐标表示出来.

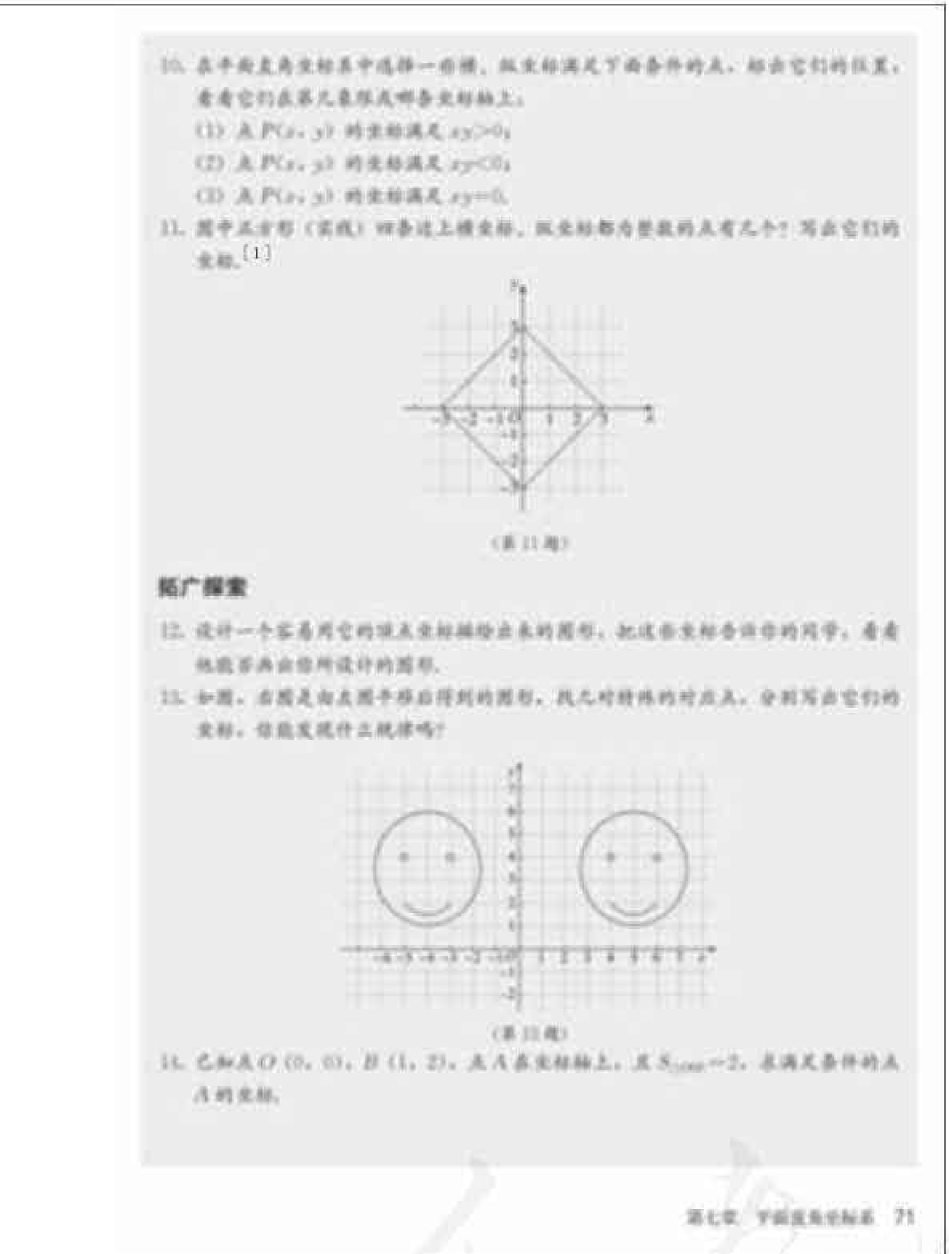


（第 9 题）

70 第七章 平面直角坐标系

写出一些点的坐标. 第 4 题是根据条件确定一些点，进而得到由这些点确定的图形，可以复习平面直角坐标系的有关概念. 第 5 题要求分析给出的几个点的坐标，发现它们的共同特征，找到规律，再利用这个规律找出几个具有这种特征的点，有一定的趣味性. 第 6 题要根据题目的条件建立坐标系，进而写出一些点的坐标，并确定这些点所在的象限.

2. “综合运用”有 5 道题. 第 7 题是根据点的坐标确定点的位置，进而得到由这些点确定的图形，并求出图形的面积，要运用平面直角坐标系的有关概念. 第 8 题是让学生思考平行于 x 轴（y 轴）的直线上的点的坐标的特点. 第 9 题，是在给定的坐标系中，利用坐标确定三位同学家的地理位置的题目. 这道题是平面直角坐标系在实际生活中的应用，也为下一节的学习作些铺垫. 第 10 题要注重对条件的分析，如在第（1）小题中，由 $xy>0$ 得 $x>0$ 且 $y>0$，或 $x<0$ 且



10. 在平面直角坐标系中选择一些横、纵坐标满足下面条件的点，标出它们的位置，看看它们在第几象限或哪条坐标轴上：

(1) 点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $xy>0$；

(2) 点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $xy<0$；

(3) 点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $xy=0$.

11. 图中正方形（实线）四条边上横坐标、纵坐标都为整数的点有几个？写出它们的坐标.[1]

（第11题）

拓广探索

12. 设计一个容易用它的顶点坐标描绘出来的图形，把这些坐标告诉你的同学，看看他能否画出你所设计的图形.

13. 如图，右图是由左图平移后得到的图形，找几对特殊的对应点，分别写出它们的坐标，你能发现什么规律吗？

（第13题）

14. 已知点 $O(0, 0)$，$B(1, 2)$，点 A 在坐标轴上，且 $S_{\triangle OAB}=2$，求满足条件的点 A 的坐标.

第七章 平面直角坐标系 71

[1] 满足条件的点有多个，写出这些点的坐标时要注意不重不漏. 可以先写出 $(3, 0)$，再按逆时针方向依次写出满足条件的另外一些点的坐标.

$y<0$，由此确定满足条件的点所在的象限. 第 11 题是确定一些用有序整数对表示的点的坐标.

3. “拓广探索”有 3 道题. 第 12 题让学生开展设计活动，有些图形可以由这些图形上的一些点确定，知道这些点的坐标就可以得到这些图形. 第 13 题是讨论在平面直角坐标系下，图形平移后，新图形与原图形的对应点的坐标的变化规律. 利用坐标分析平移，可以更清楚地看到平移的基本特征，这道题目是为学习下一节用坐标表示平移作准备. 第 14 题要注意运用题目的条件，如由点 A 在坐标轴上得点 A 在 x 轴或 y 轴上，由点 B 的坐标得三角形 OAB 的高.

阅读与思考

用经纬度表示地理位置

怎样表示地理位置呢？通过地球上的经度和纬度，人们可以确定一个地点在地球上的位置。

不管在地球仪上，还是在各种地图上都布满了细线网，这就是经线和纬线。地图上水平方向的线是纬线，它们用度（°）来表示地理纬度。赤道上所有的点是0纬度，北极对应北纬90°，南极对应南纬90°。北京位于北纬39.9°，但仅用纬度确定北京的位置还是不够的，还需要第二个坐标——经度。

地图上竖直方向的线是经线，它们也用度（°）来表示地理经度。经过英国格林尼治（Greenwich）天文台的经线是初始经线（0经度）。它东面的所有点有东经度值（从0°到180°），西面的点有西经度值。例如北京位于东经116.4°，再加上北京位于北纬39.9°，就能确定北京在地球上的位置了。

由于地球可近似地看作一个球体，所以经线和纬线在地球表面构成一个坐标网。经线沿东西方向分布，纬线沿南北方向分布。给出一点的经度和纬度，就可以确定这一点在地球上的位置。

以下是某气象台发布的一次热带风暴的风暴中心位置的一组信息：

9月25日16时，北纬17.9°，东经115.4°.

9月27日11时，北纬21.4°，东经118.6°.

右图是利用经纬度画出的地图的一部分，你能在它上面找到这次热带风暴的风暴中心在上述两个时刻的位置吗？

72 第七章 平面直角坐标系

阅读与思考

1. 用经纬度表示地理位置在第 7.1.1 小节介绍有序数对时提到过，可以结合正文内容的学习，让有兴趣的学生阅读，了解有序数对在实际中的应用.

2. 利用经纬度确定地球上一个地点的地理位置，是一个较好地体现有序数对在生活中的应用的实例. 这个素材对学生有一定的吸引力，与地理等相关学科有密切联系，教学中可以充分利用这个素材，让学生查阅资料，了解更多的有关确定地理位置的知识，培养学生查阅资料获得信息的能力.

7.2 坐标方法的简单应用

7.2.1 用坐标表示地理位置

思考

不管是出差办事，还是出去旅游，人们都愿意带上一幅地图，它给人们出行带来了很大方便。如图 7.2-1，这是北京市地图的一部分，你知道怎样用坐标表示地理位置吗？

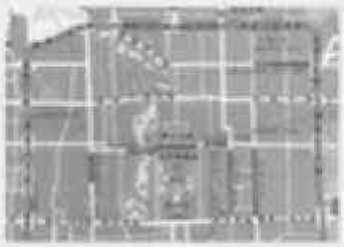


图 7.2-1

探究

根据以下条件画一幅示意图，标出学校和小刚家、小强家、小敏家的位置。

小刚家：出校门向东走 1 500 m，再向北走 2 000 m.

小强家：出校门向西走 2 000 m，再向北走 3 500 m，最后向东走 500 m.

小敏家：出校门向南走 1 000 m，再向东走 3 000 m，最后向南走 750 m.

如图 7.2-2，选学校所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向建立平面直角坐标系，规定一个单位长度代表 1 m 长。依题目所给条件，点 (1 500，2 000) 就是小刚家的位置。

类似地，请你在图 7.2-2 上画出小强家、小敏家的位置，并标明它们的坐标。[1]

第七章　平面直角坐标系　73

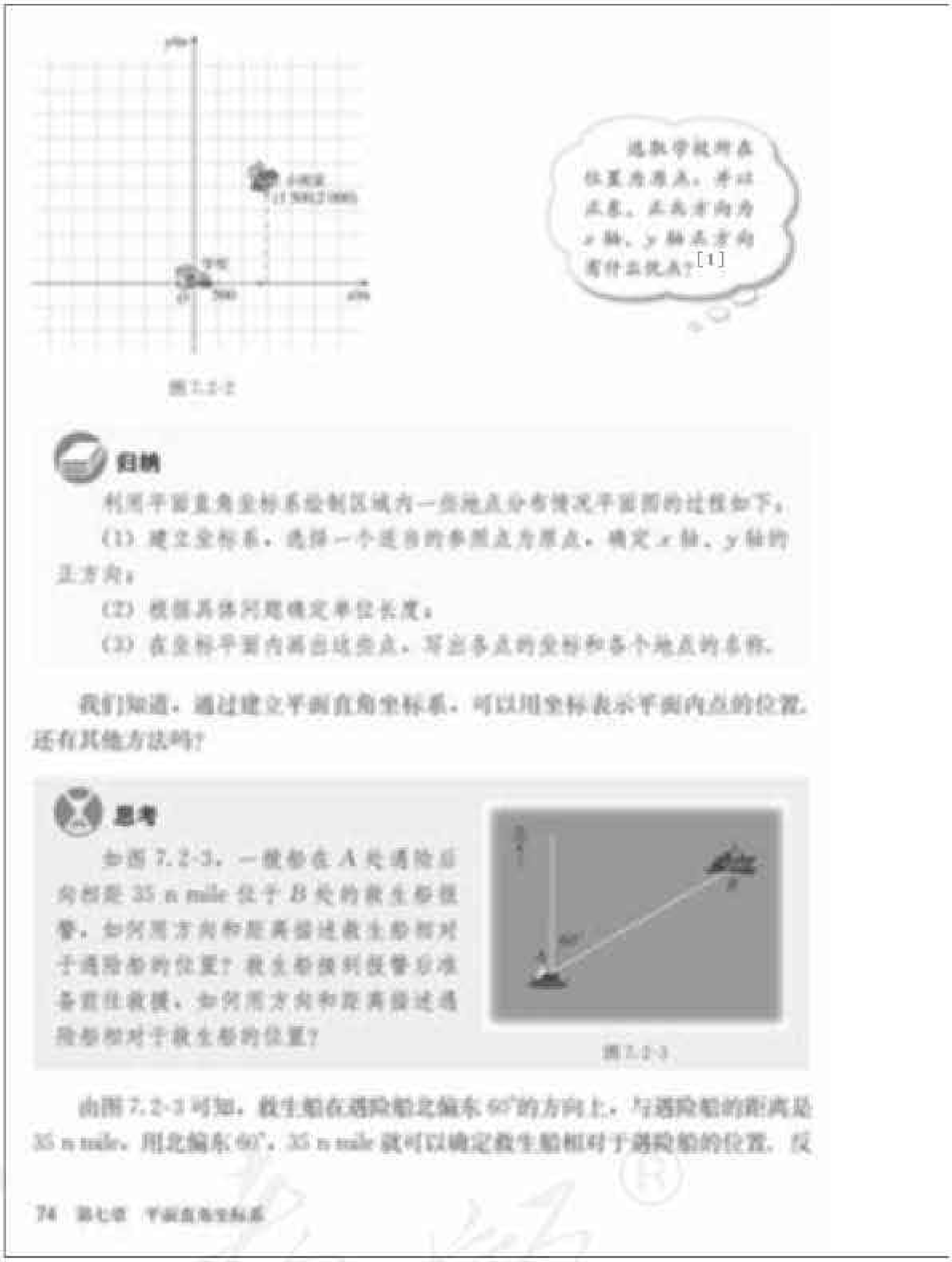
[1] 小强家、小敏家的位置分别是 (−1 500，3 500)，(3 000，−1 750).

1. 平面直角坐标系的应用十分广泛. 本节主要学习平面直角坐标系在确定地理位置和表示平移中的应用. 通过本节的学习，应当使学生掌握通过建立适当的直角坐标系描述地理位置的方法，以及在平面直角坐标系下图形的平移与图形上的点的坐标的变化的关系，体会平面直角坐标系的作用.

2. 用坐标表示地理位置体现了坐标系在实际生活中的应用. 教科书首先设置一个“思考”栏目，让学生思考在地图上一个地点的地理位置是如何表示的，通过这个“思考”栏目，可以让学生看到，用坐标可以清楚地表示地理位置，由此引出建立适当的坐标系表示地理位置的内容.

3. 用坐标可以表示地理位置，这一点学生比较容易理解，难点在于如何建立一个适当的坐标系. 我们习惯选取向东、向北分别为 x 轴、y 轴正方向，因此建立坐标系的关键是确定原点的位置，这要根据实际情况，一般来讲，要选择明

[1] 选取学校所在位置为原点，并以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向，可以容易地写出三位同学家的位置的坐标.



选取学校所在位置为原点，并以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向有什么优点？[1]

图 7.2-2

归纳

利用平面直角坐标系绘制区域内一些地点分布情况平面图的过程如下：

(1) 建立坐标系，选择一个适当的参照点为原点，确定 x 轴、y 轴的正方向；

(2) 根据具体问题确定单位长度；

(3) 在坐标平面内画出这些点，写出各点的坐标和各个地点的名称.

我们知道，通过建立平面直角坐标系，可以用坐标表示平面内点的位置. 还有其他方法吗？

思考

如图 7.2-3，一艘船在 A 处遇险后向相距 35 n mile 位于 B 处的救生船报警. 如何用方向和距离描述救生船相对于遇险船的位置？救生船接到报警后准备前往救援，如何用方向和距离描述遇险船相对于救生船的位置？

图 7.2-3

由图 7.2-3 可知，救生船在遇险船北偏东 60° 的方向上，与遇险船的距离是 35 n mile. 用北偏东 60°，35 n mile 就可以确定救生船相对于遇险船的位置. 反

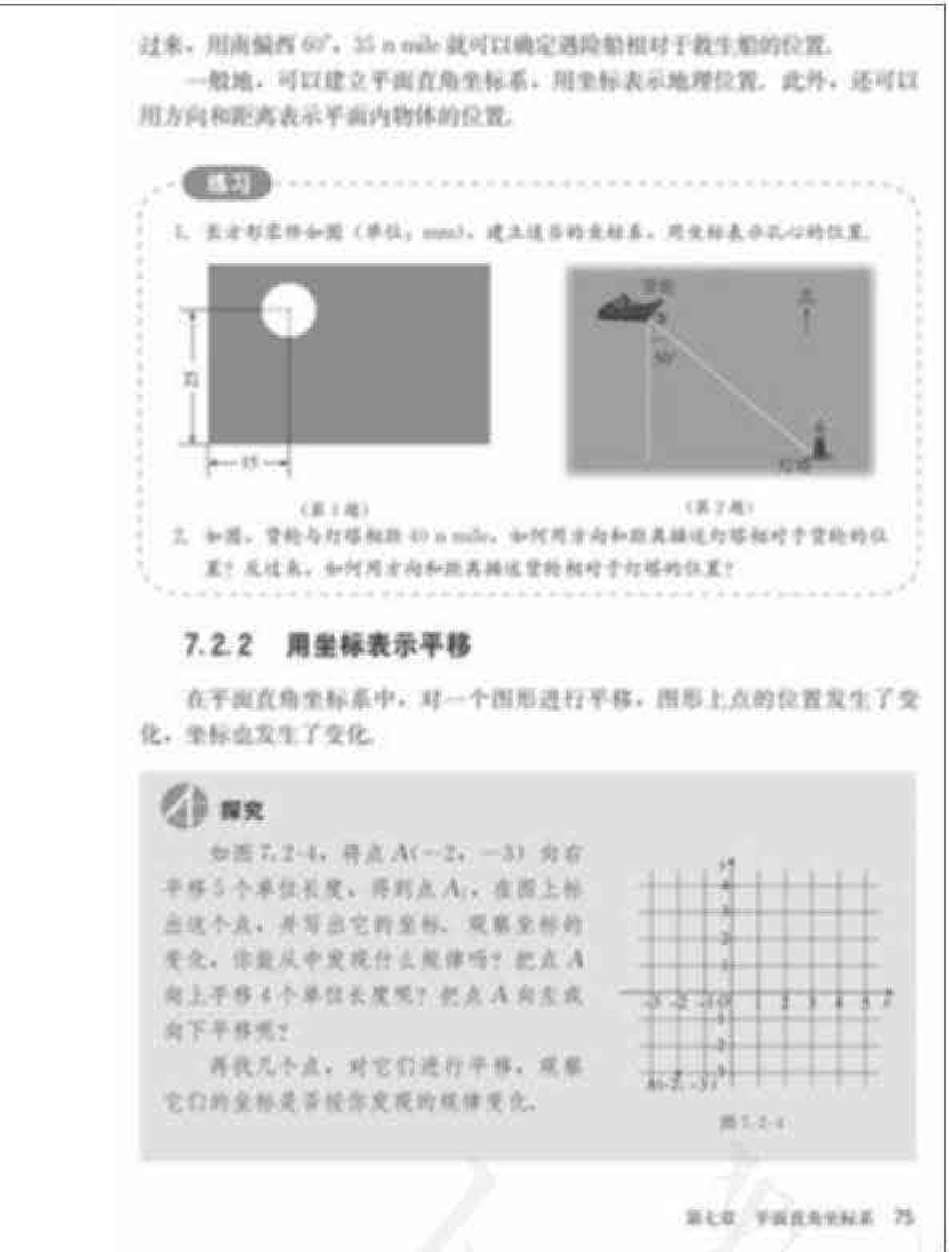
74 第七章 平面直角坐标系

显的或大家熟悉的地点为原点，这样能够清楚地表明其他各地点位置.

4. 教科书中的“探究”栏目提供了一个问题情境，要求学生根据问题中给出的条件，建立直角坐标系，画出示意图. 根据问题中的条件，很容易想到以学校为原点建立坐标系，教科书就采用了这样的做法. 另外，教科书在边空提出问题，让学生体会采用这种做法建立坐标系的优点. 教学时也可以结合习题 7.2 的第 5 题或数学活动 2 进行，让学生体会如何确定原点能更清楚地描述地理位置.

5. 确定坐标轴上的单位长度是建立直角坐标系的重要步骤. 本章中横轴和纵轴的单位长度是相等的，对于不相等的情况在以后的学习中将结合实际问题加以介绍.

6. 教科书对于建立直角坐标系画出一些地点的平面示意图的过程进行了归纳，教学中，可以在学生思考、探究等活动的基础上由学生归纳得出.



过来，用南偏西60°，35 n mile就可以确定遇险船相对于救生船的位置.

一般地，可以建立平面直角坐标系，用坐标表示地理位置. 此外，还可以用方向和距离表示平面内物体的位置.

练习

1. 长方形零件如图（单位：mm），建立适当的坐标系，用坐标表示孔心的位置.

（第1题）　　（第2题）

2. 如图，货轮与灯塔相距40 n mile，如何用方向和距离描述灯塔相对于货轮的位置？反过来，如何用方向和距离描述货轮相对于灯塔的位置？

7.2.2　用坐标表示平移

在平面直角坐标系中，对一个图形进行平移，图形上点的位置发生了变化，坐标也发生了变化.

探究

如图7.2-4，将点$A(-2,-3)$向右平移5个单位长度，得到点A_1，在图上标出这个点，并写出它的坐标，观察坐标的变化，你能从中发现什么规律吗？把点A向上平移4个单位长度呢？把点A向左或向下平移呢？

再找几个点，对它们进行平移，观察它们的坐标是否按你发现的规律变化.

图7.2-4

第七章　平面直角坐标系　75

练习答案

1. 以长方形左下角的顶点为原点，长所在的直线为x轴（向右为正方向），宽所在的直线为y轴（向上为正方向）建立直角坐标系，则孔心的坐标是（15，25）.
2. 灯塔在货轮的南偏东50°，40 n mile处. 货轮在灯塔的北偏西50°，40 n mile处.

7. “探究”栏目的内容与生活实际联系密切，活动性也比较强，学生可能比较感兴趣. 教学中可以充分调动学生的积极性，让学生通过自主探究、合作交流等方式完成相应的学习任务，改变学生的学习方式.

8. 在用坐标表示地理位置的内容之后，教科书启发学生思考还有没有其他方法可以用来表示平面内物体的位置. 然后设置“思考”栏目，让学生对用方向和距离表示平面内物体的位置的方法有所了解. 在图7.2-3中，射线AB在南北方向的右侧，与正北方向所成的角是60°，所以救生船在遇险船北偏东60°的方向上，再由AB的长就可以确定救生船相对于遇险船的位置. 反过来，射线BA在南北方向的左侧，由两直线平行，内错角相等得，射线BA与正南方向所成的角是60°，所以遇险船在救生船南偏西60°的方向上，再由AB的长就可以确定遇险船相对于救生船的位置.

[1] 将顶点 A，B，C，D 的横坐标分别加 8，纵坐标分别减去 7，就得到点 E，F，G，H 的坐标.

一般地，在平面直角坐标系中，将点 $(x,\ y)$ 向右（或左）平移 a 个单位长度，可以得到对应点 $(x+a,\ y)$（或 $(x-a,\ y)$）；将点 $(x,\ y)$ 向上（或下）平移 b 个单位长度，可以得到对应点 $(x,\ y+b)$（或 $(x,\ y-b)$）.

探究

如图 7.2-5，正方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(-2,\ 4)$，$B(-2,\ 3)$，$C(-1,\ 3)$，$D(-1,\ 4)$，将正方形 $ABCD$ 向下平移 7 个单位长度，再向右平移 8 个单位长度，两次平移后四个顶点相应变为点 E，F，G，H，它们的坐标分别是什么？如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和我们前面得到的正方形位置相同吗？

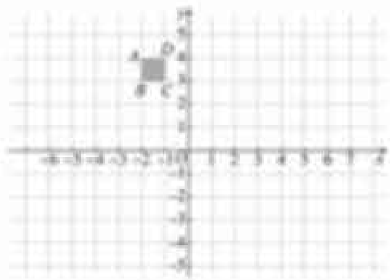


图 7.2-5

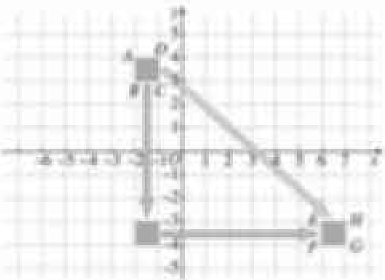


图 7.2-6

可求出点 E，F，G，H 的坐标分别是 $(6,\ -3)$，$(6,\ -4)$，$(7,\ -4)$，$(7,\ -3)$.[1] 如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和我们前面得到的正方形位置相同（图 7.2-6）.

一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到.

对一个图形进行平移，这个图形上所有点的坐标都要发生相应的变化；反过来，从图形上的点的坐标的某种变化，我们也可以看出对这个图形进行了怎样的平移.

例 如图 7.2-7（1），三角形 ABC 三个顶点的坐标分别是 $A(4,\ 3)$，$B(3,\ 1)$，$C(1,\ 2)$.

（1）将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，纵坐标不变，分别得到

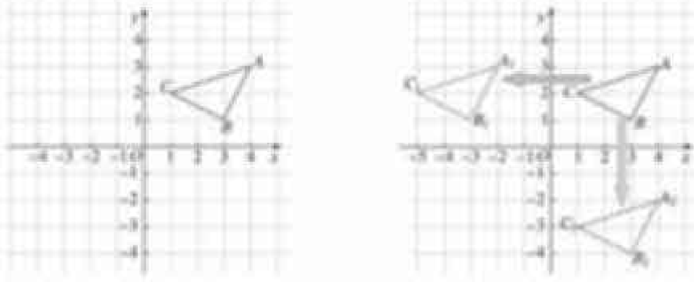
76 第七章 平面直角坐标系

9. 用坐标表示平移体现了平面直角坐标系在数学中的作用. 第 7.2.2 小节主要研究了两个方面的问题，一个是图形的平移引起的图形上的点的坐标的变化规律，另一个是图形上点的坐标的某种变化引起的图形的平移.

10. 在第 7.2.2 小节中，教科书首先设置一个“探究”栏目，让学生探究将几个已知坐标的点上、下、左、右平移后得到新的点，对应点的坐标之间有怎样的变化规律. 在这个“探究”中，将点 $A(-2,\ -3)$ 向右平移 5 个单位长度，得到点 A_1，它的坐标是 $(3,\ -3)$. 观察点 A，点 A_1 的坐标可以发现：点 A_1 的横坐标等于点 A 的横坐标加 5，它们的纵坐标相同. 类似地，将点 A 向上或向左或向下平移某个单位长度，找出平移后得到的点的坐标与点 A 的坐标的关系. 然后再找几个点，对它们进行平移，看看是否也有同样的关系，从而归纳出一般规律.

点 A_1，B_1，C_1，依次连接 A_1，B_1，C_1 各点，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？

（2）将三角形 ABC 三个顶点的纵坐标都减去 5，横坐标不变，分别得到点 A_2，B_2，C_2，依次连接 A_2，B_2，C_2 各点，所得三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？



（1）　　　　（2）

图 7.2-7

解：如图7.2-7（2），所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，三角形 $A_1B_1C_1$ 可以看作将三角形 ABC 向左平移 6 个单位长度得到．类似地，三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，它可以看作将三角形 ABC 向下平移 5 个单位长度得到．

思考

（1）如果将这个问题中的“横坐标都减去 6”“纵坐标都减去 5”相应地变为“横坐标都加 3”“纵坐标都加 2”，分别能得出什么结论？[1] 画出得到的图形．

（2）如果将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，同时纵坐标都减去 5，能得到什么结论？[2] 画出得到的图形．

一般地，在平面直角坐标系内，如果把一个图形各个点的横坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形就是把原图形向右（或向左）平移 a 个单位长度；如果把它各个点的纵坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形就是把原图形向上（或向下）平移 a 个单位长度．

第七章　平面直角坐标系　77

[1] 如果将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都加 3，纵坐标不变，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 可以看作将三角形 ABC 向右平移 3 个单位长度得到的；如果将三角形 ABC 三个顶点的纵坐标都加 2，横坐标不变，所得三角形 $A_2B_2C_2$ 可以看作将三角形 ABC 向上平移 2 个单位长度得到的．

[2] 如果将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，纵坐标都减去 5，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 可以看作将三角形 ABC 先向左平移 6 个单位长度，再向下平移 5 个单位长度得到的．

将一个点沿水平或竖直方向以外的方向平移，得到新的点，这个新的点也可以通过先作一次水平方向的平移，再作一次竖直方向的平移得到．

接下来设置一个“探究”栏目，让学生确定一个正方形 $ABCD$ 依次沿两个坐标轴方向平移所得到的正方形 $EFGH$ 的顶点的坐标，并了解正方形 $EFGH$ 也可以通过将正方形 $ABCD$ 作一次平移得到．

11. 教科书通过一个例题和一个“思考”栏目，讨论了三角形的三个顶点坐标按照某种规律（比如三个顶点的横坐标都减去 6）进行变化后，得到的新图形与原图形的关系．对于例题，可以在教师的引导下，师生共同解答，重点放在让学生体会解决问题的方法上；对于“思考”栏目中的问题，可以让学生结合例题中思考问题的方法，由学生探索解决，最后由学生得出一般结论．

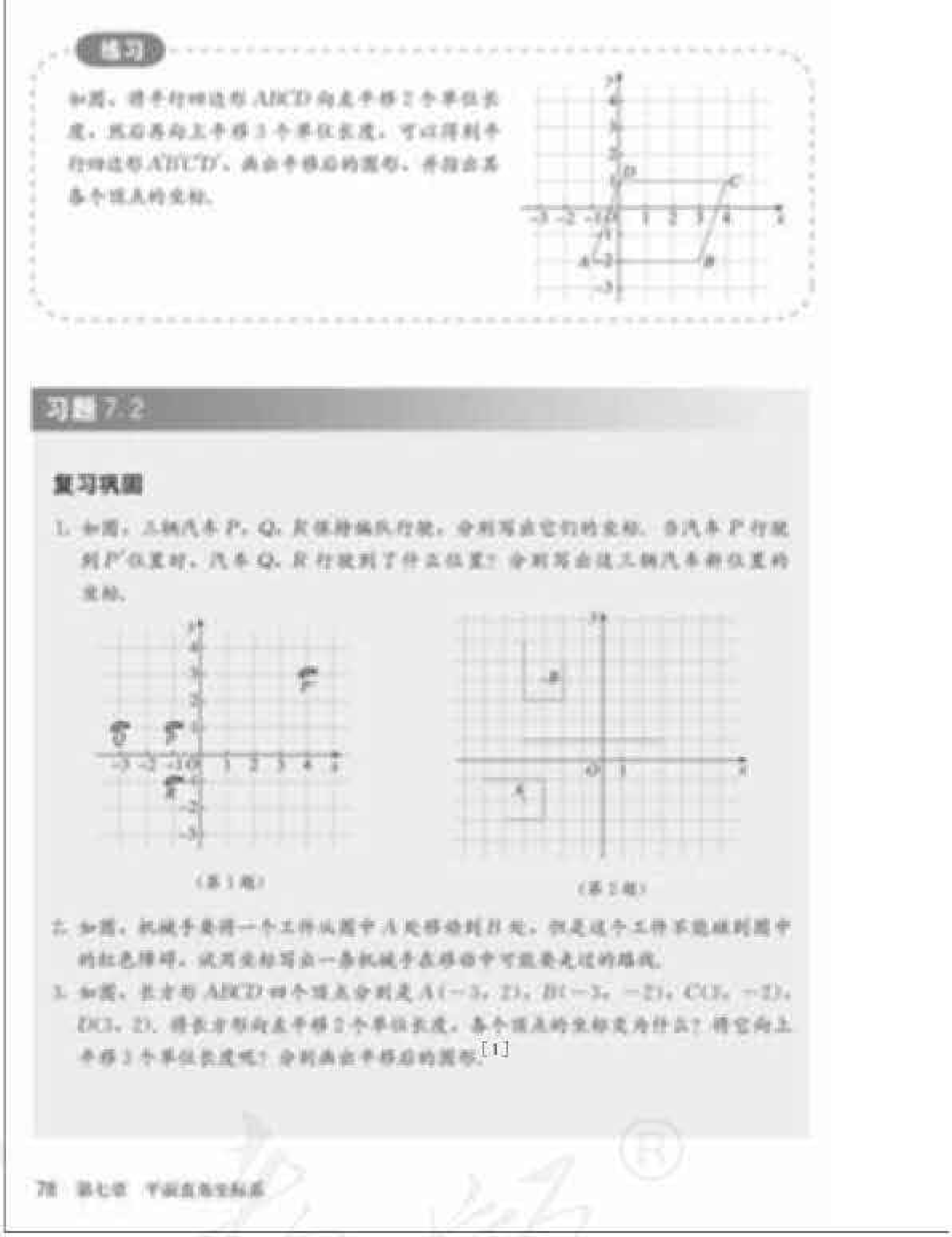
对于一般结论也不要让学生死记硬背，要结合

练习答案

（图略）．

平行四边形 $A'B'C'D'$ 四个顶点的坐标分别是 $A'(-3, 1)$，$B'(1, 1)$，$C'(2, 4)$，$D'(-2, 4)$．

［1］第 3 题是将一个长方形分别向左、向上平移某个单位长度后，写出平移后长方形各顶点的坐标．对于这道题要注意让学生体会图形作水平方向和竖直方向的平移时，对应点的横坐标与纵坐标的变化规律．



练习

如图，将平行四边形 $ABCD$ 向左平移 2 个单位长度，然后再向上平移 3 个单位长度，可以得到平行四边形 $A'B'C'D'$，画出平移后的图形，并指出其各个顶点的坐标．

习题 7.2

复习巩固

1. 如图，三辆汽车 P，Q，R 保持编队行驶，分别写出它们的坐标．当汽车 P 行驶到 P' 位置时，汽车 Q，R 行驶到了什么位置？分别写出这三辆汽车新位置的坐标．

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，机械手要将一个工件从图中 A 处移动到 B 处，但是这个工件不能碰到图中的红色障碍．试用坐标写出一条机械手在移动中可能要走过的路线．

3. 如图，长方形 $ABCD$ 四个顶点分别是 $A(-3, 2)$，$B(-3, -2)$，$C(3, -2)$，$D(3, 2)$．将长方形向左平移 2 个单位长度，各个顶点的坐标变为什么？将它向上平移 3 个单位长度呢？分别画出平移后的图形．[1]

78 第七章 平面直角坐标系

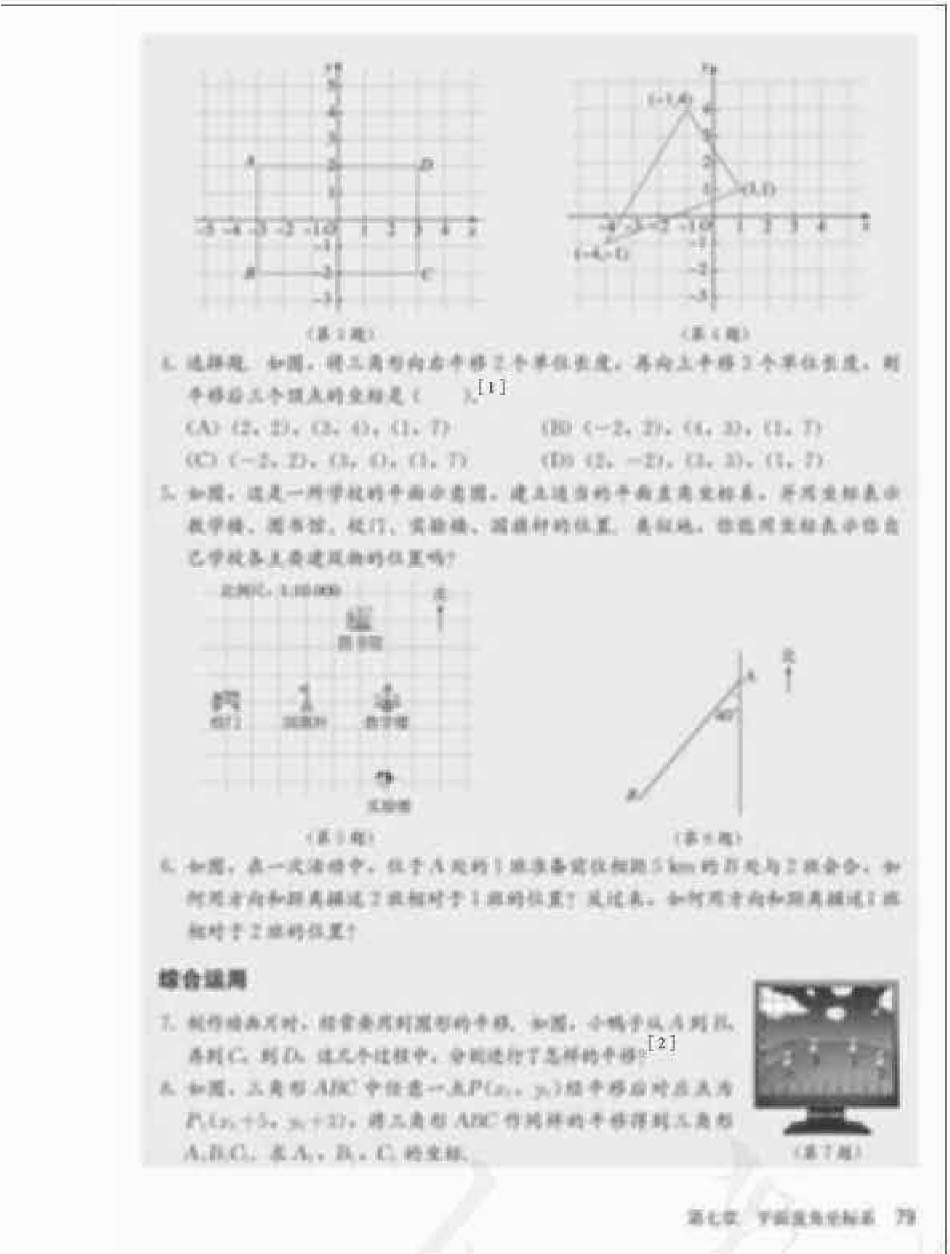
具体的例子理解．

习题 7.2

1. “复习巩固”有 6 道题，涉及用坐标表示地理位置和用坐标表示平移的内容．第 1 题中三辆汽车保持编队行驶，实际上是三辆汽车保持相对位置不变，因此当汽车 P 平移到 P' 的位置时，汽车 Q 和 R 与汽车 P 进行了相同的平移，根据平移的特征，可以确定汽车 Q 和 R 平移后的位置．这道题有一定的趣味性，通过这道题可以让学生在复习用坐标表示平移的同时，体会用坐标表示地理位置的好处．

第 2 题是根据点的平移写出点的坐标，机械手可以经过不同的路线把工件从点 A 移到点 B，在用坐标表示行走路线的过程中，应提醒学生注意各点坐标的变化情况．

第 3，4 题是根据图形的平移写出平移后点的坐标的题目．



（第3题）　　（第4题）

4. 选择题. 如图，将三角形向右平移2个单位长度，再向上平移3个单位长度，则平移后三个顶点的坐标是（　　）.[1]

(A) (2, 2), (3, 4), (1, 7)　　(B) (−2, 2), (4, 3), (1, 7)

(C) (−2, 2), (3, 4), (1, 7)　　(D) (2, −2), (3, 3), (1, 7)

5. 如图，这是一所学校的平面示意图，建立适当的平面直角坐标系，并用坐标表示教学楼、图书馆、校门、实验楼、国旗杆的位置. 类似地，你能用坐标表示你自己学校各主要建筑物的位置吗？

（第5题）　　（第6题）

6. 如图，在一次活动中，位于A处的1班准备前往相距5 km的B处与2班会合. 如何用方向和距离描述2班相对于1班的位置？反过来，如何用方向和距离描述1班相对于2班的位置？

综合运用

7. 制作动画片时，经常要用到图形的平移. 如图，小鸭子从A到B，再到C，到D. 这几个过程中，分别进行了怎样的平移？[2]

8. 如图，三角形ABC中任意一点$P(x_0, y_0)$经平移后对应点为$P_1(x_0+5, y_0+3)$，将三角形ABC作同样的平移得到三角形$A_1B_1C_1$，求A_1，B_1，C_1的坐标.

（第7题）

第七章　平面直角坐标系　79

[1] 第 4 题将一个三角形先向右平移再向上平移后，求所得三角形的三个顶点的坐标，这是对图形连续进行两次不同方向的平移，与第 3 题图形的平移过程不同，比第 3 题的平移复杂，因此教科书采用选择题的方式来降低难度. 教学中可以提醒学生注意这两道题的区别.

[2] 教学时可以以第 7 题为引子，让学生找出几个生活中平移的例子，并用坐标描述这些平移的过程. 通过这些实例，让学生看到平移现象在实际生活中是经常可以见到的，用坐标可以清晰地描述平移的过程，体会平面直角坐标系的作用.

第 5 题有两个要求，首先是要求根据一所学校的平面示意图，建立适当的坐标系表示一些建筑物的地理位置. 用坐标表示地理位置的关键是确定坐标系的原点，这一点在前面已经谈过. 另一个要求是让学生用坐标表示自己学校各主要建筑物的位置，这就需要学生首先选定以哪一个参照物为原点建立平面直角坐标系，然后通过实际测量活动，得到各点坐标，在坐标系中标出各地点的位置. 这个活动有较强的实践性，教学中可以让学生采用小组活动的方式进行.

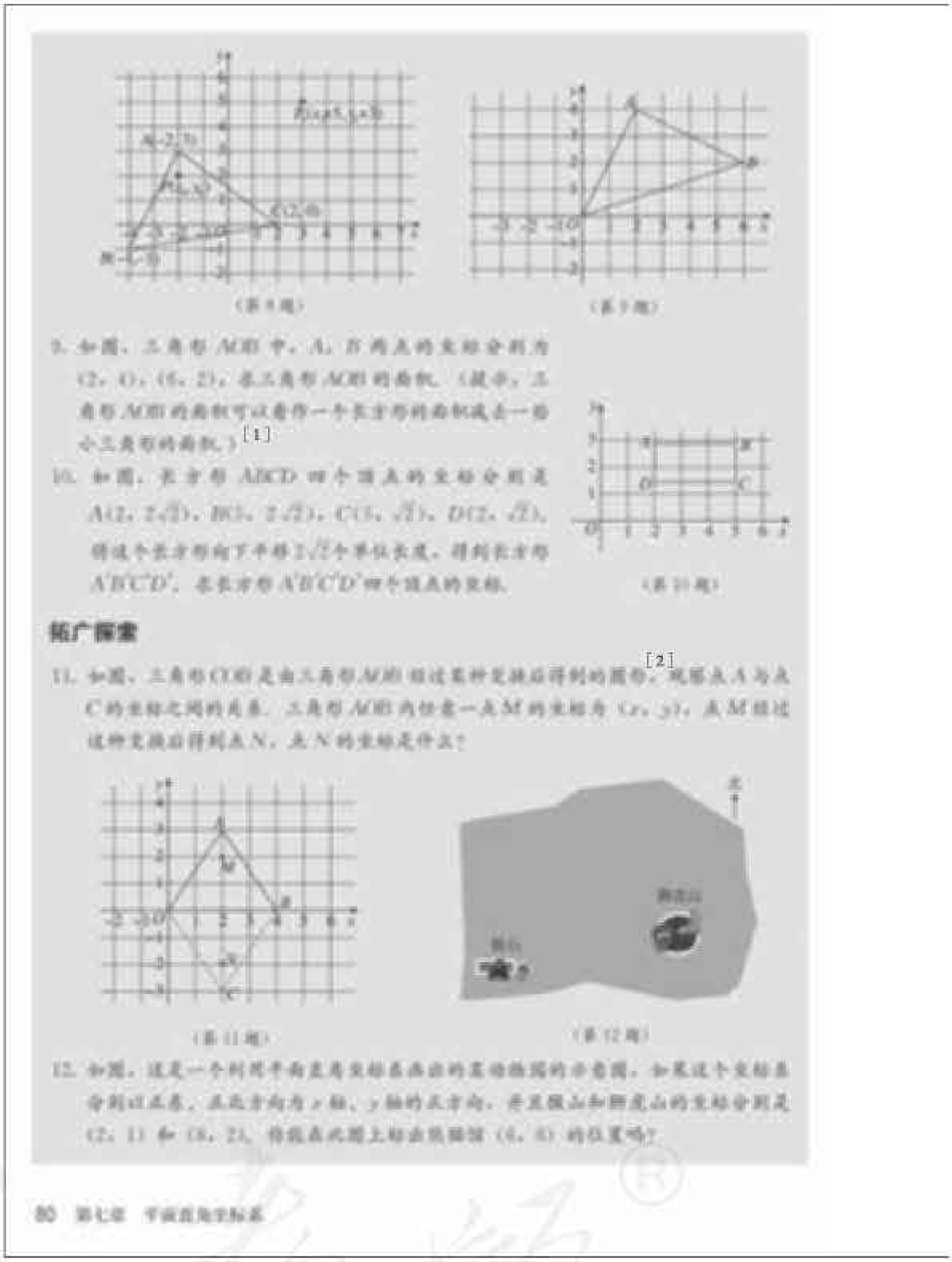
第 6 题是用方向和距离表示平面内物体的位置的题目，让学生复习巩固这种方法.

2. 在计算机上制作动画片，经常用到图形的平移，这种平移是可以用坐标来刻画的. “综合运用”的第 7 题就说明了这个问题.

3. 解答第 8 题需要两步完成，首先是根据点 P 和它的对应点 P_1 的坐标的关系，判断三角形 ABC 经过怎样的平移才能得到三角形 $A_1B_1C_1$，

［1］在第 9 题图中取三点. $D(6，0)$，$E(6，4)$，$F(0，4)$，则三角形 AOB 的面积等于四边形 $ODEF$ 的面积减去三角形 ODB，三角形 BEA 和三角形 AFO 的面积和.

［2］三角形 COB 是由三角形 AOB 经过轴对称得到的，x 轴是对称轴. 关于 x 轴对称的两个点的坐标具有横坐标相等，纵坐标互为相反数的特点. 关于轴对称，将在八年级上册“轴对称”中进行专门研究.



（第 8 题）　（第 9 题）

9. 如图，三角形 AOB 中，A，B 两点的坐标分别为 $(2，4)$，$(6，2)$，求三角形 AOB 的面积.（提示：三角形 AOB 的面积可以看作一个长方形的面积减去一些小三角形的面积.）[1]

10. 如图，长方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(2，2\sqrt{2})$，$B(5，2\sqrt{2})$，$C(5，\sqrt{2})$，$D(2，\sqrt{2})$，将这个长方形向下平移 $2\sqrt{2}$ 个单位长度，得到长方形 $A'B'C'D'$，求长方形 $A'B'C'D'$ 四个顶点的坐标.

（第 10 题）

拓广探索

11. 如图，三角形 COB 是由三角形 AOB 经过某种变换后得到的图形.[2] 观察点 A 与点 C 的坐标之间的关系. 三角形 AOB 内任意一点 M 的坐标为 $(x，y)$，点 M 经过这种变换后得到点 N，点 N 的坐标是什么？

（第 11 题）　（第 12 题）

12. 如图，这是一个利用平面直角坐标系画出的某动物园的示意图. 如果这个坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，并且猴山和狮虎山的坐标分别是 $(2，1)$ 和 $(6，2)$，你能在此题上标出熊猫馆 $(4，4)$ 的位置吗？

80　第七章　平面直角坐标系

然后根据这个平移，找出 A_1，B_1，C_1 的坐标. 因此这道题既涉及由点的坐标的变化得到图形平移，也涉及根据图形的平移得到点的坐标.

4. 第 9 题是求三角形面积的问题. 这种在直角坐标系中，利用顶点的坐标来求图形的面积的问题，学生是第一次遇到，教学中应注意学生完成的情况，注意学生是否真正理解坐标的含义.

5. 第 10 题是表示平移后点的坐标的题目，还涉及用分配律进行简单的实数运算.

6. 第 11，12 题是“拓广探索”层次的题目. 第 11 题是探讨轴对称中对应点的坐标之间的关系. 本题中，三角形 COB 是由三角形 AOB 经过轴对称得到的，对称轴是 x 轴. 在第 12 题中，要标出熊猫馆的位置，就先要确定平面直角坐标系.

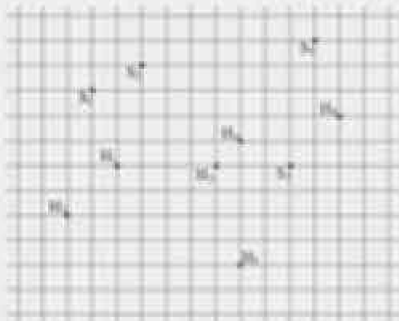
数学活动

活动1

近年来，园林部门为了对古树名木进行系统养护，建立了相关的地理信息系统，其中重要的一条就是要确定这些树的位置。

如下图，某小区有树龄百年以上的古松树4棵（S_1，S_2，S_3，S_4），古槐树6棵（H_1，H_2，H_3，H_4，H_5，H_6）。为了加强对古树的保护，园林部门将4棵古松树的位置用坐标表示为$S_1(3,\ 9)$，$S_2(5,\ 10)$，$S_3(11,\ 6)$，$S_4(12,\ 11)$。

类似地，你能在下图中把6棵古槐树的位置也用坐标表示出来吗？[1]



请以小组的形式完成下面的活动：

(1) 收集一些当地古树名木的资料，特别是有关它们具体位置的记载，并为它们编号；

(2) 建立适当的平面直角坐标系，为上述树木绘制一幅平面分布图；

(3) 你也可以收集一些校园或自己家附近有代表性的建筑，绘制出相关的平面分布图。

第七章　平面直角坐标系　81

[1] 6棵古槐树的坐标分别是 $H_1(4,\ 6)$，$H_2(2,\ 4)$，$H_3(8,\ 6)$，$H_4(9,\ 7)$，$H_5(9,\ 2)$，$H_6(13,\ 8)$.

1. 本章在“数学活动”栏目中安排了两个活动，这两个活动都是围绕着建立平面直角坐标系，用坐标表示地理位置展开的. 通过这两个数学活动，一方面使学生应用所学知识解决实际问题，体会坐标方法在解决实际问题中的作用，培养学生用数学的意识，另一方面对学生的动手能力、合作意识、交流能力等也有进一步的提高.

2. 活动1提供了一个确定古树名木位置的情境. 活动首先要求学生根据用坐标给出的4棵古松树的位置，建立平面直角坐标系，再写出6棵古槐树的位置. 这个问题比较容易解决，活动的重点应当是随后提出的几个活动. 活动时，可以以古树名木为素材，也可以选择其他方面的素材，比如教科书中给出的学校附近有代表性的建筑物等，选择什么素材进行活动要根据学生的具体情况，充分考虑活动的可操作性. 通过这样的实践活动，让学生进一步体会用坐标表示地理位置的方法.

[1] 张明是以中心广场为原点，正东方向为 x 轴正方向，正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系的.

[2] 李华是用方向和距离描述她所在位置的.

活动2

春天到了，七（2）班组织同学到人民公园春游，张明、李华对着景区示意图（图 1）如下描述牡丹园的位置（图中小正方形的边长代表 100 m 长）.

张明：“牡丹园的坐标是（300，300）.”[1]

李华：“牡丹园在中心广场东北方向约 420 m 处.”[2]

图 1

实际上，他们所说的位置都是正确的. 你知道张明同学是如何在景区示意图上建立坐标系的吗？你理解李华同学所说的“东北方向约 420 m 处”的含义吗？

用他们的方法，你能描述公园内其他景点的位置吗？与同学们交流一下.

82 第七章 平面直角坐标系

3. 活动 2 通过创设一个问题情境引出活动的内容. 这个活动有一定的可操作性，也是学生比较感兴趣的活动. 在这个活动中，一名同学利用建立平面直角坐标系的方法，另一名同学利用方向和距离描述了同一个地点的位置. 通过这个活动，让学生复习巩固表示平面内物体的位置的方法.

小　结

一、本章知识结构图

二、回顾与思考

本章我们通过具体实例学习了平面直角坐标系等知识，应用坐标方法解决了一些简单问题。

建立平面直角坐标系后，对于坐标平面内任意一点 M，都有唯一的一对有序实数 $(x,\ y)$ 和它对应；反过来，对于任意一对有序实数 $(x,\ y)$，在坐标平面内都有唯一的点 M 和它对应。这样，我们就可以数形结合地研究问题。

坐标方法有广泛的应用。例如，我们可以利用坐标描述一些地点的分布情况，还可以通过直角坐标系中对应点的坐标之间的关系，研究图形平移等问题。这种用数和运算来研究几何问题的方法是非常重要的，今后我们将不断地看到它的应用。

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧。

1. 在日常生活中，我们可以用有序数对来描述物体的位置。以教室中座位位置为例，说明有序数对 $(x,\ y)$ 和 $(y,\ x)$ 是否相同以及为什么。

2. 平面直角坐标系由两条互相垂直且有公共原点的数轴组成。请你举例说明如何建立平面直角坐标系，在直角坐标平面内描出点 $P(2,\ 4)$ 和原点的位置，并指出点 P 和原点的横坐标和纵坐标。

平面直角坐标系的两条坐标轴将平面分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个部分，这四个部分依次称为第一象限、第二象限、第三象限和第四象限。请你在直角坐标平面内描出点 $A(2,\ 1)$，$B(-2,\ 1)$，$C(-2,\ -1)$，$D(2,\ -1)$ 的位置，并说明它们所在的象限。

3. 平面直角坐标系具有广泛的应用，请你举例说明它的应用。

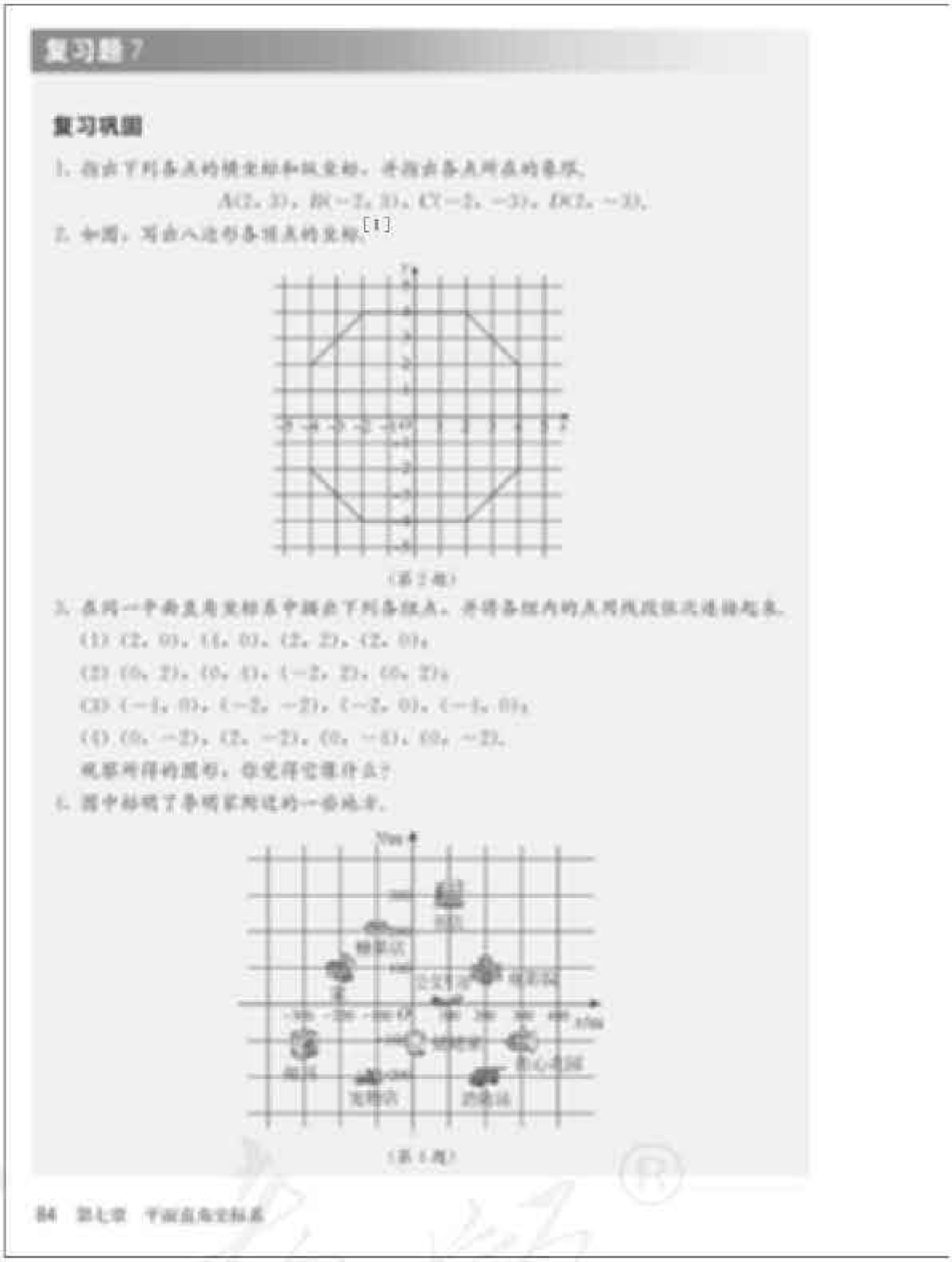
1. 本章的知识结构图给出了本章所学数学知识的内在逻辑结构. 为了确定平面内点的位置，可以建立直角坐标系，将点的位置和坐标建立一一对应关系，这样就可以利用有序数对表示点的位置. 正是由于平面直角坐标系能够建立点与坐标的一一对应关系，才使得数与形的问题的相互转化成为可能.

2. 在平面直角坐标系中，有序数对就是坐标，坐标（有序数对）是统领全章的一个重要概念. 复习时，要结合具体问题复习坐标（有序数对）的意义和作用.

3. 对于平面直角坐标系的有关概念，要结合具体例子复习，切忌死记硬背.

4. 对于坐标方法的简单应用，本章主要学习了用坐标表示确定地理位置和用坐标表示平移. 要注意复习这些内容，解决相关问题，巩固有关方法，进一步体会数形结合的思想.

[1] 写出这些顶点的坐标时要注意不重不漏. 可以先写出（4，2），再按逆时针方向依次写出其余顶点的坐标.



复习题 7

复习巩固

1. 指出下列各点的横坐标和纵坐标，并指出各点所在的象限.

$A(2, 3)$，$B(-2, 3)$，$C(-2, -3)$，$D(2, -3)$.

2. 如图，写出八边形各顶点的坐标.[1]

（第 2 题）

3. 在同一个直角坐标系中描出下列各组点，并将各组内的点用线段依次连接起来.

(1) (2, 0)，(4, 0)，(2, 2)，(2, 0)；

(2) (0, 2)，(0, 4)，(−2, 2)，(0, 2)；

(3) (−4, 0)，(−2, −2)，(−2, 0)，(−4, 0)；

(4) (0, −2)，(2, −2)，(0, −4)，(0, −2).

观察所得的图形，你觉得它像什么？

4. 图中标明了李明家附近的一些地方.

（第 4 题）

84 第七章 平面直角坐标系

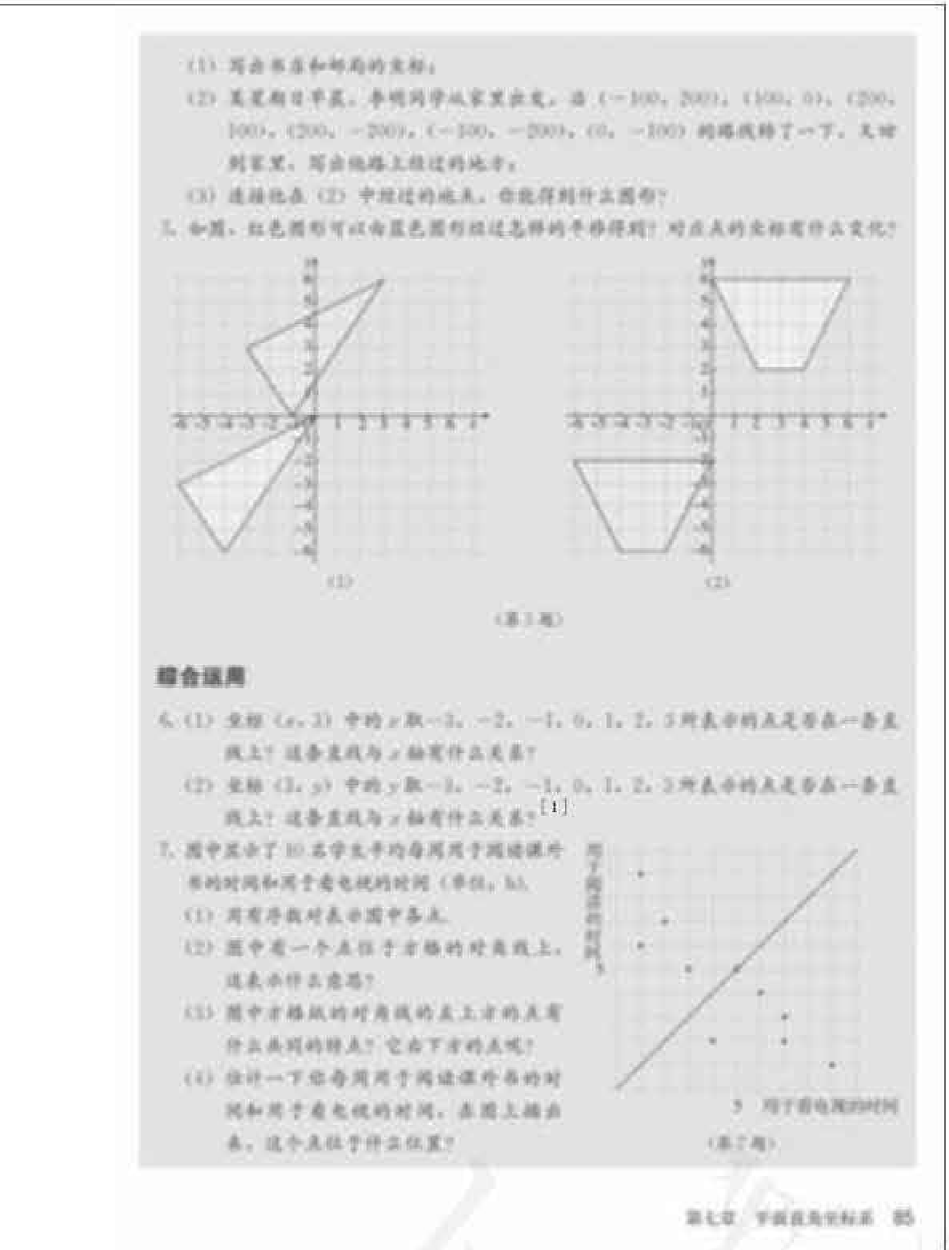
复习题 7

1. “复习巩固”中的 5 道题分别对平面直角坐标系中的有关概念、用坐标表示地理位置和用坐标表示平移等内容进行了复习.

2. 第 1 题复习了横坐标、纵坐标、象限等概念，题目中给出的 4 个点分别位于不同的象限，教学时要提醒学生注意不同象限中的点的坐标的符号的问题.

3. 第 2，3 题是复习巩固点与坐标的对应关系. 第 2 题是根据点的位置写出点的坐标，对于这道题可以提醒学生适当注意顶点坐标之间的关系，为解答后面的第 6 题作准备. 第 3 题是根据点的坐标描出点的位置.

4. 第 4 题设置了一个学生感兴趣的问题情境，其中有用坐标表示地理位置，根据已知点的位置写出点的坐标的问题，也有根据坐标确定点的位置的问题. 第 5 题是复习用坐标表示平移的



(1) 写出书店和邮局的坐标；

(2) 某星期日早晨，李明同学从家里出发，沿 $(-100, 200)$，$(100, 0)$，$(200, 100)$，$(200, -200)$，$(-100, -200)$，$(0, -100)$ 的路线转了一下，又回到家里，写出他路上经过的地方；

(3) 连接他在 (2) 中经过的地点，你能得到什么图形？

5. 如图，红色图形可以由蓝色图形经过怎样的平移得到？对应点的坐标有什么变化？

(1)　　(2)

(第 5 题)

综合运用

6. (1) 坐标 $(x, 3)$ 中的 x 取 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 所表示的点是否在一条直线上？这条直线与 x 轴有什么关系？

(2) 坐标 $(3, y)$ 中的 y 取 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 所表示的点是否在一条直线上？这条直线与 x 轴有什么关系？[1]

7. 图中显示了 10 名学生平均每周用于阅读课外书的时间和用于看电视的时间（单位：h）.

(1) 用有序数对表示图中各点.

(2) 图中有一个点位于方格的对角线上，这表示什么意思？

(3) 图中方格纸的对角线的左上方的点有什么共同的特点？它右下方的点呢？

(4) 估计一下你每周用于阅读课外书的时间和用于看电视的时间，在图上描出来，这个点位于什么位置？

(第 7 题)

第七章　平面直角坐标系　85

[1] 在习题 7.1 的第 8 题中，讨论了位于平行于 x 轴（或 y 轴）的直线上的点的坐标的特点，本题又讨论了纵坐标（或横坐标）相同的点是否位于平行于 x 轴（或 y 轴）的直线上的问题. 教学时，可以将这两道题联系起来.

内容.

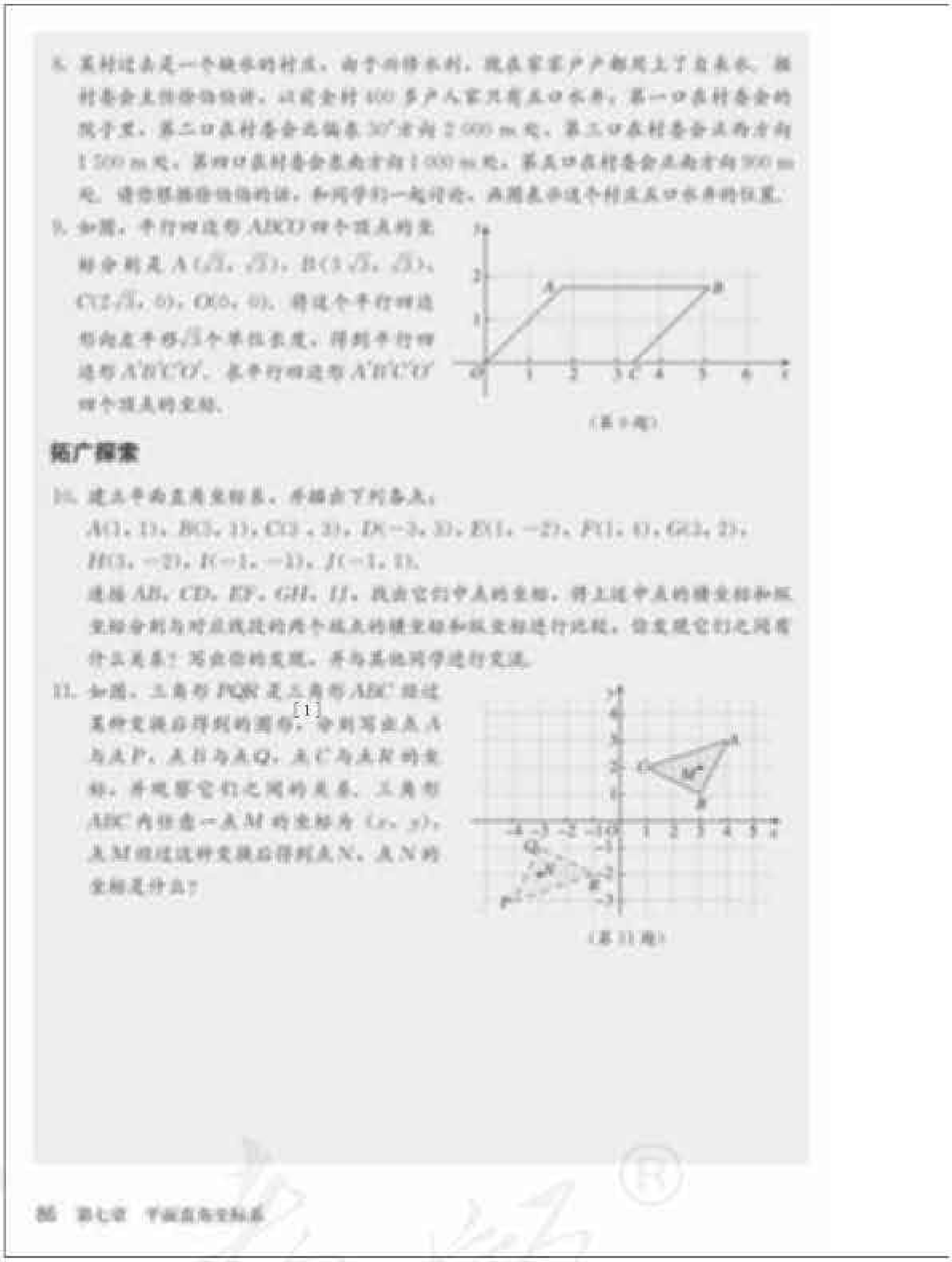
5. “综合运用”的第 6 题是要求描出几个纵坐标（或横坐标）相同，而横坐标（或纵坐标）不同的点，看看它们是否位于同一条直线上等. 可以发现纵坐标（或横坐标）相同的点都在与 x（或 y）轴平行的直线上，这条直线上的点到 x（或 y）轴的距离等于其纵坐标（或横坐标）的绝对值.

6. 第 7，8 题是用本章知识解决实际问题的题目. 其中第 7 题有统计的味道，教学时可以引导学生体会知识之间的联系. 第 9 题是表示平移后点的坐标，还涉及用分配律进行简单的实数运算.

7. “拓广探索”有两道题. 第 10 题是通过计算几个点的中点坐标，发现中点坐标公式. 第 11 题中的两个三角形关于原点对称，让学生观察对应顶点的坐标的关系，得出结论.

[1] 三角形 PQR 是由三角形 ABC 经过中心对称得到的，对称中心是原点. 平面内任意一点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点是 $P'(-x, -y)$.

中心对称以后还要专门学习.



8. 某村过去是一个缺水的村庄，由于兴修水利，现在家家户户都用上了自来水。据村委会主任徐伯伯讲，以前全村400多户人家只有五口水井，第一口在村委会的院子里，第二口在村委会北偏东 30° 方向2 000 m处，第三口在村委会正南方向1 500 m处，第四口在村委会东南方向1 000 m处，第五口在村委会正西方向900 m处。请你根据徐伯伯的话，和同学们一起讨论，画图表示这个村庄五口水井的位置。

9. 如图，平行四边形 $ABCO$ 四个顶点的坐标分别是 $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$，$B(3\sqrt{3}, \sqrt{3})$，$C(2\sqrt{3}, 0)$，$O(0, 0)$。将这个平行四边形向左平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度，得到平行四边形 $A'B'C'O'$，求平行四边形 $A'B'C'O'$ 四个顶点的坐标。

（第9题）

拓广探索

10. 建立平面直角坐标系，并描出下列各点：

$A(1, 1)$，$B(5, 1)$，$C(3, 3)$，$D(-3, 3)$，$E(1, -2)$，$F(1, 4)$，$G(3, 2)$，$H(3, -2)$，$I(-1, -1)$，$J(-1, 1)$.

连接 AB，CD，EF，GH，IJ，找出它们中点的坐标。将上述中点的横坐标和纵坐标分别与对应线段的两个端点的横坐标和纵坐标进行比较，你发现它们之间有什么关系？写出你的发现，并与其他同学进行交流。

11. 如图，三角形 PQR 是三角形 ABC 经过某种变换后得到的图形[1]，分别写出点 A 与点 P，点 B 与点 Q，点 C 与点 R 的坐标，并观察它们之间的关系。三角形 ABC 内任意一点 M 的坐标为 (x, y)，点 M 经过这种变换后得到点 N，点 N 的坐标是什么？

（第11题）

86 第七章 平面直角坐标系

Ⅲ 习题解答

习题 7.1

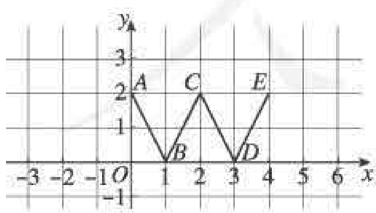
1. $A(3, 3)$，$C(7, 3)$，$D(10, 3)$，$E(10, 5)$，$F(7, 7)$，$G(5, 7)$，$H(3, 6)$，$I(4, 8)$.

2.

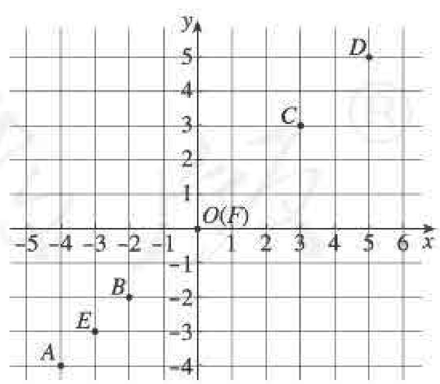
点的位置	横坐标符号	纵坐标符号
在第一象限	+	+
在第二象限	−	+
在第三象限	−	−
在第四象限	+	−

3. $A(-5, 4)$，横坐标是-5，纵坐标是 4；
   $B(-2, 2)$，横坐标是-2，纵坐标是 2；
   $C(3, 4)$，横坐标是 3，纵坐标是 4；
   $D(2, 1)$，横坐标是 2，纵坐标是 1；
   $E(5, -3)$，横坐标是 5，纵坐标是-3；
   $F(-1, -2)$，横坐标是-1，纵坐标是-2；
   $G(-5, -3)$，横坐标是-5，纵坐标是-3；
   $H(-4, -1)$，横坐标是-4，纵坐标是-1.

4. 如图，在平面直角坐标系中标出点 A，B，C，D，E，依次连接各点后，能得到英文字母“W”.



（第 4 题）

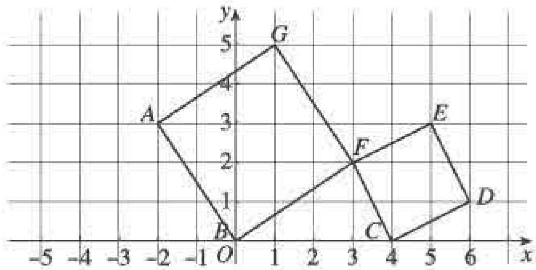


（第 5 题）

5. 如图，在平面直角坐标系中描出点 A，B，C，D，E，F. 这些点的横坐标与纵坐标相等，它们都在一条直线上. 还可以再找出一些类似的点，例如坐标分别为 $(4, 4)$，$(-1, -1)$，$(7, 7)$ 的点.

6. 平面直角坐标系如图所示. $A(-2, 3)$，$D(6, 1)$，$E(5, 3)$，$F(3, 2)$，$G(1, 5)$. 点 A 在第二

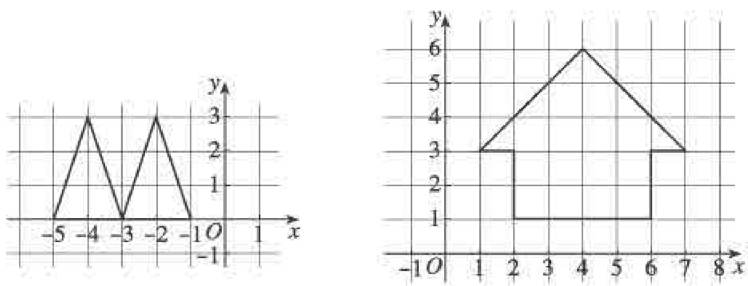
象限，其余各点都在第一象限.



（第 6 题）

7. （1）如图，图形像两座山，图形的面积是 6；

（2）如图，图形像一座房子或一个箭头，图形的面积是 17.

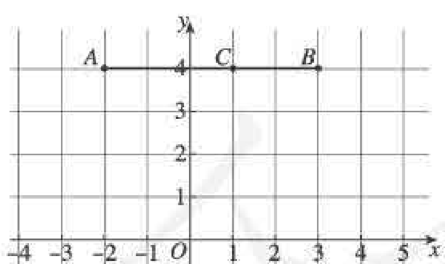


（第 7 题）

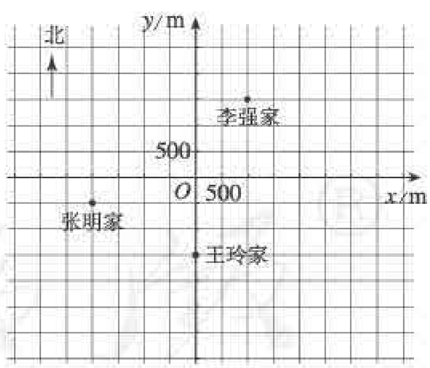
8. 平面直角坐标系如图所示．点 C 的纵坐标是 4.

（1）这些点的纵坐标相等；

（2）这些点的横坐标相等.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，李强家、张明家、王玲家的坐标分别是（1 000，1 500），（−2 000，−500），（0，−1 500）.

10. （1）满足条件的点在第一象限或第三象限；

（2）满足条件的点在第二象限或第四象限；

（3）满足条件的点在坐标轴上.

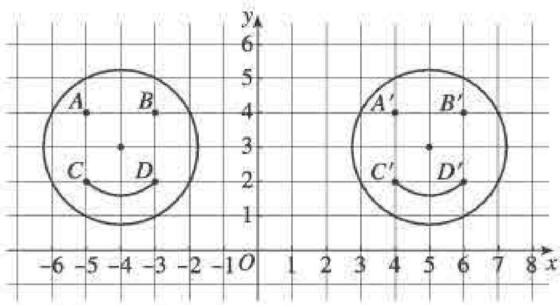
11. 图中正方形四条边上横坐标、纵坐标都为整数的点有 12 个，它们的坐标分别是（3，0），（2，1），（1，2），（0，3），（−1，2），（−2，1），（−3，0），（−2，−1），（−1，−2），（0，

-3)，(1，-2)，(2，-1).

12. (略).

13. 如图，点 A'，B'，C'，D'分别是由点 A，B，C，D 平移后得到的，它们的坐标分别是 $A(-5，4)$，$B(-3，4)$，$C(-5，2)$，$D(-3，2)$，$A'(4，4)$，$B'(6，4)$，$C'(4，2)$，$D'(6，2)$.

    可以发现，将图形向右平移 9 个单位长度后，平移后得到的各点的横坐标分别是它们的对应点的横坐标加 9，纵坐标不变.

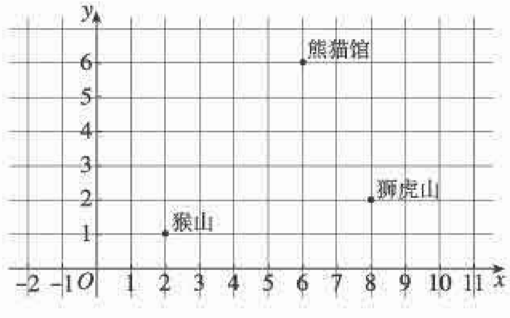


(第 13 题)

14. 满足条件的点 A 的坐标分别为 (2，0)，(-2，0)，(0，-4) 和 (0，4).

习题 7.2

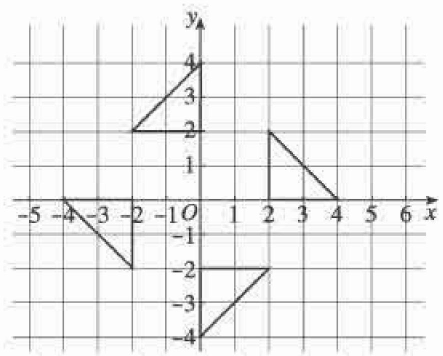
1. (图略). $P(-1，1)$，$Q(-3，1)$，$R(-1，-1)$；$P'(4，3)$，$Q'(2，3)$，$R'(4，1)$.
2. 可以依次走下列各点：(-4，-2)，(-7，-2)，(-7，7)，(-3，7)，(-3，4).
3. 长方形 $ABCD$ 向左平移 2 个单位长度后，顶点 A，B，C，D 的坐标分别变为 (-5，2)，(-5，-2)，(1，-2)，(1，2)；长方形 $ABCD$ 向上平移 3 个单位长度后，顶点 A，B，C，D 的坐标分别变为 (-3，5)，(-3，1)，(3，1)，(3，5). (图略).
4. C.
5. (图略). 由比例尺得图中小正方形的边长代表 50 m 长. 以教学楼为原点，正东方向为 x 轴正方向，正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系，规定一个单位长度代表 1 m，则教学楼、图书馆、校门、实验楼、国旗杆的位置分别是 (0，0)，(-50，150)，(-300，0)，(0，-150)，(-150，0).
6. 2 班在 1 班的南偏西 40°，5 km 处；1 班在 2 班的北偏东 40°，5 km 处.
7. 小鸭子从 A 处向右平移 2 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度到达 B 处. 接着从 B 处向右平移 3 个单位长度到达 C 处. 最后从 C 处向右平移 2 个单位长度，向下平移 1 个单位长度到达 D 处.
8. $A_1(3，6)$，$B_1(1，2)$，$C_1(7，3)$.
9. 三角形 ABC 的面积是 10.
10. $A'(2，0)$，$B'(5，0)$，$C'(5，-\sqrt{2})$，$D'(2，-\sqrt{2})$.
11. $N(x，-y)$.
12. 熊猫馆的位置如图所示.



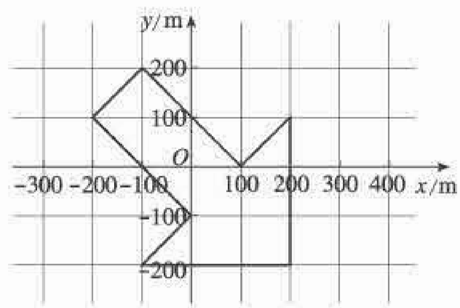
（第 12 题）

复习题 7

1. 点 A，B，C，D 的横坐标分别是 2，-2，-2，2；点 A，B，C，D 的纵坐标分别是 3，3，-3，-3；点 A 在第一象限，点 B 在第二象限，点 C 在第三象限，点 D 在第四象限.
2. 八边形各顶点的坐标分别是 (4，2)，(2，4)，(-2，4)，(-4，2)，(-4，-2)，(-2，-4)，(2，-4)，(4，-2).
3. 如图，所得到的图形像风车.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. (1) 书店和邮局的坐标分别是 (100，300)，(-300，-100)；

   (2) 糖果店，公交车站，电影院，消防站，宠物店，姥姥家；

   (3) 如图，得到箭头符号.
5. (1) 蓝色图形向左平移 3 个单位长度，再向下平移 6 个单位长度得到红色图形. 把平移前各点的横坐标都减 3，纵坐标都减 6，就得到平移后各对应点的坐标；

   (2) 蓝色图形向右平移 6 个单位长度，再向上平移 8 个单位长度得到红色图形. 把平移前各点的横坐标都加 6，纵坐标都加 8，就得到平移后各对应点的坐标.
6. (1) 所表示点在一条直线上，这条直线与 x 轴平行；

   (2) 所表示点在一条直线上，这条直线与 x 轴垂直.
7. (1) (1，6)，(1，9)，(2，7)，(3，5)，(4，2)，(5，5)，(6，4)，(7，2)，(7，3)，(9，1)；

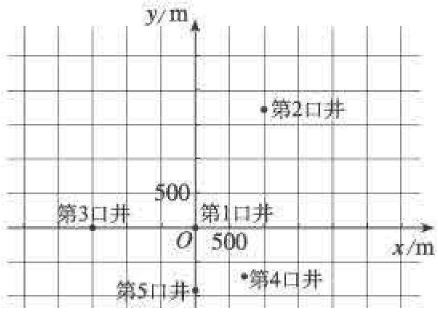
   (2) 表示每周看电视的时间和每周阅读课外书的时间相同；

   (3) 对角线左上方的点表示每周阅读课外书的时间比每周看电视的时间多，对角线右下方的点

表示每周阅读课外书的时间比每周看电视的时间少；

(4)（略）.

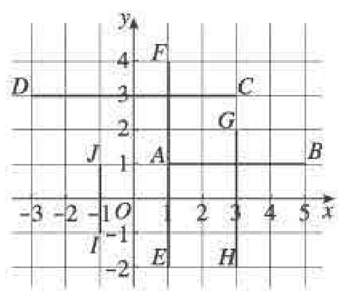
8. 以村委会为原点，正东方向为 x 轴正方向，正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系，5 口井的位置如图所示.



（第 8 题）

9. $A'(0, \sqrt{3})$，$B'(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$，$C'(\sqrt{3}, 0)$，$D'(-\sqrt{3}, 0)$.

10. 如图，连接 AB，CD，EF，GH，IJ，它们中点的坐标分别是 (3，1)，(0，3) (1，1)，(3，0)，(−1，0). 上述中点的横坐标（纵坐标）分别等于对应线段的两个端点的横坐标（纵坐标）和的一半.



（第 10 题）

11. 三角形 ABC 与三角形 PQR 各对应点的坐标分别是 $A(4, 3)$，$P(-4, -3)$，$B(3, 1)$，$Q(-3, -1)$，$C(1, 2)$，$R(-1, -2)$. 三角形 PQR 各顶点的横（纵）坐标是三角形 ABC 与其对应点横（纵）坐标的相反数. 三角形 ABC 中任意一点 M (x, y) 的对应点 N 的坐标是 $(-x, -y)$.

Ⅳ 教学设计案例

7.1 平面直角坐标系（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

会用有序数对表示物体的位置.

2. 内容解析

在小学阶段，学生对“用数对表示具体情境中物体的位置”有一定的了解，这节课结合学生已有的知识和生活经验，进一步感受用有序数对表示物体位置，为建立平面直角坐标系以及在平面直角坐标系中利用有序数对来确定一个点的位置作铺垫，所以有序数对是学习“平面直角坐标系”的关键，也是学习函数的基础.

本节课利用几个生活中常见的例子引导学生逐步进入数学化的过程，即经历用数对表示物体位置的过程，并观察数对的特点，使学生感受有序的必要性，加深对有序的理解，最后归纳出它的概念. 有序数对中的“有序”是指像电影院中座位按“几排几号”编制，排数和号数是按顺序排列的. 用有序数对表示物体的位置体现了数形结合的思想.

本节课的教学重点是：理解有序数对是怎样确定物体的位置的.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 会用有序数对表示物体的位置.

(2) 结合用有序数对表示物体的位置的内容，体会数形结合的思想.

2. 目标解析

达成目标 (1) 的标志是：学生能在实际生活情境中，用一个有序数对来表示一个物体的位置，感受有序数对在确定物体位置中的作用，体会有序数对中两个数的顺序的重要性.

达成目标 (2) 的标志是：学生能体会用有序数对表示物体的位置是将数与形建立了联系.

三、教学问题诊断分析

虽然学生在小学阶段对“用数对表示具体情境中物体的位置”有一定的了解，但从七年级学生的认知情况看，学生的数学抽象思维能力以及用数学语言符号表达思维对象的能力还不够高，从一维到二维的过渡存在困难.

因此，本节课的教学难点是：确定用怎样一对有顺序的数表示物体的位置.

四、教学过程设计

1. 情境引入，激发兴趣

问题 1 2009 年 60 周年国庆庆典活动中，天安门广场上出现了壮观的背景图案，你知道它是怎么组成的吗?

师生活动：教师引导：参加图案表演的每个人都根据图案设计要求，按排号、列号站在一个确定的位置. 随着信号举起不同颜色的花束，整个方阵就组成了绚丽的背景图案. 类似于用“第几排第几列”来确定同学的位置，在数学中通常建立平面直角坐标系，用具有特定含义的两个数来刻画点的位置. 本章学习平面直角坐标系这一重要工具后，同学们会发现，运用数学解决问题的能力又提高了. 比如，同学们学习有序数对后，就会设计一些简单漂亮的图案了.

设计意图：本章引言说明 60 周年国庆背景图案的组成方法，利用“第几排第几列”来确定学生的位置，自然引出第一节课有序数对的学习，激发学生学习的主动性和积极性.

2. 合作交流，探究新知

问题 2 同学们都有去影剧院看电影的经历，你是怎么找到自己座位的?

师生活动：学生回答：根据入场券上的“排数”和“号数”便可以准确地对号入座.

问题 3 你若发现一本书某页有一处印刷错误，怎样告诉其他同学这一处的位置?

师生活动：学生回答：说明该页上“第几行”和“第几个字”，同学就可以快速找到错误的位置了.

设计意图：问题 2，3 由生活中常见的例子引出确定物体的位置需要用两个有顺序的数.

问题 4 图 1 是一个教室平面图.

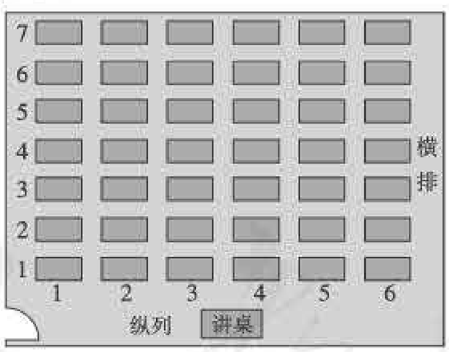


图 1

你能根据以下座位找到对应的同学参加数学问题讨论吗?

(1，3)，(2，2)，(5，6)，(4，5)，(6，2)，(2，4)

师生活动：学生进行小组讨论，再由每组代表进行汇报. 教师关注：一些学生可能会发现，在教室里排数与列数的先后顺序没有约定的情况下，不能确定参加数学问题讨论的同学.

追问 (1)：假设在问题 4 中约定“列数在前，排数在后”，你能在图中标出参加数学问题讨论的同学的座位吗?

师生活动：学生用颜色标记参加数学问题讨论的同学的座位.

追问 (2)：由上面可知，“第 1 列第 3 排”简记为 (1，3) (约定列在前，排在后)，那么“第

3 列第 5 排”能简记成什么？（6，7）表示的含义是什么？

师生活动：学生回答：“第 3 列第 5 排”记为（3，5），（6，7）表示第 6 列第 7 排.

追问（3）：同样约定“列数在前，排数在后”，（2，4）和（4，2）在同一个位置吗？

师生活动：学生根据（2，4）表示第 2 列第 4 排，（4，2）表示第 4 列第 2 排，容易回答二者不在同一个位置.

追问（4）：假设在问题 4 中约定“排数在前，列数在后”，你能在图中标出参加数学问题讨论的同学的座位吗？

师生活动：学生用不同颜色标记参加数学问题讨论的同学的座位. 教师给出有序数对的概念：上面的活动是通过像“第 2 列第 4 排、第 5 列第 6 排”这样含有两个数的表达方式来表示一个确定的位置，其中两个数各自表示不同的含义，例如前边的表示列，后边的表示排，我们把这种有顺序的两个数 a 与 b 所组成的数对，叫做有序数对，记作（a，b）.

设计意图：以用教室里的座位确定参加讨论的学生为背景，让学生经历用有序数对表示物体位置的过程，感受有序数对的“有序性”. 在此基础上，抽象出有序数对的概念.

3. 实践应用，巩固新知

问题 5 现在给出班里一部分同学的姓名，约定“列数在前，排数在后”，你能快速说出这些同学座位的有序数对吗？如果约定“排数在前，列数在后”，刚才那些同学对应的有序数对会变化吗？

师生活动：可以由一名学生说出班里一些学生的姓名，其他学生回答有序数对.

设计意图：由确定的位置说出对应的有序数对，是正文内容的自然延续，提供了锻炼学生逆向思维能力的机会. 同时，可以使学生进一步感受约定顺序的必要性.

问题 6 生活中利用有序数对表示位置的情况很常见，如人们常用经纬度来表示地球上的地点等. 你能再举出一些例子吗？

师生活动：学生举出用有序数对表示位置的例子.

设计意图：突出本节重点，让学生体验数学存在于我们生活中.

4. 深入理解，拓展延伸

问题 7 通过以上几个问题的解决，加上国庆背景图案的启发，同学们能设计一些能用有序数对描述的漂亮图案吗？

师生活动：（1）学生设计能用有序数对描述的图案（如数字钟表上的“1，7，8”，“长方形、菱形”，简单的文字等）；（2）选择一些学生设计的图案，让其他学生用有序数对描述图案.

设计意图：用有序数对描述图案，让学生认识到有序数对的广泛应用，为学生创设一个可以充分展现自己想象力、创造力的空间，搭建一个实践与创新的平台.

5. 回顾小结，归纳提升

教师和学生一起回顾本节课所学内容，并请学生回答以下问题：

（1）举例说明有序数对怎样确定物体的位置.

（2）“有序数对”中的“有序”能省略吗？

设计意图：通过小结，使学生梳理本节课所学内容，理解有序数对的“有序性”，以及有序数

对是怎样确定物体的位置的.

6. 布置作业

教科书第 7.1.1 小节后练习，习题 7.1 第 1 题.

五、目标检测设计

1. 如图，A 的位置为三列四行，表示为（3，4），那么 B 的位置是（　　）.

(A)（4，5）　　(B)（5，4）　　(C)（4，2）　　(D)（4，3）

（第 1，2 题）

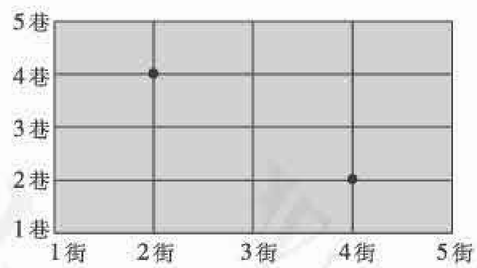
设计意图：本题主要考查学生是否能用有序数对表示物体的位置.

2. 如图，约定列数在前，行数在后，（4，3）表示的位置是（　　）.

(A) A　　(B) B　　(C) C　　(D) D

设计意图：本题主要考查学生是否能根据有序数对确定物体的位置.

3. 如图，从 2 街 4 巷（2，4）到 4 街 2 巷（4，2），用有序数对写出几种最短的路线，如：（2，4）→（2，3）→（3，3）→（4，3）→（4，2）.



（第 3 题）

设计意图：本题主要考查学生能否用有序数对确定物体的位置.

7.1　平面直角坐标系（第2课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

平面直角坐标系及相关概念.

2. 内容解析

“平面直角坐标系”是“数轴”的发展，使点与坐标的对应关系顺利实现了从一维到二维的过渡.“平面直角坐标系”的建立使有序数对与平面内的点产生了一一对应，提供了用代数方法来研究几何问题的重要数学工具.

上一节课，学生在具体情境中学习了有序数对表示物体的位置. 本节课先介绍数轴上点与坐标的一一对应，在此基础上说明建立平面直角坐标系的必要性以及合理性，同时引入相关的概念，以及平面内点与坐标是一一对应的结论. 对于平面直角坐标系中象限的概念，本节课只作简单介绍，下节课再探讨象限中点的符号特征.

一般地，在平面内互相垂直且原点重合，分别位于水平位置与竖直位置的两条数轴组成平面直角坐标系，习惯取向右、向上为正方向. 建立了平面直角坐标系后，对于坐标系平面内的任何一点，我们可以确定它的坐标. 反过来，对于任何一个坐标，可以在坐标平面内确定它所表示的一个点，从而建立坐标平面内点与有序数对的一一对应，体现数形结合的思想.

由以上分析，可以确定本节课的教学重点：平面直角坐标系及相关概念.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 理解平面直角坐标系的相关概念.

(2) 掌握平面直角坐标系内点与坐标一一对应的关系.

2. 目标解析

达成目标(1)的标志是：学生理解平面直角坐标系中两条数轴一般具备的特征：互相垂直；原点重合；取向右、向上为正方向. 能在平面直角坐标系中理解 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、原点、坐标、象限等相关概念.

达成目标(2)的标志是：学生理解建立平面直角坐标系的必要性，体会到平面内点与有序数对的“一一对应”：给一个坐标，就有唯一确定的点与之对应；反之，给一个点，就有唯一确定的坐标与之对应. 在给定的平面直角坐标系中，学生会由点的位置写出点的坐标，由点的坐标确定点的位置.

三、教学问题诊断分析

平面内点的坐标是根据数轴上点的坐标来定义的，平面内点与坐标的对应关系虽然与数轴上点与坐标的对应关系类似，但学生毕竟在认识上第一次从一维空间过渡到二维空间，因此理解建立平面直角坐标系的必要性、体会其中蕴含的点与坐标的一一对应关系都比较困难. “7.1.1 有序数对”

是在具体情境中认识物体位置与有序数对的对应，学生易于理解，但由具体情境抽象出平面直角坐标系中点与坐标的一一对应，要求学生有较强的抽象思维能力.

因此，本节课的教学难点是：理解建立平面直角坐标系的必要性，体会平面直角坐标系中点与坐标的一一对应关系.

四、教学过程设计

1. 复习引入

问题 1 回顾已学内容，回答下列问题：

(1) 什么是数轴？请画出一条数轴.

(2) 如图 1，A，B 两点所表示的数分别是什么？在数轴上描出“-3”表示的点.

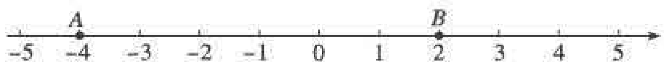


图 1

师生活动：学生回答问题后，教师引导学生得出数轴上点的坐标的定义：数轴上的点可以用一个数表示，这个数叫做这个点的坐标. 例如点 A 的坐标为-4，点 B 的坐标为 2. 反之，已知数轴上点的坐标，这个点的位置就确定了.

问题 2 在数轴上已知点能说出它的坐标，由坐标能在数轴上找到对应点的位置. 那么数轴上的点与坐标有怎样的关系？

师生活动：学生回答，教师指出：数轴上的点与坐标是“一一对应”的. 也就是说，在数轴上每一个点都可以用一个坐标来表示，任何一个坐标都可以在数轴上找到唯一确定的点.

设计意图：问题 1，2 从学生熟悉的数轴出发，给出数轴上点的坐标的定义，建立点与坐标的一一对应关系.

2. 形成概念

问题 3 类似于利用数轴确定直线上点的位置，结合上节课学习的有序数对，回答问题. 如图 2，你能找到一种办法来确定平面内点 P 的位置吗？

师生活动：学生小组讨论解决问题的方法，教师给予适当的引导，然后梳理解决这个问题的过程：点 P 所在的平面内有一些方格线，利用上节课所学的有序数对，约定“列数在前，排数在后”. 如图 2，点 P 在“第 1 列第 2 排”，记为 (1，2).

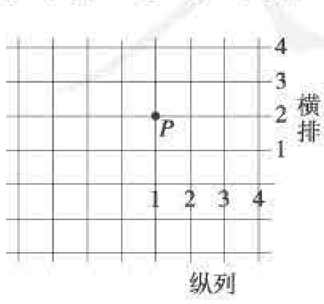


图 2

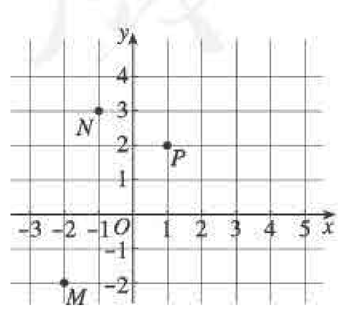


图 3

受上述方法的启发，为了确定平面内点 M，N 的位置，我们可以画一些纵横交错的直线. 为

了便于标记每一条直线的顺序，以其中的两条为基准，一条看作横向的数轴，另一条看作纵向的数轴，这两条数轴有公共原点且互相垂直（图 3）.

追问（1）：在图 3 中，点 P 记为（1，2）. 类比点 P，你能分别写出点 M，N 分别记为什么吗？

师生活动：学生回答，教师可适当引导.

（M 记为（-2，-2），N 记为（-1，3）.）

追问（2）：根据课前查阅的资料，哪位同学能为大家简单介绍平面直角坐标系的产生以及数学家笛卡儿对数学产生的影响吗？

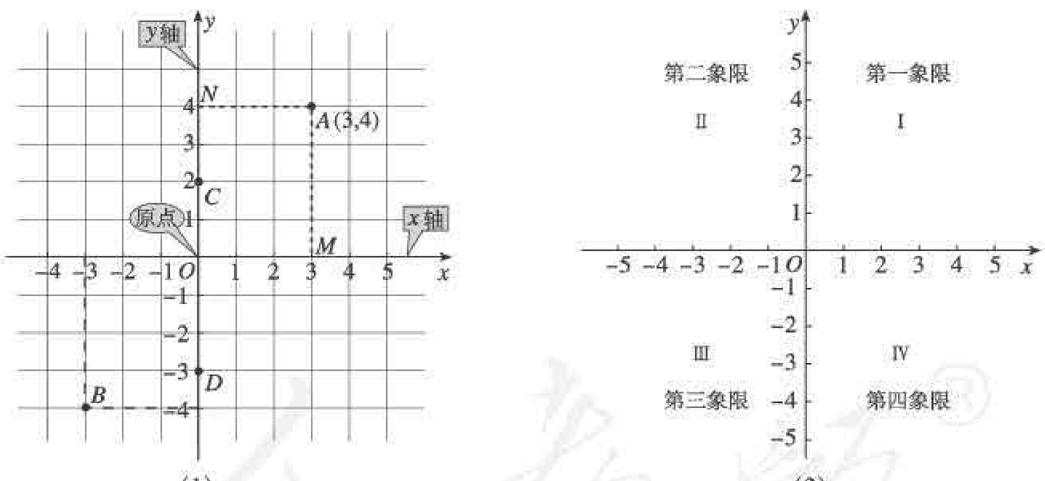
师生活动：学生回答，教师指出：法国数学家笛卡儿设想将几何问题数量化，从而使其变成一个代数问题，用代数学的方法进行计算、证明，从而达到最终解决几何问题的目的，由此诞生了一门新的数学分支——解析几何. 这好像在被一条大河隔开的代数和几何的两岸，架起了一座桥梁，把“数”与“形”联系起来，引起了数学的深刻革命. 恩格斯称解析几何的诞生是数学发展的一个转折点. 笛卡儿的这种思想，尤其在高速计算机出现的今天，具有深远意义.

追问（3）：如图 4，学生看书第 66，67 页后回答下列问题：

①说一说组成平面直角坐标系的两条数轴具备什么特征？

②什么是横轴？什么是纵轴？什么是坐标原点？

③坐标平面被两条坐标轴分成了哪几个部分，分别对应什么象限？



（1）　　　　（2）

图 4

师生活动：教师引导：平面直角坐标系即在平面内画互相垂直、原点重合的两条数轴. 水平的数轴称为 x 轴或横轴，取向右方向为正方向；竖直的数轴称为 y 轴或纵轴，取向上方向为正方向. 两坐标轴的交点为平面直角坐标系的原点（图 4（1））. 建立平面直角坐标系后，坐标平面被两条坐标轴分成了 4 个部分，每个部分称为象限，分别叫做第一象限、第二象限、第三象限、第四象限. 坐标轴上的点不属于任何象限（图 4（2））.

设计意图：利用学生学过的有序数对、数轴知识，以确定平面内点 P 的位置为目的，让学生在解决具体问题的过程中，自然而然地建立平面直角坐标系，并理解相关概念.

问题 4　在平面直角坐标系中，能用有序数对来表示图 4（1）中点 A 的位置吗？

师生活动：如图 4（1），由点 A 分别向 x 轴，y 轴作垂线，垂足 M 在 x 轴上的坐标是 3，垂足 N 在 y 轴上的坐标是 4，有序数对（3，4）就叫做点 A 的坐标. 其中 3 是横坐标，4 是纵坐标.（注意：表示点的坐标时，必须横坐标在前，纵坐标在后，中间用逗号隔开.）

追问（1）：如图 5，在平面直角坐标系中，点 A，B，C，D 的坐标分别是什么？

师生活动：学生独立写出 $A(3, 0)$，$B(-2, 3)$，$C(4, -3)$，$D(-1, -4)$.

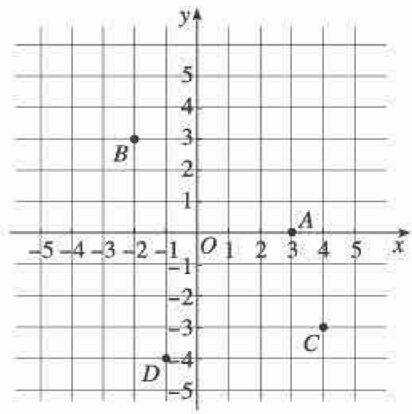


图 5

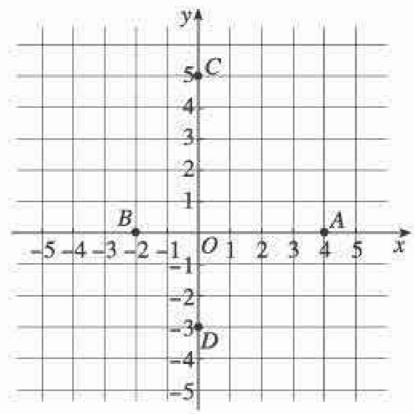


图 6

追问（2）：在图 6 的平面直角坐标系中，你能分别写出点 A，B，C，D 的坐标吗？x 轴和 y 轴上的点的坐标有什么特点？原点的坐标是什么？

师生活动：学生写出 $A(4, 0)$，$B(-2, 0)$，$C(0, 5)$，$D(0, -3)$. 教师可适当引导：从上面练习中发现

① x 轴上的点的纵坐标为 0，一般记为 $(x, 0)$；

② y 轴上的点的横坐标为 0，一般记为 $(0, y)$；

③ 原点 O 的坐标是 $(0, 0)$.

设计意图：在给出平面直角坐标系的定义之后，及时安排用坐标表示点的练习. 先表示一般点的坐标，再表示特殊点的坐标，这样安排符合学生的认知规律，使学生更容易理解和掌握所学的知识.

例 在平面直角坐标系中描出下列各点：

$$A(4, 5),\ B(-2, 3),\ C(-4, -1),\ D(3, 0),\ K(0, -4).$$

师生活动：教师可详细介绍描出点 A 的方法：先在 x 轴上找出表示 4 的点，再在 y 轴上找出表示 5 的点，过这两个点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂线的交点就是点 A. 其余点要求学生自己描出.

设计意图：已知点的坐标，让学生在平面直角坐标系内找到对应点的位置.

问题 5 数轴上点与坐标是什么关系？想一想平面上的点与坐标又是什么关系？

师生活动：学生容易回答数轴上的点与坐标（实数）一一对应，用类比的方法得到平面上的点与坐标（有序实数对）也是一一对应的.

设计意图：通过解答问题 4 和例题，并类比数轴上的点与坐标的关系，让学生归纳平面上的点与坐标之间的关系.

3. 小结

教师和学生一起回顾本节课所学内容，并请学生回答以下问题：

(1) 什么是平面直角坐标系？

(2) 平面直角坐标系中一个有序数对可以确定一个点的位置，它与数轴上一个实数确定一个点的位置有什么区别？

(3) 平面直角坐标系内点与坐标之间有什么关系？

设计意图：通过小结，使学生梳理本节课所学内容，理解本节课的核心——平面直角坐标系中点与坐标的一一对应关系，感受数形结合的思想.

4. 布置作业

教科书习题 7.1 第 2，3，4，5 题.

五、目标检测设计

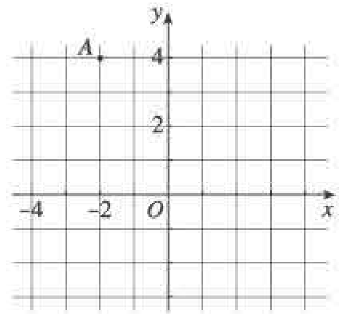
1. 如图，下列说法中正确的是（　　）.

(A) 点 A 的横坐标是 4

(B) 点 A 的横坐标是 -4

(C) 点 A 的坐标是 $(4,\ -2)$

(D) 点 A 的坐标是 $(-2,\ 4)$



（第 1 题）

设计意图：本题主要考查学生根据平面直角坐标系中已知点的位置确定点的坐标的能力.

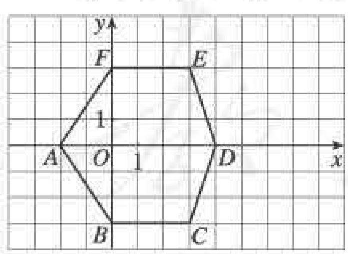
2. 过点 $B(-3,\ -1)$ 作 x 轴的垂线，垂足对应的数是________；过点 $B(-3,\ -1)$ 作 y 轴的垂线，垂足对应的数是________.

设计意图：本题主要考查学生对平面直角坐标系中点的坐标的确定方法的掌握.

3. 点 $A(3,\ a)$ 在 x 轴上，点 $B(b,\ 4)$ 在 y 轴上，则 $a=$______，$b=$______.

设计意图：本题主要考查学生对坐标轴上点的坐标特征的掌握.

4. 如图，写出图中多边形 $ABCDEF$ 各个顶点的坐标，并说明点 C，E 分别在什么象限.



（第 4 题）

设计意图：本题主要考查学生对平面直角坐标系中点的坐标表示的掌握和对象限概念的理解.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 坐标系

用来确定数或数组与基本几何对象（常常是点）之间对应关系的参考系叫做坐标系．最早用于数与形的结合，现在发展为一种数学结构——坐标系，即对于某个数学对象的集合，使其元素对应于特定的数量结构．

用坐标系来确定点的位置起源于古代．远在公元前 4 世纪，中国战国时代的石申制成世界上最早的星表《石氏星经》，就是用坐标思想方法记录了一百多颗恒星的位置．14 世纪在奥尔斯姆（N. Oresme）的著作中，已有关于经纬度的萌芽．受到奥尔斯姆思想的影响，笛卡儿（R. Descartes）从古代的天文和地理的经纬线制中得到启发，于 1637 年出版的《方法论》的附录《几何学》中，阐述了他的平面坐标方法和变量思想．

坐标系有许多种．按空间的维数分，有平面坐标系和空间坐标系．

在平面坐标系里，有平面直角坐标系、平面斜角坐标系、仿射坐标系、极坐标系等．

(1) 平面直角坐标系是一种常用的坐标系，也称平面笛卡儿直角坐标系．在平面上，过一定点 O 作两条互相垂直的轴 x 和 y．以定点 O 为原点，在每条轴上取相同的单位长度，这样就在平面上建立了一个直角坐标系（图 7-1）．

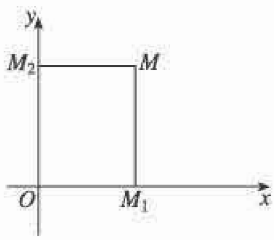


图 7-1

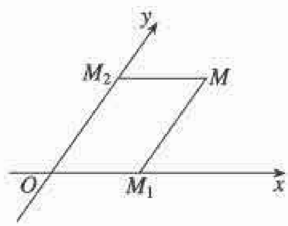


图 7-2

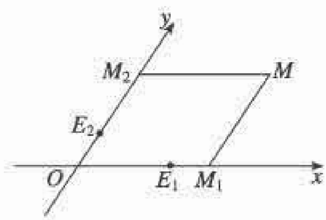


图 7-3

(2) 平面斜角坐标系也称平面笛卡儿斜角坐标系．在平面上，过一定点 O 作两条斜交的轴 x 和 y，它们的交角是 ω．以定点 O 为原点，在每条轴上取相同的单位长度，这样就在平面上建立了一个斜角坐标系（图 7-2）．其中 ω 称为坐标角．

(3) 平面上过一定点 O 作两条相交的轴 x 和 y，它们的交角是 ω．以定点 O 为原点，在每条轴上取单位长度（分别是 OE_1，OE_2），这样就在平面上建立了一个仿射坐标系（图 7-3）．对于平面上任一点 M，过 M 作两轴的平行线，与两轴分别交于 M_1，M_2，它们在两轴的坐标分别是 x，y，于是点 M 就对应有序数组 (x, y)；反过来，任一有序数组 (x, y) 也就对应平面上的唯一点．实数对 (x, y) 叫做点 M 的平面仿射坐标，x，y 分别称为点 M 的第一坐标、第二坐标，两轴的单位长度不一定相同．如果两轴的单位长度相同，且 $\omega=90°$，就是平面直角坐标系；如果两轴的单位长度相同，且 $\omega\neq 90°$，就是平面斜角坐标系．

(4) 在平面上，过一定点 O 作一条射线，再取一个单位长度，并确定角的方向（通常取逆时

针的方向为角的正方向)，这样就在平面上建立了一个极坐标系（图 7-4）．其中，点 O 叫做极点，Ox 轴叫做极轴．平面上的每一个点 M 可以通过 $OM=\rho$（称为点 M 的极径）以及 $\angle xOM=\theta$（称为点 M 的极角）来表示，有序数对 $(\rho,\ \theta)$ 称为点 M 的极坐标．

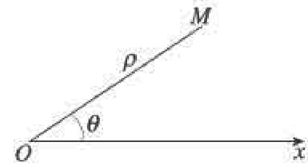


图 7-4

参考资料

《数学辞海》编辑委员会．《数学辞海》：第 1 卷．北京：中国科学技术出版社，2002．

2. 笛卡儿

笛卡儿于 1596 年出生在法国的拉艾镇（现名拉艾一笛卡儿镇)，1650 年卒于瑞典的斯德哥尔摩．1616 年，笛卡儿从巴黎的普瓦捷大学毕业，获法律学位．毕业两年后从军，开始军旅生涯，其间结交了许多科学界的朋友．10 年后，笛卡儿移居荷兰，开始长达 20 年的科学研究与写作．

笛卡儿首先是哲学家，是欧洲近代哲学的主要开拓者之一．同时他也是一位勇于探索的科学家，在物理学、生理学、数学等领域都有所成就．

他的数学成就集中于他的哲学著作《方法论》一书中的第三个附录《几何学》．他想要创造一种方法，用它可以解决所有的几何问题，给出这些问题的一般解法．笛卡儿的理论以下面两个观念为基础：坐标观念、方程的变量观念．在笛卡儿的书中没有出现坐标轴的图样，只是叙述了这种思想观念，也没有引进有关坐标的术语．在笛卡儿以前，对于含有两个未知数的方程 $F(x,\ y)=0$，人们认为是不确定的，因为无法从这个方程确定这两个未知数的值．笛卡儿把方程中的 x 看作是点的横坐标，把 y 看作是点的纵坐标．于是，当 x 连续变化时，一般地，点就移动成一条曲线．这样一来，含有两个未知数的一个代数方程，就对应了平面上的一条确定的曲线．《几何学》共分 3 卷．第 1 卷将几何问题化为代数问题，提出几何问题的统一作图法．第 2 卷给出解析几何的基本思想，将平面上的点与一种坐标对应起来．第 3 卷讨论代数方程的理论，给出笛卡儿符号法则．

笛卡儿的另一数学成就是引进具有普遍意义的符号推论形式．这包括引进了本质上可代表任何一种量的符号体系．在《几何学》中，他用字母表中的小写字母 a，b，c 等代表已知量；用 x，y，z 等代表未知量，这种用法一直延续至今．他用数字上的上标代替过去使用的“平方”“立方”这些词语表达法．

3. 笛卡儿坐标系的由来

坐标系是解析几何赖以生存的基础，通过坐标系，平面上的点才与实数对联系起来，进而把平面上的曲线用代数中的方程表示，用代数的方法研究解决几何问题．当初笛卡儿创立解析几何时，使用的是哪种坐标系呢？当时，笛卡儿取定一条直线当基线（即现在所说的 x 轴)，再取定一条与基线相交成定角方向的直线（即现在所说的 y 轴，但当时并没有明确出现 y 轴，100 年后，一个瑞士人（克拉美）才正式引入 y 轴)，他没有要求 x 轴与 y 轴互相垂直．可见当初笛卡儿使用的并不是现在我们所用的笛氏直角坐标系，而是笛氏斜角坐标系．而且笛卡尔当时只考虑 x，y 取正值，所以图形只限制在第一象限内．“横坐标”和“纵坐标”的名称笛卡儿也没有使用过，“纵坐标”是由莱布尼茨在 1694 年正式使用的，而“横坐标”到 18 世纪才由沃尔夫等人引入．至于“坐标”一词，也是莱布尼茨在 1692 年首次使用的．

可见当初笛卡儿的坐标系并不完善，经过后人不断地改善，才形成了今天的直角坐标系．然

而，笛卡儿迈出的最初一步具有决定意义，所以人们仍把后来使用的直角坐标系称为笛氏直角坐标系.

4. 解析几何的诞生

笛卡儿对研究问题的方法论有特别的兴趣，他对当时的几何方法与代数方法进行比较，分析了各自的优点和缺点，他主张采取代数和几何中一切最好的东西，互相取长补短. 他认为，没有任何东西比几何图形更容易引入人脑，因此用图形来表达事物非常有益. 但是他也看到，欧几里得以来的几何中，差不多每一个定理的证明都要求某种新的往往是奇巧的想法，他对这点深感不安，他还批评希腊人的几何过多地依赖图形. 他看到了代数的力量，认为代数具有一般性，在提供广泛的方法论方面高于几何方法. 他强调说："我想，应当寻求另外一种包含这两门学科的好处而没有它们的缺点的方法." 在这个思想的指导下，笛卡儿把代数方法用于几何，创立了解析几何——一种研究几何问题的新方法. 通过坐标系，将平面上的曲线用两个变量 x，y 的方程表示，使得图形的几何关系在方程的性质中表现出来. 解析几何的创立是数学史上的转折点，它导致了微积分的创立，从此数学进入了变量数学的新时期.

二、拓展性问题

1. 点 $A(x, y)$ 的坐标 x，y 满足二元一次方程 $x+y=0$，请找出这样的 4 个点，并在平面直角坐标系中，描出这些点，你能发现什么规律？怎样进一步验证这个规律？

答案：这些点都在第二、四象限的角平分线上.

2. 如图 7-5，请在平面直角坐标系中，描出下列各点，并将这些点分类：

$A(1, 4)$，$B(-2, 3)$，$C(5, 0)$，$D(3, 2)$，$E(-6, 2)$，$F(-4, -1)$，$G(3, -4)$，$H(-6, 1)$，$I(-5, -1)$，$J(-1, 0)$，$K(0, -4)$，$L(6, -1)$，

你能探索出几种分类方法？

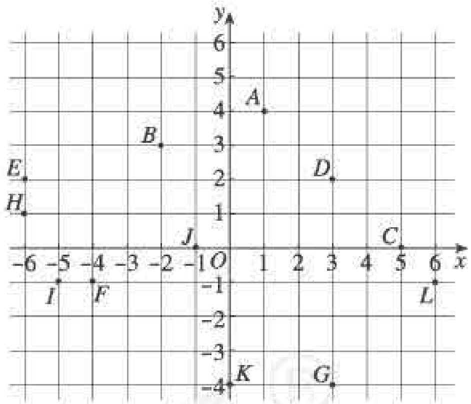


图 7-5

答案：在分类前，先将这些点标在坐标系中，利用直观分类：(1) 按是否在坐标轴上分类；(2) 按是否位于 x 轴的上方分类；(3) 按是否位于 y 轴的右方分类；(4) 按 xy 是否大于 0 分类；　(5) 按 $x+y$ 是否大于 0 分类；等等.

3. 在平面直角坐标平面中，将原点平移 5 个单位长度，得到点 $P(x, y)$，其中 x，y 都是整数. 请思考一种画法，使你能找出所有可能的点 P. 通过这一活动，你发现了什么？

答案：以原点为圆心，5 为半径画圆，可以观察到，所有的点是 $(5, 0)$，$(0, 5)$，$(-5, 0)$，$(0, -5)$，$(3, 4)$，$(4, 3)$，$(-3, 4)$，$(-4, 3)$，$(-3, -4)$，$(-4, -3)$，$(3, -4)$，$(4, -3)$.

4. 在平面直角坐标系中，点的横、纵坐标都是整数时，这样的点称为格点（也叫整点）. 所有顶点都是格点的多边形称为格点多边形. 如图 7-6，六边形 $ABCDEF$ 就是格点六边形.

(1) 请你在平面直角坐标系中尽可能多地画出内部只有一个格点的格点三角形、格点四边形、格点五边形，并且计算这些格点多边形的面积 S，以及边界上的格点个数 N. 你能发现 S 与 N 之间有什么关系吗？

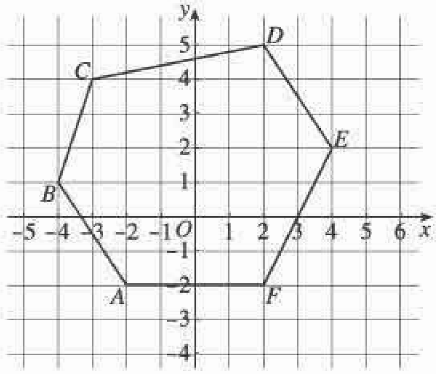


图 7-6

(2) 请你在平面直角坐标系中尽可能多地画出内部只有两个格点的格点三角形、格点四边形、格点五边形，并且计算这些格点多边形的面积 S，以及边界上的格点个数 N. 你能发现 S 与 N 之间有什么关系吗？

(3) 请你在平面直角坐标系中尽可能多地画出内部只有三个格点的格点三角形、格点四边形、格点五边形，并且计算这些格点多边形的面积 S，以及边界上的格点个数 N. 你能发现 S 与 N 之间有什么关系吗？

(4) 一般地，如果格点多边形的面积是 S，其内部的格点数是 M，边界上的格点个数是 N，你能根据 (1)(2)(3) 所得结果猜测 S，M，N 之间有什么关系吗？随意画几个格点多边形试一试.

答案：$S=M+\dfrac{N}{2}-1$.

参考资料

闵嗣鹤. 格点和面积. 北京：人民教育出版社，1964.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容是：平面直角坐标系的有关概念，点与坐标的一一对应关系，以及用坐标表示地理位置和用坐标表示平移. 对于平面直角坐标系的有关概念，应考查学生能否画出平面直角坐标系；在给定的平面直角坐标系中，根据坐标描出点的位置、由点的位置写出它的坐标. 对于用坐标表示地理位置，应在实际问题中考查学生能否建立适当的平面直角坐标系，描述物体的位置，能否用方向和距离刻画两个物体的相对位置. 对于坐标与图形运动，应考查学生能否用坐标表示平移.

2. 对本章的考查，应注意以下问题：

(1) 对于平面直角坐标系的有关概念，不应单纯考查对概念的记忆，而应注意结合具体问题进行评价，避免死记硬背.

(2) 对于用坐标表示地理位置. 一方面考查学生对坐标方法的掌握，同时考查学生综合利用坐标方法解决实际问题的能力.

(3) 对于用坐标表示平移. 应通过考查平移与坐标的关系，使学生看到平面直角坐标系是数与形之间的桥梁，感受代数问题与几何问题的相互转换.

3. 本章内容与实际联系紧密，学生可以采用多种形式进行学习，因此评价也应采用不同的方式，例如让学生以小组学习方式，画出校园的平面示意图，通过测量、计算、画图，利用平面直角坐标系确定

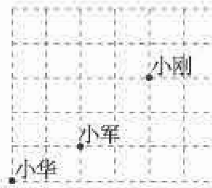
校园各个建筑的地理位置．对于这样的学习方式，应注意对学生的活动过程及活动结果进行评价．

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 课间操时，小华、小军、小刚的位置如图．小华对小刚说：“如果我的位置用（0，0）表示，小军的位置用（2，1）表示，那么你的位置可以表示成（　　）．”

(A)（5，4）　(B)（4，5）　(C)（3，4）　(D)（4，3）

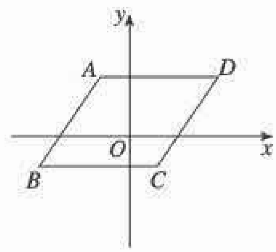


（第 1 题）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC \parallel x$ 轴，下列说法正确的是（　　）．

(A) A 与 D 的横坐标相同　(B) C 与 D 的横坐标相同

(C) B 与 C 的纵坐标相同　(D) B 与 D 的纵坐标相同



（第 2 题）

3. 若 x 轴上的点 P 到 y 轴的距离为 3，则点 P 的坐标为（　　）．

(A)（3，0）　(B)（3，0）或（−3，0）

(C)（0，3）　(D)（0，3）或（0，−3）

4. 如果点 $P(5，y)$ 在第四象限，则 y 的取值范围是（　　）．

(A) $y<0$　(B) $y>0$

(C) y 大于或等于 0　(D) y 小于或等于 0

5. 线段 CD 是由线段 AB 平移得到的，点 $A(-1，4)$ 的对应点为 $C(4，7)$，则点 $B(-4，-1)$ 的对应点 D 的坐标为（　　）．

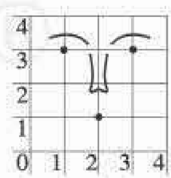
(A)（2，9）　(B)（5，3）　(C)（1，2）　(D)（−9，−4）

6. 一个长方形在平面直角坐标系中三个顶点的坐标为（−1，−1），（−1，2），（3，−1），则第四个顶点的坐标为（　　）．

(A)（2，2）　(B)（3，2）　(C)（3，3）　(D)（2，3）

（二）填空题（每小题 4 分，共 16 分）

7. 如图是小刚画的一张脸，他对妹妹说“如果我用（1，3）表示左眼，用（3，3）表示右眼，那么嘴的位置可以表示成__________．

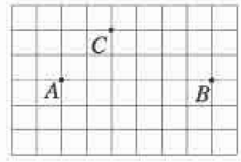


（第 7 题）

8. 点 A 在 x 轴上，位于原点的右侧，距离坐标原点 5 个单位长度，则此点的坐标为__________；点 B 在 y 轴上，位于原点的下方，距离坐标原点 5 个单位长度，则此点的坐标为__________；点 C 在 y 轴左侧，在 x 轴下方，距离每个坐标轴都是 5 个单位长度，则此点的坐标为__________．

9. 小华将平面直角坐标系中的猫的图案向右平移了 3 个单位长度，平移前猫眼的坐标为（−4，3），（−2，3），则平移后猫眼的坐标为__________．

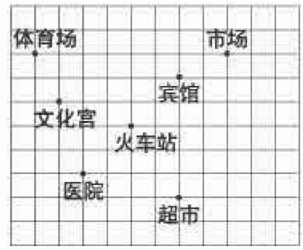
10. 如图，小强告诉小华，图中 A，B 两点的坐标分别为（−3，5），（3，5），小华一下就说出了点 C 在同一坐标系下的坐标__________．



（第 10 题）

（三）**解答题**（每小题12分，共60分）

11. 如图，这是某市部分简图（图中小正方形的边长代表1 km长）. 请以火车站为坐标原点建立平面直角坐标系，并分别写出各地的坐标.



（第11题）

12. 小明从A处出发向北偏东40°走了30 m，到达B处；小刚也从A处出发，向南偏东50°走了40 m，到达C处.

（1）用1 cm表示10 m，画图表示A，B，C三处的位置；

（2）A处在C处的________偏________度的方向上，距离C处____________米；

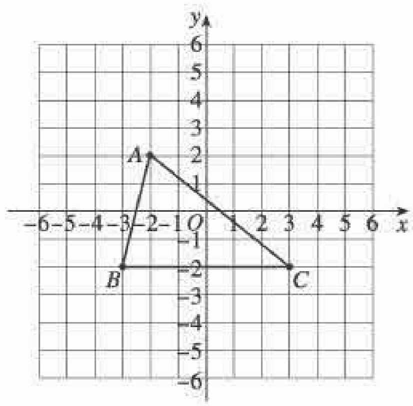
（3）在图上量出B处和C处之间的距离，再说出小明和小刚两人实际相距多少米.

13．如图，把$\triangle ABC$向上平移4个单位长度，再向右平移2个单位长度得$\triangle A_1B_1C_1$，解答下列各题.

（1）写出点A，B，C的坐标；

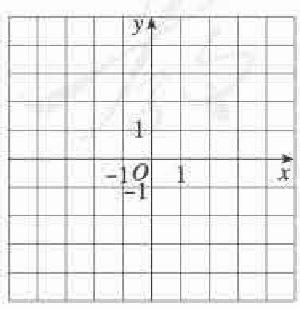
（2）在图上画出$\triangle A_1B_1C_1$；

（3）写出点A_1，B_1，C_1的坐标.



（第13题）

14. 如图，描出$A(-3，-2)$，$B(2，-2)$，$C(-2，1)$，$D(3，1)$四个点. 线段AB，CD有什么位置关系和数量关系？顺次连接A，B，C，D四点，求四边形$ABCD$的面积.

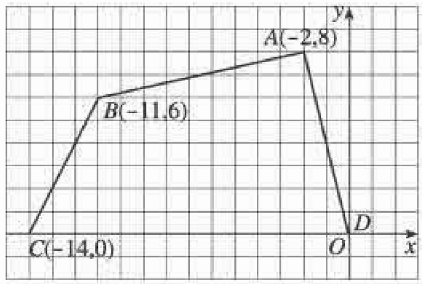


（第14题）

15. 如图，四边形$ABCD$各个顶点的坐标分别为（−2，8），（−11，6），（−14，0），（0，0）.

（1）求这个四边形的面积；

（2）如果把四边形 $ABCD$ 各个顶点纵坐标保持不变，横坐标增加 2，所得的四边形面积又是多少？



（第 15 题）

参考答案

1. D. 本题主要考查学生对用有序数对表示物体位置的掌握.
2. C. 本题主要考查学生对平行于 x 轴、y 轴的直线上点的坐标特点的认识.
3. B. 本题主要考查学生对 x 轴上点的特点的认识.
4. A. 本题主要考查学生对象限内点的特点的认识.
5. C. 本题主要考查学生对用坐标表示平移的掌握.
6. B. 本题主要考查学生对用坐标确定点的掌握.
7. (2，1). 本题主要考查学生对用有序数对表示物体的位置的掌握.
8. (5，0)，(0，−5)，(−5，−5). 本题主要考查学生对用坐标确定点的掌握，以及对 x，y 轴上点的特点的认识.
9. (−1，3)，(1，3). 本题主要考查学生对用坐标表示平移的掌握.
10. (−1，7). 本题主要考查学生对确定平面直角坐标系，并用坐标表示点的掌握.
11. 火车站（0，0），医院（−2，−2），文化宫（−3，1），体育场（−4，3），宾馆（2，2），市场（4，3），超市（2，−3）. 本题主要考查学生对用坐标表示地理位置的掌握.
12. (1)（图略）；(2) A 处在 C 处的北偏西 50°的方向上，距离 C 处 40 m；(3) 量得 B 处和 C 处之间的距离为5 cm，所以小明和小刚两人实际相距 50 m. 本题主要考查用方向和距离表示点的位置.
13. (1) $A(-2，2)$，$B(-3，-2)$，$C(3，-2)$；(2)（图略）；(3) $A_1(0，6)$，$B_1(-1，2)$，$C_1(5，2)$. 本题主要考查学生对用坐标表示点和平移的掌握.
14. (图略). $AB/\!/CD$，$AB=CD$，$S_{ABCD}=15$. 本题主要考查学生对用坐标确定点的位置的掌握，对平行直线上点的坐标特点的认识，以及将四边形面积转化为三角形面积的意识.
15. (1) 80；(2) 80. 本题主要考查学生在平面直角坐标系中将四边形面积转化为三角形面积的意识，以及对平移性质的认识.

第八章　二元一次方程组

Ⅰ总体设计

一、本章学习目标

1. 以含有多个未知数的实际问题为背景，经历“分析数量关系→设未知数→列方程组→解方程组和检验结果”的过程，体会方程组是刻画现实世界中含有多个未知数问题的数学模型.

2. 了解二元一次方程及其相关概念，能设两个未知数并列方程组表示实际问题中的等量关系.

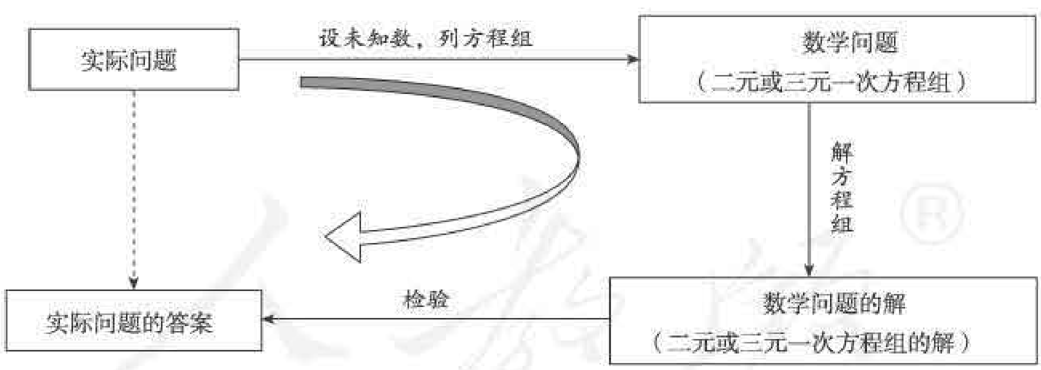
3. 了解解二元一次方程组的基本目标：使方程组逐步转化为 $x=a$，$y=b$ 的形式，体会“消元”思想，掌握解二元一次方程组的方法——代入法和加减法，能根据二元一次方程组的具体形式选择适当的解法.

4. 了解三元一次方程组及其解法，进一步体会“消元”思想，能根据三元一次方程组的具体形式选择适当的解法.

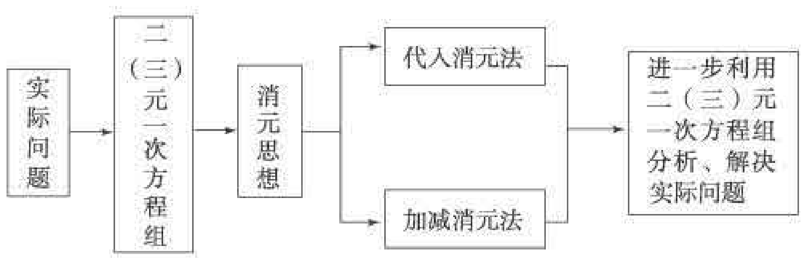
5. 通过探究实际问题，进一步认识利用二（三）元一次方程组解决问题的基本过程，体会数学的应用价值，提高分析问题、解决问题的能力.

二、本章知识结构框图

1. 利用二（三）元一次方程组解决实际问题的基本过程



2. 本章知识的前后顺序



三、内容安排

本章主要内容：二元一次方程组及其相关概念，利用二元一次方程组分析、解决实际问题，消元思想和代入法、加减法解二元一次方程组，以及三元一次方程组的解法.

“8.1 二元一次方程组”首先从一个篮球联赛中的问题入手，引导学生直接设 x 和 y 两个未知数，表示问题中的两个等量关系，得到两个方程. 然后，教科书以这两个方程为例，让学生体验二元一次方程、二元一次方程组的特征，归纳得出二元一次方程组及其解的概念.

“8.2 消元——解二元一次方程组”的标题点出了这一节的核心. 二元一次方程组含有两个未知数，如果消去其中一个未知数，由两个方程得出一个方程，就得到前面已学习过的一元一次方程. 由它可以先解出一个未知数，然后再设法求另一个未知数. 这一节首先从讨论解方程组的需要出发，引导学生从解决问题的基本策略的角度认识消元思想. 然后，教科书讨论了两种通过消元解方程组的方法——代入法和加减法，并结合具体问题用框图形式表示了这两种解法的一般过程.

“8.3 实际问题与二元一次方程组”选择了三个具有一定综合性的问题：“牛饲料问题”“种植计划问题”和“成本与产出问题”. 让学生以方程组为工具进行一定深度的思考，丰富运用方程组解决实际问题的实践，把本章强调的以方程组为工具，把实际问题模型化的思想提到新的高度. 为切实提高利用方程组解决实际问题的能力，这节内容的问题形式包括：估算与精确计算的比较（探究 1），开放地寻求设计方案（探究 2），根据图表所表示的数据信息列方程组（探究 3）. 本节目的在于：一方面通过实际生活中的问题，进一步突出方程组这种数学模型应用的广泛性和有效性；另一方面使学生在实际问题情境中运用所学数学知识，进一步提高分析问题和解决问题的能力.

“8.4 三元一次方程组的解法”的目的是通过解三元一次方程组进一步体会消元——代入消元、加减消元的思想方法，同时为二次函数中利用待定系数法确定二次函数的解析式做一定的准备. 本节在实际问题的基础上，引入三元一次方程组. 三元一次方程组含有三个未知数，如何消元，先消哪个元是需要认真思考的. 消去其中一个未知数，就得到前面学过的二元一次方程组，把三元一次方程组转化为二元一次方程组，进而转化为一元一次方程. 在求三元一次方程组解的过程中，消元的思想体现得非常充分.

本章在列方程组的讨论中，重视数学与实际的关系，突出其中蕴含的建模思想. 在解方程组的讨论中，重视过程与结果的关系，突出消元、化归思想.

此外，本章对于数学文化也予以关注.“阅读与思考 一次方程组的古今表示及解法”从《九章算术》中有关一次方程组的算筹表示和解法说起，联系现代的矩阵表示和解法，介绍了中国传统数学的光辉成就，感受数学文化的熏陶.

四、课时安排

本章教学约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

8.1	二元一次方程组	约 1 课时
8.2	消元——解二元一次方程组	约 4 课时
8.3	实际问题与二元一次方程组	约 3 课时

*8.4　三元一次方程组的解法　　约 2 课时

数学活动

小结　　约 2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 关注实际问题情境，体现数学建模思想

模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径．本章我们从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，发现和提出问题是数学建模的起点；用二（三）元一次方程组表示数学问题中的数量关系，这是建模最重要的一个环节；求出结果并讨论结果的意义，是建模的目的．通过“问题情境——建立模型——解释、应用与拓展”的模式展开本章内容的学习，使学生经历数学建模的完整过程．

现实中存在大量问题涉及多个未知数，其中许多问题中的数量关系是一次（也称线性）的，这为学习“二元一次方程组”提供了大量的现实素材．本章中，实际问题情境贯穿全章，对方程组解法的讨论也是在解决实际问题的过程中进行的．编写本章时关注二（三）元一次方程组的现实背景，通过大量丰富的实际问题，反映方程组来源自实际又服务于实际，加强对方程组是解决现实问题的一种重要数学模型的认识．本章明确提出“方程组是解决含有多个未知数问题的重要数学工具”，并在多处体现方程组在解决实际问题中的工具作用，实际上这是在渗透数学模型的思想．

设未知数、列方程组是本章中用数学模型表示和解决实际问题的关键步骤，正确理解问题情境，分析其中的等量关系是设未知数、列方程组的基础．编写本章时注意从多种角度思考，借助图形、表格、式子等进行分析，寻找等量关系，检验方程的合理性．利用二（三）元一次方程组解决问题的基本过程（见前面的框图），在本章“小结”中出现，它与“第三章 一元一次方程”中利用一元一次方程解决问题的基本过程图基本一致．通过用框图概括这样的基本过程，可以从整体上加强方程（组）模型与实际问题的关系．

2. 注重解法背后的算理，强调消元方法

方程组中含有多个未知数，消元思想——解方程组时“化多为少，由繁至简，各个击破，逐一解决”的基本策略，是产生具体解法的重要基础，而代入法和加减法则是落实消元思想的具体措施．本章在有关方程组解法的讨论中，注意先使学生了解消元的基本思想，然后在其指导下寻求解决问题的具体方法，从而使具体解法的合理性凸现出来．

在提出消元思想后，教科书对一种具体的消元解法的过程进行了归纳，即对代入法的基本步骤进行概括．代入法通过“把一个方程（必要时先做适当变形）代入另一个方程”实现消元，注意引导学生认识到为什么要实施这样的步骤，把具体做法与消元结合起来，使学生明确如此操作的目的．类似地，教科书在两个简单例子之后，对另一种具体的消元解法——加减法的过程进行了归纳．加减法通过“把两个方程相加减”实现消元，而加减的条件是“两个二元一次方程中同一未知数的系数相反或相等”，同样注意引导学生认识为什么要实施这样的步骤，把具体做法与消元结合起来，使学生明确如此操作的目的性．教科书还以框图形式表示了两种解法的程序，突出了它们是如何实现消元这一关键步骤的．

加减法和代入法的共同点是，它们都是通过消元解方程组，使二元问题先转化为一元问题，求出一个未知数后再求另一个未知数；它们的不同点是：消元的方法不同，或通过“代入”或通过“加减”．对一个方程组用哪种消元方法解都可以，但应根据方程组的具体形式选择比较简便的方法．为使学生认识这些，教科书专门设置了“思考”栏目，让学生逐步积累经验，提高选择能力．

“8.4　三元一次方程组的解法”一节可以使学生更好地体会“消元”的思想方法，并根据三元一次方程组的形式，灵活选择不同的消元方法．

3. 结合具体内容，介绍中国传统数学的成就及其蕴含的数学思想，感受数学文化的熏陶

本套教科书力求能够成为反映科学发展和文化进步的一面镜子，既体现数学的科学性和应用性，又体现数学科学中蕴含的文化．人们运用方程组解决含有多个未知数的问题已有很长的历史，这个问题对于代数学的发展起了重要的促进作用，现代高等代数中的许多内容都起源于对线性方程组的研究．中国传统数学在方程及方程组的研究方面也有许多成果，例如，著名的“鸡兔同笼”问题就是可以利用方程组解决的多元问题，《九章算术》等古代数学著作中也记载了有关方程组的一些内容．它们反映了人类对客观世界中数量关系的不断探究，从中可以看出人类追求真理的长期努力，折射出科学文明的源远流长．本章对于这方面的内容有所反映，使学生在数学知识和能力方面获得提高，同时，为了传承数学文化，结合方程组的内容进一步挖掘其文化内涵，使学生进一步受到数学文化的熏陶．

六、对本章教学的建议

1. 注意在对方程已有认识基础上的发展，做好从一元到二元、三元以及多元的过渡

本章从一个篮球联赛中的胜负场数问题开始讨论，这个问题中含有两个未知数．在此之前，学生已经学习过一元一次方程的内容，解决上述问题有两种不同方法：一种方法是，设一个未知数为 x，并用含有 x 的式子表示另一个未知数，根据问题中的等量关系列出一元一次方程；另一种方法是，直接设两个未知数 x 和 y，根据问题中的等量关系列出两个二元一次方程，由它们组成方程组．比较这两种方法，可以发现，第一种方法的难点在于“列”，第二种方法的难点在于“解”．列一元一次方程时要综合考虑问题中的各等量关系，因此有一定难度，但是学生已经熟悉一元一次方程的解法；列二元一次方程组时可以分别考虑两个等量关系，分别列出两个方程，一般说这比将这个问题列成一个一元一次方程容易，但是由于方程中出现两个未知数，因此如何解方程组成为新问题．用方程组解决问题是新方法，这种方法对于解含有多个未知数的问题很有效，并且它的优越性会随着问题中未知数个数的增加体现得更明显．二元一次方程组是方程组中最基本的类型，通过学习它可以了解一般的一次方程组，提高对多元问题的认识．

由于前面已学一元一次方程的内容，学生对方程有了一定的认识，会用一元一次方程表示问题中的等量关系，并求出它的解．从解法上说，多元方程消元后要化归为一元方程，因此对一元一次方程的认识为学习二元一次方程组奠定了基础，对二元一次方程组的认识又为学习三元一次方程组奠定了基础．由“一元”向“二元”“三元”以及“多元”发展的过程中，涉及的实际问题未知数越来越多，数量关系越来越复杂，解法步骤也增加了“消元”和“回代”，更强调未知向已知转化的程序化思想．本章学习中，应注意所学内容与前面有关内容的联系与区别，明确本章内容的特点，做好从“一元”向“二元”“三元”以及“多元”的转化．

2. 重视解三元以及多元方程组中的消元思想

本章涉及的数学思想方法主要包括两个：一是由实际问题抽象为方程组这个过程中蕴含的符号化、模型化的思想；二是解方程组的过程中蕴含的消元、化归思想，它在解方程组中具有指导作用．解二元一次方程组的各个步骤，都是为最终使方程组变形为 $x=a$，$y=b$ 的形式而实施的，即在保持各方程的左右两边相等关系的前提之下，使“未知”逐步转化为“已知”．解三元以及多元方程组的基本策略是“消元”，即逐步减少未知数的个数，使方程组化归为一元方程，先求出一个未知数，然后逐步求出其他未知数．代入法和加减法都是消元解方程组的方法，只是具体消元的过程有所不同．

根据方程组的形式，消哪个元，选用哪种消元方法，是本章的难点之一．教学时要通过一定量的习题训练，让学生逐步克服困难，掌握消元方法．

在本章的教学和学习中，不能仅仅着眼于具体题目的具体解题过程，而应不断加深对以上思想方法的领会，从整体上认识问题的本质．数学思想方法是通过数学知识的载体来体现的，对于它们的认识需要一个较长的过程，既需要教材的渗透，也需要教师的点拨，最后还需要学生自身的感受和理解．认识了消元思想，对于代入法、加减法等具体步骤就不会仅是死记硬背，而能够顺势自然地理解，并能够灵活运用．从这里可以看出，数学思想方法是具体的数学知识的灵魂，数学思想方法对一个人的影响往往要大于具体的数学知识．

3. 加强学习的主动性和探究性

本章注意加强学生学习的主动性和探究性．本章内容涉及许多实际问题，多彩的问题情境容易激起学生对数学的兴趣．在本章的教学中，应注意引导学生从身边的问题研究开始，主动收集、寻找“现实的、有意义的、富有挑战性的”问题作为学习材料，并更多地进行数学活动和互相交流，在主动学习、探究学习的过程中获得知识，培养能力．

对于“8.3　实际问题与二元一次方程组”，应不等同于一般例题内容的教学，而以探究学习的方式完成．本章“数学活动”及“拓广探索”栏目下的习题等都设置了带有探究性的问题．对于这些内容的教学，应鼓励学生积极探究，当学生在探究过程中遇到困难时，教师应启发诱导，设计必要的铺垫，让学生在经过自己的努力克服困难的过程中体验如何探究，而不要代替他们思考，不要过早给出答案．应鼓励学生探究不同的分析、解决问题的方法，使探究过程活跃起来，更好地激发学生积极思维，使他们收获更大．

4. 注重基础知识的掌握，基本能力的提高

二元一次方程组的基本概念和消元解法是基础知识，通过列、解二元一次方程组分析解决实际问题是基本能力，它们对于解三元一次方程组以及今后进一步学习有重要作用．教学和学习中应注意打好基础，切实掌握基本方法，并力求能够较灵活地运用它们，逐步提高基本能力．由于本章多处以分析、解决实际问题为线索展开，而将基础知识寓于分析、解决问题的过程之中，所以教学中应注意对基础知识进行提炼、归纳、整理．对基础知识和基本能力要有清晰的认识，通过必要的练习使学生掌握基础知识、提高基本能力．对于代入法和加减法解二元一次方程组的基本过程，可以通过具体案例、结合教科书中的框图帮助他们加深认识，最终切实掌握．对于教科书中的练习以及“复习巩固”“综合运用”栏目中的题目，应让学生切实掌握．在此基础上，再让学生探究“拓广探索”栏目中的题目等．

第八章　二元一次方程组

我们看下面的问题.

篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负，每队胜 1 场得 2 分，负 1 场得 1 分. 某队在 10 场比赛中得到 16 分，那么这个队胜负场数分别是多少？

在上面的问题中，要求的是两个未知数. 如果用一元一次方程来解决，列方程时，要用一个未知数表示另一个未知数.[1] 能不能根据题意直接设两个未知数，使列方程变得容易呢？[2] 我们从这个想法出发开始本章的学习.

本章我们将从实际问题出发，认识二元一次方程组，学会解二元一次方程组的方法，并运用二元一次方程组解决一些实际问题. 在此基础上，学习三元一次方程组及其解法，进一步体会消元的思想方法. 通过本章的学习，你将对方程（组）有新的认识.

[4]

	胜	负	合计
场数	x	y	10
积分	$2x$	y	16

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16. \end{cases}$$

[3]

Ⅱ 教材分析

[1] 用一元一次方程可以解决这个问题. 例如，设胜场为 x，那么负场为 $10-x$，根据题意，可列方程

$$2x+10-x=16.$$

[2] 直接设两个未知数 x，y，根据问题中的等量关系，容易列出方程

$$x+y=10 \text{ 和 } 2x+y=16.$$

[3] 章前图是篮球比赛的场面，它与引言中的问题呼应. 中学生比较熟悉篮球比赛等体育活动，从这样的实例说起，引入二元一次方程组，使学生感到即将学习的内容与身边的事物有密切的联系，增强求知欲.

[4] 章前图右上方的表格，用 x，y 及含有它们的式子表示篮球联赛问题中的未知数及相关数量：场数和积分. 表格下面是一个二元一次方程组，它表示了问题中的等量关系. 这里用表格和方程组两种不同形式表达同样的内容.

1. 方程有广泛的应用，在义务教育阶段数学课程中占有重要地位. 本章在七年级上册“一元一次方程”的基础上进一步讨论方程（组）及其解法.

2. 本章始终在分析、解决实际问题的情境中展开内容，引言中的问题是篮球联赛中的胜负场数问题. 虽然可以用已学的一元一次方程解决，但是直接设两个未知数，列方程组更加直接，本章就从这个想法出发引入新内容.

3. 本章也可以用学生身边的其他实际问题引入. 作为引入二元一次方程组的实际问题，问题情境应该是学生熟悉的，问题中含有两个未知数，直接设未知数 x，y 后，容易列出二元方程表示问题中的等量关系.

4. 本章编写时非常重视以下两点：

（1）实际问题在全章中有重要地位. 方程组概念的引入、方程组解法的讨论等都是在实际问题背景上展开的.

（2）“消元”是方程组解法的基本指导思想.

8.1 二元一次方程组

思考

引言中的问题包含了哪些必须同时满足的条件？设胜的场数是 x，负的场数是 y，你能用方程把这些条件表示出来吗？

由问题知道，题中包含两个必须同时满足的条件：[1]

胜的场数＋负的场数＝总场数，

胜场积分＋负场积分＝总积分.

这两个条件可以用方程

$$x+y=10,$$
$$2x+y=16$$

表示.

这两个方程有什么特点？与一元一次方程有什么不同？

上面两个方程中，每个方程都含有两个未知数（x 和 y），并且含有未知数的项的次数都是 1，像这样的方程叫做**二元一次方程**[2]（linear equation in two unknowns）.

上面的问题中包含两个必须同时满足的条件，[3]也就是未知数 x，y 必须同时满足方程

$$x+y=10 \quad ①$$

和

$$2x+y=16. \quad ②$$

把这两个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16, \end{cases}$$

就组成了一个**方程组**. 这个方程组中有两个未知数，含有每个未知数的项的次数都是 1，并且一共有两个方程，像这样的方程组叫做**二元一次方程组**[4]（system of linear equations in two unknowns）.

88　第八章　二元一次方程组

[1] 这里所说的条件是等量关系. 我们用字母表示未知数，用方程表示问题中的等量关系.

[2] 这是二元一次方程的定义. 可以对照一元一次方程的定义，理解这种定义的方式，以及两种方程的区别与联系.

[3] 由于问题中包含两个必须同时满足的等量关系，所以未知数 x，y 必须同时满足方程①②.

[4] 这里先通过描述性语言说明什么是方程组，在此基础上，再给出二元一次方程组的概念.

1. 本节继续以引言中的问题开始，引导学生思考“问题中包含的等量关系”以及“设两个未知数后如何用方程表示等量关系”，然后引导学生列出含有两个未知数的方程，分析其中未知数的特征，得到二元一次方程的定义. 这个定义与一元一次方程的定义类似，两者可以对照. 通过讨论问题，认识到可以用不同方法解决含两个未知数的问题，其中包括直接设各未知数并列出二元方程，对方程的认识从一元方程扩充到二元方程，以至多元方程.

2. 列多元方程也是依据问题中的等量关系，根据需要，方程中含有相关的已知数和多个未知数. 一般地，对含多个未知数的问题，解决它需要同时列多个方程，即分别使用问题中的多个等量关系列多个方程，构成方程组. 本节从篮球联赛问题引出二元一次方程组.

探究[1]

满足方程①，且符合问题的实际意义的 x，y 的值有哪些？把它们填入表中。

x											
y											

上表中哪对 x，y 的值还满足方程②？

由上表可知，$x=0$，$y=10$；$x=1$，$y=9$；…；$x=10$，$y=0$ 使方程 $x+y=10$ 两边的值相等，它们都是方程 $x+y=10$ 的解．如果不考虑方程 $x+y=10$ 与上面实际问题的联系，那么 $x=-1$，$y=11$；$x=0.5$，$y=9.5$；……也都是这个方程的解．

一般地，使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，叫做**二元一次方程的解**．[2]

我们还发现，$x=6$，$y=4$ 既满足方程①，又满足方程②．也就是说，$x=6$，$y=4$ 是方程①与方程②的公共解．我们把 $x=6$，$y=4$ 叫做二元一次方程组

$$\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16\end{cases}$$

的解．这个解通常记作

$$\begin{cases}x=6,\\y=4.\end{cases}$$

联系前面的问题可知，这个队在 10 场比赛中胜 6 场、负 4 场．

一般地，二元一次方程组的两个方程的公共解，叫做**二元一次方程组的解**．[3]

练习

对下面的问题，列出二元一次方程组，并根据问题的实际意义，找出问题的解．

加工某种产品需经两道工序，第一道工序每人每天可完成 900 件，第二道工序每人每天可完成 1 200 件．现有 7 位工人参加这两道工序，应怎样安排人力，才能使每天第一、第二道工序所完成的件数相等？

第八章　二元一次方程组

[1] 探究的目的是让学生通过把具体数代入方程，认识到满足一个二元一次方程的未知数的值有很多对．考虑到问题的实际意义，满足方程①的未知数的值有 11 对，即未知数为 0～10 的整数．

[2] 二元一次方程的解是满足方程的一对数值，即 $\begin{cases}x=a,\\y=b.\end{cases}$ 一个二元一次方程有无数多解，并不是说任意一对数值都是它的解．

[3] 二元一次方程组的解，既是方程组中第一个方程的解，又是第二个方程的解．

练习答案

设安排 x 名工人完成第一道工序，y 名工人完成第二道工序．根据题意，得

$$\begin{cases}x+y=7,\\900x=1\ 200y.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

3．二元一次方程的解有以下特点：

（1）二元一次方程的解是一对数值，即

$$\begin{cases}x=a,\\y=b.\end{cases}$$

（2）一个二元一次方程有无数多解，即无数多对数值满足这个二元一次方程．

在教学中引导学生注意这些新变化．需要注意的是，并非任意一对数值都满足一个二元一次方程．实际上，在平面直角坐标系中，以每个二元一次方程的解为坐标的点都在一条直线上，这条直线上有无数个点，每一个点的坐标（x，y）都是这个方程的一个解，这条直线外的任意点的坐标都不是这个方程的解．

4．方程组的解是其中每个方程的公共解．教学中要特别注意“公共解”的含义，即这对数值必须满足方程组中的每一个方程．

[1] 由方程 $3x+y=5$ 中一个未知数的值，可以求出对应的另一个未知数的值. 这实际上是解一元一次方程. 设计此题是加深对二元一次方程的解不唯一的认识.

[2]《孙子算经》约成书于公元 4—5 世纪，其中第 35 题即“鸡兔同笼”问题. 它是中国传统数学的经典问题，蕴含丰富的算术、方程思想. 它影响很大，流传甚广，据说日本的“龟鹤算”就是它的变形. 古人解“鸡兔同笼”问题时用了非常巧妙的算术解法，即由 $94\div2-35=12$ 知兔子有 12 只，再由 $35-12=23$ 知鸡有 23 只.

[3] 这里要求根据题意，列出方程组，并尝试得到结果.

[4] 设计这个问题的目的是，本题虽然无法列出二元一次方程组，但是根据问题的实际意义，我们仍然可以直接由二元一次方程，得到问题的答案.

习题 8.1

复习巩固

1. 填表，使上下每对 x，y 的值是方程 $3x+y=5$ 的解.[1]

x	-2	0	0.4	2				
y					-0.5	-1	0	3

2. 选择题.

方程组

$$\begin{cases}3x+4y=5,\\-7x+9y=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

的解是（　　）.

(A) $\begin{cases}x=2,\\y=-0.25\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x=-5.5,\\y=4\end{cases}$ (C) $\begin{cases}x=1,\\y=0.5\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x=-1,\\y=-0.5\end{cases}$

综合运用

3. 如果三角形的三个内角分别是 $x°$，$y°$，$y°$，求：

(1) x，y 满足的关系式；

(2) 当 $x=90$ 时，y 的值；

(3) 当 $y=60$ 时，x 的值.

4. 我国古代数学著作《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题：[2]“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足. 问鸡兔各几何.”你能用二元一次方程组表示题中的数量关系吗？试找出问题的解.[3]

拓广探索

5. 把一根长 7 m 的钢管截成 2 m 长和 1 m 长两种规格的钢管，怎样截不造成浪费？你有几种不同的截法？[4]

5. 本节练习的要求为列方程组，并尝试得到结果. 目的是使学生进一步熟悉二元一次方程组及其解的概念.

习题 8.1

1. “复习巩固”的题目有两个：(1) 根据表格中的数据，求二元一次方程组的解；(2) 选择题，判断二元一次方程组的解. 目的是复习巩固二元一次方程组的解.

2. “综合运用”的题目为列方程组，并找出问题的解. 设计目的：(1) 培养分析等量关系、列方程组的能力；(2) 培养观察、估算能力；(3) 加深对二元一次方程组及其解的认识.

3. “拓广探索”的题目中有两个未知数，根据等量关系，只能列一个二元一次方程，无法列二元一次方程组. 这时需要结合问题的实际意义：钢管的数量只能为正整数，进行考虑，从而得到问题的答案.

8.2 消元[1]——解二元一次方程组

在 8.1 节中我们已经看到，直接设两个未知数：胜 x 场、负 y 场，可以列方程组 $\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16\end{cases}$ 表示本章引言中问题的数量关系. 如果只设一个未知数：胜 x 场，那么这个问题也可以用一元一次方程

$$2x+(10-x)=16$$

来解.

思考

上面的二元一次方程组和一元一次方程有什么关系？[2]

我们发现，二元一次方程组中第一个方程 $x+y=10$ 可以写为 $y=10-x$. 由于两个方程中的 y 都表示负的场数[3]，所以，我们把第二个方程 $2x+y=16$ 中的 y 换为 $10-x$，这个方程就化为一元一次方程 $2x+(10-x)=16$. 解这个方程，得 $x=6$. 把 $x=6$ 代入 $y=10-x$，得 $y=4$. 从而得到这个方程组的解.

二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，那么就把二元一次方程组转化为我们熟悉的一元一次方程. 我们可以先求出一个未知数，然后再求另一个未知数. 这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做**消元思想**.[4]

上面的解法，是把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解. 这种方法叫做**代入消元法**，简称**代入法**（substitution method）.[5]

例 1 用代入法解方程组

$$\begin{cases}x-y=3, & ①\\3x-8y=14. & ②\end{cases}$$

[1] “消元”点出了解二元一次方程组的基本方法. 本节主要内容为二元一次方程组的解法：代入消元法和加减消元法.

[2] 通过观察，可以发现，把方程组中第一个方程变形后代入第二个方程，二元一次方程组就转化为一元一次方程. 这正是下面要讨论的内容.

[3] 同样，两个方程中的 x 都表示胜的场数.

[4] 通过对上面具体方程组的讨论，我们归纳得到“将未知数的个数由多化少、逐一解决”的消元思想. 这是从具体到抽象，从特殊到一般的认识过程. 所谓“消元”就是减少未知数的个数，使多元方程最终转化为一元方程再求解.

[5] 这是对代入法基本步骤的概括，代入法通过“把一个方程（必要时先做适当变形）代入另一个方程”进行等量替换，用含一个未知数的式子表示另一个未知数，从而实现消元.

1. 本节内容为二元一次方程组的解法：代入消元法和加减消元法. “消元”是解二元一次方程组的基本方法. 顾名思义，“消元”就是减少未知数的个数，使多元方程最终转化为一元方程再解出未知数. 本节通过对具体方程组的讨论，先归纳得出“将未知数的个数由多化少、逐一解决”的消元思想，然后在这种思想指导下从具体到抽象，从特殊到一般，逐步认识代入消元法和加减消元法的实施过程.

2. 本节承接上节中的篮球胜、负场数问题，对比列出的二元一次方程组与一元一次方程，发现它们之间的关系，即把方程组中一个方程变形为用含一个未知数的式子表示另一个未知数后，将它代入方程组中另一个方程，原来的二元一次方程组就转化为一元一次方程. 结合这个具体例子，教科书指出这种转化对解二元一次方程组很重要，它的基本思路就是“将未知数的个数由多化少、逐一解决”的消元思想. 消元思想是本节后续内容的基础.

分析：方程①中 x 的系数是 1，用含 y 的式子表示 x，比较简便.

解：由①，得

$$x=y+3. \quad ③$$

把③代入②，[1]得

$$3(y+3)-8y=14.$$

解这个方程，得

$$y=-1.$$

把 $y=-1$ 代入③，[2]得

$$x=2.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

把③代入①可以吗？试试看.

把 $y=-1$ 代入①或②可以吗？

例 2 根据市场调查，某种消毒液的大瓶装（500 g）和小瓶装（250 g）两种产品的销售数量（按瓶计算）比为 $2:5$.[3]某厂每天生产这种消毒液 22.5 t，这些消毒液应该分装大、小瓶两种产品各多少瓶？

分析：问题中包含两个条件：

大瓶数∶小瓶数＝2∶5，

大瓶所装消毒液＋小瓶所装消毒液＝总生产量.

解：设这些消毒液应该分装 x 大瓶，y 小瓶.

根据大、小瓶数的比，以及消毒液分装量与总生产量的数量关系，得

$$\begin{cases} 5x=2y, [4] & ① \\ 500x+250y=22\,500\,000. & ② \end{cases}$$

由①，得

$$y=\frac{5}{2}x. [5] \quad ③$$

把③代入②，得

$$500x+250\times\frac{5}{2}x=22\,500\,000.$$

解这个方程，得

92 第八章 二元一次方程组

[1] 由于方程③由方程①得到，所以它只能代入方程②，而不能代入①. 为使学生认识到这一点，可以让他们试试把③代入①后会出现什么结果.

[2] 得到一个未知数的值后，把它代入方程①②③都能得到另一个未知数的值. 其中代入方程③最简捷.

[3] 两种产品的销售数量比为 $2:5$，即销售的大瓶数目与小瓶数目的比为 $2:5$. 这里的数目以瓶为单位.

[4] 根据比例的性质：内项的积等于外项的积，由 $x:y=2:5$ 可得 $5x=2y$.

[5] 这是用含 x 的式子表示 y，也可以用含 y 的式子表示 x，得 $x=\frac{2}{5}y$，然后将它代入方程②.

3. 在提出消元思想后，教科书对具体的消元过程进行了归纳，概括了代入法的基本步骤. 代入法是通过“把一个方程（必要时先做适当变形）代入另一个方程”实现消元的方法. 教学中应注意引导学生认识实施这些步骤的依据，把具体做法与消元结合起来，使学生明确操作的目的性.

代入法中把一个未知数替换为含另一个未知数的式子，两者是相等的，这样做的依据是等量代换.

4. 例 1 的目的是巩固对代入法的认识. 虽然前面已有具体例子，但它在归纳之前，而例 1 在归纳之后，可以结合它认识代入法的基本步骤，体会算法思想，并关注具体细节. 例如，例 1 中由于方程③是由方程①得到的，所以它只能代入方程②，而不能代入①，否则会出现不含未知数的恒等式，不能继续解方程. 为使学生认识到这一点，可以让其把③代入①，看会出现什么结果. 通过正反两面的对比，加深理解.

$$x=20\ 000.$$

把 $x=20\ 000$ 代入③，得

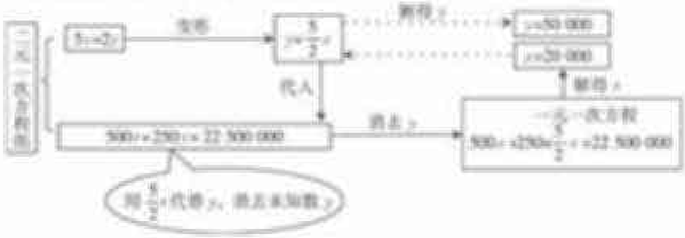
$$y=50\ 000.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=20\ 000,\\ y=50\ 000.\end{cases}$$

答：这些消毒液应该分装 20 000 大瓶和 50 000 小瓶．

上面解方程组的过程可以用下面的框图表示：[1]



思考

解这个方程组时，可以先消去 x 吗？试试看．[2]

练习

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

   (1) $2x-y=3$；　　(2) $3x+y-1=0$.

2. 用代入法解下列方程组：

   (1) $\begin{cases}y=2x-3,\\ 3x+2y=8;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x-y=5,\\ 3x+4y=2.\end{cases}$

3. 有 48 支队 520 名运动员参加篮球、排球比赛，其中每支篮球队 10 人，每支排球队 12 人，每名运动员只能参加一项比赛．篮球、排球队各有多少支参赛？

4. 张翔从学校出发骑自行车去县城，中途因道路施工步行一段路，1.5 h 后到达县城．他骑车的平均速度是 15 km/h，步行的平均速度是 5 km/h，路程全长 20 km，他骑车与步行各用多少时间？

第八章　二元一次方程组　93

[1] 通过一个具体例子，框图展示了代入法的步骤，以及各步骤的作用．它可以作为代入法解二元一次方程组一般步骤的典型．

[2] 可以先消去 x，具体做法：由①得 $x=\frac{2}{5}y$，再将它代入②．

练习答案

1. (1) $y=2x-3$；
   (2) $y=1-3x$.
2. (1) $\begin{cases}x=2,\\ y=1;\end{cases}$
   (2) $\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$
3. 设有 x 支篮球队和 y 支排球队参赛．根据题意，得
   $$\begin{cases}x+y=48,\\ 10x+12y=520.\end{cases}$$
   解得 $\begin{cases}x=28,\\ y=20.\end{cases}$
4. 设骑车用 x h，步行用 y h．根据题意，得
   $$\begin{cases}x+y=1.5,\\ 15x+5y=20.\end{cases}$$
   解得 $\begin{cases}x=\frac{5}{4},\\ y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

5．例 2 是一个实际问题，设置的目的是将列、解二元一次方程组结合起来，体现应用方程组分析、解决问题的全过程，增强应用意识．

例 2 中的两个等量关系为：

大瓶数∶小瓶数＝2∶5，

大瓶所装药量＋小瓶所装药量＝总生产量．

将这两个等量关系用二元一次方程的形式表示出来，就得到二元一次方程组．教学中应注意引导学生总结列方程组的一般思路，而不是死记一些题型．列二元一次方程组时，先找出两个等量关系，然后根据两个等量关系列出两个方程，得到方程组．

6．例 2 后面的框图不仅展示了代入法解方程组的具体步骤，而且展示了各步骤的作用．利用框图进行解题后的回顾与反思，很有必要．一方面，这样做可以渗透算法中程序化的思想；另一方面，它有助于培养良好的学习习惯，提高思考的深度．

> **思考**
>
> 前面我们用代入法求出了方程组
>
> $$\begin{cases} x+y=10, & ① \\ 2x+y=16 & ② \end{cases}$$
>
> 的解. 这个方程组的两个方程中，y 的系数有什么关系？利用这种关系你能发现新的消元方法吗？

这两个方程中未知数 y 的系数相等，②－①[1]可消去未知数 y，[2]得

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入①，得

$$y=4.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$$

②－①就是用方程②的左边减去方程①的左边，方程②的右边减去方程①的右边.

①－②也能消去未知数 y，求得 x 吗？

> **思考**
>
> 联系上面的解法，想一想怎样解方程组
>
> $$\begin{cases} 3x+10y=2.8, \\ 15x-10y=8. \end{cases}$$[3]

从上面两个方程组的解法可以看出，当二元一次方程组的两个方程中同一未知数的系数相反或相等时，把这两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程. 这种方法叫做**加减消元法**，简称**加减法**[4] (addition-subtraction method).

94 第八章 二元一次方程组

[1] 首先需要明确②－①的意义是什么.

[2] 由于两个方程中未知数 y 的系数相同，所以两个方程相减就可以消去 y，②－①，或①－②都行.

[3] 由于两个方程中未知数 y 的系数互为相反数，所以两个方程相加就可以消去 y.

[4] 这是对加减法基本步骤的概括，加减法通过两个方程相加或相减实现消元. 两方程相加减前应先使要消去的未知数的系数相反或相等，为此需要根据等式的性质（等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等）先进行方程的变形.

7. 本节对加减消元法的讨论仍从方程组 $\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16 \end{cases}$ 说起. 由于学习了代入法，学生已经能够解这个方程组. 教科书在此基础上提出观察方程组里两个方程中 y 的系数，发现它们之间相等，由此得出新的解法——通过两个方程相减实现消元. 然后，教科书又引导学生对方程组 $\begin{cases} 3x+10y=2.8, \\ 15x-10y=8 \end{cases}$ 进行类似的思考. 发现两个方程中 y 的系数互为相反数，由此得出新的解法——通过两方程相加实现消元.

上面两个方程组是引出加减法的具体实例，其中未知数的系数相等或相反，是直接使用加减法消元的条件.

8. 教科书在两个简单例子之后，对另一种消元解法——加减法的过程进行了归纳. 加减法通过“把两个方程相加减”实现消元，加减的条件是“两个二元一次方程中同一未知数的系数相

例 3 用加减法解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=16, & ① \\ 5x-6y=33. & ② \end{cases}$$

分析： 这两个方程中没有同一个未知数的系数相反或相等，直接加减这两个方程不能消元. 我们对方程变形，使得这两个方程中某个未知数的系数相反或相等.[1]

解： ①×3，得

$$9x+12y=48. \quad ③$$

②×2，得

$$10x-12y=66. \quad ④$$

③+④，得

$$19x=114,$$

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入①，得

$$3\times6+4y=16,$$

$$4y=-2,$$

$$y=-\frac{1}{2}.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=6, \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

把 $x=6$ 代入②可以解得 y 吗？

如果用加减法消去 x 应如何解？解得的结果一样吗？[2]

例 4 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 2 h 共收割小麦 3.6 hm^2，[3] 3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 5 h 共收割小麦 8 hm^2. 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦多少公顷？

分析： 如果 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x hm^2 和 y hm^2，那么 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 1 h 共收割小麦______[4] hm^2，3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 1 h 共收割小麦______[5] hm^2. 由此考虑两种情况下的工作量.

解： 设 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x hm^2 和 y hm^2.

根据两种工作方式中的相等关系，得方程组

第八章 二元一次方程组 95

[1] 由于两个方程中同一未知数的系数既不相反也不相等，所以不能直接通过加减来消元. 为了消元，需要在方程两边乘适当的数，使同一未知数在两个方程中的系数相反或相等.

[2] 如果先消去 x，可以①×5−②×3. 解方程组时，先消去哪个未知数都可以，结果是确定的，不会因先消去哪个未知数而产生变化. 一般地，先消去哪个未知数简便就先消去哪个.

[3] hm^2 表示公顷.

[4] $2x+5y$.

[5] $3x+2y$.

反或相等”. 教学中要引导学生认识为什么要实施这样的步骤，把具体做法与消元结合起来，使学生明确操作的目的性.

加减法的依据是等式的性质，即“等式两边都加（减）相等的量，结果仍相等.”

9. 例 3 给出的方程组不能直接通过加减两个方程消元，因为同一未知数的系数既不相反又不相等. 因此，加减两个方程之前，先对方程变形，使其满足条件. 具体做法是在方程两边乘适当的数，使同一未知数在两个方程中的系数相等或相反. 类比通分等以前学过的知识，学生容易想到或接受这样的变形. 这样做的依据也是等式的性质“等式两边乘同一个数，结果仍相等”.

10. 例 4 是收割机工作效率问题，设置的目的是将列、解二元一次方程组结合起来，体现应用方程组分析、解决问题的全过程，增强应用意识，同时加深和巩固对加减法解二元一次方程组的认识.

[1] 通过一个具体例子，框图展示了加减法的步骤，以及各步骤的作用．它可以作为加减法解二元一次方程组的一般步骤的典型．

$$\begin{cases}2(2x+5y)=3.6,\\5(3x+2y)=8.\end{cases}$$

去括号，得

$$\begin{cases}4x+10y=3.6, & ①\\15x+10y=8. & ②\end{cases}$$

②－①，得

$$11x=4.4.$$

解这个方程，得

$$x=0.4.$$

把 $x=0.4$ 代入①，得

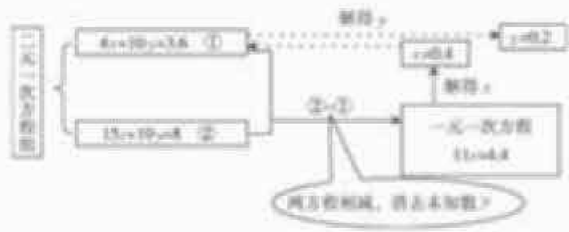
$$y=0.2.$$

因此，这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=0.4,\\y=0.2.\end{cases}$$

答：1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 0.4 hm^2 和 0.2 hm^2．

上面解方程组的过程可以用下面的框图表示．[1]



练习

1. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+2y=9,\\3x-2y=-1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5x+2y=25,\\3x+4y=15.\end{cases}$

练习答案

1. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=\dfrac{7}{2};\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=5,\\y=0;\end{cases}$

为表示问题中的两个等量关系，教科书在分析过程中设置了两个填空，要求学生用含 x，y 的式子表示相关的量．能够正确表示这些量就具有了列相应二元一次方程组的基础．此题中，“工作量＝工作效率×工作时间”是基本的等量关系．

11. 解例 4 中的方程组，可以用代入法或加减法．由于这里刚刚学习加减法，为巩固新知识，应先考虑用加减法．

类似于前面的例 2，例 4 后面的框图不仅展示了加减法解这个方程组的具体步骤，而且展示了各步骤的作用．教学中可以引导学生利用这个框图进行解题后的回顾与反思．

12. 加减法和代入法的共同点是，它们都是通过消元解方程组，使二元问题先转化为一元问题，求出一个未知数后再求另一个未知数；它们的不同点是，消元的方法不同，或通过“代入”或通过“加减”．对一个方程组用哪种消元方法

(3) $\begin{cases}2x+5y=8,\\3x+2y=5;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2x+3y=6,\\3x-2y=-2.\end{cases}$

2. 一条船顺流航行，每小时行 20 km；逆流航行，每小时行 16 km. 求轮船在静水中的速度与水的流速.

3. 运输 360 t 化肥，装载了 6 节火车车厢和 15 辆汽车；运输 440 t 化肥，装载了 8 节火车车厢和 10 辆汽车. 每节火车车厢与每辆汽车平均各装多少吨化肥?

代入消元法和加减消元法是二元一次方程组的两种解法，它们都是通过消元使方程组转化为一元一次方程，只是消元的方法不同. 我们应根据方程组的具体情况，选择适合它的解法.

思考

(1) 你怎样解下面的方程组?[1]

$\begin{cases}2x+y=1.5,\\0.8x+0.6y=1.3;\end{cases}$　　$\begin{cases}x+2y=3,\\3x-2y=5.\end{cases}$

(2) 选择你认为简便的方法解习题 8.1 中的第 4 题（"鸡兔同笼"问题）.

习题 8.2

复习巩固

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式.

(1) $\frac{3}{2}x+2y=1$;　　(2) $\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}y=2$;

(3) $5x-3y=x+2y$;　　(4) $2(3y-3)=6x+4$.

2. 用代入法解下列方程组.

(1) $\begin{cases}y=x+3,\\7x+5y=9;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x-y=5,\\5x+2y=15;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}4x+y=15,\\3x-2y=3;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}4(x+2)+5y=1,\\2x+3(y+2)=3.\end{cases}$

练习答案

(3) $\begin{cases}x=\frac{9}{11},\\y=\frac{14}{11};\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=\frac{6}{13},\\y=\frac{22}{13}.\end{cases}$

2. 设轮船在静水中的速度为 x km/h，水的流速为 y km/h. 根据题意，得

$\begin{cases}x+y=20,\\x-y=16.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=18,\\y=2.\end{cases}$

3. 设每节火车车厢平均装 x 吨化肥，每辆汽车平均装 y 吨化肥. 根据题意，得

$\begin{cases}6x+15y=360,\\8x+10y=440.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=50,\\y=4.\end{cases}$

[1] 加减法和代入法都是通过消元解方程组，对一个方程组用哪种方法解都可以. 应根据具体方程组选择简便的方法. 此处第一个方程组用代入法简便，第二个方程组用加减法简便.

解都可以，应根据方程组的形式选择比较简便的方法. 为使学生认识这些，要引导他们用不同方法解同一个方程组，然后对不同方法加以比较，逐步积累经验，提高选择能力.

习题 8.2

1. "复习巩固"中的第 1 题是为代入法作准备的. 第 2，3 题分别为巩固代入法、加减法解二元一次方程组而设置，根据实际需要可以适当补充此类题目. 第 4 题是简单的应用问题，解此题时需要完成设未知数、列方程组、解方程组等全过程.

2. "综合运用"中的第 5 题是解二元一次方程组. 这些方程形式比较复杂，需要先整理后再选择适当解法. 其余各题都是实际问题，要解决这些问题，需要经历"弄清题意→分析数量关系→设未知数→列方程组和解方程组"等过程. 通过完成这部分习题，使学生熟悉上述过程，掌握

[1] 注意问题中“相向而行”与“同向而行”的含义．分析这类问题时，借助示意图有助于问题的解决．

[2] 由此题的解答可以发现，面积相等的正方形和长方形相比，正方形的周长小于长方形的周长．从另一个角度讲，周长相等的长方形和正方形相比，正方形的面积大于长方形的面积．在数学上，通常把这类问题称为等积（或等周）问题．

3．用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3u+2t=7,\\6u-2t=11;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2a+b=3,\\3a+b=4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x-5y=-3,\\-4x+y=-3;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}y=-1,\\2x+y=3.\end{cases}$

4．某班去看演出，甲种票每张24元，乙种票每张18元．如果35名学生购票恰好用去750元，甲乙两种票各买了多少张？

综合运用

5．解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3(x-1)=y+5,\\5(y-1)=3(x+5);\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{2u}{3}+\dfrac{3v}{4}=\dfrac{1}{2},\\\dfrac{4u}{5}+\dfrac{5v}{6}=\dfrac{7}{15}.\end{cases}$

6．顺风旅行社组织200人到花果岭和云水洞旅游，到花果岭的人数比到云水洞的人数的2倍少1，到两地旅游的人数各是多少？

7．小方、小明两人相距6 km，两人同时出发相向而行，1 h相遇；同时出发同向而行，小方3 h可追上小明．两人的平均速度各是多少？[1]

8．一种商品有大小盒两种包装，3大盒、4小盒共装108瓶，2大盒、3小盒共装76瓶．大盒与小盒每盒各装多少瓶？

拓广探索

9．一个长方形的长减少5 cm，宽增加2 cm，就成为一个正方形，并且这两个图形的面积相等．这个长方形的长、宽各是多少？[2]

98　第八章　二元一次方程组

解题的程序，不断提高分析、解决问题的能力．解方程组时，具体使用代入法还是加减法，根据所列方程组的形式确定．

3．“拓广探索”第9题中，等量关系涉及长方形的边长、面积等关系．列出的方程虽然从形式上看含 xy 的项，不符合二元一次方程的要求，但是可以化简这样的方程，消去含 xy 的项，得到二元一次方程组．通过本题，可以使学生进一步认识解方程（组）之前整理化简的作用．

4．本节重点是二元一次方程组的解法，但是教科书不是单纯讨论解法，而是结合一些实际问题的解决过程讨论解法，在习题设计上也保持了这个特点．

8.3 实际问题与二元一次方程组

前面我们讨论了二元一次方程组的解法，并用二元一次方程组解决了一些实际问题. 本节我们继续探究如何用二元一次方程组解决实际问题. 同学们可以先独立分析问题中的数量关系，列出方程组，得出问题的解答，然后再互相交流.[1]

探究 1

养牛场原有 30 头大牛和 15 头小牛，1 天约用饲料 675 kg；一周后又购进 12 头大牛和 5 头小牛，这时 1 天约用饲料 940 kg. 饲养员李大叔估计每头大牛 1 天约需饲料 18~20 kg，每头小牛 1 天约需饲料 7~8 kg. 你能通过计算检验他的估计吗？[2]

分析：设每头大牛和每头小牛 1 天各约用饲料 x kg 和 y kg. 根据两种情况的饲料用量，找出相等关系，列方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$ [3]

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=\underline{\qquad\qquad}, \\ y=\underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$ [4]

这就是说，每头大牛 1 天约需饲料________ kg，每头小牛 1 天约需饲料______ kg. 因此，饲养员李大叔对大牛的食量估计______，对小牛的食量估计______.[5]

探究 2

据统计资料，甲、乙两种作物的单位面积产量的比是 1∶2. 现要把一块长 200 m、宽 100 m 的长方形土地，分为两块小长方形土地，分别种植这两种作物. 怎样划分这块土地，使甲、乙两种作物的总产量的比是 3∶4？[6]

[1] 本节正文有三个探究问题，学生先独立探究，然后合作交流.

[2] 估算有很强的实用价值，要结合具体问题，培养学生的估算能力. 估算会产生一定误差，通过精算可以对估算结果进行检验.

[3] $\begin{cases} 30x+15y=675, \\ 42x+20y=940. \end{cases}$

[4] $\begin{cases} x=20, \\ y=5. \end{cases}$

[5] 20，5. 较准确，偏高.

[6] 问题要达到的结果是“甲、乙两种作物的总产量的比是 3∶4”，为达到这一点需要确定两个长方形.

1. 本节主要目的：在探究如何用二元一次方程组解决实际问题的过程中，进一步提高分析问题中的等量关系、设未知数、列方程组、解方程组的能力.

2. 本节共安排了三个实际问题，分析、解决这些问题的难度比以前的问题要大. 对于这些问题，教学中应发挥学生自主学习的积极性，引导学生先独立探究，再进行合作交流.

3. “探究 1”是有关牛饲料的问题. 事实上每头牛所需的饲料量有差别，为使问题便于分析解决，考虑的是平均每头大牛 1 天所需饲料和平均每头小牛 1 天所需饲料. 问题设置了饲养员根据经验估计饲料量的情境，并以检验这个估计作为问题. 为此需要借助二元一次方程组进行计算.

4. “探究 1”的问题中，原来 1 天所需饲料量和后来 1 天所需饲料量各自对应不同的大牛数和小牛数，由此得到方程组

$$\begin{cases} 30x+15y=675, \\ 42x+20y=940. \end{cases}$$

分析： 如图 8.3-1，一种种植方案为：甲、乙两种作物的种植区域分别为长方形 $AEFD$ 和 $BCFE$. 此时设 $AE=x$ m，$BE=y$ m，根据问题中涉及长度、产量的数量关系，列方程组

$$\begin{cases}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},\\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.\end{cases}$$ [1]

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=\underline{\qquad\qquad},\\ y=\underline{\qquad\qquad}.\end{cases}$$ [2]

过长方形土地的长边上离一端____处，作这条边的垂线，把这块土地分为两块长方形土地. 较大一块土地种____种作物，较小一块土地种____种作物.[3]

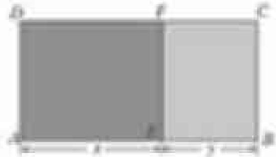
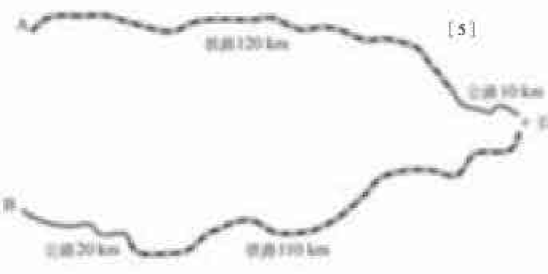


图 8.3-1

你还能设计其他种植方案吗？[4]

探究 3

如图 8.3-2，长青化工厂与 A，B 两地有公路、铁路相连. 这家工厂从 A 地购买一批每吨 1 000 元的原料运回工厂，制成每吨 8 000 元的产品运到 B 地. 已知公路运价为 1.5 元/(t·km)，铁路运价为 1.2 元/(t·km)，且这两次运输共支出公路运费 15 000 元，铁路运费 97 200 元. 这批产品的销售款比原料费与运输费的和多多少元？



[5]

图 8.3-2

分析： 销售款与产品数量有关，原料费与原料数量有关. 设制成 x t 产品，购买 y t 原料. 根据题中数量关系填写下页表.

100 第八章 二元一次方程组

[1]

$$\begin{cases}x+y=200,\\ 100x:(2\times100y)=3:4,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x+y=200,\\ 3\times(2\times100y)=4\times100x.\end{cases}$$

[2] $\begin{cases}x=120,\\ y=80.\end{cases}$

[3] 120 m，甲，乙.

[4] 还有其他方案，例如画出与这块土地的长边平行的一条线，将这块土地分割为两个长方形. 这条直线的具体确定方法，可以通过列、解方程组，由方程组的解得出.

本题是一道开放题，答案不唯一.

[5] 图形及标注的数据也是给出已知条件的方式.

其中 x，y 分别是每头大牛和每头小牛 1 天的饲料用量. 解方程组得 x，y 的值分别为 20 和 5. 对照饲养员的估计，可以得出检验结果.

5. “探究 2”是一个开放问题，解决方法不止一种. 通过此题让学生体会一题多解的问题情境，从多种角度考虑问题.

分析本问题时注意下面两点：

（1）要把这块地分为两个长方形；

（2）两块地分别种甲、乙两种作物，它们的产量比是 3∶4.

首先考虑第一个要求，容易想到划分的方法是沿这块土地的边的方向画线. 在此基础上，考虑第二个要求，这与长方形面积以及两种作物的产量比有关. 通过以上分析，列出方程组

$$\begin{cases}x+y=200,\\ 100x:(2\times100y)=3:4.\end{cases}$$

解方程组，得到问题的答案.

另一种方法与上面类似.

[1]

	产品 x t	原料 y t	合计
公路运费/元			
铁路运费/元			
价 值/元			

题目所求数值是________，为此需先解出____与____.[2]

由上表，列方程组

$$\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$$[3]

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=\_\_\_\_\_\_,\\ y=\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$$[4]

因此，这批产品的销售款比原料费与运输费的和多________元.[5]

从以上探究可以看出，方程组是解决含有多个未知数问题的重要工具. 用方程组解决问题时，要根据问题中的数量关系列出方程组，求出方程组的解后，应进一步考虑它是否符合问题的实际意义.

习题 8.3

复习巩固

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-y=5,\\ 5y-1=3x+5;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=\dfrac{17}{12},\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

2. A 地至 B 地的航线长 9 750 km，一架飞机从 A 地顺风飞往 B 地需 12.5 h，它逆风飞行同样的航线需 13 h. 求飞机无风时的平均速度与风速.[6]

3. 一支部队第一天行军 4 h，第二天行军 5 h，两天共行军 98 km，且第一天比第二天少走 2 km. 第一天和第二天行军的平均速度各是多少？

第八章　二元一次方程组　101

[1]（横排）

$1.5\times20x$，$1.5\times10y$，$1.5\times(20x+10y)$；

$1.2\times110x$，$1.2\times120y$，$1.2\times(110x+120y)$；

$8\ 000x$，$1\ 000y$.

[2] 产品销售款－（原料费＋运输费），x（产品数量），y（原料数量）

[3] $\begin{cases}1.5\times(20x+10y)=15\ 000,\\ 1.2\times(110x+120y)=97\ 200.\end{cases}$

[4] $\begin{cases}x=300,\\ y=400.\end{cases}$

[5] 1 887 800.

[6] 本题中假设往返时风速匀速，而且相同.

6. “探究 3”要得到的答案是一个数值，但是，直接设这个数值为未知数列方程不容易. 为此，我们设间接未知数，即先设产品数量（吨）和原料数量（吨）分别为 x，y，解出它们后再计算问题所要得到的答案.

7. “探究 3”中的一些条件用示意图给出，这种表达形式比较简明. 通过分析这个问题，可以培养学生从图表获取信息的能力. 本题设置了一个表，通过填表对有关数量进行整理，发现等量关系，列出方程组

$$\begin{cases}1.5\times(20x+10y)=15\ 000,\\ 1.2\times(110x+120y)=97\ 200.\end{cases}$$

解出 x，y 后，再代入式子 $8\ 000x-1\ 000y-15\ 000-97\ 200$ 求值.

通过“探究 3”可以使学生进一步感受设间接未知数迂回解决问题的策略.

[1] 当盒底数量是盒身数量的 2 倍时，两者正好配套.

[2] 如果从甲到乙时有一段上坡，那么从乙到甲时这段上坡就变成了下坡. 求出这段坡路和这段平路的长度，就可求出甲、乙间的路长.

[3] 含药百分比 $= \dfrac{\text{药的质量}}{\text{药水的质量}} \times 100\%$，例如，含药 30% 的药水 100 kg 中，药的质量为 30 kg，药水的质量为 100 kg.

[4] 先求出打折前两种商品的单价，然后再求题目中要求的数据.

[5] 两种商品的价格保持不变，由此可以列出方程组，求出这些价格. 根据结果是否合理判断账目是否有误.

综合运用

4. 用白铁皮做罐头盒，每张铁皮可制盒身 25 个，或制盒底 40 个，一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒. 现有 36 张白铁皮，用多少张制盒身，多少张制盒底可以使盒身与盒底正好配套？[1]

5. 有大小两种货车，2 辆大货车与 3 辆小货车一次可以运货 15.5 t，5 辆大货车与 6 辆小货车一次可以运货 35 t. 3 辆大货车与 5 辆小货车一次可以运货多少吨？

6. 从甲地到乙地有一段上坡与一段平路. 如果保持上坡每小时走 3 km，平路每小时走 4 km，下坡每小时走 5 km，那么从甲地到乙地需 54 min，从乙地到甲地需 42 min. 甲地到乙地全程是多少？[2]

7. 用含药 30% 和 75% 的两种防腐药水，配制含药 50% 的防腐药水 18 kg，两种药水各需多少千克？[3]

拓广探索

8. 打折前，买 60 件 A 商品和 30 件 B 商品用了 1 080 元，买 50 件 A 商品和 10 件 B 商品用了 840 元. 打折后，买 500 件 A 商品和 500 件 B 商品用了 9 600 元，比不打折少花多少钱？[4]

9. 某家商店的账目记录显示，某天卖出 39 支牙刷和 21 盒牙膏，收入 396 元；另一天，以同样的价格卖出同样的 52 支牙刷和 28 盒牙膏，收入 518 元. 这个记录是否有误？如果有误，请说明理由.[5]

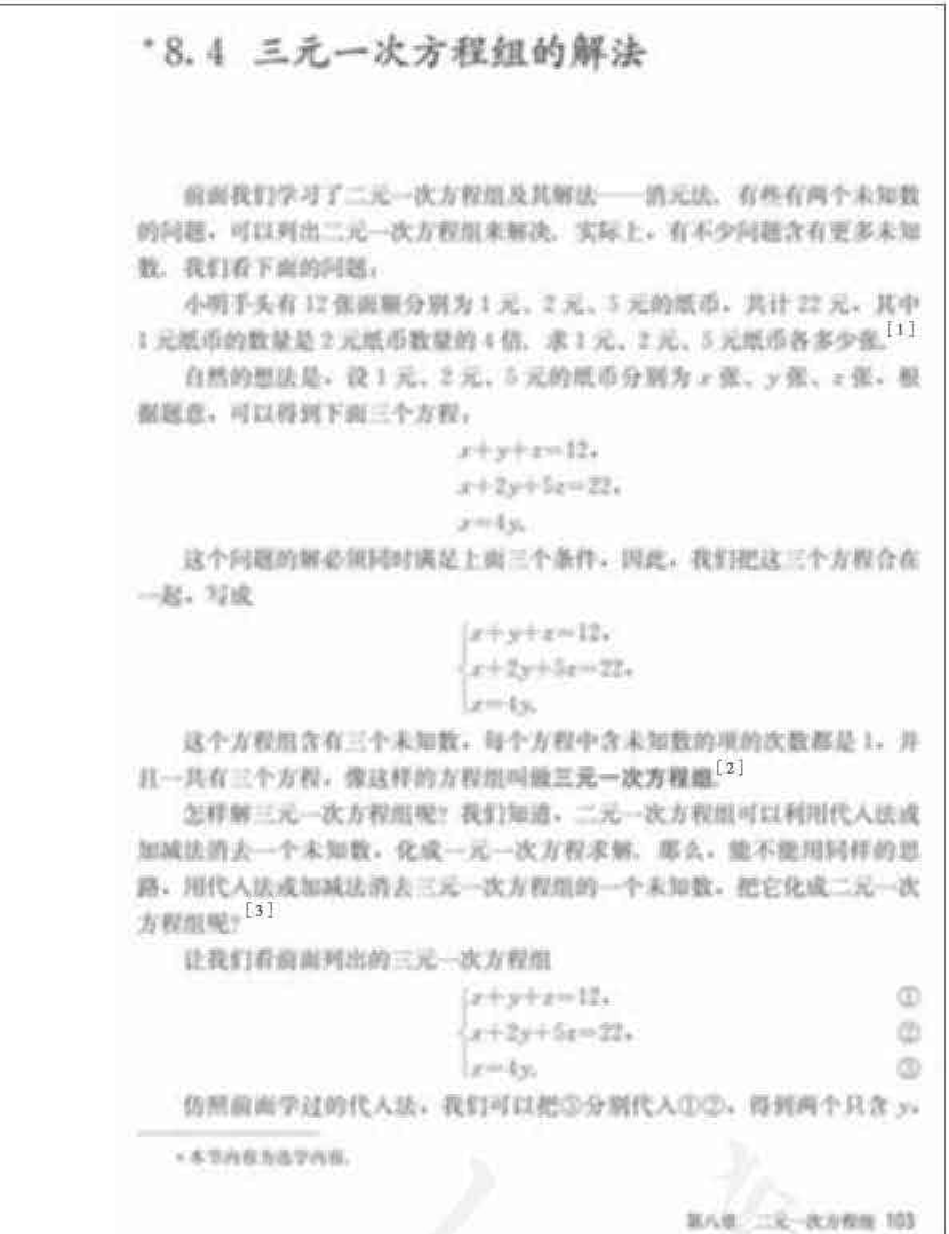
习题 8.3

1. “复习巩固”中的第 1 题是为巩固代入法、加减法解二元一次方程组而设置的.

第 2，3 题是行程问题，“路程＝速度×时间”是问题中的基本等量关系.

2. “综合运用”中的第 4 题是“成龙配套”问题，应抓住盒身与盒底之间的比例关系；第 5 题是运输问题，第 6 题是行程问题，第 7 题是溶液问题. 虽然不同问题中有各自的数量关系，但应抓住问题中的等量关系，关注解这些问题时共同需要的灵活分析问题的能力，熟练掌握设未知数、列方程组、解方程组、检验答案等全过程.

3. “拓广探索”中的第 8 题是购物问题，需要设间接未知数，然后代入表示问题答案的式子求值. 第 9 题是判断题中信息是否准确的问题，可以通过列方程组求出有关量，然后根据这些量是否合理对题中信息进行判断.



*8.4 三元一次方程组的解法

前面我们学习了二元一次方程组及其解法——消元法．有些有两个未知数的问题，可以列出二元一次方程组来解决．实际上，有不少问题含有更多未知数．我们看下面的问题．

小明手头有 12 张面额分别为 1 元、2 元、5 元的纸币，共计 22 元，其中 1 元纸币的数量是 2 元纸币数量的 4 倍．求 1 元、2 元、5 元纸币各多少张．[1]

自然的想法是，设 1 元、2 元、5 元的纸币分别为 x 张、y 张、z 张，根据题意，可以得到下面三个方程：

$$x+y+z=12,$$
$$x+2y+5z=22,$$
$$x=4y.$$

这个问题的解必须同时满足上面三个条件，因此，我们把这三个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y+z=12, \\ x+2y+5z=22, \\ x=4y. \end{cases}$$

这个方程组含有三个未知数，每个方程中含未知数的项的次数都是 1，并且一共有三个方程，像这样的方程组叫做**三元一次方程组**．[2]

怎样解三元一次方程组呢？我们知道，二元一次方程组可以利用代入法或加减法消去一个未知数，化成一元一次方程求解．那么，能不能用同样的思路，用代入法或加减法消去三元一次方程组的一个未知数，把它化成二元一次方程组呢？[3]

让我们看前面列出的三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y+z=12, & ① \\ x+2y+5z=22, & ② \\ x=4y. & ③ \end{cases}$$

仿照前面学过的代入法，我们可以把③分别代入①②，得到两个只含 y，

* 本节内容为选学内容．

[1] 引例非常简单，主要目的是引出三元一次方程和三元一次方程组．

[2] 类比二元一次方程组的概念，给出三元一次方程组的概念．

[3] 类比二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法，让学生尝试用这两种方法解三元一次方程组．

1．从本节的标题不难看出，本节侧重通过具体的三元一次方程组讲述它的解法．同二元一次方程组的解法一样，三元一次方程组的解法仍然是消元．通过消元，把三元一次方程组转化为二元一次方程组，进而转化为一元一次方程，最后得到三元一次方程组的解．

2．三元一次方程是代数方程的一种．代数方程一般按照其中未知数（元）的个数和未知数的项的最高次数（指数）分类．二元一次方程组是最简单的多元（未知数不止 1 个）一次方程组，通过对它的学习，可以了解三元一次方程组以及多元一次方程组的概念和解法．本节在二元一次方程组解法的基础上，学习三元一次方程组的解法．

3．与引入二元一次方程组时，类比一元一次方程类似，我们在引入三元一次方程组时，类比二元一次方程组：类比方程组的形式和解法．按照“实际问题——建立模型（三元一次方程

[1] 解三元一次方程组主要是把它转化为二元一次方程组，进而转化为一元一次方程.

[2] 观察三元一次方程组中三个三元一次方程系数的特点，然后选择用代入消元法还是加减消元法.

z 的方程：

$$4y+y+z=12,$$
$$4y+2y+5z=22.$$

它们组成方程组

$$\begin{cases}5y+z=12,\\6y+5z=22.\end{cases}$$

得到二元一次方程组之后，就不难求出 y 和 z，进而可求出 x.[1]

从上面的分析可以看出，解三元一次方程组的基本思路是：通过“代入”或“加减”进行消元，把“三元”化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程. 这与解二元一次方程组的思路是一样的.

$$\boxed{\text{三元一次方程组}} \xrightarrow{\text{消元}} \boxed{\text{二元一次方程组}} \xrightarrow{\text{消元}} \boxed{\text{一元一次方程}}$$

例 1 解三元一次方程组

$$\begin{cases}3x+4z=7, & ①\\2x+3y+z=9, & ②\\5x-9y+7z=8. & ③\end{cases}$$

分析： 方程①只含 x，z，因此，可以由②③消去 y，得到一个只含 x，z 的方程，与方程①组成一个二元一次方程组.[2]

解： ②×3+③，得

$$11x+10z=35. \quad ④$$

①与④组成方程组

$$\begin{cases}3x+4z=7,\\11x+10z=35.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=5,\\z=-2.\end{cases}$$

把 $x=5$，$z=-2$ 代入②，得

$$2\times5+3y-2=9,$$

所以 $$y=\frac{1}{3}.$$

104 第八章 二元一次方程组

组）——解释、拓展与应用”的模式展开本节的内容.

4. 列三元一次方程组也是根据问题中的等量关系. 一般地，对含有三个未知数的问题，列三元一次方程时需要同时列三个方程，即分别使用问题中的三个等量关系，列三个三元一次方程，这些未知数必须同时满足这三个方程，这三个方程组成一个三元一次方程组.

5. 解三元一次方程组的过程中，“消元”思想体现得非常充分. 怎么消元，先消哪个元，是需要认真考虑的.

6. 三元一次方程组及其解法也是学习二次函数的基础. 我们常常需要由二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上任意 3 个点的坐标，确定它的系数 a，b，c. 本节虽然没有给出二次函数的概念，但给出了上述方法，这些都是为以后的学习作准备的.

因此，这个三元一次方程组的解为

$$\begin{cases} x=5, \\ y=\dfrac{1}{3}, \\ z=-2. \end{cases}$$

你还有其他解法吗？试一试，并与这种解法进行比较.

例2 在等式 $y=ax^2+bx+c$ 中[1]，当 $x=-1$ 时，$y=0$；当 $x=2$ 时，$y=3$；当 $x=5$ 时，$y=60$. 求 a，b，c 的值.[2]

分析：把 a，b，c 看作三个未知数，分别把已知的 x，y 值代入原等式，就可以得到一个三元一次方程组.[3]

解：根据题意，得三元一次方程组

$$\begin{cases} a-b+c=0, & ① \\ 4a+2b+c=3, & ② \\ 25a+5b+c=60. & ③ \end{cases}$$[4]

②－①，得

$$a+b=1;\quad ④$$

③－①，得

$$4a+b=10.\quad ⑤$$

④与⑤组成二元一次方程组

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 4a+b=10. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-2. \end{cases}$$

把 $\begin{cases} a=3, \\ b=-2 \end{cases}$ 代入①，得

$$c=-5.$$

因此

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-2, \\ c=-5. \end{cases}$$

即 a，b，c 的值分别为 3，-2，-5.

第八章 二元一次方程组 105

[1] 这是二次函数的形式，在以后的学习中会碰到.

[2] 把 a，b，c 看作未知数，求这三个未知数的值，这是二次函数的形式. 已知二次函数图象上 3 个点的坐标，可由这 3 个点的坐标唯一确定二次函数的三个系数.

[3] 此例实际上是利用“待定系数法”求 a，b，c 的值.

[4] 观察三元一次方程组中三个未知数系数的特点，发现 c 的系数都是 1，先消去 c 容易.

习题 8.4

1. “复习巩固”的题目有两类：(1) 三元一次方程组中的三个方程中至少有一个方程只含有两个未知数. 此时可直接用代入消元法，把三元一次方程组转化为二元一次方程组. 第 1 题就是这种题目. (2) 三元一次方程组的三个方程中至多有一个方程只含有两个未知数. 此时，需要仔细观察方程系数的特点，灵活运用代入消元法或加减消元法. 常用的一种方法是，先通过加减消元法消去其中的一个未知数，把它转化为二元一次方程组，第 2 题就是这种题目.

2. “综合运用”的第 3 题需要根据题目中的等量关系，先列三元一次方程组，然后解三元一次方程组，最后求出这个三位数. 第 4 题从形式上看不是三元一次方程组，我们需要根据比例的性质，把它变形为三元一次方程组的形式，然后求解.

练习答案

1. (1) $\begin{cases} x=22, \\ y=\dfrac{31}{2}, \\ z=\dfrac{25}{2}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=1. \end{cases}$

2. 设甲、乙、丙三个数分别为 x，y，z. 根据题意，得

$$\begin{cases} x+y+z=35, \\ 2x-y=5, \\ \dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{2}z. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=10, \\ y=15, \\ z=10. \end{cases}$

[1] 由 $x:y=3:2$ 可得 $2x-3y=0$. 同样，由 $y:z=5:4$ 可得 $4y-5z=0$. 这样，这个方程组就变形为三元一次方程组.

练习

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x-2y=-9, \\ y-z=3, \\ 2z+x=47; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-y+z=4, \\ 2x+3y-z=12, \\ x+y+z=6. \end{cases}$

2. 甲、乙、丙三个数的和是35，甲数的2倍比乙数大5，乙数的 $\frac{1}{3}$ 等于丙数的 $\frac{1}{2}$. 求这三个数.

习题 8.4

复习巩固

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x-7, \\ 5x+3y+2z=2, \\ 3x-4z=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+9y=12, \\ 3y-2z=1, \\ 7x+5z=\dfrac{19}{4}. \end{cases}$

2. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 4x-9z=17, \\ 3x+y+15z=18, \\ x+2y+3z=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+4y+3z=9, \\ 3x-2y+5z=11, \\ 5x-6y+7z=15. \end{cases}$

综合运用

3. 一个三位数，个位、百位上的数的和等于十位上的数，百位上的数的7倍比个位、十位上的数的和大2，且个位、十位、百位上的数的和是14. 求这个三位数.

4. 解方程组

$$\begin{cases} x:y=3:2, \\ y:z=5:4, \\ x+y+z=66. \end{cases}$$ [1]

拓广探索

5. 在等式 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $x=1$ 时，$y=-2$；当 $x=-1$ 时，$y=20$；当 $x=\frac{3}{2}$ 与 $x=\frac{1}{3}$ 时，y 的值相等. 求 a，b，c 的值.

3. “拓广探索”中的题目与例2类似，根据题意，列出关于 a，b，c 三个未知数的三元一次方程组，然后求出它们的值.

4. 本节题目的主要目的是求解三元一次方程组，重点应放在如何解三元一次方程组上.


阅读与思考

一次方程组的古今表示及解法

我国古代很早就开始对一次方程组进行研究，其中不少成果被收入古代数学著作《九章算术》中.《九章算术》的“方程”章，有许多关于一次方程组的内容. 这一章的第一个问题译成现代汉语是这样的：[1]

上等谷3束，中等谷2束，下等谷1束，可得粮食39斗；
上等谷2束，中等谷3束，下等谷1束，可得粮食34斗；
上等谷1束，中等谷2束，下等谷3束，可得粮食26斗.
求上、中、下三等谷每束各可得粮食几斗.

斗是旧时的容积计量单位.

下面的算筹图代表了古代解决这个问题的方法，它是什么意思呢？

《九章算术》中的算筹图是竖排的，为看图方便，上图改为横排，这三个横行表示三句话的含义.[2]

不妨先用我们熟悉的数学符号来表述怎样解这个有3个未知数的问题.
设每束上等谷、中等谷、下等谷各可得粮食x斗，y斗，z斗.
根据题意，得三元一次方程组

$$\begin{cases}3x+2y+z=39, & ①\\ 2x+3y+z=34, & ②\\ x+2y+3z=26. & ③\end{cases} \qquad (*)$$

通过消元，可以求出各未知数.

上图实际上就是用算筹列出的方程组(*)，它省略了各未知数，只用算筹表示出未知

第八章 二元一次方程组 107

[1]《九章算术》“方程”章的第一题原文为：“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗. 问上、中、下禾实一秉各几何.”

[2]《九章算术》中，这幅图是竖排的. 为便于与现在的方程组书写格式相比较，这里将图改为横排，每一行表示一个三元一次方程.

阅读与思考

这篇供选学用的短文介绍的是有关一次方程组数学史方面的知识. 短文从中国古代数学著作《九章算术》中的一个问题说起. 《九章算术》是中国古代一部重要的数学著作，编写时间不能确定，但至少在约公元前100—公元100年成书. 书中有246个问题，分为9章. 这篇短文展示了古代如何用算筹图表示和解多元一次方程组，然后对照现在学习的一次方程组的表示法和解法，联系高等代数中有关矩阵的内容，指出一次方程组的古今表示法与解法是一脉相承的. 从而传播数学文化，介绍中国传统数学成就以及数学发展的一个侧面.

这篇短文中，介绍了用算筹图表示一次方程组. 算筹是中国古代的一种计算工具，有很长的使用历史，在七年级上册中有过介绍.

从算筹图到矩阵，反映了数学逐渐进步的发展过程. 在信息技术飞速发展的今天，计算机承

[1] 这是用矩阵形式表示三元一次方程组，其中省略了未知数以及加号、等号. 这种表示一次方程组的方法是近代高等代数中开始使用的.

[2] 矩阵是高等代数中的一个概念. 它是按一定规则排成的矩形数表，也是一种表示一次方程组的符号. 矩阵有相应的运算法则，对矩阵进行变换可以解出其表示的方程组，这种做法的基本思想是消元.

数的系数与相应的常数项.

我国古代解方程组时，也用算筹作计算工具. 具体解法是：在一个方程两边乘另一个方程中某未知数的系数，然后再累减另一个方程. 例如，解方程组（*），在②的两边乘3，然后累减①两次消去 x（这与②×3−①×2的结果一样）；在③的两边乘3，然后减①消去 x，从而得到二元一次方程组

$$\begin{cases}5y+z=24,\\4y+8z=39.\end{cases}$$

再用上面的方法消去 y，求得 z.

用现代高等代数的符号可以将方程组（*）的系数排成一个表

$$\begin{pmatrix}3&2&1&39\\2&3&1&34\\1&2&3&26\end{pmatrix}.$$ [1]

这种由数排成的表叫做矩阵.[2] 容易看出，这个矩阵与上面的算筹图是一致的，只是用阿拉伯数字替代了算筹. 利用矩阵解一次方程组的方法，与前面说的算筹方法也是一致的. 我们祖先掌握上述解法，比起欧洲人来，要早一千多年，这是我国古代数学的一个光辉成就.

108 第八章 二元一次方程组

担了大量复杂的计算，用计算机可以很容易地完成解大型方程组的任务，但消元的基本思想并未改变.

数学活动

活动1

(1) 在平面直角坐标系中，你能把二元一次方程 $x-y=0$ 的一个解用一个点表示出来吗？标出一些以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点．过这些点中的任意两点作直线，你有什么发现？在这条直线上任取一点，这个点的坐标是方程 $x-y=0$ 的解吗？[1]

以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点的全体叫做方程 $x-y=0$ 的图象．根据上面的探究想一想：方程 $x-y=0$ 的图象是什么．[2]

(2) 一般地，在平面直角坐标系中，任何一个二元一次方程的图象都是一条直线．根据这个结论，在同一平面直角坐标系中画出二元一次方程组

$$\begin{cases}2x+y=4,\\ x-y=-1\end{cases}$$

中的两个二元一次方程的图象．[3]

由这两个二元一次方程的图象，你能得出这个二元一次方程组的解吗？[4]

活动2

2010 年的一项调查显示，全世界每天平均有 13 000 人死于与吸烟有关的疾病．我国吸烟者约 3.56 亿人，占世界吸烟人数的四分之一．比较一年中死于与吸烟有关的疾病的人数占吸烟者总数的百分比，我国比世界其他国家约高 0.1%．

根据上述资料，试用二元一次方程组解决以下问题．[5]

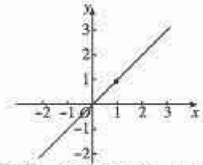
我国及世界其他国家一年中死于与吸烟有关的疾病的人数分别是多少？

从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题，看看能不能用二元一次方程组解决这些问题．

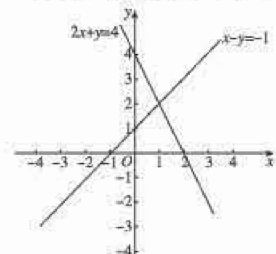
第八章　二元一次方程组　109

[1] 能；这些点在一条直线上；是．

[2] 方程 $x-y=0$ 的图象是过原点和以 (1, 1) 为坐标的点的一条直线．



[3] 所画图象如下：



[4] 两条直线交点的坐标(1, 2)是方程组的解．

[5] 设我国及世界其他国家一年中死于与吸烟有关的疾病人数分别为 x，y．根据题意，得

$$\begin{cases}x+y=13\ 000\times 365,\\ \dfrac{x}{3.56\times 10^{8}}-\dfrac{y}{3.56\times 3\times 10^{8}}=0.1\%.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=1\ 453\ 250,\\ y=3\ 291\ 750.\end{cases}$

根据问题的实际意义以及精确度，我国及世界其他国家一年中死于与吸烟有关的疾病人数分别为 1 453 000，3 292 000．

1．活动 1 的设计意图是让学生认识二元一次方程的几何意义，从图形角度认识解二元一次方程组就是求两个二元一次方程的公共解，这也为今后学习一次函数等埋下伏笔．

2．活动 1 (1) 先以一个具体的二元一次方程组为例进行探索活动，得出：以这个方程组的解为坐标的点都在同一条直线上，这条直线上任意一点的坐标都是这个方程组的解．

活动 1 (2) 将以上对于特殊对象的认识推广到一般情形，这种从特殊到一般的认识方法很重要．有了一般性认识，用图象法解二元一次方程组就有了根据．

3．活动 2 的内容选自统计材料，通过计算可以进一步发现已知统计数据中隐含的更多信息．这个问题同时有助于对学生进行健康教育，以及搜集资料、分析数量关系、编制数学问题，加强与实际的联系．

[1] 这幅框图表示运用二元或三元一次方程组解决问题的基本过程，以及通过消元解二元或三元一次方程组的主要方法.

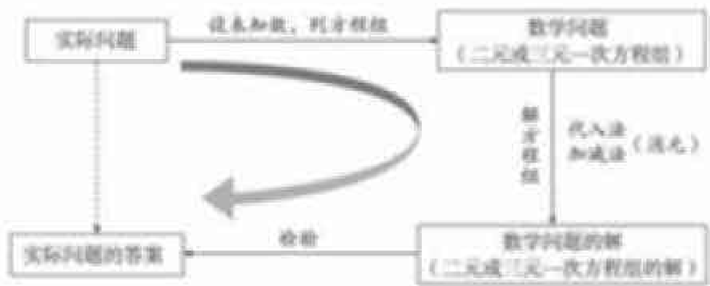
[2] “代入”与“加减”的目的都是消元，把二元一次方程组转化为一元一次方程.

[3] 可以结合具体问题以及上面的框图进行说明.

小　结

一、本章知识结构图

[1]



二、回顾与思考

本章我们通过实际问题引入了二元一次方程（组），并学习了二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法. 在此基础上，学习了简单的三元一次方程组及其解法.

消元是解二（三）元一次方程组的基本方法. 通过消元，我们把“三元”转化为“二元”，把“二元”转化为“一元”，这一过程体现了化归思想.

二（三）元一次方程组是刻画实际问题的重要数学模型，在现实中具有广泛的应用. 用它解决实际问题时，要注意分析问题中的各种等量关系，引进适当的未知量，建立相应的方程组.

请你带着下面问题，复习一下全章内容吧.

1. 举例说明怎样用代入法和加减法解二元一次方程组. “代入”与“加减”的目的是什么？[2]

2. 比较解三元一次方程组与解二元一次方程组的联系与区别. 你能说说“消元”的思想方法在解三元一次方程组中的体现吗？

3. 用二元或三元一次方程组解决一个实际问题. 你能说说用方程组解决实际问题的基本思路吗？[3]

1. 教学中引导学生以分析、解决具体问题为例，认识本章知识结构图，加深学生对数学建模思想和列、解二元一次方程组基本过程的认识.

2. 消元思想是逐步使方程中未知数的个数减少，直至化为一元，它是解方程组的基本思想. 通过“小结”不仅使学生牢固掌握二元一次方程组的解法——代入法和加减法，而且加深对上述思想的认识.

3. 应注意结合学生学习过程中的实际情况，用“小结”复习和引申本章的重点内容，使学生通过“小结”切实解决存在的问题，深刻体会本章重点内容. “小结”教学时，应重视学生的实际情况，事先做好调查研究，特别要注意学生在基础知识和基本技能、能力方面还需要如何巩固提高，进而设计有针对性的“小结”内容.

复习题 8

复习巩固

1. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} a=2b+3, \\ a=3b+20; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=13, \\ x=6y-7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y=1, \\ 4x+2y=-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x-y=110, \\ 9y-x=110. \end{cases}$

2. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3m+b=11, \\ -4m-b=11; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 0.6x-0.4y=1.1, \\ 0.2x-0.4y=2.3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4f+g=15, \\ 3g-4f=-3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+3y=-6, \\ \frac{1}{2}x+y=2. \end{cases}$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 6(x-y-1)=3(1-y)-2, \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \frac{2(x-y)}{3}-\frac{x+y}{4}=-1, \\ 6(x+y)-4(2x-y)=16. \end{cases}$

4. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-y+z=3, \\ 2x+y-3z=11, \\ x+y+z=12; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x-4y+4z=13, \\ 2x+7y-3z=19, \\ 3x+2y-z=18. \end{cases}$

5. 1号仓库与2号仓库共存粮450 t. 现从1号仓库运出存粮的60%，从2号仓库运出存粮的40%，结果2号仓库所余粮食比1号仓库所余粮食多30 t. 1号仓库与2号仓库原来各存粮多少吨？

综合运用

6. 甲、乙二人都以不变的速度在环形路上跑步，如果同时同地出发，反向而行，每隔2 min相遇一次；如果同时同地出发，同向而行，每隔6 min相遇一次. 已知甲比乙跑得快，甲、乙二人每分各跑多少圈？[1]

7. 用1块A型钢板可制成2块C型钢板、1块D型钢板；用1块B型钢板可制成1块C型钢板、2块D型

（第6题）

第八章　二元一次方程组　111

[1] 在环形路上运动，同时同地出发，如果相向而行，两人运动路程之和等于环形周长时，两人相遇；如果同向而行，两人运动路程之差等于环形周长时，两人相遇.

复习题 8

1. “复习巩固”的题目有两类：(1) 解二(三) 元一次方程组；(2) 用二元一次方程组解决实际问题. 这些题目虽然简单，但是基础性强，应让学生熟练掌握.

2. “综合运用”中的第6题是追及问题. 除路程、时间、速度三者的关系外，还应注意在环形路上运动的特殊规律. 第7题是用料问题，问题中要考虑某种需求下不同材料恰好各需多少. 第8题是古代数学问题，选自《九章算术》中“盈不足”一章.

3. “拓广探索”中的第9，11题都有三个未知数. 第9题虽然有3个要求的未知数，但题中只给出两个等量关系，即只能列出两个方程. 就数学式子而言，未知数个数多于方程个数的问题属于不定方程问题. 但是，结合问题的实际意义，硬币的个数必须是整数，根据它可以确定答

钢板．现需15块C型钢板、18块D型钢板，可恰好用A型钢板、B型钢板各多少块？[1]

8.（我国古代问题）有大小两种盛酒的桶，已知5个大桶加上1个小桶可以盛酒3斛（斛，音hú，是古代的一种容量单位），1个大桶加上5个小桶可以盛酒2斛．1个大桶、1个小桶分别可以盛酒多少斛？[2]

拓广探索

9. 现有1角、5角、1元硬币各10枚，从中取出15枚，共值7元．1角、5角、1元硬币各取多少枚？[3]

10. 某电脑公司有A型、B型、C型三种型号的电脑，其中A型每台6 000元，B型每台4 000元，C型每台2 500元．某中学现有资金100 500元，计划全部用于从这家电脑公司购进36台两种型号的电脑．请你设计几种不同的购买方案供这个学校选择，并说明理由．

*11. 甲地到乙地全程是3.3 km，一段上坡、一段平路、一段下坡．如果保持上坡每小时走3 km，平路每小时走4 km，下坡每小时走5 km，那么从甲地到乙地需51 min，从乙地到甲地需53.4 min．从甲地到乙地时，上坡、平路、下坡的路程各是多少？

112 第八章 二元一次方程组

[1] 这是一个用料问题，要求出的A，B两种类型的钢板的数量都应是整数．

[2] 这道题选自《九章算术》中的“盈不足”一章．原文为“今有大器五小器一容三斛，大器一小器五容二斛，问大小器各容几何．”

[3] 问题中有三个未知数，可以设其中两个为x，y，列出一个二元一次方程．这是一个不定方程，根据x，y都是不超过10的非负整数，经观察尝试，得到答案．

案，即通过观察尝试作出合乎实际意义的选择．这个问题不是二元一次方程组的常规问题，而是与二元一次方程有关且又有一定灵活性的问题．解决这样的问题对于提高拓广探索能力是有益的．

第10题是通过解多个二元一次方程组，再结合问题的实际意义，确定购买方案的问题．这是实际中常见的问题，对于加强与现实生活的联系，培养学生分析、解决问题的能力很有帮助．

第11题打“＊”，是与三元一次方程组匹配的题目．它既可用三元一次方程组解决，也可用二元一次方程组解决，两种方式都可以．可以做一个比较，看看这两种方程组的差异．

Ⅲ 习题解答

习题 8.1

1.

x	-2	0	0.4	2	$\frac{11}{6}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
y	11	5	3.8	-1	-0.5	-1	0	3

2. C.

3. （1）$x+2y=180$；（2）$y=45$；（3）$x=60$.

4. 设有 x 只鸡、y 只兔．根据题意，得$\begin{cases}x+y=35,\\2x+4y=94.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=23,\\y=12.\end{cases}$

5. 设截成 x 根 2 m 长的钢管、y 根 1 m 长的钢管．根据题意，得 $2x+y=7$.
根据问题的实际意义，$x=1$，$y=5$；$x=2$，$y=3$；$x=3$，$y=1$ 都是上述方程的解．因此有 3 种不同的截法.

习题 8.2

1. （1）$y=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x$；　（2）$y=\frac{8}{7}-\frac{1}{7}x$；

（3）$y=\frac{4}{5}x$；　（4）$y=x+\frac{5}{3}$.

2. （1）$\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=\frac{5}{2};\end{cases}$　（2）$\begin{cases}s=\frac{25}{11},\\t=\frac{20}{11};\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x=3,\\y=3;\end{cases}$　（4）$\begin{cases}x=-3,\\y=1.\end{cases}$

3. （1）$\begin{cases}u=2,\\t=\frac{1}{2};\end{cases}$　（2）$\begin{cases}a=1,\\b=1;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases}$　（4）$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

4. 设甲、乙两种票分别买了 x 张、y 张．根据题意，得$\begin{cases}x+y=35,\\24x+18y=750.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=20,\\y=15.\end{cases}$

5. （1）$\begin{cases}x=5,\\y=7;\end{cases}$　（2）$\begin{cases}u=-\frac{3}{2},\\v=2.\end{cases}$

6. 设到花果岭、云水洞的人数分别为 x，y. 根据题意，得$\begin{cases}x=2y-1,\\x+y=200.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=133,\\y=67.\end{cases}$

7. 设小方、小程的平均速度分别为 x km/h，y km/h. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=6,\\3x-3y=6.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$

8. 设大盒、小盒每盒分别装 x 瓶、y 瓶. 根据题意，得$\begin{cases}3x+4y=108,\\2x+3y=76.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=20,\\y=12.\end{cases}$

9. 设这个长方形的长为 x cm、宽为 y cm. 根据题意，得$\begin{cases}x-5=y+2,\\(x-5)(y+2)=xy.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{25}{3},\\y=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

习题 8.3

1. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{31}{12},\\y=\dfrac{11}{4};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

2. 设飞机的平均速度为 x km/h，风速为 y km/h. 根据题意，得$\begin{cases}12.5(x+y)=9\ 750,\\13(x-y)=9\ 750.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=765,\\y=15.\end{cases}$

3. 设第一天和第二天行军的平均速度分别为 x km/h，y km/h. 根据题意，得$\begin{cases}4x+5y=98,\\4x+2=5y.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=12,\\y=10.\end{cases}$

4. 设用 x 张铁皮制盒身、y 张铁皮制盒底使盒身与盒底正好配套. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=36,\\2\times25x=40y.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=16,\\y=20.\end{cases}$

5. 设 1 辆大货车一次可以运货 x t，1 辆小货车一次可以运货 y t. 根据题意，得$\begin{cases}2x+3y=15.5,\\5x+6y=35.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=4,\\y=2.5.\end{cases}$ 因此 $3x+5y=24.5$.

6. 设坡路长 x km，平路长 y km. 根据题意，得$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{54}{60},\\\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{42}{60}.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1.5,\\y=1.6.\end{cases}$ 因此 $x+y=3.1$.

7. 设取含药 30%的药水 x kg，含药 75%的药水 y kg. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=18,\\0.3x+0.75y=0.5\times18.\end{cases}$ 解

得$\begin{cases}x=10,\\y=8.\end{cases}$

8. 设打折前 A 和 B 两种商品的单价分别为 x 元、y 元. 根据题意，得$\begin{cases}60x+30y=1\ 080,\\50x+10y=840.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=16,\\y=4.\end{cases}$因此 $500x+500y-9\ 600=400$.

9. 设每支牙刷 x 元，每盒牙膏 y 元. 根据题意，得$\begin{cases}39x+21y=396,\\52x+28y=518.\end{cases}$化简，得$\begin{cases}13x+7y=132,\\13x+7y=129.5.\end{cases}$此方程组无解，说明记录有误.

习题 8.4

1. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=-3,\\z=\dfrac{1}{2};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{4},\\y=\dfrac{5}{3},\\z=2.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x=5,\\y=-2,\\z=\dfrac{1}{3};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-1,\\y=\dfrac{1}{2},\\z=3.\end{cases}$

3. 设百位、十位、个位上的数分别为 x，y，z. 根据题意，得$\begin{cases}x+z=y,\\7x-y-z=2,\\x+y+z=14.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=2,\\y=7,\\z=5.\end{cases}$这个三位数是 275.

4. 原方程组可转化为$\begin{cases}2x-3y=0,\\4y-5z=0,\\x+y+z=66.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=30,\\y=20,\\z=16.\end{cases}$

5. $\begin{cases}a+b+c=-2,\\a-b+c=20,\\\dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+c=\dfrac{1}{9}a+\dfrac{1}{3}b+c.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=6,\\b=-11,\\c=3.\end{cases}$

复习题 8

1. (1) $\begin{cases}a=-31,\\b=-17;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=17,\\y=4;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=\dfrac{7}{6},\\y=-\dfrac{17}{6};\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=25,\\y=15.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}m=-22,\\b=77;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-3,\\y=-\dfrac{29}{4};\end{cases}$ (3) $\begin{cases}f=3,\\g=3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=12,\\y=-4.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$

*4. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{29}{9},\\y=\dfrac{139}{18},\\z=\dfrac{19}{18};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=5,\\y=0,\\z=-3.\end{cases}$

5. 设1号仓库原来存粮 x t，2号仓库原来存粮 y t. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=450,\\(1-0.6)x=(1-0.4)y-30.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=240,\\y=210.\end{cases}$

6. 设甲每分跑 x 圈，乙每分跑 y 圈. 根据题意，得$\begin{cases}2x+2y=1,\\6x-6y=1.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\y=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$

7. 设恰好用 x 块 A 型钢板，y 块 B 型钢板. 根据题意，得$\begin{cases}2x+y=15,\\x+2y=18.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4,\\y=7.\end{cases}$

8. 设 1 个大桶可盛酒 x 斛，1 个小桶可盛酒 y 斛. 根据题意，得$\begin{cases}5x+y=3,\\x+5y=2.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{13}{24},\\y=\dfrac{7}{24}.\end{cases}$

9. 设取 x 枚 1 角硬币，y 枚 5 角硬币. 根据题意，得$0.1x+0.5y+(15-x-y)=7$. 化简，得方程 $9x+5y=80$. 根据 $0\leqslant x\leqslant 10$，$0\leqslant y\leqslant 10$，得 $x=5$，$y=7$，$15-x-y=3$.

10. 设从这家电脑公司购进A型电脑 x 台、B型电脑 y 台、C型电脑 z 台. 分以下三种情况考虑.

(1) 只购进 A 型电脑和 B 型电脑. 根据题意，得$\begin{cases}6\,000x+4\,000y=100\,500,\\x+y=36.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-21.75,\\y=57.75.\end{cases}$不合题意，舍去.

(2) 只购进 A 型电脑和 C 型电脑. 根据题意，得$\begin{cases}6\,000x+2\,500z=100\,500,\\x+z=36.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3,\\z=33.\end{cases}$

(3) 只购进 B 型电脑和 C 型电脑. 根据题意，得$\begin{cases}4\,000y+2\,500z=100\,500,\\y+z=36.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}y=7,\\z=29.\end{cases}$

综上可知，有两种方案供这个学校选择：第一种方案是购进 A 型电脑 3 台、C 型电脑 33 台；第二种方案是购进 B 型电脑 7 台、C 型电脑 29 台.

*11. 设从甲地到乙地时，上坡、平路、下坡的距离分别为 x km，y km，z km. 根据题意，得

$\begin{cases}x+y+z=3.3,\\\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=\dfrac{51}{60},\\\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=\dfrac{53.4}{60}.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1.2,\\y=0.6,\\z=1.5.\end{cases}$

Ⅳ 教学设计案例

8.2 消元——解二元一次方程组（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

代入消元法解二元一次方程组.

2. 内容解析

实际生活中涉及多个未知数的问题是普遍存在的，而二元一次方程组是解决含有两个未知数的问题的有力工具. 同时，二元一次方程组也是解决后续一些数学问题的基础，其解法将为解决这些问题提供运算的工具，如用待定系数法求一次函数解析式，在平面直角坐标系中求两条直线的交点坐标等.

解二元一次方程组就是要把“二元”化归为“一元”，而化归的方法可以是代入消元法. 这一过程同样是解三元（多元）一次方程组的基本思路，是通法. 由算术到方程再到方程组，其中蕴含的“数式通性”（已知数、未知数共同参与运算，用运算律化简方程（组），确定未知数的值）在本节内容中有很好的体现.

本节课的教学重点是：会用代入消元法解简单的二元一次方程组，体会解二元一次方程组的思路是“消元”.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）会用代入消元法解简单的二元一次方程组.

（2）理解解二元一次方程组的思路是“消元”，经历从未知向已知转化的过程，体会化归思想.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：学生掌握代入消元法解二元一次方程组的一般步骤，并能正确求出简单二元一次方程组的解.

达成目标（2）的标志是：让学生经历探究的过程，体会二元一次方程组的解法与一元一次方程的解法的关系，进一步体会消元思想和化归思想.

三、教学问题诊断分析

1. 学生第一次遇到多元问题，为什么要向一元转化，为什么可以转化，如何进行转化，需要结合实际问题进行分析. 由于方程组的两个方程中同一未知数表示的是同一数量，通过观察对照，可以发现二元一次方程组向一元一次方程转化的思路.

2. 解二元一次方程组的步骤多，需要理解每一步的目的和依据，正确地进行操作，把探究过

程分解细化，逐一实施.

本节课的教学难点是：理解“二元”向“一元”的转化，掌握代入消元法解二元一次方程组的一般步骤.

四、教学过程设计

1. 探究新知

问题1 篮球联赛中，每场都要分出胜负，每队胜1场得2分，负1场得1分. 某队10场比赛中得到16分，那么这个队胜负场数分别是多少？你能根据问题中的等量关系列出二元一次方程组吗？

师生活动：学生回答：设胜 x 场，负 y 场. 根据题意，得 $\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16. \end{cases}$ 教师引出本节课内容：这是我们在引言中探讨的问题，我们在上节课列出了方程组，并通过列表找公共解的办法得到了这个方程组的解 $\begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$ 显然这样的方法需要一个个尝试，有些麻烦，不好操作. 所以这节课我们就来探究如何解二元一次方程组.

追问（1）：这个实际问题能列一元一次方程求解吗？

师生活动：学生回答：设胜 x 场，则负（$10-x$）场. 根据题意，得 $2x+(10-x)=16$.

追问（2）：对比方程和方程组，你能发现它们之间的关系吗？

师生活动：通过对实际问题的分析，认识方程组中的两个方程中的 y 都是这个队负的场数，具有相同的实际意义. 因此可以由一个方程得到 y 的表达式，并把它代入另一个方程，从而把二元一次方程组转化为一元一次方程. 先求出一个未知数，再求另一个未知数. 教师总结：这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做消元思想.

设计意图：用引言中的问题引入本节课内容，先列二元一次方程组，再列一元一次方程，对比方程和方程组，发现方程组的解法.

问题2 对于二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=10, & ① \\ 2x+y=16, & ② \end{cases}$ 你能写出求 x 的值的过程吗？

师生活动：学生回答：

由①，得 $y=10-x$. ③

把③代入②，得 $2x+(10-x)=16$.

解得 $x=6$.

设计意图：通过解具体的方程组明确消元的过程.

追问：把③代入①可以吗？试试看？

师生活动：学生把③代入①，观察结果.

设计意图：由于方程③是由方程①得到的，它只能代入方程②，不能代入方程①. 让学生实际操作，得到恒等式，更好地认识这一点.

问题3 怎样求 y 的值？

师生活动：学生回答：把 $x=6$ 代入③，得 $y=4$.

追问（1）：代入①或代入②可不可以？哪种运算更简便？

师生活动：学生回答：代入③更简便.

追问（2）：你能写出这个方程组的解，并给出问题的答案吗？

师生活动：学生回答：这个方程组的解是 $\begin{cases}x=6,\\y=4.\end{cases}$ 这个队胜 6 场，负 4 场.

设计意图：让学生考虑求另一个未知数的过程，并思考如何优化解法.

问题 4　在这种解法中，哪一步是最关键的步骤？为什么？

师生活动：学生回答“代入”．教师总结：这种方法叫做代入消元法，简称代入法.

设计意图：使学生明确代入消元法的关键是“代入”，把二元一次方程组转化成一元一次方程.

问题 5　是否有办法得到关于 y 的一元一次方程？

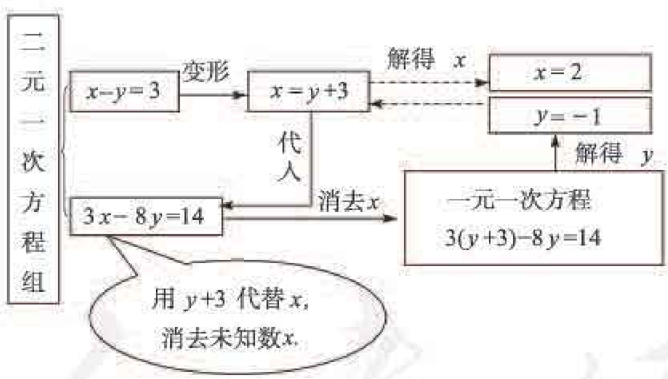
师生活动：学生具体操作.

设计意图：让学生尝试不同的代入消元方法，并为后面学生选择简单的代入方法作铺垫.

2. **应用新知**

例　用代入法解方程组 $\begin{cases}x-y=3,\\3x-8y=14.\end{cases}$

师生活动：学生写出用代入法解这个方程组的过程，教师用下面的框图说明这个过程．学生结合框图，概括代入法解二元一次方程组的基本步骤和注意事项.



设计意图：借助本题，让学生先分析解题思路，并对比、确定消哪一个元计算更简捷．使学生再次经历代入法解二元一次方程组的过程，并利用此题给出解方程组的框图，让学生体会程序化思想.

3. **加深认识**

练习　用代入法解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases}3s+t=5,\\s+2t=15;\end{cases}$　　　　（2）$\begin{cases}3x+4y=16,\\5x-6y=33.\end{cases}$

师生活动：学生写出用代入法解这个方程组的过程.

（这两道题的答案：(1) $\begin{cases} s=-1, \\ t=8; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=6, \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$）

设计意图：本题需要先分析方程组的结构特征，再选择适当的解法．通过此练习，使学生熟练地掌握用代入法解二元一次方程组．

4. **归纳总结**

回顾本节课的学习过程，并回答以下问题：

(1) 代入法解二元一次方程组有哪些步骤？

(2) 解二元一次方程组的基本思路是什么？

(3) 在探究解法的过程中用到了什么思想方法？你还有哪些收获？

设计意图：让学生总结本节课的主要内容和思想方法．

5. **布置作业**

教科书第 93 页练习第 2 题．

五、目标检测设计

用代入法解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} y=x+3, \\ 7x+5y=9; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x+4y=2. \end{cases}$

设计意图：本题主要考查学生对代入法解二元一次方程组的掌握．

8.3　实际问题与二元一次方程组（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. **内容**

用二元一次方程组解决“探究 1”和“探究 2”中的实际问题．

2. **内容解析**

实际生活中常会遇到解决两个未知量的问题，这两个未知量之间存在数量关系，运用二元一次方程组可以解决这类问题．分析问题中的数量关系→发现等量关系→列出二元一次方程组→解二元一次方程组→得到实际问题的答案，这一典型的数学建模过程，是数学应用的具体体现．它对于运用其他数学模型（如不等式、函数等）解决实际问题具有很强的示范作用．

本节课要研究两个问题．“探究 1”中的数量关系比较简单，但需要学生理解如何确定未知数；“探究 2”中的数量关系比较复杂，作物总产量比、单位面积产量比、面积比、长度比之间的转化是列方程组的关键．通过“探究 1”的学习，学生初步认识运用方程组解决实际问题的建模过程，然后尝试独立解决“探究 2”，加深对建模过程的认识．在两个探究过程中同时关注如何用数学问题的答案解释具体的实际问题．

本节课的教学重点是：探究用二元一次方程组解决实际问题的过程．

二、目标和目标解析

1. 目标

能分析实际问题中的数量关系，会设未知数，列方程组并求解，得到实际问题的答案，体会数学建模思想.

2. 目标解析

学生能够准确分析数量关系，发现等量关系，依据实际问题列出方程组，解方程组. 在此基础上，用方程组的解解释实际问题. 这一典型的数学建模过程，需要学生在方程、方程组以及后续的不等式、函数的学习中，逐渐体会.

在“探究 1”中学生首先要分析数量关系，找到等量关系，正确设出未知数，列出方程组，理解“通过计算检验估计”的含义. 在“探究 2”中学生要借助图形发现隐含的等量关系，把总产量的比转化为长度比，从而列出方程组，并用语言描述作物的种植方案.

三、教学问题诊断分析

受阅读能力、分析能力的制约，如何从实际背景中提取数学信息，并转化成数学语言，对初一学生来说是个难点. 本节课涉及的实际问题都含有两个未知数，包含两个等量关系，需要列出两个二元一次方程. 数量关系比一元问题复杂，需要学生更好地分析问题，抓住关键词，发现等量关系，列出方程组.

“探究 1”中的问题没有直接提出求“大牛和小牛一天的饲料”，而是要求“通过计算检验他的估计”. 也就是说，本题没有明确的未知数. 学生要理解需要通过计算验证“估计的值”，进而明确需要求哪些未知量. “探究 2”中的问题是“怎样划分土地”，理解题意，选择适当的未知数，是本题的难点. 由于问题具有较强的实际意义，由数学问题的解得到实际问题的答案这一步骤显得更加重要. 在“探究 2”中如何依据方程组的解，描述土地划分方案，对于学生也是一个难点.

本节课的教学难点是：发现问题中隐含的未知数，寻找等量关系并列出方程组. 由方程组的解解释实际问题.

四、教学过程设计

1. 探究 1 的教学

问题 1 如何理解“通过计算检验他的估计”这句话?

师生活动：学生自由发言，体会对于估算的结果要通过精确求值来检验，理解要想检验估计是否准确，需要求出大牛、小牛 1 天所需要的饲料.

设计意图：使学生明确估算的值不是这道题目中的已知量，是需要检验的量，也就是要求的未知数.

问题 2 题目中哪些是已知量，哪些是未知量？有几个等量关系？

师生活动：学生充分读题，可以适当讨论. 教师引导学生关注有两个未知数，两个等量关系.

设计意图：引导学生发现未知数和等量关系，运用二元一次方程组解决.

问题 3　如何解决这一问题？

师生活动：学生依据发现的等量关系，建立方程组：设每头大牛和每头小牛 1 天分别约用饲料 x kg 和 y kg，根据题意，得$\begin{cases}30x+15y=675,\\42x+20y=940.\end{cases}$

追问：列一元一次方程能解决这个问题吗？

师生活动：学生体会列方程组比列一元一次方程简单.

设计意图：让学生经历分析数量关系，得到等量关系，列方程组的过程. 一般情况下，学生会自觉选择列方程组解决. 教师引导学生体会有两个未知量时，列方程组更为简单.

问题 4　请你解这个方程组，并交流一下你是如何解这个方程组的.

师生活动：学生独立解方程组，并发言交流. 可能有的学生直接用消元法解方程组，有的学生先化简整理为$\begin{cases}2x+y=45,\\21x+10y=470,\end{cases}$再解方程组. 教师引导学生对比，发现先化简再解更简捷.

设计意图：让学生认识到，由实际问题列出的方程组，有时系数较为复杂，先化简再求解，可以简化运算.

问题 5　饲养员李大叔的估计正确吗？

师生活动：学生对比计算结果和李大叔的估计，得到结论.

设计意图：引导学生用方程组的解去分析、解释实际问题.

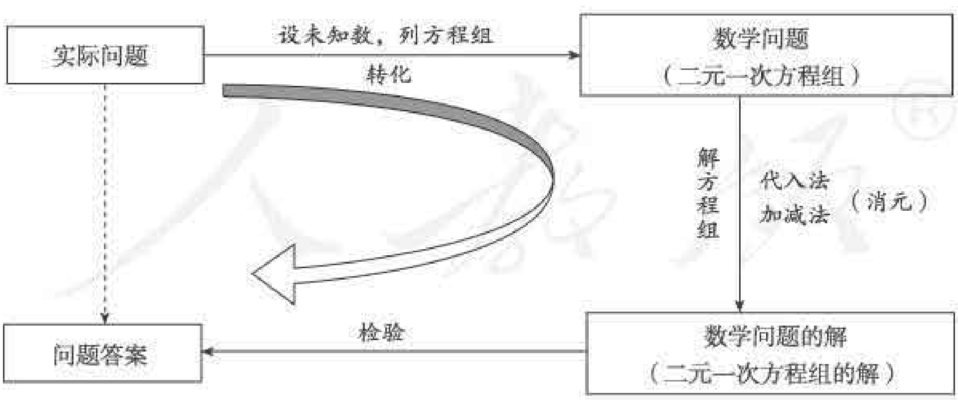
探究 1 小结

师生共同回顾解决探究 1 的过程，教师提问：

（1）在列方程组之前我们先做了哪些工作？

（2）列方程组解决实际问题的一般步骤是什么？

师生活动：教师引导学生回顾如何分析数量关系，发现等量关系，选择适当的未知数和列出方程组，并用下面的框图说明列方程组解决实际问题的一般步骤.



设计意图：引导学生总结运用方程组建立数学模型，解决实际问题的过程.

2. **探究 2 的教学**

问题 6　结合上面的框图，以及“探究 1”的解决过程，如何解决探究 2 中的问题？

师生活动：独立思考，互相讨论交流解决问题的过程，尝试列方程组解决问题.

探究 2 有一定难度．如果学生不能独立解决，进行以下追问，尽可能让学生多思考，追问的问题不要一次给出．

追问（1）：这里研究的实际上是长方形面积的分割问题，你能画出示意图帮助自己理解吗？

师生活动：画图分析题意，把文字语言转化为图形语言．如图 1，一种种植方案为：甲、乙两种作物的种植区域分别为长方形 $AEFD$ 和 $BCFE$．此时设 $AE=x$ m，$BE=y$ m．

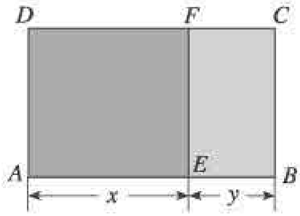


图 1

追问（2）：作物产量比与种植面积的比有什么关系？

师生活动：学生思考分析，发现甲、乙两种作物的产量比等于甲作物的种植面积与乙作物的种植面积的 2 倍的比．

追问（3）：能求出 x，y 吗？

师生活动：学生列出方程组$\begin{cases}x+y=200,\\100x:100y\times2=3:4.\end{cases}$将这个方程组转化为二元一次方程组$\begin{cases}x+y=200,\\3\times2y=4x,\end{cases}$进而求出 x，y．

设计意图：让学生经历列方程组解决实际问题的完整过程，加深对建模一般步骤的理解．

问题 7　如何表述你的种植方案？

师生活动：学生自由发言，互相启发，不断补充完善种植方案．如过长方形土地的长边上离一端 120 m 处，作这条边的垂线，把这块土地分为两块长方形土地，较大一块土地种甲种作物，较小一块土地种乙种作物．

设计意图：让学生体会如何利用方程组的解解释实际问题．

问题 8　还有其他设计方案吗？

师生活动：过长方形土地的短边上一点，作这条边的垂线，把这块土地分为两块长方形土地．再次经历列方程组解决实际问题的过程．

设计意图：一题多解，体现思维的多样性．

探究 2 小结

师生共同回顾解决探究 2 的过程，教师提问：

（1）列一元一次方程解决实际问题的一般过程是什么？

（2）你认为列二元一次方程组解决实际问题和列一元一次方程解决实际问题有哪些相同点和不同点？

师生活动：学生回答．对于问题（2），教师可总结：①能列二元一次方程组解决的实际问题，一般都可以通过列一元一次方程加以解决．但是，随着实际问题中未知量的增多和数量关系的复杂化，列方程组将更加简单直接．因为问题有几个等量关系就可以列出几个方程．②两者的相同点是都需要先分析题意，把实际问题转化为数学问题（设未知数，列方程或方程组），再检验解的合理性，进而得到实际问题的解．这一过程就是建模的过程．

设计意图：对于问题（2），学生对相同点的总结有利于更好地体会建模思想，理解建模的一般步骤，学生对不同点的总结将更好地认识到列方程组更为容易．

3. **布置作业**

教科书习题 8.3 第 2，3，4，5 题.

五、目标检测设计

教科书复习题 8 第 10 题.

设计意图：与本节课的两个探究活动一致，本题也没有直接给出要求的未知数. 需要学生理解题意，特别是“全部用于购进 36 台两种型号”，发现等量关系，设出未知数. 题目蕴含的等量关系与“探究 1”类似，而对购买方案的描述又与“探究 2”类似.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. **一次方程组的相关史料**

未知量是一次的方程组，叫做线性方程组. 它既是最简单也是最重要的一类代数方程组. 一次方程组是重要的数学模型，它来源于实际问题，又用于解决实际问题. 对于一次方程组，我们研究它是否有解，有多少解，以及怎么解.

我国是世界上引进和求解一次方程组最早的国家之一. 公元 3 世纪，我国著名数学家刘徽把“方程”解释为：程，课程也. 群物众杂，各列有数，总言其实. 令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程. 其中，“令每行为率”是按条件列等式的意思；“如物数程之”是说有几个未知数就列几个等式. 最后用竹制的算筹布列出一个方阵，就是我们今天的方程组.

一次方程组的解法在我国古代数学名著《九章算术》“方程”章中已有比较完整的论述. 所用的方法相当于对现代对方程组的增广矩阵施行行初等变换，消去未知数.

在西方，一次方程组的研究始于 17 世纪后期的莱布尼兹（G. W. Leibniz）. 他曾研究含有两个未知数的三个一次方程组成的方程组，证明当方程组的结式等于零时方程组有解. 马克劳林（Maclaurin）在 18 世纪上半叶研究了有二、三、四个未知数组成的一次方程组，并得到了现在称为克莱姆法则的结果. 克莱姆不久也发表了这个法则. 到了 19 世纪，英国数学家史密斯引进了方程组的增广矩阵和非增广矩阵的术语，道奇森证明了含有 n 个未知数的 m 个方程组成的方程组相容的充要条件，使方程组理论臻于完善.

2. **用行列式和矩阵解一次方程组举例**

一次方程组的解只与未知数的系数有关. 无论是代入消元法，还是加减消元法，本质上都是对未知数的系数进行运算. 一次方程组的行列式解法和矩阵解法就是通过对未知数的系数进行运算，求出一次方程组的解的方法.

例如，求下面二元一次方程组

$$\begin{cases}3x+2y=5, & ①\\ 4x+5y=3. & ②\end{cases}$$的解.

(1) 先用加减消元法求它的解.

①×5−②×2，得$(3\times5-4\times2)x=5\times5-3\times2$,则 $x=\dfrac{5\times5-3\times2}{3\times5-4\times2}=\dfrac{19}{7}$.

①×4−②×3，得$(2\times4-5\times3)y=5\times4-3\times3$,则 $y=\dfrac{5\times4-3\times3}{2\times4-5\times3}=-\dfrac{11}{7}$.

因此，原方程组的解为$\begin{cases}x=\dfrac{19}{7},\\ y=-\dfrac{11}{7}.\end{cases}$

一般情况下，对于方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$当 $a_1b_2\neq a_2b_1$时，利用加减消元法可得方程组的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.\end{cases}$$

(2) 接下来，用行列式法求解上述二元一次方程组.

记$D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=3\times5-2\times4=7$，$D_x=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=5\times5-2\times3=19$，$D_y=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}=3\times3-5\times4=-11$，

则原方程组的解为$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{19}{7},\\ y=\dfrac{D_y}{D}=-\dfrac{11}{7}.\end{cases}$

对于一般的二元一次方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$我们记

$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$，$D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$，$D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$，

其中 D，D_x，D_y叫做行列式，D 叫做系数行列式. 当系数行列式 $D\neq0$ 时，方程组的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D},\\ y=\dfrac{D_y}{D}.\end{cases}$$

当未知数不断增多时，行列式解法的优越性就会逐渐体现出来.

(3) 下面，看一下如何用矩阵解上述二元一次方程组.

在用矩阵解这个方程组之前，不难发现下面的事实：

①交换方程组中任意一个方程的位置，方程组的解不变；

②方程组中任意一个方程的两边都乘或除以同一个非零数，方程组的解不变；

③方程组中任意一个方程的两边都加上或减去方程组中的另外一个方程，方程组的解不变.

上述事实是方程组的同解原理，它保证变形后的方程组的解不变.

解上述二元一次方程组，就是运用方程组的同解原理把表示上述二元一次方程组的矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

逐渐转化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

的形式．此时二元一次方程组的解为$\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases}$

下面我们给出具体的变形过程：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行}-\text{第 1 行}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行与第 1 行互换}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行}-\text{第 1 行}\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行}\times\left(-\frac{1}{7}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行}-\text{第 2 行}\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{19}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

当未知数不断增多时，用矩阵解方程组的作用会更加明显.

二、拓展性问题

1. 我国古代数学名题

(1)《九章算术》中有一道题，原文是："今有善行者行一百步，不善行者行六十步．今不善行者先行一百步，善行者追之，问几何步及之."意思是：同样时间段内，走路快的人能走 100 步，走路慢的人只能走 60 步．走路慢的人先走 100 步，走路快的人走多少步才能追上走路慢的人？

答案：设走路快的人走 x 步才能追上走路慢的人，此时走路慢的人走了 y 步，则

$$\begin{cases} x-y=100, \\ x=\frac{100}{60}y, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=250, \\ y=150. \end{cases}$$

(2)《孙子算经》中有一道题，原文是："今有木，不知长短．引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺．木长几何?"意思是：用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺．将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺，问木长多少尺.

答案：设木长 x 尺、绳子长 y 尺，则

$$\begin{cases} y=x+4.5, \\ \frac{1}{2}y=x-1. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=6.5, \\ y=11. \end{cases}$$

(3) 我国民间流传着这样一道题：只闻隔壁人分银，不知多少银和人；每人 7 两多 7 两，每人半斤少半斤．试问各位善算者，多少人分多少银.（注：古代 1 斤＝16 两.）

答案：设有 x 人，分 y 两银，则

$$\begin{cases}7x=y-7, \\ 8x=y+8.\end{cases} \quad 解得\begin{cases}x=15, \\ y=112.\end{cases}$$

2. 步行者与公交车问题

小王沿街匀速行走，发现每隔 6 min 从背后驶过一辆 18 路公交车，每隔 3 min 从迎面驶来一辆 18 路公交车. 假设每辆 18 路公交车行驶速度相同，而且 18 路公交车总站每隔固定时间发一辆车.

(1) 18 路公交车行驶速度是小王行走速度的多少倍?

(2) 18 路公交车总站间隔多长时间发一辆车?

答案：设 18 路公交车的速度是 x m/min，小王行走的速度是 y m /min，相邻两车的距离为 s m.

每隔 6 min 从背后驶过一辆 18 路公交车，当背后驶过的公交车行驶的路程是 $6x$ m 时，小王行走的路程是 $6y$ m，此时刚刚驶过的公交车比小王行走的路程多 s m，也就是相邻两车的距离，即

$$6x-6y=s. \qquad ①$$

每隔 3 min 从迎面驶来一辆 18 路公交车，当迎面刚刚驶来的公交车驶过的路程是 $3x$ m 时，小王行走的路程是 $3y$ m，此时迎面驶来的公交车与小王行走的路程的和是 s m，也就是两车的距离，即

$$3x+3y=s. \qquad ②$$

由①②，可得 $x=3y$. 所以 $\frac{s}{x}=4$.

因此，18 路公交车的行驶速度是小王行走速度的 3 倍，18 路公交车总站间隔 4 min 发一辆车.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章主要内容是：二元一次方程组及其相关概念，消元思想和代入法、加减法解二元一次方程组，利用二元一次方程组解决实际问题. 对于二元一次方程组的相关概念，主要考查学生是否知道什么是二元一次方程组，什么是二元一次方程组的解；对于解二元一次方程组，主要考查学生能否熟练地利用代入消元法和加减消元法解二元一次方程组；对于利用二元一次方程组解决实际问题，主要考查学生能否建立实际问题的数学模型——二元一次方程组，并利用二元一次方程组解决实际问题.

2. 本章的考查应注意以下问题：

(1) 能否选择恰当的方法（代入法或加减法）解二元一次方程组，解方程组的熟练程度，检验方程组的解.

(2) 能否正确建立实际问题的数学模型——二元一次方程组，检验求得的结果是否合理.

3. 除纸笔测试这种结果性评价外，还要关注对学生在学习过程中表现的过程性评价. 既要注重培养学生消元思想和化归思想，又要关注学生在解决实际问题、探索数量关系等活动中的参与程

度和思维水平．例如，让学生以小组合作学习的形式，分析解决一些开放性的问题，并说出心得体会，在学生的交流中对其进行评价．让学生主动观察生活实际，据此编制有关应用问题，从学生编制的应用问题中评价其应用意识的水平．

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 下列方程组中是二元一次方程组的是（　　）．

(A) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=4,\\ x-y=1.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}4x+3y=6,\\ 2y+z=4.\end{cases}$　(C) $\begin{cases}x+y=4,\\ x-y=1.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x+y=5,\\ x^2+y^2=13.\end{cases}$

2. 如果方程 $x-y=3$ 与下面方程中的一个组成的方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\ y=1,\end{cases}$ 那么这个方程可以是（　　）．

(A) $3x-4y=16$　(B) $\dfrac{1}{4}x+2y=5$　(C) $\dfrac{1}{2}x+3y=8$　(D) $2(x-y)=6y$

3. 由 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1$ 可以得到用 x 表示 y 的式子为（　　）．

(A) $y=\dfrac{2x-2}{3}$　(B) $y=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{3}$　(C) $y=\dfrac{2x}{3}-2$　(D) $y=2-\dfrac{2}{3}x$

4. 方程组 $\begin{cases}x-y=1,\\ 2x+y=5\end{cases}$ 的解是（　　）．

(A) $\begin{cases}x=-1,\\ y=2.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$　(C) $\begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$

5. 已知 $x=4$，$y=-2$ 与 $x=-2$，$y=-5$ 都是方程 $y=kx+b$ 的解，则 k 与 b 的值分别为（　　）．

(A) $k=\dfrac{1}{2}$，$b=-4$　(B) $k=-\dfrac{1}{2}$，$b=4$　(C) $k=\dfrac{1}{2}$，$b=4$　(D) $k=-\dfrac{1}{2}$，$b=-4$

6. 某班为奖励在校运动会上取得好成绩的同学，花了 200 元钱购买甲、乙两种奖品共 30 件，其中甲种奖品每件 8 元，乙种奖品每件 6 元．若设购买甲种奖品 x 件，乙种奖品 y 件，则所列方程组正确的是（　　）．

(A) $\begin{cases}x+y=30,\\ 6x+8y=200.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x+y=30,\\ 8x+6y=200.\end{cases}$　(C) $\begin{cases}6x+8y=30,\\ x+y=200.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}8x+6y=30,\\ x+y=200.\end{cases}$

（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. 已知 $x=1$，$y=-8$ 是方程 $3mx-y=-1$ 的解，则 m 的值为________．

8. 已知 x，y 满足方程组 $\begin{cases}2x+y=5,\\ x+2y=4,\end{cases}$ 则 $x-y$ 的值为________．

9. 若 $(3x-y+5)^2+|2x-y+3|=0$，则 $x+y$ 的值为________．

10. 用 16 元钱买了 80 分、120 分的两种邮票共 17 枚，则买了 80 分的邮票________枚，120

分的邮票________枚.

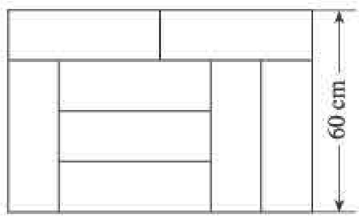
（三）解答题（第 11 题 20 分，第 12，13 题每题 10 分，共 40 分）

11. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases}3x+4y=2,\\2x-y=5;\end{cases}$　（2）$\begin{cases}\dfrac{x}{4}-y=-1,\\x=3y;\end{cases}$　（3）$\begin{cases}3(x+y)-4(x-y)=4,\\\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{6}=1.\end{cases}$

12. 几个人一起买物品，若每人出 8 元，则盈余 3 元；若每人出 7 元，则还差 4 元．人数和价格各是多少？

13. 如图，8 块相同的长方形地砖拼成一个长方形，每块长方形地砖的长和宽分别是多少？



（第 13 题）

（四）选作题（共 10 分）

14. 解三元一次方程组

$$\begin{cases}x+2y+3z=14,\\2x+y+z=7,\\3x+y+2z=11.\end{cases}$$

参考答案

1. C. 本题主要考查学生对二元一次方程组概念的理解.
2. D. 本题主要考查学生对二元一次方程组的解的概念的理解.
3. C. 本题主要考查学生代数式的恒等变形能力.
4. D. 本题主要考查学生解二元一次方程组的能力.
5. A. 本题主要考查学生对二元一次方程组的解的理解，以及解二元一次方程组的能力.
6. B. 本题主要考查学生建立实际问题的数学模型——二元一次方程组的能力.
7. -3. 本题主要考查学生对二元一次方程的解的理解.
8. 1. 本题主要考查学生对二元一次方程组灵活变形的能力.
9. -3. 本题主要考查学生对平方和绝对值的性质的理解，以及解二元一次方程组的能力.
10. 11，6．本题主要考查学生运用二元一次方程组解决实际问题的能力.
11. （1）$\begin{cases}x=2,\\y=-1;\end{cases}$（2）$\begin{cases}x=12,\\y=4;\end{cases}$（3）$\begin{cases}x=\dfrac{17}{15},\\y=\dfrac{11}{15}.\end{cases}$本题主要考查学生解二元一次方程组的能力.

12. 共有 7 人，价格为 53 元. 提示：设共有 x 人，价格为 y 元，则$\begin{cases}8x=y+3,\\7x=y-4,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=7,\\y=53.\end{cases}$本题主要考查学生建立实际问题的数学模型——二元一次方程组，以及解二元一次方程组的能力.

13. 每块长方形地砖的长是 45 cm，宽是 15 cm. 提示：设每块长方形地砖的长是 x cm，宽是y cm，则$\begin{cases}2x=x+3y,\\x+y=60,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=45,\\y=15.\end{cases}$本题主要考查学生由图形提取信息，建立实际问题的数学模型——二元一次方程组，以及解二元一次方程组的能力.

14. $\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3.\end{cases}$本题主要考查学生解三元一次方程组的能力.

第九章　不等式与不等式组

Ⅰ总体设计

一、本章学习目标

1. 了解一元一次不等式及其相关概念，经历“把实际问题抽象为不等式”的过程，能够“列出不等式或不等式组表示问题中的不等关系”，体会不等式是刻画现实世界中不等关系的一种有效的数学模型.

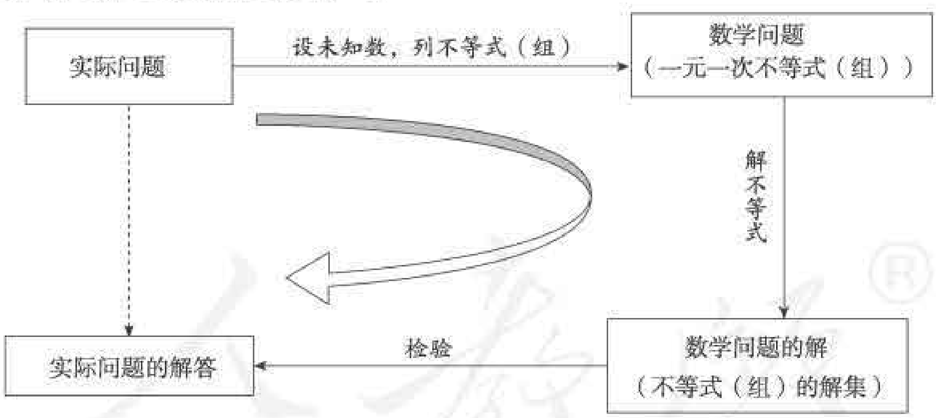
2. 通过观察、对比和归纳，探索不等式的性质，能利用它们探究一元一次不等式的解法.

3. 了解解一元一次不等式的基本目标（使不等式逐步转化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式），熟悉解一元一次不等式的一般步骤，掌握一元一次不等式的解法，并能在数轴上表示出解集，体会解法中蕴含的化归思想.

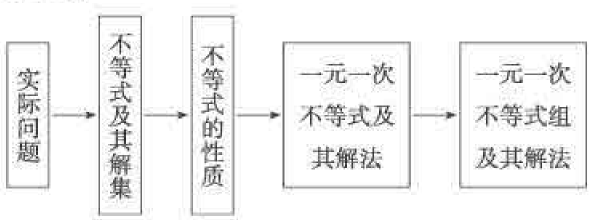
4. 了解不等式组及其相关概念，会解由两个一元一次不等式组成的不等式组，并会用数轴确定解集.

二、本章知识结构框图

1. 利用不等式解决实际问题的基本过程



2. 本章知识安排的前后顺序



三、内容安排

本章的主要内容包括：不等式及其解集，不等式的性质，一元一次不等式（组）及其相关概念，一元一次不等式（组）的解法及其解集的几何表示，利用一元一次不等式分析与解决实际问题. 其中，以不等式为工具分析问题、解决问题是重点；一元一次不等式（组）及其相关概念、不等式的性质是基础知识；一元一次不等式（组）的解法及解集的几何表示是基本技能. 本章注重体现列不等式中蕴含的建模思想和解不等式中蕴含的化归思想.

第 9.1 节中，首先以实际问题为例，结合问题中的不等关系，引出不等式及其解集的概念，然后类比等式性质，通过观察、对比，归纳得出不等式的三个性质，并运用它们解简单的不等式. 不等式的性质是解不等式的重要依据，解不等式就是求出对其中未知数的大小的限制，有了这样明确的目标，再加上对于不等式性质的认识，解不等式的方法就能很自然地产生. 教学中可以类比方程、等式的性质等来讨论不等式、不等式的性质等.

第 9.2 节中，首先介绍了一元一次不等式及其解法，然后利用一元一次不等式解决实际问题. 类比一元一次方程的解法，通过典型例题将化归思想程序化，给出一元一次不等式的解法，并利用归纳栏目概括出一元一次不等式与一元一次方程在解法上的异同及应注意之处. 在具备基本知识和技能基础上，教科书借助两个实际问题（空气质量和购物花费），说明如何建立不等式模型解决实际问题，而这正是本章的核心内容.

第 9.3 节中，结合污水抽取问题，引进了一元一次不等式组及其解集的概念. 在第八章刚学习了二元一次方程组的基础上，讨论不等式组是比较自然的安排. 这里公共解集中的"公共"，是指各不等式解集的公共部分（交集）. 二元一次方程组的解可以通过消元直接产生，而一元一次不等式组的解集可以借助画出数轴（或在头脑中想象数轴）得出. 在这个问题上借助直观容易确定不等式的解集.

四、课时安排

本章教学时间约需 11 课时，具体分配如下（仅供参考）：

9.1　不等式	约 3 课时
9.2　一元一次不等式	约 4 课时
9.3　一元一次不等式组	约 2 课时
数学活动	
小结	约 2 课时

五、编写本章时考虑的问题

使学生经历建立一元一次不等式这样的数学模型并应用它解决实际问题的过程，体会不等式的特点和作用，掌握运用它们解决问题的一般方法，提高分析问题、解决问题的能力，增强创新精神和应用数学的意识，是本章的中心任务. 由于不等式所解决的是含有不等关系的问题，这与以前较多讨论的等量关系既有联系又有区别，所以学习本章时会遇到如何通过比较新旧知识取得新进展的

问题. 因此，本章编写时从指导思想和内容安排方面主要考虑了以下两个问题.

1. 突出建模思想，实际问题作为大背景贯穿全章

同前面的第三章“一元一次方程”、第八章“二元一次方程组”一样，本章安排了一些有代表性的实际问题作为知识的发生、发展的背景材料，实际问题贯穿全章，对不等式等概念及其应用的讨论，都是在建立和运用不等式这种数学模型的过程中进行的.

引入不等式及不等式的解时，教科书选用了一个行程问题，引导学生从时间和路程两个不同角度考虑这个问题，然后再引导学生列出含未知数的式子表示有关的量，并进一步依据不等关系列出含未知数的不等式.

讨论一元一次不等式时，“如何根据实际问题列不等式”是重点讨论的问题. 教科书选用了生活中常见的有关空气质量和购物花费两个问题，让学生进一步学习如何利用不等式将实际问题转化为数学问题. 例如，解决空气质量良好天数这个问题时，就需要将实际问题情境中的“明年（365天）这样的比值要超过70%”，转化为不等式“$\frac{\text{明年空气质量良好的天数}}{\text{明年天数}}>70\%$”，采用符号后，进一步转化为$\frac{x+365\times60\%}{365}>70\%$. 这种“转化”就是一个数学抽象的过程，其中蕴含了符号化、模型化的思想.

此外，教科书在练习和习题中也选配了不同背景的实际问题. 总之，实际问题在本章中既是线索、素材，又是检验教学效果的尺度.

2. 注重知识的前后联系，强调通过比较来认识新事物

本章在全套教科书中，位居一次方程（组）之后. 方程（组）是讨论等量关系的数学工具，不等式（组）是讨论不等关系的数学工具. 两者既有联系又有差异. 在认识一次方程（组）的基础上，通过类比的方式接受新知识——一元一次不等式（组），充分发挥心理学所说的正向迁移的作用，可以起到很好的温故而知新的效果.

第9.1节的结构与一元一次方程的相应部分类似，教科书在各概念的引入、展开时注意类比方程、等式的性质等来讨论不等式、不等式的性质等，反映了知识间的横向联系，突出了不等式的特点.

解方程与解不等式都是通过适当的式子变形，使未知数转化为已知，但两者的目标有所不同，前者要转化为$x=a$的形式，后者则要转化为$x>a$或$x<a$的形式. 为实现这样的目标，都需要运用化归思想，根据等式或不等式的性质，对方程或不等式进行由繁至简的变形. 在9.2节探讨一元一次不等式解法时，教科书注意了这样的联系，类比解方程的步骤介绍了解不等式的步骤. 同时又强调了解不等式与解方程的不同之处，突出了应注意的问题，例如当不等式的两边乘（或除以）同一个负数时，不等号的方向改变.

方程组与不等式组在形式上类似，而且方程组的解是组成方程组的各方程解集的公共部分，不等式组的解集是组成不等式组的各不等式解集的公共部分，这也有类似之处. 教科书在第9.3节引入不等式组及其解集时注意渗透了这种联系.

六、对本章教学的建议

使用本章进行教学时，应关注以下问题.

1. 注重类比，做好从方程到不等式的迁移

从《课标》看，方程与不等式是同属“数与代数”领域内同一标题下的两部分内容，它们之间有密切的联系，存在许多可以进行类比的内容．在前面学过有关方程（组）内容的基础上，学生已经对方程有一定的认识，会用方程表示问题情境中的等量关系，会解一元一次方程和二元一次方程组，即对于方程的认识已经具备一定的积累．充分发挥心理学中正向迁移的积极作用，借助已有的对方程的认识，可以为进一步学习不等式（组）提供一条合理的学习之路．

本章的主要内容有不等式的性质、一元一次不等式（组）、一元一次不等式（组）的解法、利用不等式分析解决实际问题等，它们与等式的性质、一元一次方程、一元一次方程的解法、方程组、利用方程分析解决实际问题等有明显的对应关系，其中有许多共同点，不同之处在于方程是表达相等关系的数学模型，不等式是表达不等关系的数学模型．了解它们的联系与区别（例如通过类比等式性质学习不等式性质），有助于学生在已有知识基础上以效率较高的方式得到新的提高．

2. 重视数学思想，由思想到方法、步骤

本章所涉及的数学思想主要包括两个：一个是由实际问题抽象为不等式这个过程中蕴含的符号化、模型化的思想，另一个是解不等式（组）的过程中蕴含的化归思想．

数学建模的思想在前面章节（如方程）已有渗透，只不过本章的学习对象是不等式．因此，本章教学时，需要以不等式的知识为载体，将符号化、模型化的思想进一步发展和加强．在这个思想指导下，需要教师引导学生完成用数学模型表示和解决实际问题的步骤：正确地理解问题情境，分析其中的不等关系，设未知数，列不等式等．

解不等式（组），最终要使不等式（组）变形为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，即依据不等式的性质，使不等式（组）逐步化简，直至明确求出未知数的大小范围．在教学中，需要注意指导学生由这种化归的思想，类比解方程，获得解不等式的步骤，即关注“如何由思想转化为具体的步骤”，而不是单纯地教步骤、教操作．

总之，数学思想是通过数学知识的载体来体现的，对于它们的认识不是一次完成的，而需要一个逐步认识的过程，既需要教科书的不断渗透，也需要教师的经常点拨，这样有利于学生感受和理解它们．数学思想对一个人的影响往往要大于具体的数学知识，因此，教学中应在如何深入浅出地进行数学思想的渗透传播方面不断探索．

3. 关注基础知识和基本技能

虽然以不等式为工具分析问题、解决问题是本章的重难点，但是教科书编写时，对于基本知识和基本技能也给予了充分的关注．例如安排一元一次不等式内容时，采用了“概念—解法—应用”的结构，即先利用简单的一元一次不等式完成一元一次不等式概念和解法这些基本知识和基本技能的学习，然后再利用实际问题学习一元一次不等式的应用．因此，在本章教学时，应注意打好基础，对基础知识和基本技能、能力等进行及时地归纳整理，安排必要的、适量的练习，使得学生对基础知识留下较深刻的印象，对基本技能达到一定的掌握程度，发展基本能力．如此一来，不仅有利于突破本章的教学重难点，而且对于理解和掌握后续知识（其他的不等式以及函数等）的学习会有很大的帮助．

第九章　不等式与不等式组

数量有大小之分，它们之间有相等关系，也有不等关系.[1]现实世界和日常生活中存在大量涉及不等关系的问题．例如，当两家商场推出不同的优惠方案时，到哪家商场购物花费少？这个问题就蕴含了不等关系．对于这样的问题，我们常常把要比较的对象数量化，分析其中的不等关系，列出相应的数学式子——不等式（组），并通过解不等式（组）而得出结论．这样的思路与利用方程（组）研究相等关系是类似的．

本章我们将从什么是不等式说起，类比等式和方程，讨论不等式的性质，学习一元一次不等式（组）及其解法，并利用这些知识解决一些问题，感受不等式在研究不等关系问题中的重要作用．

[2]

Ⅱ 教材分析

［1］数量有大小之分，这是人们熟知的客观事实．有大小，就会有相等或不等．用等式（包括方程）可以研究相等关系，要研究不等关系也需要专门的数学工具，这就是不等式．

［2］这幅章前图是一个大型商场内部的实景照片，它与第 9.2 节的选择购物商场问题的情境相配合．

［3］章前图中的文字和不等式出自第 9.2 节的选择购物商场问题，它们出现在本章章前图中，可以从一个侧面反映不等式在实际问题中的应用．

1. 等式表示相等关系，方程是含未知数的等式，它是应用广泛的数学工具．不等式表示不等关系，不等式中可以含未知数，它也是应用广泛的数学工具．方程与不等式有许多可以类比之处，它们在义务教育阶段的数学课程体系中构成一个重要的方面．教学之前应先分析以前的哪些知识对本章影响较大．

2. 引言中以选择购物商场为例说明现实世界和日常生活中存在大量涉及不等关系的问题，解不等式的问题，留待本章正文讨论．教学中需注意充分发挥引言的“导引”的作用，激发学生学习不等式的兴趣，并从整体上初步了解本章的知识线索．

3. 本章编写时，一方面，实际问题情境贯穿于全章始终，实际问题在本章中占有突出地位；另一方面，知识层次分明，从概念到解法再到应用．教学中应注意把握好这两个方面．

9.1 不等式

9.1.1 不等式及其解集

问题 一辆匀速行驶的汽车在 11:20 距离 A 地 50 km，要在 12:00 之前驶过 A 地，车速应满足什么条件？

分析：设车速是 x km/h.

从时间上看，汽车要在 12:00 之前驶过 A 地，则以这个速度行驶 50 km 所用的时间不到 $\frac{2}{3}$ h，[1]即

$$\frac{50}{x}<\frac{2}{3}, \quad ①$$

从路程上看，汽车要在 12:00 之前驶过 A 地，则以这个速度行驶 $\frac{2}{3}$ h 的路程要超过 50 km，即

$$\frac{2}{3}x>50. \quad ②$$

式子①和②从不同角度表示了车速应满足的条件.[2]

像①和②这样用符号“<”或“>”表示大小关系的式子，叫做**不等式**（inequality）．像 $a+2\neq a-2$ 这样用符号“≠”表示不等关系的式子也是不等式.[3]

有些不等式中不含未知数，例如 $3<4$，$-1>-2$．有些不等式中含有未知数，例如①和②式中字母 x 表示未知数.

虽然①和②式表示了车速应满足的条件，但是我们希望更明确地得出 x 应取哪些值．例如对不等式②，[4]当 $x=80$ 时，$\frac{2}{3}x>50$；当 $x=78$ 时，$\frac{2}{3}x>50$；当 $x=75$ 时，$\frac{2}{3}x=50$；当 $x=72$ 时，$\frac{2}{3}x<50$．这就是说，当 x 取某些值（如 80，78）时，不等式 $\frac{2}{3}x>50$ 成立；当 x 取某些值（如 75，72）时，不等式 $\frac{2}{3}x>50$ 不成立．与方程的解类似，我们把使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**.[5]

114 第九章 不等式与不等式组

[1] 从问题中有关时间的信息可知，汽车行驶 50 km（驶过 A 地）所用时间，必须在 11:00～12:00 这 40 min 之内，即所用时间要小于 $\frac{2}{3}$ h.

[2] ① 式中的 $\frac{50}{x}$ 是 $\frac{\text{路程}}{\text{速度}}$，表示行驶时间；②式中的 $\frac{2}{3}x$ 是“时间×速度”，表示行驶路程.

[3] “>”是大于号，读作“大于”；“<”是小于号，读作“小于”；“≠”是不等于号，读作“不等于”，它表示“大于”或“小于”. 这 3 个符号统称不等号.

[4] 由于不等式①中未知数在分母中，①属于分式不等式，所以我们暂不讨论.

[5] 一般地，不等式的一个解是满足不等式的未知数的一个值. 此处暂不继续讨论如何解 $\frac{2}{3}x>50$，学习了后面内容，这个悬念便能得到解决.

1. 本节先通过一个具体行程问题，引导学生从时间和路程两个不同角度考虑：汽车到达 A 地的行驶时间要小于 $\frac{2}{3}$ h；或者说，汽车行驶 $\frac{2}{3}$ h 所走路程要大于 50 km. 这两个不等关系实际上是一致的，是从两个不同角度看同一个问题，选取其中任何一个不等关系都可以列不等式解决本题. 这里列两个不等式体现解决问题的方法有多种，不等式的形式也有多种.

2. 代数不等式也可以根据未知数是否在分母中分为整式不等式和分式不等式，本章只讨论最简单的一元一次不等式（组）的解法，为此对于不等式①，教科书的处理是只列出而不进行更深入的讨论. 下面只对不等式②进行进一步讨论，从中引出不等式的解的概念.

3. 未知数取某个值时不等式能够成立，这个值就是不等式的一个解. 教学中，对于这个概念，应结合具体例子让学生认识. 不等式可以有

例如80和78是不等式$\frac{2}{3}x>50$的解，而75和72不是不等式$\frac{2}{3}x>50$的解.

思考

除了80和78，不等式$\frac{2}{3}x>50$还有其他解吗？如果有，这些解应满足什么条件？[1]

可以发现，当$x>75$时，不等式$\frac{2}{3}x>50$总成立；而当$x<75$或$x=75$时，不等式$\frac{2}{3}x>50$不成立. 这就是说，任何一个大于75的数都是不等式$\frac{2}{3}x>50$的解，这样的解有无数个；任何一个小于或等于75的数都不是不等式$\frac{2}{3}x>50$的解. 因此，$x>75$表示了能使不等式$\frac{2}{3}x>50$成立的x的取值范围，它可以在数轴上表示[2]（图9.1-1）.

图9.1-1

在表示75的点上画空心圆圈，表示不包含这一点.

由上可知，在前面问题中，汽车要在12:00之前驶过A地，车速必须大于75 km/h.

一般地，一个含有未知数的不等式的所有的解，组成这个不等式的**解集**[3]（solution set）. 求不等式的解集的过程叫做**解不等式**.[5]

由不等式①能得出这个结果吗？[4]

练习

1. 用不等式表示：
   (1) a是正数；　　(2) a是负数；
   (3) a与5的和小于7；　　(4) a与2的差大于-1；
   (5) a的4倍大于8；　　(6) a的一半小于3.

［1］一般地，不等式的解不止一个，甚至可以有无数多个. 例如，$\frac{2}{3}x>50$有无数多个解，而这些解都满足条件$x>75$.

［2］数轴可以看作是由它上面的所有点组成的集合，每个点都表示一个实数，数轴上的点与实数一一对应.

［3］不等式的解集是由不等式的所有解组成的集合. 这里集合是个原始概念，不对它下定义，但可以借助例子解释. 例如，一个班是由它的所有学生组成的集合.

［4］让学生验证可知，当$x>75$时不等式①成立，因此由不等式①可得同样的结果.

［5］解不等式是要求出不等式的解集，即得出一个集合.

无数多个解，这些解应满足什么条件？对这一点也应结合具体例子，让学生通过比较来发现规律. 第9.1.1小节“思考”中的问题就是为此设计的.

4. 不等式的解集的概念是不等式的解的概念的发展. 不等式的解是对孤立的数值而言的，而不等式的解集则是对这些数值的整体而言的. 它们是元素与集合的关系，通俗说是个体成员与集体的关系，教学中可以借助一些通俗的事例对此进行解释. 务必使学生认识到不等式的解集包括了不等式的全体的解，解集中任何一个数都是不等式的一个解.

本节中，对于不等式的解集的表示方法主要有两种：一是用式子形式（如$x>2$），即用最简形式的不等式（$x>a$或$x<a$）表示；另一是用数轴，标出数轴上的某一区间，其中的点对应的数值都是不等式的解. 这两种形式分别是用“数”和“形”表示不等式的解集.

练习答案

1. (1) $a>0$;
   (2) $a<0$;
   (3) $a+5<7$;
   (4) $a-2>-1$;
   (5) $4a>8$;
   (6) $\frac{1}{2}a<3$.
2. 3.2，4.8，8，12 是不等式的解，其余数不是.
3. (1) $x>3$;
   (2) $x<4$;
   (3) $x>2$.

2. 下列数中哪些是不等式 $x+3>6$ 的解？哪些不是？

$$-4,\ -2.5,\ 0,\ 1,\ 2.5,\ 3,\ 3.2,\ 4.8,\ 8,\ 12.$$

3. 直接说出下列不等式的解集：

(1) $x+3>6$；　(2) $2x<8$；　(3) $x-2>0$.

9.1.2 不等式的性质

对于某些简单的不等式，我们可以直接得出它们的解集，例如不等式 $x+3>6$ 的解集是 $x>3$，不等式 $2x<8$ 的解集是 $x<4$. 但是对于比较复杂的不等式，例如 $\frac{5x+1}{6}-2>\frac{x-5}{4}$，直接得出解集就比较困难. 因此，还要讨论怎样解不等式. 与解方程需要依据等式的性质一样，解不等式需要依据不等式的性质. 为此，我们先来看看不等式有什么性质.[1]

我们知道，等式两边加或减同一个数（或式子），乘或除以同一个数（除数不为0），结果仍相等. 不等式是否也有类似的性质呢？

思考

用“>”或“<”填空，并总结其中的规律.[2]

(1) $5>3$, $5+2$ ___ $3+2$, $5-2$ ___ $3-2$；

(2) $-1<3$, $-1+2$ ___ $3+2$, $-1-3$ ___ $3-3$；

(3) $6>2$, 6×5 ___ 2×5, $6\times(-5)$ ___ $2\times(-5)$；

(4) $-2<3$, $(-2)\times6$ ___ 3×6, $(-2)\times(-6)$ ___ $3\times(-6)$.

根据发现的规律填空：当不等式两边加或减同一个数（正数或负数）时，不等号的方向______；当不等式两边乘同一个正数时，不等号的方向______；而乘同一个负数时，不等号的方向______.[3]

换一些其他的数，验证这个发现.

116 第九章 不等式与不等式组

[1] 这里是通过计算和比较，从特殊到一般，从具体到抽象地归纳出不等式的性质.

[2] (1) $>$，$>$；
(2) $<$，$<$；
(3) $>$，$<$；
(4) $<$，$>$.

[3] 不变，不变，改变.

5. 求不等式的解集的过程，叫做解不等式. 一般地，只求出不等式的部分解并没有达到解不等式的要求，解不等式的结果应是一个解集.

6. 为解不等式，需要先讨论不等式的基本性质，它们是解不等式的依据. 教科书设计了“思考”栏目，通过观察具体数字运算的大小比较，联系学过的等式的性质，让学生归纳出不等式的三条性质，并分别用式子的形式表示它们. 用式子表示是个抽象概括的过程，只有理解了相关内容才会概括并表示它们.

等式性质与不等式性质的主要区别在于“等号”与“不等号”，特别是不等式的两边乘同一个非 0 数时，需要分这个数是正还是负两种情况考虑. 对于乘负数要改变不等号的方向要格外留意.

7. 不等式的性质是本章的基础知识，教学中注意让学生经历从观察具体数值到获得猜想（即归纳一般规律），再到应用性质的过程，但并

一般地，不等式有以下性质.

不等式的性质 1 不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变.

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，那么 } a\pm c>b\pm c.}$$

不等式的性质 2 不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变.

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c>0\text{，那么 } ac>bc\left(\text{或}\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right).}$$

不等式的性质 3 不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.[1]

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c<0\text{，那么 } ac<bc\left(\text{或}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right).}$$

比较上面的性质 2 和性质 3，指出它们有什么区别. 再比较等式的性质和不等式的性质，它们有什么异同？[2]

练习

设 $a>b$，用"<"或">"填空：

(1) $a+2$ ___ $b+2$；　(2) $a-3$ ___ $b-3$；

(3) $-4a$ ___ $-4b$；　(4) $\frac{a}{2}$ ___ $\frac{b}{2}$.

例 1 利用不等式的性质解下列不等式：[3]

(1) $x-7>26$；　(2) $3x<2x+1$；

(3) $\frac{2}{3}x>50$；　(4) $-4x>3$.

分析： 解不等式，就是要借助不等式的性质使不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$（a 为常数）的形式.

解： (1) 根据不等式的性质 1，不等式两边加 7，不等号的方向不变，所以

$$x-7+7>26+7,$$
$$x>33.$$

第九章　不等式与不等式组　117

[1] 性质 3 的认识需要与性质 2 进行对比，还可以用具体数值加以说明.

[2] 等式的性质有两条，它们表明了等式两边进行同样的加（减）、乘（除）运算时，相等关系不变. 不等式的性质有三条，它们表明了不等式两边进行同样的加（减）、乘（除）运算时，大小关系有时不变，有时改变. 对于乘法运算，不等式性质要分乘数的正、负分别论述，两者的结果不同.

练习答案

(1) $>$；
(2) $>$；
(3) $<$；
(4) $>$.

[3] 这些不等式比较简单，可以利用不等式的性质直接求解，从而使学生加深对这些性质的认识.

不要求用求差法对这些性质进行证明.

8. 例 1 的设计目的是巩固对不等式性质的理解，体会这些性质在解不等式中的作用. 例 1 中的 4 个不等式都是很简单的一元一次不等式，分析中指出了解不等式的目的，即使不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式. 为达到这个目的，就需要对不等式进行变形，变形的依据就是不等式的性质. 这些不等式的求解过程，分别运用了不等式的性质 1，2 和 3. 教学中注意化归思想的渗透.

在等式的性质后也有例 1 这种类型的例题，不同之处是例 1 不仅要根据性质解题，而且增加了对结果的几何表示. 由于例 1 是解不等式的开始，所以此处对不等式的解集除用式子表示外，再用数轴表示很有必要. 一方面可以加深学生对不等式的解集以及解不等式的理解，另一方面也为学生后面学习不等式组时用数轴确定不等式组的解集作了准备.

[1] $x \geqslant a$ 表示 $x > a$ 或者 $x = a$；$x \leqslant a$ 表示 $x < a$ 或者 $x = a$. “$\geqslant$”和“$\leqslant$”分别比“$>$”和“$<$”各多了一层含义.

[2] 若 $a \geqslant b$，则
①$a \pm c \geqslant b \pm c$；
②$ac \geqslant bc$（$c > 0$）；
③$ac \leqslant bc$（$c < 0$）.

（2）根据不等式的性质 1，不等式两边减 $2x$，不等号的方向不变，所以

$$3x - 2x < 2x + 1 - 2x,$$
$$x < 1.$$

（3）根据不等式的性质 2，不等式两边乘 $\frac{3}{2}$，不等号的方向不变，所以

$$\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}x > \frac{3}{2} \times 50,$$
$$x > 75.$$

（4）根据不等式的性质 3，不等式两边除以 -4，不等号的方向改变，所以

$$\frac{-4x}{-4} < \frac{3}{-4},$$
$$x < -\frac{3}{4}.$$

不等式的解集也可以在数轴上表示．如上例中不等式 $x - 7 > 26$ 的解集在数轴上的表示如图 9.1-2 所示.

图 9.1-2

不等式 $3x < 2x + 1$ 的解集在数轴上的表示如图 9.1-3 所示.

图 9.1-3

请你在数轴上表示例 1 中其他两个不等式的解集.

像 $a \geqslant b$ 或 $a \leqslant b$ 这样的式子，也经常用来表示两个数量的大小关系．例如，为了表示 2011 年 9 月 1 日北京的最低气温是 19 ℃，最高气温是 28 ℃，我们可以用 t 表示这天的气温，t 是随时间变化的，但是它有一定的变化范围，即 $t \geqslant 19$ ℃并且 $t \leqslant 28$ ℃．符号“$\geqslant$”读作“大于或等于”，也可说是“不小于”；符号“$\leqslant$”读作“小于或等于”，也可说是“不大于”．$a \geqslant b$ 或 $a \leqslant b$ 形式的式子，具有与前面所说的不等式的性质类似的性质.[2]

符号“$\geqslant$”与“$>$”的意思有什么区别？“$\leqslant$”与“$<$”呢？[1]

118 第九章　不等式与不等式组

9. 教科书给出了例 1 的第（1）（2）小题解集的数轴表示，后面的 2 个小题要求学生完成．教学中应注意，解完全部题目后应引导学生总结不等式的性质以及解集的两种表示形式.

10. 由于解方程中在式子两边同时除以未知数的系数时不需要特别关注系数的正负，所以在解不等式时，学生容易忽略不等号的方向问题，这是学习新知识过程中的新问题，对此可以结合本节例 1 的第（3）（4）小题提醒学生予以注意.

11. 符号“$\geqslant$”和“$\leqslant$”分别比“$>$”和“$<$”各多了一层相等的含义，它们是不等号与等号的合写形式．通常我们把用符号“$\geqslant$”和“$\leqslant$”表示大小关系的式子，也称为不等式．它们具有类似前面所说的不等式的性质，只是要把“$>$”和“$<$”改为“$\geqslant$”和“$\leqslant$”，因此这些不等式的解法可以不单独讨论.

12. 本节例 2 是关于容积与容器内液体体积的问题，题中的基本数量关系为：容器中液体体

例 2 某长方体形状的容器长 5 cm，宽 3 cm，高 10 cm．容器内原有水的高度为 3 cm，现准备向它继续注水．用 V（单位：cm^3）表示新注入水的体积，写出 V 的取值范围．

解：新注入水的体积 V 与原有水的体积的和不能超过容器的容积[1]，即

$$V+3\times5\times3\leqslant3\times5\times10,$$

$$V\leqslant105.$$

又由于新注入水的体积 V 不能是负数，因此，V 的取值范围是

$$V\geqslant0 \text{ 并且 } V\leqslant105.$$

在数轴上表示 V 的取值范围如图 9.1-4 所示．

图 9.1-4

在表示 0 和 105 的点上画实心圆点，表示取值范围包含这两个数．

练习

1．用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $x+5>-1$；　(2) $4x<3x-5$；

(3) $\frac{1}{7}x<\frac{6}{7}$；　(4) $-8x>10$．

2．用不等式表示下列语句并写出解集，并在数轴上表示解集：

(1) x 的 3 倍大于或等于 1；　(2) x 与 3 的和不小于 6；

(3) y 与 1 的差不大于 0；　(4) y 的 $\frac{1}{4}$ 小于或等于 -2．

习题 9.1

复习巩固

1．下列数值中哪些是不等式 $2x+3>9$ 的解？哪些不是？

-4，-2，0，3，3.01，4，6，100．

[1] 容器中水的体积≤容积．

练习答案

1．(1) $x>-6$；

(2) $x<-5$；

(3) $x<6$；

(4) $x<-\frac{5}{4}$．

2．(1) $3x\geqslant1$，$x\geqslant\frac{1}{3}$；

(2) $x+3\geqslant6$，$x\geqslant3$；

(3) $y-1\leqslant0$，$y\leqslant1$；

(4) $\frac{y}{4}\leqslant-2$，$y\leqslant-8$．

积≤容积，此处展示了一个生活中常见的带有“≤”关系的例子．教学中需要引导学生注意问题的实际意义，在得出 $V\leqslant105$ 后问题并未完全解决，完整的答案是“$V\geqslant0$ 并且 $V\leqslant105$”，它在数轴上对应一个包含两端点的区间（闭区间）．此处，教科书未采用连写不等式的表达式 $0\leqslant V\leqslant105$，而是安排在后面第 9.3 节“一元一次不等式组”中首次出现．这是想分散难点，不在一处出现过多新知识．

习题 9.1

1．“复习巩固”中题目的设计目的主要有三个：(1) 列不等式表示数量的大小关系，培养把“文字语言”翻译成“符号语言”的能力，为进一步列不等式解决实际问题作准备；(2) 复习巩固不等式的解和解集的概念；(3) 复习巩固不等式的性质，从解不等式的目的出发考虑如何运用不等式性质．这些内容应使学生切实掌握．

[1] $L=40\pm0.02$，是指 L 的最大值为 $40+0.02=40.02$，L 的最小值为 $40-0.02=39.98$.

[2] 饮料罐上所注“蛋白质含量 $\geqslant 0.6\%$”即 $\dfrac{\text{饮料中蛋白质的质量}}{\text{饮料的质量}}\geqslant 0.6\%$.

[3] 一般地，一个两位数可以表示为 $10b+a$. 其中，b 可以是 1～9 的整数，a 可以是 0～9 的整数.

此题中因 a，b 对调后仍是两位数，所以 a 应是 1～9 的整数.

2. 用不等式表示：

(1) a 与 5 的和是正数； (2) a 与 2 的差是负数；

(3) b 与 15 的和小于 27； (4) b 与 12 的差大于 -5；

(5) c 的 4 倍大于或等于 8； (6) c 的一半小于或等于 3；

(7) d 与 e 的和不小于 0； (8) d 与 e 的差不大于 -2.

3. 写出不等式的解集：

(1) $x+2>6$； (2) $2x<10$；

(3) $x-2>0.1$； (4) $-3x<10$.

4. 设 $m>n$，用“<”或“>”填空：

(1) $m-5$ ___ $n-5$； (2) $m+4$ ___ $n+4$；

(3) $6m$ ___ $6n$； (4) $-\frac{1}{3}m$ ___ $-\frac{1}{3}n$.

5. 利用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $x+3>-1$； (2) $6x<5x-7$；

(3) $-\frac{1}{5}x<\frac{2}{3}$； (4) $4x>-12$.

综合运用

6. 设 $a>b$，用“<”或“>”填空：

(1) $2a-5$ _____ $2b-5$；

(2) $-3.5b+1$ _____ $-3.5a+1$.

7. 根据机器零件的设计图纸（如图），用不等式表示零件长度的合格尺寸（L 的取值范围）.[1]

8. 一罐饮料净重约 300 g，罐上注有“蛋白质含量 $\geqslant 0.6\%$”，其中蛋白质的含量为多少克？[2]

（第 7 题）

拓广探索

9. 有一个两位数，[3]如果把它的个位上的数 a 和十位上的数 b 对调，那么什么情况下得到的两位数比原来的两位数大？什么情况下得到的两位数比原来的两位数小？什么情况下得到的两位数等于原来的两位数？

120 第九章 不等式与不等式组

2. “综合运用”的题目有 3 道. 第 6 题要综合运用不等式的几个性质. 第 7 题要根据图纸把设计公差改写为上下两个限制，并用不等式形式表示出来. 第 8 题要根据商品包装上的规格求出蛋白质含量的范围.

3. “拓广探索”的题目是有关数字表示的问题，应让学生考虑题中对两个字母的限制.

阅读与思考

用求差法比较大小[1]

制作某产品有两种用料方案，方案1用4块A型钢板，8块B型钢板；方案2用3块A型钢板，9块B型钢板. A型钢板的面积比B型钢板大. 从省料角度考虑，应选哪种方案？

设A型钢板和B型钢板的面积分别为x和y，于是，两种方案用料面积分别为

$$4x+8y \text{ 和 } 3x+9y.$$

现在需要比较上面两个数量的大小.

两个数量的大小可以通过它们的差来判断. 如果两个数a和b比较大小，那么

当$a>b$时，一定有$a-b>0$；

当$a=b$时，一定有$a-b=0$；

当$a<b$时，一定有$a-b<0$.

反过来也对，即

当$a-b>0$时，一定有$a>b$；

当$a-b=0$时，一定有$a=b$；

当$a-b<0$时，一定有$a<b$.[2]

因此，我们经常把两个要比较的对象先数量化，再求它们的差，根据差的正负判断对象的大小.

用求差的方法，你能回答前面的用料问题吗？

第九章　不等式与不等式组　121

[1] 根据两数之差是正数、负数或0，判断两数大小关系的方法叫做求差法.

[2] 两方面合起来，即

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0.$$

阅读与思考

这篇供选学用的短文介绍了一种常用的比较两个数量大小的方法——求差法.

根据数学上的规定：

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0;$$

产生了比较两个数量大小的求差法. 短文中的问题中，要比较的两个数量为$4x+8y$和$3x+9y$. 通过计算这两个数的差大于0，便可知$4x+8y>3x+9y$. 此外，对于两个正数还可以用求商法比较大小，即

若$a>0$，$b>0$，则

$$\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b;$$
$$\frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b;$$
$$\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b.$$

[1] 在一元不等式中，未知数的最高指数就是不等式的次数.

[2] 移项是解不等式时的常用步骤，可以说它是不等式性质1的直接结论.

9.2 一元一次不等式

我们已经知道了什么是不等式以及不等式的性质. 本节我们将学习一元一次不等式及其解法，并用它解决一些实际问题.

思考

观察下面的不等式：

$$x-7>26，3x<2x+1，\frac{2}{3}x>50，-4x>3.$$

它们有哪些共同特征？

可以发现，上述每个不等式都只含有一个未知数，并且未知数的次数是1. 类似于一元一次方程，含有一个未知数，未知数的次数是1的不等式，叫做**一元一次不等式**[1] (linear inequality in one unknown).

从上节我们知道，不等式

$$x-7>26$$

的解集是

$$x>33.$$

这个解集是通过“不等式两边都加7，不等号的方向不变”而得到的. 事实上，这相当于由 $x-7>26$ 得 $x>26+7$. 这就是说，解不等式时也可以“移项”，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不改变不等号的方向.[2]

一般地，利用不等式的性质，采取与解一元一次方程相类似的步骤，就可以求出一元一次不等式的解集.

例1 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $2(1+x)<3$； (2) $\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$.

解：(1) 去括号，得

$$2+2x<3.$$

移项，得

1. 本节讨论与一元一次不等式相关的问题，依次为：

(1) 什么是一元一次不等式？如何解一元一次不等式？(这是本节的基本知识和基本技能.)

(2) 如何根据实际问题列不等式？(这是贯穿全章的中心问题.)

2. 同方程一样，代数不等式也可以按照其中未知数（元）的个数和未知数的最高次数（指数）分类. 一元一次不等式是最简单的代数不等式，它是整式不等式. “思考”栏目中的4个不等式在第9.1节出现过，此时的目的是引导学生从形式上观察它们的共同特征，以获得一元一次不等式的概念. 在教学中，可以类比一元一次方程，提示学生观察的要点.

3. 与解方程一样，解一元一次不等式也可以采取相同的步骤：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为1. 在教学中，一方面注意引导学生类比一元一次方程解一元一次不等式；

$$2x<3-2.$$

合并同类项，得

$$2x<1.$$

系数化为1，得

$$x<\frac{1}{2}.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图9.2-1所示.

图9.2-1

(2) 去分母，得

$$3(2+x)\geq 2(2x-1).$$

去括号，得

$$6+3x\geq 4x-2.$$

移项，得

$$3x-4x\geq -2-6.$$

合并同类项，得

$$-x\geq -8.$$

系数化为1，得

$$x\leq 8.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图9.2-2所示.

要特别注意，当不等式的两边都乘（或除以）同一个负数时，不等号的方向改变.

图9.2-2

归纳[1]

解一元一次方程，要根据等式的性质，将方程逐步化为$x=a$的形式；而解一元一次不等式，则要根据不等式的性质，将不等式逐步化为$x<a$或$x>a$的形式.

第九章 不等式与不等式组 123

[1] 解方程、解不等式最终是要得到一个一边只有一个未知数，另一边是一个已知数的式子. 对方程来说，这个式子的中间是“=”；对不等式来说，这个式子的中间是“>”或“<”.

另一方面，也要让学生注意解法不同的地方，即“去分母”和“系数化为1”时，会出现“不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变”的情况.

4. 例1安排了两个小题，第（1）小题不等式中含有括号，第（2）小题不等式中含有分母. 目的在于循序渐进地让学生掌握一元一次不等式的解法，并能根据不等式的形式灵活安排解题步骤.

5. 一元一次不等式与一元一次方程既有联系又有区别. 从概念来说，两者化简后都含有一个未知数，未知数的次数都是1，系数都不等于0；但一元一次不等式表示的是不等关系，而一元一次方程表示的是相等关系. 从解法来说，两者都运用化归思想. 本节的“归纳”画龙点睛地指出解方程、解不等式各自化归的方向. 从解的情况来说，一元一次不等式有无限多个解，而一元一次方程只有一个解.

练习答案

1. (1) $x>-16$；
   (2) $x\geqslant 25$；
   (3) $x>-\dfrac{38}{11}$；
   (4) $x\leqslant \dfrac{5}{4}$.
2. (1) $x\geqslant -\dfrac{1}{2}$；
   (2) $x\geqslant -\dfrac{1}{4}$；
   (3) $y\geqslant 2$；
   (4) $y<-5$.

[1] 说明了如何列不等式：首先找出实际问题中蕴含不等关系的语句，然后根据语句中的信息列出不等式.

[2] 根据问题的实际意义，x 应取正整数，符合条件的最小正整数是 37，即至少要增加 37 天.

练习

1. 解下列不等式，并在数轴上表示解集：
   (1) $5x+15>4x-1$；　　(2) $2(x+5)\leqslant 3(x-5)$；
   (3) $\dfrac{x-1}{7}<\dfrac{2x+5}{3}$；　　(4) $\dfrac{x+1}{6}\geqslant\dfrac{2x-5}{4}+1$.
2. 当 x 或 y 满足什么条件时，下列关系成立？
   (1) $2(x+1)$ 大于或等于 1；
   (2) $4x$ 与 7 的和不小于 6；
   (3) y 与 1 的差不大于 $2y$ 与 3 的差；
   (4) $3y$ 与 7 的和的四分之一小于 -2.

有些实际问题中存在不等关系，用不等式来表示这样的关系，就能把实际问题转化为数学问题，从而通过解不等式得到实际问题的答案.

例 2 去年某市空气质量良好（二级以上）的天数与全年天数（365）之比达到 60%，如果明年（365 天）这样的比值要超过 70%，那么明年空气质量良好的天数比去年至少要增加多少？

分析：“明年这样的比值要超过 70%”指出了这个问题中蕴含的不等关系，转化为不等式，即 $\dfrac{\text{明年空气质量良好的天数}}{\text{明年天数}}>70\%$.[1]

解：设明年比去年空气质量良好的天数增加了 x.

去年有 $365\times60\%$ 天空气质量良好，明年有 $(x+365\times60\%)$ 天空气质量良好，并且

$$\frac{x+365\times60\%}{365}>70\%.$$

去分母，得

$$x+219>255.5.$$

移项，合并同类项，得

$$x>36.5.$$

由 x 应为正整数，得

$$x\geqslant 37.$$

答：明年空气质量良好的天数比去年至少要增加 37，[2] 才能使这一年空气质量良好的天数超过全年天数的 70%.

124 第九章　不等式与不等式组

6. 不等式是刻画不等关系的数学模型，它有广泛的应用. 本节安排了两个例题重点说明如何根据实际问题列不等式，使学生经历建立一元一次不等式这样的数学模型，并应用它解决实际问题的过程.

7. 本节例 2 取材于空气质量问题，素材本身有利于环境保护教育.

解题中列不等式是关键一步. 这就需要将问题情境中的文字语言“明年（365 天）这样的比值要超过 70%”，转化为符号语言“$\dfrac{x+365\times60\%}{365}>70\%$”，这是一个数学抽象的过程，其中蕴含了符号化、模型化的思想. 教学中应注意让学生经历数学抽象的过程，运用符号化、模型化的思想，掌握列不等式解决实际问题的方法.

8. 本节例 3 取材于生活中常见的购物问题. 由于市场上存在不同的促销方式，所以购物时可以货比三家，加以选择. 应该说在市场经济日益

例 3 甲、乙两商场以同样价格出售同样的商品，[1] 并且又各自推出不同的优惠方案：在甲商场累计购物超过 100 元后，超出 100 元的部分按 90%收费；在乙商场累计购物超过 50 元后，超出 50 元的部分按 95%收费．顾客到哪家商场购物花费少？

分析： 在甲商场购物超过 100 元后享受优惠，在乙商场购物超过 50 元后享受优惠．因此，我们需要分三种情况讨论：

（1）累计购物不超过 50 元；

（2）累计购物超过 50 元而不超过 100 元；

（3）累计购物超过 100 元．

解：（1）当累计购物不超过 50 元时，在甲、乙两商场购物都不享受优惠，且两商场以同样价格出售同样的商品，因此到两商场购物花费一样．

（2）当累计购物超过 50 元而不超过 100 元时，享受乙商场的购物优惠，不享受甲商场的购物优惠，因此到乙商场购物花费少．

（3）当累计购物超过 100 元时，设累计购物 $x(x>100)$ 元．[2]

① 若到甲商场购物花费少，则

$$50+0.95(x-50)>100+0.9(x-100).\text{[3]}$$

解得 $x>150$.

这就是说，累计购物超过 150 元时，到甲商场购物花费少．

② 若到乙商场购物花费少，则

$$50+0.95(x-50)<100+0.9(x-100).$$

解得 $x<150$.

这就是说，累计购物超过 100 元而不到 150 元时，到乙商场购物花费少．

③ 若 $50+0.95(x-50)=100+0.9(x-100)$，解得

$$x=150.$$

这就是说，累计购物为 150 元时，到甲、乙两商场购物花费一样．

练习

1. 某工程队计划在 10 天内修路 6 km，施工前 2 天修完 1.2 km 后，计划发生变化，准备至少提前 2 天完成修路任务，以后几天内平均每天至少要修路多少？
2. 某次知识竞赛共有 20 道题，每一题答对得 10 分，答错或不答都扣 5 分，小明得分要超过 90 分，他至少要答对多少道题？

［1］甲、乙两商场对各种商品的定价相同．

［2］累计购物超过 100 元时，需分三种情况讨论：到甲商场购物花费少；到乙商场购物花费少；到甲、乙两商场购物花费一样多．

［3］$50+0.95(x-50)$ 表示在乙商场购物所花钱数，$100+0.9(x-100)$ 表示在甲商场购物所花钱数．

练习答案

1. 设以后几天内平均每天至少要修路 x km，则
$$6x \geqslant 6-1.2.$$
解得 $x \geqslant 0.8$.
所以，工程队以后几天内平均每天至少要修路 0.8 km.
2. 设小明答对 x 道题，则
$$10x-5(20-x)>90.$$
解得 $x>12\frac{2}{3}$.
所以，小明至少要答对 13 道题.

发展的现代社会，这个问题与学生距离较近.

与例 2 相比，本题情境更复杂、难度更大．两个优惠方案的优惠起点是具有关键意义的数据，需要根据这些数据分三种情况讨论问题．其中，第三种情况最为复杂，需要再次分类，列不等式解决．因此，审题中需抓住关键．分类考虑是需要培养的分析能力，教学中应予以关注.

9．练习中的第 2 题需要注意，“得分要超过 90 分”即“得分大于 90 分”，“至少要答对 13 道题”即“答对的题数大于或等于 13”．用不等式解应用问题时，要注意对未知数的限制条件，根据本题的实际意义，答案应是正整数.

习题 9.2

1．“复习巩固”的题目涉及解一元一次不等式的内容，其中包括解不等式并在数轴上表示解集，解不等式并找出正整数解等.

第 4 题不涉及解具体不等式，而是要求进行

［1］这是总结所学内容，并进行横向比较的题目，重在倡导好的学习方法.

［2］“人均创利”值指平均每人所创利润值，即 $\dfrac{\text{全厂年利润值}}{\text{全厂员工人数}}$.

［3］“亏本”指入不敷出，“避免亏本”即“销售额≥进货额”.

［4］注意“超过”指“大于”.

习题 9.2

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+5)>2(4x+3)$；　　(2) $10-4(x-4)\leqslant 2(x-1)$；

(3) $\dfrac{x-3}{2}<\dfrac{2x-5}{3}$；　　(4) $\dfrac{2x-1}{3}\leqslant\dfrac{3x-4}{6}$；

(5) $\dfrac{5x+1}{6}-2>\dfrac{x-5}{4}$；　　(6) $\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{2x-5}{4}\geqslant 1$.

2. x 取什么值时，式子 $\dfrac{5x+1}{6}$ 表示下列数？

(1) 正数；　　(2) 小于 -2 的数；　　(3) 0.

3. 根据下列条件求正整数 x：

(1) $x+2<6$；　　(2) $2x+5<10$；

(3) $\dfrac{x-3}{2}>\dfrac{2x-5}{3}$；　　(4) $\dfrac{2+x}{2}\geqslant\dfrac{2x-1}{3}-2$.

4. 总结解一元一次不等式的一般步骤，并与解一元一次方程进行比较.[1]

综合运用

5. 某商店以每辆 250 元的进价购入 200 辆自行车，并以每辆 275 元的价格销售．两个月后自行车的销售款已超过这批自行车的进货款，这时至少已售出多少辆自行车？

6. 长跑比赛中，张华跑在前面，在离终点 100 m 时他以 4 m/s 的速度向终点冲刺，在他身后 10 m 的李明需以多快的速度同时开始冲刺，才能够在张华之前到达终点？

7. 某工厂前年有员工 280 人，去年经过结构改革减员 40 人，全厂年利润增加 100 万元，人均创利[2]至少增加 6 000 元，前年全厂年利润至少是多少？

8. 苹果的进价是每千克 1.5 元，销售中估计有 5% 的苹果正常损耗．商家把售价至少定为多少，才能避免亏本？[3]

9. 电脑公司销售一批计算机，第一个月以 5 500 元/台的价格售出 60 台，第二个月起降价，以 5 000 元/台的价格将这批计算机全部售出，销售总额超过 55 万元.[4] 这批计算机最少有多少台？

拓广探索

10. 求不等式 $5x-1>3(x+1)$ 与 $\dfrac{1}{2}x-1<7-\dfrac{3}{2}x$ 的解集的公共部分.

126 第九章 不等式与不等式组

一般性的总结，并对解一元一次不等式与解一元一次方程进行比较．完成这道题目，不仅可以使所学知识更加系统化、整体化，而且可以帮助学生形成注重总结的学习方法.

2.“综合运用”有 5 道题，它们都是具有实际背景的问题．分析其中的数量关系，根据不等关系列出相应不等式，是解题的关键步骤．审题时要注意题目中涉及不等关系的语言的确切含义，例如只有正确理解“至少”“超过”等词，才能准确地用不等式表示其意.

这些题目的主要设计意图是提高学生将实际问题转化为不等式模型的能力.

3.“拓广探索”的第 10 题要求先分别解两个一元一次不等式，然后求出它们的解集的公共部分，这道题是为下一节学习一元一次不等式组做铺垫的，即让学生体会两个不等式的解集的公共部分的含义，以及如何求两个不等式解集的公共部分.

9.3 一元一次不等式组

问题[1] 用每分可抽 30 t 水的抽水机来抽污水管道里积存的污水，估计积存的污水超过 1 200 t 而不足 1 500 t，那么将污水抽完所用时间的范围是什么？

设用 x min 将污水抽完，则 x 同时满足不等式

$$30x>1\,200, \quad ①$$

$$30x<1\,500. \quad ②$$

类似于方程组，把这两个不等式合起来，组成一个**一元一次不等式组**[2] (system of linear inequalities in one unknown)，记作

$$\begin{cases}30x>1\,200,\\30x<1\,500.\end{cases}$$

怎样确定不等式组中 x 的可取值的范围呢？

类比方程组的解，不等式组中的各不等式解集的公共部分，就是不等式组中 x 可以取值的范围.[3]

由不等式①，解得

$$x>40.$$

由不等式②，解得

$$x<50.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 9.3-1）.

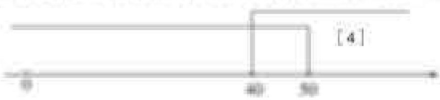


图 9.3-1

从图 9.3-1 容易看出，x 取值的范围为

$$40<x<50.$$

利用数轴体会，x 可取值的范围是两个不等式解集的公共部分.[5]

这就是说，将污水抽完所用时间多于 40 min 而少于 50 min.

第九章　不等式与不等式组　127

[1] 这个问题是本节的引入问题，需要分析其中的数量关系，并用不等式表示.

[2] 这里并未正式给一元一次不等式组下定义，只是说这两个不等式合起来，组成一个一元一次不等式组. 实际上，两个或更多的一元一次不等式合起来，都组成一个一元一次不等式组.

[3] 这里还未正式出现不等式组的解集的概念，但已点出各不等式的解集的公共部分就是不等式组中未知数的可取值范围.

[4] 这个公共部分是两端有界的开区间.

[5] 利用数轴可以直观地认识公共部分.

1. 本节讨论的对象是一元一次不等式组. 将几个一元一次不等式合在一起，就得到一元一次不等式组. 从组成成员上看，一元一次不等式组显然是在一元一次不等式基础上发展的新概念. 从组成形式上看，一元一次不等式组与第八章学习的方程组有类似之处. 不等式组与方程组所表示的都是同时要满足几个数量关系（不等关系或相等关系），所求的都是几个不等式解集的公共部分或几个方程的公共解. 因此，在本节教学中应注意前面的基础，让学生借助对已学知识的认识学习新知识.

2. 本节从抽取污水的问题说起，根据“估计积存的污水超过 1 200 t 而不足 1 500 t”，列出抽完积存污水所用时间 x 必须满足的两个不等式，并且强调 x 要同时满足这两个不等式，由此引出一元一次不等式组的概念. 注意这里是以实例来说明概念，而不是严格地给一元一次不等式组下定义. 实际上，三个或三个以上的一元一

[1] 这里正式给出不等式组的解集以及解不等式组的定义.

[2] 这个不等式组的解集是左端有界的开区间.

[3] 如果不等式组中各不等式的解集没有公共部分（各解集的交集是空集），那么不等式组无解.

一般地，几个不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的**解集**．解不等式组就是求它的解集.[1]

例 1 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>x+1, & ① \\ x+8<4x-1; & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+3\geq x+11, & ① \\ \dfrac{2x+5}{3}-1<2-x. & ② \end{cases}$

解：(1) 解不等式①，得

$$x>2.$$

解不等式②，得

$$x>3.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 9.3-2）.


[2]

图 9.3-2

从图 9.3-2 可以找出两个不等式解集的公共部分，得不等式组的解集

$$x>3.$$

利用数轴可以确定不等式组的解集.

(2) 解不等式①，得

$$x\geq 8.$$

解不等式②，得

$$x<\frac{4}{5}.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 9.3-3）.

图 9.3-3

从图 9.3-3 可以看到这两个不等式的解集没有公共部分，不等式组无解.[3]

128 第九章 不等式与不等式组

次不等式合起来，也同样是一个一元一次不等式组．教学中不要将教科书上的有关文字作为一元一次不等式组的定义来对待.

3．教科书结合污水抽取的问题，先具体说明不等式组中未知数的可取值范围，应是各不等式的解集的公共部分，并用式子形式和数轴形式表示了这个公共部分，然后正式给出不等式组的解集以及解不等式组的定义．这是从具体事物认识抽象事物的一种方式．教学中应充分重视实例的作用.

4．本节例 1 通过解不等式组，进一步加深学生对不等式组的解集以及解不等式组的认识．例 1 中既有不等式组有解的题目，又有不等式组无解的题目，这样可以让学生认识到不等式组并不总是有解．不等式组是否有解，要根据不等式组的解集的定义看，如果各不等式的解集存在公共部分，那么它就是不等式组的解集；如果各不等式的解集没有公共部分，即数轴上没有任意一

例 2 x 取哪些整数值时，不等式

$$5x+2>3(x-1)$$

与

$$\frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x$$

都成立？

分析：求出这两个不等式组成的不等式组的解集，解集中的整数就是 x 可取的整数值。

解：解不等式组

$$\begin{cases}5x+2>3(x-1),\\ \frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x,\end{cases}$$

得

$$-\frac{5}{2}<x\leqslant 4.$$

所以 x 可取的整数值是 -2，-1，0，1，2，3，4.

归纳[1]

解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分，利用数轴可以直观地表示不等式组的解集.

练习

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x>1-x,\\ x+2<4x-1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-5>1+2x,\\ 3x+2\leqslant 4x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{2}{3}x+5>1-x,\\ x-1\leqslant\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}.\end{cases}$

2. x 取哪些正整数值时，不等式 $x+3>6$ 与 $2x-1<10$ 都成立？

［1］这段归纳是对第 9.3 节的总结，即对列、解不等式组的概括.

练习答案

1. (1) $x>1$；
 (2) 无解；
 (3) $-2.4<x<3.5$.
2. 4，5.

个点在各不等式的解集之中，则这个不等式组无解.

数轴对于确定不等式组的解集很有用. 特别是初学不等式组的阶段，直观表示有助于准确地确定解集.

5. 例 2 是确定哪些整数满足一个不等式组的问题. 解决时考虑未知数的取值范围，也就是不等式组的解集，其中的整数即为所求.

6. 本节最后的归纳包括三层意思：

（1）哪类问题适合用不等式组解决；

（2）解不等式组的基本过程；

（3）数轴在解不等式组过程中的作用.

这三层意思可以提纲挈领地概括本节的主要内容. 教学中应引导学生关注这个归纳，可以让学生自己先行归纳，再互相补充完善.

习题 9.3

1. “复习巩固”的题目涉及解一元一次不等

[1] 这个分物问题涉及不同分配方案，按一种方案分配后有节余，按另一方案分配则不够分．中国古代称这类问题为“盈不足”问题，用算术方法解它．本章中可以用不等式组解此题．注意本题中的“分不到 3 本”包含分不到书的情况．

习题 9.3

复习巩固

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1<3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1>3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1<3. \end{cases}$

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x+1<3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -3x-1>3, \\ 2x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3(x-1)+13>5x-2(5-x), \\ 5-(2x+1)<3-6x; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-3(x-2)\geq 4, \\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-3(x-2)\geq 4, \\ \dfrac{2x-1}{5}>\dfrac{x+1}{2}; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+4)<2, \\ \dfrac{x+2}{2}>\dfrac{x+3}{3}. \end{cases}$

综合运用

3. x 取哪些整数值时，不等式

$$4(x-0.3)<0.5x+5.8$$

与

$$3+x>\frac{1}{2}x+1$$

都成立？

4. x 取哪些整数值时，$2\leq 3x-7<8$ 成立？

拓广探索

5. 你能求三个不等式 $5x-1>3(x+1)$，$\frac{1}{2}x-1>3-\frac{3}{2}x$，$x-1<3x+1$ 的解集的公共部分吗？

6. 把一些书分给几名同学，如果每人分 3 本，那么余 8 本；如果前面的每名同学分 5 本，那么最后一人就分不到 3 本．这些书有多少本？共有多少人？[1]

130 第九章　不等式与不等式组

式组的内容．第 1 题的不等式组比较简单，第 2 题的不等式组要复杂些．

2．“综合运用”的两道题都需要在解题时先求出未知数的取值范围，再确定其中的整数．不同之处在于两个不等关系的表现形式，第 3 题是两个单独的不等式，第 4 题使用连写不等式的形式．

3．“拓广探索”的第 5 题要求先分别解三个一元一次不等式，然后求出它们的解集的公共部分．这道题从解题方法上说与前面解由两个一元一次不等式组成的不等式组是一样的，只是要多解一个不等式，而在考虑解集的公共部分时多考虑一个解集．第 6 题是一个分物问题，属于中国古代数学中所说的“盈不足”问题．古代人用算术方法解这类问题，思考起来有一定难度，现在用不等式组解更容易想出如何列式．

以上这些问题比教科书中的例题要复杂些，形式、内容上与例题相比都有一定变化．它们对于培养学生的探究能力有一定价值．

数学活动

活动1

统计资料表明，2005 年 A 省的城市建成区面积[1]（简称建成区面积）为 1 316.4 km²，城市建成区园林绿地面积[2]（简称绿地面积）为 373.48 km²，城市建成区园林绿地率[3]（简称绿地率）为 28.37%．2010 年该省建成区面积增加了 300 km² 左右，绿地率超过了 35%．

根据上述资料，试用一元一次不等式解决以下问题．

这五年（2005～2010 年），A 省增加的绿地面积超过了多少平方千米？[4]

从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题，看看能不能用一元一次不等式解决这些问题．

活动2 猜数游戏

小丽在 4 张同样的纸片上各写了一个正整数，从中随机抽取 2 张，并将它们上面的数相加．重复这样做，每次所得的和都是 5，6，7，8 中的一个数，并且这 4 个数都能取到．猜猜看，小丽在 4 张纸片上各写了什么数．[5]

第九章 不等式与不等式组 131

[1] 城市建成区是指城市行政区内实际已成片开发建设、基本具备市政公用设施和公共设施的地区．

[2] 城市园林绿地面积指用作园林和绿化的各种绿地面积，包括公共绿地、居住区绿地、单位附属绿地、防护绿地、生产绿地、道路绿地和风景林地面积．

[3]

城市建成区园林绿地率$=\dfrac{\text{城市建成区园林绿地面积}}{\text{城市建成区面积}}$．

[4] 设绿地面积增加了 x km²，则

$$\frac{373.48+x}{1\ 316.4+300}>35\%.$$

解得 $x>192.26$．

[5] 设 4 个数分别为 x，y，z，w，并且 $x\leqslant y\leqslant z\leqslant w$．可以分析出所写 4 个数若各不相等，则所得的和不止 4 种，因为 $x+y<x+z<x+w<y+w<z+w$．若 4 个数中有 3 个或 4 个相等，则所得的和只有 2 种或 1 种．综合来看，4 个数中有 2 个相等，所写的数是 2，3，4，4 或 2，3，3，5．

1. 活动 1 的内容选自统计数据，主题是城市园林绿化，这有助于对学生进行环保教育．

教科书的设计包括三个方面：（1）查阅资料，了解活动情境中涉及的相关术语；（2）分析活动情境中的数量关系，运用不等式发现数据中隐含的信息；（3）搜集资料，编制数学题，加强联系实际．

2. 活动 2 “猜数游戏”需要分析数的大小关系，合理的分析能较快捷地找出答案．

[1] 这个框图表示了利用不等式（组）解决实际问题的基本过程.

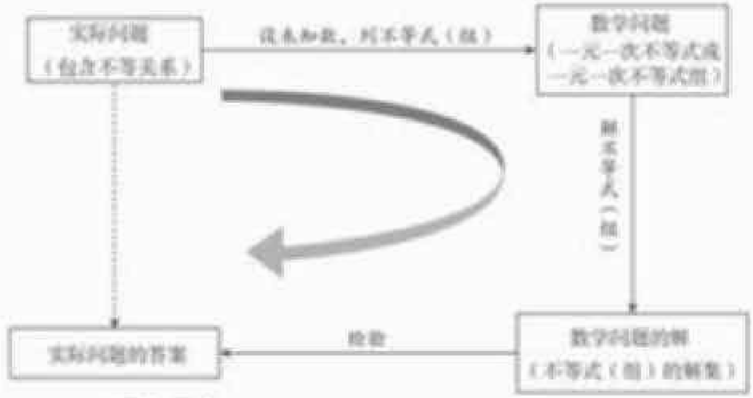
[2] 不等式的性质是解不等式的依据，它们与等式的性质有类似之处.

[3] 解一元一次不等式与解一元一次方程，在基本步骤上有许多类似之处，对两者进行比较有助于加强知识的联系.

[4] 解一元一次不等式组，是先解多个一元一次不等式，再求它们的解集的公共部分.

小　结

一、本章知识结构图[1]



二、回顾与思考

不等式（组）是刻画不等关系的数学模型，它有广泛的应用．本章主要学习不等式的基础知识以及一类最简单的不等式（组）——一元一次不等式（组），并运用它们解决一些数学问题和实际问题.

在学习不等式的性质和一元一次不等式（组）的解法时，与等式的性质和方程（组）的解法进行类比，有益于对知识的理解与掌握.

与解方程是逐步将方程化为 $x=a$ 的形式类似，解不等式是逐步将不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，两者都运用了化归的思想.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 总结不等式的性质，并与等式的性质进行比较.[2]

2. 总结一元一次不等式的解法，并与一元一次方程的解法进行比较.[3] 结合例子说明，解未知数为 x 的不等式，就是将不等式逐步变成 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，而不等式的性质是变形的重要依据.

3. 如何解一元一次不等式组？结合例子说明，解不等式组就是求有关不等式的解集的公共部分.[4]

4. 举例说明数轴在解不等式（组）中的作用.

5. 结合实例体会运用不等式解决实际问题的过程.

1. 复习课可以引导学生以分析解决某具体问题的过程为例，体会本章知识结构图，加深学生对数学建模思想的认识.

2. “回顾与思考”从知识、思想方法、学习方法三个方面对本章进行总结.

解不等式中的化归思想，即逐步使不等式的形式化简，直至化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，是解不等式的基本指导思想.

对等式性质与不等式性质、解方程（组）与解不等式（组）进行比较，可以温故而知新，加强对知识的整体认识. 例如解一元一次不等式组与解二元一次方程组的类似之处是寻求组中不等式的解集的公共部分或方程的公共解；不同之处是，解一元一次不等式组要先解每个不等式，解二元一次方程组则是通过消元使两个方程合为一个方程，逐个求未知数.

3. 复习中应注意结合学习过程中的实际情况，选择与设计有针对性的复习内容.

复习题9

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+7)>23$；　(2) $12-4(3x-1)\leq 2(2x-16)$；

(3) $\frac{x+3}{5}<\frac{2x-5}{3}-1$；　(4) $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-1}{2}>\frac{5}{12}$.

2. x 取什么值时，$15-7x$ 的值满足下列条件？

(1) 大于1；　(2) 小于1；　(3) 等于1.

3. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x+1>-1,\\2x+1<3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}-(x-1)>3,\\2x+9>3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3(x-1)+1>5x-2(1-x),\\5-(2x-1)<-6x;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}-3(x-2)\geq 4-x,\\\frac{1+2x}{3}>x-1.\end{cases}$

4. $\frac{x+3}{2}$ 的值能否同时大于 $2x+3$ 和 $1-x$ 的值？说明理由.[1]

5. 有人说不等式 $a>2a$ 永远不会成立，因为如果在这个不等式两边同除以 a，就会出现 $1>2$ 这样的错误结论. 他的说法对吗？[2]

6. 解一元一次不等式组与解一元一次不等式有什么区别和联系？[3]

综合运用

7. 一艘轮船从某江上游的A地匀速驶到下游的B地用了10 h，从B地匀速返回A地用了不到12 h，这段江水流速为3 km/h，轮船在静水里的往返速度 v 不变，v 满足什么条件？[4]

8. 老张与老李购买了相同数量的种兔，一年后，老张养兔数比买入种兔数增加了2只，老李养兔数比买入种兔数的2倍少1只，老张养兔数不超过老李养兔数的 $\frac{2}{3}$. 一年前老张至少买了多少只种兔？

拓广探索

9. 三个连续正整数的和小于333，这样的正整数有多少组？写出其中最大的一组.[5]

[1] 同时满足两个条件，即可列出两个不等式，组成不等式组.

[2] 结合不等式的性质说理.

[3] 通过总结加强解不等式与解不等式组之间的纵向联系.

[4] 从上游到下游是顺水航行，从下游到上游是逆水航行. 假设水的流速、轮船的航速（静水）都不变.

[5] 可以设3个数分别为 $x-1$，x，$x+1$.

复习题9

1. “复习巩固”的题目有两类：

(1) 解一元一次不等式（组），并在数轴上表示解集；

(2) 通过列式、辨析、总结等形式，复习巩固基本知识和基本技能.

这些题目基础性强，学生应达到较熟练求解的程度.

2. “综合运用”的题目有2道. 第7题是运动中的顺逆水问题，应注意速度的加减规则，即顺（逆）水速度＝静水速度＋（－）水速. 第8题中，各人购买的种兔数量是一个未知数，同时也是一个联系其他有关数量的数量. 列式时应注意“不超过”“至少”等词的确切含义.

3. “拓广探索”的第9题中涉及如何设未知数更简便的问题，可以比较不同方法. 此外，这道题还要考虑计数的问题，并从多个结果中选出最大值.

Ⅲ 习题解答

习题 9.1

1. 3.01，4，6，100 是 $2x+3>9$ 的解，其他数不是.

2. (1) $a+5>0$；　(2) $a-2<0$；　(3) $b+15<27$；

   (4) $b-12>-5$；　(5) $4c\geqslant 8$；　(6) $\frac{c}{2}\leqslant 3$；

   (7) $d+e\geqslant 0$；　(8) $d-e\leqslant -2$.

3. (1) $x>4$；　(2) $x<5$；

   (3) $x>2.1$；　(4) $x>-\frac{10}{3}$.

4. (1) $>$；　(2) $>$；　(3) $>$；　(4) $<$.

5. (1) $x>-4$；　(2) $x\leqslant -7$；

   (3) $x>-2$；　(4) $x\geqslant -3$.

   (数轴表示略).

6. (1) $>$；　(2) $>$.

7. $39.98\leqslant L\leqslant 40.02$.

8. 设蛋白质的含量为 x g，则 $x\geqslant 300\times 0.6\%$，解得 $x\geqslant 1.8$.

9. $(10a+b)-(10b+a)>0$，$a>b$；

   $(10a+b)-(10b+a)<0$，$a<b$；

   $(10a+b)-(10b+a)=0$，$a=b$.

习题 9.2

1. (1) $x<\frac{9}{2}$；　(2) $x\geqslant\frac{14}{3}$；　(3) $x>1$；

   (4) $x\leqslant -2$；　(5) $x>1$；　(6) $y\leqslant\frac{5}{4}$.

   (数轴表示略).

2. (1) $a>-\frac{1}{4}$；　(2) $a<-\frac{13}{4}$；　(3) $a=-\frac{1}{4}$.

3. (1) 1，2，3；　(2) 1，2；

   (3) 1；　(4) 1，2，3，…，19，20.

4. (略).

5. 设售出自行车 x 辆，则 $275x>250\times 200$，解得 $x\geqslant 182$.

6. 设李明的冲刺速度为 x m/s，则 $\frac{100}{4}x>110$，解得 $x>4.4$.

7. 设前年全厂利润是 x 万元，则$\frac{x+100}{280-40}-\frac{x}{280}\geqslant 0.6$，解得 $x\geqslant 308$.

8. 设售价定为每千克 x 元时不亏本，则 $0.95x\geqslant 1.5$，解得 $x\geqslant 1.58$.

9. 设这批电脑有 x 台，则 $5\,500\times 60+5\,000(x-60)>550\,000$，解得 $x>104$. 故这批计算机最少有 105 台.

10. $x>2$ 且 $x<4$.

习题 9.3

1. (1) $x<2$；　(2) $x>4$；
   (3) $2<x<4$；　(4) 无解.

2. (1) $\frac{1}{2}<x\leqslant 2$；　(2) 无解；　(3) $x<-\frac{1}{4}$；
   (4) $x\leqslant 1$；　(5) $x<-7$；　(6) 无解.

3. 由$\begin{cases}4(x-0.3)<0.5x+5.8,\\ 3+x>\frac{1}{2}x+1,\end{cases}$得$-4<x<2$. 于是 x 可取整数值为-3，-2，-1，0，1.

4. $x=3$ 或 $x=4$.

5. $x>2$.

6. 设有 x 名学生，则有 $(3x+8)$ 本书. 列不等式组，得$\begin{cases}3x+8\geqslant 5(x-1),\\ 3x+8<5(x-1)+3.\end{cases}$故 $x=6$，$3x+8=26$.

复习题 9

1. (1) $x>\frac{1}{3}$；　(2) $x\geqslant 3$；
   (3) $x>7$；　(4) $x\leqslant -\frac{3}{10}$.
   (数轴表示略).

2. (1) $a<2$；　(2) $a>2$；　(3) $a=2$.

3. (1) $-1<x<1$；　(2) $-3<x<-2$；　(3) $x<-\frac{3}{2}$；　(4) $x\leqslant 1$.

4. 不能. 因为$\begin{cases}\frac{x+3}{5}>2x+3,\\ \frac{x+3}{5}>1-x\end{cases}$无解.

5. 不对. 因为当 $a<0$ 时，就有 $a>2a$. 这时在这个不等式两边同除以 a，得 $1<2$.

6. (略).

7. 由$12(v-3)>10(v+3)$，解得 $v>33$.

8. 设一年前老张买了 x 只种兔，则 $x+2\leqslant\frac{2}{3}(2x-1)$，解得 $x\geqslant 8$.

9. 设这 3 个数分别为 $x-1$，x，$x+1$，x 为大于 1 的整数，则 $x-1+x+x+1<333$，解得 $x<111$. 故 $x=2$，3，4，…，110. 因此，这样的正整数有 109（即 110－1）组，其中最大的一组为 109，110，111.

Ⅳ 教学设计案例

9.1　不等式（第 2 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

不等式的性质.

2. 内容解析

本节课是在学生学习了等式的性质，掌握了一元一次方程解法的基础上，研究不等式的性质. 不等式的性质是解不等式的重要依据. 因此它是不等式解法的核心内容之一，是本章的基础.

通过类比等式性质，观察具体数值、归纳不等式的性质，既能让学生感受运算中的不变性，获得猜想，又能让学生从具体到抽象，用符号语言表述结论. 理解不等式性质，一是辨析，特别是不同于等式的性质；二是应用，即利用不等式的性质将不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，解简单的不等式.

基于以上分析，本节课的教学重点为：探索不等式的性质.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）探索并理解不等式的性质.

（2）体会探索过程中所应用的归纳和类比方法.

2. 目标解析

达到目标（1）的标志是：学生能通过观察、比较具体数字运算的大小，联系等式性质，归纳出不等式的性质. 面对变形后的式子，能利用不等式性质判断它们的大小.

达到目标（2）的标志是：学生能通过反思，总结探索过程，了解归纳和类比是获得数学发现的常用方法.

三、教学问题诊断分析

学生的认知基础有：第一，会比较数的大小；第二，理解等式性质并知道等式性质是解方程的依据；第三，知道不等式的概念；第四，具备“通过观察、操作并抽象概括等活动获得数学结论”

的经验，有一定的抽象概括能力和合情推理能力.

学生认知的主要障碍是：第一，探索不等式性质时，如何与等式性质进行类比，类比什么，思路不是很清晰；第二，探索不等式性质 2，3 时，由于学生思维的片面性，会产生考虑不到不等式两边乘或除以同一个负数的情况；第三，运用不等式性质时，由于已有知识经验产生的负迁移，学生不理解运用性质 3 时，为什么要改变不等号的方向，以及在不等式的等价变形时，什么时候要改变不等号的方向.

基于以上分析，本节课的教学难点为：不等式性质 3 的探索及其理解.

四、教学过程设计

1. 复习引入

教师引出本节课所学内容：在上一节课，我们学习了什么是不等式. 对于某些简单的不等式，我们可以直接想出它们的解集，但是对于比较复杂的不等式，例如$\frac{5x+1}{6}-2>\frac{x-5}{4}$，直接想出解集就比较困难. 因此，还要讨论怎样解不等式. 与解方程需要依据等式的性质一样，解不等式需要依据不等式的性质. 这节课我们先来看看不等式有什么性质.

问题 1　等式有哪些性质？你能分别用文字语言和符号语言表示吗？

师生活动：学生通过回忆回答问题，并由师生共同整理成表 1.

表 1

	文字语言	符号语言
性质 1	等式两边加（或减）同一个数（或式子），结果仍相等.	如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$，$a-c=b-c$.
性质 2	等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等.	如果 $a=b$，那么 $ac=bc$. 如果 $a=b$ $(c\neq0)$，那么$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

设计意图：本表由学生口述，教师逐条写在黑板上，保留至探究完不等式的性质，并将不等式的性质列于其旁. 对比表 1 中的等式性质，有利于学生探索发现和正确表达（文字语言和符号语言）不等式的性质.

2. 探究新知

问题 2　研究等式性质的基本思路是什么？

师生活动：学生各抒己见. 必要时，教师给予提示：等式的性质就是从加减乘除运算的角度研究运算的不变性.

设计意图：从学生已有的数学经验出发，建立新旧知识之间的联系，通过总结等式性质就是研究运算中的不变性，明确不等式性质的研究方向.

问题 3　为了研究不等式的性质，我们可以先从一些数字的运算开始. 用“$<$”或“$>$”完成下列两组填空，你能发现其中的规律吗？

(1) $5>3$，$5+2$ ____ $3+2$，$5+(-2)$ ____ $3+(-2)$，$5+0$ ____ $3+0$；

(2) $-1<3$，$-1+2$ ____ $3+2$，$-1+(-3)$ ____ $3+(-3)$，$-1+0$ ____ $3+0$.

师生活动：学生完成填空．教师引导学生类比等式性质 1，观察不等式加法运算中的不变性，即不等号的方向是否改变．由学生叙述发现的规律，并对比等式性质 1 进行修正．教师指出：减去一个数等于加这个数的相反数，所以不等式两边减同一个数（或式子）的情况可以转化为不等式两边加同一个数（或式子）的情况，从而获得猜想 1：当不等式两边加（或减）同一个数（或式子）时，不等号的方向不变．

追问：猜想 1 是否正确？如何验证？

师生活动：让学生各自列举不等式，选取一些数和式子，加以演算，对猜想 1 进行验证．教师从中选取一些典型例子进行展示，师生共同讨论、确认猜想 1 的正确性，从而获得一般性的结论．即不等式的性质 1：不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变．

设计意图：研究运算中的不变性，首先研究加法运算．让学生通过比较具体数字加一个正数、负数、0 之后的大小，观察不等号的变化，发现并归纳其中的规律，从而提出猜想．然后，让学生自己从所加（减）数字分别取正数、负数、0 的不同情况入手分析，通过举例验证，确认猜想 1，从而获得不等式的性质 1．但值得注意的是，举例验证虽是确认猜想的一种方法，但结论的正确与否仍需要严格证明．

问题 4　类似等式性质的符号语言表示，你能把不等式的性质 1 用符号语言表示吗？

师生活动：学生将文字语言转化为符号语言，教师在表 1 旁边画一个与表 1 类似的表格并将结论填写在表格中．

设计意图：用符号语言表示不等式的性质，让学生体会用字母表示数的优越性，发展学生文字语言与符号语言相互转化的能力．

问题 5　研究完不等式两边加（或减）同一个数（或式子）的情况，对比等式性质，下面我们要研究什么问题？如何研究？

师生活动：学生回答，教师修正，明确研究方向：不等式两边乘（或除以）同一个数的情况．师生先考虑不等式两边乘 0 的特殊情况，教师再指出，除数不能为 0，因而下面分不等式两边乘（或除以）同一个正数和同一个负数两种情况讨论．教师给出以下两组例子，让学生进行研究．

用“$<$”或“$>$”填空，并总结其中的规律：

(1) $6>2$，6×5 ____ 2×5，$6\times(-5)$ ____ $2\times(-5)$；

(2) $-2<3$，$(-2)\times6$ ____ 3×6，$(-2)\times(-6)$ ____ $3\times(-6)$．

学生完成填空．教师引导学生类比等式性质 2，观察不等式乘法运算中的不变性，即不等号的方向是否改变．由学生叙述发现的规律，并对比等式性质 2 进行修正．教师指出：除以一个数等于乘这个数的倒数，所以不等式两边除以同一个数的情况可以转化为不等式两边乘同一个数的情况，从而获得猜想 2：不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变，和猜想 3：不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．

让学生各自列举不等式，选取一些数和式子，加以演算，对猜想 2，3 进行验证．教师从中选取一些典型例子进行展示，师生共同讨论，确认猜想 2，3 的正确性，从而获得一般性的结论，即不等式的性质 2，3，并将其符号表示填写在表格中．

（性质 2　不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变．性质 3　不等式两边乘

（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.）

设计意图：不等式性质 2，3 完全放手给学生自主探索，让学生类比等式的性质 2 和不等式性质 1 的研究过程，经历猜测、验证、纠错、归纳、完善的思考过程. 教师要及时发现学生自主探索中的问题，并组织学生共同讨论典型问题，突破难点.

问题 6 等式性质与不等式性质的主要区别是什么？

师生活动：师生共同总结，以表格形式归纳. 此表格（表 2）的生成是在上课过程中逐条适时添入，呈现在黑板上，而非以 PPT 形式一次给出.

表 2

<table>
<tr><th colspan="3">等式性质</th><th colspan="3">不等式性质</th></tr>
<tr><th></th><th>文字语言</th><th>符号语言</th><th></th><th>文字语言</th><th>符号语言</th></tr>
<tr><td>性质 1</td><td>等式两边加（或减）同一个数（或式子），结果仍相等.</td><td>如果 $a=b$，
那么 $a+c=b+c$，
$a-c=b-c$</td><td>性质 1</td><td>不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变.</td><td>如果 $a>b$，
那么 $a+c>b+c$，
$a-c>b-c$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">性质 2</td><td rowspan="2">等式两边乘同一个数，或除以同一个不为 0 的数，结果仍相等.</td><td rowspan="2">如果 $a=b$，
那么 $ac=bc$.
如果 $a=b$ $(c\neq 0)$，
那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.</td><td>性质 2</td><td>不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变.</td><td>如果 $a>b$，$c>0$，
那么 $ac>bc$，
（或 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$）.</td></tr>
<tr><td>性质 3</td><td>不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.</td><td>如果 $a>b$，$c<0$.
那么 $ac<bc$，
（或 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$）.</td></tr>
</table>

设计意图：引导学生再次将等式性质与不等式性质进行对比. 通过表格让学生对比它们的相同点与不同点，有利于学生更好地掌握不等式的性质.

3. **运用新知**

例 1 设 $a>b$，用“$<$”或“$>$”填空，并说明依据不等式的哪条性质：

（1）$3a$ ____ $3b$；（2）$a-8$ ____ $b-8$；（3）$-2a$ ____ $-2b$；

（4）$\frac{a}{2}$ ____ $\frac{b}{2}$；（5）$-3.5b+1$ ____ $-3.5a+1$.

师生活动：学生依据不等式的性质对不等式 $a>b$ 进行变形，得到结果.

例 2 若 $a>b$，则下列不等式中，成立的是（　　）.

（A）$a-6<b-6$　（B）$-3a>-3b$　（C）$\frac{a}{-2}<\frac{b}{-2}$　（D）$-a-1>-b-1$

师生活动：学生选出答案，教师追问理由，展开讨论.

练习 设 $m>n$，用“$>$”或“$<$”填空：

（1）$m-5$ ____ $n-5$；（2）$2m-5$ ____ $2n-5$；（3）$-3.5m+5$ ____ $-3.5n+5$.

设计意图：由浅入深的练习帮助学生进一步理解不等式的性质，为下节课利用不等式性质解不

等式作准备.

4. **归纳总结**

师生共同总结本节课内容，并请学生回答下列问题：

(1) 不等式的性质是什么？不等式性质与等式性质的联系与区别是什么？

(2) 在研究不等式性质的基本过程中运用了哪些数学思想方法？

设计意图：引导学生对本节课知识进行梳理，使学生掌握不等式的性质.

5. **布置作业**

必做：教科书习题 9.1 第 4，6 题.

选做：(1) 教科书复习题 9 第 5 题. (2) 比较 $-a$ 与 $-2a$ 的大小.

五、目标检测设计

1. 用“$>$”或“$<$”填空：

(1) 如果 $a>b$，那么 $a\pm c$ ____ $b\pm c$；

(2) 如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 ac ____ bc；

(3) 如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $\frac{a}{c}$ ____ $\frac{b}{c}$.

设计意图：本题主要考查学生对不等式性质的符号表示的掌握.

2. 若 $a>b$，则下列不等式中不成立的是（　　）.

(A) $a-3>b-3$　　(B) $-3a>-3b$　　(C) $\frac{a}{3}>\frac{b}{3}$　　(D) $-a<-b$

设计意图：本题主要考查学生是否会利用不等式性质对不等式进行简单变形.

3. 按下列要求，写出仍能成立的不等式：

(1) $x+2>-6$，两边都减去 2，得________；

(2) $x+5<0$，两边都加上 -5，得________；

(3) $\frac{3}{5}m>2$，两边都除以 $\frac{3}{5}$，得________；

(4) $-\frac{7}{8}x\geqslant 1$，两边都乘 $-\frac{8}{7}$，得________.

设计意图：本题主要考查学生对不等式性质的掌握.

9.2　一元一次不等式（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. **内容**

一元一次不等式的概念及解法.

2. **内容解析**

在初中阶段，不等式位于一次方程（组）之后，它是进一步探究现实世界数量关系的重要内容. 不等式的研究从最简单的一元一次不等式开始，一元一次不等式及其相关概念是本章的基础知

识. 解任何一个代数不等式（组）最终都要化归为解一元一次不等式，因而解一元一次不等式是一项基本技能. 另外，不等式解集的数轴表示从形的角度描述了不等式的解集，并为解不等式组做了准备. 本节内容是进一步学习其他不等式（组）的基础.

解一元一次不等式与解一元一次方程在本质上是相同的，即依据不等式的性质，逐步将不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，从而确定未知数的取值范围. 这一化繁为简的过程充分体现了化归的思想.

基于以上分析，本节课的教学重点为：一元一次不等式的解法.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）了解一元一次不等式的概念，掌握一元一次不等式的解法.

（2）在依据不等式的性质探究一元一次不等式解法过程中，加深对化归思想的体会.

2. 目标解析

达到目标（1）的标志是：学生能说出一元一次不等式的特征，会解一元一次不等式，并能在数轴上表示出解集.

达到目标（2）的标志是：学生能通过类比解一元一次方程的过程，获得解一元一次不等式的思路，即依据不等式的性质，将一元一次不等式逐步化简为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式. 学生能借助具体例子，将化归思想具体化，获得解一元一次不等式的步骤.

三、教学问题诊断分析

通过前面的学习，学生已掌握一元一次方程概念及解法，对解一元一次方程中的化归思想有所体会但还不够深刻. 因此，运用化归思想把形式较复杂的不等式转化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，对学生有一定难度. 所以，教师需引导学生类比解一元一次方程的步骤，分析形式较复杂的一元一次不等式的结构特征，并与化简目标进行比较，逐步将不等式变形为最简形式.

本节课的教学难点为：解一元一次不等式步骤的确立.

四、教学过程设计

1. 引入概念

问题 1 观察下面的不等式，它们有哪些共同特征？

$$x-7>26，3x<2x+1，\frac{2}{3}x>50，-4x>3.$$

师生活动：学生回答. 教师可以引导学生从不等式中未知数的个数和次数两个方面去观察不等式的特点，并与一元一次方程的定义类比. 师生共同归纳获得：含有一个未知数，未知数次数是 1 的不等式，叫做一元一次不等式.

设计意图：引导学生通过观察给出的不等式，归纳出它们的共同特征，进而得到一元一次不等式的定义. 培养学生观察、归纳的能力.

2. **研究解法**

练习　利用不等式的性质解不等式：$x-7>26$.

师生活动：学生完成练习，板书如下：

解：根据不等式的性质 1，不等式的两边加 7，不等号的方向不变，所以

$$x-7+7>26+7.$$

$$x>33.$$

教师结合以上解题过程，指出：由 $x-7>26$ 可得到 $x>26+7$，也就是说解不等式和解方程一样，也可以“移项”，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不改变不等号的方向.

设计意图：通过解简单的一元一次不等式，让学生回忆利用不等式的性质解不等式的过程. 教师通过简化练习中的解题步骤，让学生明确解不等式和解方程一样可以“移项”，为下面类比解方程形成解不等式的步骤作好准备.

问题 2　解一元一次方程的依据和一般步骤，对你解一元一次不等式有什么启发？

师生活动：学生回忆，解一元一次方程的依据是等式的性质，一般步骤是：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1. 接着，学生思考解一元一次不等式是否可以采用类似的步骤. 教师指出，利用不等式的性质，采取与解一元一次方程类似的步骤，就可以求出一元一次不等式的解集.

设计意图：通过回忆解一元一次方程的依据和一般步骤，让学生思考解一元一次不等式能否采用同样的步骤，从而获得解一元一次不等式的思路.

例　解下列不等式，并在数轴上表示解集：

（1）$2(1+x)<3$；　　（2）$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$.

师生活动：学生在教师问题的引导下，思考如何将两个具体的一元一次不等式变形为最简形式.

追问（1）：解一元一次不等式的目标是什么？

师生活动：学生回答，解一元一次不等式的目标是将一元一次不等式变形为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式.

追问（2）：你能类比解一元一次方程的步骤，解第（1）小题吗？

师生活动：师生共同解第（1）小题.

追问（3）：对比不等式$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$与 $2(1+x)<3$ 的两边，它们在形式上有什么不同？

师生活动：学生回答，不等式$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$含有分母.

追问（4）：怎样将不等式$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$变形，使变形后的不等式不含分母？

师生活动：师生共同去分母，解第（2）小题.

追问（5）：你能说出解一元一次不等式的基本步骤吗？

师生活动：学生回答，教师总结：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1.

追问（6）：对比第（1）小题和第（2）小题的解题过程，系数化为 1 时应注意些什么？

师生活动：学生回答，教师指出：要看未知数系数的符号. 若未知数的系数是正数，则不等号的方向不变；若未知数系数是负数，则不等号的方向要改变.

设计意图：通过解具体的一元一次不等式，引导学生明确解不等式的目标后，以化归思想为指导，比较原不等式与目标形式（$x>a$ 或 $x<a$）的差异，思考如何依据不等式的性质将原不等式通过变形转化为最简形式，以获得解一元一次不等式的步骤.

问题 3 解一元一次不等式每一步变形的依据是什么？

师生活动：学生总结出解一元一次不等式的基本步骤是：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1. 教师引导学生结合例题的解题过程思考每一步变形的依据.

（去分母的依据是不等式的性质 2，去括号的依据是去括号法则，移项的依据是不等式的性质 1，合并同类项的依据是合并同类项法则，系数化为 1 的依据是不等式的性质 2 或 3.）

设计意图：通过具体的操作，归纳出解一元一次不等式的基本步骤及每一步变形的依据，提高学生的总结、归纳能力.

问题 4 解一元一次不等式和解一元一次方程有哪些相同和不同之处？

师生活动：学生在教师的引导下将解一元一次不等式的过程与解一元一次方程的过程进行比较，思考二者的相同与不同之处.

解一元一次不等式和解一元一次方程的相同之处是：

（1）基本步骤相同：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1.

（2）基本思想相同：都是运用化归思想，将一元一次方程或一元一次不等式变形为最简形式.

不同之处是：

（1）解法依据不同：解一元一次不等式的依据是不等式的性质，解一元一次方程的依据是等式的性质.

（2）最简形式不同，一元一次不等式的最简形式是 $x>a$ 或 $x<a$，一元一次方程的最简形式是 $x=a$.

设计意图：在归纳出一元一次不等式的解法之后，引导学生对比一元一次不等式与一元一次方程的解法，思考二者的相同与不同之处，加深对一元一次不等式解法的理解，体会化归思想和类比思想.

练习 解一元一次不等式 $\frac{4}{5}x\geqslant3+\frac{x-2}{2}$，并把它的解集在数轴上表示出来.

师生活动：学生解不等式.

设计意图：学生独立按照解一元一次不等式的步骤解不等式.

3. 归纳总结

教师与学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答以下问题：

（1）怎样解一元一次不等式？解一元一次不等式和解一元一次方程有哪些相同和不同之处？

（2）解一元一次不等式运用了哪些数学思想？

设计意图：通过问题引导学生再次回顾本节课，从数学知识、数学思想方法等层面，提升对本节课所研究内容的认识.

4. **布置作业**

教科书习题 9.2 第 1，2，3 题.

五、目标检测设计

1. 解下列不等式.

（1）$-8x<2$；（2）$-\frac{1}{3}x\geqslant-\frac{5}{6}$；（3）$3x-7\geqslant4x-4$.

设计意图：本题主要考查学生解一元一次不等式时将系数化 1 和移项的准确性.

2. 解下列不等式，并分别把它们的解集在数轴上表示.

（1）$3(x+2)-1\geqslant5-2(x-2)$；　　（2）$\frac{x-1}{3}-\frac{x+4}{2}>-2$.

设计意图：本题主要考查学生解一元一次不等式，并在数轴上表示解集的能力.

9.2　一元一次不等式（第 3 课时）

一、内容和内容解析

1. **内容**

利用一元一次不等式解决具有不等关系的实际问题.

2. **内容解析**

不等关系和相等关系都是客观世界中量与量之间最基本的数学关系．因此，不等式与方程一样，都是解决数学问题的重要工具，在数学研究和解决实际问题中起着同样重要的作用．本节重点是利用不等式来描述和刻画现实世界中的不等关系.

本节内容的关键是从实际问题中抽象出数量关系，并通过对数量关系的分析，找出其中的不等关系，引导学生完成抽象过程（从实际问题到数学问题），建立数学模型（列出不等式）进行讨论求解，再将数学问题转化为实际问题进行解答.

本节课的教学重点是：分析实际问题中的不等关系列出一元一次不等式.

二、目标和目标解析

1. **目标**

能从实际问题中抽象出数学问题，根据数量关系建立一元一次不等式进行求解，体会数学建模的思想.

2. **目标解析**

达到目标的标志是，学生能够在原有知识的基础上学习建立一元一次不等式的数学模型来解决实际问题．一是抽象，即从实际问题到数学问题，找出数量关系，明确数量中的不等关系；二是建立一元一次不等式的数学模型，把实际问题转化为数学问题进行求解．在此过程中，学生能够继续积累利用一元一次不等式解决实际问题的经验.

三、教学问题诊断分析

在前面所学的知识中，学生已掌握如何求不等式的解．作为七年级的学生对于用不等关系建立数学模型来解决实际问题，容易出现的认知困难主要是：如何从实际问题出发，抽象出隐含在实际问题中的数量关系，找出数量关系中的不等关系，列一元一次不等式；在解决此类实际问题时，需要分类讨论的思想．

本节课的教学难点是：如何从实际问题抽象出不等关系，建立不等式模型进行求解．

四、教学过程设计

教师引出本节课内容：前面我们结合实际问题，讨论了如何列一元一次不等式，还学习了解一元一次不等式的方法．在本节课上，我们将进一步探究如何用一元一次不等式解决生活中的一些实际问题．在现实生活中我们天天都面临着各种选择，今天我们来讨论生活中最常见的购物问题．

1. 问题探究

甲、乙两商场以同样的价格出售同样的商品，并且又各自推出不同的优惠方案：在甲商场累计购物超过 100 元后，超出 100 元的部分按 90%收费；在乙商场累计购物超过 50 元后，超过 50 元的部分按 95%收费．顾客到哪家商场购物花费少？

问题 1　你是如何理解题意的呢？

师生活动：学生先独立思考，理解题意，然后自由发表自己的观点．

设计意图：设置此问题，为了使学生能够主动思考问题．

问题 2　如果购物款累计达到 x 元，你能用含 x 的式子分别表示顾客在两家商场花费的钱数吗？

师生活动：学生回答，教师不断引导并完善．

设计意图：让学生在列式子的时候发现，由于优惠起点的不同，需要进行分类讨论，每种情况下有各自对应的式子．

问题 3　你能清楚直观地表示出上述问题吗？

师生活动：引导学生利用表格表示出来，并让学生在黑板上绘制表格．

设购物款累计达到 x 元．

购物款	在甲商场花费	在乙商场花费
$0<x\leqslant 50$	x	x
$50<x\leqslant 100$	x	$50+0.95(x-50)$
$x>100$	$100+0.9(x-100)$	$50+0.95(x-50)$

设计意图：让学生自己寻找方法，呈现出所表达的意思，培养学生的思维能力．

问题 4　你能从表格中看出哪家商场花费少吗？

师生活动：学生探究、交流，补全表格．

购物款	在甲商场花费	在乙商场花费	比较
$0<x\leqslant50$	x	x	一样
$50<x\leqslant100$	x	$50+0.95(x-50)$	乙商场
$x>100$	$100+0.9(x-100)$	$50+0.95(x-50)$	?

师生共同分析讨论，发现：

(1) 如果累计购物不超过 50 元，则在两家商场购物花费是一样的；

(2) 如果累计购物超过 50 元但不超过 100 元，则在乙商场购物花费少.

设计意图：根据表格比较出当购物款不超过 100 元，到哪家商场购物花费少.

问题 5 如果累计购物超过 100 元，在两家商场的花费情况如何?

师生活动：在学生充分发表意见的基础上，师生共同归纳出当购物超过 100 元时，需要分三种情况进行讨论：

(1) 什么情况下，到甲商场购物花费少?

(2) 什么情况下，到乙商场购物花费少?

(3) 什么情况下，到两商场购物花费一样?

学生分小组讨论、交流，教师指导．学生自己总结：

当 $x>100$ 时，若在甲商场购物花费少，则 $100+0.9(x-100)<50+0.95(x-50)$，解得 $x>150$；若在乙商场购物花费少，则 $100+0.9(x-100)>50+0.95(x-50)$，解得 $x<150$；若在两家商场购物花费一样，则 $100+0.9(x-100)=50+0.95(x-50)$，解得 $x=150$．这就是说当累计购物超过 150 元时，在甲商场购物花费少，而累计购物超过 100 元但不超过 150 元时，在乙商场购物花费少，累计购物刚好是 150 元时，在两家商场购物花费一样.

教师在黑板上完善表格.

<table>
<tr><th colspan="2">购物款</th><th>在甲商场花费</th><th>在乙商场花费</th><th>比较</th></tr>
<tr><td colspan="2">$0<x\leqslant50$</td><td>x</td><td>x</td><td>一样</td></tr>
<tr><td colspan="2">$50<x\leqslant100$</td><td>x</td><td>$50+0.95(x-50)$</td><td>乙商场</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$x>100$</td><td>$100<x<150$</td><td rowspan="3">$100+0.9(x-100)$</td><td rowspan="3">$50+0.95(x-50)$</td><td>乙商场</td></tr>
<tr><td>$x=150$</td><td>一样</td></tr>
<tr><td>$x>150$</td><td>甲商场</td></tr>
</table>

设计意图：学生从实际问题中抽象出数学问题，找出数量关系中的不等关系，用不等式来解决实际问题，让学生体会建立不等式模型的过程．教师及时予以引导、归纳和总结，展现完整的解答过程．培养学生有条理地思考和表达的习惯.

问题 6 你能综合上面分析，给出一个合理化的消费方案吗?

师生活动：学生回答：购物不超过 50 元和刚好是 150 元时，在两家商场购物，花费没有区别；超过 50 元而不到 150 元时，在乙商场购物花费少；超过 150 元后，在甲商场购物花费少.

设计意图：学生能够将数学问题的解转化为实际问题的解.

2. **归纳总结**

教师与学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 利用不等式来解决实际问题的步骤是什么？

(2) 用一元一次不等式解决实际问题时，最关键是哪一步？

(3) 用不等式解决实际问题与用方程解决实际问题，有什么相同和不同之处？

设计意图：通过问题归纳，总结本节课所学内容.

思考题

本周末老师组织全班同学参观蜡像馆，蜡像馆的门票是每人 20 元，60 人以上（含 60 人）可按团体票购买，八折优惠. 若全班共 50 名师生去参观，如何购买，花费最少呢？若人数少于 60 人时，多少人买 60 人的团体票比买普通票花费少呢？

设计意图：让学生再次练习，由实际问题中的不等关系列出不等式，建立数学模型，解不等式得到实际问题的答案，加深印象.

3. **布置作业**

教科书习题 9.2 第 7，8，9 题.

补充题　某校需要刻录一批电脑光盘. 若到电脑公司刻录，每张需要 8 元（包括空白光盘费）；若学校自己刻录，除租用刻录机需要 120 元外，每张还需要成本 4 元（包括空白光盘费）. 那么，刻录这批光盘到电脑公司刻录费用花费少，还是学校自己刻录花费少？

五、目标检测

1. 小颖准备用 21 元买笔和笔记本. 已知每支笔 3 元，每个笔记本 2.2 元. 她买了 2 个笔记本，请你帮她算一算，她还可以买几支笔？

设计意图：本题主要考查学生建立一元一次不等式模型解决实际问题的能力.

2. 某通讯公司升级了两种通讯业务：“A 业务”使用者先缴 15 元月租费，然后每通话 1 分，付话费 0.2 元；“B 业务”不缴月租费，每通话 1 分，付话费 0.3 元. 你觉得选哪种业务更优惠？

设计意图：本题主要考查学生建立一元一次不等式模型解决实际问题的能力.

V 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. **不等号的由来**

现实世界中存在着大量的不等关系，如何用符号来表示呢？为了寻求一套表示“大于”或“小于”的符号，1631 年，英国数学家哈里奥特（Thomas Harriot）首先采用符号“>”表示“大于”，“<”表示“小于”，这就是现在通用的大于号和小于号. 但当时它们的使用并没有被数学界所接受，直到 100 多年后“>”和“<”才逐渐成为标准的应用符号. 与哈里奥特同时代的数学家

们也创造了一些表示大小关系的符号，但都因书写起来十分繁琐而被淘汰.

后来，人们在表达不等关系时，在许多情况下，要用到一个数（或量）大于或等于另一个数（或量），此时就把“$>$”和“$=$”结合起来得到符号“$\geqslant$”，读做“大于或等于”，有时也称为“不小于”. 同样，把符号“$\leqslant$”读做“小于或等于”，有时也称为“不大于”. 根据德国数学家哥德巴赫在 1734 年 1 月写给欧拉的信中所述，“$\geqslant$”和“$\leqslant$”这两个符号是由法国数学家布盖（Pierre）首先采用的，后来逐渐流传下来.

因此，有人把 $a>b$，$b<a$ 这样的不等式叫做严格不等式，把形如 $a\geqslant b$，$b\leqslant a$ 的不等式叫做不严格不等式.

2. 关于符号“$\geqslant$”和“$\leqslant$”

符号“$\geqslant$”读作“大于或等于”，而“$\leqslant$”读作“小于或等于”.

如果 a，b 是两个确定的数（或者说，a，b 是常数），那么 $a\geqslant b$ 表示“$a>b$”“$a=b$”有且仅有一个成立. 因此 $3\geqslant3$ 和 $3\geqslant2$ 都是正确的.

同样地，如果 a，b 是两个确定的数（或者说，a，b 是常数），那么 $a\leqslant b$ 表示“$a<b$”“$a=b$”有且仅有一个成立，因此 $3\leqslant3$ 和 $3\leqslant4$ 都是正确的.

如果 x 是变数，a 是确定的数（或者说，a 是常数），那么 $x\geqslant a$ 表示 x 既可以取到 a，也可以取得大于 a 的值. 例如，$x\geqslant3$，表示 x 可以取 3 和大于 3 的所有值.

同样地，如果 x 是变数，a 是确定的数（或者说，a 是常数），那么 $x\leqslant a$ 表示 x 既可以取到 a，也可以取得小于 a 的值. 例如，$x\leqslant3$，表示 x 可以取 3 和小于 3 的所有值.

3. 数学中的大小

在一个数集 M 中，规定了一个关系，记作“$>$”. 若“$>$”满足：

(1)（三歧性）对于数集 M 中的任何 2 个数 a，b，有且仅有 $a>b$，$b>a$，$a=b$ 之一成立；

(2)（传递性）对于数集 M 中的任何 3 个数 a，b，c，如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$；

(3)（加法单调性）对于数集 M 中的任何 3 个数 a，b，c，如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$；

(4)（乘法单调性）对于数集 M 中的任何 3 个数 a，b，c，如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $a\times c>b\times c$；

则称关系“$>$”为“大于”.

我们之所以说实数有大小，就是因为在实数集中能够规定一个关系，同时满足上述四条性质. 而我们之所以说复数没有大小，就是因为在复数集中不能规定一个关系，同时满足上述四条性质. 或者说，规定了一个关系同时满足上述四条性质，在复数集中就会导致矛盾.

4. 不等式的性质

教科书中的不等式性质 1 与性质 2，实际上是“大于”概念的内涵的一部分（如上所述，分别是加法单调性和乘法单调性）. 而性质 3 是可以由性质 1 与性质 2 证明的：

因为 $c<0$，所以 $-c>0$.

由性质 2，有 $a\times(-c)>b\times(-c)$，即 $-a\times c>-b\times c$.

再由性质 1，上式两边都加上 $a\times c+b\times c$，得

$$-a\times c+a\times c+b\times c>-b\times c+a\times c+b\times c.$$

化简，得 $b\times c>a\times c$.

即 $a\times c<b\times c$.

二、拓展性问题

1. 比较大小的两种方法

(1) 用求差法比较$\frac{1}{2}(x^2-y^2+3)$与$\frac{1}{3}(x^2-2y^2+2)$的大小.

答案：根据“$a-b>0\Leftrightarrow a>b$”“$a-b=0\Leftrightarrow a=b$”“$a-b<0\Leftrightarrow a<b$”，要比较甲式与乙式的大小，只要判断出“甲式－乙式”所得的差在字母取值范围内与 0 的大小关系即可.

因为$\frac{1}{2}(x^2-y^2+3)-\frac{1}{3}(x^2-2y^2+2)$

$=\frac{1}{6}(3x^2-3y^2+9)-\frac{1}{6}(2x^2-4y^2+4)$

$=\frac{1}{6}(3x^2-3y^2+9-2x^2+4y^2-4)$

$=\frac{1}{6}(x^2+y^2+5)>0$,

所以$\frac{1}{2}(x^2-y^2+3)>\frac{1}{3}(x^2-2y^2+2)$.

(2) 用比商法比较$\frac{a}{5}$与$\frac{2a+1}{10}$ $(a>0)$ 的大小.

答案：根据“若 $a>0$，$b>0$，则 $a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}>1$”“若 $a<0$，$b<0$，则 $a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}<1$”，要比较甲式与乙式的大小，只要判断出“$\frac{\text{甲式}}{\text{乙式}}$”所得的商式在字母取值范围内与 1 的大小关系即可. 值得注意的是，用比商法时，要考虑两式的取值范围.

因为 $a>0$，所以$\frac{a}{5}>0$，$\frac{2a+1}{10}>0$.

因为$\frac{a}{5}\div\frac{2a+1}{10}=\frac{a}{5}\times\frac{10}{2a+1}=\frac{2a}{2a+1}<1$，所以$\frac{a}{5}<\frac{2a+1}{10}$.

2. 糖水加糖有点甜

众所周知，在糖水中加糖，糖水会变得更甜. 如何用数学知识解释这一现象呢？

答案：不妨设糖水中糖的质量与糖水的质量的比为$\frac{a}{b}$ $(b>a>0)$，在其中加入糖 m，此时糖水中糖的质量与糖水的质量的比变为$\frac{a+m}{b+m}$. 因为$\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}=\frac{m(a-b)}{b(b+m)}<0$，所以$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$. 这说明加糖后，糖水中糖的质量与糖水的质量的比变大，因此糖水变甜了.

从数学上看，“糖水加糖就更甜”就是：当 $b>a>0$，$m>0$ 时，$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$. 当 $a>b>0$，$m>0$ 时，可以证明$\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}$.

3. **体育比赛中的不等式**

对体育比赛结果的分析，经常要考虑到问题中的不等关系．例如下面的问题：

一个篮球队共打了 14 场比赛，其中赢的场数比平的场数和输的场数都要少，那么这个篮球队最多赢了几场球？

答案：设这个篮球队在 14 场比赛中赢 x 场，平 y 场，输 z 场，则$\begin{cases} x+y+z=14, \\ x<y, \\ x<z. \end{cases}$ 于是 $x+y+z>x+x+x$，所以 $3x<14$，即 $x<\dfrac{14}{3}$. 因为 x 为正整数，只能取 1，2，3，4，所以 x 的最大值为 4. 因此，这个篮球队最多赢了 4 场球．

4. **园林门票购买问题**

某园林的门票每张 10 元，一次性使用．考虑到人们的不同需求，也为了吸引更多的游客，该园林除保留原来的售票方法外，还推出了一种“购买个人年票”（个人年票从购买日起，可供持票者使用一年）的售票方法．年票分 A，B，C 三类：A 类年票每张 120 元，持票者进入园林时，无需再购买门票；B 类年票每张 60 元，持票者进入该园林时，需再购买门票，每次 2 元；C 类年票每张 40 元，持票者进入该园林时，需再购买门票，每次 3 元．

（1）如果只能选择一种购买门票的方式，并且计划在一年中花费 80 元在该园林的门票上，通过计算，找出可进入该园林次数最多的方式；

（2）一年中进入该园林超过多少次时，购买 A 类年票比较合算？

答案：（1）不可能选 A 年票．若选 B 类年票，则$\dfrac{80-60}{2}=10$（次）；若选 C 类年票，则$\dfrac{80-40}{3}=13\dfrac{1}{3}$（次）；若不购买年票，则$\dfrac{80}{10}=8$（次）．所以，若计划花费 80 元在该园林的门票上时，则选择购买 C 类年票进入园林的次数最多，为 13 次．

（2）设超过 x 次时，购买 A 类年票比较合算，则$\begin{cases} 60+2x>120, \\ 40+3x>120, \\ 10x>120. \end{cases}$解得 $x>30$. 因此，一年中进入该园林超过 30 次时，购买 A 类年票比较合算．

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容有：一元一次不等式（组）的概念，不等式的性质，一元一次不等式（组）的解法及其应用．对于不等式的性质，主要考查学生能否正确判断不等号的方向，特别是不等式两边乘或除以同一个负数时，不等号的方向改变．对于一元一次不等式的解法，主要考查学生能否根

据具体不等式，选择恰当的步骤获得解集，能否用数轴正确表示解集．对于一元一次不等式的应用，主要考查学生能否从实际问题中找出不等关系，并设合理的未知数、列不等式，从而把实际问题转化为数学问题．对于一元一次不等式组，主要考查学生能否用数轴确定不等式组的解集．

2. 考查不等式的解法及应用时应注意以下问题：

（1）对于一元一次不等式的解法，应考查学生是否能根据解一元一次不等式的一般步骤，针对具体不等式的特点，通过变形将不等式逐步化简，最后化归为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式．

（2）对于列一元一次不等式解决实际问题，要特别关注对从实际问题中分析出不等关系，把实际问题转化为数学问题，建立不等式模型的能力的考查．

3. 除了基本的试题测试以外，可设计一些具有开放性和探究性的问题，考查学生学习和应用不等式的过程，如发现和提出问题的能力等．

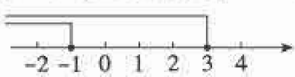
二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

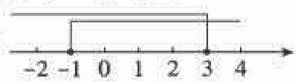
（一）选择题（每小题 6 分，共 36 分）

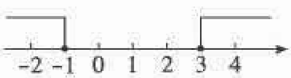
1. 若 $a<b$，则下列不等式中正确的是（　　）．

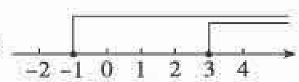
（A）$a-3<b-3$　　（B）$a-b>0$　　（C）$\frac{1}{3}a>\frac{1}{3}b$　　（D）$-2a<-2b$

2. 若不等式组的解集为 $-1\leqslant x\leqslant 3$．则以下数轴表示中正确的是（　　）．

（A）

（B）

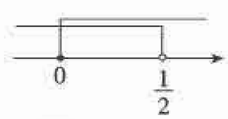
（C）

（D）

3. 不等式 $4(x-1)<3x-2$ 的正整数解的个数是（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

4. 一个不等式组中的两个不等式的解集如图所示，则这个不等式组的解集为（　　）．



（第 4 题）

（A）$0<x\leqslant\frac{1}{2}$　　（B）$x\leqslant\frac{1}{2}$

（C）$0\leqslant x<\frac{1}{2}$　　（D）$x>0$

5. 如果点 $P(m,\ 1-2m)$ 在第四象限，那么 m 的取值范围是（　　）．

（A）$0<m<\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{1}{2}<m<0$　　（C）$m<0$　　（D）$m>\frac{1}{2}$

6. 如果 $|x-2|=x-2$，那么 x 的取值范围是（　　）．

（A）$x\leqslant 2$　　（B）$x\geqslant 2$　　（C）$x<2$　　（D）$x>2$

（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. x 的 $\frac{1}{2}$ 与 5 的差不小于 3，用不等式表示为________．

8. 某饮料瓶上有这样的字样“保质期 18 个月”．如果用 x（单位：月）表示保质期，那么该饮

料的保质期可以用不等式表示为______________.

9. 当 x ________时，式子 $3x-5$ 的值大于 $5x+3$ 的值.

10. 商店为了对某种商品促销，将定价为 3 元的商品，以下列方式优惠销售：若购买不超过 5 件，按原价付款；若一次性购买 5 件以上，超过部分打八折. 现有 27 元钱，最多可以购买该商品的件数是__________.

（三）**解答题**（第 11，12 题每题 10 分，第 13 题 20 分，共 40 分）

11. （1）解不等式$\dfrac{1-x}{3}\leqslant\dfrac{1-2x}{7}$，并在数轴上表示它的解集；

（2）解不等式组$\begin{cases}5x-1>3(x+1),\\ \dfrac{1}{2}x-1\leqslant 7-\dfrac{3}{2}x.\end{cases}$

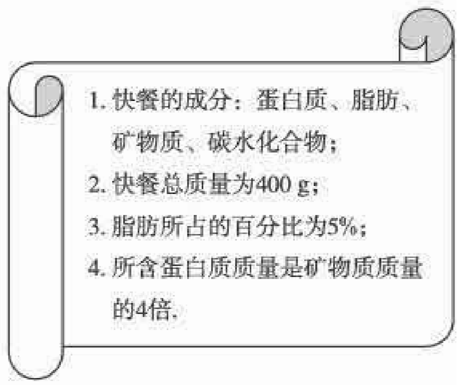
12. x 为何值时，代数式$\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{5x+1}{2}-1$ 的值是非负数?

13. 每年的 5 月 20 日是中国学生营养日，某校社会实践小组在这天开展活动，调查快餐营养情况. 他们从食品安全监督部门获取了一份快餐的信息（如图）. 根据此信息，解答下列问题：

（1）求这份快餐中所含脂肪质量；

（2）若碳水化合物占快餐总质量的 40%，求这份快餐所含蛋白质的质量；

（3）若这份快餐中蛋白质和碳水化合物所占百分比的和不高于 85%，求其中所含碳水化合物质量的最大值.



（第 13 题）

参考答案

1. A. 本题主要考查学生对不等式性质的掌握.
2. B. 本题主要考查学生对不等式组解集的数轴表示的掌握.
3. B. 本题主要考查学生解一元一次不等式及由解集中选出符合要求的解的能力.
4. C. 本题主要考查学生由数轴确定不等式组解集的能力.
5. D. 本题主要考查学生利用平面直角坐标系中点的坐标特征列不等式组及解不等式组的能力.
6. B. 本题主要考查学生利用绝对值的定义列不等式及解不等式的能力.
7. $\dfrac{1}{2}x-5\geqslant 3$. 本题主要考查学生根据数学关系列不等式的能力.
8. $x<18$. 本题主要考查学生根据实际问题情境列不等式的能力.
9. $x<-4$. 本题主要考查学生根据式子间的关系列不等式及解不等式的能力.
10. 10. 本题主要考查学生用不等式解决实际问题的能力.
11. （1）$x\geqslant 4$. 本题主要考查学生解不等式及在数轴上表示不等式解集的能力.

（2）$2<x\leqslant 4$. 本题主要考查学生解不等式组的能力.

12. $x \leqslant -1$. 本题主要考查学生列不等式及解不等式的能力.

13. (1) 20 g. (2) 176 g. 提示：设所含矿物质的质量为 x g，由题意得 $x+4x+20+400\times40\%=400$，解得 $x=44$，故 $4x=176$. (3) 180 g. 提示：设所含矿物质的质量为 y g，则所含碳水化合物的质量为$(380-5y)$g，于是有$4y+(380-5y)\leqslant400\times85\%$，解得 $y\geqslant40$，故 $380-5y\leqslant180$. 本题主要考查学生用不等式解决实际问题的能力.

第十章 数据的收集、整理与描述

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

1. 经历收集数据、整理、描述和分析数据的活动，了解数据处理的过程. 了解全面调查和抽样调查两种收集数据的方式，会设计简单的调查问卷.

2. 体会抽样的必要性，通过实例了解简单随机抽样，体会用样本估计总体的思想.

3. 会制作扇形图，能用统计图直观、有效地描述数据.

4. 通过实例，了解频数及频数分布的意义，能画频数分布直方图（等距分组的情形），能利用频数分布直方图解释数据中蕴含的信息. 会根据问题需要选择合适的统计图描述数据，进一步体会统计图在描述数据中的作用.

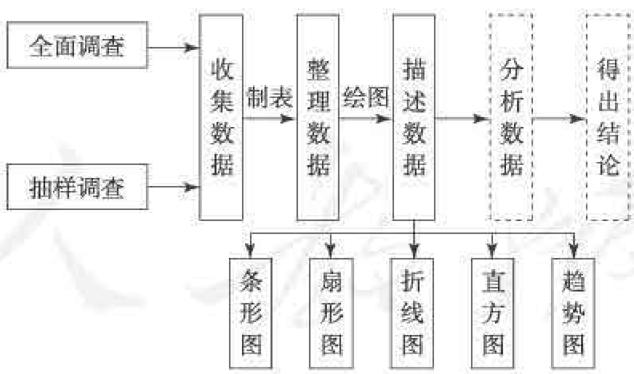
5. 能解释统计结果，根据结果作出简单的判断和预测，并能进行交流.

6. 通过表格、折线图、趋势图等，感受随机现象的变化趋势.

7. 通过经历统计活动，初步建立数据分析观念，感受统计在生活和生产中的作用，增强学习统计的兴趣.

二、本章知识结构框图

数据处理的一般过程：



三、内容安排

“统计与概率”领域主要学习收集、整理、描述和分析数据等处理数据的基本方法，从数据中提取信息并进行简单的推断，以及简单随机事件及其发生的概率. 这些内容在三个学段均有安排，教学要求随着学段的升高逐渐提高，第三学段的“统计与概率”是在前两个学段基础上的进一步学习. 依据《课标》第三学段的内容标准和统计与概率本身的特点，本套教科书将“统计与概率”领

域独立于“数与代数”和“图形与几何”领域安排，共有三章．这三章内容采用统计和概率分开编排的方式，前两章是统计，最后一章是概率．统计部分的两章内容按照数据处理基本过程的不同侧重点来安排，分别是七年级下册的第十章“数据的收集、整理与描述”，八年级下册的第二十章“数据的分析”；概率部分为九年级上册的第二十五章“概率初步”．

本章是统计部分的第一章，内容包括：

（1）利用全面调查与抽样调查（以抽样调查为重点）收集和整理数据；

（2）利用统计图表（以直方图为重点）描述数据；

（3）展现收集、整理、描述和分析数据得出结论的统计调查的基本过程．

本章通过一些案例展开有关内容，在每一个案例中都展示了收集数据、整理数据、描述数据和分析数据得出结论的一般过程（见知识结构框图）．其中重点在收集、整理与描述数据上（知识结构框图中的实线框），所涉及的分析数据比较简单，较复杂的内容将在第二十章进一步讨论．

10.1节“统计调查”，主要介绍收集、整理与描述数据的一些常用方法．

数据的来源一般有两条渠道：一条是通过统计调查或科学试验直接得到第一手统计数据，另一条是通过查阅资料等间接获得第二手统计数据．本节主要介绍统计调查收集数据的方法．对于通过科学实验获得数据的方法，教科书通过一个选学栏目作了简单介绍；对于通过查阅资料等间接手段收集数据的方法，主要安排在课题学习和习题中．

统计调查分全面调查和抽样调查．教科书以调查人们对几种电视节目的喜爱情况为背景，设计了两个问题，通过问题1回顾了全面调查，通过问题2介绍了抽样调查．

教科书首先设置问题1，要求学生考察全班同学喜爱五种电视节目的情况．解决这个问题需要作统计调查，首先是收集数据，由此引出利用调查问卷收集数据的方法．对于收集到的数据，需要进行整理，才能看出数据分布的规律，这就涉及如何整理数据的问题．教科书介绍了利用频数分布表（没有给出频数分布的概念）整理数据的方法．为了更直观地看出全班同学喜爱五种电视节目的情况，教科书选用了学生在小学已经学过的条形图和扇形图展示了数据的分布规律，最后通过分析统计图表就可以看出全班同学喜爱五种电视节目的情况．对于扇形图，学生在小学只要求会从扇形图中读出信息，不要求用扇形图描述数据．在本节中，教科书结合问题1介绍了如何制作扇形图，这是本学段的一个教学要求．问题1的统计调查过程实际上让学生经历了一个收集、整理、描述和分析数据得出结论的过程，即数据处理的一般过程．

抽样调查是实际中经常采用的一种调查方式，也是本节重点介绍的统计调查方法．教科书沿用问题1的情境，设计了问题2，介绍利用抽样调查收集数据．在问题2中，调查全校学生对五种电视节目的喜爱情况，由于学生人数较多，采用全面调查的方式收集数据不太合适，抽样调查是一种经济、有效、省时省力的方法，这就使学生对抽样的必要性有所感受．结合着必要性的讨论，教科书给出了与抽样调查有关的概念和术语，如样本、总体、个体、样本容量等．为了使样本尽可能具有代表性，抽取样本时，要求每一个学生都有相等的机会被抽到，教科书介绍了学校门口随机调查或利用学号随机抽取样本，实现简单随机抽样的方法．这个抽样方法简单有效，便于学生理解样本的代表性．有了样本数据，就可以整理、描述和分析样本数据，通过分析样本数据来估计总体的情况．通过问题2的学习，学生经历了一个利用抽样调查处理数据、解决问题的统计过程，对抽样调

查的必要性、样本的代表性、简单随机抽样，以及通过样本估计总体的思想等有所了解，初步建立数据分析观念.

在问题1，2的基础上，教科书设置了问题3. 问题3是比较学生所在学校三个年级学生的平均体重，教科书没有给数据，也没有给分析和解决过程，需要学生自主合作完成. 教科书这么做的目的是考虑到统计内容有较强的实践性，希望学生通过亲自参与统计活动来学习统计内容. 问题3中设置的3个小问题，事实上是给学生完成此问题适当的引导. 其中调查方案的确定，需要根据学生自己所在学校的实际情况进行综合权衡，选取相对合适的方案. 即使是调查同一所学校，也完全可以采用不同的调查方式（全面调查和抽样调查）收集数据，但要以能解决所提问题为前提，其实这是辩证地认识两种调查方式特点的过程，更是正确认识统计方法特点的过程. 通过问题3，让学生亲自参与在实际问题中收集、整理、描述和分析数据得出结论的统计过程，培养应用意识和解决问题的能力，发展数据分析观念.

“捉—放—捉（capture-recapture）”是生产和科研中经常用到的方法，常常被用来根据部分的情况估计整体的情况，例如估计养鱼池中鱼的数量，森林中某种动物的数量等，这个方法体现了用样本估计总体的思想. 教科书在选学栏目“实验与探究　瓶子中有多少粒豆子”中，模拟这种方法设计了一个活动，通过学生动手活动体验这种方法，感受用样本估计总体的思想，并了解试验也是获得数据的有效方法.

10.2节“直方图”，重点讨论利用直方图来描述数据.

对于直方图，学生在前两个学段没有接触，这是本学段学习的一种新统计图. 教科书结合一个实际问题介绍直方图描述数据的方法，使得对于统计图表的认识具体化. 具体来说，从学生熟悉的问题情境入手：从63名学生中选出40名参加广播体操比赛. 选择参赛队员的一个要求是队员的身高应尽可能整齐. 我们可以用不同的方法选出符合这个要求的队员，教科书介绍了利用频数分布确定人选的方法. 分析数据的频数分布，首先是将数据分组，根据一组数据的最大值、最小值可以确定这组数据的变化范围，参照数据的变化范围，可以确定组距，进而可以将数据进行分组. 利用频数分布表给出身高数据的分布情况，分析频数分布表，可以看出大部分学生的身高分布在哪个范围，由此可以确定参赛选手的身高. 教科书利用问题介绍了根据频数分布表作出频数分布直方图的方法，以及利用频数分布直方图解释数据中蕴含的信息.

10.3节“课题学习　从数据谈节水”，要求学生综合利用学过的统计知识从事统计活动，经历收集、整理、描述和分析数据得出结论的基本过程.

教科书选择了一个具有实际意义和时代气息的问题——水资源问题，作为主题编写课题学习. 这不仅有利于统计知识的深入学习，而且具有“节能减污，保护环境”的教育价值. 这个课题学习由两部分组成. 第一部分要求学生阅读背景材料回答问题，通过具体实例让学生体会如何从统计资料中挖掘信息. 这一部分内容的第3个问题，引入了趋势图的内容，即用一条直线刻画数据的变化趋势，并要求学生根据趋势图作预测，以及通过查阅资料来评价趋势图刻画变化趋势的效果. 第二部分要求学生运用已学的统计调查知识，完成一个以“家庭人均月生活用水量”为题的统计调查活动，并结合第一部分的内容撰写一份报告.

课题学习的设计目的，一方面是让学生感受对数据进行适当处理，可以挖掘其中蕴含的信息，

体会统计方法的意义；另一方面是让学生经历在实际问题中收集、整理、描述和分析数据得出结论的统计过程，在经历这个统计调查的过程中，发展学生的数据分析观念，逐步建立用数据说话的习惯.

四、课时安排

本章教学约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

10.1　统计调查	约 3 课时
10.2　直方图	约 2 课时
10.3　课题学习　从数据谈节水	约 3 课时
数学活动	
小结	约 2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 强调典型案例的作用

统计与现实生活的联系是非常紧密的，这一领域的内容对学生来说应该是充满趣味性和吸引力的. 教科书特别注意选择典型的、学生感兴趣的和富有时代气息的现实问题作为例子，在解决这些实际问题的过程中，介绍收集、整理和描述数据的方法，以及统计的概念和原理. 例如，第 10.1 节通过调查“喜爱电视节目的情况”这样一个学生感兴趣的案例介绍统计调查方法；第 10.2 节通过一个典型案例“选取广播操参赛者”来介绍直方图；第 10.3 节通过一个典型案例“调查水资源的拥有和使用情况”，使学生综合运用本章知识和方法进行统计活动. 这种利用典型案例的编写方式，一方面可以克服抽象的概念和方法带来的学习困难，使学生在分析、解决实际问题的情境中，经历处理数据的过程，并在这个过程中结合具体案例学习有关的统计知识和方法，发展学生的数据分析观念；另一方面可以使学生感受统计与实际生活的联系，体会数据处理在解决现实问题中的作用.

2. 强调数据分析

本章特别重视数据分析观念的培养，注意借助案例但不局限于具体问题，强调具体的收集、整理和描述数据的方法都是为落实数据处理的目的服务的，避免把有关内容写成单纯的操作性和技巧性问题，让学生感受统计结果对决策的意义和作用，从而建立并发展数据分析观念. 例如，在第 10.2 节中，从解决实际问题的需要出发，根据频数分布直方图的特点和作用，学习画这种统计图的方法，使学生感受它在数据处理中所起的作用——反映数据中蕴含的规律，而不是单纯学习画图方法. 再如，对于本章中出现的一些概念，如频数、频数分布等概念，都是结合具体问题给出的，使学生在具体情境中感知这些概念，而不追求严格定义. 这样淡化处理概念的目的，是使学生在具体情境中感知有关概念，把注意力放在更好地理解它们在统计中的作用上.

3. 突出数据处理的基本过程

本章注意引导让学生在统计活动的全过程中学习有关统计的知识和方法，而不是“只见树木，不见森林”，避免仅把目光盯在统计的某个具体环节或具体知识点上. 教科书的设计以数据处理的

基本过程为线索．在反映数据处理整体过程的前提下，按照数据的收集、整理、描述和分析过程中不同阶段的侧重点来安排有关内容，将具体问题作为展示统计的基本过程的典型案例，以其为载体介绍数据处理的基本过程中的有关问题，而不是“就头论头，就尾论尾”地把统计过程割裂开来，帮助学生建立对统计思想和统计的基本过程的整体性认识．

学习统计的有效方法是亲身经历统计活动的基本过程，在收集、整理、描述和分析数据的统计活动中，逐步学会用数据说话，自觉地想到用统计的方法来解决一些问题．为此，教科书先后设计了一系列问题和课题学习，从介绍如何解决问题开始，逐步发展到引导学生亲历亲为直接参与实际的统计过程．这种做法为学生参与调查活动学习统计创设了条件，是帮助学生建立数据分析观念，体会统计的作用和意义的有效方法．

六、对本章教学的建议

1. 注意统计思想的渗透与体现

统计主要研究现实生活中的数据，它通过对数据的收集、整理、描述和分析，来帮助人们解决问题．根据数据思考和处理问题，通过数据发现事物发展规律是统计的基本思想．它在本章编写中是受到极大关注的．特别需要注意到，用样本估计总体是归纳法在统计中的一种运用，统计中常常采用从总体中抽出样本，通过分析样本数据来估计和推测总体的方法．本章第 10.1 节介绍了收集、整理数据的方法，抽样调查是其中的重点内容，蕴含在这些内容背后的是上述统计思想．

教学中，除通过具体案例使学生认识有关统计知识（如样本、总体、个体、频数等）和统计方法（如抽样调查等）外，应引导学生感受渗透与体现于统计知识和方法之中的统计思想，使学生认识到统计思想是统计知识和方法的源头，正是在这种思想的指导下才产生了相应的知识和方法．例如，抽样调查方法是用样本估计总体的思想的产物．对统计思想的了解有助于把握解决统计问题的大方向，也有助于加深理解学习过程中的局部问题．例如，了解了用样本估计总体的思想，就会对不同的抽样可能得到不同的结果（即所谓结论的“不确定性”）有正确的认识．

2. 在统计过程中学习统计，改进学生的学习方式

统计是一门实践性很强的学科，通过参与统计活动学习相关知识是常用且有效的方法．教学中要注意让所有学生都能参与到统计的活动中去，在活动的过程中建立数据分析观念．鼓励学生积极合作、充分交流，促进学生学习方式的改变．

本章的学习特别强调让学生通过活动经历数据处理的基本过程．虽然分析数据是数据处理过程中必不可少的一个重要环节，但本章活动重点应放在收集、整理和描述数据三个方面．比如可以引导学生根据调查目的，在充分讨论的基础上，亲自设计调查方案和调查问卷并实施调查，然后动手设计表格整理调查得到的数据，再根据具体的问题选择合适的统计图形描述数据．对于分析数据这个环节，教师可以根据问题的难易程度提出适当的要求，有时可以让学生自己完成，有时需要在教师的帮助下或由教师讲解完成．活动可以采用多种形式，既有课上的又有课下的，既有校内的又有校外的，既有个体的又有小组合作的．教师在整个活动中应该是一个指导者、参与者和合作者．

本章第 10.3 节安排了“课题学习　从数据谈节水”，安排它的目的是希望为学生提供一个参与实际统计活动的机会，使学生综合运用本章以及以前所学有关数据处理的知识和方法，通过小组合

作活动等方式，经历收集、整理、描述、分析数据得出结论以及对所得结论进行解释和反驳的统计过程，感受统计与生活的密切联系，体会统计在解决实际问题中所起的作用. 课题学习选用了与环境保护有关的节约用水问题，具有一定的综合性和活动性. 通过这个课题学习也使学生从数据上对地球上淡水资源的储量和分布以及淡水资源的使用等情况有一个认识，增强学生节约用水的意识，使学生自觉地加入到节约用水的宣传和行动中去. 因此，教学中要重视课题学习的教学，让学生亲自从事统计调查活动，经历数据处理的基本过程，并使学生得到人文方面的教育.

教学中可以根据学生的实际情况，注意课题的操作行和可行性，根据课题学习的教学目标，选择其他的主题进行课题学习.

3. 挖掘现实生活中的素材进行教学

本章教科书中有一些实际问题的素材，教学时可以进一步挖掘现实生活中有趣的、可操作的、真实的素材，使学生充分感受统计在日常生活、社会和各学科领域的广泛应用，体会统计在解决问题中所起的作用，从而调动学生学习统计的积极性. 可以注意选取有一定人文教育价值的素材，使学生在学习统计的同时，也得到人文方面的教育. 例如，环境保护、社会和谐发展等方面的素材可使学生在学习统计的同时，接受保护自然环境、提高社会公德等方面的教育.

在选择真实素材进行教学时还要注意数据的真实性. 学生在从事收集数据的活动中，对于同一个问题，有时会出现不同的学生或不同的小组收集到的数据差别较大的情况，这时要注意对学生收集数据的活动过程以及所得数据进行科学的评价，不能随便更改数据，要培养学生尊重客观事实、实事求是的科学态度.

4. 准确把握教学要求

对于统计中的思想方法，本套教科书采用螺旋上升的编排方式. 例如，分析数据是统计中不可缺少的重要环节，它在本章中已经出现了，但属于较为简单的情形. 本套教科书在八年级下册第二十章“数据的分析”中将对它作更深入的介绍，而本章对分析数据的要求仅是通过简单实例，让学生初步感受它是统计全过程中必要的一环，初步体会统计思想和统计过程. 因此，在本章教学时，要特别注意准确把握教学要求，不要过早地出现较复杂的分析数据的问题. 又如，本章第 10.2 节中，频数分布直方图和折线图是描述数据的主要内容，一般直方图是用矩形面积表示频数的，而对于等距分组的情形，为看图与画图方便可以改为用矩形的高表示频数. 本节的问题都属于后一情形，因此教学中不必过多涉及一般直方图，而应重点介绍用矩形的高表示频数的直方图，练习题与作业题也应控制在这种直方图上.

5. 关注信息技术的使用

信息技术的发展给统计工作带来很大方便，例如借助计算机计算统计数据和绘制统计图表有很好的效率和效果. 目前，实际工作中的很多统计图表都是利用计算机（器）画出的，许多统计计算也是借助于计算机（器）完成的. 为了体现计算机（器）等现代信息技术对统计的作用，本章编写了选学栏目“信息技术应用　利用计算机画统计图”，供有条件使用计算机的学校选用. 教学中如果能使用计算机（器）作统计图或进行统计计算，将有利于把学习重点放在理解统计思想和从事统计活动上来. 但是，教学中应注意不能使学生离开计算机（器）就不会画简单的扇形图、直方图和折线图.

Ⅱ 教材分析

[1] 章引言列举了几个涉及统计数据的具体实例，目的是让学生感受在生活中经常会遇到的统计方面的内容．接着通过设问，引出本章将学习的数据的收集、整理和描述，它们都属于统计学的内容，并明确统计的目的是为了发现数据中蕴含的规律．

[2] 章前图是某中学门口学生在开展统计调查的情形，呼应了本章的重要内容：通过统计调查收集数据．

第十章　数据的收集、整理与描述

从报纸、杂志、电视、互联网等媒体上，我们经常可以看到很多统计数据和统计图表．例如，某地义务教育的普及率达 98%，某电视节目的收视率为 9%，某地年人均生活用水量为 36 m³，2010 年我国国内生产总值为401 202亿元，比上年增长 10.4%等．[1]这些数据可以帮助人们了解周围世界的现状和变化规律，从而为人们制定决策提供依据．你知道它们是怎样得到的吗？

统计学（statistics）能帮我们回答上述问题．这一章我们将在小学所学统计知识的基础上，学习收集数据的一些基本方法，在此基础上进一步学习如何整理数据，并用统计图表直观形象地描述数据，从中发现数据蕴含的规律，获取我们需要的信息．[2]

节目类型	划记	人数	百分比
A新闻	正一	6	6%
B体育	正正正正丅	22	22%
C动画	正正正正正止	29	29%
D娱乐	正正正正正正正下	38	38%
E戏曲	正	5	5%
合计		100	100%

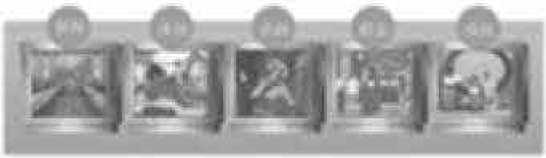
1. 统计主要研究如何利用数据进行推断，它通过收集、整理、描述和分析数据，来帮助人们对事物的发展作出合理的推断．数据分析是统计的核心．

在当今信息社会里，数据是一种重要的信息载体，统计所提供的“运用数据进行推断”的思考方法以及从随机性中寻找规律性的归纳思想是现代社会一种普遍使用并且强有力的思维方式．重视数据的使用和能够对数据进行适当处理，已成为信息时代每一位公民必备的素质．

2. 数据分析观念包括：了解在现实生活中有许多问题应当先做调查研究，收集数据，通过分析作出判断，体会数据中蕴含着信息；了解对于同样的数据可以有多种分析的方法，需要根据问题的背景选择合适的方法；通过数据分析体验随机性，一方面对于同样的事情每次收集到的数据可能不同，另一方面只要有足够的数据就可能从中发现规律．

10.1 统计调查

问题 1 如果要了解全班同学对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类电视节目的喜爱情况，你会怎么做？



为解决问题 1，需要进行统计调查.

首先可以对全班同学采用问卷调查的方法收集数据．为此要设计调查问卷.[1]

调查问卷[2]　　　年　月

在下面五类电视节目中，你最喜爱的是（　　）（单选）

(A) 新闻．　(B) 体育．　(C) 动画．

(D) 娱乐．　(E) 戏曲．

填完后，请将问卷交给数学课代表.

如果想了解男、女生喜爱节目的差异，问卷中还应该包含什么内容？[3]

利用调查问卷，可以收集到全班每位同学最喜爱的节目的编号（字母），我们把它们称为数据.[4] 例如，某同学经调查，得到如下 50 个数据：

C C A D B C A D C D

C E A B D D B C C C

D B D C D D D C D C

E B B D D C C E B D

A B D D C B C B D D

用字母代替节目的类型，可方便统计.

从上面的数据中，你能看出全班同学喜爱各类节目的情况吗？

第十章　数据的收集、整理与描述　135

[1] 对于这个问题，也可以采用其他方式收集数据，例如通过举手的方式等．教科书中采用问卷的方式，主要是因为设计调查问卷是收集数据时经常要做的工作.

[2] 问卷设计的内容一般包括调查中所提问题的设计，问题答案的设计，以及提问顺序的设计等.

[3] 问卷中还应该增加性别项.

[4] 统计学中通常把数据分成两类：一类称为定量数据，能够用数值表示，例如身高就是定量数据；另一类称为定性数据，不能用数值表示，其结果均表现为类别．例如性别表现为男女，男女就是定性数据．本节问题 1 收集到的数据是定性数据，给节目编号只是为了统计方便，编号本身没有数量意义.

1. 数据的来源一般有两条渠道：一条是通过统计调查或科学实验直接得到第一手统计数据；另一条是通过查阅资料等间接获得第二手统计数据.

统计调查分全面调查和抽样调查，是获得第一手数据的重要手段，常常通过访问、邮寄、电话访问、互联网调查等形式来收集数据．本节主要学习这两种统计调查的基本方法，以及数据整理的方法.

2. 问题 1 通过一个实际例子介绍全面调查，系统整理前两个学段的相关内容，并为问题 2 中学习抽样调查作好铺垫．收集、整理和描述数据的方法是放在数据处理的基本过程中学习的.

3. 问题 1 采用了调查问卷的方式来收集数据．调查问卷是收集数据的一种工具，是调查者根据调查目的所设计的由一系列问题、备选答案和说明等组成的一种调查形式．教学中要注意让学生感受为了获得真实的数据，设计问卷时应注

[1] 条形图能够显示每组中的具体数据，易于比较数据之间的差别；扇形图用扇形的大小表示部分在总体中所占百分比，易于显示每组数据相对于总数的大小，一般不能直接判断出每组数的绝对大小.

杂乱无章的数据不利于我们发现其中的规律. 为了更清楚地了解数据所蕴含的规律，需要对数据进行整理. 统计中经常用表格整理数据，对前面数据的整理如表 10-1 所示.

表 10-1 全班同学最喜爱节目的人数统计表

节目类型	划记	人数	百分比
A 新闻	[illegible]	4	8%
B 体育	正正	10	20%
C 动画	正正正	15	30%
D 娱乐	正正正下	18	36%
E 戏曲	下	3	6%
合计	50	50	100%

此例中，用划记法记录数据时，“正”字的每一划（笔画）代表一名同学. 例如，编号为 A 的节目对应的人数是 4，记为“[illegible]”.

表 10-1 可以清楚地反映全班同学喜爱各类节目的情况. 例如，最喜爱新闻节目的同学有 4 名，占全班同学的 8%；最喜爱体育节目的同学有 10 名，占全班同学的 20%；等等.

为了更直观地看出表 10-1 中的信息，还可以用条形图和扇形图来描述数据[1]（图 10.1-1）.

图 10.1-1

你能根据表 10-1 和图 10.1-1 说出全班同学喜爱五类电视节目的情况吗?

我们知道，扇形图用圆代表总体，每一个扇形代表总体中的一部分，通过扇形的大小来反映各个部分占总体的百分比. 画扇形图 10.1-1（2）时，首先按各类节目所占的百分比算出对应扇形的圆心角度数. 例如，“体育”和“动画”对应扇形的圆心角分别为 $360°\times20\%=72°$，$360°\times30\%=$

136 第十章 数据的收集、整理与描述

意的问题，能够回答“调查的目的是什么”“调查的对象是什么”“调查问卷应该包括哪些内容”“应该从哪些方面提出问题”“如何提问”“怎样设计选择答案”等.

4. 收集数据是处理数据的第一个环节. 对于收集到的数据，往往需要进行整理才能看出数据的分布规律，统计中常采用表格来整理数据. 整理数据是处理数据的第二个环节，这个内容也是放在统计的基本过程中来学习的.

5. 表 10-1 是利用划记法来进行统计的，实际上此表是一个频数分布表，其中的人数就是频数. 频数的概念将在本章第二节“直方图”中学习.

6. 书中给出的条形图和扇形图是根据表10-1画出的，这里利用统计图来描述数据，是处理数据的第三个环节. 选用什么样的统计图描述数据取决于两个方面：一是你面对的是什么样的数据，二是你要用统计图展示什么信息.

108°. 然后在一个圆中，根据算得的各圆心角度数画出各个扇形，并注明各类节目的名称及其相应的百分比.

在上面的调查中，我们利用调查问卷得到全班同学喜爱电视节目的数据，利用表格整理数据，并用统计图进行直观形象的描述. 通过分析表和图，了解到了全班同学喜爱电视节目的情况. 在这个调查中，全班同学是要考察的全体对象，我们对全体对象都进行了调查. 像这样考察全体对象的调查叫做**全面调查**. 例如，2010 年我国进行的第六次人口普查，就是一次全面调查.

练习

1. 小明为了解同学们的课余生活，设计了如下调查问题：
你平时最喜欢的一项课余活动是（　　）.
(A) 看课外书　(B) 体育活动　(C) 看电视　(D) 踢足球
你认为此问题的答案选项设计合理吗？为什么？如果不合理，请修改.
2. 经调查，某班学生上学所用的交通工具中，自行车占 60%，公交车占 30%，其他占 10%，请画出扇形图描述以上统计数据.
3. 请你举出一些生活中运用全面调查的例子.

问题 2　某校有 2 000 名学生，要想了解全校学生对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类电视节目的喜爱情况，怎样进行调查？

可以用全面调查的方法对全校学生逐个进行调查，然后整理收集到的数据，统计出全校学生对五类电视节目的喜爱情况. 但是，由于学生比较多，全面调查花费的时间长，消耗的人力、物力大. 因此，需要寻找一种不作全面调查就能了解全校学生喜爱各类电视节目的情况的方法，达到既省时省力又能解决问题的目的. 这就是我们要讨论的抽样调查.

抽样调查（sampling survey）是这样一种方法，它只抽取一部分对象进行调查，然后根据调查数据推断全体对象的情况. 在问题 2 中，我们只抽取一部分学生进行调查，然后通过分析被调查学生的数据来推断全校学生喜爱电视节目的情况. 全校学生是要考察的全体对象，称为总体，[1] 组成总体的每一个学生称为个体，而被抽取调查的那部分学生构成总体的一个样本.

为了强调调查目的，人们有时也把全校学生喜爱的电视节目作为总体，每一个学生喜爱的电视节目作为个体.

第十章　数据的收集、整理与描述　137

练习答案

1. 不合理. 选项 B，D 内容重复，且四个选项列出的只是课余活动的一部分. 把选项 D 改为“其他”.
2. （略）.
3. （略）.

[1] 对总体、个体这两个基本概念，目前有两种不同的界定. 有些把所有考察对象（如全校学生）作为总体，有些把所有考察对象的数量指标值（如全校学生最喜爱的节目）作为总体. 虽然两种说法不尽相同，但是前者所说的总体与后者所说的总体存在一一对应关系，也就是说两者反映的总体和个体的从属关系是完全一致的.

把所有考察对象作为总体，每一个考察对象作为个体，能简明地反映调查范围及总体与个体的从属关系. 尤其在调查具有多个数量指标的问题时，表述起来更简洁. 而直接把所有考察对象的数量指标值作为总体，可以强调调查目的，而且更方便导出总体分布的表述.

教学中，这两个概念不必过分挖掘，重点在它们之间的从属关系.

7. 学生在前两个学段已经见过条形图和扇形图，并且会用条形图描述数据，但对于扇形图学生只会从扇形图中读出信息，还不会用扇形图来描述数据. 教科书介绍了如何画扇形图，这是本学段的一个教学要求.

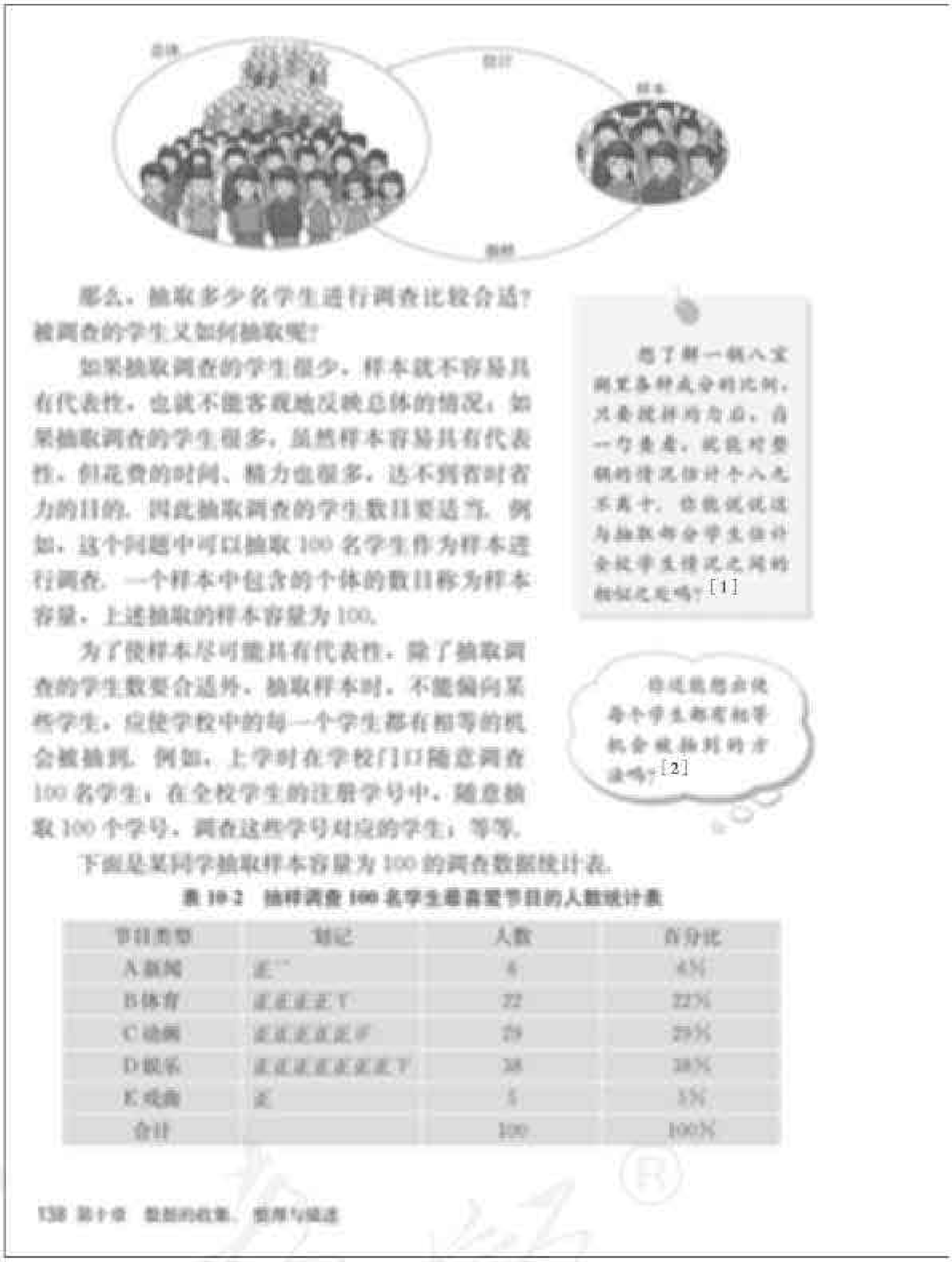
8. 扇形的大小是由扇形所对的圆心角决定的，因此画扇形图实际上就是根据各个扇形所代表的百分比的大小来确定它们的圆心角的大小. 整个圆表示总体 100%，因为圆的圆心角为 360°，所以各个扇形占总体的百分比乘 360°就是扇形对应圆心角度数. 画扇形图不必考虑各个扇形的相对位置，任一块扇形都可以被移到其他位置而不改变扇形图的意义. 各扇形所代表的节目名称可以像教科书中这样以图例说明，也可以直接注在相应的扇形上.

9. 问题 2 还是沿用问题 1 的情境. 但问题 2 中总体数目变大，这样全面调查就变得不太合适，需要有新的调查方法. 使学生对引进抽样调

[1] 这个边注用一个通俗的例子道出了用样本估计总体的思想.

一整锅八宝粥是调查的总体，组成粥的每一粒小麦、每一粒花生仁、每一颗红枣等都是个体. 从锅里舀出一勺是抽取样本，通过对一勺粥的查看，可以估计整锅粥的成分比例情况，就是通过样本估计总体.

[2] 只要满足每个学生被抽到的机会相等即可.



那么，抽取多少名学生进行调查比较合适？被调查的学生又如何抽取呢？

如果抽取调查的学生很少，样本就不容易具有代表性，也就不能客观地反映总体的情况；如果抽取调查的学生很多，虽然样本容易具有代表性，但花费的时间、精力也很多，达不到省时省力的目的. 因此抽取调查的学生数目要适当. 例如，这个问题中可以抽取 100 名学生作为样本进行调查. 一个样本中包含的个体的数目称为样本容量，上述抽取的样本容量为 100.

想了解一锅八宝粥里各种成分的比例，只要搅拌均匀后，舀一勺查看，就能对整锅的情况估计个八九不离十. 你能说说这与抽取部分学生估计全校学生情况之间的相似之处吗？[1]

为了使样本尽可能具有代表性，除了抽取调查的学生数要合适外，抽取样本时，不能偏向某些学生，应使学校中的每一个学生都有相等的机会被抽到. 例如，上学时在学校门口随意调查 100 名学生；在全校学生的注册学号中，随意抽取 100 个学号，调查这些学号对应的学生；等等.

你还能想出使每个学生都有相等机会被抽到的方法吗？[2]

下面是某同学抽取样本容量为 100 的调查数据统计表.

表 10-2 抽样调查 100 名学生最喜爱节目的人数统计表

节目类型	划记	人数	百分比
A 新闻	[illegible]	4	4%
B 体育	正正正正丅	22	22%
C 动画	正正正正正𠀦	29	29%
D 娱乐	正正正正正正正下	38	38%
E 戏曲	正	5	5%
合计		100	100%

138 第十章 数据的收集、整理与描述

查的必要性有所感受.

10. 抽样可分为概率抽样（随机抽样）和非概率抽样两大类. 非概率抽样的效果好坏依赖于抽样者的主观判断能力和经验. 随机抽样最大的优点是在抽样过程中避免了人为的干扰和偏差，可以估计抽样误差，获得估计的精度，因此随机抽样是最科学、应用最广泛的抽样方法.

11. 教科书通过一个图示说明“总体”“样本”“抽样”“估计”之间的关系. 教学中要让学生在具体问题中理解概念，不要追究严格的定义.

12. 通常样本容量越大，估计精度就会越高. 在不计调查成本的情况下，当然是样本容量越大越好. 事实上调查需要花费人力物力，所以往往在精度和成本之间要达到一种平衡，教科书因此选取样本容量为 100. 教科书没有涉及估计精度方面的内容，但是需要学生对样本容量的大小会影响估计的精度有所感受.

13. 除了样本容量外，抽取的方法也会影响

从表 10-2 可以看出，样本中喜爱娱乐节目的学生最多，为 38%．据此可以估计出，这个学校的学生中，喜爱娱乐节目的最多，约为 38%．类似地，由上表可以估计这个学校喜爱其他节目的学生的百分比，如图 10.1-2 所示．

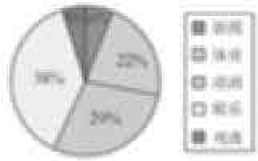


图 10.1-2

上面抽取样本的过程中，总体中的每一个个体都有相等的机会被抽到，像这样的抽样方法是一种**简单随机抽样**[1]（simple random sampling）．

抽样调查是实际中经常采用的收集数据的方式．除了具有花费少、省时省力的特点外，还适用于一些不宜用全面调查的情况．例如，检测某批次灯泡的使用寿命、大坝的质量等具有破坏性的调查．需要注意的是，在抽样调查中，如果抽取样本的方法得当，一般样本能客观地反映总体的情况，抽样调查的结果会比较接近总体的情况，否则抽样调查的结果往往会偏离总体的情况．

归纳

全面调查和抽样调查是收集数据的两种方式．全面调查收集到的数据全面、准确，[2]但一般花费多、耗时长，而且某些调查不宜用全面调查．抽样调查具有花费少、省时的特点，但抽取的样本是否具有代表性，直接关系到对总体估计的准确程度．

请以小组为单位解决如下问题．

问题 3 比较你所在学校三个年级同学的平均体重．

（1）制定调查方案，利用课余时间实施调查；

（2）根据收集到的数据，分析出每个年级同学的平均体重，并用折线图表示平均体重随年级增加的变化趋势；

（3）每组安排一位代表向全班介绍本组完成上述问题的情况，并进行比较和评议．

第十章 数据的收集、整理与描述 139

[1] 简单随机抽样是最基本的一种随机抽样．简单随机抽样根据抽取样本过程中个体是否放回分为放回简单随机抽样和不放回简单随机抽样，两种都是等概率抽样．教科书中采用的抽取 100 个学号进行调查，相当于逐个不放回地抽取学号进行调查．

[2] 在实践中，全面调查虽然没有由总体中部分观测值进行推论所引起的抽样误差，但是在各阶段发生的整理上的误差却是避免不了的．而且当全面调查的总体越大，这个误差就会越大．教科书没有在这方面作过多的讨论．当全面调查的这个误差比抽样调查带来的误差大时，就更值得使用抽样调查．因此，使用抽样调查除了费用、时间等因素，还有技术上的原因．

样本的代表性．教科书采用在校门口随意调查或随意抽取学号的方法，使得总体中的每一个个体都有相等的机会被抽取，即简单随机抽样．简单随机抽样是本节的一个教学重点，要让学生体会样本的随机性，以及用样本估计总体的合理性．

14. 用简单随机样本估计总体时，要让学生明白样本是总体的一部分，样本中喜爱各类节目的比例不是总体的比例．同时要让学生认识到样本结果带有随机性，样本结果也会出现偏离总体比较大的情况，但是大多数情况下对总体会有一个比较好的估计，这样的估计是有意义的．教师还应该明白用随机样本估计总体，估计的精度是可以计算的．

15. 问题 3 需要学生自主合作完成．对学生设计的调查方案，应更多从合理还是不合理的角度给予评价，而不是严格的对错．对各组调查结果的比较，教师可以引导学生探讨造成差异的原因，让学生进一步体会样本的代表性和随机性，反

练习

1. 为了解全校同学的平均身高，小明调查了座位在自己周围的3名同学，把他们身高的平均值作为全校同学平均身高的估计.

(1) 小明的调查是抽样调查吗？

(2) 这个调查结果能较好地反映总体的情况吗？如果不能，请说明理由.

2. 某班要选3名同学代表本班参加校组织的交流活动，现在按下面的办法抽取：把全班同学的姓名分别写在没有明显差别的小纸片上，把纸片混放在一个盒子里，充分搅拌后，随意抽取3张，按照纸片上所写的名字选取3名同学. 你觉得上面的抽取过程是简单随机抽样吗？为什么？

3. 以下调查中，哪些适宜全面调查，哪些适宜抽样调查？

(1) 调查某批次汽车的抗撞击能力；

(2) 了解某班学生的身高情况；

(3) 调查春节联欢晚会的收视率；

(4) 选出某校短跑最快的学生参加全市比赛.

4. 请你举出一些不宜用全面调查的例子，并说明理由.

习题 10.1

复习巩固

1. 请对全班同学进行调查，并填写下表.[1]

全班同学出生月份统计表

月份	划记	人数
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

140 第十章 数据的收集、整理与描述

练习答案

1. (1) 是抽样调查.

(2) 一般不能客观地反映总体. 一是样本容量太小，随机性太大；二是坐在一起的同学一般身高都比较接近，这样选取的样本缺乏代表性.

2. 是简单随机抽样. 因为纸片没有明显差别，又充分搅拌，这样保证了抽取样本的过程中任一个体都有相等的机会被抽到.

3. (2) (4)是全面调查，(1) (3)是抽样调查.

4. (略).

[1] 收集数据时可以采用不同的方法，比如可以设计一份包括出生月份的调查表，也可以采用举手的方式收集出生月份. 如果采用后一种方式，收集数据和整理数据是同时进行的，这一点要向学生讲明，也就是数据处理的几个环节有时不能分得很清楚.

思两种调查方式的特点，以及在实施抽样调查时需要注意的事项等.

习题 10.1

1. 习题 10.1 涉及了统计调查的一些概念内容、思想方法.

“复习巩固”的第 1 题要求学生通过对全班同学进行调查来收集数据，并将数据整理到表格中. 这个题目是为了巩固全面调查收集、整理数据的方法，可以用不同的方法收集数据. 如果学生有兴趣，还可以让学生根据整理后的数据画出条形统计图，根据统计图得出一些结论.

第 2 题是就设计调查问卷时容易出现的一些问题编写的.

对于第 3 题，教学中要注意让学生体会进行抽样调查的必要性.

第 4 题利用东、西半球的地图给出了世界七大洲的面积，利用扇形图可以表示各大洲面积

续表

月份	划记	人数
9		
10		
11		
12		
合计		

2. 两名同学在作抽样调查时使用下面两种提问方式，你认为哪一种更好些？
   (1) 难道你不认为科幻片比纪录片更有意思吗？
   (2) 你更喜欢哪一类电影——科幻片还是纪录片？
3. 要调查下面几个问题，你认为应该作全面调查还是抽样调查？
   (1) 了解全班同学每周体育锻炼的时间.
   (2) 调查市场上某种食品的色素含量是否符合国家标准.
   (3) 鞋厂检测生产的鞋底能承受的弯折次数.
4. 根据下图中所给世界七大洲的面积（单位：万 km^2），画扇形图表示各大洲面积占全球陆地面积的百分比，并用语言描述你获得的信息.

（第 4 题）

的相对大小，教学时，可以让学生对照这幅地图和扇形图，加深对扇形图的认识.

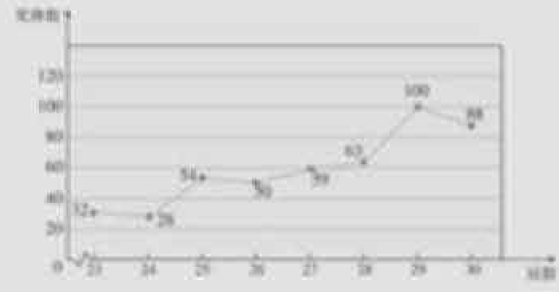
第 5 题给出一个折线图，要求用条形图表示折线图中的信息，这样可以使学生将折线图和条形图联系起来，感受两者之间的共同之处.

2. “综合运用”第 6 题让学生经历整理数据，用条形图进行描述，最后做出判断的统计过程.

第 7 题的素材是学生所熟悉的. 教学中可以利用题目中给出的数据进行数据处理，也可以在全班开展统计活动，由学生自己收集数据，再对收集到的数据进行处理，让学生经历一个简单的收集、整理、描述、分析数据的过程.

第 8 题，选择合适的统计图，需要学生了解各种统计图的特点. 选用折线图不仅易于对进出口额进行比较，而且有利于了解进出口额随时间变化的趋势. 选用条形图易于比较，在反映进出口额变化趋势上没有折线图好.

5. 我国体育健儿在最近八届奥运会上获得奖牌的情况如图所示.



（第 5 题）

（1）最近八届奥运会上，我国体育健儿共获得多少枚奖牌？

（2）用条形图表示折线图中的信息.

综合运用

6. 一家食品公司的市场调查员将本公司生产的一种新点心免费送给 36 人品尝，以调查这种点心的甜度是否适中. 调查结果如下：

C	C	C	B	A	D	B	C	C
D	C	C	A	B	D	C	E	C
E	C	C	A	B	E	C	B	C
C	B	C	C	C	B	C	D	C

A 太甜
B 稍甜
C 适中
D 稍淡
E 太淡

请用表格整理上面的数据，画出条形图，并推断新点心的甜度是否适中.

7. 为了了解七年级同学对三种元旦活动方案的意见，校学生会对七年级全体同学进行了一次调查（每人至多赞成一种方案），结果有 115 人赞成方案 1，62 人赞成方案 2，61 人赞成方案 3，8 人弃权. 请用扇形图描述这些数据，并对校学生会采用哪种方案组织元旦活动提出建议.

8. 随着对外开放程度的不断扩大，我国对外贸易迅速发展. 下表是我国近几年的进出口额数据，请选择适当统计图描述这两组数据，并对它们进行比较.

年份	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
出口额/亿美元	5 933	7 620	9 689	12 178	14 307	12 016	15 777
进口额/亿美元	5 612	6 600	7 915	9 560	11 326	10 059	13 962

142 第十章 数据的收集、整理与描述

第 9 题是用样本去估计总体的平均值、总体总量及总体比例，这些都是抽样调查中常估计的几种总体目标量.

第 10 题主要是抽样合理性的问题. 首先样本是否来自要考察的总体，然后是抽取的样本是否合理，包括样本量和抽取方式，这会影响样本的代表性，从而影响对结果的估计.

3. “拓广探索”的第 11 题涉及两种不同形式的复合条形图，教学中要注意对它们进行比较，发现各自的特点.

第 12 题要求学生参与统计活动，经历数据处理的全过程. 这个题目操作起来有一定的难度，教学中要注意让学生在充分讨论的基础上，选择一个好的方法.

9. 镇政府想了解李家庄的经济情况，用简单随机抽样的方法，在130户家庭中抽取20户调查过去一年收入（单位：万元），结果如下：

1.3　1.7　2.4　1.1　1.4　1.8　1.6　2.7　2.1　1.5

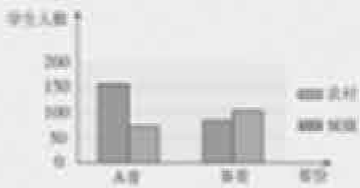
0.9　3.2　1.3　2.1　2.6　2.1　1.0　1.8　2.2　1.8

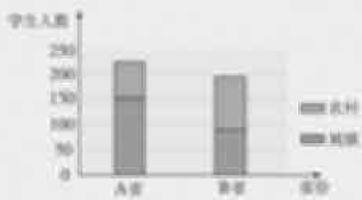
试估计李家庄家庭平均年收入、全村年收入以及村中家庭年收入超过1.5万元的百分比。

10. 小明想了解光明小区的家庭教育费用支出情况，调查了自己学校家住光明小区的30名同学的家庭，并把这30个家庭的教育费用的平均数作为光明小区家庭教育费用的平均数的估计，你觉得合理吗？若不合理，请说明理由，并设计一个抽样调查的方案。

拓广探索

11. 据统计，A，B两省人口总数基本相同。2011年A省的城镇在校中学生人数为156万，农村在校中学生人数为72万；B省的城镇在校中学生人数为84万，农村在校中学生人数为103万。李军同学根据数据画出下面两种复合条形统计图。





（第11题）

(1) 哪种图能更好地反映两省在校中学生总人数？

(2) 哪种图能更好地比较A(B)省城镇与农村在校中学生人数？

(3) 说说这两种图的特点。[1]

12. 设计一份关于一周内丢弃塑料袋个数的调查问卷，并设计一个抽样调查方案，对全校同学作抽样调查，估计全校同学的家庭一周内共丢弃的塑料袋个数，并根据调查结果估计一个月的情况。

[1] 教学时，可以让学生结合本题具体内容来谈谈两种统计图的特点。

[1] 可以用称重的方法. 先称出一定数量（p 个）豆子的质量 n，再称出瓶中所有豆子的质量 m，就可以估计出瓶中豆子的粒数 q：

$$q\approx\frac{p}{n}\times m.$$

也可以用测量体积的方法. 先测出一定数量（p 个）豆子的体积 n，再测出瓶中所有豆子的体积 m，也可以估计出瓶中豆子的粒数 q：

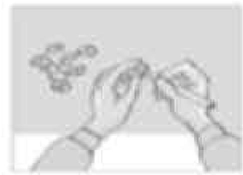
$$q\approx\frac{p}{n}\times m.$$

实验与探究

瓶子中有多少粒豆子

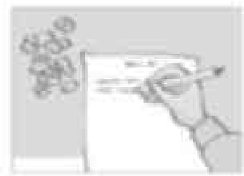
一个瓶子中装有一些豆子，你能用几种方法估计出这个瓶子中豆子的数目？[1] 请同学们小组合作完成下面的活动：

（1）从瓶子中取出一些豆子，记录这些豆子的粒数 m；



（2）给这些豆子做上记号；

（3）把这些豆子放回瓶子中，充分摇匀；



（4）从瓶子中再取出一些豆子，记录这些豆子的粒数 p 和其中带有记号的豆子的粒数 n；

（5）利用得到的数据 m，p，n，估计原来瓶子中豆子的粒数 q，q=______；

（6）数出瓶子中豆子的总数，验证你的估计.

上面的试验利用了抽样调查的方法，类似的试验在生产和科研中经常用到. 例如，我们可以用这种方法估计一个养鱼池中鱼的数目.

首先从鱼池的不同地方捕出一些鱼，在这些鱼的身上做上记号，并记录捕出的鱼的数目 m，然后把鱼放回鱼池. 过一段时间后，在同样的地方再捕出一些鱼，记录这些鱼的数目 p，数出其中带有记号的鱼的数目 n，计算 $\frac{n}{p}$，并把它作为整个鱼池中带有记号的鱼在鱼的总数中所占的比值，这样就可以估计鱼池里鱼的数目 q，即

$$q\approx\frac{p}{n}\times m.$$

144 第十章 数据的收集、整理与描述

实验与探究

1. 对于这个选学栏目的动手试验，学生将体验一种在生产和科研中经常用到的“捉—放—捉”的方法. 这个方法利用了样本估计总体的思想，实际中常用它来估计一个总体的数量.

2. 安排这个“实验与探究”的目的是使学生在进一步感受用样本估计总体的思想的同时，了解试验也是获得数据的有效方法.

3. 这个栏目的活动性较强，教学中可以让学生分成不同的小组活动. 对于活动中的（3），要注意让学生体会“充分摇匀”的必要性，可以向学生指出这样做的目的是使瓶中每粒豆子被抽取的可能性尽量相等，使样本能够更好地代表总体. 各小组通过试验所得到的最后结果可能有所不同，教学中要注意让学生体会不同的样本可能得到不同的结果.

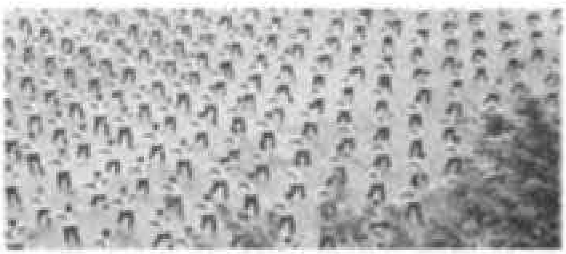
10.2 直方图

我们学习了条形图、折线图、扇形图等描述数据的方法．下面介绍另一种常用来描述数据的统计图——直方图．

问题 为了参加全校各年级之间的广播体操比赛，七年级准备从 63 名同学中挑选身高相差不多的 40 名同学参加比赛．为此收集到这 63 名同学的身高（单位：cm）如下：

158	158	160	168	159	159	151	158	159
168	158	154	158	154	169	158	158	158
159	167	170	153	160	160	159	159	160
149	163	163	162	172	161	153	156	162
162	163	157	162	162	161	157	157	164
155	156	165	166	156	154	166	164	165
156	157	153	165	159	157	155	164	156

选择身高在哪个范围的同学参加呢？



为了使选取的参赛选手身高比较整齐，需要知道数据（身高）的分布情况，即在哪些身高范围的同学比较多，而哪些身高范围的同学比较少．为此可以通过对这些数据适当分组来进行整理．[1]

1．计算最大值与最小值的差

在上面的数据中，最小值是 149，最大值是 172，最大值与最小值的差是 23，说明身高的变化范围是 23．

第十章 数据的收集、整理与描述 145

[1] 问题借用选择参加广播体操队员的实际情境，研究如何利用频数分布等解决问题的方法．教学时，可以先引导学生讨论使用多种方法解决问题，然后再转到频数分布上来．

1．对于本节提出的问题，可以采用不同的方法来解决．本节采用的是分组整理数据，分析数据的频数分布，利用频数的分布规律来解决问题．描述数据的频数分布的统计图主要是条形图和直方图．一般来说，对离散数据，用条形图描述频数分布；而对连续分组数据，用直方图描述频数分布．直方图是本学段学生将要学习的一种新的统计图．

2．身高数据具有连续性，为了得到这组数据的频数分布，需要对数据进行分组整理．获得一组数据的频数分布的一般步骤是：计算数据的最大值与最小值的差，决定组距与组数，列出频数分布表，画出频数分布直方图．

3．决定组距和组数是一个教学难点．一组数据分成多少个组合适呢？这不仅与数据的多少有关，还与数据本身的特点有关．分组的目的之一是为了观察数据分布的特征，因此组数的多少应当适中，若组数太多，数据的分布就会过于分

[1] 对数据分组时，可以先确定组距，再根据组距确定组数；也可以先确定组数，再根据组数确定组距.

2. 决定组距和组数

把所有数据分成若干组，每个小组的两个端点之间的距离（组内数据的取值范围）称为**组距**. 根据问题的需要，各组的组距可以相同或不同. 本问题中我们作等距分组，即令各组的组距相同. 如果从最小值起每隔 3 作为一组，那么由于

$$\frac{\text{最大值}-\text{最小值}}{\text{组距}}=\frac{23}{3}=7\frac{2}{3},$$

所以要将数据分成 8 组：$149\leqslant x<152$，$152\leqslant x<155$，…，$170\leqslant x<173$. 这里组数和组距分别为 8 和 3.

组距和组数的确定没有固定的标准，要凭借经验和所研究的具体问题来决定. 将一批数据分组，一般数据越多分的组数也越多. 当数据在 100 个以内时，按照数据的多少，常分成 5～12 组.[1]

你能举出其他分组的例子吗？

3. 列频数分布表

对落在各个小组内的数据进行累计，得到各个小组内的数据的个数（叫做**频数**（frequency）），整理可得下面的频数分布表：

表 10-3 频数分布表

身高分组	划记	频数
$149\leqslant x<152$	丅	2
$152\leqslant x<155$	正一	6
$155\leqslant x<158$	正正丅	12
$158\leqslant x<161$	正正正𣥃	19
$161\leqslant x<164$	正正	10
$164\leqslant x<167$	正丅	8
$167\leqslant x<170$	𣥃	4
$170\leqslant x<173$	丅	2

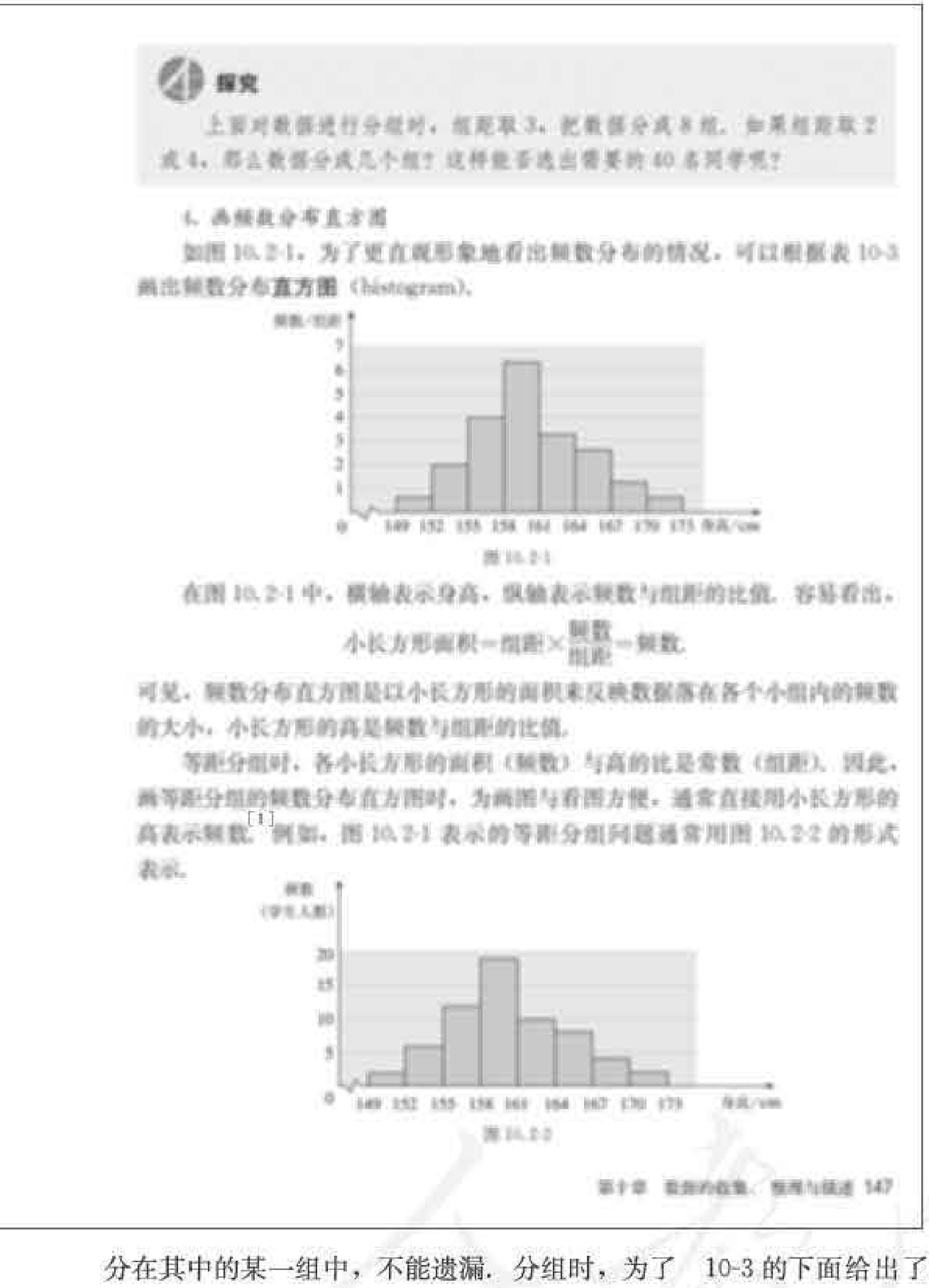
从表 10-3 中可以看出，身高在 $155\leqslant x<158$，$158\leqslant x<161$，$161\leqslant x<164$ 三个组的人数最多，一共有 $12+19+10=41$（人）.

因此可以从身高在 155 cm 至 164 cm（不含 164 cm）的同学中挑选参加比赛的同学.

散，而组数太少，数据的分布就会过于集中，这都不便于观察数据分布的特征和规律. 组数的确定应以是否能够较好地反映数据的分布特征和规律为标准. 因此这个问题上，不是分这么多组就行、分那么多组就不行的问题，而是怎么样分组更合适一些的问题.

教科书提出的确定组数的规律，是一个经验法则. 实际决定组数时，常常有一个尝试的过程. 比如可以先确定一个组距，然后算出相应的组数，最后根据这个组数对数据进行分组整理，看看这样分组是否能够较好地反映数据的分布规律. 在尝试中，往往要比较相应于几个组距的组数，然后从中选定一个比较合适的组数.

组距和组数确定以后，就要根据组距和组数对数据分组. 数据分组时，对数据要遵循“不重不漏”的原则. “不重”是指一个数据只能分在其中的一个组，不能在其他组中重复出现；“不漏”是指在所分成的所有组别中，每个数据都能



探究

上面对数据进行分组时，组距取 3，把数据分成 8 组．如果组距取 2 或 4，那么数据分成几个组？这样能否选出需要的 40 名同学呢？

4．画频数分布直方图

如图 10.2-1，为了更直观形象地看出频数分布的情况，可以根据表 10-3 画出频数分布直方图（histogram）．

图 10.2-1

在图 10.2-1 中，横轴表示身高，纵轴表示频数与组距的比值．容易看出，

$$小长方形面积=组距\times\frac{频数}{组距}=频数.$$

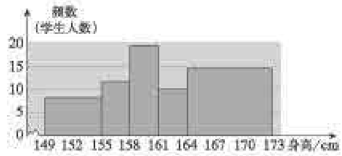
可见，频数分布直方图是以小长方形的面积来反映数据落在各个小组内的频数的大小．小长方形的高是频数与组距的比值．

等距分组时，各小长方形的面积（频数）与高的比是常数（组距）．因此，画等距分组的频数分布直方图时，为画图与看图方便，通常直接用小长方形的高表示频数．[1] 例如，图 10.2-1 表示的等距分组问题通常用图 10.2-2 的形式表示．

图 10.2-2

第十章　数据的收集、整理与描述　147

[1] 对于不等距分组的数据，就不宜用长方形的高来表示各组的频数．比如，把问题中的数据按如下方式不等距分组：$149\leqslant x<155$，$155\leqslant x<158$，$158\leqslant x<161$，$161\leqslant x<164$，$164\leqslant x<173$，则每组的频数分别为 8，12，19，10，14．如果用长方形高来表示各组的频数，直方图为



这时，直方图就不能直观反映出各区间频数的分布情况，如频数分布比较稀少的区间 $164\leqslant x<173$，反而给人频数比较密集的错觉．

分在其中的某一组中，不能遗漏．分组时，为了使数据“不重不漏”，统计中有不同的方法．教科书中采用了“上限不在内”的原则．例如，身高为 152 cm 的数据在 $152\leqslant x<155$ 小组，而不在 $150\leqslant x<152$ 小组．

4．将数据分组后，就可以列出频数分布表．例如表 10-3 就是一个频数分布表．从频数分布表中，我们可以看出数据分组的情况、每一小组频数的多少，以及频数分布的情况．教科书在表 10-3 的下面给出了从这个频数分布表所获得的信息，这些信息为解决本节开始时提出的问题提供了方法．

5．通过数据分组后形成的频数分布表，可以初步看出数据分布的一些特征和规律．为了将频数分布表中的结果直观、形象地表示出来，常画出频数分布直方图．频数分布表在数量表示上比较确切，而频数分布直方图比较直观，两者放在一起，可相互补充，从而使我们对数据的频数

例 为了考察某种大麦穗长的分布情况，在一块试验田里抽取了 100 根麦穗，量得它们的长度如下表（单位：cm）：

6.5	6.4	6.7	5.8	5.9	5.9	5.2	4.0	5.4	4.6
5.8	5.5	6.0	6.5	5.1	6.5	5.3	5.9	5.5	5.8
6.2	5.4	5.0	5.0	6.8	6.0	5.0	5.7	6.0	5.5
6.8	6.0	6.3	5.5	5.0	6.3	5.2	6.0	7.0	6.4
6.4	5.8	5.9	5.7	6.8	6.6	6.0	6.4	5.7	7.4
6.0	5.4	6.5	6.0	6.8	5.8	6.3	6.0	6.3	5.6
5.3	6.4	5.7	6.7	6.2	5.6	6.0	6.7	6.7	6.0
5.5	6.2	6.1	5.3	6.2	6.8	6.6	4.7	5.7	5.7
5.8	5.3	7.0	6.0	6.0	5.9	5.4	6.0	5.2	6.0
6.3	5.7	6.8	6.1	4.5	5.6	6.3	6.0	5.8	6.3

列出样本的频数分布表，画出频数分布直方图.

解：(1) 计算最大值与最小值的差.

在样本数据中，最大值是 7.4，最小值是 4.0，它们的差是

$$7.4-4.0=3.4.$$

(2) 决定组距与组数.

在本例中，最大值与最小值的差是 3.4. 如果取组距为 0.3，那么由于

$$\frac{3.4}{0.3}=11\frac{1}{3},$$

可分成 12 组，组数适合. 于是取组距为 0.3，组数为 12.

(3) 列频数分布表.

表 10-4

分组	划记	频数
$4.0\leq x<4.3$	一	1
$4.3\leq x<4.6$	一	1
$4.6\leq x<4.9$	丅	2
$4.9\leq x<5.2$	正	5
$5.2\leq x<5.5$	正正一	11
$5.5\leq x<5.8$	正正正	15
$5.8\leq x<6.1$	正正正正正丅	28
$6.1\leq x<6.4$	正正丅	13
$6.4\leq x<6.7$	正正一	11
$6.7\leq x<7.0$	正正	10
$7.0\leq x<7.3$	丅	2
$7.3\leq x<7.6$	一	1
合计		100

148 第十章 数据的收集、整理与描述

分布情况了解得更加清楚.

6. 直方图的特点是利用小长方形的面积来反映数据落在各小组内的频数大小. 为此，要建立一个坐标系，其横轴表示数据，上面的每个小段（组距）就是小长方形的底；纵轴表示小长方形的高. 为了使小长方形的面积能表示各组的频数，小长方形的高必须构造成频数与组距的比值.

对于等距分组（各组的组距相等）的数据，为了画图与看图方便，通常直接用小长方形的高表示频数. 教学中不必过多涉及一般直方图，而应重点介绍用长方形的高表示频数的直方图，练习题与作业题也应控制在这种直方图上.

7. 直方图与条形图不同，条形图（纵置时）是用长方形的高表示各类别（或组别）频数的多少，其宽度是固定的；直方图是用长方形的面积表示各组频数的多少（等距分组时，可以用长方形的高表示频数），长方形的高表示各组单位组

(4) 画频数分布直方图.

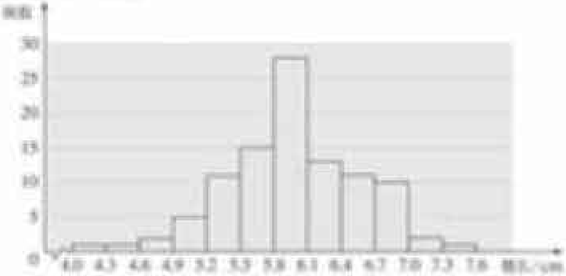


图 10.2-3

从表 10-4 和图 10.2-3 看到，麦穗长度大部分落在 5.2 cm 至 7.0 cm 之间，其他范围较少. 长度在 $5.8\leqslant x<6.1$ 范围内的麦穗根数最多，有 28 根，而长度在 $4.0\leqslant x<4.3$，$4.3\leqslant x<4.6$，$4.6\leqslant x<4.9$，$7.0\leqslant x<7.3$，$7.3\leqslant x<7.6$ 范围内的麦穗根数很少，总共只有 7 根.[1]

练习

下面数据是截至 2010 年费尔兹奖得主获奖时的年龄：

29	39	35	33	39	28	33	35
31	31	37	32	38	36	31	39
32	38	37	34	29	34	38	32
35	36	33	29	32	35	36	37
39	38	40	38	37	39	38	34
33	40	36	36	37	40	31	38
38	40	40	37				

费尔兹奖是国际上享有崇高声誉的一个数学奖项，每 4 年评选一次，主要授予年轻的数学家. 美籍华人丘成桐（1949 年出生）1982 年获费尔兹奖.

请根据下面不同的分组方法列出频数分布表，画出频数分布直方图，比较哪一种分组能更好地说明费尔兹奖得主获奖时的年龄分布.

(1) 组距是 2，各组是 $28\leqslant x<30$，$30\leqslant x<32$，…；

(2) 组距是 5，各组是 $25\leqslant x<30$，$30\leqslant x<35$，…；

(3) 组距是 10，各组是 $20\leqslant x<30$，$30\leqslant x<40$，….

第十章 数据的收集、整理与描述 149

[1] 从一组数据的频数分布，可以看出这组数据的分布规律. 至于对这组数据总体分布的估计，则超出了本册教科书的要求.

练习答案

（图略）.

相比之下，(2) 中的分组较好地说明了费尔兹奖得主获奖时的年龄分布.

距的频数（即频数/组距），长方形的宽表示各组的组距，各长方形的高和宽都有意义. 此外，由于分组数据具有连续性，直方图的各长方形通常是连续排列，中间没有空隙，而条形图则是分开排列，长方形之间有空隙.

8. 练习中的这道题是要让学生体会对一组数据，采用不同的分组，将得到不同的频数分布. 组数确定得合适，数据的分布规律会呈现得较为清楚，组数确定得不合适，数据的分布规律将呈现得比较模糊. 例如，对于这个练习题，如果组距取 2 或 10，相应的组数取 8 或 3，得到的频数分布规律就比较模糊，而组距取 5，把数据分成 4 组，得到的频数分布规律比上面的两种清楚.

习题 10.2

1. 习题 10.2 主要是让学生熟悉本节所学的用频数分布直方图描述数据的方法，以及利用频数直方图分析数据中蕴含的信息.

习题 10.2

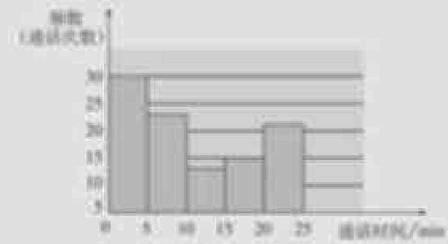
复习巩固

1. 江涛同学统计了他家10月份的长途电话明细清单，按通话时间画出直方图（如图）。

   (1) 他家这个月一共打了多少次长途电话？

   (2) 通话时间不足10 min的有多少次？

   (3) 哪个时间范围的通话最多？哪个时间范围的通话最少？



（第1题）

2. 从蔬菜大棚中收集到50株西红柿秧上小西红柿的个数：

28	62	54	29	32	47	68	27	55	43
36	79	46	54	25	82	16	39	32	64
61	59	67	56	45	74	49	36	39	52
85	65	48	58	59	64	91	67	54	57
68	54	71	26	59	47	58	52	52	70

   请以组距为10将数据分组，列出频数分布表，画出频数分布直方图，分析数据分布的情况。

综合运用

3. 体育委员统计了全班同学60秒跳绳的次数，并列出下面的频数分布表：

次数	$60\leqslant x<80$	$80\leqslant x<100$	$100\leqslant x<120$	$120\leqslant x<140$	$140\leqslant x<160$	$160\leqslant x<180$	$180\leqslant x<200$
频数	2	4	21	13	8	4	1

   (1) 全班有多少学生？

   (2) 组距是多少？组数是多少？

   (3) 跳绳次数 x 在 $100\leqslant x<140$ 范围的学生有多少？占全班学生的百分之几？

   (4) 画出适当的统计图表示上面的信息。

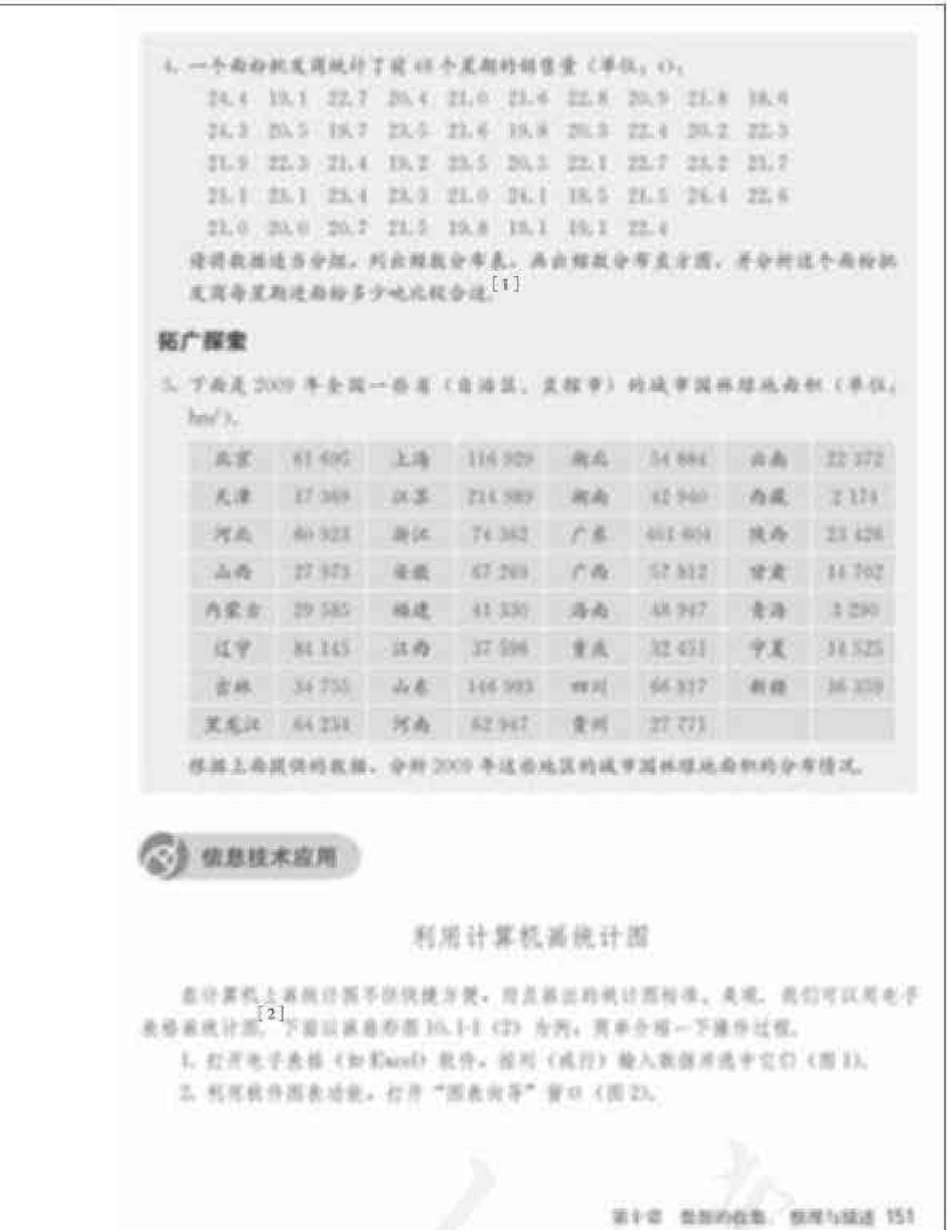
   (5) 你怎样评价这个班的跳绳成绩？

150 第十章 数据的收集、整理与描述

在“复习巩固”的两道题目中，第1题要求根据直方图回答几个问题，也就是要求读出直方图中的信息．在这个直方图中应注意横轴和纵轴的意义，横轴表示通话时间，纵轴表示频数，即通话的次数，并不是“频数/组距”．对等距分组的直方图，教科书中的练习或习题都用高表示频数．

第2题明确给出了组距，学生只需根据这个组距来确定组数，并对数据分组，得到数据的频数分布．实际分组时，对于表示第一组范围的左端点，可以取这组数据的最小值，但有时为了方便，也可取小于这组数据的最小值的数作为第一组的左端点．例如，本题中，给定一组数据的最小值是16，为了统计方便，第一组可以取 $15\leqslant x<25$，即第一组的左端点是15，小于给定数据的最小值16．这种情况在本节的练习中也遇到了．

2．“综合运用”的两道题目都要求画出统计图描述数据．第3题给出了频数分布表，要求根据这个统计表回答一些问题，并用适当的统计图



4. 一个面粉批发商统计了前 48 个星期的销售量（单位：t）：

24.4	19.1	22.7	20.4	21.0	21.6	22.8	20.9	21.8	18.6
24.3	20.5	18.7	23.5	21.6	19.8	20.3	22.4	20.2	22.3
21.9	22.3	21.4	19.2	23.5	20.3	22.1	22.7	23.2	23.7
21.1	23.1	23.4	23.3	21.0	24.1	18.5	21.5	24.4	22.6
21.0	20.0	20.7	21.5	19.8	19.1	19.1	22.4		

请对数据适当分组，列出频数分布表，画出频数分布直方图，并分析这个面粉批发商每星期进面粉多少吨比较合适.[1]

拓广探索

5. 下面是 2009 年全国一些省（自治区、直辖市）的城市园林绿地面积（单位：hm^2）.

北京	61 695	上海	116 929	湖北	54 884	云南	22 372
天津	17 369	江苏	214 989	湖南	42 940	西藏	2 174
河北	60 923	浙江	74 382	广东	401 604	陕西	23 426
山西	27 973	安徽	47 269	广西	57 812	甘肃	14 702
内蒙古	29 585	福建	41 330	海南	48 947	青海	3 290
辽宁	84 145	江西	37 598	重庆	32 451	宁夏	14 525
吉林	34 735	山东	146 993	四川	66 917	新疆	36 339
黑龙江	64 234	河南	62 947	贵州	27 771		

根据上面提供的数据，分析 2009 年这些地区的城市园林绿地面积的分布情况.

信息技术应用

利用计算机画统计图

在计算机上画统计图不仅快捷方便，而且画出的统计图标准、美观. 我们可以用电子表格画统计图.[2] 下面以画条形图 10.1-1（2）为例，简单介绍一下操作过程.

1. 打开电子表格（如 Excel）软件，按列（或行）输入数据并选中它们（图 1）.
2. 利用软件图表功能，打开“图表向导”窗口（图 2）.

第十章 数据的收集、整理与描述 151

[1] 教学时，可以让学生以小组合作的方式完成本题. 不同的小组对数据进行不同的分组，作出相应的频数分布表和频数分布直方图. 各小组交流结果，比较哪一种分组给出的频数分布更清楚，更有利于为面粉批发商提出建议.

[2] 有条件的学校还可以试着用其他的软件画统计图.

表示统计表中的信息. 根据数据的特点和频数分布表，可以选用不同的统计图（例如用频数分布直方图和扇形图等），从不同的角度表示统计表中的信息. 关于这一点，教学中要注意引导学生选用多个统计图描述数据，并注意比较各种统计图的特点.

第 4 题要考察一组给定数据的频数分布. 这里首先需要考虑确定组距、组数，对数据适当分组的问题. 对于这点，教学时要注意提醒学生选择不同的组距、组数进行尝试，从中找到一种适中的分组. 另外，教学中也要提醒学生注意，在对数据分组的问题上，不是分这么多组就行，分那么多组就不行的问题，而是怎样分组更合适一些的问题.

3. “拓广探索”的题目提供了一个带有数据的背景资料，要求学生根据这些材料，提出具体问题，通过收集、整理、描述和分析数据等数据处理的活动来回答这些问题. 根据这些材料，学


图1

图2

3. 在"标准类型"的"图表类型"中选择"饼图"(扇形图)，点击"下一步"，出现窗口(图3).

图3

图4

4. 选择"列"，点击"下一步"，出现窗口(图4).

5. 在"数据标志"的"数据标签包括"中选择"百分比(P)"，并点击完成，就可以作出扇形图.

利用电子表格不仅能够画扇形图，还可以画出其他类型的统计图. 请利用电子表格画出条形图10.1-1(1)和直方图10.2-2.

152 第十章 数据的收集、整理与描述

生可以从不同的角度提出不同的问题，解决问题的策略也不尽相同，得到的结论也各不相同，因此这道题目具有一定的开放性.

信息技术应用

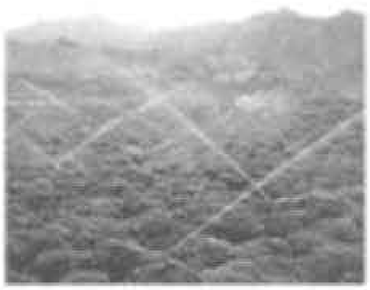
随着信息技术的发展，越来越多的统计软件问世，利用统计软件可以作出符合各种需要的统计图. 教科书以常用的电子表格软件为例，简单介绍了使用计算机制作统计图的方法. 对于有条件使用计算机的学校，教学时可以让学生学习这个选学内容，体会计算机在处理统计问题中的作用.

10.3 课题学习 从数据谈节水[1]

阅读下面资料.[2]

地球上的水包括大气水、地表水和地下水三大类. 地表水可分为海洋水和陆地水，陆地水又可分为冰川、河流、湖泊等. 地球上水的总体积是 14.2 亿 km^3. 其中，海洋水约占 96.53% 以上，淡水约占 2.53%. 而在淡水中，大部分在两极的冰川、冰盖和以地下水的形式存在，其中冰川、冰盖占 77.2%，地下水占 22.4%，而人类可以利用的水还不到 1%.

目前，由于世界人口增长、水污染以及水资源浪费等原因，使全世界面临着淡水资源不足的问题. 世界各国特别是发展中国家水资源紧缺问题越来越严重. 发展中国家疾病死亡事件中 80% 与缺水和水资源污染有关.



我国是世界上严重缺水的国家之一. 中国年水资源总量约为 2.75×10^4 亿 m^3，居世界第六位，人均占有水量仅为 2 400 m^3 左右，只相当于世界人均的 $\frac{1}{4}$，居世界第 110 位. 中国已被联合国列为 13 个贫水国家之一.

随着水利事业的发展，我国的水利建设工程取得了突飞猛进的发展. 但由于经济的进一步发展和人们生活用水量的日益增长，水资源供应和需求出现了日益尖锐的矛盾. 缺水状况在全国范围内普遍存在. 以城市供水为例，全国大约 670 个城市中，一半以上不同程度缺水，其中严重缺水的有 110 多个. 20 世纪 80 年代以来，我国北方许多大中城市因缺水致使居民定量供水，电厂、工厂停产或限产.

我国一方面存在水资源供不应求的情况，另一方面水资源得不到合理利用. 例如，2008 年，全国农业用水量为 3 664 亿 m^3，占全国总用水量的 62%，但在灌溉农田时，有 60% 左右的水消耗于蒸发渗透；全国工业用水量为 1 401 亿 m^3，而水的重复利用率仅为 50% 左右；全国生活用水量逐年上升，如下页表所示，这除了与人口增长有关，生活中浪费水的现象也不容忽视.

第十章 数据的收集、整理与描述 153

[1] 课题学习的标题“从数据谈节水”指出了活动的重点，希望学生根据查阅统计资料和从事统计调查活动所得的结果来谈论有关节水问题，就是要用数据说话. 教学中不要偏离主题.

另外，教学时，也可以根据学生的实际情况，选用其他的课题展开统计调查活动.

[2] 由于篇幅的限制，这里的背景资料很有限，教学时，可以让学生查找更多的资料，丰富调查活动.

1. 本章的“课题学习”具有一定的综合性和活动性. 活动的主题是与生态环境有关的节水问题，也是学生熟悉和感兴趣的. 课题学习不但让学生再次感受到统计可以帮助我们了解周围世界的现状，为我们制定决策提供依据，也是对学生进行人文教育的好机会.

2. 活动一要求学生根据背景资料进行统计活动. 为了使活动更加丰富，教学时可以引导学生查阅其他一些资料，获得更多的关于水资源储量、分布和利用的数据，对这些数据进行处理，挖掘数据后面的信息，得到更多的结论.

在第 1 题中，为了了解地球上水资源的分布情况，可以让学生查阅资料，了解更多的水资源的构成以及各组成部分的储量. 重点在于选择合适的统计图描述数据.

解答第 2 题，要从已有数据中挖掘信息.

第 3 题要求用趋势图表示数据的变化趋势并进行预测. 因为散点落在某条直线的附近，呈现

2000～2008 年全国生活用水量　（单位：亿 m^3）

年份	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
用水量	577	601	616	631	651	675	694	710	729

水资源的短缺已成为制约社会和经济发展的重要因素．合理利用水资源是人类可持续发展的当务之急．而节约用水是水资源合理利用的关键所在，是最快捷、最有效、最可行的维护水资源可持续利用的途径之一．我们每个人都应该有节约用水的意识，积极参与节水行动，这是实现水资源合理利用的前提和保证．

一、根据阅读材料，完成下列问题．

1．请给短文配上合适的统计图形，直观地表示地球上水资源和淡水资源的分布情况．

2．根据国外的经验，一个国家的用水量超过其水资源总量的 20%，就有可能发生“水危机”．依据这个标准，2008 年我国是否属于可能发生“水危机”的行列？

3．由表“2000～2008 年全国生活用水量”可知，全国生活用水量逐年上升．若在平面直角坐标系中描出表中各对值所对应的点，其中横坐标表示年份，纵坐标表示年用水量（图 10.3-1），可以发现，这些散点近似落在某条直线上．

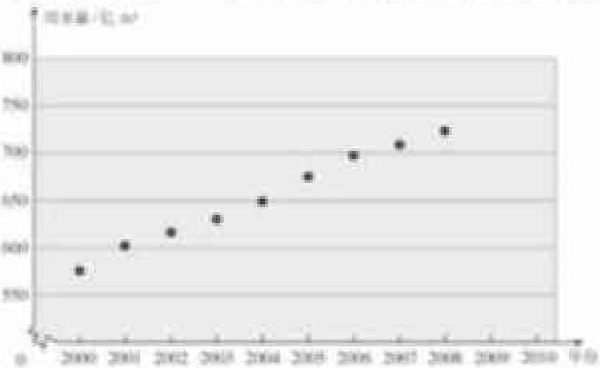


图 10.3-1

（1）如果用靠近尽可能多散点的直线来表示用水量的这种发展趋势，你能试着在图 10.3-1 上作出这条直线吗？

154 第十章　数据的收集、整理与描述

线性增长趋势，所以可以引导学生利用直线去表示这种趋势，预测未来用水量的发展．对于用直线表示发展趋势的问题，原则上可以画出很多条直线，教师可以引导学生思考和讨论如何画出合适的直线、如何制定“合适直线”的标准，如“过尽可能多的点”“把散点个数分成相等的两部分”等．标准不唯一，但有合理和不合理之分．教科书给的标准是“靠近尽可能多的散点”，是直观的标准，所画的直线也是定性刻画．在后续高中的学习中，会学习如何定量地求离所有散点“距离”最近的直线．学生可以根据自己作的趋势图预测 2009 年和 2010 年的全国生活用水量，并与查阅的实际数据比较，体会统计方法的特点，感悟随机现象中的规律性．

3．活动二首先要求学生通过统计调查来收集数据．调查问卷中所包含的内容，除了完成本活动所需要的信息外，还应该考虑整个活动，尤其要考虑为最后写出调查报告作准备．例如，调

（2）根据所作直线，估计 2009 年和 2010 年的全国生活用水量，并和自己查阅的这两年实际的用水量进行比较．你的估计准确吗？为什么？

二、进行统计调查，完成统计报告．

请以小组为单位，以“家庭人均月生活用水量”为题，在全校范围内开展一次统计调查活动，并完成一篇调查报告．

1．给出调查目的、调查对象、调查问卷、调查方法．

2．用表格整理收集到的数据，用直方图描述数据，并分析数据中蕴含的信息．

3．计算或估计全校同学家庭人均月生活用水量的平均数，并与全国人均月生活用水量比较．

4．结合我国水资源短缺的形势，谈谈节约用水的意义，以及节约用水如何从我做起．

第十章　数据的收集、整理与描述　155

查问卷中可以就人们是否具有节约用水的意识设计问题，也可以就人们是否有某种浪费生活用水的不良习惯设计问题等．

为了使样本估计总体的效果好些，应选择与学校中学生的总人数有关的样本容量，这里教师可以给予适当的指导．具体抽取样本时，要让学生在确定方案前讨论各种抽取方式是不是满足简单随机抽样的要求，然后再具体组织实施．

4．撰写调查报告，可以采用不同的形式，比如可以采用科学小论文的形式等．在撰写调查报告时，应注意体现数据的作用，尽量用数据、统计图表等代替冗长的文字叙述，使报告更具科学性和说服力．

[1] 在活动中，简单随机样本的平均身高有可能会出现偏离全班平均身高比较远的情况，这体现了样本的随机性. 但是多次重复的情况下，大多数的样本平均身高应该是比较接近全班平均身高的.

[2] 平均数受数据中的极端值的影响较大，当一组数据有极端值时，平均数一般不能很好地代表这组数据的平均水平，有时可以采用去掉一个最大值和一个最小值后，求剩余数据的平均数的统计策略.

数学活动

活动1 用简单随机抽样方法估计全班同学的平均身高

小组合作完成下列活动：

根据本班人数准备相同数量的小纸片，这些小纸片没有明显差别.

1. 调查并记录全班每个同学的身高，分别写在不同小纸片上，算出全班同学的平均身高，然后把所有的小纸片放在一个纸盒里.

2. 充分搅拌盒中的纸片，随意抽取出 15 张纸片作为一个样本，计算纸片上数字的平均值，将抽取的纸片放回纸盒.

3. 比较样本平均身高和全班平均身高，谈谈你对这个结果的看法.

4. 重复上述步骤 2 若干次，把每次求得的样本平均身高和全班平均身高作比较，你有什么发现？[1]

活动2 谁的反应快

准备一把带刻度的直尺，和一位同学合作来测量反应速度.

第一步：伸出一只手，拇指和其余四指分开；

第二步：让同伴把直尺竖立，刻度 0 在下方，拿到你的拇指和四指之间，使刻度 0 的位置与拇指在同一高度，然后松手，你要以最快的速度抓住直尺；

第三步：记录手抓在直尺上的刻度 l（单位：cm）；

第四步：重复试验 10 次，记录并整理试验所得数据.

在 10 次试验中，所得 l 的最大值和最小值各是多少？l 的平均值是多少？[2] l 的值与反应速度有什么关系？与你的同伴对调，并重复上面的过程，看谁的反应速度快.

156 第十章 数据的收集、整理与描述

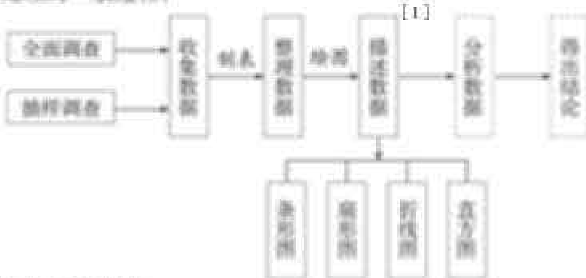
1. 本章的“数学活动”安排了两个活动. 这些活动与前面的练习和习题有所不同，前面的练习或习题大多是给出了原始数据，要求学生根据这些原始数据从事数据处理的活动，而这里的数学活动，没有原始数据，需要学生首先从事收集数据的活动，然后再对所得数据进行处理. 另外，在数据处理的过程中，这些活动需要灵活运用描述数据和分析数据的策略，因此这两个活动有较强的实践性和综合性.

2. 两个活动都要求学生通过一些小试验来获得数据，再对所得数据进行处理，根据数据处理的结果回答活动中提出的问题. 同时，两个活动都强调让学生进行统计调查，经历收集数据和处理数据的基本过程. 活动 1 是针对本章的统计调查的重点内容——简单随机抽样而设计的，目的是让学生切身经历用简单随机抽样抽取样本，感受在估计总体时样本的代表性和随机性. 在活动 2 中，向学生渗透了用样本估计总体的思想.

小　结

一、本章知识结构图

数据处理的一般过程：



二、回顾与思考

为了更好地了解周围世界，根据现有信息作合理推断和预测，我们经常需要有目的地收集一些数据．

本章我们学习了两种收集数据的方法——全面调查和抽样调查．全面调查要考察全体调查对象，而抽样调查只考察部分调查对象．因为抽样调查是根据样本来推断总体，所以在设计抽样方案时，要注意样本对总体的代表性．简单随机抽样是一种基本且实用的抽样方法，它要求总体中的每一个体有相等的机会被抽到．除了抽样方法要合理外，为了使样本能比较客观地反映总体，还要考虑样本容量的大小．

利用统计图表等整理和描述数据，有利于我们发现和探索数据中蕴含的规律，获取数据中的信息．不同的统计图从不同侧面描述了数据的特点，因此，选用合适的统计图描述数据，对发现和探索数据的特点和规律是很重要的．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 什么是全面调查和抽样调查？它们各有什么优缺点？

2. 哪些情况下宜用全面调查？哪些情况下宜用抽样调查？

3. 为什么抽样调查可以作为了解总体的方法？为了使样本对总体有较好的代表性，抽样时需要注意什么？

4. 简单随机抽样有什么特点？用简单随机抽样抽出的样本是否一定具有代表性？请举例说明．

5. 条形图、扇形图、折线图和直方图在表示数据方面各有什么特点？

第十章　数据的收集、整理与描述　157

[1] 条形图和折线图是前两个学段已经学过的内容，正文没有专门学习．教学中，可以根据学生掌握这两种统计图的实际情况进行适当复习．

1. 本章小结以数据处理的一般过程为线索，概括总结了全章的主要内容和重要的思想方法．小结与章前引言呼应，突出数据处理的过程，强调在统计活动中感受统计的思想方法．

2. “本章知识结构图”没有按各小节知识的展开情况设计，而是按照每一节都遵循的规律展示知识的内在联系．无论是 10.1 节的统计调查、10.2 节的直方图，还是 10.3 节的课题学习都是在重复着收集、整理、描述和分析数据得出结论的过程，在这个过程中重点学习收集、整理和描述数据的常用方法．因此，数据处理的一般过程将我们所要学习的内容联系在一起．

3. “回顾与思考”总结了本章的主要内容及反映的思想方法．对本章内容的复习，应放在数据处理这个大环境下来进行，在收集、整理、描述和分析数据的基本过程中来审视统计调查方法和数据整理描述的策略和方法，使学生对本章的内容有更深刻的认识．教学时，可以结合几个具

条形图

能够显示每组中的具体数据

扇形图

能够显示部分在总体中所占的百分比

折线图

能够显示数据的变化趋势

直方图

能够显示数据的分布情况

复习题 10

复习巩固

1. 要调查下列问题，你觉得应该用全面调查还是抽样调查？说说理由．
   (1) 检测某城市的空气质量；
   (2) 了解全国中学生的视力和用眼卫生情况；
   (3) 企业招聘，对应聘人员进行面试；
   (4) 调查某池塘中现有鱼的数量．
2. 请指出下列哪些调查的样本缺乏代表性．
   (1) 了解全校同学喜欢课程情况，对某班男同学进行调查；
   (2) 了解某小区居民的防火意识，对你们班同学进行调查；
   (3) 了解商场的平均日营业额，选在周末进行调查．
3. 校医院调查某校七年级学生的体重，对七年级30名男生进行了调查，平均体重为43 kg．你觉得这个可以作为七年级学生平均体重的估计吗？为什么？
4. 为更好地开展体育运动，增强学生体质，学校准备在运动会后购买一批运动鞋，供学生借用．七（2）班为配合学校工作，从全校各个年级共随机抽查了38名同学的鞋号，具体数据如下：

158 第十章 数据的收集、整理与描述

体实例来复习，使学生在用统计的方法解决问题的过程中，经历数据处理的基本过程，达到对本章主要内容进行全面复习的目的．

复习题 10

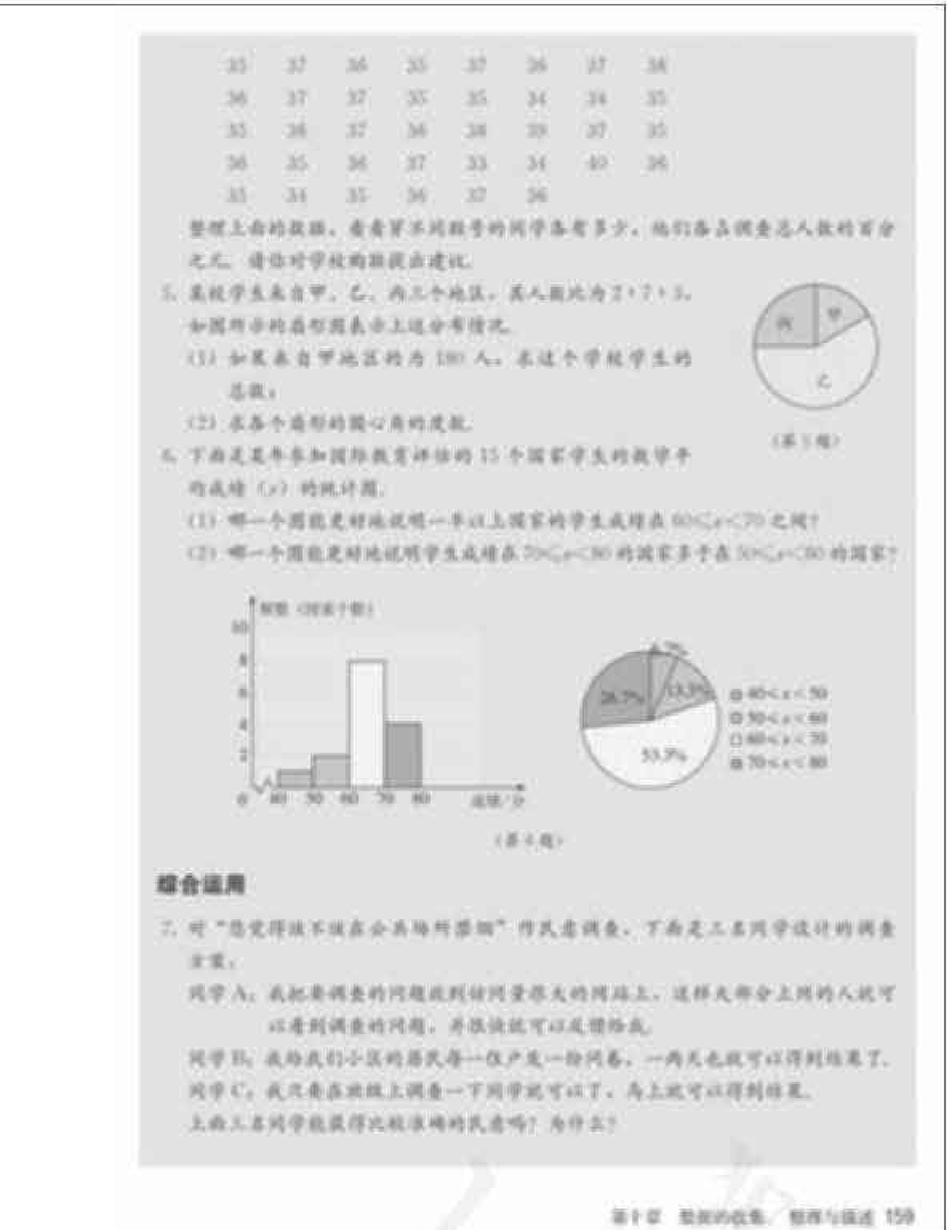
1．“复习题 10”对本章的内容进行了复习，重点是整个数据处理中的前三个环节：收集、整理和描述数据．

“复习巩固”第 1 题让学生体会抽样调查和全面调查各自的特点，至于具体采取哪种调查方法，要根据具体的问题决定．

第 2，3 题让学生体会样本代表性的好坏．

第 4 题是根据解决问题的需要，对已经给出的数据进行整理的题目，要用到样本估计总体的思想．

第 5 题体现了统计图形象、直观的作用．本题如果没有扇形图，对于通过计算得出的甲、乙、丙三个地区学生人数的相对数量就难以形成直观



35　37　36　35　37　36　37　38
36　37　37　35　35　34　34　35
35　36　37　36　38　39　37　35
36　35　36　37　33　34　40　36
35　34　35　36　37　36

整理上面的数据，看看穿不同鞋号的同学各有多少，他们各占调查总人数的百分之几。请你对学校购鞋提出建议.

5. 某校学生来自甲、乙、丙三个地区，其人数比为 2 : 7 : 3，如图所示的扇形图表示上述分布情况.

(1) 如果来自甲地区的为 180 人，求这个学校学生的总数；

(2) 求各个扇形的圆心角的度数.

（第 5 题）

6. 下面是某年参加国际教育评估的 15 个国家学生的数学平均成绩（x）的统计图.

(1) 哪一个图能更好地说明一半以上国家的学生成绩在 $60\leqslant x<70$ 之间？

(2) 哪一个图能更好地说明学生成绩在 $70\leqslant x<80$ 的国家多于在 $50\leqslant x<60$ 的国家？

（第 6 题）

综合运用

7. 对“您觉得该不该在公共场所禁烟”作民意调查，下面是三名同学设计的调查方案.

同学 A：我把要调查的问题放到访问量很大的网站上，这样大部分上网的人就可以看到调查的问题，并很快就可以反馈给我.

同学 B：我给我们小区的居民每一住户发一份问卷，一两天也就可以得到结果了.

同学 C：我只要在班级上调查一下同学就可以了，马上就可以得到结果.

上面三名同学能获得比较准确的民意吗？为什么？

第十章　数据的收集、整理与描述　159

的印象，教学中要注意这一点．本题也要注意让学生体会统计与其他数学内容的联系.

第 6 题将频数分布直方图和扇形图放在一起进行比较，可以使学生更好地认识这两种统计图的特点．这道题要求学生利用统计图中的信息来回答问题，属于读图层次的要求.

2．“综合运用”第 7 题是调查方案的评价，调查涉及的方式有比较现代的网络，也有比较传统的访问，主要考查的还是样本代表性的问题，也就是调查的样本是否能很好地代表要考察的总体．教学中可以让学生发表各自的观点，通过讨论交流给出最后的评价结果.

第 8 题需要学生了解一些与现实生活和统计工作密切联系的名称（如“翻两番”）.

第 9 题需要分析样本数据，并根据样本对总体进行估计，再做出决策，具有很强的现实意义．需要学生注意的是，在对总体进行推断时，要考虑样本获得的途径是否科学.

[1] “番”是按几何级数计算的．“翻两番”就是增加了 300%．

8．下表给出了我国 2005~2010 年国内生产总值（GDP）．

年　份	2005	2006	2007	2008	2009	2010
GDP/亿元	184 937	216 314	265 810	314 045	340 903	401 202

（1）请选择合适的统计图描述表中的数据，并分析这几年国内生产总值的变化趋势．

（2）如果到 2020 年国内生产总值比 2005 年翻两番[1]，那么 2020 年的国内生产总值是多少？增长了百分之几？

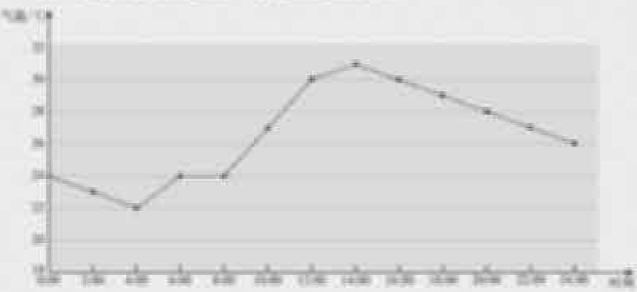
9．某市在实施居民用水定额管理前，对居民生活用水情况进行了调查，下表是通过简单随机抽样调查获得的 50 个家庭去年的月均用水量（单位：t）．

4.7	2.0	3.1	2.3	5.2	2.8	7.3	4.3	4.8	6.7
4.5	5.1	6.5	8.9	2.0	4.5	3.2	3.2	4.5	3.5
3.5	3.5	3.6	4.9	3.7	3.8	5.6	5.5	5.9	6.2
5.7	3.9	4.0	4.0	7.0	3.7	8.3	4.2	6.4	3.5
4.5	4.5	4.6	5.4	5.6	6.6	5.8	4.5	6.2	7.5

（1）请选择合适的组距和组数，列出样本频数分布表，画出频数分布直方图．从直方图中你能得到什么信息？

（2）为了鼓励节约用水，要确定一个用水量的标准，超出这个标准的部分按 1.5 倍价格收费．若要使 60% 的家庭水费支出不受影响，你觉得家庭月均用水量应该定为多少？为什么？

10．下面的折线图描述了某地某日的气温变化情况．



（第 10 题）

（1）这一天的最高气温是多少？什么时候达到最高气温？

（2）这一天的最低气温是多少？什么时候达到最低气温？

（3）估计这一天 7 时、11 时、15 时和 19 时的气温．

160 第十章　数据的收集、整理与描述

第 10 题对前两学段学过的折线图进行回顾．

第 11 题给出一组数据，要求根据这组数据进行统计分析．在进行统计分析的过程中，必然会遇到选择适当的统计图表示数据的问题．教学中要注意让学生选用多个统计图描述数据，并注意比较各种统计图的特点．另外，本题中，也要注意让学生体会对数据进行不同的分组，将会得到不同的频数分布，有些频数分布较好地呈现了数据的分布规律，而有些呈现得比较模糊．

在第 12 题中，设计抽样方案要考虑所在学校的实际情况，规模大的可以用抽样调查，规模小的可以用全面调查．两种方案没有绝对的对错之分．只要是学生已经权衡了不同方案在所在学校实施的利弊，并且是合理的就行．

3．“拓广探索”中的第 13 题，因为要比较男、女阅读上的差异，所以在设计抽样方案时，会涉及男、女是分开抽好，还是先一起抽后，再分别统计好的问题．

11. 在同一条件下，对同一型号的30辆汽车进行耗油1 L所行驶的路程的试验，结果如下（单位：km）：

14.1	12.3	13.7	14.0	12.8	12.9	13.1	13.6
14.4	13.8	13.8	12.6	13.2	13.3	14.2	13.9
12.7	13.0	13.2	13.5	13.6	13.4	13.6	12.1
12.5	13.1	13.5	13.2	13.4	12.6		

请统计分析汽车的耗油情况。

12. 请你设计一个抽样调查的方案，了解自己所在学校有多少初中生帮父母做过家务。

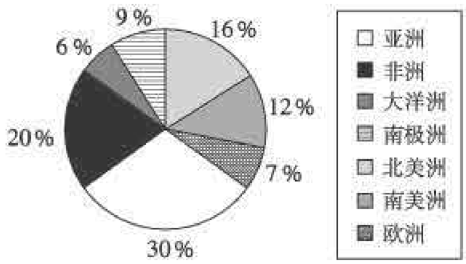
拓广探索

13. 高尔基说："书，是人类进步的阶梯。"阅读可以丰富知识，拓展视野，充实生活，——给我们带来种种好处。请你设计一个调查方案，了解你所在学校同学课余阅读的情况，并比较男、女生在阅读爱好和阅读量上是否有差异。

Ⅲ 习题解答

习题 10.1

1. (略).
2. (2) 的提问更好. 因为 (1) 的提问明显透露了提问者的个人观点.
3. (1) 全面调查;(2) 抽样调查;(3) 抽样调查.
4.

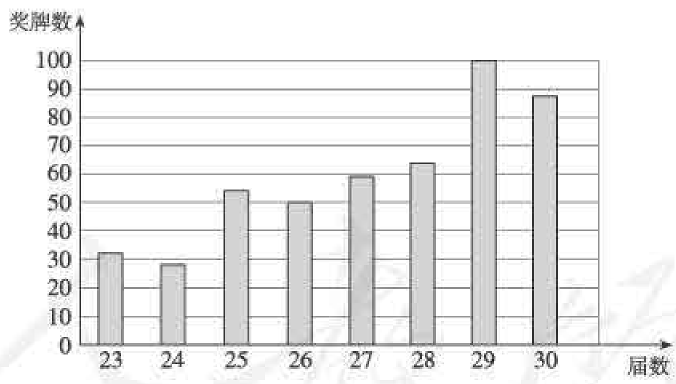


(第 4 题)

由图可知,亚洲和非洲占了世界陆地面积的一半,亚洲的面积最大,约占世界陆地面积的 30%,世界上面积最小的洲是大洋洲,其次是欧洲.

5. (1) 474;

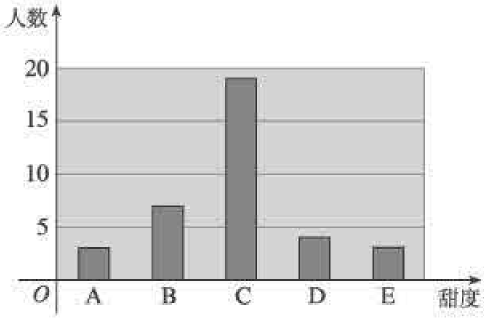
(2) 条形图如图所示.



(第 5 (2) 题)

6.

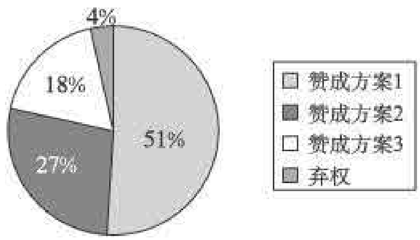
甜度	划记	频数
A	下	3
B	正丁	7
C	正正正下	19
D	下	4
E	下	3



（第 6 题）

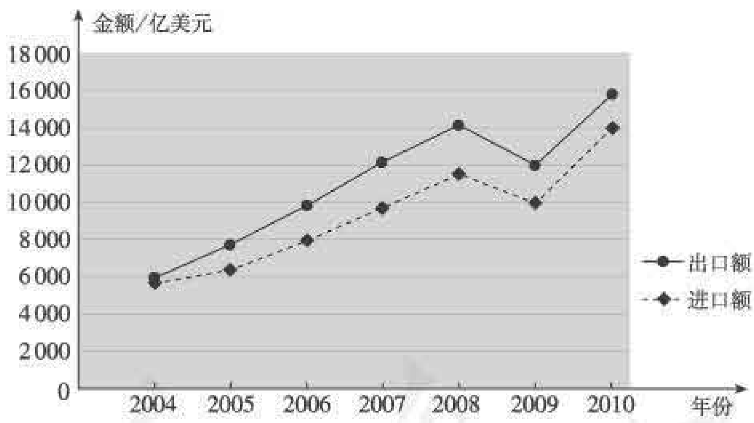
由上表和条形图可以看出，这种新点心的甜度适中.

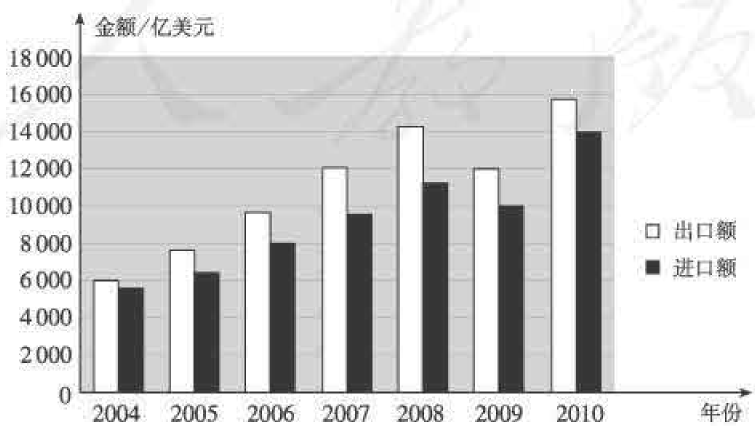
7. 扇形图如图所示.



（第 7 题）

8. 用折线图和条形图分别描述如下：





（第 8 题）

从折线图或条形图可以看出，2004 年至 2010 年间的进出口额基本上逐年增加，只有 2009 年例外，相比前一年，进出口额都出现明显下降．还可以看出每年的出口额都大于进口额．

9. 户平均年收入约为 1.8 万元，整村的年收入约为 236.6 万元，村中户年收入超过 1.5 万元的约为 65%．

10. 不合理．因为小明调查的 30 个家庭中都至少有一个小孩在上学，所以其教育费用支出对整个小区来说不具有代表性．

    可以进行简单随机抽样调查，例如对小区内各门牌号进行抽签，然后按抽中的签号入户调查．这样得到的样本比小明直接调查同学的家庭会更具有代表性．

11. (1) 右边的图；(2) 左边的图；(3)（略）．

12. （略）．

习题 10.2

1. (1) 约 102 次；

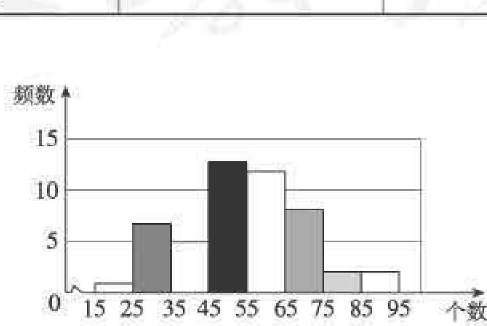
   (2) 约 53 次；

   (3) 0～5 min 的通话时间最多，10～15 min 的通话时间最少．

2. 频数分布表：

个数 x	划记	频数
$15\leqslant x<25$	一	1
$25\leqslant x<35$	正丅	7
$35\leqslant x<45$	正	5
$45\leqslant x<55$	正正下	13
$55\leqslant x<65$	正正丅	12
$65\leqslant x<75$	正下	8
$75\leqslant x<85$	丅	2
$85\leqslant x<95$	丅	2
合计		50

频数分布直方图：



（第 2 题）

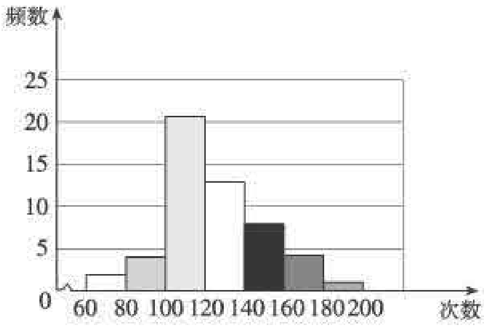
从统计图表中可以看出，一株西红柿秧上结出西红柿的个数在 45～65 范围的最多，约占总株数的一半；其次，个数在 25～35 和 65～75 的共 15 株，占总株数的 30%；个数在 25 以下的只有 1 株，占总株数的 2%；个数在 75 以上的有 4 株，占总株数的 8%.

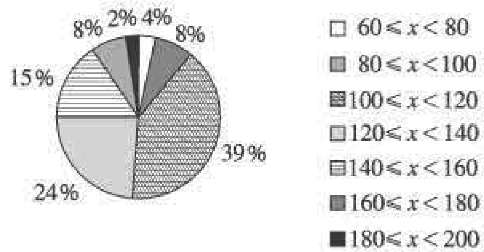
3. (1) 53 人；

(2) 20，7；

(3) 34，约 64%；

(4) 用频数分布直方图和扇形图表示数据如下：





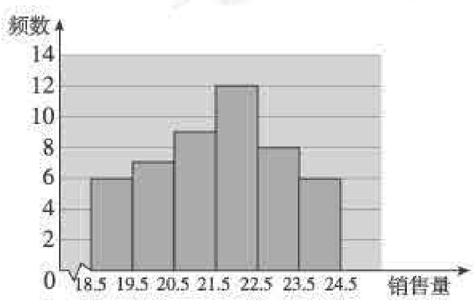
(第 3 (4) 题)

(5) (略).

4. 频数分布表：

销售量 x	划记	频数
$18.5\leqslant x<19.5$	正一	6
$19.5\leqslant x<20.5$	正丅	7
$20.5\leqslant x<21.5$	正𠄌	9
$21.5\leqslant x<22.5$	正正丅	12
$22.5\leqslant x<23.5$	正下	8
$23.5\leqslant x<24.5$	正一	6
合计		48

频数分布直方图：



(第 4 题)

5.（略）.

复习题 10

1.（3）全面调查，(1)(2)(4) 抽样调查.

2.（1)(2)(3) 样本都不具代表性.

3. 不可以，样本只能作为七年级男生体重的估计，而不是所有七年级学生平均体重的估计.

4.

鞋号	划记	频数	百分比
33	一	1	3%
34	下	4	10%
35	正正	10	26%
36	正正	10	26%
37	正下	9	24%
38	丅	2	5%
39	一	1	3%
40	一	1	3%
合计		38	100%

由上表可以看出穿 35 号、36 号、37 号鞋的学生最多，约占统计总人数的 76%. 因此可以建议学校购鞋时多买这 3 个号码的鞋，比如各买 25%左右，此外可以适当购买 33 号、39 号、40 号等号码的鞋.

5.（1）1 080 人；（2）60°，210°和 90°.

6.（1）扇形图；（2）直方图.

7. 调查的总体是全体中国公民.

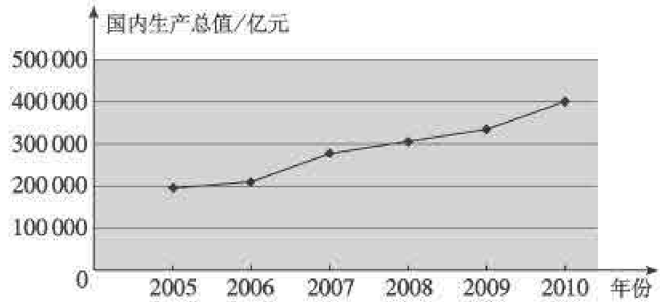
同学 A 的方案只考虑了上网且登录某网站的人群，那些不能上网和上网但不登录该网站的人群被排除在外. 因此同学 A 的方案抽取的样本的代表性差.

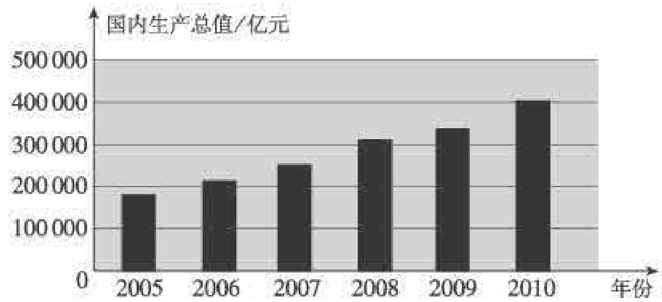
同学 B 的方案考虑的人群是小区内的居民，有一定的片面性. 因此同学 B 的方案抽取的样本的代表性差.

同学 C 的方案考虑的人群是本班同学，有一定的片面性. 因此同学 C 的方案抽取的样本的代表性差.

因此，这三种调查方案都有一定的片面性，一般不能得到比较准确的答案.

8.（1）用折线图或条形图描述数据如下：





（第 8 题）

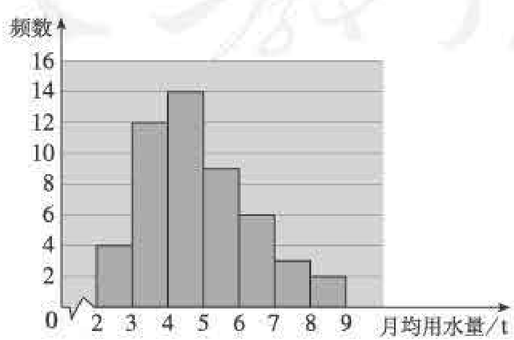
从折线图或条形图可以看出，2005 年至 2010 年间的国内生产总值逐年增加，呈现线性的增长趋势；

（2）739 748 亿元，300%.

9.（1）选组距为 1，组数为 7. 频数分布表为：

月均用水量	划记	频数	百分比
$2\leqslant x<3$	正	4	8%
$3\leqslant x<4$	正正丅	12	24%
$4\leqslant x<5$	正正下	14	28%
$5\leqslant x<6$	正下	9	18%
$6\leqslant x<7$	正一	6	12%
$7\leqslant x<8$	下	3	6%
$8\leqslant x<9$	丅	2	4%
合计		50	100%

频数分布直方图为：



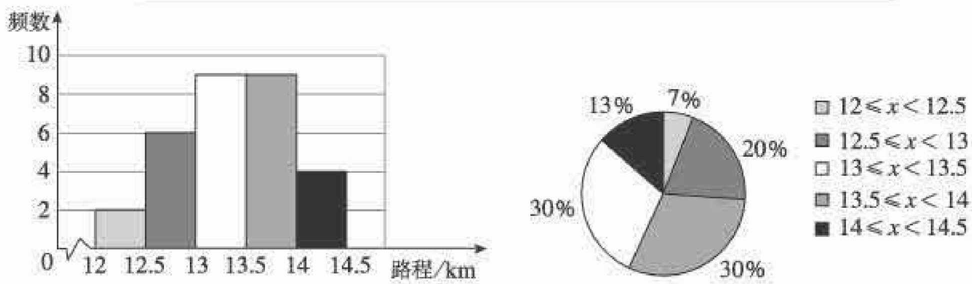
（第 9 题）

(2) 标准定为 5 t. 因为 50 个家庭的数据是通过简单随机抽样获得的，样本中家庭月均用水量不超过 5 t 的占 60%，由样本估计总体，可以推断约 60%的家庭水费支出不受影响.

10. (1) 31℃，14：00；(2) 22℃，4：00；(3) 24℃，28℃，30.5℃，29℃.

11. 将数据适当分组整理，得到统计图表如下：

路程 x	划记	频数	百分比
$12\leqslant x<12.5$	丅	2	7%
$12.5\leqslant x<13$	正一	6	20%
$13\leqslant x<13.5$	正𠀎	9	30%
$13.5\leqslant x<14$	正𠀎	9	30%
$14\leqslant x<14.5$	𠀎	4	13%
合计		30	100%



(第 11 题)

这种汽车耗油一升可行驶 12 km 以上，最多可行驶 14.4 km，且其中超过 70%的汽车可行驶 13 km 以上.

12. (略).

13. (略).

Ⅳ 教学设计案例

10.1 统计调查 (第 2 课时)

一、内容和内容解析

1. 内容

抽样调查.

2. 内容解析

统计调查分全面调查和抽样调查. 全面调查收集到的数据全面、准确，但一般花费多、耗时

长. 现实中存在很多无法或者不必要实施全面调查的情况，这时就需要通过抽样调查来收集数据. 与全面调查需考察总体中的所有个体不同，抽样调查是根据调查的目的和任务要求，从总体中抽取部分个体作为样本进行观察，然后用所得到的样本数据来推断总体，其中蕴含着部分估计总体的统计思想. 如何抽取“好”（即有代表性）的样本，客观地反映总体，是我们最关心的问题. 简单随机抽样是一种简单且实用的抽样方法，它的特点是使总体中的每一个个体都有相等的机会被抽到. 这样抽取的样本，在一定的样本容量下，一般具有较好的代表性，既达到估计总体的目的，又能节省人力、物力，体现出抽样调查的优越性.

通过上述分析，可知本节课的教学重点是：抽样调查的必要性和简单随机抽样调查.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 了解抽样调查及相关概念.

(2) 了解抽样调查的必要性和简单随机抽样调查，初步体会样本估计总体的思想.

2. 目标解析

达到目标 (1) 的标志是：学生能用自己的语言描述什么是抽样调查，能通过实例解释什么是总体、个体、样本、样本容量，以及样本与总体的关系.

达到目标 (2) 的标志是：学生能够判断出一个给定的调查，是全面调查还是抽样调查，能够举出一些利用抽样调查进行调查的例子；能根据不同的实际背景选择合适的调查方式，会用简单随机抽样的方法选择样本，实施抽样调查，并举例说明抽样调查的必要性和用自己的语言简单解释简单随机抽样的合理性.

三、教学问题诊断分析

学生以往的学习内容中，多是以确定性为主的知识. 虽然学生在前一阶段学习了统计图表、用全面调查收集数据，并对统计活动有了初步的认识，但抽样调查中统计结果的不确定性会导致学生出现对统计结果的怀疑和对统计的科学性的质疑. 在抽取样本时，由于学生生活阅历上的限制，对于如何使得样本具有比较好的代表性容易束手无策，对于抽取样本时随机选取与样本的代表性的关系难于理解.

本节课的教学难点是：抽样调查中用样本估计总体的合理性.

四、教学过程设计

1. 创设情境，体会抽样调查的思想方法

某中学共有 2 000 名学生，想了解全校学生对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类电视节目的喜爱情况.

问题 1 请同学们想一想怎样调查.

师生活动：学生回答：抽取一部分学生进行调查，然后根据调查数据，推断出整个学校学生对这五类节目的喜爱情况. 教师指出，这就是另外一种调查方法——抽样调查. 接着，教师给出抽样

调查的概念，并举例说明：厨师在煮一大锅汤时，先要将汤搅拌一下，尝一口就能知道整锅汤的味道，这就是抽样调查的方法.

（学生可能回答：用全面调查的方法，对全校学生逐个进行调查，然后整理收集到的数据，统计出全校学生对五类电视节目的喜爱情况. 此时，教师可以追问：用这种方法进行调查有什么优缺点？哪个小组想出了不同的调查方法？然后，学生在教师的引导下想到抽取一部分学生调查的方法.）

设计意图：学生通过观察、归纳、思考、抽象、概括实例，了解抽样调查的有关概念，体会抽样调查方法蕴含的统计思想.

问题2 厨师在尝汤前，为什么先要将汤搅拌一下呢？

师生活动：学生回答：将汤搅拌均匀，使一口汤的味道能代表整锅汤的味道.

追问：尝汤可以估计出整锅汤的味道，和全面调查有所不同，用的是抽样调查的方法. 你能说出抽样调查方法的一些特点吗？

师生活动：学生回答：用一部分代表全体.

设计意图：通过尝汤，使学生明白全面调查方法在某些调查中并不可行，体会抽样调查的必要性，以及用样本估计总体的合理性.

问题3 你还能举出一些利用抽样调查方法进行调查的例子吗？

师生活动：学生举例.

（例如，了解一个城市学生的身高情况，了解北京某天空气的质量，了解外地游客对北京旅游服务行业的满意度，兵工厂考察一批炮弹的杀伤范围等.）

设计意图：让学生通过举例，体会抽样调查除具有花费少、省时省力的特点外，还适用一些不宜用全面调查的情况.

问题4 在这个调查中，你能分别说出什么是个体、总体、样本、样本容量吗？

师生活动：学生回答.

设计意图：让学生熟悉有关概念.

2. **小组讨论，体会样本的代表性**

问题5 活动中用抽样调查的方法如何选取部分学生？说明你这样选取为什么合理.

师生活动：学生回答抽取的方法并说明理由.

（例如，在操场随机采访若干名同学，在学校门口随机采访若干名同学，每个班抽取相同学号的同学，在图书馆随机采访若干名同学，用电脑把全校学生编号，随机摇号选取若干名同学等.）

追问：活动中抽取样本时，抽取多少学生比较合适？选取样本时使每一个个体有相等的机会被抽到，为什么？

师生活动：学生回答. 教师给出概念：抽取样本的过程中，总体中的每一个个体都有相等的机会被抽到，像这样的抽样方法是一种简单随机抽样.

设计意图：学生通过分析和讨论，感受选取样本时每一个个体要有相等的机会被抽到，进一步体会选取样本时要注意随机选取，以及选取方式与样本的代表性的关系.

3. **设计方案，体会抽样调查的全过程**

问题 6 表 1 是某位同学制作的样本容量为 100 的调查数据统计表.

表 1

节目类型	划记	人数
A 新闻	正一	6
B 体育	正正正正丅	22
C 动画	正正正正正止	29
D 娱乐	正正正正正正正下	38
E 戏曲	正	5
合　计		100

你能用扇形图描述表 1 中的数据吗?

师生活动：学生制作扇形图（图 1），直观表示有关数据.

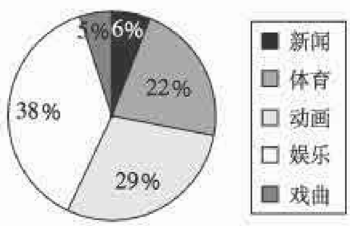


图 1

设计意图：用扇形图描述数据，直观展示喜爱五类节目人数的百分比.

问题 7 这位同学对数据进行了分析，得到样本的情况，调查活动是否结束了? 如果没有，还需要做什么? 如果结束了，请说明理由.

师生活动：学生根据是否达到调查目的判断调查活动是否结束.

设计意图：让学生体会用样本估计总体的统计思想.

问题 8 你能总结一下用抽样调查的方法进行调查的过程吗?

师生活动：师生共同总结，并用框图（图 2）表示抽样调查的过程.

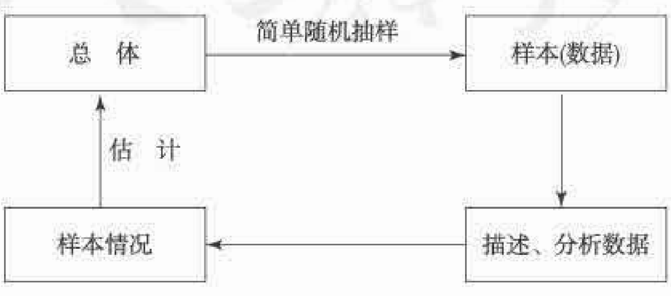


图 2

设计意图：让学生结合例子总结利用抽样调查的方法解决实际问题的流程，同时体会、领悟抽样调查中样本估计总体的思想和随机的思想等.

4. **归纳小结**

师生共同回顾本节内容，并请学生回答下列问题：

(1) 什么是抽样调查?

(2) 什么样的调查适合用抽样调查方法?

(3) 你认为在抽取样本时应注意什么?

(4) 简单随机抽样的特点是什么?

师生活动：学生回答问题，梳理本章所学内容.

设计意图：通过小结，归纳出本节课的核心概念、核心思想和方法，同时了解学生仍存在的问题，并帮助学生解决.

5. **布置作业**

教科书习题 10.1 第 3，6 题.

五、目标检测设计

1. 要调查某校初三学生星期天的睡眠时间，选取的调查对象最合适的是（　　）.

(A) 选取一个班级的学生　　(B) 选取 50 名男生

(C) 选取 50 名女生　　(D) 随机选取 50 名初三学生

设计意图：本题主要考查学生对随机抽样中样本代表性的理解.

2. 下面的调查中，不适合抽样调查的是（　　）.

(A) 中央电视台《实话实说》的收视率

(B) 全国人口普查

(C) 一批炮弹的杀伤力情况

(D) 了解一批灯泡的使用寿命

设计意图：本题主要考查学生对抽样调查适用性的理解.

3. 在火车的站台上，有 200 袋黄豆将被装上火车，袋子的大小都一样，随机选取 10 袋的质量（单位：kg）分别为：98，100，99，100，99，99，98，98，100，99. 估计这 200 袋黄豆的质量为______________.

设计意图：本题主要考查学生对抽样调查中样本估计总体思想的理解.

10.2　直方图（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. **内容**

直方图.

2. **内容解析**

这节主要研究频数直方图．直方图是本学段学生学习的一种新的统计图．用直方图可以直观展示数据的分布状态，用于对总体的分布特征进行推断．因此直方图的绘制是否合理、准确，直接对数据分析造成影响．要画一组数据的频数分布直方图，首先要获得这组数据的频数分布表，一般步骤是：计算最大值与最小值的差，决定组距与组数，列出频数分布表．列频数分布表的每一个环节直接影响到直方图绘制的结果，进而影响从直方图中读取数据蕴含的信息．

在统计中，用来描述数据频数特征的统计图，除了直方图，通常有条形图、折线图等．将直方图与比较类似的条形图进行比较，有助于对直方图特点及适用范围的认识．

通过上述分析，可知本节课的教学重点：画直方图，利用直方图解释数据中蕴含的信息．

二、目标和目标解析

1. **目标**

认识直方图，能画直方图，能利用直方图解释数据中蕴含的信息．

2. **目标解析**

达到目标的标志是：给定一组数据，学生会合理确定组距与组数，会制作频数分布表，会绘制频数分布直方图．学生能够利用直方图解释数据中蕴含的信息．

三、教学问题诊断分析

本节课采用的是分组整理数据、分析数据的频数分布、利用频数的分布规律来解决问题的统计过程．为了得到一组数据的频数分布，需要对数据进行分组整理．一组数据分成多少组合适呢？这不仅与数据的多少有关，还与数据本身的特点有关．分组的目的之一是为了观察数据分布的特征，因此组数的多少应当适中．若组数太多，数据的分布就会过于分散；组数太少，数据的分布就会过于集中．这都不便于观察数据分布的特征和规律．组数的确定应以能够较好地反映数据的分布特征和规律为目的．因此在这个问题上，不是分这么多组就行、分那么多组就不行的问题，而是怎样分组更合适的问题．实际决定组数时，常常有一个尝试的过程．这种结果的不确定性对于学生来说是比较少见的，学生往往怀疑自己的选择是否正确，是否还有更加合理的选择．同时，对不同的分组进行比较，需要进行大量的计算，这也是对学生计算能力的考验．

根据以上的分析，可知本节课的教学难点：决定组距和组数．

四、教学过程设计

1. **创设情境，整理数据**

为了参加全校各年级之间的广播体操比赛，七年级准备从 63 名同学中挑出身高相差不多的 40 名同学参加比赛，为此收集到了这 63 名同学的身高（单位：cm）如下：

158	158	160	168	159	159	151	158	159	168	158
154	158	154	169	158	158	159	167	170	153	160
160	159	159	160	149	163	163	162	172	161	153

续表

156	162	162	163	157	162	162	161	157	157	164
155	156	165	166	156	154	166	164	165	156	157
153	165	159	157	155	164	156	166			

问题 1 要挑出身高相差不多的 40 名同学参加比赛，我们应该怎样整理数据？

师生活动：学生回答. 教师指出，为了使选取的参赛选手身高比较整齐，需要知道数据的分布情况，即身高在哪个范围内的学生多，哪个范围内的学生少. 因此可以对这些数据进行适当的分组整理.

（学生可能的答案：把数据从小到大排序，数一下哪个范围的人数多，列表表示；把身高数据相同的人数数出来，列表表示.）

设计意图：通过对解决问题方法的讨论，引出将数据分组整理的方法.

问题 2 究竟分几组比较合适呢？

师生活动：学生回答. 教师提醒：组距和组数没有固定的标准，要根据具体问题来决定. 原则上 100 个数以内分为 5～12 组较为恰当，且组数为正整数.

设计意图：在讨论中使学生理解在操作过程中，组数过多或过少都不利于问题的解决.

问题 3 组数的多少由什么决定？

师生活动：学生在教师引导下回答：组数的多少由组距决定，组距越大组数越少，组距越小组数越多.

教师直接给出如下对数据分组整理的步骤：

(1) 计算最大与最小值的差.

最大值－最小值＝172－149＝23（cm），这说明身高的范围是 23 cm.

(2) 决定组距和组数.

如果取组距为 3，由$\frac{\text{最大值}-\text{最小值}}{\text{组距}}=\frac{172-149}{3}=\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}$，可知可将这组数据分为 8 组.

(3) 列频数分布表.

对于上述问题，可列出频数分布表（教科书第 146 页表 10-3）. 从表中可以发现，身高在$155\leqslant x<158$，$158\leqslant x<161$，$161\leqslant x<164$ 三个组的人数最多，共有 12＋19＋10＝41（人），因此可以从身高在 155～164 cm（不含 164 cm）的学生中选队员.

设计意图：使学生通过思考，理解组距与组数的关系. 在此基础上，通过教师讲解，使学生理解列频数分布表的过程.

问题 4 如果我们先确定组数是 8，能否确定组距呢？

师生活动：学生回答：$\frac{172-149}{8}=\frac{23}{8}=2\frac{7}{8}$，可以确定组距是 3.

设计意图：使学生理解在对数据分组时可以先确定组距，再根据组距确定组数，也可以先确定组数，再根据组数确定组距.

问题 5 生活中有很多应用分组的例子，你能举出其他的例子吗？

师生活动：学生回答问题.

（例如，考试后统计出的分数段.）

设计意图：使学生理解在实际生活中分组是普遍存在的.

问题 6 要挑出身高相差不多的 40 名同学参加比赛，应该选组距是多少比较合适呢？

师生活动：教师引导学生比较 3 个组距：组距是 2 时，共有 49 人，需先舍弃其中一组（$153\leqslant x<155$ 或 $163\leqslant x<165$）6 人，再在剩余的身高差距不超过 10 cm 的 43 人中选 40 人；组距是 3 时，需在身高差距不超过 9 cm 的 41 人中选 40 人；组距是 4 时，需从身高范围不超过 12 cm 的 49 人中选 40 人. 师生共同得出结论：从需舍弃的人数和身高差距来看，组距是 3 时分组比较合适.

设计意图：让学生通过实例比较体会如何选取合适的组距.

2. **画出频数分布直方图**

问题 7 可以画图表示频数分布的情况吗？

师生活动：教师引导：可以画频数分布直方图，从频数分布直方图中能直观形象地看出频数分布的情况. 前面对 63 名同学的身高数据进行了整理，并且列出了频数分布表. 现在，我们根据频数分布表作出相应的频数分布直方图.

教师给出画频数分布直方图的步骤：

（1）以横轴表示身高，纵轴表示频数与组数的比值.

（2）画频数分布直方图，从图中可以看出小长方形的面积$=$组距$\times\dfrac{\text{频数}}{\text{组距}}=$频数，因此长方形的面积表示数据落在各个小组内的频数.

（3）在等距离分组中，由于小长方形的面积与高的比是常数（组距），所以在作频数分布直方图时，用小长方形的高表示频数.

问题 8 通过频数分布直方图，你能分析出数据分布有什么规律吗？

师生活动：学生回答：身高大部分在 155～167 cm 范围，超过 167 cm 或低于 155 cm 的学生比较少. 身高在 158～164 cm 范围的学生最多，超过这个范围的和低于这个范围的学生数差不多成对称分布.

设计意图：问题 7，8 让学生通过频数分布直方图分析数据的分布情况，并进行说明.

问题 9 同学们能不能总结一下绘制直方图的步骤？

师生活动：学生在教师引导下总结出下面的步骤：①计算最大与最小值的差；②决定组距和组数；③列频数分布表；④以横轴表示数据，纵轴表示频数，画频数分布直方图.

设计意图：让学生通过总结过程，归纳出绘制频数分布直方图的一般步骤.

3. **小结**

师生共同总结本节课内容，并请学生回答下列问题：

（1）你能说出绘制直方图的步骤吗？

（2）直方图和条形图有哪些异同点？

（3）我们还学习了哪些统计图表，它们各有什么特点？

设计意图：通过提问让学生回顾、总结直方图的有关内容.

4. **布置作业**

教科书习题 10.2 第 1，3 题.

五、目标检测设计

为了了解全校 2 000 名学生中穿各种尺码校服的人数，小明做了一个抽样调查，调查了 50 名同学的身高，数据如下表所示（单位：cm）.

141	165	144	171	145	145	158	150	157	150
154	168	155	155	169	157	157	157	158	149
150	150	160	152	152	159	152	159	144	154
155	157	145	160	160	160	158	162	155	162
163	155	163	148	163	168	155	145	172	168

请列出这些数据的频数分布表，画出频数分布直方图，估计全校穿各种尺码校服的人数的分布情况.

设计意图：本题主要考查学生对频数分布表和频数分布直方图的掌握，以及由频数分布直方图获取数据分布信息的能力.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 抽样调查的概念及抽样方法

抽样调查的概念有广义和狭义之分. 从广义上看，抽样调查就是非全面调查，它是指从研究的总体中按一定的原则抽取部分单位作为样本进行观察研究，以认识总体的一种统计调查方法. 广义概念的抽样调查按抽样方法不同，分为概率抽样和非概率抽样两种. 所谓非概率抽样是相对于概率抽样而言的，它是指从研究的总体中有意识地抽取部分单位作为样本进行观察研究，以认识总体的统计调查方法. 如典型抽样、随意抽样和定额抽样. 所谓概率抽样是指从研究的总体中按随机原则抽取部分单位作为样本进行观察研究，并根据这部分单位的调查结果去推断总体，以达到认识总体的统计调查方法. 概率抽样也称随机抽样，包括简单随机抽样、分层抽样、系统抽样、整群抽样和多级抽样等形式. 从狭义上看，抽样调查就是概率抽样. 以下就几种常见的抽样方法进行简单介绍：

（1）简单随机抽样

简单随机抽样是根据随机原则直接从总体中抽取样本单位的一种抽样方法. 从理论上讲，简单随机抽样最符合抽样的随机原则，是抽样调查中最基本也是最简单的组织形式. 简单随机抽样在抽取样本单位时，主要有以下几种抽选方法：

①直接抽选法　直接从调查对象中随机抽选.

②抽签法　先给总体的每个单位编上序号，将号码写在纸片上，搅拌均匀后从中随机抽选，直到抽够预先规定的样本单位数为止.

③随机数字表法　先将总体的全部单位加以编号，根据编号的位数确定随机数字表的栏数，然后从任意一栏、任意一行的数字开始，可以向任何方向摘录属于编号范围内的数字，即为样本单位. 如果是不重复抽样，抽到重复的数字时就删掉，直到抽够预定的样本单位数为止.

（2）分层抽样

分层抽样又称类型抽样或分类抽样，它是指对总体各单位先按主要标志加以分组（层），然后再从各组中按随机原则抽选一定单位构成样本的抽样形式. 设总体由 N 个单位组成，把总体划分为 K 组，然后从每组中抽取若干个单位构成样本容量为 n 的抽样总体. 分层抽样在各组中的样本可以看成是总的样本数在各组中的分配.

（3）系统抽样

系统抽样又称机械抽样或等距抽样，它是将总体全部单位按某一标志排列，然后按固定顺序和间隔来抽选样本单位的抽样组织形式. 系统抽样总体单位的排列顺序可以是无关标志，也可以是有关标志. 系统抽样抽取样本单位的具体方法有随机等距、对称等距、中点等距等方式.

以一个具体例子来比较以上几种抽样方式，即可以看出抽样方法的差异：如要对全校学生是否喜欢校园广播站进行抽样调查，那么，利用上学时间在校门口随机抽取学生完成调查的方式是简单随机抽样；男女同学中各抽取 50 人完成调查的方式是分层抽样；而把全校同学进行大排序，然后每隔 50 人抽取一位同学完成调查的方式则是系统抽样.

2. 样本容量的确定

样本容量是指一个样本中所包含的单位数. 在抽样调查中，一般情况下样本容量越大，抽样误差就会越小，但调查费用、时间增加；反之，样本容量过小，虽节省调查费用、时间，但将导致抽样误差增大，甚至失去抽样推断的价值. 因此，在抽样设计中应根据抽样误差的要求和调查费用、时间的情况慎重确定样本容量. 样本容量多少的确定与抽样方式、取样要求、总体性质密切相关. 有人认为样本容量越大，误差就越小，所以样本容量越大越好，但实际情况并不是这样的. 即使不考虑调查费用的问题，也不是样本越多就越好，这和抽样调查的误差形成方式有关.

抽样调查中对总体的参数进行估计时，由于样本的随机性，即使对样本的调查和观察完全正确，也往往和待估的总体参数真值之间存在着差异，这种差异是由抽样的样本代表性引起的，所以称作抽样误差.

在抽样调查中除了抽样误差以外，常常由于各种原因会引起偏差，也称偏误. 它定义为样本估计量的平均值与总体真值之间的离差. 它的直观意义是按某一抽样方案反复进行抽样，其所有可能样本估计值的均值与总体真值之间的离差.

偏差与抽样误差不同，抽样误差是一种随机误差，不是系统误差，即估计值有时偏高有时偏低，平均起来误差会相互抵消. 而偏差则带有系统性，通常会偏于某一方向，如在调查产值时，被调查者往往为了显示其成绩而使调查结果偏高，在调查计划生育的出生人数或出生率时，可能由于瞒报出生人数而使调查结果偏低. 其次，抽样误差可能随着样本容量增大而缩小，而大多数偏差并不随着样本容量增大而缩小. 抽样调查中产生偏差的原因是多种多样的，例如调查的项目比较敏

感、调查人员有倾向性态度、调查问卷措辞不当等．这些偏差应当尽量避免．

因为调查的目的就是要得到总体真值，所以在设定样本容量时需要综合考虑抽样误差和偏差，这就提出了一个均方误差的概念，即所有可能样本估计值与总体真值之间离差的平方的均值．在无偏估计的情况下，它等于抽样方差；在有偏估计的情况下，均方误差等于抽样方差加偏差的平方．从以上定义可以看出，均方误差越小，抽样调查的效果才越好，因此抽样调查的误差不是只和样本容量有关，样本容量的增大可以减少抽样误差，而样本的随机性和代表性高才能减少偏差．

3. 统计图

统计图是统计资料的一种表达方式，它可以简洁直观地显示统计表中的数据，可以帮助我们从众多的数据中发现规律，可以更迅速、更有效的传递信息，给人以明确而深刻的印象．统计图的种类很多，不同类型的数据所采取的整理和描述方法是不同的．

（1）对数据类别较为明确的数据，我们可以采取分类整理，整理分类数据可以采用条形图、扇形图等．

①条形图是用宽度相等的条形高度或长短来表示数据多少的图形．条形可以横置或纵置，纵置时也称为柱形图．此外，条形图还分单式、复式等形式．因为描述的是类别不同的数据，所以同一数据不同类别的条形要独立分开，不能相邻．

②扇形图是用圆形或者圆内扇形的角度来表示数据大小的图形，它主要用于表示一个样本（或总体）中各组成部分的数据占全部数据的比例．每个组成部分可以看作是每个不同的类别．

（2）数值类数据表现为数字，我们在整理时通常是对其进行分组，数据分组的主要目的是观察数据的分布特征．对此类数据我们可以采用直方图描述．直方图和条形图不同．首先，条形图是用条形的长度表示各类别频数的多少，其宽度是固定的；直方图时用面积表示各组频数的多少，其高度和宽度均有意义，当数据是不等距分组时，宽度可能是不等的．其次，由于分组数据具有连续性，直方图的各矩形通常是连续排列，而表示分类数据的条形图的条形则是分开排列．最后，条形图主要用于展示分类数据，而直方图则主要用于展示数值类分组数据．

（3）对有顺序的数据，上面介绍的条形图、扇形图等同样适用，但有些统计图只适用于顺序数据，更便于我们对此类数据进行分组整理．它们包括累积频数（或频率）分布图和环形图等．累积频数分布图按照一定顺序累积，每一组都是其前面已经累积所有数据的总和，因此它是有顺序的，不能随意更改．

（4）当数据的顺序表现为时间序列时，我们可以采用折线图描述数据．折线图是在平面坐标上用折线表现数据变化特征的统计图，可以反映事物发展变化的规律和趋势．如我国近年 GDP 变化趋势就可以用折线图描述．

4. 直方图的组距选择

用矩形的宽度和高度（即面积）来表示频数分布的图形，对于某些特殊现象或为了特定研究的需要，也可以采用不等距分组．比如，对人口年龄的分组，可以根据人口成长的生理特点分成 0～6 岁（婴幼儿组）、7～17 岁（少年儿童组）、18～59 岁（中青年组）、60 岁以上（老年组）等．无论等距分组还是不等距分组，所有矩形的总面积相加总是等于 1．

绘制直方图时要先根据组距分组，遵循“不重不漏”的原则．因此直方图和条形图不同，相邻

的组不能分开，代表在各组间没有任何遗漏．同时，直方图一般按照大小顺序排列，各组间没有重叠的部分，从而使每个数据都在某个组中，而且每个数据都只能在唯一的一组中．

为了避免出现“空白组”（即没有变量值的组），首先应根据数据的极差来进行分组，即需要先计算最大值和最小值的差．其次，分组的目的之一是为了观察数据分布的特征．如果组数太少，那么数据的分布就会过于集中；如果组数太多，数据的分布就会过于分散，这都不利于观察数据的分布特征和规律．一般情况下，一组数据所分的组数 K 不应少于 5 组且不多于 15 组．在实际分组时也可以按斯特奇斯（Sturges）提出的经验公式来确定组数 K：$K=1+\frac{\lg n}{\lg 2}$．其中 n 为数据的个数，所得结果取整数．

二、拓展性问题

1. 统计结果的误用问题

（1）统计资料表明：大多数汽车事故出在中等速度行驶中，极少的事故是出在大于 150 km/h 的行驶速度上的．这是否意味着高速行驶比较安全？

（2）现代社会，统计学应用十分广泛，甚至通过统计分析，可能对未发生的事情产生重大影响，如经济状态（通胀率、国民经济总量的增长量、失业率、收入的增加或减少）、天气预报、药品效力和有效性、海浪和潮汐的影响范围．

如果有一份报纸刊登了以下的消息：“在一次投票中，有 75% 的投票者今年感染了流行性感冒．”你认为这个结论可信吗？我们还应该了解哪些信息来进一步确认结论的可信度？

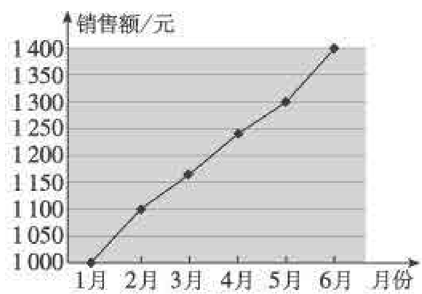
答案：（1）不是这样．由于多数人是以中等速度开车，所以多数事故是出在中等速度的行驶中．

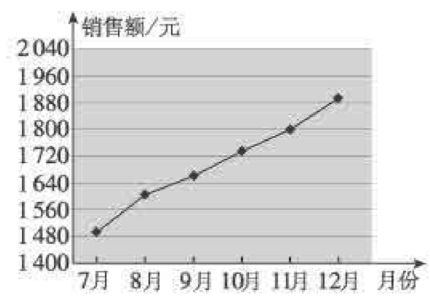
（2）这个结论是值得质疑的．没有明确说这次投票的主题是什么，如果这是一个关于感冒药效果的投票，那么投票者中流感感染者肯定很多．另外，也没有说明这次有多少人参加投票，如果只有十个或者更少的人投票，由于样本容量太小，没有代表性，也可能直接影响抽样调查结果的可信性．

2. 统计图的错觉问题

统计图是我们描述数据的重要工具，正确使用统计图能直观、有效地描述数据，准确传达数据蕴含的信息．但当统计图被不恰当地或别有用心地使用时，统计图不但达不到准确传达数据蕴含信息的目的，还往往会干扰我们的思维，误导我们对数据中蕴含信息的解读．你能指出下面对两组图的解读中存在的问题吗？

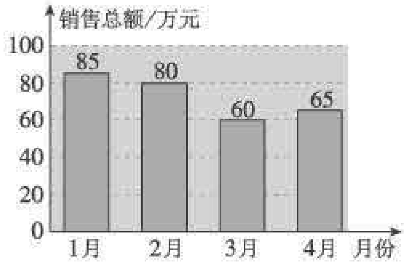
（1）从折线图可以看出，上半年销售额比下半年涨得多．





（2）根据统计图分析，某手机店 4 月份的音乐手机销售额比 3 月份有所下降.

某手机店今年 1～4 月
各月手机销售总额统计图



某手机店今年 1～4 月音乐手机销售额占
该手机店当月手机销售总额的百分比统计图

答案：（1）两个统计图中的销售额增长量其实是一样的，只是因为纵坐标单位长度不同，显得左图增长量大些.

（2）这个结论是错误的，虽然 4 月份音乐手机所占百分比有所下降，但是 4 月份销售总额是高于 3 月份的. 通过计算可以发现，4 月份音乐手机实际销售额为 11.05 万元，高于 3 月份的 10.8 万元.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容是让学生经历收集、整理、描述和分析数据的活动，了解数据处理的过程，了解收集、整理和描述数据的常用方法，能根据结果作出简单的判断和预测，建立和发展学生的数据分析观念. 对于收集数据，应考查学生是否知道不同调查方法的区别，知道简单随机抽样的特征，是否能根据具体问题选择合适的方法收集相关数据；对于描述数据，应考查学生是否知道扇形图和直方图在表示数据上的特点，是否能根据具体问题选择合适的统计图描述数据，是否会制作扇形图和直方图；对于解释统计结果，应考查学生是否能根据数据的收集方法和统计结果作出简单的判断和预测，是否能用准确的自然语言和数学语言表达、交流.

2. 考查数据的收集和处理，应注意以下几点：

（1）在考查收集数据的方法时，除了要了解不同方法的特点与区别，更应注意学生是否明确随机抽样方法的合理性，是否能根据实际问题的需要合理地选择调查方法.

（2）在考查相关统计计算和绘图能力的同时，更应关注学生对其中蕴含的统计思想的理解，将学生能否根据具体问题选择合适的统计图描述数据，能否从数据中挖掘有效信息作为考查目标.

（3）在考查学生进行统计判断、预测和建议时，初步涉及用样本估计总体的统计思想. 一方面，应注意样本数据的随机性对统计结果的影响，即统计结果有可能出现偏离总体比较大的情形，但只要数据收集的方法合理且样本容量足够大，往往能对总体作一个较好的估计. 另一方面，对同一个统计问题，经常可以用不同的统计方法来处理，得出的结论也往往不完全一致. 因此考查时应注重引导学生以“好坏”作为判断的标准，而不是对错.

3. 在学生的活动和实践过程中，应关注学生参与活动的积极程度、合作交流的意识以及所体现出的对统计的兴趣. 同时评价中应关注学生是否注重调查的科学性、严谨性，简单随机抽样的随机性，关注学生是否养成调查研究、用数据说话的良好习惯.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 下列调查中，调查方式选择合理的是（　　）.

(A) 为了了解某一品牌家具的甲醛含量，选择全面调查

(B) 为了了解某公园全年的游客流量，选择抽样调查

(C) 为了了解神舟飞船的设备零件的质量情况，选择抽样调查

(D) 为了了解一批袋装食品是否含有防腐剂，选择全面调查

2. 空气是由多种气体混合而成的，为了直观地介绍空气各成分的百分比，最适合使用的统计图是（　　）.

(A) 条形图　　(B) 折线图　　(C) 扇形图　　(D) 直方图

3. 一个容量为 80 的样本最大值是 143，最小值是 50，取组距为 10，则可以分成（　　）.

(A) 10 组　　(B) 9 组　　(C) 8 组　　(D) 7 组

4. 为了迎接端午节，某餐厅推出了四种粽子新款（分别以 A，B，C，D 表示），请顾客免费试吃后选出最喜欢的品种. 结果反馈如下：

C D D A A B A B B B A

C C A A B A A C D C D

通过以上数据，你能获得的信息是（　　）.

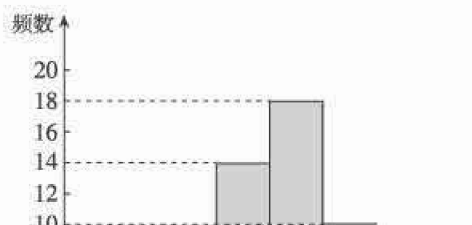
(A) A 款粽子最受欢迎

(B) B 款粽子比 C 款粽子更受欢迎

(C) 喜欢 C，D 两款粽子的人加起来占样本的一半

(D) D 款粽子受欢迎程度仅次于 C 款

5. 为了了解本校七年级 700 名学生上学期参加社会实践活动的时间，随机对该年级 50 名学生进行了调查. 根据收集的数据绘制了频数分布直方图，则以下说法正确的是（　）.



（第 5 题）

(A) 学生参加社会实践活动时间最多为 16 h

(B) 学生参加社会实践活动的时间大多数是 12～14 h

(C) 学生参加社会实践活动时间不少于 10 h 的为 84%

(D) 由样本可以估计全年级 700 人中参加社会实践活动时间为 6～8 h 的大约有 26 人

（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

6. 已知某班有 40 名学生. 他们有的步行，有的骑车，还有的乘车上学. 根据以下已知信息完成统计表：

上学方式	划记	频数	频率
步行	正正正		
骑车		9	
乘车			0.4

7. 进行数据的收集调查，一般可分为以下 6 个步骤，但它们的顺序弄乱了. 正确的顺序是________________（用字母按顺序写出即可）.

A. 明确调查问题　　B. 记录结果　　C. 得出结论

D. 确定调查对象　　E. 展开调查　　F. 选择调查方法

8. 下列抽样调查较科学的有____________.

①小华为了知道烤箱内的面包是否熟了，任意取出一小块品尝；

②小琪为了了解某市 2007 年的平均气温，上网查询了 2007 年 7 月份 31 天的气温情况；

③小明为了了解初中三个年级学生的平均身高，在七年级抽取一个班的学生做调查；

④小智为了了解初中三个年级学生的平均体重，在七、八、九年级各抽一个班学生进行调查.

9. 对以下的实际问题，选用哪种常用统计图描述数据比较合适？请将你的选择填在题后的横线上.

（1）某病人一昼夜的体温记录（单位：℃）：36.9，36.5，36.8，37.5，37.5，36.5；________

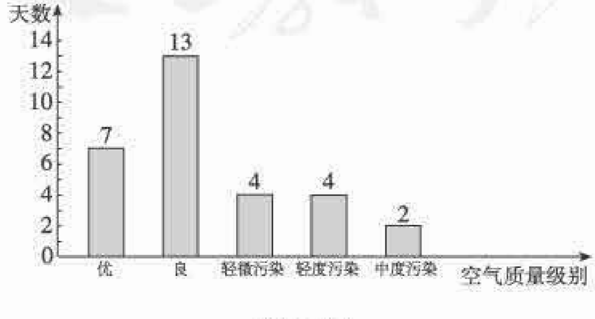
（2）体育课上全班有 10 人在跳长绳，15 人在打篮球，剩余 12 人在打乒乓球；________

（3）学校为七年级新生购进校服前，按身高分型号进行了登记. 对女生的记录中，身高 150 cm 以下记为 S 号，150～160 cm 记为 M 号，160～170 cm 记为 L 号，170 cm 以上记为 XL 号. ________

（三）解答题（第 10 题 10 分，第 11～13 题每题 12 分，共 46 分）

10. 学校广播站于新学期开始播音，为了了解同学们是否喜欢已播出的节目，站长对全校 1 600名同学进行了抽样调查. 他采取的方法是利用上学和放学时间，连续一周到校门口随机对本校同学进行询问，共搜集了 100 份调查问卷. 这是简单随机抽样吗？所得结果适用于全校同学吗？适用于全校师生吗？如果不适用，你有什么改进意见？

11. 某市发布了一份空气质量抽样调查报告，在该市 1～5 月随机调查的 30 天中，各空气质量级别的天数如下图：



（第 11 题）

（1）请在所给条形图右侧绘制扇形图，描述这 30 天中不同空气质量级别的天数所占的百分比情况.

（2）通过分析扇形图，请你评价一下 1～5 月份该市的空气质量情况.

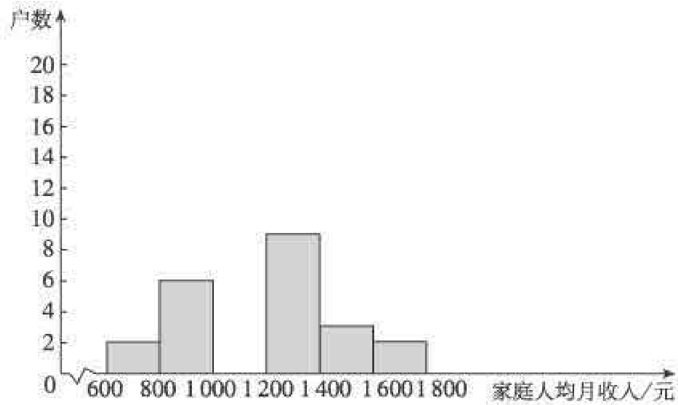
____

（3）如果这 30 天的数据是从一年中随机抽取的，请你预测该市一年（365 天）空气质量级别为优和良的天数共约有多少天？（结果保留整数）

（4）请你根据调查报告，对有关部门提几条建设“绿色环境城市”的建议.

12. 小龙在学校组织的社会调查活动中负责了解他所居住的小区 440 户居民的家庭收入情况. 他从中随机调查了 40 户居民家庭的人均月收入（收入取整数，单位：元），并绘制了频数分布表和频数分布直方图（如图）.

分组	频数	频率
600～799	2	0.050
800～999	6	0.150
1 000～1 199		0.450
1 200～1 399	9	0.225
1 400～1 599		
1 600～1 800	2	0.050
合计	40	1.000



（第 12 题）

根据以上信息，解答下列问题：

（1）请根据题中已有的信息补全频数分布表和频数分布直方图.

（2）观察已绘制的部分频数分布直方图，你能看出绘制选择的组距是多少吗？这个组距选择得好不好？请判断并说明理由. ______________________________

____

（3）如果家庭人均月收入“大于 1 000 不足 1 600 元”的为中等收入家庭，请你通过样本估计总体中的中等收入家庭大约有多少户.

13. 老师想知道学生们每天在上学的路上要花多少时间，于是让大家将每天来校上课的单程时间写在纸上. 下面是全班 30 名学生单程所花的时间（单位：min）：

20，20，30，15，20，25，5，15，20，10，

15，35，45，10，20，25，30，20，15，20，

20，10，20，5，15，20，20，20，5，15.

（1）请选择适当的统计图描述学生上学单程所花时间的分布情况.

（2）根据调查结果分析，这个班每天单程 20 min 以内（不包括 20 min）到校的学生有多少名？占全班学生的百分比是多少？你认为老师还能获得哪些信息？

参考答案

1. B. 本题主要考查学生是否能根据具体情况选择合适的调查方法.

2. C. 本题主要考查学生是否能根据具体情况选择适当的统计图描述数据.

3. A. 本题主要考查学生在绘制频数分布直方图时是否能正确确定组数.

4. A. 本题主要考查学生根据数据获得信息的能力.

5. C. 本题主要考查学生对读频数分布直方图的能力.

6.

上学方式	划记	频数	频率
步行	正正正	15	0.375
骑车	正𠀎	9	0.225
乘车	正正正一	16	0.4

本题主要考查学生对频数分布表的理解.

7. ADFEBC. 本题主要考查学生对统计调查过程的了解.

8. ①④. 本题主要考查学生对抽样调查的理解，和判断样本代表性的能力.

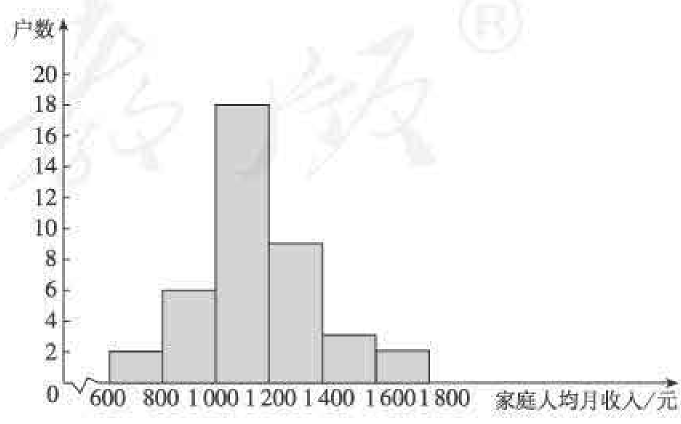
9. 折线图；条形图；直方图. 本题主要考查学生是否能根据情况选择适当的统计图描述数据.

10. 这是简单随机抽样调查，所得结果适用于全体学生，但不适用于全体师生（改进意见略）. 本题主要考查学生对简单随机抽样的理解和判断样本代表性的能力.

11. (1)（图略）. (2) 可以估计该市 1～5 月的空气质量级别主要是良及以上. (3) $365\times\frac{7+13}{30}=\frac{730}{3}\approx 243$，该市 1 年空气质量为优和良级别的天数共约为 243. (4)（略，只要提出改善该市空气质量状况的合理建议即可）. 本题主要考查学生读条形图、制作扇形图、由统计图获得信息的能力，以及根据统计结果提合理化建议的能力.

12. (1)

分组	频数	频率
600～799	2	0.050
800～999	6	0.150
1 000～1 199	18	0.450
1 200～1 399	9	0.225
1 400～1 599	3	0.075
1 600～1 800	2	0.050
合计	40	1.000



(2) 组距为 200. 这个组距选择比较合理，确保了数据的不重不漏，且没有数据为空白的组比较好地展示了数据的分布情况. (3) 330 户. 本题主要考查学生对频数分布表的理解，对频数

分布直方图的掌握，对组距的理解.

13. (1)（略）.(2) 12 名，40%，如每天花 20 min 到校的学生最多. 本题综合考查学生整理数据、利用图表获得信息的能力.