义务教育教科书
（五·四学制）

数学

七年级
下册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 | 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬　李海东
本册主编：薛　彬

主要编写人员：张劲松　王　嵘　薛　彬　宋莉莉　吴晓燕　王　冰
责任编辑：李龙才
美术编辑：王俊宏

封面设计：吕　旻　王俊宏
插　　图：王俊宏　文鲁工作室（封面）

义务教育教科书（五·四学制）数学　七年级　下册

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出　　版　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
重　　印　　　　出版社
发　　行　　　　新华书店
印　　刷　　　　印刷厂
版　　次　2013年10月第1版
印　　次　　　年　月第　次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16
印　　张　8.75
字　　数　140千字
书　　号　ISBN 978-7-107-27299-8
定　　价　　　元

本册导引

亲爱的同学，新学期开始了。

你将要学习的这本书是我们根据《义务教育数学课程标准（2011年版）》编写的教科书，这是你在六～九年级要学习的八册数学教科书中的第四册。

“二元一次方程组”提供了许多实际问题情境，引导你分析问题中的数量关系，利用其中的相等关系列出二元一次方程组，解方程组得到问题的答案。这样的过程将使你进一步感受方程是解决实际问题的重要数学工具。

在现实生活中存在着大量的需要研究不等关系的问题，例如，比较两个同学的身高，就是要研究身高的不等关系。在**“不等式与不等式组”**中，你会学到列、解不等式的方法，你将看到如同方程可以解决具有相等关系的问题一样，不等式可以解决具有不等关系的问题。

对三角形我们并不陌生，比如我们知道“三角形的内角和等于180°”。这个结论需要证明吗？又怎样证明呢？怎样利用这个结论求出四边形、五边形……的内角和呢？请你到**“三角形”**一章中去探索，在那里你不仅能够解决上面的问题，而且能够学到研究几何图形的重要思想和方法，并初步了解所学的图形知识在日常生活中的广泛应用。

“全等三角形”将带你认识“全等”这种图形间特殊的关系，并探索判断两个三角形形状、大小相同的条件，了解角的平分线的性质。学习了这些内容，你会对几何图形有进一步的认识，进一步学习几何证明的思想，提高推理论证和解决问题的能力。

我们已经了解了一些数据处理的基本方法，看到统计在现代生活中扮演着越来越重要的角色。**“数据的分析”**将引导你进一步学习数据处理的方法，比如如何分析数据的集中趋势，如何刻画数据的离散程度等。通过一些有趣的调查活动，你会对数据的作用有更深刻的认识，对用样本估计总体的思想有更多的体会。

数学伴着我们成长、数学伴着我们进步、数学伴着我们成功，让我们一起随着这本书，继续畅游神奇、美妙的数学世界吧！

目　　录

第十五章　二元一次方程组

第十六章　不等式与不等式组

第十九章　数据的分析

部分中英文词汇索引

第十五章　二元一次方程组

我们看下面的问题.

篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负，每队胜 1 场得 2 分，负 1 场得 1 分. 某队在 10 场比赛中得到 16 分，那么这个队胜、负场数分别是多少?

在上面的问题中，要求的是两个未知数. 如果用一元一次方程来解决，列方程时，要用一个未知数表示另一个未知数. 能不能根据题意直接设两个未知数，使列方程变得容易呢? 我们从这个想法出发开始本章的学习.

本章我们将从实际问题出发，认识二元一次方程组，学会解二元一次方程组的方法，并运用二元一次方程组解决一些实际问题. 在此基础上，学习三元一次方程组及其解法，进一步体会消元的思想方法. 通过本章的学习，你将对方程（组）有新的认识.

	胜	负	合计
场　数	x	y	10
积　分	$2x$	y	16
$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16. \end{cases}$			

15.1 二元一次方程组

思考

引言中的问题包含了哪些必须同时满足的条件？设胜的场数是 x，负的场数是 y，你能用方程把这些条件表示出来吗？

由问题知道，题中包含两个必须同时满足的条件：

胜的场数＋负的场数＝总场数，

胜场积分＋负场积分＝总积分.

这两个条件可以用方程

$$x+y=10,$$
$$2x+y=16$$

表示.

这两个方程有什么特点？与一元一次方程有什么不同？

上面两个方程中，每个方程都含有两个未知数（x 和 y），并且含有未知数的项的次数都是 1，像这样的方程叫做**二元一次方程**（linear equation in two unknowns）.

上面的问题中包含两个必须同时满足的条件，也就是未知数 x，y 必须同时满足方程

$$x+y=10 \quad ①$$

和

$$2x+y=16. \quad ②$$

把这两个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16, \end{cases}$$

就组成了一个**方程组**. 这个方程组中有两个未知数，每个方程中含未知数的项的次数都是 1，并且一共有两个方程，像这样的方程组叫做**二元一次方程组**（system of linear equations in two unknowns）.

探究

满足方程①，且符合问题的实际意义的 x，y 的值有哪些？把它们填入表中.

x											
y											

上表中哪对 x，y 的值还满足方程②？

由上表可知，$x=0$，$y=10$；$x=1$，$y=9$；…；$x=10$，$y=0$ 使方程 $x+y=10$ 两边的值相等，它们都是方程 $x+y=10$ 的解. 如果不考虑方程 $x+y=10$ 与上面实际问题的联系，那么 $x=-1$，$y=11$；$x=0.5$，$y=9.5$；……也都是这个方程的解.

一般地，使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，叫做**二元一次方程的解**.

我们还发现，$x=6$，$y=4$ 既满足方程①，又满足方程②. 也就是说，$x=6$，$y=4$ 是方程①与方程②的公共解. 我们把 $x=6$，$y=4$ 叫做二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16 \end{cases}$$

的解. 这个解通常记作

$$\begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$$

联系前面的问题可知，这个队在 10 场比赛中胜 6 场、负 4 场.

一般地，二元一次方程组的两个方程的公共解，叫做**二元一次方程组的解**.

练习

对下面的问题，列出二元一次方程组，并根据问题的实际意义，找出问题的解.

加工某种产品需经两道工序，第一道工序每人每天可完成 900 件，第二道工序每人每天可完成 1 200 件. 现有 7 位工人参加这两道工序，应怎样安排人力，才能使每天第一、第二道工序所完成的件数相等？

习题 15.1

复习巩固

1. 填表，使上下每对 x，y 的值是方程 $3x+y=5$ 的解.

x	-2	0	0.4	2				
y					-0.5	-1	0	3

2. 选择题.

方程组

$$\begin{cases}3x+4y=5,\\-7x+9y=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

的解是（　　）.

(A) $\begin{cases}x=2,\\y=-0.25\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x=-5.5,\\y=4\end{cases}$　(C) $\begin{cases}x=1,\\y=0.5\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x=-1,\\y=-0.5\end{cases}$

综合运用

3. 如果三角形的三个内角分别是 $x°$，$y°$，$y°$，求：

（1）x，y 满足的关系式；

（2）当 $x=90$ 时，y 的值；

（3）当 $y=60$ 时，x 的值.

4. 我国古代数学著作《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足. 问鸡兔各几何.”你能用二元一次方程组表示题中的数量关系吗？试找出问题的解.

拓广探索

5. 把一根长 7 m 的钢管截成 2 m 长和 1 m 长两种规格的钢管，怎样截不造成浪费？你有几种不同的截法？

15.2 消元——解二元一次方程组

在 15.1 节中我们已经看到，直接设两个未知数：胜 x 场、负 y 场，可以列方程组$\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16\end{cases}$表示本章引言中问题的数量关系．如果只设一个未知数：胜 x 场，那么这个问题也可以用一元一次方程

$$2x+(10-x)=16$$

来解．

思考

上面的二元一次方程组和一元一次方程有什么关系？

我们发现，二元一次方程组中第一个方程 $x+y=10$ 可以写为 $y=10-x$．由于两个方程中的 y 都表示负的场数，所以，我们把第二个方程 $2x+y=16$ 中的 y 换为 $10-x$，这个方程就化为一元一次方程 $2x+(10-x)=16$．解这个方程，得 $x=6$．把 $x=6$ 代入 $y=10-x$，得 $y=4$．从而得到这个方程组的解．

二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，那么就把二元一次方程组转化为我们熟悉的一元一次方程．我们可以先求出一个未知数，然后再求另一个未知数．这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做**消元**思想．

上面的解法，是把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解．这种方法叫做**代入消元法**，简称**代入法**（substitution method）．

例 1 用代入法解方程组

$$\begin{cases}x-y=3, & ①\\3x-8y=14. & ②\end{cases}$$

分析： 方程①中 x 的系数是1，用含 y 的式子表示 x，比较简便.

解： 由①，得

$$x=y+3. \qquad ③$$

把③代入①可以吗？试试看.

把③代入②，得

$$3(y+3)-8y=14.$$

解这个方程，得

$$y=-1.$$

把 $y=-1$ 代入③，得

$$x=2.$$

把 $y=-1$ 代入①或②可以吗？

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$$

例 2 根据市场调查，某种消毒液的大瓶装（500 g）和小瓶装（250 g）两种产品的销售数量（按瓶计算）比为 2∶5. 某厂每天生产这种消毒液 22.5 t，这些消毒液应该分装大、小瓶两种产品各多少瓶？

分析： 问题中包含两个条件：

大瓶数∶小瓶数＝2∶5，

大瓶所装消毒液＋小瓶所装消毒液＝总生产量.

解： 设这些消毒液应该分装 x 大瓶、y 小瓶.

根据大、小瓶数的比，以及消毒液分装量与总生产量的数量关系，得

$$\begin{cases}5x=2y, & ①\\500x+250y=22\ 500\ 000. & ②\end{cases}$$

由①，得

$$y=\frac{5}{2}x. \qquad ③$$

把③代入②，得

$$500x+250\times\frac{5}{2}x=22\ 500\ 000.$$

解这个方程，得

$$x=20\ 000.$$

把 $x=20\ 000$ 代入③，得

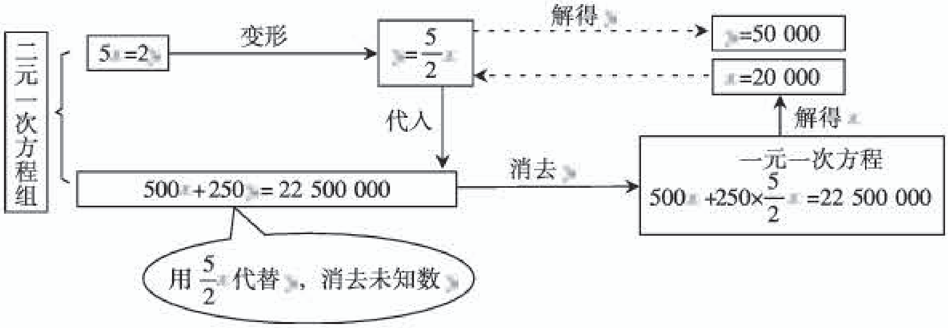
$$y=50\ 000.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=20\ 000,\\ y=50\ 000.\end{cases}$$

答：这些消毒液应该分装 20 000 大瓶和 50 000 小瓶.

上面解方程组的过程可以用下面的框图表示：



思考

解这个方程组时，可以先消去 x 吗？试试看.

练习

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

(1) $2x-y=3$；　　　　(2) $3x+y-1=0$.

2. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}y=2x-3,\\ 3x+2y=8;\end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases}2x-y=5,\\ 3x+4y=2.\end{cases}$

3. 有 48 支队 520 名运动员参加篮球、排球比赛，其中每支篮球队 10 人，每支排球队 12 人，每名运动员只能参加一项比赛. 篮球队、排球队各有多少支参赛？

4. 张翔从学校出发骑自行车去县城，中途因道路施工步行一段路，1.5 h 后到达县城. 他骑车的平均速度是 15 km/h，步行的平均速度是 5 km/h，路程全长 20 km. 他骑车与步行各用多少时间？

思考

前面我们用代入法求出了方程组

$$\begin{cases}x+y=10, & ① \\ 2x+y=16 & ②\end{cases}$$

的解. 这个方程组的两个方程中，y 的系数有什么关系？利用这种关系你能发现新的消元方法吗？

这两个方程中未知数 y 的系数相等，②－①可消去未知数 y，得

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入①，得

$$y=4.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=6, \\ y=4.\end{cases}$$

②－①就是用方程②的左边减去方程①的左边，方程②的右边减去方程①的右边.

①－②也能消去未知数 y，求得 x 吗？

思考

联系上面的解法，想一想怎样解方程组

$$\begin{cases}3x+10y=2.8, \\ 15x-10y=8.\end{cases}$$

从上面两个方程组的解法可以看出：当二元一次方程组的两个方程中同一未知数的系数互为相反数或相等时，把这两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程. 这种方法叫做**加减消元法**，简称**加减法**（addition-subtraction method）.

例 3 用加减法解方程组

$$\begin{cases}3x+4y=16, & ①\\5x-6y=33. & ②\end{cases}$$

分析： 这两个方程中没有同一个未知数的系数互为相反数或相等，直接加减这两个方程不能消元．我们对方程变形，使得这两个方程中某个未知数的系数互为相反数或相等．

解： ①×3，得

$$9x+12y=48. \quad ③$$

②×2，得

$$10x-12y=66. \quad ④$$

③+④，得

$$19x=114,$$

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入 ①，得

$$3\times6+4y=16,$$

$$4y=-2,$$

$$y=-\frac{1}{2}.$$

> 把 $x=6$ 代入② 可以解得 y 吗？

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=6,\\y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

> 如果用加减法消去 x 应如何解？解得的结果一样吗？

例 4 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 2 h 共收割小麦 3.6 hm^2，3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 5 h 共收割小麦 8 hm^2．1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦多少公顷？

分析： 如果 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x hm^2 和 y hm^2，那么 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 1 h 共收割小麦________ hm^2，3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 1 h 共收割小麦________ hm^2．由此得到两个相等关系，列出方程组．

解： 设 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x hm^2 和 y hm^2．

根据两种工作方式中的相等关系，得方程组

$$\begin{cases}2(2x+5y)=3.6,\\5(3x+2y)=8.\end{cases}$$

去括号，得

$$\begin{cases}4x+10y=3.6, & ①\\15x+10y=8. & ②\end{cases}$$

②−①，得

$$11x=4.4.$$

解这个方程，得

$$x=0.4.$$

把 $x=0.4$ 代入①，得

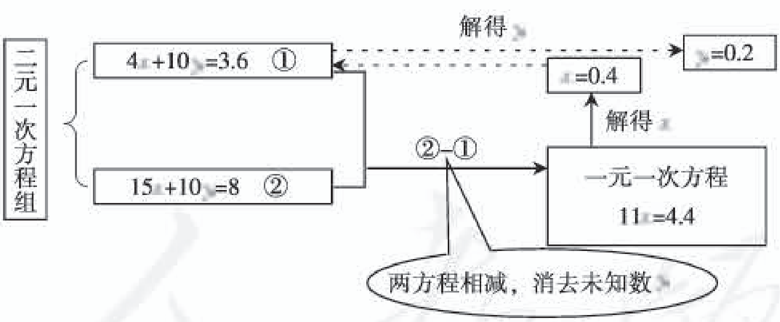
$$y=0.2.$$

因此，这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=0.4,\\y=0.2.\end{cases}$$

答： 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 0.4 hm^2 和 0.2 hm^2.

上面解方程组的过程可以用下面的框图表示：



练习

1. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+2y=9,\\3x-2y=-1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}5x+2y=25,\\3x+4y=15;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+5y=8,\\3x+2y=5;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2x+3y=6,\\3x-2y=-2.\end{cases}$

2. 一条船顺流航行，每小时行 20 km；逆流航行，每小时行 16 km. 求轮船在静水中的速度与水的流速.

3. 运输 360 t 化肥，装载了 6 节火车车厢和 15 辆汽车；运输 440 t 化肥，装载了 8 节火车车厢和 10 辆汽车. 每节火车车厢与每辆汽车平均各装多少吨化肥？

代入消元法和加减消元法是二元一次方程组的两种解法，它们都是通过消元使方程组转化为一元一次方程，只是消元的方法不同. 我们应根据方程组的具体情况，选择适合它的解法.

思考

（1）你怎样解下面的方程组？

$\begin{cases}2x+y=1.5,\\0.8x+0.6y=1.3;\end{cases}$　　$\begin{cases}x+2y=3,\\3x-2y=5.\end{cases}$

（2）选择你认为简便的方法解习题 15.1 中的第 4 题（“鸡兔同笼”问题）.

习题 15.2

复习巩固

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

(1) $\frac{3}{2}x+2y=1$；　　(2) $\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}y=2$；

(3) $5x-3y=x+2y$；　　(4) $2(3y-3)=6x+4$.

2. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}y=x+3,\\7x+5y=9;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3s-t=5,\\5s+2t=15;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}4x+y=15,\\3x-2y=3;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}4(x+2)+5y=1,\\2x+3(y+2)=3.\end{cases}$

3. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3u+2t=7,\\6u-2t=11;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2a+b=3,\\3a+b=4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x-5y=-3,\\-4x+y=-3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-1,\\2x+y=3.\end{cases}$

4. 某班去看演出，甲种票每张 24 元，乙种票每张 18 元. 如果 35 名学生购票恰好用去 750 元，甲、乙两种票各买了多少张？

综合运用

5. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3(x-1)=y+5,\\5(y-1)=3(x+5);\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\frac{2u}{3}+\frac{3v}{4}=\frac{1}{2},\\\frac{4u}{5}+\frac{5v}{6}=\frac{7}{15}.\end{cases}$

6. 顺风旅行社组织 200 人到花果岭和云水洞旅游，到花果岭的人数比到云水洞的人数的 2 倍少 1，到两地旅游的人数各是多少？

7. 小方、小程两人相距 6 km，两人同时出发相向而行，1 h 相遇；同时出发同向而行，小方 3 h 可追上小程. 两人的平均速度各是多少？

8. 一种商品有大、小盒两种包装，3 大盒、4 小盒共装 108 瓶，2 大盒、3 小盒共装 76 瓶. 大盒与小盒每盒各装多少瓶？

拓广探索

9. 一个长方形的长减少 5 cm，宽增加 2 cm，就成为一个正方形，并且这两个图形的面积相等. 这个长方形的长、宽各是多少？

15.3 二元一次方程组与实际问题

前面我们讨论了二元一次方程组的解法，并用二元一次方程组解决了一些实际问题. 本节我们继续探究如何用二元一次方程组解决实际问题. 同学们可以先独立分析问题中的数量关系，列出方程组，得出问题的解答，然后再互相交流.

探究 1

养牛场原有 30 头大牛和 15 头小牛，1 天约用饲料 675 kg；一周后又购进 12 头大牛和 5 头小牛，这时 1 天约用饲料 940 kg. 饲养员李大叔估计每头大牛 1 天约需饲料 18～20 kg，每头小牛 1 天约需饲料 7～8 kg. 你能通过计算检验他的估计吗?

分析： 设每头大牛和每头小牛 1 天各约用饲料 x kg 和 y kg.

根据两种情况的饲料用量，找出相等关系，列方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = \underline{\qquad\qquad}, \\ y = \underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$

这就是说，每头大牛 1 天约需饲料________ kg，每头小牛 1 天约需饲料______kg. 因此，饲养员李大叔对大牛的食量估计______，对小牛的食量估计______.

探究 2

据统计资料，甲、乙两种作物的单位面积产量的比是 1∶2. 现要把一块长 200 m、宽 100 m 的长方形土地，分为两块小长方形土地，分别种植这两种作物. 怎样划分这块土地，使甲、乙两种作物的总产量的比是3∶4?

分析：如图 15.3-1，一种种植方案为：甲、乙两种作物的种植区域分别为长方形 $AEFD$ 和 $BCFE$. 此时设 $AE=x$ m，$BE=y$ m，根据问题中涉及长度、产量的数量关系，列方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

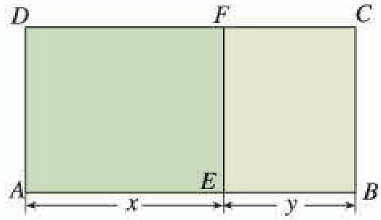
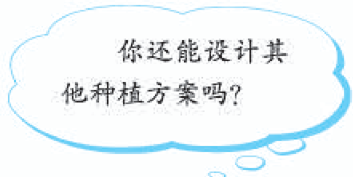


图 15.3-1

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=\underline{\qquad\qquad\qquad}, \\ y=\underline{\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

过长方形土地的长边上离一端______处，作这条边的垂线，把这块土地分为两块长方形土地. 较大一块土地种____种作物，较小一块土地种____种作物.



探究 3

如图 15.3-2，长青化工厂与 A，B 两地有公路、铁路相连. 这家工厂从 A 地购买一批每吨1 000元的原料运回工厂，制成每吨 8 000 元的产品运到 B 地. 已知公路运价为 1.5 元/(t・km)，铁路运价为 1.2 元/(t・km)，且这两次运输共支出公路运费 15 000 元，铁路运费 97 200 元. 这批产品的销售款比原料费与运输费的和多多少元?

图 15.3-2

分析：销售款与产品数量有关，原料费与原料数量有关. 设制成 x t 产品，购买 y t 原料. 根据题中数量关系填写下页表.

	产品 x t	原料 y t	合计
公路运费/元			
铁路运费/元			
价　值/元			

题目所求数值是__________________，为此需先解出____与____.

由上表，列方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=\underline{\qquad\qquad}, \\ y=\underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$

因此，这批产品的销售款比原料费与运输费的和多____________元.

从以上探究可以看出，方程组是解决含有多个未知数问题的重要工具. 用方程组解决问题时，要根据问题中的数量关系列出方程组，求出方程组的解后，应进一步考虑它是否符合问题的实际意义.

习题 15.3

复习巩固

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-y=5, \\ 5y-1=3x+5; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=\dfrac{17}{12}, \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

2. A 地至 B 地的航线长 9 750 km，一架飞机从 A 地顺风飞往 B 地需 12.5 h，逆风飞行同样的航线需 13 h. 求飞机无风时的平均速度与风速.

3. 一支部队第一天行军 4 h，第二天行军 5 h，两天共行军 98 km，且第一天比第二天少走 2 km. 第一天和第二天行军的平均速度各是多少？

综合运用

4. 用白铁皮做罐头盒，每张铁皮可制盒身 25 个或盒底 40 个，一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒. 现有 36 张白铁皮，用多少张制盒身，多少张制盒底可以使盒身与盒底正好配套？
5. 有大小两种货车，2 辆大货车与 3 辆小货车一次可以运货 15.5 t，5 辆大货车与 6 辆小货车一次可以运货 35 t. 3 辆大货车与 5 辆小货车一次可以运货多少吨？
6. 从甲地到乙地有一段上坡与一段平路. 如果保持上坡每小时走 3 km，平路每小时走 4 km，下坡每小时走 5 km，那么从甲地到乙地需 54 min，从乙地到甲地需 42 min.甲地到乙地全程是多少？
7. 用含药 30%和 75%的两种防腐药水，配制含药 50%的防腐药水 18 kg，两种药水各需多少千克？

拓广探索

8. 打折前，买 60 件 A 商品和 30 件 B 商品用了 1 080 元，买 50 件 A 商品和 10 件 B 商品用了 840 元. 打折后，买 500 件 A 商品和 500 件 B 商品用了 9 600 元，比不打折少花多少钱？
9. 某家商店的账目记录显示，某天卖出 39 支牙刷和 21 盒牙膏，收入 396 元；另一天，以同样的价格卖出同样的 52 支牙刷和 28 盒牙膏，收入 518 元. 这个记录是否有误？请说明理由.

*15.4 三元一次方程组的解法

前面我们学习了二元一次方程组及其解法——消元法. 有些有两个未知数的问题，可以列出二元一次方程组来解决. 实际上，有不少问题含有更多未知数. 我们看下面的问题：

小明手头有 12 张面额分别为 1 元、2 元、5 元的纸币，共计 22 元，其中 1 元纸币的数量是 2 元纸币数量的 4 倍. 求 1 元、2 元、5 元纸币各多少张.

自然的想法是，设 1 元、2 元、5 元的纸币分别为 x 张、y 张、z 张，根据题意，可以得到下面三个方程：

$$x+y+z=12,$$
$$x+2y+5z=22,$$
$$x=4y.$$

这个问题的解必须同时满足上面三个条件，因此，我们把这三个方程合在一起，写成

$$\begin{cases}x+y+z=12,\\x+2y+5z=22,\\x=4y.\end{cases}$$

这个方程组含有三个未知数，每个方程中含未知数的项的次数都是 1，并且一共有三个方程，像这样的方程组叫做**三元一次方程组**.

怎样解三元一次方程组呢？我们知道，二元一次方程组可以利用代入法或加减法消去一个未知数，化成一元一次方程求解. 那么，能不能用同样的思路，用代入法或加减法消去三元一次方程组的一个未知数，把它化成二元一次方程组呢？

让我们看前面列出的三元一次方程组

$$\begin{cases}x+y+z=12, & ①\\x+2y+5z=22, & ②\\x=4y. & ③\end{cases}$$

仿照前面学过的代入法，我们可以把③分别代入①②，得到两个只含 y，

* 本节内容为选学内容.

z 的方程：

$$4y+y+z=12,$$
$$4y+2y+5z=22.$$

它们组成方程组

$$\begin{cases}5y+z=12,\\6y+5z=22.\end{cases}$$

得到二元一次方程组之后，就不难求出 y 和 z，进而可求出 x.

从上面的分析可以看出，解三元一次方程组的基本思路是：通过“代入”或“加减”进行消元，把“三元”化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程. 这与解二元一次方程组的思路是一样的.

$$\boxed{\text{三元一次方程组}}\xrightarrow{\text{消元}}\boxed{\text{二元一次方程组}}\xrightarrow{\text{消元}}\boxed{\text{一元一次方程}}$$

例 1 解三元一次方程组

$$\begin{cases}3x+4z=7, & ①\\2x+3y+z=9, & ②\\5x-9y+7z=8. & ③\end{cases}$$

分析： 方程①只含 x，z，因此，可以由②③消去 y，得到一个只含 x，z 的方程，与方程①组成一个二元一次方程组.

解： ②×3+③，得

$$11x+10z=35. \qquad ④$$

①与④组成方程组

$$\begin{cases}3x+4z=7,\\11x+10z=35.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=5,\\z=-2.\end{cases}$$

把 $x=5$，$z=-2$ 代入②，得

$$2\times5+3y-2=9,$$

所以
$$y=\frac{1}{3}.$$

因此，这个三元一次方程组的解为

$$\begin{cases} x=5, \\ y=\dfrac{1}{3}, \\ z=-2. \end{cases}$$

你还有其他解法吗？试一试，并与这种解法进行比较.

例 2 在等式 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $x=-1$ 时，$y=0$；当 $x=2$ 时，$y=3$；当 $x=5$ 时，$y=60$. 求 a，b，c 的值.

分析： 把 a，b，c 看作三个未知数，分别把已知的 x，y 值代入原等式，就可以得到一个三元一次方程组.

解： 根据题意，得三元一次方程组

$$\begin{cases} a-b+c=0, & ① \\ 4a+2b+c=3, & ② \\ 25a+5b+c=60. & ③ \end{cases}$$

②－①，得

$$a+b=1; \quad ④$$

③－①，得

$$4a+b=10. \quad ⑤$$

④与⑤组成二元一次方程组

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 4a+b=10. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-2. \end{cases}$$

把 $a=3$，$b=-2$ 代入①，得

$$c=-5.$$

因此

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-2, \\ c=-5, \end{cases}$$

即 a，b，c 的值分别为 3，-2，-5.

练习

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x-2y=-9, \\ y-z=3, \\ 2z+x=47; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-y+z=4, \\ 2x+3y-z=12, \\ x+y+z=6. \end{cases}$

2. 甲、乙、丙三个数的和是 35，甲数的 2 倍比乙数大 5，乙数的 $\frac{1}{3}$ 等于丙数的 $\frac{1}{2}$. 求这三个数.

习题 15.4

复习巩固

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x-7, \\ 5x+3y+2z=2, \\ 3x-4z=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+9y=12, \\ 3y-2z=1, \\ 7x+5z=\frac{19}{4}. \end{cases}$

2. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 4x-9z=17, \\ 3x+y+15z=18, \\ x+2y+3z=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+4y+3z=9, \\ 3x-2y+5z=11, \\ 5x-6y+7z=13. \end{cases}$

综合运用

3. 一个三位数，个位、百位上的数的和等于十位上的数，百位上的数的 7 倍比个位、十位上的数的和大 2，且个位、十位、百位上的数的和是 14. 求这个三位数.

4. 解方程组

$$\begin{cases} x:y=3:2, \\ y:z=5:4, \\ x+y+z=66. \end{cases}$$

拓广探索

5. 在等式 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $x=1$ 时，$y=-2$；当 $x=-1$ 时，$y=20$；当 $x=\frac{3}{2}$ 与 $x=\frac{1}{3}$ 时，y 的值相等. 求 a，b，c 的值.

阅读与思考

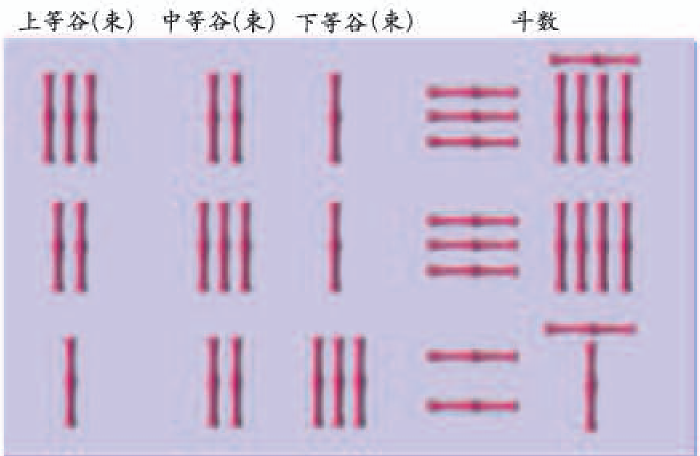
一次方程组的古今表示及解法

我国古代很早就开始对一次方程组进行研究，其中不少成果被收入古代数学著作《九章算术》中.《九章算术》的“方程”一章，有许多关于一次方程组的内容. 这一章的第一个问题译成现代汉语是这样的：

上等谷 3 束，中等谷 2 束，下等谷 1 束，可得粮食 39 斗；上等谷 2 束，中等谷 3 束，下等谷 1 束，可得粮食 34 斗；上等谷 1 束，中等谷 2 束，下等谷 3 束，可得粮食 26 斗. 求上等谷、中等谷、下等谷每束各可得粮食几斗.

斗是过去的容积计量单位.

下面的算筹图代表了古代解决这个问题的方法，它是什么意思呢？



《九章算术》中的算筹图是竖排的. 为看图方便，上图改为横排，使三个横行表示三句话的含义.

不妨先用我们熟悉的数学符号来表述怎样解这个有 3 个未知数的问题.

设上等谷、中等谷、下等谷每束各可得粮食 x 斗、y 斗、z 斗.

根据题意，得三元一次方程组

$$\begin{cases}3x+2y+z=39, & ①\\ 2x+3y+z=34, & ②\\ x+2y+3z=26. & ③\end{cases} \qquad (*)$$

通过消元，可以求出各未知数.

上图实际上就是用算筹列出的方程组(*)，它省略了各未知数，只用算筹表示出未知

数的系数与相应的常数项.

我国古代解方程组时，也用算筹做计算工具，具体解法是：在一个方程两边乘另一个方程中某未知数的系数，然后再累减另一个方程. 例如，解方程组(＊)，在②的两边乘 3，然后累减①两次消去 x（这与②×3－①×2 的结果一样）；在③的两边乘 3，然后减①消去 x，从而得到二元一次方程组

$$\begin{cases}5y+z=24,\\4y+8z=39.\end{cases}$$

再用上面的方法消去 y，求得 z.

用现代高等代数的符号，可以将方程组(＊)中所有方程的系数与相应的常数项排成一个表

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 39\\2 & 3 & 1 & 34\\1 & 2 & 3 & 26\end{pmatrix}.$$

这种由数排成的表叫做矩阵. 容易看出，这个矩阵与上面的算筹图是一致的，只是用阿拉伯数字替代了算筹. 利用矩阵解一次方程组的方法，与前面说的算筹方法也是一致的. 我们祖先掌握上述解法，比起欧洲人来，要早一千多年. 这是我国古代数学的一个光辉成就.

数学活动

活动1

（1）在平面直角坐标系中，你能把二元一次方程 $x-y=0$ 的一个解用一个点表示出来吗？标出一些以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点．过这些点中的任意两点作直线，你有什么发现？在这条直线上任取一点，这个点的坐标是方程 $x-y=0$ 的解吗？

以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点的全体叫做方程 $x-y=0$ 的图象．根据上面的探究想一想：方程 $x-y=0$ 的图象是什么．

（2）一般地，在平面直角坐标系中，任何一个二元一次方程的图象都是一条直线．根据这个结论，在同一平面直角坐标系中画出二元一次方程组

$$\begin{cases}2x+y=4,\\ x-y=-1\end{cases}$$

中的两个二元一次方程的图象．

由这两个二元一次方程的图象，你能得出这个二元一次方程组的解吗？

活动2

2010 年的一项调查显示，全世界每天平均有 13 000 人死于与吸烟有关的疾病．我国吸烟者约 3.56 亿人，占世界吸烟人数的四分之一．比较一年中死于与吸烟有关的疾病的人数占吸烟者总数的百分比，我国比世界其他国家约高 0.1%．

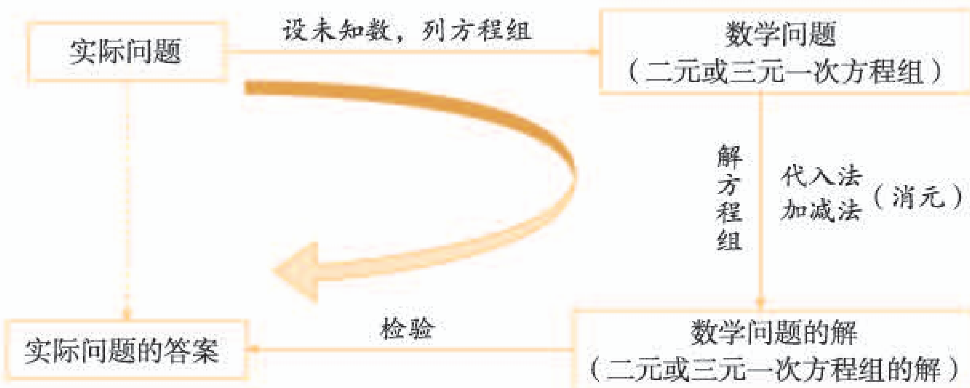
根据上述资料，试用二元一次方程组解决以下问题：

我国及世界其他国家一年中死于与吸烟有关的疾病的人数分别是多少？

从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题．看看能不能用二元一次方程组解决这些问题．

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们通过实际问题引入了二元一次方程（组），并学习了二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法．在此基础上，学习了简单的三元一次方程组及其解法．

消元是解二（三）元一次方程组的基本方法．通过消元，我们把“三元”转化为“二元”，把“二元”转化为“一元”，这一过程体现了化归思想．

二（三）元一次方程组是刻画实际问题的重要数学模型，在现实中具有广泛的应用．用它解决实际问题时，要注意分析问题中的各种等量关系，引进适当的未知量，建立相应的方程组．

请你带着下面问题，复习一下全章内容吧．

1．举例说明怎样用代入法和加减法解二元一次方程组．“代入”与“加减”的目的是什么？

2．比较解三元一次方程组与解二元一次方程组的联系与区别．你能说说“消元”的思想方法在解三元一次方程组中的体现吗？

3．用二元或三元一次方程组解决一个实际问题，你能说说用方程组解决实际问题的基本思路吗？

复习题 15

复习巩固

1. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} a=2b+3, \\ a=3b+20; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=13, \\ x=6y-7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y=4, \\ 4x+2y=-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x-y=110, \\ 9y-x=110. \end{cases}$

2. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3m+b=11, \\ -4m-b=11; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 0.6x-0.4y=1.1, \\ 0.2x-0.4y=2.3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4f+g=15, \\ 3g-4f=-3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+3y=-6, \\ \dfrac{1}{2}x+y=2. \end{cases}$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4(x-y-1)=3(1-y)-2, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{2(x-y)}{3}-\dfrac{x+y}{4}=-1, \\ 6(x+y)-4(2x-y)=16. \end{cases}$

*4. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-y+z=3, \\ 2x+y-3z=11, \\ x+y+z=12; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x-4y+4z=13, \\ 2x+7y-3z=19, \\ 3x+2y-z=18. \end{cases}$

5. 1 号仓库与 2 号仓库共存粮 450 t. 现从 1 号仓库运出存粮的 60%，从 2 号仓库运出存粮的 40%，结果 2 号仓库所余粮食比 1 号仓库所余粮食多 30 t. 1 号仓库与 2 号仓库原来各存粮多少吨？

综合运用

6. 甲、乙二人都以不变的速度在环形路上跑步，如果同时同地出发，反向而行，每隔 2 min 相遇一次；如果同时同地出发，同向而行，每隔 6 min 相遇一次. 已知甲比乙跑得快，甲、乙二人每分各跑多少圈？

（第 6 题）

7. 用 1 块 A 型钢板可制成 2 块 C 型钢板、1 块 D 型钢板；用 1 块 B 型钢板可制成 1 块 C 型钢板、2 块 D 型

钢板. 现需 15 块 C 型钢板、18 块 D 型钢板，可恰好用 A 型钢板、B 型钢板各多少块？

8. （我国古代问题）有大小两种盛酒的桶，已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛（斛，音 hú，是古代的一种容量单位），1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒2 斛. 1 个大桶、1 个小桶分别可以盛酒多少斛？

拓广探索

9. 现有 1 角、5 角、1 元硬币各 10 枚，从中取出 15 枚，共 7 元. 1 角、5 角、1 元硬币各取多少枚？

10. 某电脑公司有 A 型、B 型、C 型三种型号的电脑，其中 A 型每台 6 000 元、B 型每台 4 000 元、C 型每台 2 500 元. 某中学现有资金 100 500 元，计划全部用于从这家电脑公司购进 36 台两种型号的电脑. 请你设计几种不同的购买方案供这个学校选择，并说明理由.

*11. 甲地到乙地全程是 3.3 km，一段上坡、一段平路、一段下坡. 如果保持上坡每小时走 3 km，平路每小时走 4 km，下坡每小时走 5 km，那么从甲地到乙地需 51 min，从乙地到甲地需 53.4 min. 从甲地到乙地时，上坡、平路、下坡的路程各是多少？

第十六章　不等式与不等式组

数量有大小之分，它们之间有相等关系，也有不等关系．现实世界和日常生活中存在大量涉及不等关系的问题．例如，当两家商场推出不同的优惠方案时，到哪家商场购物花费少？这个问题就蕴含了不等关系．对于这样的问题，我们常常把要比较的对象数量化，分析其中的不等关系，列出相应的数学式子——不等式（组），并通过解不等式（组）而得出结论．这样的思路与利用方程（组）研究相等关系是类似的．

本章我们将从什么是不等式说起，类比等式和方程，讨论不等式的性质，学习一元一次不等式（组）及其解法，并利用这些知识解决一些问题，感受不等式在研究不等关系问题中的重要作用．

16.1 不等式

16.1.1 不等式及其解集

问题 一辆匀速行驶的汽车在 11:20 距离 A 地 50 km，要在 12:00 之前驶过 A 地，车速应满足什么条件？

分析：设车速是 x km/h.

从时间上看，汽车要在 12:00 之前驶过 A 地，则以这个速度行驶 50 km 所用的时间不到 $\frac{2}{3}$ h，即

$$\frac{50}{x}<\frac{2}{3}. \qquad ①$$

从路程上看，汽车要在 12:00 之前驶过 A 地，则以这个速度行驶 $\frac{2}{3}$ h 的路程要超过 50 km，即

$$\frac{2}{3}x>50. \qquad ②$$

式子①和②从不同角度表示了车速应满足的条件.

像①和②这样用符号"<"或">"表示大小关系的式子，叫做**不等式**(inequality). 像 $a+2\neq a-2$ 这样用符号"≠"表示不等关系的式子也是不等式.

有些不等式中不含未知数，例如 $3<4$，$-1>-2$. 有些不等式中含有未知数，例如①和②式中字母 x 表示未知数.

虽然①和②式表示了车速应满足的条件，但是我们希望更明确地得出 x 应取哪些值. 例如对不等式②，当 $x=80$ 时，$\frac{2}{3}x>50$；当 $x=78$ 时，$\frac{2}{3}x>50$；当 $x=75$时，$\frac{2}{3}x=50$；当$x=72$时，$\frac{2}{3}x<50$. 这就是说，当 x 取某些值（如 80，78）时，不等式$\frac{2}{3}x>50$ 成立；当 x 取某些值（如 75，72）时，不等式$\frac{2}{3}x>50$ 不成立. 与方程的解类似，我们把使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**.

例如 80 和 78 是不等式$\frac{2}{3}x>50$ 的解，而 75 和 72 不是不等式$\frac{2}{3}x>50$ 的解.

思考

除了 80 和 78，不等式$\frac{2}{3}x>50$ 还有其他解吗？如果有，这些解应满足什么条件？

可以发现，当 $x>75$ 时，不等式$\frac{2}{3}x>50$ 总成立；而当 $x<75$ 或 $x=75$ 时，不等式$\frac{2}{3}x>50$ 不成立. 这就是说，任何一个大于 75 的数都是不等式$\frac{2}{3}x>50$ 的解，这样的解有无数个；任何一个小于或等于 75 的数都不是不等式$\frac{2}{3}x>50$ 的解. 因此，$x>75$ 表示了能使不等式$\frac{2}{3}x>50$成立的 x 的取值范围，它可以在数轴上表示（图 16.1-1）.

图 16.1-1

在表示 75 的点上画空心圆圈，表示不包含这一点.

由上可知，在前面问题中，汽车要在12:00之前驶过 A 地，车速必须大于 75 km/h.

由不等式①能得出这个结果吗？

一般地，一个含有未知数的不等式的所有的解，组成这个不等式的**解集**（solution set）. 求不等式的解集的过程叫做**解不等式**.

练习

1. 用不等式表示：

(1) a 是正数；　(2) a 是负数；

(3) a 与 5 的和小于 7；　(4) a 与 2 的差大于-1；

(5) a 的 4 倍大于 8；　(6) a 的一半小于 3.

2. 下列数中哪些是不等式 $x+3>6$ 的解？哪些不是？

$$-4,\ -2.5,\ 0,\ 1,\ 2.5,\ 3,\ 3.2,\ 4.8,\ 8,\ 12.$$

3. 直接说出下列不等式的解集：

(1) $x+3>6$；　　(2) $2x<8$；　　(3) $x-2>0$.

16.1.2　不等式的性质

对于某些简单的不等式，我们可以直接得出它们的解集，例如不等式 $x+3>6$ 的解集是 $x>3$，不等式 $2x<8$ 的解集是 $x<4$. 但是对于比较复杂的不等式，例如 $\frac{5x+1}{6}-2>\frac{x-5}{4}$，直接得出解集就比较困难. 因此，还要讨论怎样解不等式. 与解方程需要依据等式的性质一样，解不等式需要依据不等式的性质. 为此，我们先来看看不等式有什么性质.

我们知道，等式两边加或减同一个数（或式子），乘或除以同一个数（除数不为 0），结果仍相等. 不等式是否也有类似的性质呢？

思考

用“>”或“<”填空，并总结其中的规律：

(1) $5>3$，$5+2$ ____ $3+2$，$5-2$ ____ $3-2$；

(2) $-1<3$，$-1+3$ ____ $3+3$，$-1-3$ ____ $3-3$；

(3) $6>2$，6×5 ____ 2×5，$6\times(-5)$ ____ $2\times(-5)$；

(4) $-2<3$，$(-2)\times6$ ____ 3×6，$(-2)\times(-6)$ ____ $3\times(-6)$.

根据发现的规律填空：当不等式两边加或减同一个数（正数或负数）时，不等号的方向________. 当不等式两边乘同一个正数时，不等号的方向________；而乘同一个负数时，不等号的方向________.

换一些其他的数，验证这个发现.

一般地，不等式有以下性质.

不等式的性质 1 **不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变.**

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，那么 } a\pm c>b\pm c.}$$

不等式的性质 2 **不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变.**

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c>0\text{，那么 } ac>bc\left(\text{或}\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right).}$$

不等式的性质 3 **不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.**

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c<0\text{，那么 } ac<bc\left(\text{或}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right).}$$

比较上面的性质 2 和性质 3，指出它们有什么区别. 再比较等式的性质和不等式的性质，它们有什么异同？

练习

设 $a>b$，用“<”“>”填空：

(1) $a+2$ ____ $b+2$；　　(2) $a-3$ ____ $b-3$；

(3) $-4a$ ____ $-4b$；　　(4) $\frac{a}{2}$ ____ $\frac{b}{2}$.

例 1 利用不等式的性质解下列不等式：

(1) $x-7>26$；　　(2) $3x<2x+1$；

(3) $\frac{2}{3}x>50$；　　(4) $-4x>3$.

分析： 解不等式，就是要借助不等式的性质使不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$（a 为常数）的形式.

解： (1) 根据不等式的性质 1，不等式两边加 7，不等号的方向不变，所以

$$x-7+7>26+7,$$

$$x>33.$$

(2) 根据不等式的性质 1，不等式两边减 $2x$，不等号的方向不变，所以

$$3x-2x<2x+1-2x,$$

$$x<1.$$

(3) 根据不等式的性质 2，不等式两边乘$\frac{3}{2}$，不等号的方向不变，所以

$$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}x>\frac{3}{2}\times50,$$

$$x>75.$$

(4) 根据不等式的性质 3，不等式两边除以-4，不等号的方向改变，所以

$$\frac{-4x}{-4}<\frac{3}{-4},$$

$$x<-\frac{3}{4}.$$

不等式的解集也可以在数轴上表示，如上例中不等式 $x-7>26$ 的解集在数轴上的表示如图 16.1-2 所示.

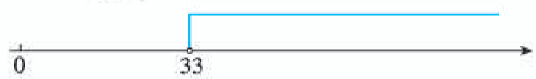


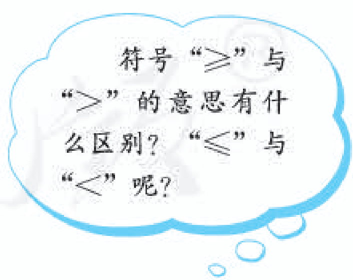
图 16.1-2

不等式 $3x<2x+1$ 的解集在数轴上的表示如图 16.1-3 所示.

图 16.1-3

请你在数轴上表示例 1 中其他两个不等式的解集.

像 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 这样的式子，也经常用来表示两个数量的大小关系. 例如，为了表示 2011 年 9 月 1 日北京的最低气温是 19 ℃，最高气温是 28 ℃，我们可以用 t 表示这天的气温，t 是随时间变化的，但是它有一定的变化范围，即 $t\geqslant19$ ℃并且 $t\leqslant28$ ℃. 符号“$\geqslant$”读作“大于或等于”，也可说是“不小于”；符号“$\leqslant$”读作“小于或等于”，也可说是“不大于”. $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$形式的式子，具有与前面所说的不等式的性质类似的性质.



例 2 某长方体形状的容器长 5 cm，宽3 cm，高 10 cm. 容器内原有水的高度为 3 cm，现准备向它继续注水. 用 V（单位：cm^3）表示新注入水的体积，写出 V 的取值范围.

解： 新注入水的体积 V 与原有水的体积的和不能超过容器的容积，即

$$V+3\times5\times3\leqslant3\times5\times10,$$

$$V\leqslant105.$$

又由于新注入水的体积 V 不能是负数，因此，V 的取值范围是

$$V\geqslant0 \text{ 并且 } V\leqslant105.$$

在数轴上表示 V 的取值范围如图 16.1-4 所示.

图 16.1-4

在表示 0 和 105 的点上画实心圆点，表示取值范围包含这两个数.

练习

1. 用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $x+5>-1$；　　(2) $4x<3x-5$；

(3) $\frac{1}{7}x<\frac{6}{7}$；　　(4) $-8x>10$.

2. 用不等式表示下列语句，写出它们的解集，并在数轴上表示解集：

(1) x 的 3 倍大于或等于 1；　　(2) x 与 3 的和不小于 6；

(3) y 与 1 的差不大于 0；　　(4) y 的 $\frac{1}{4}$ 小于或等于 -2.

习题 16.1

复习巩固

1. 下列数值中哪些是不等式 $2x+3>9$ 的解？哪些不是？

$$-4，-2，0，3，3.01，4，6，100.$$

2. 用不等式表示：

(1) a 与 5 的和是正数；

(2) a 与 2 的差是负数；

(3) b 与 15 的和小于 27；

(4) b 与 12 的差大于 -5；

(5) c 的 4 倍大于或等于 8；

(6) c 的一半小于或等于 3；

(7) d 与 e 的和不小于 0；

(8) d 与 e 的差不大于 -2.

3. 写出不等式的解集：

(1) $x+2>6$；

(2) $2x<10$；

(3) $x-2>0.1$；

(4) $-3x<10$.

4. 设 $m>n$，用“<”或“>”填空：

(1) $m-5$ ____ $n-5$；

(2) $m+4$ ____ $n+4$；

(3) $6m$ ____ $6n$；

(4) $-\frac{1}{3}m$ ____ $-\frac{1}{3}n$.

5. 利用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $x+3>-1$；

(2) $6x\leqslant 5x-7$；

(3) $-\frac{1}{3}x<\frac{2}{3}$；

(4) $4x\geqslant -12$.

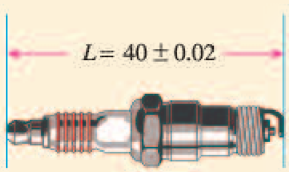
综合运用

6. 设 $a>b$，用“<”或“>”填空：

(1) $2a-5$ ______ $2b-5$；

(2) $-3.5b+1$ ______ $-3.5a+1$.

7. 根据机器零件的设计图纸（如图），用不等式表示零件长度的合格尺寸（L 的取值范围）.



（第 7 题）

8. 一罐饮料净重约 300 g，罐上注有“蛋白质含量 $\geqslant 0.6\%$”，其中蛋白质的含量为多少克？

拓广探索

9. 有一个两位数，如果把它的个位上的数 a 和十位上的数 b 对调，那么什么情况下得到的两位数比原来的两位数大？什么情况下得到的两位数比原来的两位数小？什么情况下得到的两位数等于原来的两位数？

阅读与思考

用求差法比较大小

制作某产品有两种用料方案，方案1用4块A型钢板，8块B型钢板；方案2用3块A型钢板，9块B型钢板. A型钢板的面积比B型钢板大. 从省料角度考虑，应选哪种方案？

设A型钢板和B型钢板的面积分别为 x 和 y. 于是，两种方案用料面积分别为

$$4x+8y \text{ 和 } 3x+9y.$$

现在需要比较上面两个数量的大小.

两个数量的大小可以通过它们的差来判断. 如果两个数 a 和 b 比较大小，那么

当 $a>b$ 时，一定有 $a-b>0$；

当 $a=b$ 时，一定有 $a-b=0$；

当 $a<b$ 时，一定有 $a-b<0$.

反过来也对，即

当 $a-b>0$ 时，一定有 $a>b$；

当 $a-b=0$ 时，一定有 $a=b$；

当 $a-b<0$ 时，一定有 $a<b$.

因此，我们经常把两个要比较的对象先数量化，再求它们的差，根据差的正负判断对象的大小.

用求差的方法，你能回答前面的用料问题吗？

16.2 一元一次不等式

我们已经知道了什么是不等式以及不等式的性质. 本节我们将学习一元一次不等式及其解法，并用它解决一些实际问题.

思考

观察下面的不等式：

$$x-7>26,\ 3x<2x+1,\ \frac{2}{3}x>50,\ -4x>3.$$

它们有哪些共同特征?

可以发现，上述每个不等式都只含有一个未知数，并且未知数的次数是 1. 类似于一元一次方程，含有一个未知数，未知数的次数是 1 的不等式，叫做**一元一次不等式**（linear inequality in one unknown).

从上节我们知道，不等式

$$x-7>26$$

的解集是

$$x>33.$$

这个解集是通过“不等式两边都加 7，不等号的方向不变”而得到的，事实上，这相当于由 $x-7>26$ 得 $x>26+7$. 这就是说，解不等式时也可以“移项”，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不改变不等号的方向.

一般地，利用不等式的性质，采取与解一元一次方程相类似的步骤，就可以求出一元一次不等式的解集.

例 1 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $2(1+x)<3$； (2) $\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$.

解：(1) 去括号，得

$$2+2x<3.$$

移项，得

$$2x<3-2.$$

合并同类项，得

$$2x<1.$$

系数化为 1，得

$$x<\frac{1}{2}.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 16.2-1 所示.

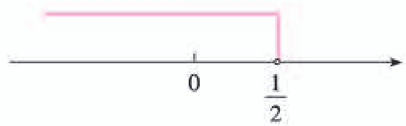


图 16.2-1

(2) 去分母，得

$$3(2+x)\geqslant 2(2x-1).$$

去括号，得

$$6+3x\geqslant 4x-2.$$

移项，得

$$3x-4x\geqslant -2-6.$$

合并同类项，得

$$-x\geqslant -8.$$

系数化为 1，得

$$x\leqslant 8.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 16.2-2 所示.

要特别注意，当不等式的两边都乘（或除以）同一个负数时，不等号的方向改变.

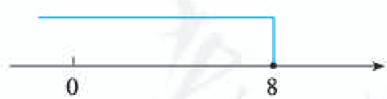


图 16.2-2

归纳

解一元一次方程，要根据等式的性质，将方程逐步化为 $x=a$ 的形式；而解一元一次不等式，则要根据不等式的性质，将不等式逐步化为 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式.

练习

1. 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $5x+15>4x-1$；　　(2) $2(x+5)\leqslant 3(x-5)$；

(3) $\dfrac{x-1}{7}<\dfrac{2x+5}{3}$；　　(4) $\dfrac{x+1}{6}\geqslant\dfrac{2x-5}{4}+1$.

2. 当 x 或 y 满足什么条件时，下列关系成立？

(1) $2(x+1)$ 大于或等于 1；

(2) $4x$ 与 7 的和不小于 6；

(3) y 与 1 的差不大于 $2y$ 与 3 的差；

(4) $3y$ 与 7 的和的四分之一小于 -2.

有些实际问题中存在不等关系，用不等式来表示这样的关系，就能把实际问题转化为数学问题，从而通过解不等式得到实际问题的答案.

例 2　去年某市空气质量良好（二级以上）的天数与全年天数（365）之比达到 60%，如果明年（365 天）这样的比值要超过 70%，那么明年空气质量良好的天数比去年至少要增加多少？

分析：“明年这样的比值要超过 70%”指出了这个问题中蕴含的不等关系，转化为不等式，即 $\dfrac{\text{明年空气质量良好的天数}}{\text{明年天数}}>70\%$.

解：设明年比去年空气质量良好的天数增加了 x.

去年有 $365\times60\%$ 天空气质量良好，明年有 $(x+365\times60\%)$ 天空气质量良好，并且

$$\frac{x+365\times60\%}{365}>70\%.$$

去分母，得

$$x+219>255.5.$$

移项，合并同类项，得

$$x>36.5.$$

由 x 应为正整数，得

$$x\geqslant37.$$

答：明年空气质量良好的天数比去年至少要增加 37，才能使这一年空气质量良好的天数超过全年天数的 70%.

例 3 甲、乙两商场以同样价格出售同样的商品，并且又各自推出不同的优惠方案：在甲商场累计购物超过 100 元后，超出 100 元的部分按 90%收费；在乙商场累计购物超过 50 元后，超出 50 元的部分按 95%收费. 顾客到哪家商场购物花费少?

分析：在甲商场购物超过 100 元后享受优惠，在乙商场购物超过 50 元后享受优惠. 因此，我们需要分三种情况讨论：

(1) 累计购物不超过 50 元；

(2) 累计购物超过 50 元而不超过 100 元；

(3) 累计购物超过 100 元.

解：(1) 当累计购物不超过 50 元时，在甲、乙两商场购物都不享受优惠，且两商场以同样价格出售同样的商品，因此到两商场购物花费一样.

(2) 当累计购物超过 50 元而不超过 100 元时，在乙商场购物享受优惠，在甲商场购物不享受优惠，因此到乙商场购物花费少.

(3) 当累计购物超过 100 元时，设累计购物 $x(x>100)$ 元.

① 若到甲商场购物花费少，则

$$50+0.95(x-50)>100+0.9(x-100).$$

解得 $$x>150.$$

这就是说，累计购物超过 150 元时，到甲商场购物花费少.

② 若到乙商场购物花费少，则

$$50+0.95(x-50)<100+0.9(x-100).$$

解得 $$x<150.$$

这就是说，累计购物超过 100 元而不到 150 元时，到乙商场购物花费少.

③ 若 $50+0.95(x-50)=100+0.9(x-100)$，解得

$$x=150.$$

这就是说，累计购物为 150 元时，到甲、乙两商场购物花费一样.

练习

1. 某工程队计划在 10 天内修路 6 km. 施工前 2 天修完 1.2 km 后，计划发生变化，准备至少提前 2 天完成修路任务，以后几天内平均每天至少要修路多少?
2. 某次知识竞赛共有 20 道题，每一题答对得 10 分，答错或不答都扣 5 分. 小明得分要超过 90 分，他至少要答对多少道题?

习题 16.2

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+5)>2(4x+3)$；　　(2) $10-4(x-4)\leqslant 2(x-1)$；

(3) $\frac{x-3}{2}<\frac{2x-5}{3}$；　　(4) $\frac{2x-1}{3}\leqslant\frac{3x-4}{6}$；

(5) $\frac{5x+1}{6}-2>\frac{x-5}{4}$；　　(6) $\frac{y+1}{6}-\frac{2y-5}{4}\geqslant 1$.

2. a 取什么值时，式子 $\frac{4a+1}{6}$ 表示下列数？

(1) 正数；　　(2) 小于 -2 的数；　　(3) 0.

3. 根据下列条件求正整数 x：

(1) $x+2<6$；　　(2) $2x+5<10$；

(3) $\frac{x-3}{2}\geqslant\frac{2x-5}{3}$；　　(4) $\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}-2$.

4. 总结解一元一次不等式的一般步骤，并与解一元一次方程进行比较.

综合运用

5. 某商店以每辆 250 元的进价购入 200 辆自行车，并以每辆 275 元的价格销售. 两个月后自行车的销售款已超过这批自行车的进货款，这时至少已售出多少辆自行车？

6. 长跑比赛中，张华跑在前面，在离终点 100 m 时他以 4 m/s 的速度向终点冲刺，在他身后 10 m 的李明需以多快的速度同时开始冲刺，才能够在张华之前到达终点？

7. 某工厂前年有员工 280 人，去年经过结构改革减员 40 人，全厂年利润增加100 万元，人均创利至少增加 6 000 元，前年全厂年利润至少是多少？

8. 苹果的进价是每千克 1.5 元，销售中估计有 5%的苹果正常损耗. 商家把售价至少定为多少，才能避免亏本？

9. 电脑公司销售一批计算机，第一个月以 5 500 元/台的价格售出 60 台，第二个月起降价，以 5 000 元/台的价格将这批计算机全部售出，销售总额超过 55 万元. 这批计算机最少有多少台？

拓广探索

10. 求不等式 $5x-1>3(x+1)$ 与 $\frac{1}{2}x-1<7-\frac{3}{2}x$ 的解集的公共部分.

16.3 一元一次不等式组

问题 用每分可抽 30 t 水的抽水机来抽污水管道里积存的污水，估计积存的污水超过 1 200 t 而不足 1 500 t，那么将污水抽完所用时间的范围是什么？

设用 x min 将污水抽完，则 x 同时满足不等式

$$30x > 1\,200, \quad ①$$

$$30x < 1\,500. \quad ②$$

类似于方程组，把这两个不等式合起来，组成一个**一元一次不等式组**（system of linear inequalities in one unknown），记作

$$\begin{cases} 30x > 1\,200, \\ 30x < 1\,500. \end{cases}$$

怎样确定不等式组中 x 的可取值的范围呢？

类比方程组的解，不等式组中的各不等式解集的公共部分，就是不等式组中 x 可以取值的范围.

由不等式①，解得

$$x > 40.$$

由不等式②，解得

$$x < 50.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 16.3-1）.

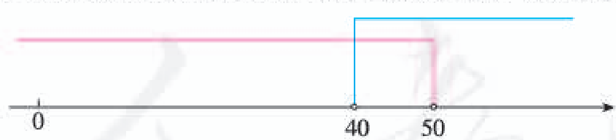


图 16.3-1

利用数轴体会：x 取值的范围是两个不等式解集的公共部分.

从图 16.3-1 容易看出，x 取值的范围为

$$40 < x < 50.$$

这就是说，将污水抽完所用时间多于 40 min 而少于 50 min.

一般地，几个不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的**解集**. 解不等式组就是求它的解集.

例 1 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>x+1, & ① \\ x+8<4x-1; & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+3\geqslant x+11, & ① \\ \dfrac{2x+5}{3}-1<2-x. & ② \end{cases}$

解：(1) 解不等式①，得

$$x>2.$$

解不等式②，得

$$x>3.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 16.3-2).

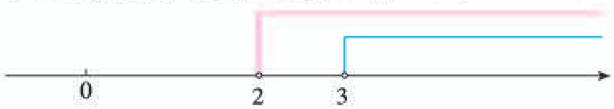


图 16.3-2

从图 16.3-2 可以找出两个不等式解集的公共部分，得不等式组的解集

$$x>3.$$

> 利用数轴可以确定不等式组的解集.

(2) 解不等式①，得

$$x\geqslant 8.$$

解不等式②，得

$$x<\frac{4}{5}.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 16.3-3).

图 16.3-3

从图 16.3-3 可以看到这两个不等式的解集没有公共部分，不等式组无解.

例 2 x 取哪些整数值时，不等式

$$5x+2>3(x-1)$$

与

$$\frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x$$

都成立？

分析： 求出这两个不等式组成的不等式组的解集，解集中的整数就是 x 可取的整数值.

解： 解不等式组

$$\begin{cases} 5x+2>3(x-1), \\ \frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x, \end{cases}$$

得

$$-\frac{5}{2}<x\leqslant 4.$$

所以 x 可取的整数值是 -2，-1，0，1，2，3，4.

归纳

解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分. 利用数轴可以直观地表示不等式组的解集.

练习

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x>1-x, \\ x+2<4x-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-5>1+2x, \\ 3x+2\leqslant 4x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+5>1-x, \\ x-1\leqslant \frac{3}{4}x-\frac{1}{8}. \end{cases}$

2. x 取哪些正整数值时，不等式 $x+3>6$ 与 $2x-1<10$ 都成立？

习题 16.3

复习巩固

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1<3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1>3; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1<3. \end{cases}$

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x+1\leqslant 3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} -3x-1>3, \\ 2x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3(x-1)+13>5x-2(5-x), \\ 5-(2x+1)<3-6x; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x-3(x-2)\geqslant 4, \\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-3(x-2)\geqslant 4, \\ \dfrac{2x-1}{5}>\dfrac{x+1}{2}; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+4)<2, \\ \dfrac{x+2}{2}>\dfrac{x+3}{3}. \end{cases}$

综合运用

3. x 取哪些整数值时，不等式

$$4(x-0.3)<0.5x+5.8$$

与

$$3+x>\frac{1}{2}x+1$$

都成立？

4. x 取哪些整数值时，$2\leqslant 3x-7<8$ 成立？

拓广探索

5. 你能求三个不等式 $5x-1>3(x+1)$，$\frac{1}{2}x-1>3-\frac{3}{2}x$，$x-1<3x+1$ 的解集的公共部分吗？

6. 把一些书分给几名同学，如果每人分 3 本，那么余 8 本；如果前面的每名同学分 5 本，那么最后一人就分不到 3 本. 这些书有多少本？共有多少人？

数学活动

活动1

统计资料表明，2005 年 A 省的城市建成区面积（简称建成区面积）为 1 316.4 km^2，城市建成区园林绿地面积（简称绿地面积）为 373.48 km^2，城市建成区园林绿地率（简称绿地率）为 28.37%. 2010 年该省建成区面积增加了 300 km^2 左右，绿地率超过了 35%.

根据上述资料，试用一元一次不等式解决以下问题：

这五年（2005～2010 年），A 省增加的绿地面积超过了多少平方千米？

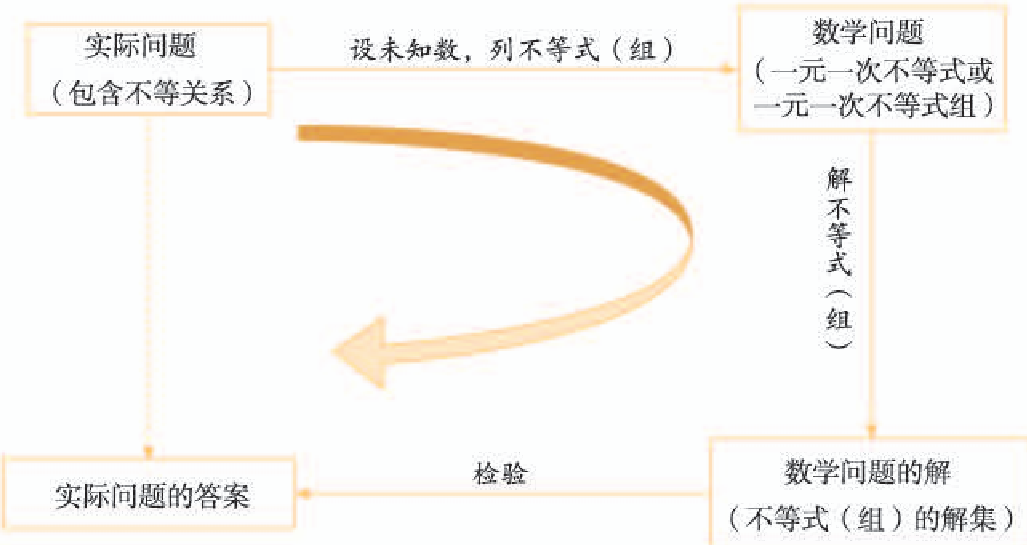
从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题. 看看能不能用一元一次不等式解决这些问题.

活动2 猜数游戏

小丽在 4 张同样的纸片上各写了一个正整数，从中随机抽取 2 张，并将它们上面的数相加. 重复这样做，每次所得的和都是 5，6，7，8 中的一个数，并且这 4 个数都能取到. 猜猜看，小丽在 4 张纸片上各写了什么数.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

不等式（组）是刻画不等关系的数学模型，它有广泛的应用．本章主要学习不等式的基础知识以及一类最简单的不等式（组）——一元一次不等式（组），并运用它们解决一些数学问题和实际问题．

在学习不等式的性质和一元一次不等式（组）的解法时，与等式的性质和方程（组）的解法进行类比，有益于对知识的理解与掌握．

与解方程是逐步将方程化为 $x=a$ 的形式类似，解不等式是逐步将不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，两者都运用了化归的思想．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 总结不等式的性质，并与等式的性质进行比较．

2. 总结一元一次不等式的解法，并与一元一次方程的解法进行比较．结合例子说明：解未知数为 x 的不等式，就是将不等式逐步变成 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，而不等式的性质是变形的重要依据．

3. 如何解一元一次不等式组？结合例子说明：解不等式组就是求有关不等式的解集的公共部分．

4. 举例说明数轴在解不等式（组）中的作用．

5. 结合实例体会运用不等式解决实际问题的过程．

复习题 16

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+7)>23$；　　(2) $12-4(3x-1)\leqslant 2(2x-16)$；

(3) $\dfrac{x+3}{5}<\dfrac{2x-5}{3}-1$；　　(4) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x-1}{2}\geqslant\dfrac{5}{12}$.

2. a 取什么值时，$15-7a$ 的值满足下列条件？

(1) 大于 1；　　(2) 小于 1；　　(3) 等于 1.

3. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x+1>-1,\\2x+1<3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}-(x-1)>3,\\2x+9>3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3(x-1)+1>5x-2(1-x),\\5-(2x-1)<-6x;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}-3(x-2)\geqslant 4-x,\\\dfrac{1+2x}{3}>x-1.\end{cases}$

4. $\dfrac{x+3}{5}$ 的值能否同时大于 $2x+3$ 和 $1-x$ 的值？说明理由.

5. 赵军说不等式 $a>2a$ 永远不会成立，因为如果在这个不等式两边同除以 a，就会出现 $1>2$ 这样的错误结论. 他的说法对吗？

6. 解一元一次不等式组与解一元一次不等式有什么区别和联系？

综合运用

7. 一艘轮船从某江上游的 A 地匀速驶到下游的 B 地用了 10 h，从 B 地匀速返回 A 地用了不到 12 h，这段江水流速为 3 km/h，轮船在静水里的往返速度 v 不变，v 满足什么条件？

8. 老张与老李购买了相同数量的种兔，一年后，老张养兔数比买入种兔数增加了 2 只，老李养兔数比买入种兔数的 2 倍少 1 只，老张养兔数不超过老李养兔数的 $\dfrac{2}{3}$. 一年前老张至少买了多少只种兔？

拓广探索

9. 三个连续正整数的和小于 333，这样的正整数有多少组？写出其中最大的一组.

第十七章　三角形

三角形是一种基本的几何图形．从古埃及的金字塔到现代的建筑物，从巨大的钢架桥到微小的分子结构，到处都有三角形的形象．为什么在工程建筑、机械制造中经常采用三角形的结构呢？这与三角形的性质有关．

一个三角形有三个角、三条边．三个角之间有什么关系？三条边之间有什么关系？在小学我们通过测量得知三角形的内角和等于 180°，但测量常常有误差，三角形有无数多个，要说明任意一个三角形都符合这一规律，就不能只靠测量，而必须通过推理证明．本章中，我们就来证明这个结论．

三角形是最简单的多边形，也是认识其他图形的基础．本章将在学习与三角形有关的线段和角的基础上，学习多边形的有关知识，如借助三角形的内角和探究多边形的内角和．学习本章后，我们不仅可以进一步认识三角形，而且还可以了解一些几何中研究问题的基本思路和方法．

17.1 与三角形有关的线段

17.1.1 三角形的边

在本章引言中，我们提到许多三角形的实际例子.

由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做**三角形**（triangle）.

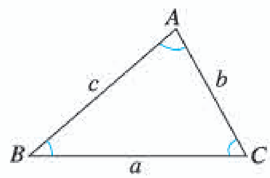


图 17.1-1

在图 17.1-1 中，线段 AB，BC，CA 是三角形的边. 点 A，B，C 是三角形的顶点. $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是相邻两边组成的角，叫做三角形的内角，简称三角形的角.

顶点是 A，B，C 的三角形，记作$\triangle ABC$，读作“三角形 ABC”.

$\triangle ABC$ 的三边，有时也用 a，b，c 来表示. 如图 17.1-1，顶点 A 所对的边 BC 用 a 表示，顶点 B 所对的边 AC 用 b 表示，顶点 C 所对的边 AB 用 c 表示.

我们知道：三边都相等的三角形叫做等边三角形（图 17.1-2（1））；有两条边相等的三角形叫做等腰三角形（图 17.1-2（2））.

图 17.1-2（3）中的三角形是三边都不相等的三角形.

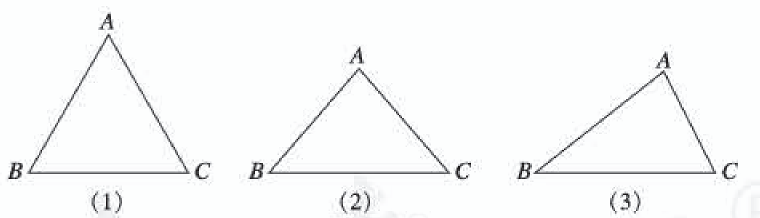


图 17.1-2

思考

我们知道，按照三个内角的大小，可以将三角形分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形. 如何按照边的关系对三角形进行分类呢？说说你的想法，并与同学交流.

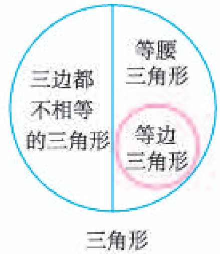
以“是否有边相等”，可以将三角形分为两类：三边都不相等的三角形和等腰三角形.

我们还知道：在等腰三角形中，相等的两边都叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角.

等边三角形是特殊的等腰三角形，即底边和腰相等的等腰三角形.

综上，三角形按边的相等关系分类如下：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{三边都不相等的三角形}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底边和腰不相等的等腰三角形}\\ \text{等边三角形}\end{cases}\end{cases}$$



下面探究三角形三边之间的大小关系.

探究

任意画一个$\triangle ABC$，从点 B 出发，沿三角形的边到点 C，有几条线路可以选择？各条线路的长有什么关系？能证明你的结论吗？

对于任意一个$\triangle ABC$，如果把其中任意两个顶点（例如 B，C）看成定点，由“两点之间，线段最短”可得

$$AB+AC>BC. \quad ①$$

同理有

$$AC+BC>AB, \quad ②$$

$$AB+BC>AC. \quad ③$$

一般地，我们有

三角形两边的和大于第三边.

由不等式②③移项可得 $BC>AB-AC$，$BC>AC-AB$. 对于边 AB，AC 也有类似的结论成立. 这就是说，**三角形两边的差小于第三边.**

例 用一条长为 18 cm 的细绳围成一个等腰三角形.

（1）如果腰长是底边长的 2 倍，那么各边的长是多少？

（2）能围成有一边的长是 4 cm 的等腰三角形吗？为什么？

解：（1）设底边长为 x cm，则腰长为 $2x$ cm.

$$x+2x+2x=18.$$

解得 $x=3.6$.

所以，三边长分别为 3.6 cm，7.2 cm，7.2 cm.

（2）因为长为 4 cm 的边可能是腰，也可能是底边，所以需要分情况讨论.

如果 4 cm 长的边为底边，设腰长为 x cm，则

$$4+2x=18.$$

解得 $x=7$.

如果 4 cm 长的边为腰，设底边长为 x cm，则

$$2\times4+x=18.$$

解得 $x=10$.

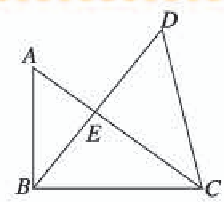
因为 $4+4<10$，不符合三角形两边的和大于第三边，所以不能围成腰长是 4 cm 的等腰三角形.

由以上讨论可知，可以围成底边长是 4 cm 的等腰三角形.

练习

1. 图中有几个三角形？用符号表示这些三角形.
2. （口答）下列长度的三条线段能否组成三角形？为什么？

   (1) 3，4，8；(2) 5，6，11；(3) 5，6，10.



（第 1 题）

17.1.2 三角形的高、中线与角平分线

与三角形有关的线段，除了三条边，还有我们已经学过的三角形的高. 如图 17.1-3，从△ABC 的顶点 A 向它所对的边 BC 所在直线画垂线，垂足为 D，所得线段 AD 叫做△ABC 的边 BC 上的**高**（altitude）.

用同样方法，你能画出△ABC 的另两条边上的高吗？

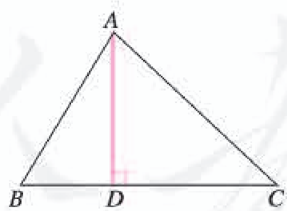


图 17.1-3

我们再来看两种与三角形有关的线段.

如图 17.1-4 (1)，连接△ABC 的顶点 A 和它所对的边 BC 的中点 D，所得线段 AD 叫做△ABC 的边 BC 上的**中线**（median）.

用同样方法，你能画出△ABC 的另两条边上的中线吗？

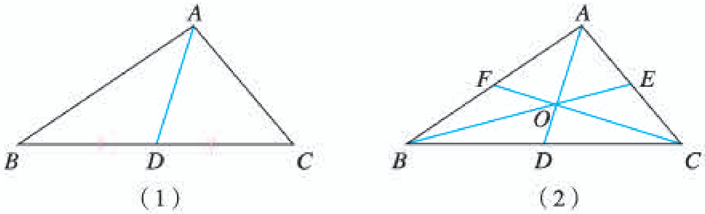


图 17.1-4

如图 17.1-4（2），三角形的三条中线相交于一点. 三角形三条中线的交点叫做**三角形的重心**.

取一块质地均匀的三角形木板，顶住三条中线的交点，木板会保持平衡，这个平衡点就是这块三角形木板的重心.

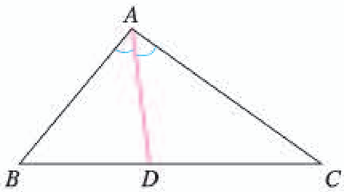


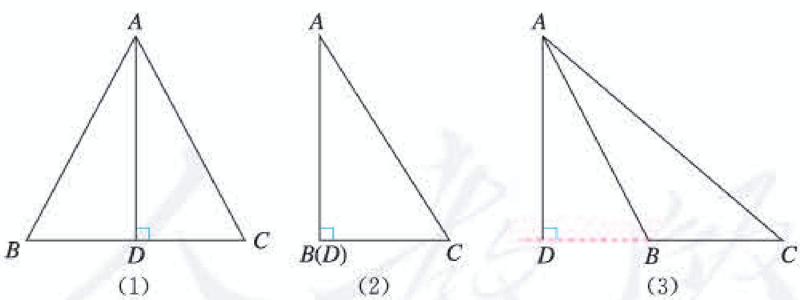
图 17.1-5

如图 17.1-5，画$\angle A$ 的平分线AD，交$\angle A$ 所对的边BC 于点D，所得线段AD 叫做$\triangle ABC$ 的**角平分线**（angular bisector）.

画出$\triangle ABC$ 的另两条角平分线，观察三条角平分线，你有什么发现？

练习

1. 如图，(1) (2) 和 (3) 中的三个$\angle B$ 有什么不同？这三条$\triangle ABC$ 的边BC 上的高AD 在各自三角形的什么位置？你能说出其中的规律吗？

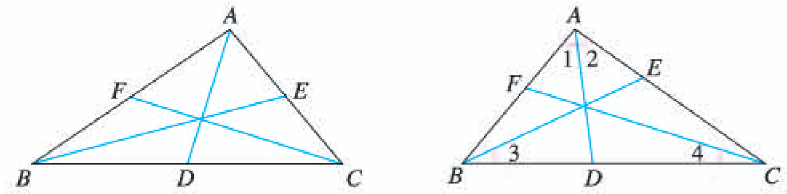


（第 1 题）

2. 填空：

(1) 如下页图 (1)，AD，BE，CF 是$\triangle ABC$ 的三条中线，则 $AB=2$____，$BD=$____，$AE=\frac{1}{2}$____.

(2) 如下页图 (2)，AD，BE，CF 是$\triangle ABC$ 的三条角平分线，则 $\angle 1=$______，$\angle 3=\frac{1}{2}$______，$\angle ACB=2$______.



（1）　　（2）

（第 2 题）

17. 1. 3　三角形的稳定性

工程建筑中经常采用三角形的结构，如屋顶钢架（图 17. 1-6（1）），其中的道理是什么？盖房子时，在窗框未安装好之前，木工师傅常常先在窗框上斜钉一根木条（图 17. 1-6（2））. 为什么要这样做呢？

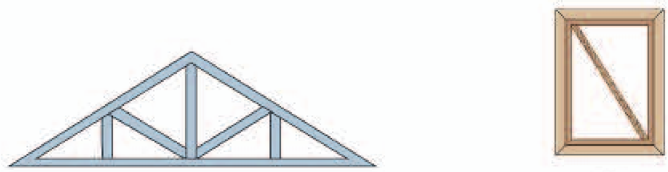

（1）　　（2）

图 17. 1-6

探究

如图 17. 1-7（1），将三根木条用钉子钉成一个三角形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？

如图 17. 1-7（2），将四根木条用钉子钉成一个四边形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？

如图 17. 1-7（3），在四边形木架上再钉一根木条，将它的一对不相邻的顶点连接起来，然后再扭动它，这时木架的形状还会改变吗？为什么？

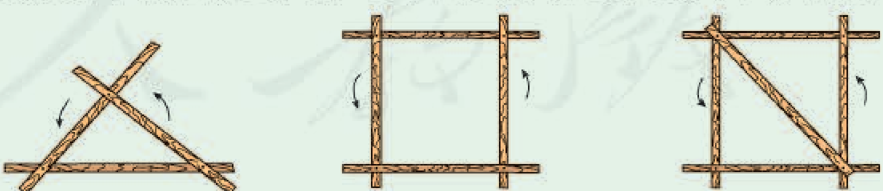

（1）　　（2）　　（3）

图 17. 1-7

可以发现，三角形木架的形状不会改变，而四边形木架的形状会改变. 这就是说，三角形是具有稳定性的图形，而四边形没有稳定性.

还可以发现，斜钉一根木条的四边形木架的形状不会改变. 这是因为斜钉一根木条后，四边形变成两个三角形，由于三角形有稳定性，斜钉一根木条的窗框在未安装好之前也不会变形.

三角形的稳定性有广泛的应用，图 17.1-8 表示其中一些例子. 你能再举一些例子吗?

钢架桥

起重机

图 17.1-8

四边形的不稳定性也有广泛的应用，图 17.1-9 表示其中一些例子.

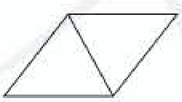
活动挂架

伸缩门

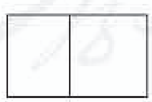
图 17.1-9

练习

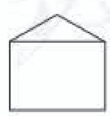
下列图形中哪些具有稳定性?



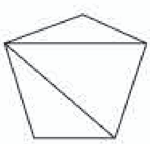
(1)



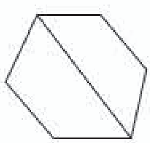
(2)



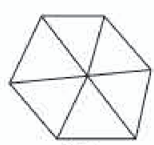
(3)



(4)



(5)

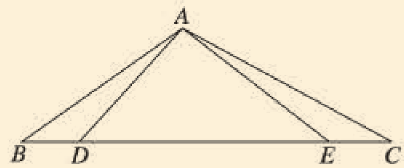


(6)

习题 17.1

复习巩固

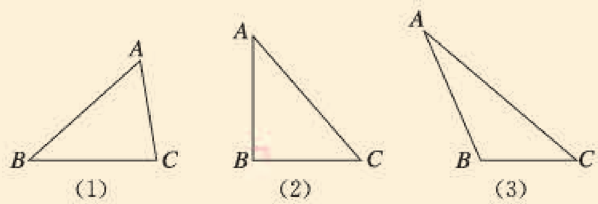
1. 图中有几个三角形？用符号表示这些三角形.



（第 1 题）

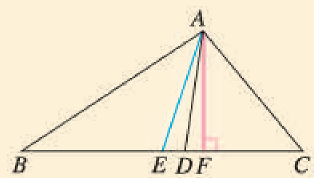
2. 长为 10，7，5，3 的四根木条，选其中三根组成三角形，有几种选法？为什么？

3. 对于下面每个三角形，过顶点 A 画出中线、角平分线和高.



（第 3 题）

4. 如图，在$\triangle ABC$ 中，AE 是中线，AD 是角平分线，AF 是高. 填空：



（第 4 题）

(1) $BE=$____$=\frac{1}{2}$____；

(2) $\angle BAD=$________$=\frac{1}{2}$________；

(3) $\angle AFB=$________$=90^\circ$；

(4) $S_{\triangle ABC}=$________.

5. 选择题.

下列图形中有稳定性的是（　　）.

(A) 正方形　　(B) 长方形

(C) 直角三角形　　(D) 平行四边形

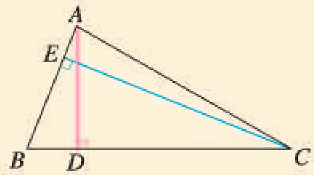
综合运用

6. 一个等腰三角形的一边长为 6 cm，周长为 20 cm，求其他两边的长.

7. (1) 已知等腰三角形的一边长等于 5，一边长等于 6，求它的周长；

(2) 已知等腰三角形的一边长等于 4，一边长等于 9，求它的周长.

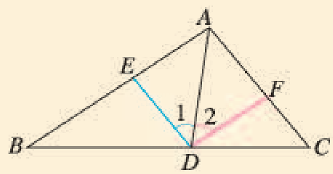
8. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$BC=4$. $\triangle ABC$的高AD与CE的比是多少？（提示：利用三角形的面积公式.）



（第 8 题）

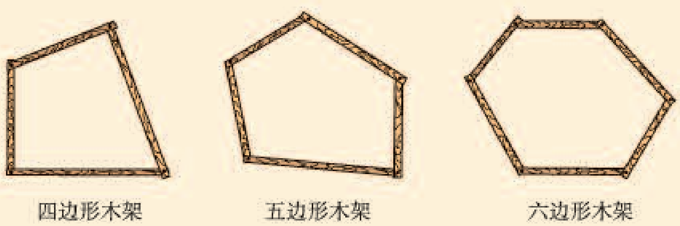
拓广探索

9. 如图，AD是$\triangle ABC$的角平分线. $DE /\!/ AC$，DE交AB于点E，$DF /\!/ AB$，DF交AC于点F. 图中$\angle 1$与$\angle 2$有什么关系？为什么？



（第 9 题）

10. 要使四边形木架（用 4 根木条钉成）不变形，至少要再钉上几根木条？五边形木架和六边形木架呢？

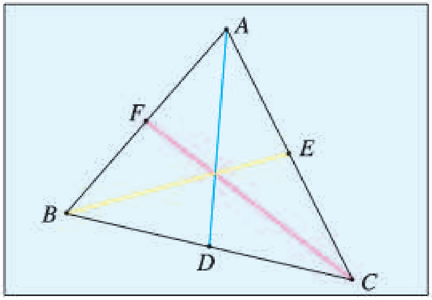


（第 10 题）

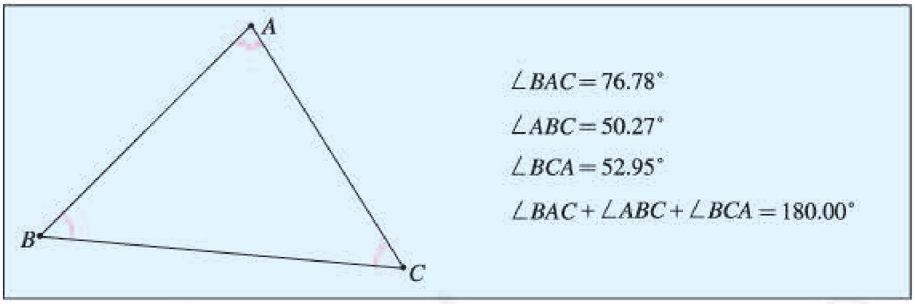
信息技术应用

画图找规律

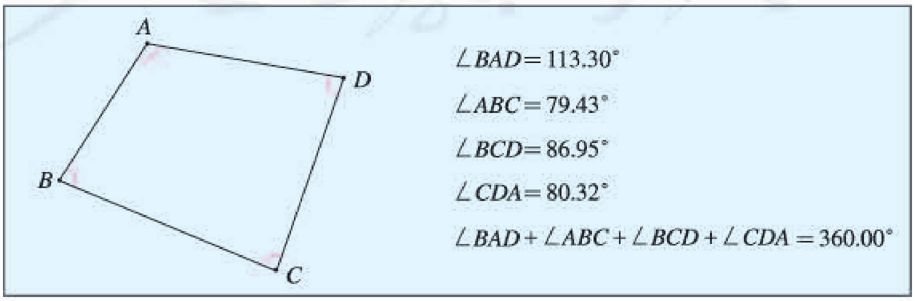
1. 在计算机上用《几何画板》软件任意画一个三角形，再画出它的三条中线，你发现了什么规律？然后随意改变所画三角形的形状，看看这个规律是否改变．三角形的三条高有这个规律吗？三条角平分线呢？



2. 在计算机上用《几何画板》软件任意画一个三角形，量出它的各内角并计算它们的和．然后随意改变所画三角形的形状，再量出变化后的各内角，计算内角和．由此，你能得出什么结论？



3. 在计算机上用《几何画板》软件任意画一个四边形，量出它的各内角并计算它们的和．然后随意改变所画四边形的形状，再量出变化后的各内角，计算内角和．由此，你能得出什么结论？



17.2 与三角形有关的角

17.2.1 三角形的内角

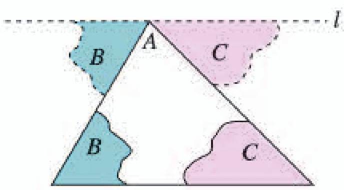
我们在小学就已经知道，任意一个三角形的内角和等于 180°. 我们是通过度量或剪拼得出这一结论的.

通过度量或剪拼的方法，可以验证三角形的内角和等于 180°. 但是，由于测量常常有误差，这种“验证”不是“数学证明”，不能完全让人信服；又由于形状不同的三角形有无数个，我们不可能用上述方法一一验证所有三角形的内角和等于 180°. 所以，需要通过推理的方法去证明：任意一个三角形的内角和一定等于 180°.

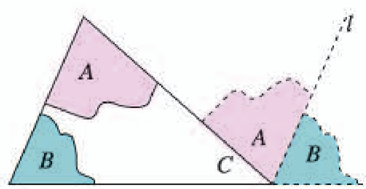
探究

在纸上任意画一个三角形，将它的内角剪下拼合在一起，就得到一个平角. 从这个操作过程中，你能发现证明的思路吗？

上面的拼合中，有不同的方法. 你用了图 17.2-1 中的哪种方法？



(1)



(2)

图 17.2-1

在图 17.2-1（1）中，$\angle B$ 和$\angle C$ 分别拼在$\angle A$ 的左右，三个角合起来形成一个平角，出现一条过点 A 的直线 l，移动后的$\angle B$ 和$\angle C$ 各有一条边在直线 l 上. 想一想，直线 l 与$\triangle ABC$ 的边 BC 有什么关系？由这个图你能想出证明“三角形的内角和等于 180°”的方法吗？

由上述拼合过程得到启发，过$\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 l 平行于$\triangle ABC$ 的边 BC（图 17.2-2），那么由平行线的性质与平角的定义就能证明“三角形的内角和等于 180°”这个结论.

已知：$\triangle ABC$（图 17.2-2）.

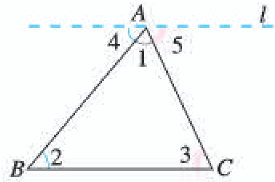


图 17.2-2

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

证明：如图 17.2-2，过点 A 作直线 l，使 $l /\!/ BC$.

$\because\ l /\!/ BC$，

$\therefore\ \angle 2=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

同理　$\angle 3=\angle 5$.

$\because\ \angle 1$，$\angle 4$，$\angle 5$ 组成平角，

$\therefore\ \angle 1+\angle 4+\angle 5=180^\circ$（平角定义）.

$\therefore\ \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$（等量代换）.

以上我们就证明了任意一个三角形的内角和都等于 180°，得到如下定理：

由图 17.2-1(2)，你能想出这个定理的其他证法吗？

三角形内角和定理　**三角形三个内角的和等于 180°.**

例 1　如图 17.2-3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=40^\circ$，$\angle B=75^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 求 $\angle ADB$ 的度数.

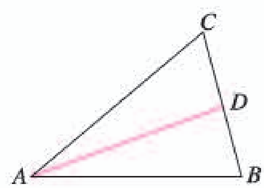


图 17.2-3

解：由 $\angle BAC=40^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，得

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=20^\circ.$$

在 $\triangle ABD$ 中，

$$\begin{aligned}\angle ADB&=180^\circ-\angle B-\angle BAD\\&=180^\circ-75^\circ-20^\circ=85^\circ.\end{aligned}$$

例 2　图 17.2-4 是 A，B，C 三岛的平面图，C 岛在 A 岛的北偏东 50° 方向，B 岛在 A 岛的北偏东 80° 方向，C 岛在 B 岛的北偏西 40° 方向. 从 B 岛看 A，C 两岛的视角 $\angle ABC$ 是多少度？从 C 岛看 A，B 两岛的视角 $\angle ACB$ 呢？

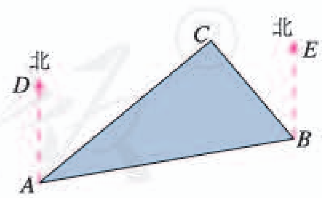


图 17.2-4

分析：A，B，C 三岛的连线构成 $\triangle ABC$，所求的 $\angle ACB$ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角. 如果能求出 $\angle CAB$，$\angle ABC$，就能求出 $\angle ACB$.

解：$\angle CAB=\angle BAD-\angle CAD=80^\circ-50^\circ=30^\circ$.

由 $AD /\!/ BE$，得

$$\angle BAD+\angle ABE=180^\circ.$$

所以

$\angle ABE=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-80^\circ=100^\circ$，

$\angle ABC=\angle ABE-\angle EBC=100^\circ-40^\circ=60^\circ$.

在$\triangle ABC$中，

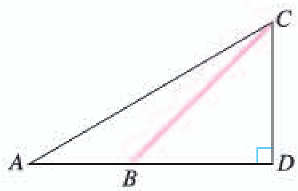
$$\begin{aligned}\angle ACB&=180^\circ-\angle ABC-\angle CAB\\&=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ.\end{aligned}$$

你还能想出其他解法吗?

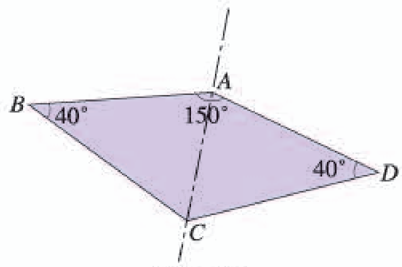
答：从 B 岛看 A，C 两岛的视角$\angle ABC$是60°，从 C 岛看 A，B 两岛的视角$\angle ACB$是90°.

练习

1. 如图，从 A 处观测 C 处的仰角$\angle CAD=30^\circ$，从 B 处观测 C 处的仰角$\angle CBD=45^\circ$. 从 C 处观测 A，B 两处的视角$\angle ACB$是多少度?



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一种滑翔伞的形状是左右对称的四边形 $ABCD$，其中$\angle A=150^\circ$，$\angle B=\angle D=40^\circ$. 求$\angle C$的度数.

如图 17.2-5，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，由三角形内角和定理，得

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ,$$

即

$$\angle A+\angle B+90^\circ=180^\circ,$$

所以

$$\angle A+\angle B=90^\circ.$$

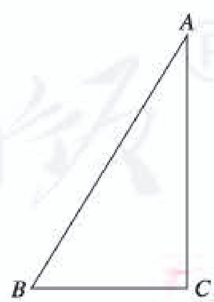


图 17.2-5

也就是说，**直角三角形的两个锐角互余.**

直角三角形可以用符号“Rt△”表示，直角三角形 ABC 可以写成 Rt$\triangle ABC$.

例 3 如图 17.2-6，$\angle C=\angle D=90^\circ$，$AD$，$BC$ 相交于点 E. $\angle CAE$ 与 $\angle DBE$ 有什么关系？为什么？

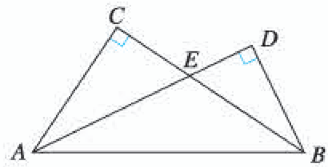


图 17.2-6

解：在 Rt$\triangle ACE$ 中，

$$\angle CAE=90^\circ-\angle AEC.$$

在 Rt$\triangle BDE$ 中，

$$\angle DBE=90^\circ-\angle BED.$$

$\because$ $\angle AEC=\angle BED$，

$\therefore$ $\angle CAE=\angle DBE$.

思考

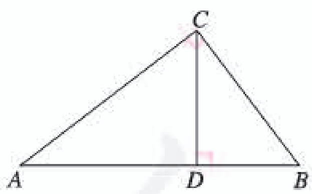
我们知道，如果一个三角形是直角三角形，那么这个三角形有两个角互余. 反过来，有两个角互余的三角形是直角三角形吗？请你说说理由.

由三角形内角和定理可得：

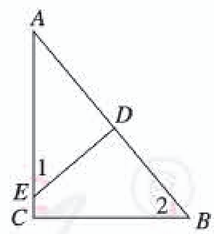
有两个角互余的三角形是直角三角形.

练习

1. 如图，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为 D. $\angle ACD$ 与 $\angle B$ 有什么关系？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\angle C=90^\circ$，$\angle 1=\angle 2$，$\triangle ADE$ 是直角三角形吗？为什么？

17.2.2 三角形的外角

如图 17.2-7，把 $\triangle ABC$ 的一边 BC 延长，得到 $\angle ACD$. 像这样，三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做**三角形的外角**.

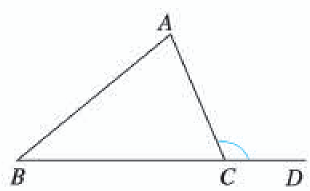


图 17.2-7

思考

如图 17.2-8，在$\triangle ABC$中，$\angle A=70^\circ$，$\angle B=60^\circ$. $\angle ACD$是$\triangle ABC$的一个外角. 能由$\angle A$，$\angle B$求出$\angle ACD$吗？如果能，$\angle ACD$与$\angle A$，$\angle B$有什么关系？

任意一个三角形的一个外角与它不相邻的两个内角是否都有这种关系？

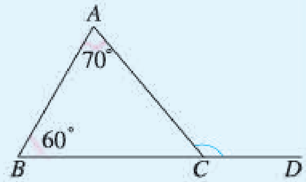


图 17.2-8

一般地，由三角形内角和定理可以推出下面的推论（请同学们自己证明）：

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

推论是由定理直接推出的结论. 和定理一样，推论可以作为进一步推理的依据.

例 4 如图 17.2-9，$\angle BAE$，$\angle CBF$，$\angle ACD$是$\triangle ABC$的三个外角，它们的和是多少？

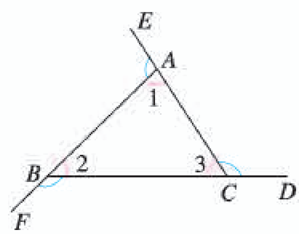


图 17.2-9

解： 由三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和，得

$$\angle BAE=\angle 2+\angle 3,$$
$$\angle CBF=\angle 1+\angle 3,$$
$$\angle ACD=\angle 1+\angle 2.$$

所以

$\angle BAE+\angle CBF+\angle ACD=2(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$.

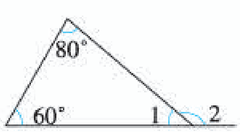
由$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$，得

$\angle BAE+\angle CBF+\angle ACD=2\times 180^\circ=360^\circ$.

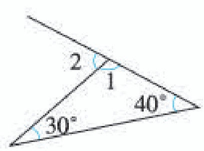
你还有其他解法吗？

练习

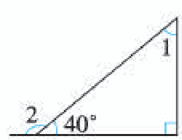
说出下列图形中$\angle 1$和$\angle 2$的度数：



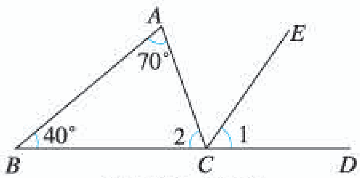
(1)



(2)

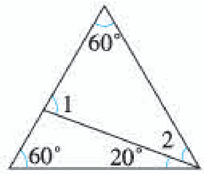


(3)

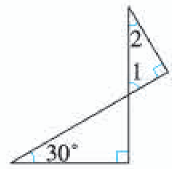


CE 平分∠ACD

（4）



（5）

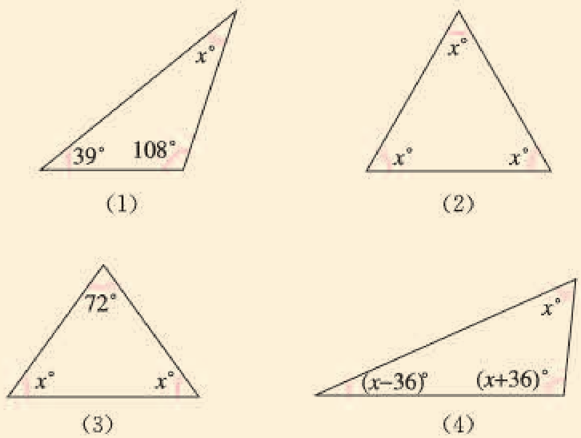


（6）

习题 17.2

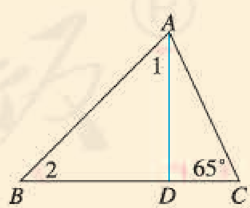
复习巩固

1. 求出下列图形中的 x 的值：



（第 1 题）

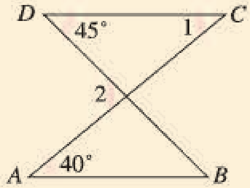
2. （1）一个三角形最多有几个直角？为什么？
   （2）一个三角形最多有几个钝角？为什么？
   （3）直角三角形的外角可以是锐角吗？为什么？
3. $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle A+10^\circ$，$\angle C=\angle B+10^\circ$. 求 $\triangle ABC$ 的各内角的度数.
4. 如图，$AD\perp BC$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=65^\circ$. 求 $\angle BAC$ 的度数.



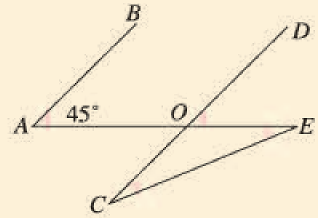
（第 4 题）

综合运用

5. 如下页图，$AB\,/\!/\,CD$，$\angle A=40^\circ$，$\angle D=45^\circ$. 求 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的度数.



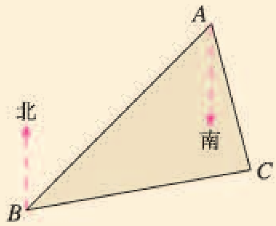
（第 5 题）



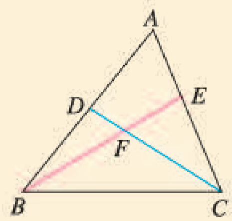
（第 6 题）

6. 如图，$AB /\!/ CD$，$\angle A=45°$，$\angle C=\angle E$. 求$\angle C$ 的度数.

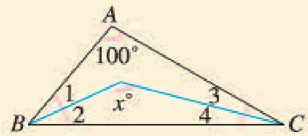
7. 如图，B 处在A 处的南偏西 45°方向，C 处在A 处的南偏东 15°方向，C 处在B 处的北偏东 80°方向，求$\angle ACB$ 的度数.



（第 7 题）



（第 8 题）



（第 9 题）

8. 如图，D 是 AB 上一点，E 是 AC 上一点，BE，CD 相交于点 F，$\angle A=62°$，$\angle ACD=35°$，$\angle ABE=20°$. 求$\angle BDC$ 和$\angle BFD$ 的度数.

9. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle A=100°$. 求 x 的值.

拓广探索

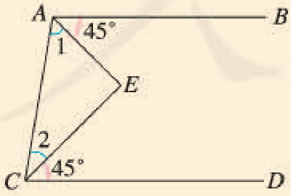
10. 如图，$AB /\!/ CD$，$\angle BAE=\angle DCE=45°$. 填空：

∵ $AB /\!/ CD$，

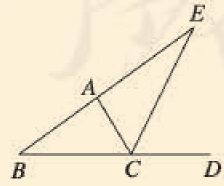
∴ $\angle 1+45°+\angle 2+45°=$______.

∴ $\angle 1+\angle 2=$______.

∴ $\angle E=$______.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 如图，CE 是$\triangle ABC$ 的外角$\angle ACD$ 的平分线，且 CE 交 BA 的延长线于点 E. 求证$\angle BAC=\angle B+2\angle E$.

阅读与思考

为什么要证明

小明：我们观察任意一个三角形，量出它的每个内角，都能得出它的内角和等于 180°，为什么还要证明这个结论呢？

李老师：通过观察、试验等可以寻找规律，但是由于观察可能有误差，试验可能受干扰，考察对象可能不具有一般性等原因，一般来说由观察、试验等所产生的“结论”未必正确．例如，让一个班的学生每人任意画一个三角形，再量出它的每个内角，计算三个内角的和，得到的结果未必全是 180°，可能有的会比 180°大些，有的会比 180°小些．

小明：如果观察细致，仪器精确，不产生误差，还需要证明吗？

李老师：仅通过观察、试验等就下结论有时也缺乏说服力．例如，即使不考虑误差等因素，当上面观察的所有结果全是 180°时，人们还会有疑问：“不同形状的三角形有无数个，我们画出并验证的只是其中有限个，其余的三角形的内角和是多少呢？能对所有的三角形都进行验证吗？”事实上，不管我们经历多长时间，画出多少个三角形，观察、试验的对象也是有限个．因此，要确认“三角形的内角和等于 180°”，就不能依靠度量的手段和观察、试验、验证的方法，而必须进行推理论证——对于一般的三角形，推出它的三个内角的和等于一个平角，从而得出“无论三角形的具体形状如何，它的内角和一定等于 180°”．

小明：现在我明白了，一个数学命题是否正确，需要经过理由充足、使人信服的推理论证才能得出结论．观察、试验等是发现数学公式、定理的重要途径，而证明则是确认数学公式、定理的必要步骤．

17.3 多边形及其内角和

17.3.1 多边形

观察图 17.3-1 中的图片，其中的房屋结构、蜂巢结构等给我们以由一些线段围成的图形的形象，你能从图 17.3-1 中想象出几个由一些线段围成的图形吗？

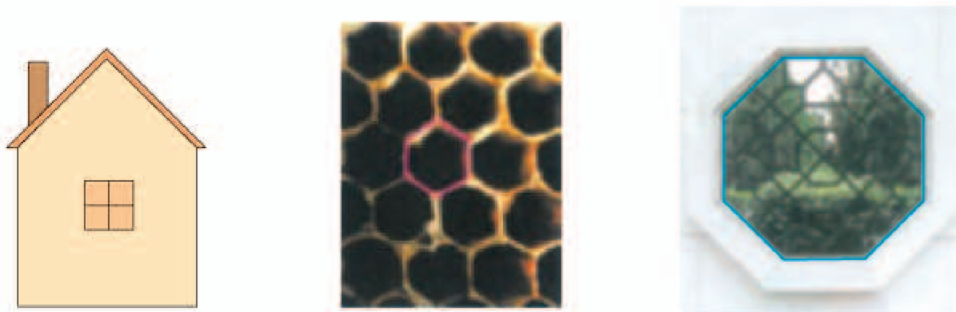


图 17.3-1

我们学过三角形. 类似地，在平面内，由一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫做**多边形**（polygon）.

多边形按组成它的线段的条数分成三角形、四边形、五边形……三角形是最简单的多边形. 如果一个多边形由 n 条线段组成，那么这个多边形就叫做 n 边形. 如图 17.3-2，螺母底面的边缘可以设计为六边形，也可以设计为八边形.

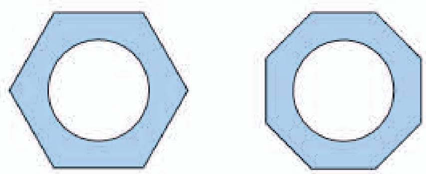


图 17.3-2

多边形相邻两边组成的角叫做它的内角. 图 17.3-3 中的 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$，$\angle E$ 是五边形$ABCDE$的 5 个内角. 多边形的边与它的邻边的延长线组成的角叫做多边形的外角. 图 17.3-4 中的$\angle 1$ 是五边形$ABCDE$的一个外角.

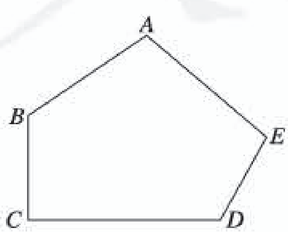


图 17.3-3

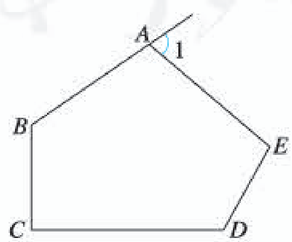


图 17.3-4

连接多边形不相邻的两个顶点的线段，叫做多边形的**对角线**（diagonal）。图 17.3-5 中，AC，AD 是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线.

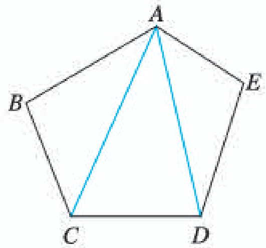


图 17.3-5

五边形 $ABCDE$ 共有几条对角线？请画出它的其他对角线.

如图 17.3-6（1），画出四边形 $ABCD$ 的任何一条边（例如 CD）所在直线，整个四边形都在这条直线的同一侧，这样的四边形叫做凸四边形. 而图 17.3-6（2）中的四边形 $ABCD$ 就不是凸四边形，因为画出边 CD（或 BC）所在直线，整个四边形不都在这条直线的同一侧. 类似地，画出多边形的任何一条边所在直线，如果整个多边形都在这条直线的同一侧，那么这个多边形就是凸多边形. 本节只讨论凸多边形.

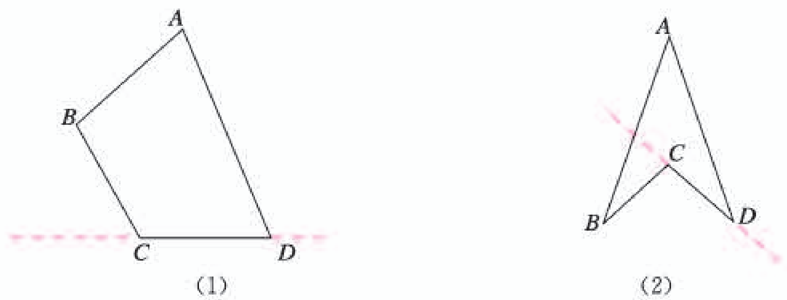


图 17.3-6

我们知道，正方形的各个角都相等，各条边都相等. 像正方形这样，各个角都相等，各条边都相等的多边形叫做**正多边形**（regular polygon）. 图 17.3-7 是正多边形的一些例子.

图 17.3-7

练习

1. 画出下列多边形的全部对角线：

（第 1 题）

2. 四边形的一条对角线将四边形分成几个三角形？从五边形的一个顶点出发，可以画出几条对角线？它们将五边形分成几个三角形？

17.3.2 多边形的内角和

思考

我们知道，三角形的内角和等于 180°，正方形、长方形的内角和都等于 360°. 那么，任意一个四边形的内角和是否也等于 360°呢？你能利用三角形内角和定理证明四边形的内角和等于 360°吗？

要用三角形内角和定理证明四边形的内角和等于 360°，只要将四边形分成几个三角形即可.

如图 17.3-8，在四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，则四边形 $ABCD$ 被分为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 两个三角形.

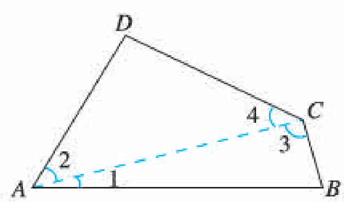


图 17.3-8

由此可得

$\angle DAB+\angle B+\angle BCD+\angle D$

$=\angle 1+\angle 2+\angle B+\angle 3+\angle 4+\angle D$

$=(\angle 1+\angle B+\angle 3)+(\angle 2+\angle 4+\angle D)$.

$\because$ $\angle 1+\angle B+\angle 3=180^\circ$,

$\angle 2+\angle 4+\angle D=180^\circ$,

$\therefore$ $\angle DAB+\angle B+\angle BCD+\angle D=180^\circ+180^\circ=360^\circ$.

即四边形的内角和等于 360°.

类比上面的过程，你能推导出五边形和六边形的内角和各是多少吗？

观察图 17.3-9，填空：

图 17.3-9

从五边形的一个顶点出发，可以作______条对角线，它们将五边形分为______个三角形，五边形的内角和等于 $180^\circ\times$______.

从六边形的一个顶点出发，可以作______条对角线，它们将六边形分为______个三角形，六边形的内角和等于 $180^\circ\times$______.

通过以上过程，你能发现多边形的内角和与边数的关系吗？

一般地，从 n 边形的一个顶点出发，可以作 $(n-3)$ 条对角线，它们将 n 边形分为 $(n-2)$ 个三角形，n 边形的内角和等于 $180^\circ\times(n-2)$.

这样就得出了多边形内角和公式：

n 边形内角和等于 $(n-2)\times180^\circ$.

把一个多边形分成几个三角形，还有其他分法吗？由新的分法，能得出多边形内角和公式吗？

例 1 如果一个四边形的一组对角互补，那么另一组对角有什么关系？

解： 如图17.3-10，在四边形 $ABCD$ 中，

$$\angle A+\angle C=180^\circ.$$

$$\because\ \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=(4-2)\times180^\circ=360^\circ,$$

$$\therefore\ \angle B+\angle D=360^\circ-(\angle A+\angle C)=360^\circ-180^\circ=180^\circ.$$

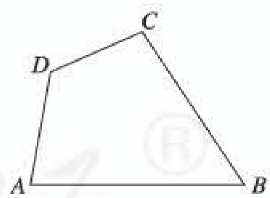


图 17.3-10

这就是说，如果四边形的一组对角互补，那么另一组对角也互补.

例 2 如图 17.3-11，在六边形的每个顶点处各取一个外角，这些外角的和叫做六边形的外角和. 六边形的外角和等于多少？

分析：考虑以下问题：

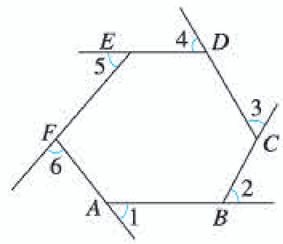


图 17.3-11

(1) 任何一个外角同与它相邻的内角有什么关系？

(2) 六边形的 6 个外角加上与它们相邻的内角，所得总和是多少？

(3) 上述总和与六边形的内角和、外角和有什么关系？

联系这些问题，考虑外角和的求法.

解：六边形的任何一个外角加上与它相邻的内角都等于 180°. 因此六边形的 6 个外角加上与它们相邻的内角，所得总和等于 $6\times180^\circ$.

这个总和就是六边形的外角和加上内角和. 所以外角和等于总和减去内角和，即外角和等于

$$6\times180^\circ-(6-2)\times180^\circ=2\times180^\circ=360^\circ.$$

思考

如果将例 2 中六边形换为 n 边形（n 是不小于 3 的任意整数），可以得到同样结果吗？

由上面的思考可以得到：

多边形的外角和等于 360°.

你也可以像以下这样理解为什么多边形的外角和等于 360°.

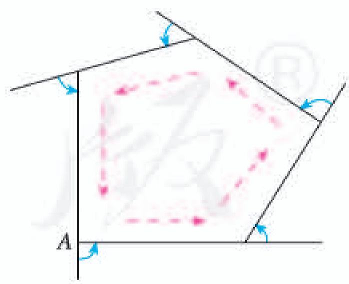
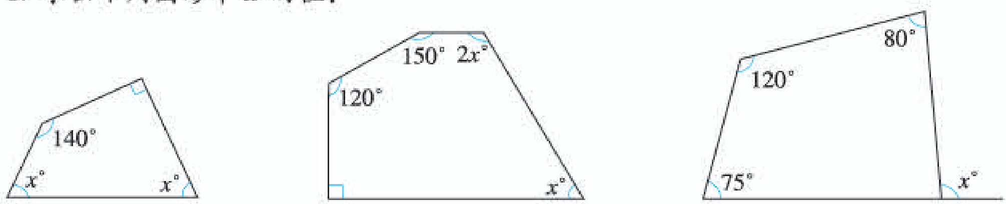


图 17.3-12

如图 17.3-12，从多边形的一个顶点 A 出发，沿多边形的各边走过各顶点，再回到点 A，然后转向出发时的方向. 在行程中所转的各个角的和，就是多边形的外角和. 由于走了一周，所转的各个角的和等于一个周角，所以多边形的外角和等于 360°.

练习

1. 求出下列图形中 x 的值：



(1)　　(2)　　(3)

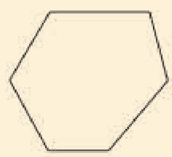
（第 1 题）

2. 一个多边形的各内角都等于 $120°$，它是几边形？
3. 一个多边形的内角和与外角和相等，它是几边形？

习题 17.3

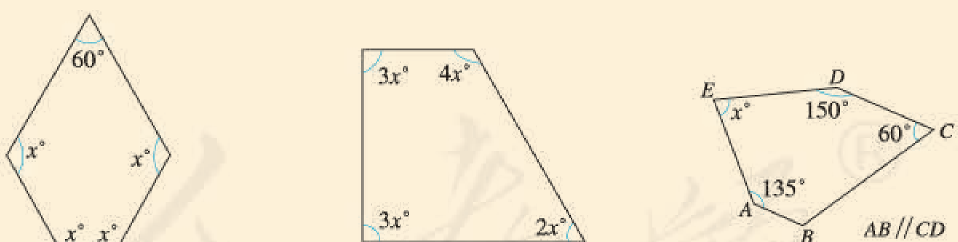
复习巩固

1. 画出下面多边形的全部对角线：



（第 1 题）

2. 求出下列图形中 x 的值：



(1)　　(2)　　(3)

（第 2 题）

3. 填表：

多边形的边数	3	4	5	6	8	12
内角和						
外角和						

4. 计算正五边形和正十边形的每个内角的度数.

5. 一个多边形的内角和等于 1 260°，它是几边形?

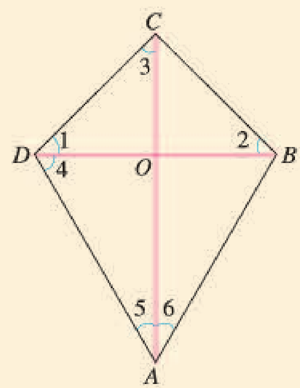
6. （1）一个多边形的内角和是外角和的一半，它是几边形?

（2）一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，它是几边形?

综合运用

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，AB 与 CD 有怎样的位置关系? 为什么? BC 与 AD 呢?

（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，$BC\perp CD$，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle 4=60°$，$\angle 5=\angle 6$.

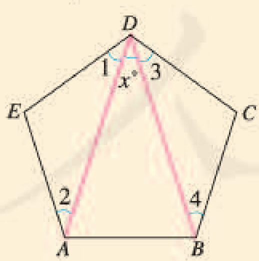
（1）CO 是 $\triangle BCD$ 的高吗? 为什么?

（2）$\angle 5$ 的度数是多少?

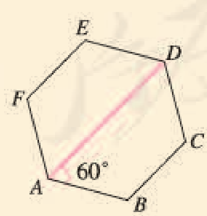
（3）求四边形 $ABCD$ 各内角的度数.

拓广探索

9. 如图，五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，且$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求 x 的值.



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$\angle DAB=60°$. AB 与 DE 有怎样的位置关系? BC 与 EF 有这种关系吗? 这些结论是怎样得出的?

数学活动

活动1

有些地板的拼合图案如图1所示，它是用正方形的地砖铺成的．用地砖铺地，用瓷砖贴墙，都要求砖与砖严丝合缝，不留空隙，把地面或墙面全部覆盖．从数学角度看，这些工作就是用一些不重叠摆放的多边形把平面的一部分完全覆盖，通常把这类问题叫做用多边形覆盖平面（或平面镶嵌）的问题．

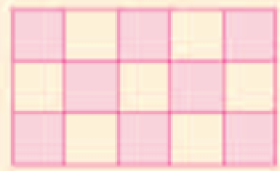
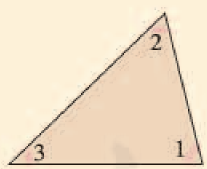


图1

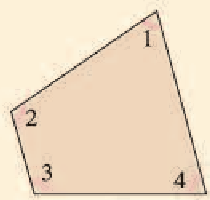
下面我们来探究一些多边形能否镶嵌成平面图案，并思考为什么会出现这种结果．

（1）分别剪一些边长相同的正三角形、正方形、正五边形、正六边形，如果用其中一种正多边形镶嵌，哪几种正多边形能镶嵌成一个平面图案？如果用其中两种正多边形镶嵌，哪两种正多边形能镶嵌成一个平面图案？

（2）任意剪出一些形状、大小相同的三角形纸板，拼拼看，它们能否镶嵌成平面图案．



三角形



四边形

（3）任意剪出一些形状、大小相同的四边形纸板，拼拼看，它们能否镶嵌成平面图案．

你还可以搜集一些其他用多边形镶嵌的平面图案，或者设计一些地板的平面镶嵌图，并与同学互相交流．

小　结

一、本章知识结构图

二、回顾与思考

在本章中，我们进一步研究了三角形，如探索并证明了三角形三边之间的关系以及三角形内角和定理. 类似地，我们研究了多边形，如探索并证明了多边形内角和公式.

三角形内角和定理是几何中一个很重要的结论，它可以由平行线的性质与平角的定义证明. 由这一定理可以进一步得出直角三角形两个锐角的关系以及三角形外角的有关结论.

三角形是最简单的多边形. 在研究多边形时，我们常常将它分为几个三角形，再利用三角形的性质得出多边形的有关结论. 例如，本章得到的多边形的内角和公式就是上述方法的应用.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 三角形的三边之间有怎样的关系？得出这个结论的依据是什么？

2. 三角形的三个内角之间有怎样的关系？如何证明这个结论？

3. 直角三角形的两个锐角有怎样的关系？三角形的一个外角与和它不相邻的两个内角有怎样的关系？这些结论能由三角形内角和定理得出吗？

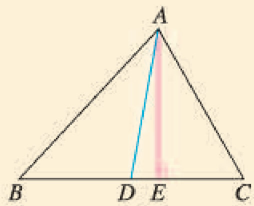
4. n 边形的 n 个内角有怎样的关系？如何推出这个结论？

5. n 边形的外角和与 n 有关吗？为什么？

复习题 17

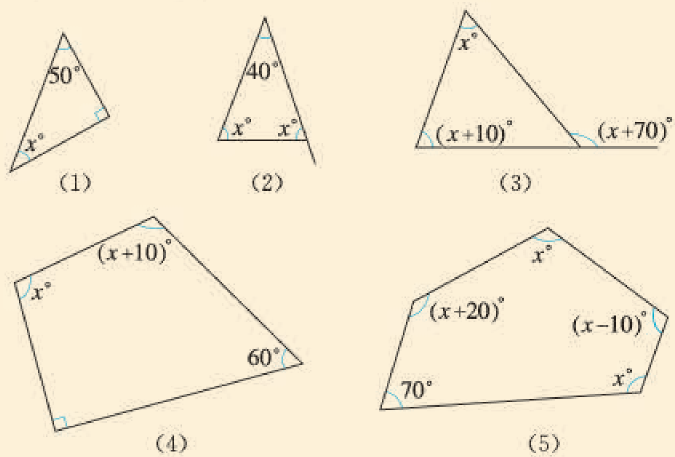
复习巩固

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AD，AE分别是边BC上的中线和高，$AE=2\text{ cm}$，$S_{\triangle ABD}=1.5\text{ cm}^2$. 求$BC$和$DC$的长.



（第 1 题）

2. 求出下列图形中x的值.



（第 2 题）

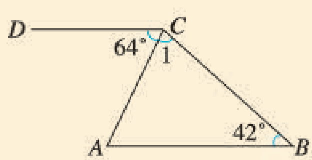
3. 填表：

多边形的边数	7		20	
内角和		$15\times180°$		$23\times180°$
外角和				

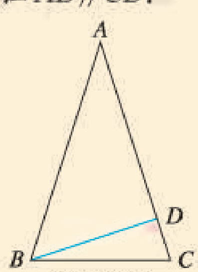
4. 从八边形的一个顶点出发，可以作几条对角线？它们将八边形分成几个三角形？这些三角形的内角和与八边形的内角和有什么关系？
5. 一个多边形的内角和比四边形的内角和多$540°$，并且这个多边形的各内角都相等. 这个多边形的每个内角等于多少度？

综合运用

6. 如图，$\angle B=42°$，$\angle A+10°=\angle 1$，$\angle ACD=64°$. 求证$AB\parallel CD$.



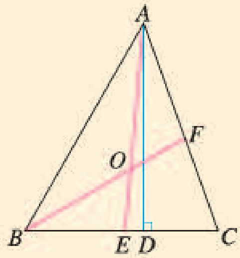
（第 6 题）



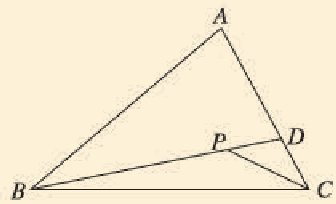
（第 7 题）

7. 如上页图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=\angle ABC=2\angle A$，$BD$是边$AC$上的高. 求$\angle DBC$的度数.

8. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是高，AE，BF是角平分线，它们相交于点O，$\angle BAC=50°$，$\angle C=70°$. 求$\angle DAC$和$\angle BOA$的度数.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，填空：

由三角形两边的和大于第三边，得

$AB+AD>$____________，

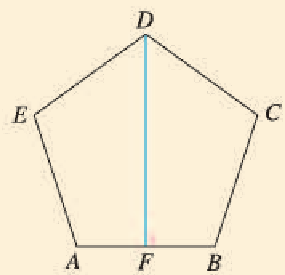
$PD+CD>$____________.

将不等式左边、右边分别相加，得

$AB+AD+PD+CD>$____________，

即 $AB+AC>$____________.

10. 如图，五边形$ABCDE$的内角都相等，$DF\perp AB$. 求$\angle CDF$的度数.



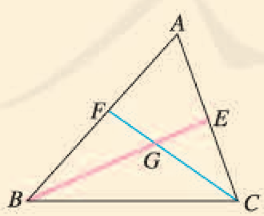
（第 10 题）

拓广探索

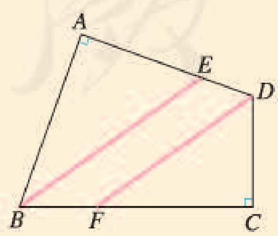
11. 如图，$\triangle ABC$的$\angle ABC$和$\angle ACB$的平分线BE，CF相交于点G. 求证：

(1) $\angle BGC=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$；

(2) $\angle BGC=90°+\frac{1}{2}\angle A$.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle C=90°$，BE平分$\angle ABC$，DF平分$\angle ADC$. 求证$BE\,/\!/\,DF$.

第十八章　全等三角形

在我们的周围，经常可以看到形状、大小完全相同的图形，这样的图形叫做全等形．研究全等形的性质和判定两个图形全等的方法，是几何学的一个重要内容．本章将以三角形为例，对这些问题进行研究．

上一章我们通过推理论证得到了三角形内角和定理等重要结论．本章中，推理论证将发挥更大的作用．我们将通过证明三角形全等来证明线段或角相等，利用全等三角形证明角的平分线的性质．通过本章学习，你对三角形的认识会更加深入，推理论证能力会进一步提高．

18.1 全等三角形

图 18.1-1 所示的例子中都有形状、大小相同的图形，你能再举出一些类似的例子吗？

图 18.1-1

探究

把一块三角尺按在纸板上，画下图形，照图形裁下来的纸板和三角尺的形状、大小完全一样吗？把三角尺和裁得的纸板放在一起能够完全重合吗？从同一张底片冲洗出来的两张尺寸相同的照片上的图形，放在一起也能够完全重合吗？

可以看到，形状、大小相同的图形放在一起能够完全重合. 能够完全重合的两个图形叫做**全等形**（congruent figures）.

能够完全重合的两个三角形叫做**全等三角形**（congruent triangles）.

思考

在图 18.1-2（1）中，把$\triangle ABC$沿直线BC平移，得到$\triangle DEF$.

在图 18.1-2（2）中，把$\triangle ABC$沿直线BC翻折 180°，得到$\triangle DBC$.

在图 18.1-2（3）中，把$\triangle ABC$绕点A旋转，得到$\triangle ADE$.

各图中的两个三角形全等吗？

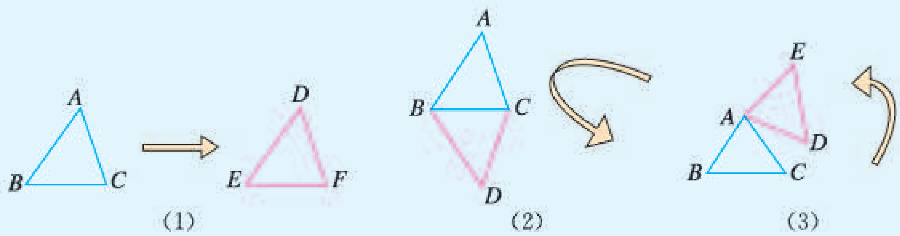


图 18.1-2

一个图形经过平移、翻折、旋转后，位置变化了，但形状、大小都没有改变，即平移、翻折、旋转前后的图形全等.

把两个全等的三角形重合到一起，重合的顶点叫做**对应顶点**，重合的边叫做**对应边**，重合的角叫做**对应角**. 例如，图 18.1-2（1）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，其中点 A 和点 D，点 B 和点 E，点 C 和点 F 是对应顶点；AB 和 DE，BC 和 EF，AC 和 DF 是对应边；$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle B$ 和 $\angle E$，$\angle C$ 和 $\angle F$ 是对应角.

全等用符号“$\cong$”表示，读作“全等于”.

记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上. 例如，图 18.1-2（2）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 全等，点 A 和点 D，点 B 和点 B，点 C 和点 C 是对应顶点，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$.

思考

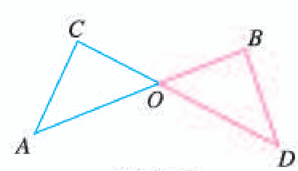
图 18.1-2（1）中，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，对应边有什么关系？对应角呢？

全等三角形有这样的性质：

全等三角形的对应边相等，全等三角形的对应角相等.

练习

1. 说出图 18.1-2（2）、图 18.1-2（3）中两个全等三角形的对应边、对应角.
2. 如图，$\triangle OCA \cong \triangle OBD$，点 C 和点 B，点 A 和点 D 是对应顶点. 说出这两个三角形中相等的边和角.

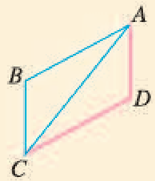


（第 2 题）

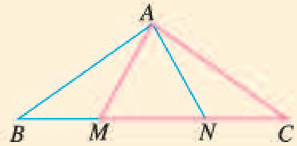
习题 18.1

复习巩固

1. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$AB$ 和 CD，BC 和 DA 是对应边. 写出其他对应边及对应角.



（第 1 题）

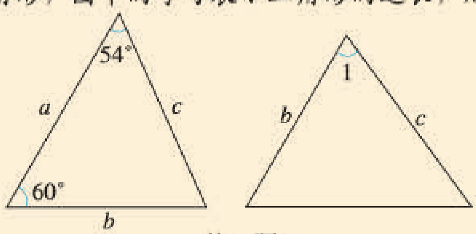


（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ABN \cong \triangle ACM$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 是对应角，AB 和 AC 是对应边. 写出其他对应边及对应角.

综合运用

3. 如图是两个全等三角形，图中的字母表示三角形的边长，则 $\angle 1$ 等于多少度？

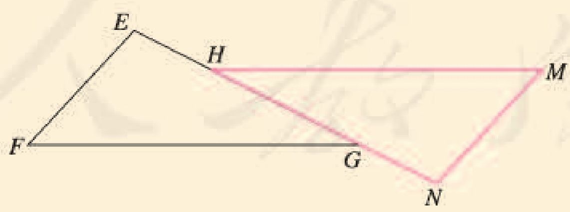


（第 3 题）

4. 如图，$\triangle EFG \cong \triangle NMH$，$\angle F$ 和 $\angle M$ 是对应角. 在 $\triangle EFG$ 中，FG 是最长边. 在 $\triangle NMH$ 中，MH 是最长边. $EF=2.1$ cm，$EH=1.1$ cm，$NH=3.3$ cm.

(1) 写出其他对应边及对应角；

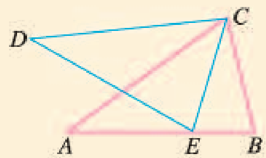
(2) 求线段 NM 及线段 HG 的长度.



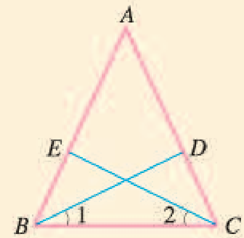
（第 4 题）

拓广探索

5. 如下页图，$\triangle ABC \cong \triangle DEC$，$CA$ 和 CD，CB 和 CE 是对应边. $\angle ACD$ 和 $\angle BCE$ 相等吗？为什么？



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，$\triangle AEC \cong \triangle ADB$，点 E 和点 D 是对应顶点.

（1）写出它们的对应边和对应角；

（2）若 $\angle A=50^{\circ}$，$\angle ABD=39^{\circ}$，且 $\angle 1=\angle 2$，求 $\angle 1$ 的度数.

18.2 三角形全等的判定

我们知道，如果$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，那么它们的对应边相等，对应角相等. 反过来，根据全等三角形的定义，如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足三条边分别相等，三个角分别相等，即

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ CA = C'A',$$
$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C',$$

就能判定$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（图 18.2-1）.

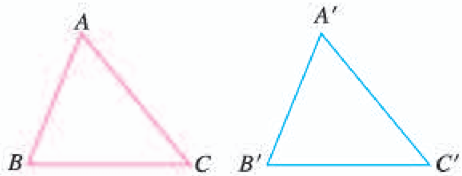


图 18.2-1

一定要满足三条边分别相等，三个角也分别相等，才能保证两个三角形全等吗？上述六个条件中，有些条件是相关的. 能否在上述六个条件中选择部分条件，简捷地判定两个三角形全等呢？

本节我们就来讨论这个问题.

探究1

先任意画出一个$\triangle ABC$. 再画一个$\triangle A'B'C'$，使$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足上述六个条件中的一个（一边或一角分别相等）或两个（两边、一边一角或两角分别相等）. 你画出的$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$一定全等吗？

通过画图可以发现，满足上述六个条件中的一个或两个，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不一定全等. 满足上述六个条件中的三个，能保证$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？

我们分情况进行讨论.

探究2

先任意画出一个$\triangle ABC$. 再画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B' = AB$，$B'C' = BC$，$C'A' = CA$. 把画好的$\triangle A'B'C'$剪下来，放到$\triangle ABC$上，它们全等吗？

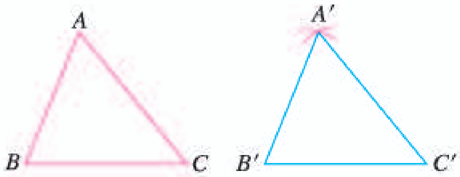


图 18.2-2

画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$B'C'=BC$：

(1) 画$B'C'=BC$；

(2) 分别以点B'，C'为圆心，线段AB，AC长为半径画弧，两弧相交于点A'；

(3) 连接线段$A'B'$，$A'C'$.

图 18.2-2 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法，你是这样画的吗？探究 2 的结果反映了什么规律？

由探究 2 可以得到以下基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

三边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）.

我们曾经做过这样的实验：将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架的形状、大小就不变了. 就是说，三角形三条边的长度确定了，这个三角形的形状、大小也就确定了.

例 1 在如图 18.2-3 所示的三角形钢架中，$AB=AC$，AD是连接点A与BC中点D的支架. 求证$\triangle ABD\cong\triangle ACD$.

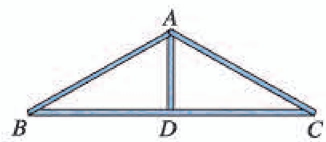


图 18.2-3

分析：要证$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，只需看这两个三角形的三条边是否分别相等.

证明：$\because$ D是BC的中点，

$\therefore$ $BD=CD$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases}AB=AC,\\ BD=CD,\\ AD=AD,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$ (SSS).

AD既是$\triangle ABD$的边又是$\triangle ACD$的边. 我们称它为这两个三角形的公共边.

由三边分别相等判定三角形全等的结论，还可以得到用直尺和圆规作一个角等于已知角的方法.

已知：$\angle AOB$.

求作：$\angle A'O'B'$，使$\angle A'O'B'=\angle AOB$.

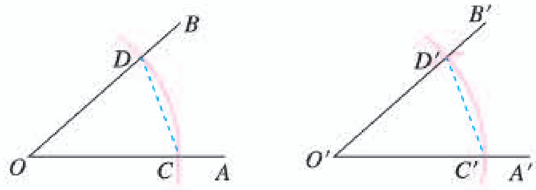


图 18.2-4

作法：（1）如图 18.2-4，以点 O 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 OA，OB 于点 C，D；

（2）画一条射线 $O'A'$，以点 O' 为圆心，OC 长为半径画弧，交 $O'A'$ 于点 C'；

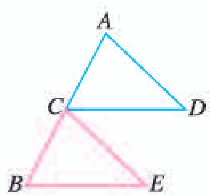
（3）以点 C' 为圆心，CD 长为半径画弧，与第 2 步中所画的弧相交于点 D'；

（4）过点 D' 画射线 $O'B'$，则 $\angle A'O'B'=\angle AOB$.

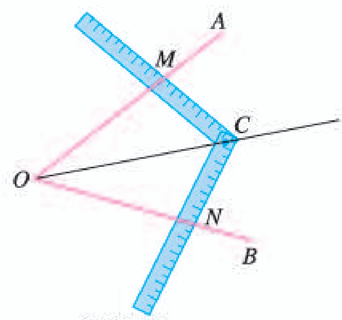
想一想，为什么这样作出的 $\angle A'O'B'$ 和 $\angle AOB$ 是相等的？

练习

1. 如图，C 是 AB 的中点，$AD=CE$，$CD=BE$. 求证 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 工人师傅常用角尺平分一个任意角. 做法如下：如图，$\angle AOB$ 是一个任意角，在边 OA，OB 上分别取 $OM=ON$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与点 M，N 重合. 过角尺顶点 C 的射线 OC 便是 $\angle AOB$ 的平分线. 为什么？

探究3

先任意画出一个 $\triangle ABC$. 再画出一个 $\triangle A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$\angle A'=\angle A$（即两边和它们的夹角分别相等）. 把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下来，放到 $\triangle ABC$ 上，它们全等吗？

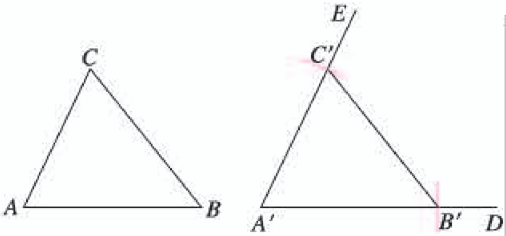


图 18.2-5

画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$\angle A'=\angle A$：

(1) 画$\angle DA'E=\angle A$；

(2) 在射线$A'D$上截取$A'B'=AB$，在射线$A'E$上截取$A'C'=AC$；

(3) 连接$B'C'$.

图 18.2-5 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗？探究 3 的结果反映了什么规律？

由探究 3 可以得到以下基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等(可以简写成“边角边”或“SAS”).

也就是说，三角形的两条边的长度和它们的夹角的大小确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

例 2 如图 18.2-6，有一池塘，要测池塘两端A，B的距离，可先在平地上取一个点C，从点C不经过池塘可以直接到达点A和B. 连接AC并延长到点D，使$CD=CA$. 连接BC并延长到点E，使$CE=CB$. 连接DE，那么量出DE的长就是A，B的距离. 为什么？

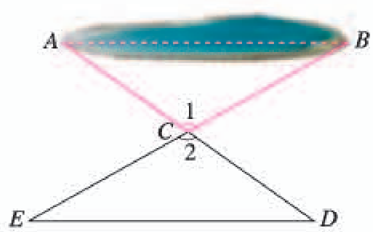


图 18.2-6

分析：如果能证明$\triangle ABC \cong \triangle DEC$，就可以得出$AB=DE$. 由题意可知，$\triangle ABC$和$\triangle DEC$具备“边角边”的条件.

证明：在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中，

$$\begin{cases} CA=CD, \\ \angle 1=\angle 2, \\ CB=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ (SAS).

$\therefore$ $AB=DE$.

想一想，$\angle 1=\angle 2$的根据是什么？$AB=DE$的根据是什么？

从例 2 可以看出：因为全等三角形的对应边相等，对应角相等，所以证明线段相等或者角相等时，常常通过证明它们是全等三角形的对应边或对应角来解决.

思考

如图 18.2-7，把一长一短的两根木棍的一端固定在一起，摆出△ABC. 固定住长木棍，转动短木棍，得到△ABD. 这个实验说明了什么？

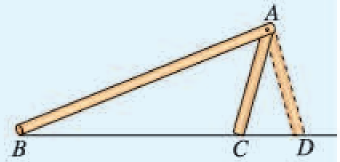
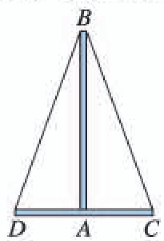


图 18.2-7

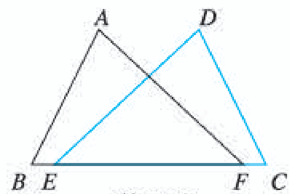
图 18.2-7 中的△ABC 与△ABD 满足两边和其中一边的对角分别相等，即 $AB=AB$，$AC=AD$，$\angle B=\angle B$，但△ABC 与△ABD 不全等. 这说明，有两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形不一定全等.

练习

1. 如图，两车从南北方向的路段 AB 的 A 端出发，分别向东、向西行进相同的距离，到达 C，D 两地. 此时 C，D 到 B 的距离相等吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，点 E，F 在 BC 上，$BE=CF$，$AB=DC$，$\angle B=\angle C$. 求证 $\angle A=\angle D$.

探究4

先任意画出一个△ABC. 再画一个△$A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$（即两角和它们的夹边分别相等）. 把画好的△$A'B'C'$剪下来，放到△ABC 上，它们全等吗？

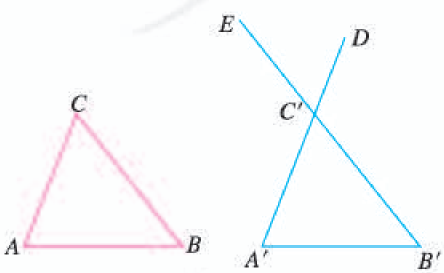


图 18.2-8

画一个△$A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$：

（1）画 $A'B'=AB$；

（2）在 $A'B'$ 的同旁画 $\angle DA'B'=\angle A$，$\angle EB'A'=\angle B$，$A'D$，$B'E$ 相交于点 C'.

图 18.2-8 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗? 探究 4 的结果反映了什么规律?

由探究 4 可以得到以下基本事实，用它可以判定两个三角形全等:

两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）.

也就是说，三角形的两个角的大小和它们的夹边的长度确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

例 3 如图 18.2-9，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$. 求证 $AD=AE$.

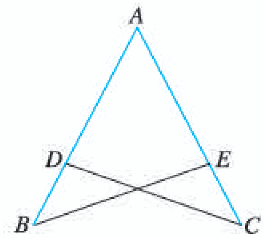


图 18.2-9

分析： 证明$\triangle ACD \cong \triangle ABE$，就可以得出$AD=AE$.

证明： 在$\triangle ACD$ 和$\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases} \angle A=\angle A \text{（公共角）}, \\ AC=AB, \\ \angle C=\angle B, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ACD \cong \triangle ABE$（ASA）.

$\therefore$ $AD=AE$.

例 4 如图 18.2-10，在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$BC=EF$. 求证$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

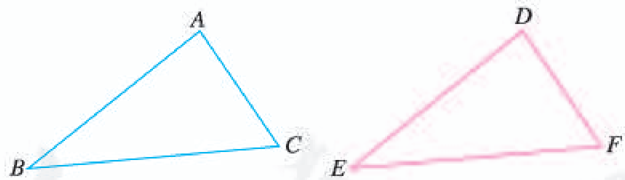


图 18.2-10

分析： 如果能证明$\angle C=\angle F$，就可以利用“角边角”证明$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 全等. 由三角形内角和定理可以证明$\angle C=\angle F$.

证明： 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，

$\therefore$ $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B$.

同理 $\angle F=180^\circ-\angle D-\angle E$.

又 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，

$\therefore$ $\angle C=\angle F$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，

$$\begin{cases} \angle B=\angle E, \\ BC=EF, \\ \angle C=\angle F, \end{cases}$$

$\therefore\quad \triangle ABC \cong \triangle DEF$(ASA).

因此，我们可以得到下面的结论：

两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）.

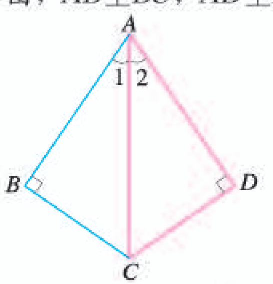
也就是说，三角形的两个角的大小和其中一个角的对边的长度确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

思考

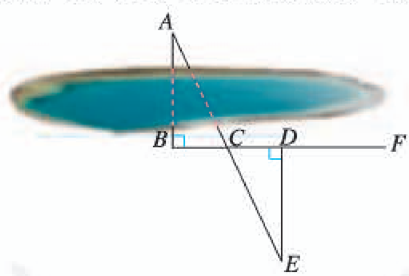
三个角分别相等的两个三角形全等吗？解答上述问题后，把三角形全等的判定方法做一个小结.

练习

1. 如图，$AB\perp BC$，$AD\perp DC$，垂足分别为B，D，$\angle 1=\angle 2$. 求证$AB=AD$.



（第1题）



（第2题）

2. 如图，要测量池塘两岸相对的两点A，B的距离，可以在池塘外取AB的垂线BF上的两点C，D，使$BC=CD$，再画出BF的垂线DE，使E与A，C在一条直线上，这时测得DE的长就是AB的长. 为什么？

思考

对于两个直角三角形，除了直角相等的条件，还要满足几个条件，这两个直角三角形就全等了？

由三角形全等的条件可知，对于两个直角三角形，满足一直角边及其相对（或相邻）的锐角分别相等，或斜边和一锐角分别相等，或两直角边分别相等，这两个直角三角形就全等了. 如果满足斜边和一条直角边分别相等，这两个直角三角形全等吗？

探究5

任意画出一个 Rt△ABC，使∠C=90°. 再画一个 Rt△$A'B'C'$，使∠C'=90°，$B'C'$=BC，$A'B'$=AB. 把画好的 Rt△$A'B'C'$剪下来，放到 Rt△ABC上，它们全等吗？

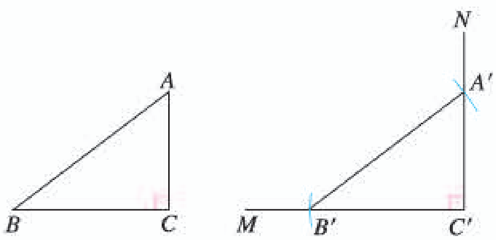


图 18.2-11

画一个 Rt△$A'B'C'$，使∠C'=90°，$B'C'$=BC，$A'B'$=AB：

（1）画∠$MC'N$=90°；

（2）在射线 $C'M$ 上截取 $B'C'$=BC；

（3）以点 B' 为圆心，AB 长为半径画弧，交射线$C'N$于点 A'；

（4）连接 $A'B'$.

图 18.2-11 给出了画 Rt△$A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗？探究 5 的结果反映了什么规律？

由探究 5 可以得到判定两个直角三角形全等的一个方法：

斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）.

例 5 如图 18.2-12，$AC \perp BC$，$BD \perp AD$，垂足分别为 C，D，AC=BD. 求证 BC=AD.

证明：∵ $AC \perp BC$，$BD \perp AD$，

∴ ∠C 与∠D 都是直角.

在 Rt△ABC 和 Rt△BAD 中，

$$\begin{cases} AB=BA, \\ AC=BD, \end{cases}$$

∴ Rt△ABC ≌ Rt△BAD（HL）.

∴ BC=AD.

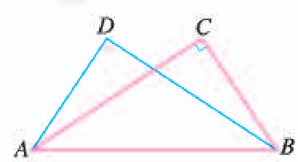
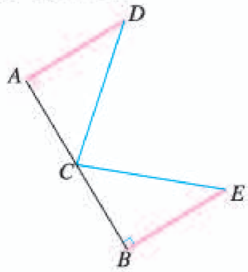


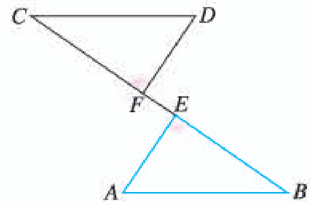
图 18.2-12

练习

1. 如图，C 是路段 AB 的中点，两人从 C 同时出发，以相同的速度分别沿两条直线行走，并同时到达 D，E 两地. $DA \perp AB$，$EB \perp AB$. D，E 到路段 AB 的距离相等吗？为什么？



（第 1 题）



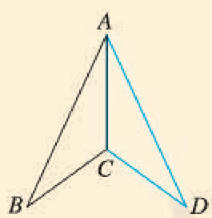
（第 2 题）

2. 如图，$AB=CD$，$AE \perp BC$，$DF \perp BC$，垂足分别为 E，F，$CE=BF$. 求证 $AE=DF$.

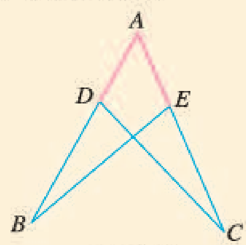
习题 18.2

复习巩固

1. 如图，$AB=AD$，$CB=CD$. $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 全等吗？为什么？

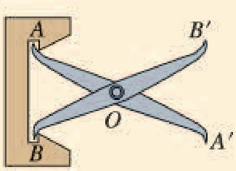


（第 1 题）

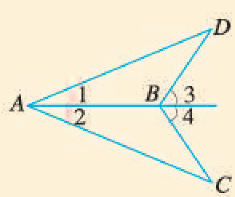


（第 2 题）

2. 如图，$AB=AC$，$AD=AE$. 求证 $\angle B=\angle C$.
3. 如图，把两根钢条的中点连在一起，可以做成一个测量工件内槽宽的工具（卡钳）. 在图中，要测量工件内槽宽 AB，只要测量哪些量？为什么？



（第 3 题）

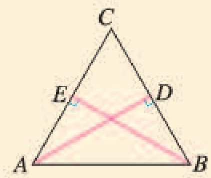


（第 4 题）

4. 如上页图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求证 $AC=AD$.

5. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle B=\angle D$. 求证 $AB=CD$.

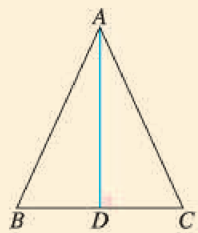
（第 5 题）



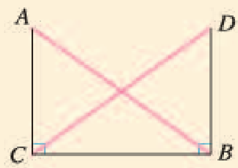
（第 6 题）

6. 如图，从 C 地看 A，B 两地的视角 $\angle C$ 是锐角，从 C 地到 A，B 两地的距离相等. A 地到路段 BC 的距离 AD 与 B 地到路段 AC 的距离 BE 相等吗？为什么？

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是高. 求证：(1) $BD=CD$；(2) $\angle BAD=\angle CAD$.



（第 7 题）

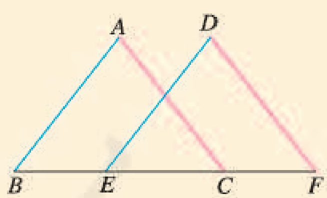


（第 8 题）

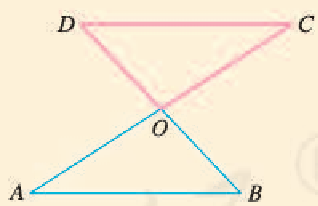
8. 如图，$AC\perp CB$，$DB\perp CB$，垂足分别为 C，B，$AB=DC$. 求证 $\angle ABD=\angle ACD$.

综合运用

9. 如图，点 B，E，C，F 在一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证 $\angle A=\angle D$.



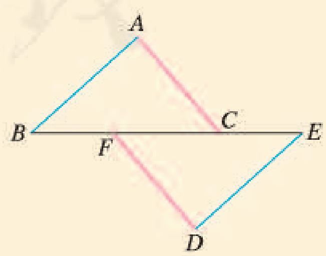
（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，AC 和 BD 相交于点 O，$OA=OC$，$OB=OD$. 求证 $DC/\!/AB$.

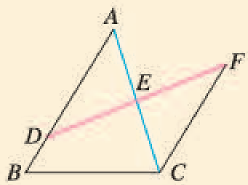
11. 如图，点 B，F，C，E 在一条直线上，$FB=CE$，$AB/\!/ED$，$AC/\!/FD$. 求证：$AB=DE$，$AC=DF$.



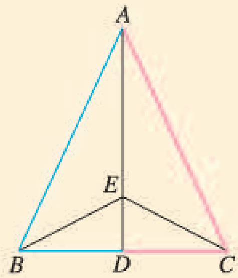
（第 11 题）

拓广探索

12. 如图，D 是 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，$DE=FE$，$FC/\!/AB$. AE 与 CE 有什么关系？证明你的结论.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是 BC 的中点，点 E 在 AD 上. 找出图中的全等三角形，并证明它们全等.

信息技术应用

探究三角形全等的条件

用《几何画板》软件的绘图功能可以方便地根据给定条件画出三角形，还可以测量三角形中边和角的大小，从而帮助我们探究三角形全等的条件.

1. 按照下面的步骤画一个△ABC，使得 $AB=2$ cm，$BC=5$ cm，$AC=6$ cm.

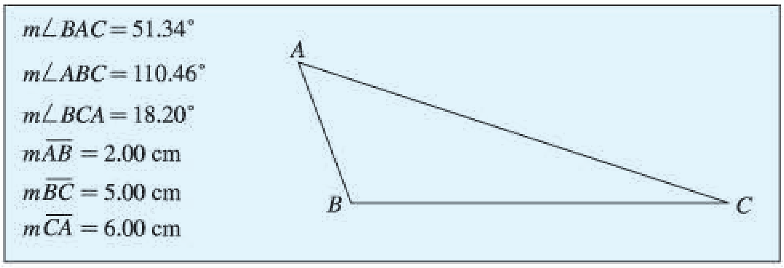


图 1

(1) 任意画一条直线 l，在 l 上取两点 B，C，使 $BC=5$ cm；

(2) 以点 C 为圆心，6 cm 为半径画一个圆；

(3) 以点 B 为圆心，2 cm 为半径画一个圆，与半径为 6 cm 的圆交于两个点，取其中的一个点为 A；

(4) 连接 AB，BC，CA，隐藏所有的圆和直线 l.

测量△ABC 的三条边的长度和三个角的大小. 你画出的三角形及测量结果与图 1 相同吗？由此你能得到什么结论？

2. 按照下面的步骤画一个△ABC，使得 $AB=4$ cm，$BC=5$ cm，$\angle ABC=75^\circ$.

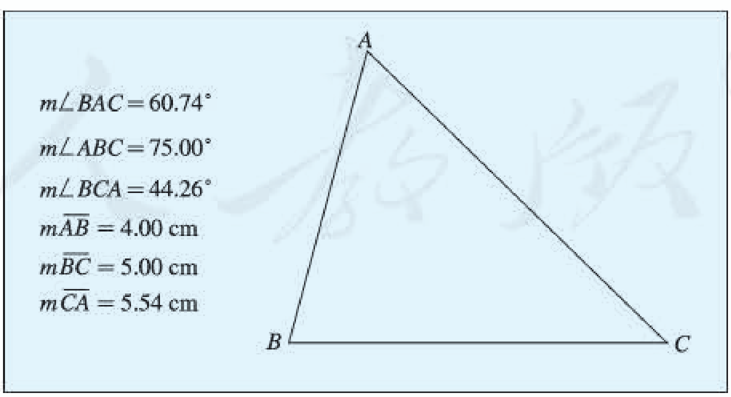


图 2

(1) 任意画一条直线 l，在 l 上取两点 B，C，使 $BC=5$ cm；

(2) 连接 BC，以点 B 为中心，将 BC 逆时针旋转 $75°$，得到 BC'；

(3) 在 BC' 上取点 A，使 $AB=4\ \text{cm}$；

(4) 连接 AB，CA，隐藏直线 l 和 BC'.

测量$\triangle ABC$ 的三条边的长度和三个角的大小. 你画出的三角形及测量结果与图 2 相同吗？由此你能得到什么结论？

3. 按照下面的步骤画一个$\triangle ABC$，使得$\angle A=45°$，$\angle B=75°$，$\angle C=60°$.

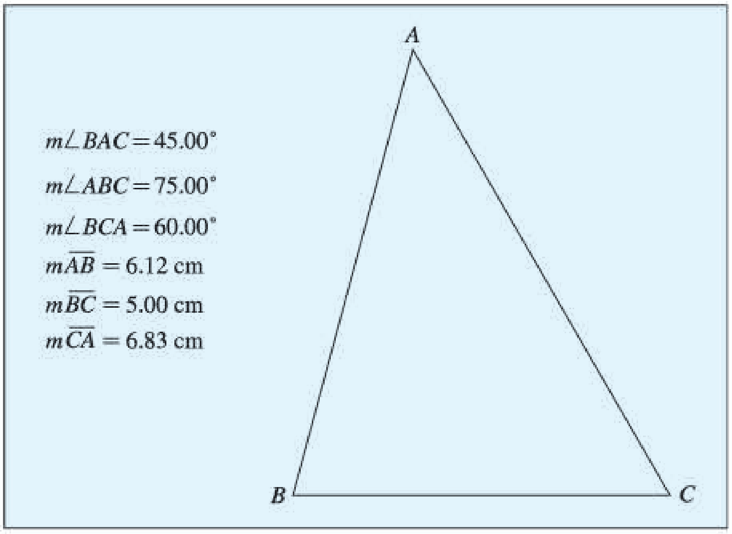


图 3

(1) 任意画一条直线 l，在 l 上任意取两点 B，C，连接 BC；

(2) 以点 B 为中心，将 BC 逆时针旋转 $75°$，得到 BC'；

(3) 以点 C 为中心，将 BC 顺时针旋转 $60°$，得到 CB'；

(4) 记 BC' 与 CB' 的交点为 A，连接 AB，CA，隐藏直线 l 和 BC'，CB'.

测量$\triangle ABC$ 的三条边的长度和三个角的大小. 你画出的三角形及测量结果与图 3 相同吗？由此你能得到什么结论？

4. 分别按“角边角”“角角边”和“边边角”的条件画几个三角形，每组三角形全等吗？请你总结一下判定三角形全等的条件.

18.3 角的平分线的性质

思考

图 18.3-1 是一个平分角的仪器，其中 $AB=AD$，$BC=DC$. 将点 A 放在角的顶点，AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是这个角的平分线. 你能说明它的道理吗？

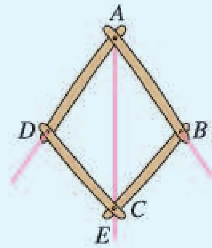


图 18.3-1

这种平分角的方法告诉了我们一种作已知角的平分线的方法.

已知：$\angle AOB$.

求作：$\angle AOB$ 的平分线.

作法：（1）以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 M，交 OB 于点 N.

（2）分别以点 M，N 为圆心，大于$\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在$\angle AOB$ 的内部相交于点 C.

（3）画射线 OC. 射线 OC 即为所求（图 18.3-2).

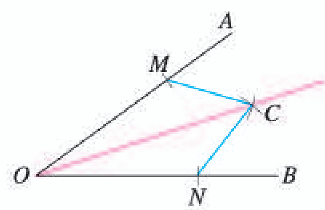


图 18.3-2

思考

如图 18.3-3，任意作一个角 $\angle AOB$，作出 $\angle AOB$ 的平分线 OC. 在 OC 上任取一点 P，过点 P 画出 OA，OB 的垂线，分别记垂足为 D，E，测量 PD，PE 并作比较，你得到什么结论？在 OC 上再取几个点试一试.

通过以上测量，你发现了角的平分线的什么性质？

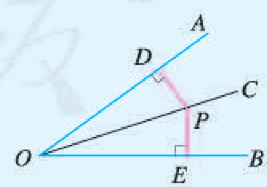


图 18.3-3

我们猜想角的平分线有以下性质：

角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

下面，我们利用三角形全等证明这个性质. 首先，要分清其中的“已知”和“求证”. 显然，已知为“一个点在一个角的平分线上”，要证的结论为“这个点到这个角两边的距离相等”. 为了更直观、清楚地表达题意，我们通常在证明之前画出图形，并用符号表示已知和求证.

如图 18.3-4，$\angle AOC=\angle BOC$，点 P 在 OC 上，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为 D，E. 求证 $PD=PE$.

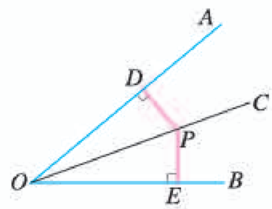


图 18.3-4

证明：$\because$ $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，

$\therefore$ $\angle PDO=\angle PEO=90°$.

在$\triangle PDO$ 和$\triangle PEO$ 中，

$$\begin{cases}\angle PDO=\angle PEO,\\ \angle AOC=\angle BOC,\\ OP=OP,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle PDO\cong\triangle PEO$(AAS).

$\therefore$ $PD=PE$.

一般情况下，我们要证明一个几何命题时，可以按照类似的步骤进行，即

1. 明确命题中的已知和求证；
2. 根据题意，画出图形，并用符号表示已知和求证；
3. 经过分析，找出由已知推出要证的结论的途径，写出证明过程.

思考

如图 18.3-5，要在 S 区建一个集贸市场，使它到公路、铁路的距离相等，并且离公路与铁路的交叉处 500 m. 这个集贸市场应建于何处（在图上标出它的位置，比例尺为1∶20 000)？

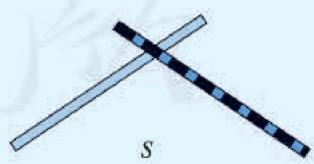


图 18.3-5

我们知道，角的平分线上的点到角的两边的距离相等. 到角的两边的距离相等的点是否在角的平分线上呢？利用三角形全等，可以得到

角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上.

按照上述证明命题的步骤，自己证一证这个结论.

根据上述结论，就知道这个集贸市场应建于何处了.

例 如图 18.3-6，$\triangle ABC$ 的角平分线 BM，CN 相交于点 P. 求证：点 P 到三边 AB，BC，CA 的距离相等.

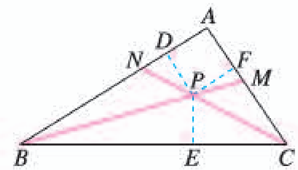


图 18.3-6

证明： 过点 P 作 PD，PE，PF 分别垂直于 AB，BC，CA，垂足分别为 D，E，F.

$\because$ BM 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 P 在 BM 上，

$\therefore$ $PD=PE$.

同理 $PE=PF$.

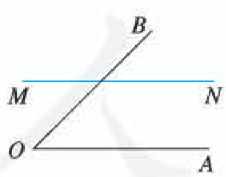
$\therefore$ $PD=PE=PF$.

即点 P 到三边 AB，BC，CA 的距离相等.

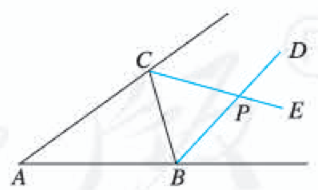
想一想，点 P 在 $\angle A$ 的平分线上吗？这说明三角形的三条角平分线有什么关系？

练习

1. 如图，在直线 MN 上求作一点 P，使点 P 到射线 OA 和 OB 的距离相等.



（第 1 题）



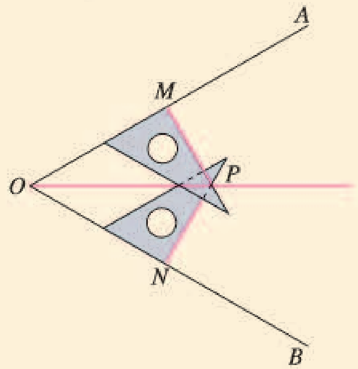
（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ABC$ 的 $\angle ABC$ 的外角的平分线 BD 与 $\angle ACB$ 的外角的平分线 CE 相交于点 P. 求证：点 P 到三边 AB，BC，CA 所在直线的距离相等.

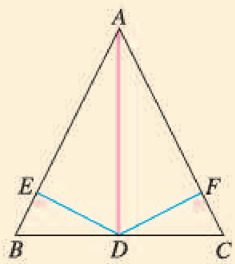
习题 18.3

复习巩固

1. 用三角尺可按下面方法画角平分线：在已知的$\angle AOB$的两边上，分别取$OM=ON$，再分别过点M，N作OA，OB的垂线，交点为P，画射线OP，则OP平分$\angle AOB$. 为什么？

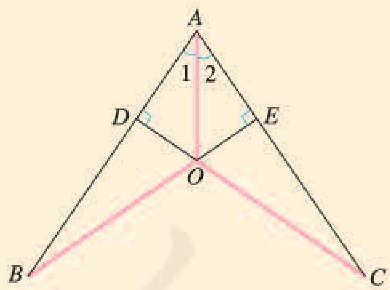


（第 1 题）

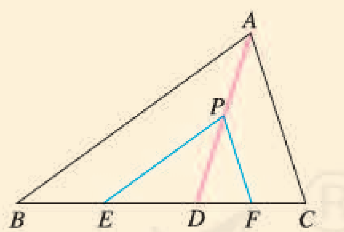


（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是它的角平分线，且$BD=CD$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为E，F. 求证$EB=FC$.
3. 如图，$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足分别为D，E，BE，CD相交于点O，$OB=OC$. 求证$\angle 1=\angle 2$.



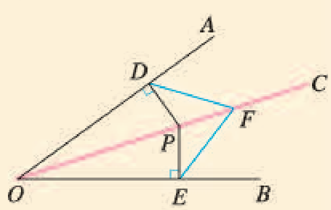
（第 3 题）



（第 4 题）

综合运用

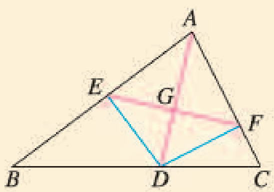
4. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是它的角平分线，P是AD上的一点，$PE\,/\!/\,AB$，交BC于点E，$PF\,/\!/\,AC$，交BC于点F. 求证：点D到PE和PF的距离相等.
5. 如图，OC是$\angle AOB$的平分线，P是OC上的一点，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为D，E. F是OC上的另一点，连接DF，EF. 求证$DF=EF$.



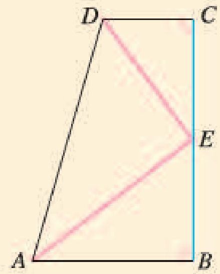
（第 5 题）

拓广探索

6. 如图，AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别是 E，F，连接 EF，EF 与 AD 相交于点G. AD 与 EF 垂直吗？证明你的结论.



（第 6 题）



（第 7 题）

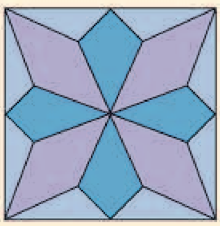
7. 如图，$\angle B=\angle C=90^{\circ}$，$E$ 是 BC 的中点，DE 平分$\angle ADC$. 求证：AE 是$\angle DAB$ 的平分线.（提示：过点 E 作 $EF\perp AD$，垂足为 F.）

数学活动

活动1

图 1 是两个根据全等形设计的图案．仔细观察一下，每个图案中有哪些全等形？有哪些全等三角形？

注意一下你的身边，哪些是全等形？哪些是全等三角形？各找几个例子与同学交流．



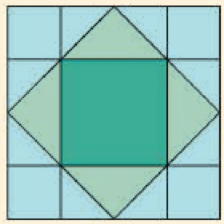


图 1

活动2　用全等三角形研究“筝形”

如图 2，四边形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$AB=CB$．我们把这种两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”．请你自己画一个筝形，用测量、折纸等方法猜想筝形的角、对角线有什么性质，然后用全等三角形的知识证明你的猜想．

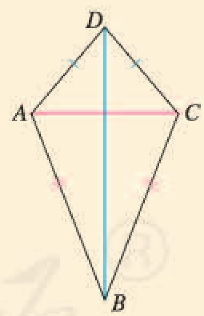


图 2

小　结

一、本章知识结构图

二、回顾与思考

本章我们学习了全等三角形的性质和判定方法．如果两个三角形全等，那么它们的对应元素（对应的边、角等）都相等，这就是全等三角形的性质；判定三角形全等的条件是“边边边”“边角边”“角边角”或“角角边”，而对于直角三角形的全等，还可以用“斜边、直角边”来判定．

用全等三角形的定义判定三角形全等，需要六个条件．通过画图找规律、推理论证等方法，我们减少条件，找到了更简便的判定方法．由此看出，实验操作和推理论证都能帮助我们获得新的结论．

利用全等三角形知识，通过推理论证，我们得到了角的平分线的性质．今后遇到证明线段相等或角相等的问题，可以尝试先判定两个三角形全等，再利用其对应边相等或对应角相等解决问题．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．你能举一些实际生活中全等形的例子吗？

2．全等三角形有什么性质？

3．从三角形的三条边分别相等、三个角分别相等中任选三个作为条件来判定两个三角形是否全等时，哪些是能够判定的？两个直角三角形全等的条件是什么？

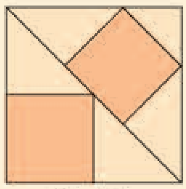
4．学习本章后，你对角的平分线有了哪些新的认识？你能用全等三角形证明角的平分线的性质吗？

5．你能举例说明证明一个几何命题的一般过程吗？

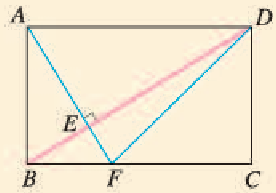
复习题 18

复习巩固

1. 图中有三个正方形，请你指出图中所有的全等三角形.



（第 1 题）



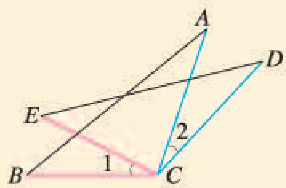
（第 2 题）

2. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AF\perp BD$，垂足为 E，AF 交 BC 于点 F，连接 DF.

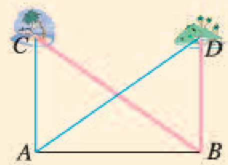
   (1) 图中有全等三角形吗？

   (2) 图中有面积相等但不全等的三角形吗？

3. 如图，$CA=CD$，$\angle 1=\angle 2$，$BC=EC$. 求证 $AB=DE$.



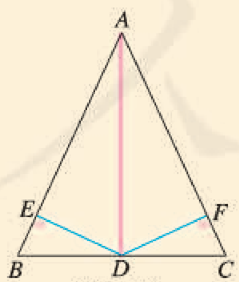
（第 3 题）



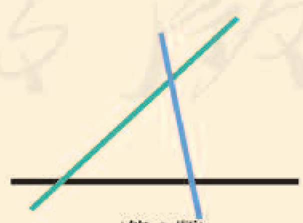
（第 4 题）

4. 如图，海岸上有 A，B 两个观测点，点 B 在点 A 的正东方，海岛 C 在观测点 A 的正北方，海岛 D 在观测点 B 的正北方. 如果从观测点 A 看海岛 C，D 的视角 $\angle CAD$ 与从观测点 B 看海岛 C，D 的视角 $\angle CBD$ 相等，那么海岛 C，D 到观测点 A，B 所在海岸的距离 CA，DB 相等. 请你说明理由.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别是 E，F，$BE=CF$. 求证：AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.



（第 5 题）

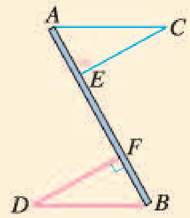


（第 6 题）

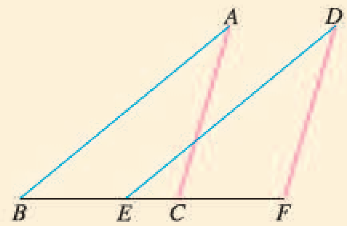
6. 如图，为了促进当地旅游发展，某地要在三条公路围成的一块平地上修建一个度假村. 要使这个度假村到三条公路的距离相等，应在何处修建？

综合运用

7. 如图，两车从路段 AB 的两端同时出发，沿平行路线以相同的速度行驶，相同时间后分别到达 C，D 两地. C，D 两地到路段 AB 的距离相等吗？为什么？

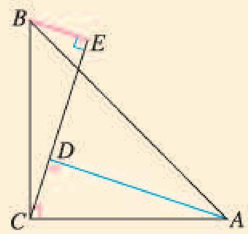


（第 7 题）

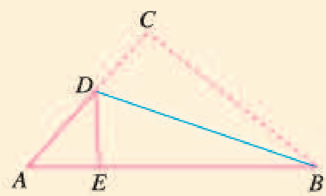


（第 8 题）

8. 如图，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证：$AB\parallel DE$，$AC\parallel DF$.
9. 如图，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，$AD\perp CE$，$BE\perp CE$，垂足分别为 D，E，$AD=2.5$ cm，$DE=1.7$ cm. 求 BE 的长.

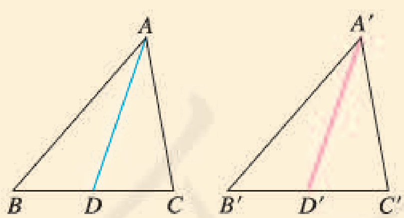


（第 9 题）

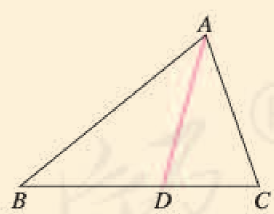


（第 10 题）

10. 如图的三角形纸片中，$AB=8$ cm，$BC=6$ cm，$AC=5$ cm. 沿过点 B 的直线折叠这个三角形，使点 C 落在 AB 边上的点 E 处，折痕为 BD. 求$\triangle AED$ 的周长.
11. 如图，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，$AD$，$A'D'$分别是$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$的对应边上的中线. AD 与 $A'D'$有什么关系？证明你的结论.



（第 11 题）



（第 12 题）

拓广探索

12. 如图，在$\triangle ABC$ 中，AD 是它的角平分线. 求证：$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=AB:AC$.
13. 证明：如果两个三角形有两条边和其中一边上的中线分别相等，那么这两个三角形全等.

第十九章　数据的分析

用样本估计总体是统计的基本思想. 当所要考察的总体中个体很多或者对考察对象带有破坏性时，我们常常通过用样本估计总体的方法来了解总体. 看下面的问题：

农科院为了选出适合某地种植的甜玉米种子，对甲、乙两个品种各用 10 块自然条件相同的试验田进行试验，得到各试验田每公顷的产量（见下表）. 根据这些数据，应为农科院选择甜玉米种子提出怎样的建议呢？

甜玉米的产量和产量的稳定性是农科院选择种子时所关心的问题. 如何考察一种甜玉米的产量和产量的稳定性呢？这要用到本章将要学习的如何用样本的平均数和方差估计总体的平均数和方差等知识.

通过本章的学习，你将对数据的作用有更多的认识，对用样本估计总体的思想有更深的体会.

品种	各试验田每公顷产量/t				
甲	7.65	7.50	7.62	7.59	7.65
	7.64	7.50	7.40	7.41	7.41
乙	7.55	7.56	7.53	7.44	7.49
	7.52	7.58	7.46	7.53	7.49

$\bar{x}_{\text{甲}}=7.537$　$\bar{x}_{\text{乙}}=7.515$

$s^2_{\text{甲}}\approx0.010$　$s^2_{\text{乙}}\approx0.002$

19.1 数据的集中趋势

当我们收集到数据后，通常是用统计图表整理和描述数据. 为了进一步获取信息，还需要对数据进行分析. 以前通过数据计算，我们学习了平均数，知道它可以反映一组数据的平均水平. 本节我们将在实际问题情境中，进一步探讨平均数的统计意义，并学习中位数、众数和方差等另外几个统计中常用来刻画数据特征的量，了解它们在数据分析中的重要作用.

19.1.1 平均数

问题 1 一家公司打算招聘一名英文翻译. 对甲、乙两名应试者进行了听、说、读、写的英语水平测试，他们的各项成绩（百分制）如表 19-1 所示.

表 19-1

应试者	听	说	读	写
甲	85	78	85	73
乙	73	80	82	83

（1）如果这家公司想招一名综合能力较强的翻译，计算两名应试者的平均成绩（百分制）. 从他们的成绩看，应该录取谁？

（2）如果这家公司想招一名笔译能力较强的翻译，听、说、读、写成绩按照 2∶1∶3∶4 的比确定，计算两名应试者的平均成绩（百分制）. 从他们的成绩看，应该录取谁？

对于问题（1），根据平均数公式，甲的平均成绩为

$$\frac{85+78+85+73}{4}=80.25,$$

乙的平均成绩为

$$\frac{73+80+82+83}{4}=79.5.$$

因为甲的平均成绩比乙高，所以应该录取甲.

对于问题（2），听、说、读、写成绩按照 2∶1∶3∶4 的比确定，这说明各项成绩的“重要程度”有所不同，读、写的成绩比听、说的成绩更加“重要”. 因此，甲的平均成绩为

$$\frac{85\times2+78\times1+85\times3+73\times4}{2+1+3+4}=79.5,$$

乙的平均成绩为

$$\frac{73\times2+80\times1+82\times3+83\times4}{2+1+3+4}=80.4.$$

因为乙的平均成绩比甲高，所以应该录取乙.

上述问题（1）是利用平均数的公式计算平均成绩，其中的每个数据被认为同等重要. 而问题（2）是根据实际需要对不同类型的数据赋予与其重要程度相应的比重，其中的 2，1，3，4 分别称为听、说、读、写四项成绩的**权**（weight），相应的平均数 79.5，80.4 分别称为甲和乙的听、说、读、写四项成绩的**加权平均数**（weighted average）.

一般地，若 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的权分别是 w_1，w_2，…，w_n，则

$$\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

叫做这 n 个数的加权平均数.

权的英文是 weight，有表示数据重要程度的意思.

思考

如果这家公司想招一名口语能力较强的翻译，听、说、读、写成绩按照 3∶3∶2∶2 的比确定，那么甲、乙两人谁将被录取？与上述问题中的（1）（2）相比较，你能体会到权的作用吗？

例 1 一次演讲比赛中，评委将从演讲内容、演讲能力、演讲效果三个方面为选手打分. 各项成绩均按百分制计，然后再按演讲内容占 50%、演讲能力占 40%、演讲效果占 10%，计算选手的综合成绩（百分制）. 进入决赛的前两名选手的单项成绩如表 19-2 所示，请确定两人的名次.

表 19-2

选手	演讲内容	演讲能力	演讲效果
A	85	95	95
B	95	85	95

分析： 这个问题可以看成是求两名选手三项成绩的加权平均数，50%，40%，10%说明演讲内容、演讲能力、演讲效果三项成绩在总成绩中的重要程度，是三项成绩的权.

解： 选手 A 的最后得分是

$$\frac{85\times50\%+95\times40\%+95\times10\%}{50\%+40\%+10\%}=90,$$

选手 B 的最后得分是

$$\frac{95\times50\%+85\times40\%+95\times10\%}{50\%+40\%+10\%}=91.$$

由上可知选手 B 获得第一名，选手 A 获得第二名.

例 1 中两名选手的单项成绩都是两个 95 分与一个 85 分，为什么他们的最后得分不同呢？从中你能体会到权的作用吗？

练习

1. 某公司欲招聘一名公关人员. 对甲、乙两位应试者进行了面试和笔试，他们的成绩（百分制）如下表所示.

应试者	面试	笔试
甲	86	90
乙	92	83

(1) 如果公司认为面试和笔试成绩同等重要，从他们的成绩看，谁将被录取？

(2) 如果公司认为，作为公关人员面试成绩应该比笔试成绩更重要，并分别赋予它们 6 和 4 的权，计算甲、乙两人各自的平均成绩，谁将被录取？

2. 晨光中学规定学生的学期体育成绩满分为 100，其中早锻炼及体育课外活动占 20%，期中考试成绩占 30%，期末考试成绩占 50%. 小桐的三项成绩（百分制）依次是 95，90，85. 小桐这学期的体育成绩是多少？

在求 n 个数的平均数时，如果 x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次……x_k 出现 f_k 次（这里 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$），那么这 n 个数的平均数

$$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$$

也叫做 x_1，x_2，…，x_k 这 k 个数的加权平均数，其中 f_1，f_2，…，f_k 分别叫做 x_1，x_2，…，x_k 的权.

例 2 某跳水队为了解运动员的年龄情况，作了一次年龄调查，结果如下：13 岁 8 人，14 岁 16 人，15 岁 24 人，16 岁 2 人. 求这个跳水队运动员的平均年龄（结果取整数）.

解： 这个跳水队运动员的平均年龄为

$$\bar{x}=\frac{13\times8+14\times16+15\times24+16\times2}{8+16+24+2}\approx14(岁).$$

探究

为了解 5 路公共汽车的运营情况，公交部门统计了某天 5 路公共汽车每个运行班次的载客量，得到表 19-3. 这天 5 路公共汽车平均每班的载客量是多少（结果取整数）？

表 19-3

载客量/人	组中值	频数（班次）
$1\leqslant x<21$	11	3
$21\leqslant x<41$	31	5
$41\leqslant x<61$	51	20
$61\leqslant x<81$	71	22
$81\leqslant x<101$	91	18
$101\leqslant x<121$	111	15

数据分组后，一个小组的组中值是指这个小组的两个端点的数的平均数. 例如，小组 $1\leqslant x<21$ 的组中值为 $\frac{1+21}{2}=11$.

根据上面的频数分布表求加权平均数时，统计中常用各组的组中值代表各组的实际数据，把各组的频数看作相应组中值的权. 例如在 $1\leqslant x<21$ 之间的载客量近似地看作组中值 11，组中值 11 的权是它的频数 3. 因此这天 5 路公共汽车平均每班的载客量是

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{11\times3+31\times5+51\times20+71\times22+91\times18+111\times15}{3+5+20+22+18+15}\\&\approx73(人).\end{aligned}$$

一般的计算器都有统计功能，利用统计功能可以求平均数. 使用计算器的统计功能求平均数时，不同品牌的计算器的操作步骤有所不同，操作时需要参阅计算器的使用说明书. 通常需要先按动有关键，使计算器进入统计状态；然后依次输入数据 x_1，x_2，…，x_k 以及它们的权 f_1，f_2，…，f_k；最后按动求平均数的功能键（例如 $\boxed{\bar{x}}$ 键），计算器便会求出平均数 $\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$ 的值.

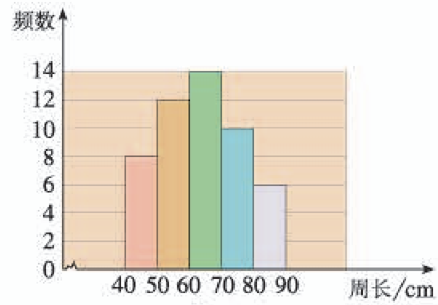
练习

1. 下表是校女子排球队队员的年龄分布：

年龄/岁	13	14	15	16
频数	1	4	5	2

求校女子排球队队员的平均年龄（可以使用计算器）.

2. 为了绿化环境，柳荫街引进一批法国梧桐. 三年后这些树的树干的周长情况如右图所示. 计算这批法国梧桐树树干的平均周长（结果取整数，可以使用计算器）.



（第 2 题）

我们知道，当所要考察的对象很多，或者对考察对象带有破坏性时，统计中常常通过用样本估计总体的方法来获得对总体的认识. 例如，实际生活中经常用样本的平均数来估计总体的平均数.

例 3 某灯泡厂为测量一批灯泡的使用寿命，从中随机抽查了 50 只灯泡. 它们的使用寿命如表 19-4 所示. 这批灯泡的平均使用寿命是多少？

表 19-4

使用寿命 x/h	$600\leqslant x<1\ 000$	$1\ 000\leqslant x<1\ 400$	$1\ 400\leqslant x<1\ 800$	$1\ 800\leqslant x<2\ 200$	$2\ 200\leqslant x<2\ 600$
灯泡只数	5	10	12	17	6

分析： 抽出的 50 只灯泡的使用寿命组成一个样本. 可以利用样本的平均使用寿命来估计这批灯泡的平均使用寿命.

解： 根据表 19-4，可以得出各小组的组中值，于是

$$\bar{x}=\frac{800\times5+1\ 200\times10+1\ 600\times12+2\ 000\times17+2\ 400\times6}{50}$$

$$=1\ 672,$$

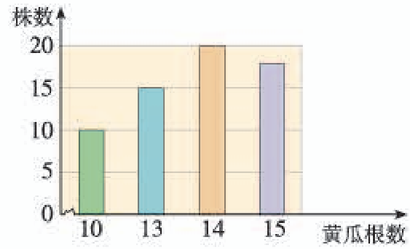
即样本平均数为 1 672.

因此，可以估计这批灯泡的平均使用寿命大约是 1 672 h.

用全面调查的方法考察这批灯泡的平均使用寿命合适吗？

练习

种菜能手李大叔种植了一批新品种黄瓜. 为了考察这种黄瓜的生长情况, 他随机抽查了部分黄瓜藤上长出的黄瓜根数, 得到右面的条形图. 请估计这个新品种黄瓜平均每株结多少根黄瓜 (结果取整数).



19.1.2　中位数和众数

问题 2　表 19-5 是某公司员工月收入的资料.

表 19-5

月收入/元	45 000	18 000	10 000	5 500	5 000	3 400	3 000	1 000
人数	1	1	1	3	6	1	11	1

(1) 计算这个公司员工月收入的平均数;

(2) 若用 (1) 算得的平均数反映公司全体员工月收入水平, 你认为合适吗?

这个公司员工月收入的平均数为 6 276. 但在 25 名员工中, 仅有 3 名员工的收入在 6 276 元以上, 而另外 22 名员工的收入都在 6 276 元以下. 因此, 用月收入的平均数反映所有员工的月收入水平, 不太合适. 利用中位数可以更好地反映这组数据的集中趋势.

将一组数据按照由小到大 (或由大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则称处于中间位置的数为这组数据的**中位数** (median); 如果数据的个数是偶数, 则称中间两个数据的平均数为这组数据的中位数.

利用中位数分析数据可以获得一些信息. 例如, 上述问题中将公司 25 名员工月收入数据由小到大排列, 得到的中位数为 3 400, 这说明除去月收入为 3 400 元的员工, 一半员工收入高于 3 400 元, 另一半员工收入低于 3 400 元.

思考

上述问题中公司员工月收入的平均数为什么会比中位数高得多呢?

例 4 在一次男子马拉松长跑比赛中，抽得 12 名选手所用的时间（单位：min）如下：

136	140	129	180	124	154
146	145	158	175	165	148

（1）样本数据（12 名选手的成绩）的中位数是多少？

（2）一名选手的成绩是 142 min，他的成绩如何？

解：（1）先将样本数据按照由小到大的顺序排列：

124	129	136	140	145	146
148	154	158	165	175	180

这组数据的中位数为处于中间的两个数 146，148 的平均数，即

$$\frac{146+148}{2}=147.$$

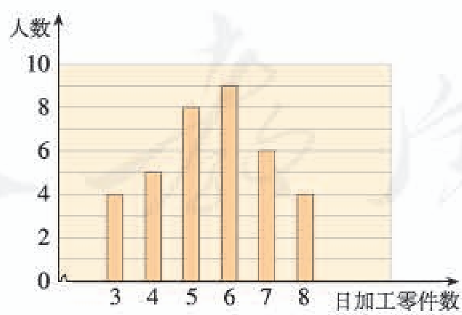
因此样本数据的中位数是 147.

（2）根据（1）中得到的样本数据的中位数，可以估计，在这次马拉松比赛中，大约有一半选手的成绩快于147 min，有一半选手的成绩慢于147 min. 这名选手的成绩是 142 min，快于中位数 147 min，可以推测他的成绩比一半以上选手的成绩好.

根据例 4 中的样本数据，你还有其他方法评价（2）中这名选手在这次比赛中的表现吗？

练习

下面的条形图描述了某车间工人日加工零件数的情况：



请找出这些工人日加工零件数的中位数，并说明这个中位数的意义.

一组数据中出现次数最多的数据称为这组数据的**众数**（mode）.

当一组数据有较多的重复数据时，众数往往能更好地反映其集中趋势. 例如，问题 2 中公司员工月收入的众数为 3 000，这说明公司中月收入 3 000 元的员工人数最多. 如果应聘公司的普通员工一职，这个众数能提供更为有用的信息.

例 5 一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋30 双，各种尺码鞋的销售量如表 19-6 所示. 你能根据表中的数据为这家鞋店提供进货建议吗？

表 19-6

尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	1	2	5	11	7	3	1

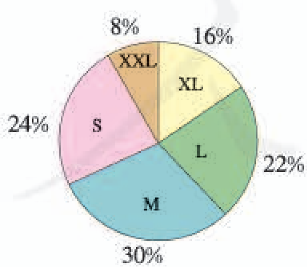
分析：一般来讲，鞋店比较关心哪种尺码的鞋销售量最大，也就是关心卖出的鞋的尺码组成的一组数据的众数. 一段时间内卖出的 30 双女鞋的尺码组成一个样本数据，通过分析样本数据可以找出样本数据的众数. 进而可以估计这家鞋店销售哪种尺码的鞋最多.

解：由表 19-6 可以看出，在鞋的尺码组成的数据中，23.5 是这组数据的众数，即 23.5 cm 的鞋销售量最大. 因此可以建议鞋店多进 23.5 cm 的鞋.

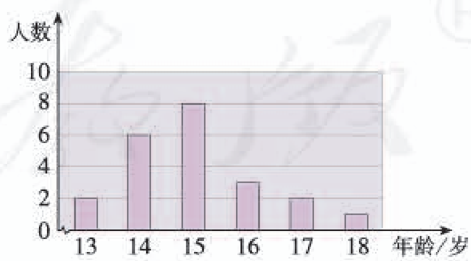
分析表中的数据，你还能为鞋店进货提出哪些建议？

练习

1. 下面的扇形图描述了某种运动服的 S 号，M 号，L 号，XL 号，XXL 号在一家商场的销售情况. 请你为这家商场提出进货建议.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 某校男子足球队的年龄分布如上面的条形图所示. 请找出这些队员年龄的平均数、众数、中位数，并解释它们的意义.

平均数、中位数和众数都可以反映一组数据的集中趋势，它们各有自己的特点，能够从不同的角度提供信息. 在实际应用中，需要分析具体问题的情况，选择适当的量反映数据的集中趋势.

例 6 某商场服装部为了调动营业员的积极性，决定实行目标管理，根据目标完成的情况对营业员进行适当的奖励. 为了确定一个适当的月销售目标，商场服装部统计了每位营业员在某月的销售额（单位：万元），数据如下：

17	18	16	13	24	15	28	26	18	19
22	17	16	19	32	30	16	14	15	26
15	32	23	17	15	15	28	28	16	19

（1）月销售额在哪个值的人数最多？中间的月销售额是多少？平均月销售额是多少？

（2）如果想确定一个较高的销售目标，你认为月销售额定为多少合适？说明理由.

（3）如果想让一半左右的营业员都能达到销售目标，你认为月销售额定为多少合适？说明理由.

> 确定一个适当的月销售目标是一个关键问题. 如果目标定得太高，多数营业员完不成任务，会使营业员失去信心；如果目标定得太低，不能发挥营业员的潜力.

分析： 商场服装部统计的每位营业员在某月的销售额组成一个样本，通过分析样本数据的平均数、中位数、众数来估计总体的情况，从而解决问题.

解： 整理上面的数据得到表 19-7 和图 19.1-1.

表 19-7

销售额/万元	13	14	15	16	17	18	19	22	23	24	26	28	30	32
人数	1	1	5	4	3	2	3	1	1	1	2	3	1	2

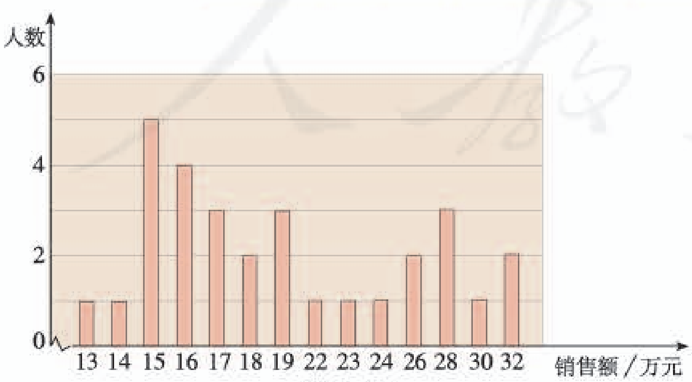


图 19.1-1

> 用图表整理和描述样本数据，有助于我们分析数据解决问题.

（1）从表 19-7 或图 19.1-1 可以看出，样本数据的众数是 15，中位数是 18，利用计算器求得这组数据的平均数约是 20. 可以推测，这个服装部营业员的月销售额为 15 万元的人数最多，中间的月销售额是 18 万元，平均月销售额大约是 20 万元.

（2）如果想确定一个较高的销售目标，这个目标可以定为每月 20 万元（平均数）. 因为从样本数据看，在平均数、中位数和众数中，平均数最大. 可以估计，月销售额定为每月 20 万元是一个较高目标，大约会有 $\frac{1}{3}$ 的营业员获得奖励.

（3）如果想让一半左右的营业员能够达到销售目标，月销售额可以定为每月 18 万元（中位数）. 因为从样本情况看，月销售额在 18 万元以上（含 18 万元）的有 16 人，占总人数的一半左右. 可以估计，如果月销售额定为 18 万元，将有一半左右的营业员获得奖励.

归纳

平均数、中位数、众数都刻画了数据的集中趋势，但它们各有特点.

平均数的计算要用到所有的数据，它能够充分利用数据提供的信息，因此在现实生活中较为常用. 但它受极端值（一组数据中与其余数据差异很大的数据）的影响较大.

当一组数据中某些数据多次重复出现时，众数往往是人们关心的一个量，众数不易受极端值的影响.

中位数只需要很少的计算，它也不易受极端值的影响.

你知道在体操比赛评分时，为什么要去掉一个最高分和一个最低分吗？

练习

下面是某校八年级（2）班两组女生的体重（单位：kg）：

第 1 组	35	36	38	40	42	42	75
第 2 组	35	36	38	40	42	42	45

（1）分别求这两组数据的平均数、众数、中位数，并解释它们的实际意义（结果取整数）；

（2）比较这两组数据的平均数、众数、中位数，谈谈你对它们的认识.

习题 19.1

复习巩固

1. 某公司有 15 名员工，他们所在部门及相应每人所创年利润如下表所示：

部门	人数	每人所创年利润/万元
A	1	10
B	3	8
C	7	5
D	4	3

这个公司平均每人所创年利润是多少？

2. 在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的 15 名运动员的成绩如下表所示：

成绩/m	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80
人数	2	3	2	3	4	1

分别计算这些运动员成绩的平均数、中位数、众数（结果保留小数点后两位）.

3. 为了检查一批零件的质量，从中随机抽取 10 件，测得它们的长度（单位：mm）如下：

22.36	22.35	22.33	22.35	22.37
22.34	22.38	22.36	22.32	22.35

根据以上数据，估计这批零件的平均长度（结果保留小数点后两位）.

4. 在一次青年歌手演唱比赛中，评分办法采用10位评委现场打分，每位选手的最后得分为去掉最低分、最高分后的平均数. 已知10位评委给某位歌手的打分是：

9.5　9.5　9.3　9.8　9.4　8.8　9.6　9.5　9.2　9.6

求这位歌手的最后得分.

综合运用

5. 某商场招聘员工一名，现有甲、乙、丙三人竞聘. 通过计算机、语言和商品知识三项测试，他们各自成绩（百分制）如下表所示：

应试者	计算机	语言	商品知识
甲	70	50	80
乙	90	75	45
丙	50	60	85

(1) 若商场需要招聘负责将商品拆装上架的人员，对计算机、语言和商品知识分别赋权2，3，5，计算三名应试者的平均成绩. 从成绩看，应该录取谁？

(2) 若商场需要招聘电脑收银员，计算机、语言、商品知识成绩分别占50%，30%，20%，计算三名应试者的平均成绩. 从成绩看，应该录取谁？

6. 某地某个月中午12时的气温（单位:℃）如下：

22　31　25　13　18　23　13　28　30　22
20　20　27　17　28　21　14　14　22　12
18　21　29　15　16　14　31　24　26　29

(1) 求这个月中午12时的平均气温；

(2) 请以4为组距对数据分组，作出频数分布表，根据频数分布表计算这个月中午12时的平均气温，与（1）中的结果比较，你有什么发现，谈谈你的看法.

7. 为了提高农民收入，村干部带领村民自愿投资办起了一个养鸡场. 办场时买来的1 000只小鸡，经过一段时间精心饲养，可以出售了. 下表是这些鸡出售时质量的统计数据：

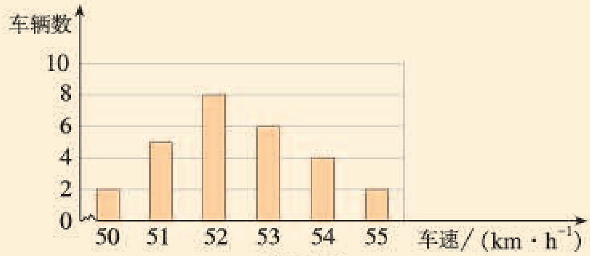
质量/kg	1.0	1.2	1.5	1.8	2
频数	112	226	323	241	98

(1) 出售时这些鸡的平均质量是多少（结果保留小数点后一位）？

(2) 质量在哪个值的鸡最多？

(3) 中间的质量是多少？

8. 下图是交警在一个路口统计的某个时段来往车辆的车速情况.



（第 8 题）

应用你所学的统计知识，写一份简短的报告让交警知道这个时段路口来往车辆的车速情况.

拓广探索

9. 下表是某班学生右眼视力的检查结果：

视力	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
人数	1	2	5	4	3	5	1	1	5	9	6

分析上表中的数据，你能得出哪些结论？

10. 查找资料，了解地球年平均气温的计算方法. 收集近些年的年平均气温，用适当的图表整理、描述这些数据，看看你能得到哪些信息.

19.2 数据的波动程度

在统计学中，除了平均数、中位数、众数这类刻画数据集中趋势的量以外，还有一类刻画数据波动（离散）程度的量，其中最重要的就是方差. 本节我们将在实际问题情境中，了解方差的统计意义并运用方差解决问题.

我们来看引言中的问题.

问题 农科院计划为某地选择合适的甜玉米种子. 选择种子时，甜玉米的产量和产量的稳定性是农科院所关心的问题. 为了解甲、乙两种甜玉米种子的相关情况，农科院各用 10 块自然条件相同的试验田进行试验，得到各试验田每公顷的产量（单位：t）如表 19-8 所示.

表 19-8

甲	7.65	7.50	7.62	7.59	7.65	7.64	7.50	7.40	7.41	7.41
乙	7.55	7.56	7.53	7.44	7.49	7.52	7.58	7.46	7.53	7.49

根据这些数据估计，农科院应该选择哪种甜玉米种子呢?

上面两组数据的平均数分别是

$$\bar{x}_{甲}=7.537，\bar{x}_{乙}=7.515，$$

说明在试验田中，甲、乙两种甜玉米的平均产量相差不大. 由此可以估计出这个地区种植这两种甜玉米，它们的平均产量相差不大.

由样本平均数估计总体平均数.

为了直观地看出甲、乙两种甜玉米产量的分布情况，我们把这两组数据画成下面的图 19.2-1 和图 19.2-2.

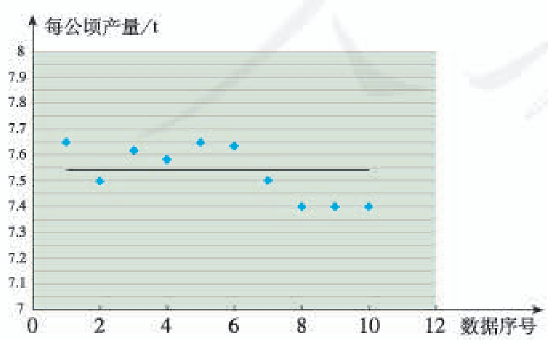


图 19.2-1 甲种甜玉米的产量分布

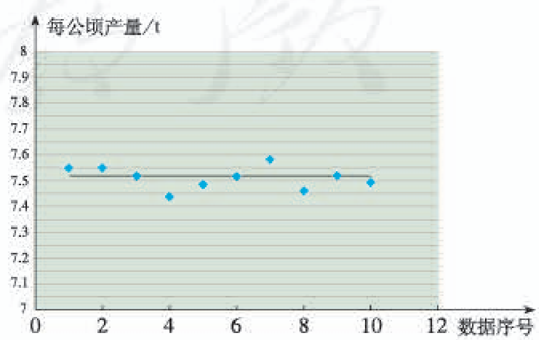


图 19.2-2 乙种甜玉米的产量分布

比较上面的两幅图可以看出，甲种甜玉米在各试验田的产量波动较大，乙种甜玉米在各试验田的产量较集中地分布在平均产量附近. 从图中看出的结果能否用一个量来刻画呢?

为了刻画一组数据波动的大小，可以采用很多方法. 统计中常采用下面的做法：设有 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，各数据与它们的平均数 $\bar{x}$ 的差的平方分别是 $(x_1-\bar{x})^2$，$(x_2-\bar{x})^2$，…，$(x_n-\bar{x})^2$，我们用这些值的平均数，即用

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$$

来衡量这组数据波动的大小，并把它叫做这组数据的**方差**（variance），记作 s^2.

从上面计算方差的式子可以看出：当数据分布比较分散（即数据在平均数附近波动较大）时，各个数据与平均数的差的平方和较大，方差就较大；当数据分布比较集中时，各个数据与平均数的差的平方和较小，方差就较小. 反过来也成立，这样就可以用方差刻画数据的波动程度，即：**方差越大，数据的波动越大；方差越小，数据的波动越小.**

下面我们利用方差来分析甲、乙两种甜玉米产量的波动程度.

两组数据的方差分别是

$$s_{甲}^2=\frac{(7.65-7.537)^2+(7.50-7.537)^2+\cdots+(7.41-7.537)^2}{10}\approx 0.010,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(7.55-7.515)^2+(7.56-7.515)^2+\cdots+(7.49-7.515)^2}{10}\approx 0.002.$$

显然 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$，即甲种甜玉米产量的波动较大，这与我们从图 19.2-1 和图 19.2-2 看到的结果一致.

由此可知，在试验田中，乙种甜玉米的产量比较稳定. 正如用样本的平均数估计总体的平均数一样，也可以用样本的方差来估计总体的方差. 因此可以推测，在这个地区种植乙种甜玉米的产量比甲种的稳定. 综合考虑甲、乙两个品种的平均产量和产量的稳定性，可以推测这个地区比较适合种植乙种甜玉米.

例 1 在一次芭蕾舞比赛中，甲、乙两个芭蕾舞团都表演了舞剧《天鹅湖》，参加表演的女演员的身高（单位：cm）如表 19-9 所示.

表 19-9

甲	163	164	164	165	165	166	166	167
乙	163	165	165	166	166	167	168	168

哪个芭蕾舞团女演员的身高更整齐?

解: 甲、乙两团演员的身高平均数分别是

$$\overline{x}_{甲}=\frac{163+164\times2+165\times2+166\times2+167}{8}=165,$$

$$\overline{x}_{乙}=\frac{163+165\times2+166\times2+167+168\times2}{8}=166.$$

方差分别是

$$s_{甲}^2=\frac{(163-165)^2+(164-165)^2+\cdots+(167-165)^2}{8}=1.5,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(163-166)^2+(165-166)^2+\cdots+(168-166)^2}{8}=2.5.$$

由 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$ 可知,甲芭蕾舞团女演员的身高更整齐.

使用计算器的统计功能可以求方差. 使用计算器的统计功能求方差时,不同品牌的计算器的操作步骤有所不同,操作时需要参阅计算器的使用说明书. 通常需要先按动有关键,使计算器进入统计状态;然后依次输入数据 x_1,x_2,…,x_n;最后按动求方差的功能键(例如 $\boxed{\sigma x^2}$ 键),计算器便会求出方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$的值.

练习

1. 用条形图表示下列各组数据,计算并比较它们的平均数和方差,体会方差是怎样刻画数据的波动程度的.

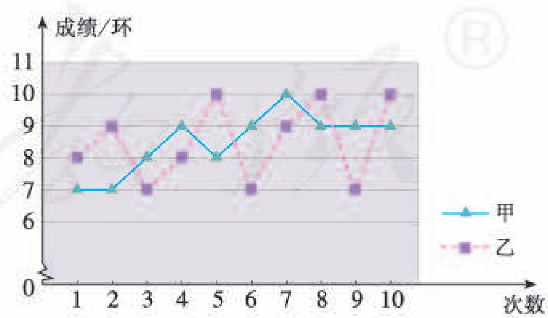
(1) 6 6 6 6 6 6 6

(2) 5 5 6 6 6 7 7

(3) 3 3 4 6 8 9 9

(4) 3 3 3 6 9 9 9

2. 如图是甲、乙两射击运动员的 10 次射击训练成绩的折线统计图. 观察图形,甲、乙这 10 次射击成绩的方差 $s_{甲}^2$,$s_{乙}^2$ 哪个大?



(第 2 题)

例 2 某快餐公司的香辣鸡腿很受消费者欢迎. 现有甲、乙两家农副产品加工厂到快餐公司推销鸡腿，两家鸡腿的价格相同，品质相近. 快餐公司决定通过检查鸡腿的质量来确定选购哪家的鸡腿. 检查人员从两家的鸡腿中各随机抽取 15 个，记录它们的质量（单位：g）如表 19-10 所示. 根据表中数据，你认为快餐公司应该选购哪家加工厂的鸡腿?

表 19-10

甲	74	74	75	74	76	73	76	73	76	75	78	77	74	72	73
乙	75	73	79	72	76	71	73	72	78	74	77	78	80	71	75

解： 检查人员从甲、乙两家农副产品加工厂各随机抽取的 15 个鸡腿分别组成一个样本，样本数据的平均数分别是

$$\bar{x}_{甲}=\frac{74+74+\cdots+72+73}{15}\approx 75,$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{75+73+\cdots+71+75}{15}\approx 75.$$

样本数据的方差分别是

$$s_{甲}^2=\frac{(74-75)^2+(74-75)^2+\cdots+(72-75)^2+(73-75)^2}{15}\approx 3,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(75-75)^2+(73-75)^2+\cdots+(71-75)^2+(75-75)^2}{15}\approx 8.$$

由 $\bar{x}_{甲}\approx\bar{x}_{乙}$ 可知，两家加工厂的鸡腿质量大致相等；由 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$ 可知，甲加工厂的鸡腿质量更稳定，大小更均匀. 因此，快餐公司应该选购甲加工厂生产的鸡腿.

练习

某跳远队准备从甲、乙两名运动员中选取成绩稳定的一名参加比赛. 下表是这两名运动员 10 次测验成绩（单位：m）：

甲	5.85	5.93	6.07	5.91	5.99
	6.13	5.98	6.05	6.00	6.19
乙	6.11	6.08	5.83	5.92	5.84
	5.81	6.18	6.17	5.85	6.21

你认为应该选择哪名运动员参赛？为什么？

习题 19.2

复习巩固

1. 甲、乙两台机床同时生产一种零件. 在 10 天中，两台机床每天出次品的数量如下表：

甲	0	1	0	2	2	0	3	1	2	4
乙	2	3	1	1	0	2	1	1	0	1

(1) 分别计算两组数据的平均数和方差；

(2) 从计算的结果看，在 10 天中，哪台机床出次品的平均数较小？哪台机床出次品的波动较小？

2. 甲、乙两台包装机同时包装糖果. 从中各抽出 10 袋，测得它们的实际质量（单位：g）如下表：

甲	501	506	508	508	497	508	506	508	507	499
乙	505	507	505	498	505	506	505	505	506	506

(1) 分别计算两组数据的平均数和方差；

(2) 哪台包装机包装的 10 袋糖果的质量比较稳定？

综合运用

3. 为了考察甲、乙两种小麦的长势，分别从中随机抽取 10 株麦苗，测得苗高（单位：cm）如下表：

甲	12	13	14	15	10	16	13	11	15	11
乙	11	16	17	14	13	19	6	8	10	16

(1) 分别计算两种小麦的平均苗高；

(2) 哪种小麦的长势比较整齐？

4. 在体操比赛中，往往在所有裁判给出的分数中，去掉一个最高分和一个最低分，然后计算余下分数的平均分. 6 个 B 组裁判员对某一运动员的打分数据（动作完成分）为：9.4，8.9，8.8，8.9，8.6，8.7.

(1) 如果不去掉最高分和最低分，这组数据的平均数和方差分别是多少（结果保留小数点后两位）？

(2) 如果去掉一个最高分和一个最低分，平均数和方差又分别是多少（结果保留小数点后两位）？

(3) 你认为哪种统计平均分的方法更合理？

拓广探索

5. 全班同学分成几个小组完成下面的活动：

(1) 收集全班同学每个家庭在某个月的用水量；

(2) 将本组同学每个家庭在这个月的用水量作为样本数据，计算样本数据的平均数和方差，并根据样本数据的结论估计全班同学家庭用水量的情况；

(3) 与其他小组进行交流，谈谈你对平均数、方差以及用样本估计总体的认识.

阅读与思考

数据波动程度的几种度量

我们知道，方差是度量数据波动程度的量. 此外，统计中还常用极差、平均差、标准差等来度量数据的波动程度.

一组数据中最大值与最小值的差称为这组数据的极差. 在反映数据波动程度的各种量中，极差是最简单、最便于计算的一个量. 但是它仅仅反映了数据的波动范围，没有提供数据波动的其他信息，且受极端值的影响较大.

为了更好地刻画数据的波动程度，可以考虑每一个数据与其平均数的“距离”. 一个自然的想法就是计算每一个数据与其平均数的差的平均数，即

$$\frac{(x_1-\overline{x})+(x_2-\overline{x})+\cdots+(x_n-\overline{x})}{n},$$

想一想，这种做法可行吗？存在什么问题？

上面的做法不可行. 因为不论这组数据是什么具体数值，总有

$$\text{上式}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-n\,\overline{x}}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\overline{x}=\overline{x}-\overline{x}=0,$$

所以它不能反映数据的波动程度.

修正上面缺点的一种做法是考虑每个数据与其平均数的差的绝对值的平均数，即

$$\frac{|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+\cdots+|x_n-\overline{x}|}{n},$$

这个式子可以用来度量数据的波动程度，我们把它叫做这组数据的平均差.

另一种做法是用方差

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$$

来度量数据的波动程度.

此外，人们还引入了标准差的概念. 标准差是方差的算术平方根，即

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}},$$

标准差的单位与原始数据的单位相同，实际中也常用它度量数据的波动程度.

请同学们利用上面的几种度量数据波动程度的量解决下面的问题.

一个家具厂有甲、乙两个木料货源. 下面是家具厂向两个货源订货后等待交货天数的样本数据：

等待天数		6	7	8	9	10	11	12	13	14
次数	甲	0	0	2	8	7	3	0	0	0
	乙	4	2	0	6	2	2	2	0	2

分别计算样本数据的平均数、极差、平均差、方差和标准差. 根据这些计算结果，看看家具厂从哪个货源进货比较好？为什么？

19.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析

请同学们分组合作完成下面的调查活动.

收集近两年你校七年级部分学生的《体质健康标准登记表》，分析登记表中的数据，对你校七年级学生的体质健康情况进行评定，提出增强学生体质健康的建议.

下面提供一个调查样例供同学们活动时参考.

某学校七年级有 4 个班，共 180 人，其中男生 85 人，女生 95 人.

表 19-11 是用来记录学生体质健康测试结果的登记表.

表 19-11 体质健康标准登记表

<table>
<tr><td colspan="2">姓名</td><td></td><td>班级</td><td></td><td>年龄</td><td></td><td>性别</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">身高</td><td></td><td>体重</td><td></td><td rowspan="11">选测一项（20）</td><td colspan="2" rowspan="2">50 米跑</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">身高标准体重（10）</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">肺活量体重指数（20）</td><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">立定跳远</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">选测一项（30）</td><td colspan="2">台阶实验</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">1000 米跑（男）</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">跳绳</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">800 米跑（女）</td><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">篮球运球</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">选测一项（20）</td><td colspan="2">坐位体前屈</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">掷实心球</td><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">足球运球</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">握力体重指数</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">引体向上（男）</td><td colspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">排球垫球</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">仰卧起坐（女）</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>说明</td><td colspan="8">1. 括号中的数字为单项测试的满分成绩；
2. 各单项成绩之和为最后得分；
3. 最后得分 90 分及以上为优秀，75～89 分为良好，60～74 分为及格、59 分及以下为不及格.</td></tr>
</table>

一、收集数据

1. 确定样本

从全校七年级的各班分别抽取 5 名男生和 5 名女生，组成一个容量为 40 的样本.

2. 确定抽取样本的方法

按照各班的学号，分别在每个班抽取学号排在最前面的 5 名男生和 5 名女生.

二、整理数据

整理体质健康登记表中的各项数据.

例如，计算每个个体的最后得分，按评分标准整理样本数据，得到表 19-12.

表 19-12

成　绩	划　记	频　数	百分比
不及格	下	3	7.5%
及　格	正 下	8	20%
良　好	正 正 正 丅	17	42.5%
优　秀	正 正 丅	12	30%
合　计	40	40	100%

三、描述数据

根据整理的各种表格，画出条形图、扇形图、折线图、直方图等，使得数据分布的信息更清楚地显现出来.

例如，根据表 19-12，可以画出条形图（图 19.3-1）和扇形图（图 19.3-2）.

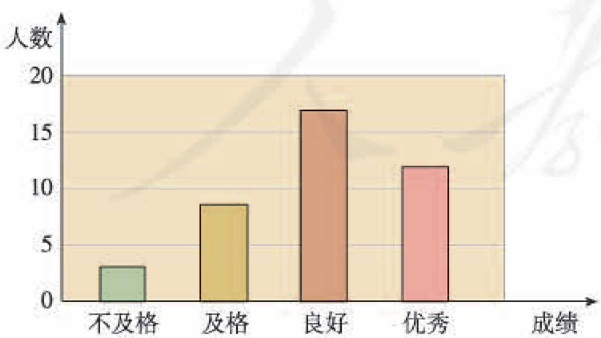


图 19.3-1

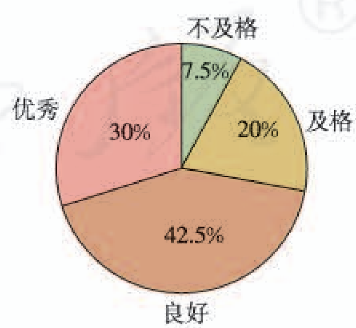


图 19.3-2

四、分析数据

根据原始数据或上面的各种统计图表，计算各组数据的平均数、中位数、众数、方差等，通过分析图表和计算结果得出结论.

例如，根据表 19-12、图 19.3-1、图 19.3-2 可知，样本的体质健康成绩达到良好的最多，有 17 人，良好及以上的有 29 人，约占统计人数的 70%左右. 由此可以估计全校七年级学生的体质健康成绩有类似的结果.

五、撰写调查报告

<table>
<tr><td>题　　目</td><td colspan="4">全校七年级学生体质健康情况的调查</td></tr>
<tr><td>样　　本</td><td colspan="2">七年级各班部分学生</td><td>样本容量</td><td>40</td></tr>
<tr><td>数据来源</td><td colspan="4">学生体质健康登记表</td></tr>
<tr><td rowspan="7">数据处理过程</td><td>主要项目</td><td>整理、描述数据</td><td colspan="2">分析数据得出结论</td></tr>
<tr><td>身　　高</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>体　　重</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>1 000 米跑</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>800 米跑</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>仰卧起坐</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>总　　结</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>主要建议</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>参加成员</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>教师意见</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>备　　注</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

六、交流

写出活动总结，向全班同学介绍本小组的调查过程，展示调查结果，交流通过数据处理寻找规律、得出结论的感受.

数学活动

活动1

请同学们合作完成下面的活动：

1. 全班同学一起讨论，提出5个问题对全班同学进行调查. 例如，全班同学的平均身高是多少？全班同学的平均体重是多少？等等.

2. 全班同学分成五个小组，每个小组选择一个问题进行调查，并将调查过程和结果在全班介绍和展示.

3. 将各组的结果汇总到一起，得到全班同学的一个“平均情况”，找出一个最能代表全班“平均情况”的同学.

活动2

请全班同学分成几个小组，合作完成下面的活动：

1. 每个小组分别测量本组同学的每分脉搏次数，得到几组数据.

2. 求出本组数据的平均数、中位数、众数、方差等.

3. 与其他小组进行交流，估计一颗“正常”心脏的每分跳动次数.

4. 查找资料，看看一颗“正常”心脏的每分跳动次数，与你们的调查结果进行对照，谈谈你们对用样本估计总体的感受.

小　结

一、本章知识结构图

二、回顾与思考

在生产和生活中，为了解总体的情况，我们经常从总体中抽取样本，通过对样本数据的处理，获得一些结论，然后再利用这些结论对总体进行估计. 这就是用样本估计总体，它是统计的基本思想.

在整理、描述和分析样本数据时，我们可以通过绘制图表，如条形图、折线图、扇形图和直方图等获得一些信息. 还可以通过计算反映数据某方面特征的量获得更多的信息，如利用平均数、中位数和众数，刻画数据的集中趋势；利用方差刻画数据的波动程度.

平均数、中位数和众数从不同侧面反映了一组数据的集中趋势. 因此，用它们刻画数据时，要根据统计调查的目的和具体问题的特点进行选择.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 举例说明平均数、中位数、众数的意义.

2. 算术平均数与加权平均数有什么联系和区别？举例说明加权平均数中“权”的意义.

3. 举例说明怎样用方差刻画数据的波动程度.

4. 举例说明刻画数据特征的量在决策中的作用.

5. 搜集关于“统计学”方面的资料（如学科发展史、思想方法、人物等），从某个角度谈谈你对统计的认识.

复习题 19

复习巩固

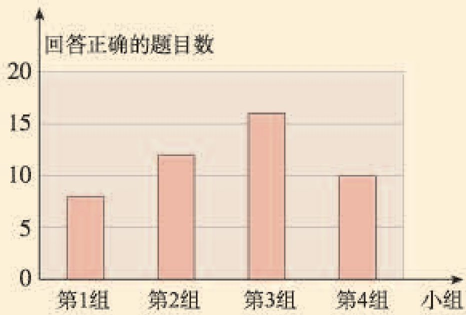
1. 某水库为了解某种鱼的生长情况，从水库中捕捞了 20 条这种鱼，称得它们的质量（单位：kg）如下：

   1.15　1.04　1.11　1.07　1.10　1.32　1.25　1.19　1.15　1.21

   1.18　1.14　1.09　1.25　1.21　1.29　1.16　1.24　1.12　1.16

   计算样本平均数（结果保留小数点后两位），并根据计算结果估计水库中这种鱼的平均质量.

2. 在一次智力抢答比赛中，四个小组回答正确的情况如下图：



（第 2 题）

   这四个小组平均正确回答多少道题目（结果取整数）？

3. 为了解某一路口的汽车流量，调查了 10 天中同一时段通过该路口的汽车数量（单位：辆），结果如下：

   183　209　195　178　204　215　191　208　167　197

   在该时段中，平均约有多少辆汽车通过这个路口？

4. 一家公司 14 名员工的月薪（单位：元）是：

   8 000　6 000　2 550　1 700　2 550　4 599　4 200

   2 550　5 100　2 500　4 400　25 000　12 400　2 500

   (1) 计算这组数据的平均数、中位数和众数；

   (2) 解释本题中平均数、中位数和众数的意义.

5. 某年 A，B 两座城市四季的平均气温（单位：℃）如下表：

城市	春	夏	秋	冬
A	-4	19	9	-10
B	16	30	24	11

（1）分别计算 A，B 两座城市的年平均气温（结果取整数）；

（2）哪座城市四季的平均气温较为接近？

综合运用

6. 下表是两种股票一周内的交易日收盘价格（单位：元/股）：

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
A 股票	11.62	11.51	11.39	11.94	11.17
B 股票	13.53	14.07	13.49	13.84	14.80

计算它们的平均数和方差（结果保留小数点后两位），比较这两种股票在这段时间内的涨、跌变化情况.

7. 甲、乙两门大炮在相同条件下向同一目标各发射 50 发炮弹，炮弹落点情况如下表：

炮弹落点与目标的距离/m	40	30	20	10	0
甲炮发射的炮弹个数	0	1	3	7	39
乙炮发射的炮弹个数	1	3	2	3	41

（1）分别计算两门大炮所发射的炮弹落点与目标的距离的平均数；

（2）哪门大炮射击的准确性好？

拓广探索

8. 为了促进学生参加体育锻炼，学校决定购买一批运动鞋供学生选购. 请设计一个样本容量为 30 的调查方案进行调查，并计算样本的平均数、众数、中位数，为学校购买运动鞋提出建议.

9. 统计全班同学上学所用时间，对所得数据进行整理、描述和分析，看看你能得出哪些结论.

部分中英文词汇索引

后　记

本册教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《义务教育数学课程标准》（2011年版）编写的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2013年审查通过。

本册教科书集中反映了基础教育教科书研究与实验的成果，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教研人员以及一线教师的集体智慧。我们感谢所有对教科书的编写、出版提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友，以及整体设计艺术指导吕敬人等。

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持。对此，我们表示衷心的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请入选作品的作者与我们联系，以便支付稿酬。

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们。让我们携起手来，共同完成义务教育教材建设工作！

联系方式
电　　话：010-58758330
电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2013年5月