义务教育教科书

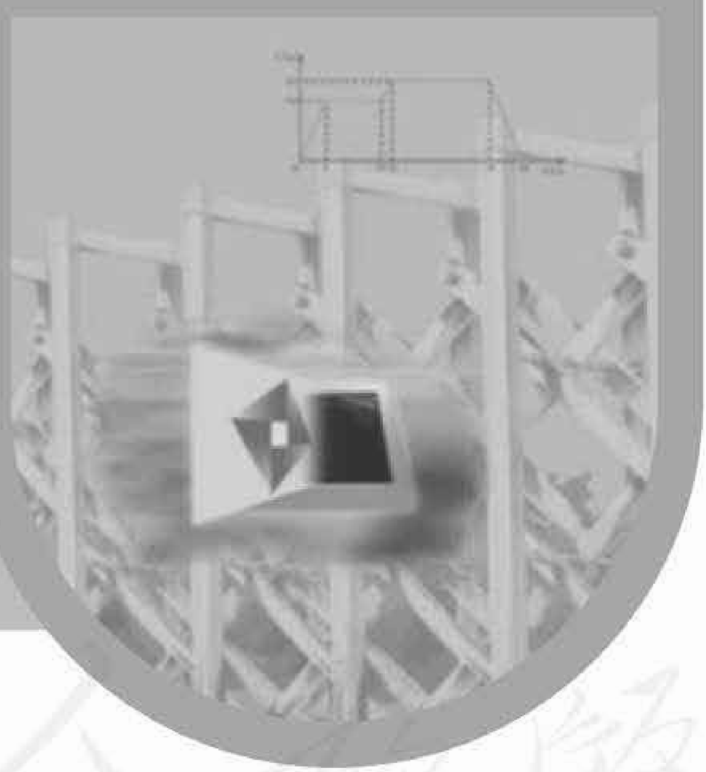
（五·四学制）

数学

教师教学用书

八年级

下册



人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬　李海东

本册主编：李龙才　吴增生
主要编者：俞求是　张劲松　田载今　章建跃　吴增生
　　　　　王华鹏　王万丰　王玉起　李昌官
责任编辑：张唯一

图书在版编目（CIP）数据

义务教育教科书（五·四学制）教师教学用书．数学．八年级．下册 / 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．—北京：人民教育出版社，2014.10

ISBN 978-7-107-29150-0

Ⅰ．①义… Ⅱ．①人… Ⅲ．①中学数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ．① G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 256202 号

义务教育教科书（五·四学制）教师教学用书　数学　八年级　下册

出版发行　人民教育出版社
　　　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　××× 印刷厂
版　　次　2014 年 10 月第 1 版
印　　次　　　年　月第　次印刷
开　　本　787 毫米 ×1 092 毫米　1/16
印　　张　16
字　　数　365 千字
定　　价　20.00 元

说　明

为适应实行五·四学制地区小学、初中数学教学的实际需要，人民教育出版社、课程教材研究所小学和中学数学课程教材研究开发中心以《义务教育数学课程标准（2011 年版）》为依据，在现有的六·三学制《义务教育教科书·数学（一～九年级）》的基础上，对教科书体系进行了适当变动整合，对教科书内容进行了相应调整改编，编写了这套适合五·四学制需要的教科书. 全套书分为八册，每学期一册，内容包括“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域，在体系结构的设计上力求反映这些内容之间的联系与综合，使它们成为一个有机的整体，其中对于“综合与实践”领域的内容，以“课题学习”和“数学活动”等形式分散地编排于各章之中.

本套教科书在体例安排上有如下特点：

1. 每章开始均用反映本章主要内容的章前图和引言引入本章内容，使学生了解本章内容的概貌，了解本章的主要思想方法和学习方法，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料.

2. 正文中设置了“思考”“探究”“归纳”等栏目，栏目中以问题、留白或填空等形式引导学生通过观察、分析、猜想、实验、推理、反思、交流等活动获取数学知识，积累学习经验.

3. 适当安排了“阅读与思考”“观察与猜想”“实验与探究”“信息技术应用”等选学栏目，为加深学生对相关内容的认识，扩大学生的知识面，运用现代信息技术手段学习等提供资源.

4. 正文的边空设有“小贴士”和“云朵”，“小贴士”介绍与正文内容相关的背景知识，“云朵”中是一些有助于理解正文的问题.

5. 每章安排了若干有一定综合性、实践性、开放性的“数学活动”，体现数学知识的综合应用，可供教师结合相关知识的教学或全章复习时选用.

6. 每章安排了“小结”，包括本章的知识结构图和对本章内容的回顾与思考. “本章知识结构图”体现了本章知识要点、发展脉络和相互联系；“回顾与思考”对本章主要内容及其反映的思想方法进行提炼与概括，并通过在重点、难点和关键环节上提出的有思考力度的具体问题，深化学生对本章核心内容及其反映的数学思想方法的理解.

7. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类. 练习供课上使用，有些练习是对所学内容的巩固，有些练习是相关内容的延伸；习题供课内或课外作业时选用；复习题供复习全章时选用. 其中习题、复习题按照习题的功能分为“复习巩固”“综合应用”“拓广探索”三类.

这套教师教学用书与《义务教育教科书（五·四学制）·数学（六～九年级）》相对应，供教师教学时参考使用. 全套书分为八册，每册书按章编排，每章内容与相应教科书内容对应. 教师教学用书的每一章主要包括以下六部分：

第一部分是总体设计，包括本章学习目标、本章知识结构框图、内容安排、课时安排、编

写本章时考虑的问题、对本章教学的建议等内容.

第二部分是教材分析. 这部分含有教科书相应章节的正文，正文旁有教科书正文的注释及教科书中练习的答案和说明，正文下部按小节分条阐述各小节的编写意图，说明本节内容的知识结构、知识点及其发生发展过程（逻辑关系）、重点、学生学习过程中可能出现的困难和问题等.

第三部分是本章习题的参考答案.

第四部分提供了几个教学案例，供教师教学时参考. 每一个教学案例是一个课时的课堂教学设计，内容包括内容和内容解析、目标和目标解析、教学问题诊断分析、教学支持条件分析、教学过程设计、目标检测设计等几方面.

第五部分是拓展资源. 根据每章的教学内容，为教师提供相应的拓展资料，包括知识的拓广延伸和相关史料、拓展性问题等.

第六部分是评价建议与测试题. 评价建议从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度等几方面为教师提出本章评价建议. 这部分还提供了一套测试题供参考，并说明了每道测试题的设计意图.

本书是八年级下册的教师教学用书，内容包括“勾股定理”“平行四边形”“一次函数”“一元二次方程”等四章，各章授课时间大致分配如下（仅供参考）：

第二十四章	勾股定理	10 课时
第二十五章	平行四边形	17 课时
第二十六章	一次函数	19 课时
第二十七章	一元二次方程	14 课时

除已列出的主要编者外，参加本册教师教学用书编写、讨论的还有蒋荣清等.

本书在编写过程中征求了全国各地部分教师和教研人员的意见，在此表示衷心感谢.

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2014 年 8 月

目　录

第二十四章　勾股定理 1

Ⅰ　总体设计 1

Ⅱ　教材分析 5

24.1　勾股定理 6

24.2　勾股定理的逆定理 15

数学活动 20

小结 21

复习题 24 22

Ⅲ　习题解答 24

Ⅳ　教学设计案例 27

24.1　勾股定理（第 1 课时） 27

24.2　勾股定理的逆定理（第 1 课时） 32

Ⅴ　拓展资源 35

Ⅵ　评价建议与测试题 43

第二十五章　平行四边形 47

Ⅰ　总体设计 47

Ⅱ　教材分析 52

25.1　平行四边形 53

25.2　特殊的平行四边形 64

数学活动 76

小结 78

复习题 25 79

Ⅲ　习题解答 82

Ⅳ　教学设计案例 84

25.1　平行四边形（第 1 课时）　84
25.1　平行四边形（第 3 课时）　88
25.2　特殊的平行四边形（第 1 课时）　92
平行四边形复习课　97
Ⅴ　拓展资源　102
Ⅵ　评价建议与测试题　107

第二十六章　一次函数　111

Ⅰ　总体设计　111
Ⅱ　教材分析　116
26.1　函数　117
26.2　一次函数　132
26.3　课题学习　选择方案　148
数学活动　151
小结　152
复习题 26　153
Ⅲ　习题解答　156
Ⅳ　教学设计案例　161
26.1　函数（第 2 课时）　161
26.2　一次函数（第 4 课时）　166
26.2　一次函数（第 6 课时）　171
26.3　课题学习　选择方案（第 1 课时）　177
Ⅴ　拓展资源　182
Ⅵ　评价建议与测试题　189

第二十七章　一元二次方程　193

Ⅰ　总体设计　193
Ⅱ　教材分析　199
27.1　一元二次方程　200
27.2　解一元二次方程　203
27.3　一元二次方程与实际问题　217
数学活动　221

小结 222
复习题 27 223
Ⅲ 习题解答 225
Ⅳ 教学设计案例 227
27.2 解一次二次方程（第 1 课时） 227
27.2 解一次二次方程（第 7 课时） 231
一元二次方程复习课（两课时） 234
Ⅴ 拓展资源 238
Ⅵ 评价建议与测试题 244

第二十四章　勾股定理

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

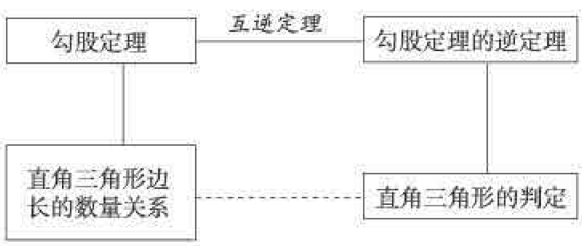
1. 经历勾股定理及其逆定理的探索过程，知道这两个定理的联系和区别，能用这两个定理解决一些简单的实际问题.

2. 初步认识勾股定理及其逆定理的重要意义，会用这两个定理解决一些几何问题.

3. 通过具体的例子，了解逆命题、逆定理的概念，会识别两个互逆的命题，知道原命题成立时其逆命题不一定成立.

4. 通过对我国古代研究勾股定理成就的介绍，培养民族自豪感；通过对勾股定理的探索和交流，培养数学学习的自信心.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

直角三角形是一种极常见而特殊的三角形，它有许多性质，如两个锐角互余，30°的角所对的直角边等于斜边的一半. 本章所研究的勾股定理，是直角三角形非常重要的性质，有极其广泛的应用. 直角是最常见的特殊角. 勾股定理指出了直角三角形三边之间的数量关系，这就搭建起了几何图形和数量关系之间的一座桥梁，从而发挥了重要的作用. 勾股定理不仅在平面几何中是重要的定理，而且在三角学、解析几何学、微积分学中都是理论的基础，对现代数学的发展也产生了重要而深远的影响. 没有勾股定理，就难以建立起整个数学的大厦. 因此，勾股定理不仅被认为是平面几何中最重要的定理之一，也被认为是数学中最重要的定理之一.

本章分为两节，第 24.1 节介绍勾股定理及其应用，第 24.2 节介绍勾股定理的逆定理及其应用.

在第 24.1 节中，教科书安排了对勾股定理的观察、计算、猜想、证明及简单应用的过程. 教科书首先简略讲述了毕达哥拉斯从观察地面图案的面积关系发现勾股定理的传说，并让学生也去观察同样的图案，通过研究等腰直角三角形这种特殊直角三角形的面积关系，发现它的三边之间的数

量关系. 在进一步的探究中又让学生对某些直角三角形进行计算，计算以直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积和以斜边为边长的正方形的面积，发现以两直角边为边长的小正方形的面积和等于以斜边为边长的正方形的面积，进而得到这些直角三角形中两直角边的平方和等于斜边的平方. 然后，对更一般的结论提出了猜想.

历史上对勾股定理的证明的研究有很多，得到了很多证明方法. 教科书正文中介绍了 3 世纪三国时期中国数学家赵爽的证明方法. 这是一种面积证法，依据是图形在经过适当切割后再另拼接成一个新图形，切割拼接前后图形的各部分的面积之和不变，即利用面积不变的关系和对图形面积的不同算法得到等量关系. 在教科书中，图 24.1-6（1）中的图形经过切割拼接后得到图 24.1-6（3）中的图形，证明了勾股定理.

根据勾股定理，已知两条直角边的长 a，b，就可以求出斜边 c 的长. 根据勾股定理还可以得到，$a^2=c^2-b^2$，$b^2=c^2-a^2$，由此可知，已知斜边和一条直角边的长，就可以求出另一条直角边的长. 也就是说，在直角三角形中，已知两条边的长，就可以求出第三条边的长. 教科书相应安排了两个例题和一个“探究”栏目，让学生学习运用勾股定理解决问题，并运用定理证明了斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.

在第 24.2 节中，教科书首先让学生画出一些两边的平方和等于第三边的平方的三角形，可以发现画出的三角形都是直角三角形，从而作出猜想：如果三角形的三边满足两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形. 教科书借助勾股定理和判定全等三角形的定理（SSS）证明了这个猜想，得到了勾股定理的逆定理. 勾股定理的逆定理是判定一个三角形是直角三角形的一种重要依据. 教科书安排了两个例题，让学生学会运用这个定理. 本节结合勾股定理逆定理的内容展开，穿插介绍了逆命题、逆定理的概念，并举例说明原命题成立其逆命题不一定成立. 为巩固这些内容，相应配备了一些练习和习题.

四、课时安排

本章教学时间约需 10 课时，具体安排如下（仅供参考）：

24.1　勾股定理	4 课时
24.2　勾股定理的逆定理	4 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 让学生经历勾股定理及其逆定理的探索过程

勾股定理及其逆定理都是初等数学中的重要定理，同时，这两个定理也都是在教师的精心引导下多数初中学生通过探索能够发现并证明的定理. 在教学中要重视这两个定理的教学，要注意引导学生通过探索去发现图形的性质，提出一般的猜想，并获得两个定理的证明.

教科书对勾股定理的教学设计了一个从特殊到一般的探索、发现和证明的过程. 先是很特殊的等腰直角三角形，然后到一些比较特殊的直角三角形，再到一般直角三角形，最后用赵爽证法加以

证明. 这是一个典型的探索和证明的过程. 类似地，对勾股定理的逆定理，教科书也设计了从特殊到一般的探索和证明的完整过程.

这样安排教学，有利于学生认识结论研究的必要性，激发学生对结论的探索兴趣和热情，培养学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力和严密审慎的思考习惯.

2. 通过介绍我国古代研究勾股定理的成就培养民族自豪感

我国古代数学有许多杰出的研究成果，许多成就为世界所瞩目，并获得高度评价. 在教学中应结合教学内容，适当介绍我国古代数学成就，培养学生爱国热情和民族自豪感.

我国古代对勾股定理的研究就是一个突出的例子. 根据成书年代不晚于公元前 2 世纪西汉时期的《周髀算经》进行推算，有可能在公元前 21 世纪大禹治水时人们就会应用“勾三、股四、弦五”的特殊结论，公元前 6，7 世纪时人们还知道了勾股定理的一般结论，并能灵活运用结论解决许多实际测量问题. 3 世纪三国时期赵爽为《周髀算经》作注写《勾股圆方图注》，用“弦图”对勾股定理给出了一般的证明，这是我国对勾股定理一般结论的最早的证明. 我国古代不仅较早独立地发现了勾股定理有关“勾三、股四、弦五”的一些特殊结论，而且也比较早使用巧妙的方法独立证明了勾股定理，在勾股定理的应用方面也有许多深入的研究并达到熟练的程度. 根据《周髀算经》对勾股定理的多方面的论述，从此书所记录的公元前 6，7 世纪时，我国古人已经能够熟练且自信地把勾股定理应用到任意边长的直角三角形的事实，可以推测在比《周髀算经》成书早得多的时候，我国对勾股定理不仅知其然而且知其所以然，只是缺少文献明确记载对于定理的论证. 这些，都说明我国古代劳动人民的卓越聪明才智，也是我国对世界数学的重要贡献，是值得我们自豪的.

本章教科书结合教学内容介绍了我国古代对勾股定理的有关研究成果. 在引言中介绍了现存的我国最早的数学著作《周髀算经》的记载，“如果勾是三、股是四，那么弦是五.”勾股定理的证法很多，教科书为了弘扬我国古代数学成就，介绍了赵爽的证法. 首先介绍赵爽弦图，然后介绍赵爽利用弦图证明命题 1 的基本思路. 这些内容表现了我国古代劳动人民对数学的钻研精神和聪明才智，它是我国古代数学的骄傲. 正因为此，赵爽弦图被选为 2002 年在北京召开的世界数学家大会的会徽. 教科书还在习题中安排了我国古代数学著作《九章算术》中的问题，展现我国古代在勾股定理应用研究方面的成果.

本章也介绍了国外对于勾股定理的有关研究成果. 勾股定理在西方通常被称为毕达哥拉斯定理. 毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580—约前 500）是古希腊伟大的数学家，现在一般认为国外由毕达哥拉斯学派最早证明了此定理. 和勾股定理有关的数学历史文化背景知识非常丰富，在教学中，应注意适度引入，使学生对勾股定理的有关历史发展有所了解，激发学生的学习兴趣. 特别应通过向学生介绍我国古代在勾股定理研究方面的成就，激发学生热爱祖国的思想感情，培养民族自豪感，教育学生打好数学知识基础，为中华民族的伟大复兴而努力学习.

六、对本章教学的建议

1. 重视提高学生分析问题、解决问题的能力

本章内容虽然不多，但教学内涵却很丰富. 勾股定理及其逆定理不仅在数学理论体系中有重要

的地位，定理本身也有重要的实际应用价值．本章还结合两个定理引入了逆命题、逆定理等比较抽象的概念．这些知识本身易混易错，学习有一定的难度．应该对本章的教学引起重视，使本章的教学对培养学生逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力等发挥应有的作用．

在勾股定理的教学中，一方面要重视学生观察、猜想能力的培养，另一方面也要重视从特殊结论到一般结论的严密逻辑思维能力的培养．从勾股定理到它的逆定理，学生往往会从直觉出发想当然地认为勾股定理的逆命题也一定成立．而从这种直觉上升到逻辑严密的思考和证明，认识到两个结论有联系但却并不相同，认识到新的结论仍需要经过严格的证明，这是思维能力提高的重要体现，这在教学中是应该引起重视的．另外，逆命题的教学也是一个教学难点，怎样写出一个命题的逆命题，原命题和逆命题真假的多种可能性，怎样的命题可以称为逆定理，这些都是学生容易出错的知识点．

勾股定理及其逆定理在解决实际问题中也有广泛的应用价值，在证明几何结论中则起着非常重要的作用，在教学中要引起充分的重视．教学中可以适当把一些中外数学史中的材料充实到课堂中，使本章的教学更加充实，以取得更好的教学效果．

2．围绕证明勾股定理培养学生数学学习的自信心

数学课往往是初中学生最想学好却不容易学好的一门课，而在数学学习中所培养起来的自信心往往成为学生今后成长的重要力量，所以在数学教学中要特别重视培养学生数学学习的自信心，进而培养更广泛的自信心．勾股定理被公认是初等几何中最重要的定理之一，定理结论奇异、形式优美，寻找勾股定理的新证法成为古今中外名家百姓都热衷研究的问题，而勾股定理的赵爽证法被认为是极其优美、简洁的证明方法．了解、理解甚至独立发现一个重要定理的证明方法，对树立数学学习的自信心往往能起到特别的作用．勾股定理的证明方法相当多，让学生从定理条件和结论去分析找到一个新的证明方法并非高不可攀．在本定理的教学中，除正文介绍的有关内容外，可以根据实际教学情况，对学生提出不同的教学要求，可以让学生自主探究定理的证明，也可以安排收集定理多种证法的数学课外活动．通过这些活动，使学生对勾股定理有较好的理解，从而培养他们学好数学的自信心．

3．适当总结和定理、逆定理有关的内容

本章引出了逆定理的概念，为了让学生对这一概念掌握得更好，可以在小结时结合已经学过的一些结论以加深理解．例如，可以结合本套教科书第十八章“全等三角形”中的两个定理——“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”和“角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”来进行复习．这里，前一个结论是角平分线的性质定理，后一个结论是角平分线的性质定理的逆定理．还可以举出其他的一些适当的例子．这样就可以从定理、逆定理的角度认识已学的一些结论，明确其中一些结论之间的关系．

对互逆命题、互逆定理的概念，学生理解它们通常困难不大．但对那些不是以“如果……那么……”形式给出的命题，叙述它们的逆命题有时就会有困难，可以尝试首先把命题变为“如果……那么……”的形式．当然，要注意把握教学要求，不宜涉及结构太复杂的命题．

第二十四章　勾股定理[1]

章前图中左侧的图案是 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽，它与数学中著名的勾股定理有着密切关系．

在我国古代，人们将直角三角形中短的直角边叫做勾，长的直角边叫做股，斜边叫做弦．根据我国古代数学书《周髀算经》记载，在约公元前 11 世纪，人们就已经知道，如果勾是三、股是四，那么弦是五．[2] 后来人们进一步发现并证明了关于直角三角形三边之间的关系——两条直角边的平方和等于斜边的平方，这就是勾股定理．

本章我们将探索并证明勾股定理及其逆定理，并运用这两个定理去解决有关问题．由此可以加深对直角三角形的认识．

Ⅱ 教材分析

[1] 在西方，一般认为这个定理是由毕达哥拉斯学派首先发现并给出证明，所以长期以来在西方国家人们通常称这个定理为毕达哥拉斯定理．

[2] 原文是：勾广三，股修四，径隅五．

1. 勾股定理是初等几何中最重要的定理之一．它揭示了直角三角形三条边之间的数量关系，是直角三角形的一条重要性质．它可以用来解决许多直角三角形中的计算问题，是解直角三角形的主要依据之一，在生产生活实际中用途很广．它不仅在数学中，而且在其他自然科学中也被广泛地应用．

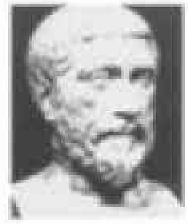
勾股定理把形的特征（三角形中一个角是直角）转化成数量关系（$a^2+b^2=c^2$），它把形和数密切联系了起来．由于直角图形的普遍性，勾股定理在实际应用中极其重要．在数学基础理论中，此定理也有重要地位，不仅在平面几何中是重要的定理，而且是三角学、解析几何学、微积分学等的理论基础，对现代数学的发展也产生了一定的影响．

2. 教科书从 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽引入本章内容．会徽的图案反映了我国古代对勾股定理的研究成果，是对学生进行爱国主义教育的良好素材．

[1] 在图 24.1-2 中，三个正方形所围成的等腰三角形的斜边上的正方形由四个等腰直角三角形组成，直角边上的正方形各由两个等腰直角三角形组成．

24.1 勾股定理

相传 2 500 多年前，毕达哥拉斯有一次在朋友家作客时，发现朋友家用砖铺成的地面图案反映了直角三角形三边的某种数量关系．我们也来观察一下地面的图案（图 24.1-1），看看能从中发现什么数量关系．



毕达哥拉斯（Pythagoras，约前 580—约前 500），古希腊著名的哲学家、数学家、天文学家．

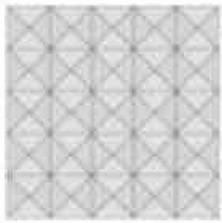


图 24.1-1

思考

图 24.1-2 中三个正方形的面积有什么关系？等腰直角三角形的三边之间有什么关系？[1]

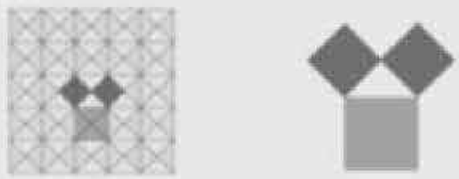


图 24.1-2

可以发现，以等腰直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积的和，等于以斜边为边长的大正方形的面积．即等腰直角三角形的三边之间有一种特殊的关系：斜边的平方等于两直角边的平方和．

看似平淡无奇的现象有时却蕴含着深刻的道理．

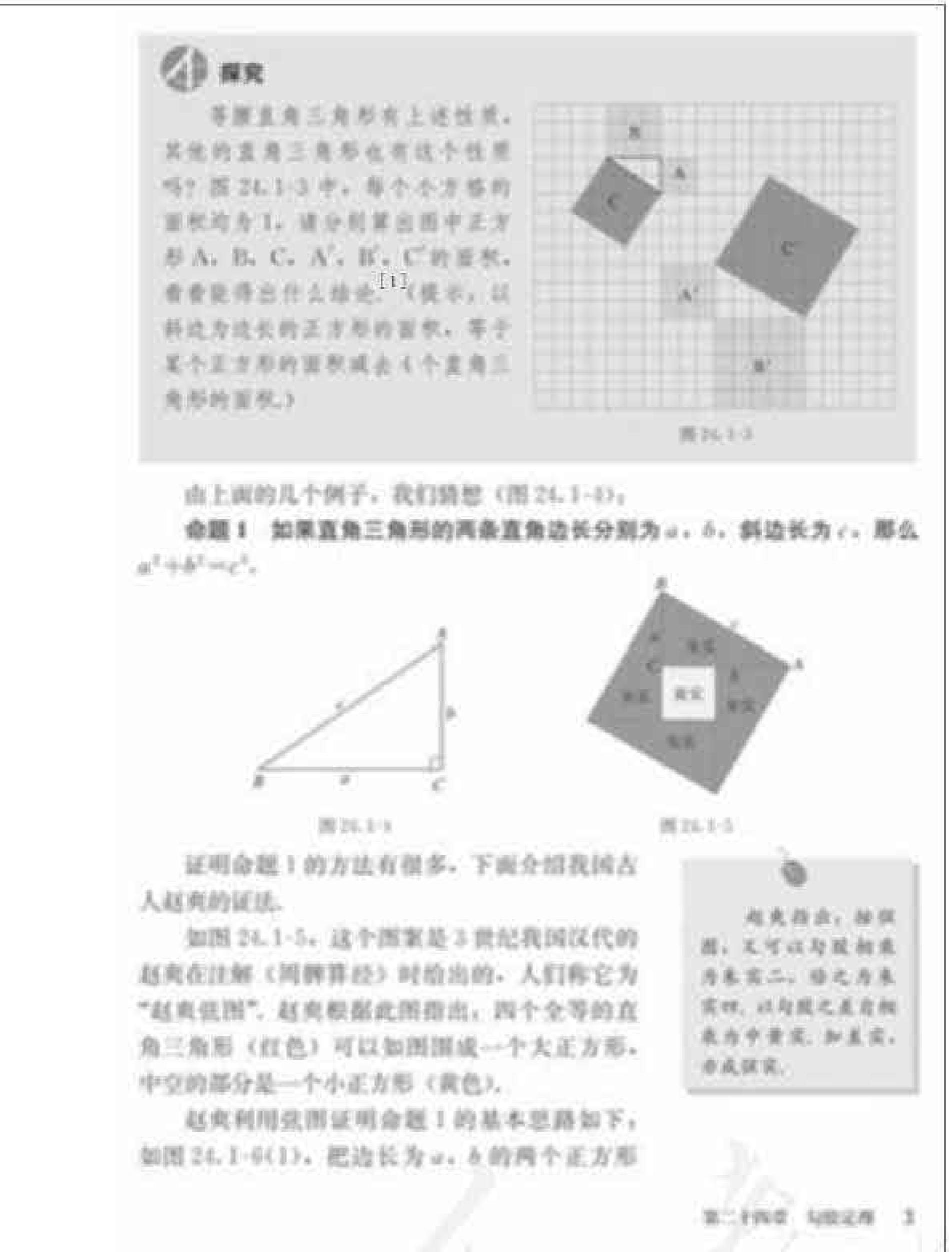
2 第二十四章 勾股定理

1. 本节首先让学生探索发现直角三角形三边之间的关系——两直角边的平方和等于斜边的平方，然后证明上述关系成立，最后让学生运用勾股定理解决问题．

2. 让学生直接发现直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方，有一定的难度．因此，教科书先让学生发现以直角三角形两直角边为边长的正方形的面积和以斜边为边长的正方形的面积之间的关系．

3. 从等腰直角三角形入手，容易发现数量关系．教科书结合毕达哥拉斯的传说故事，可以提高学生学习的兴趣，另外其中的图案对学生发现规律也有一定的提示作用．

然后让学生探究几个一般的直角三角形，看看是否仍有相同的数量关系．在这个“探究”栏目中，关键是计算以斜边为边长的正方形的面积．图中以斜边为边长的两个正方形的面积可以如下求出：



探究

等腰直角三角形有上述性质，其他的直角三角形也有这个性质吗？图 24.1-3 中，每个小方格的面积均为 1，请分别算出图中正方形 A，B，C，A′，B′，C′的面积，看看能得出什么结论.[1]（提示：以斜边为边长的正方形的面积，等于某个正方形的面积减去 4 个直角三角形的面积.）

图 24.1-3

由上面的几个例子，我们猜想（图 24.1-4）：

命题 1　如果直角三角形的两条直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.

图 24.1-4

图 24.1-5

证明命题 1 的方法有很多，下面介绍我国古人赵爽的证法.

如图 24.1-5，这个图案是 3 世纪我国汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”. 赵爽根据此图指出：四个全等的直角三角形（红色）可以如图围成一个大正方形，中空的部分是一个小正方形（黄色）.

赵爽指出：按弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实，加差实，亦成弦实.

赵爽利用弦图证明命题 1 的基本思路如下，如图 24.1-6(1)，把边长为 a，b 的两个正方形

第二十四章　勾股定理　3

[1] 通过计算可以得出：图中以直角三角形两条直角边为边长的正方形的面积的和，等于以直角三角形的斜边为边长的正方形的面积，即两直角边的平方和等于斜边的平方.

$$5^2-4\times\frac{1}{2}\times2\times3=13,$$

$$8^2-4\times\frac{1}{2}\times3\times5=34.$$

也可以由四个直角三角形的面积加上一个小正方形的面积求得：

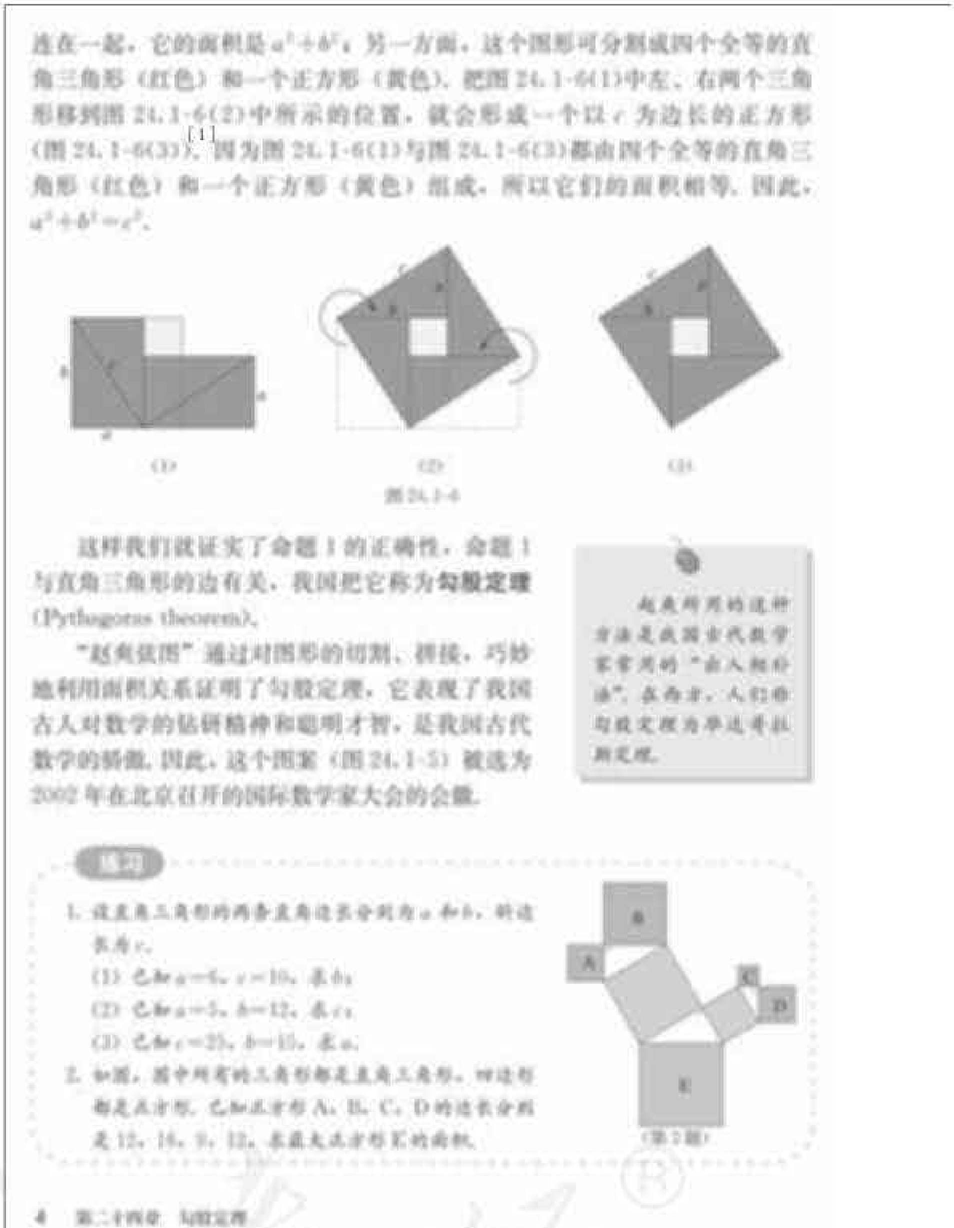
$$4\times\frac{1}{2}\times2\times3+1^2=13,$$

$$4\times\frac{1}{2}\times3\times5+2^2=34.$$

4. 勾股定理的证明方法很多，这里介绍的是我国古代数学家赵爽的证法，是一种面积证法. 学生以前没见过这种方法，会感到陌生，尤其是觉得不像证明. 这主要是以前没有专门讲面积理论，感觉推理的根据不很明确所造成. 教学中可以说明，图形在经过适当切割后再另拼接成一个新图形，切割拼接前后图形的各部分的面积之和不变.

由赵爽弦图可知，以斜边为边长的正方形由

[1] 这个结果也表明：由两个小正方形可以拼成一个大正方形.



连在一起，它的面积是 a^2+b^2；另一方面，这个图形可分割成四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）. 把图 24.1-6(1)中左、右两个三角形移到图 24.1-6(2)中所示的位置，就会形成一个以 c 为边长的正方形（图 24.1-6(3)）[1]. 因为图 24.1-6(1)与图 24.1-6(3)都由四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）组成，所以它们的面积相等. 因此，$a^2+b^2=c^2$.

(1)　(2)　(3)

图 24.1-6

这样我们就证实了命题 1 的正确性，命题 1 与直角三角形的边有关，我国把它称为**勾股定理**(Pythagoras theorem).

"赵爽弦图"通过对图形的切割、拼接，巧妙地利用面积关系证明了勾股定理，它表现了我国古人对数学的钻研精神和聪明才智，是我国古代数学的骄傲. 因此，这个图案（图 24.1-5）被选为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽.

赵爽所用的这种方法是我国古代数学家常用的"出入相补法". 在西方，人们称勾股定理为毕达哥拉斯定理.

练习

1. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b，斜边长为 c.
(1) 已知 $a=6$，$c=10$，求 b；
(2) 已知 $a=5$，$b=12$，求 c；
(3) 已知 $c=25$，$b=15$，求 a.
2. 如图，图中所有的三角形都是直角三角形，四边形都是正方形. 已知正方形 A，B，C，D 的边长分别是 12，16，9，12，求最大正方形 E 的面积.

（第 2 题）

4　第二十四章　勾股定理

练习答案

1. (1) 8；
(2) 13；
(3) 20.
2. 625.

四个全等的直角三角形和一个小正方形组成. 由此考虑以两直角边为边长的两个正方形连在一起的图形是否也由四个全等的直角三角形和一个正方形组成. 图 24.1-6 展示了图形切割拼接的过程，从而由图形的面积关系得到了勾股定理的证明.

赵爽，又名婴，字君卿，是我国三国时期杰出的数学家. 赵爽对《周髀算经》作了深入研究后作注写《勾股圆方图注》，其中的弦图相当于运用面积的出入相补证明了勾股定理. 而这个证明，又可以看成是对《周髀算经》中紧接在"勾三、股四、弦五"特例后的一段文字"既方之，外半其一矩，环而共盘，得成三、四、五. 两矩共长二十有五，是谓积矩"的诠释，这说明《周髀算经》的作者对勾股定理有清晰的理解. 赵爽对此书所作的注反映了赵爽本人的许多数学成就，对后世大有裨益.

5. 勾股定理有广泛应用，教科书安排了两个例题. 例 1 可以转化为求门框的对角线的长，也就是已知两直角边求斜边，从而用勾股定理解

勾股定理有广泛应用，下面我们用它解决几个问题.

例1 一个门框的尺寸如图24.1-7所示，一块长3 m，宽2.2 m的长方形薄木板能否从门框内通过？为什么？

分析： 可以看出，木板横着或竖着都不能从门框内通过，只能试试斜着能否通过. 门框对角线 AC 的长度是斜着能通过的最大长度. 求出 AC，再与木板的宽比较，就能知道木板能否通过.

图24.1-7

解： 在 Rt$\triangle ABC$ 中，根据勾股定理，

$AC^2=AB^2+BC^2=1^2+2^2=5$,

$AC=\sqrt{5}\approx 2.24$.

因为 AC 大于木板的宽2.2 m，所以木板能从门框内通过.

例2 如图24.1-8，一架2.6 m长的梯子 AB 斜靠在一竖直的墙 AO 上，这时 AO 为2.4 m. 如果梯子的顶端 A 沿墙下滑0.5 m，那么梯子底端 B 也外移0.5 m吗？

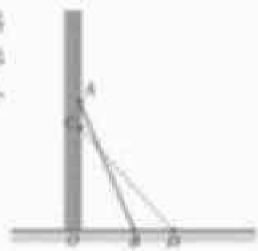


图24.1-8

解： 可以看出，$BD=OD-OB$.

在 Rt$\triangle AOB$ 中，根据勾股定理，

$OB^2=AB^2-OA^2=2.6^2-2.4^2=1$,

$OB=\sqrt{1}=1$.

在 Rt$\triangle COD$ 中，根据勾股定理，

$OD^2=CD^2-OC^2=2.6^2-(2.4-0.5)^2=3.15$,

$OD=\sqrt{3.15}\approx 1.77$,

$BD=OD-OB\approx 1.77-1=0.77$.

所以梯子的顶端沿墙下滑0.5 m时，梯子底端并不是也外移0.5 m，而是外移约0.77 m.

第二十四章 勾股定理 5

决. 例2涉及已知斜边和一直角边求另一直角边，也用勾股定理解决.

6. 在七年级下册的第十八章，通过画图探究得到过直角三角形全等的一个判定方法：“斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等.”在本节的例1和例2之后，教科书应用勾股定理证明了这一判定方法. 应用勾股定理容易证明另一条直角边也相等，这就可以用“边边边”的方法判定这两个直角三角形全等了.

7. 第6页的探究是在数轴上画出表示$\sqrt{13}$的点. 可分以下四步引导学生：

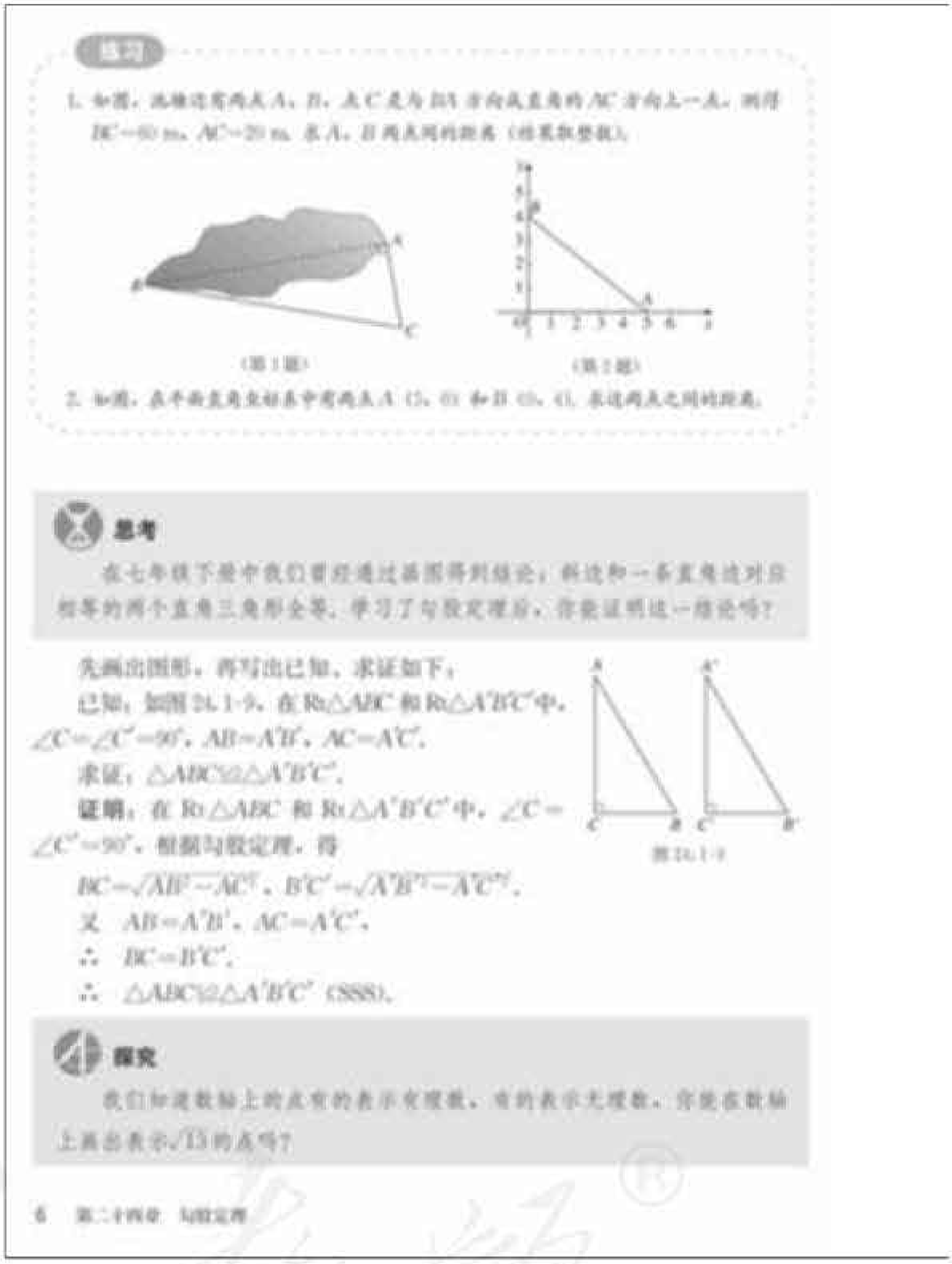
（1）将在数轴上画出表示$\sqrt{13}$的点的问题转化为画出长为$\sqrt{13}$的线段的问题；

（2）由长为$\sqrt{2}$的线段是直角边都为1的直角三角形的斜边，联想到长为$\sqrt{13}$的线段能否是直角边为正整数的直角三角形的斜边；

（3）通过尝试发现，长为$\sqrt{13}$的线段是直角

练习答案

1. 57 m.
2. $\sqrt{41}$.



练习

1. 如图，池塘边有两点 A，B，点 C 是与 BA 方向成直角的 AC 方向上一点. 测得 $BC=60$ m，$AC=20$ m. 求 A，B 两点间的距离（结果取整数）.

（第1题）　　（第2题）

2. 如图，在平面直角坐标系中有两点 A (5, 0) 和 B (0, 4). 求这两点之间的距离.

思考

在七年级下册中我们曾经通过画图得到结论：斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等. 学习了勾股定理后，你能证明这一结论吗？

先画出图形，再写出已知、求证如下：

已知：如图 24.1-9，在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90°$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

证明：在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90°$，根据勾股定理，得

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$，$B'C'=\sqrt{A'B'^2-A'C'^2}$.

又 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，

$\therefore$ $BC=B'C'$.

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (SSS).

图 24.1-9

探究

我们知道数轴上的点有的表示有理数，有的表示无理数. 你能在数轴上画出表示 $\sqrt{13}$ 的点吗？

6　第二十四章　勾股定理

边为 2，3 的直角三角形的斜边；

(4) 画出长为 $\sqrt{13}$ 的线段，从而在数轴上画出表示 $\sqrt{13}$ 的点.

应在此探究的基础上，结合图 24.1-11 和图 24.1-12 指出：利用勾股定理，可以作出长为 $\sqrt{n}$（n 是整数）的线段，进而在数轴上画出表示 $\sqrt{n}$（n 是整数）的点.

8. 勾股定理的应用很重要，一定要让学生熟练掌握在直角三角形中已知两边求第三边的方法. 不过，目前所掌握的知识工具很有限，因此只能解一些较简单的实际应用题.

如果能画出长为$\sqrt{13}$的线段，就能在数轴上画出表示$\sqrt{13}$的点．容易知道，长为$\sqrt{2}$的线段是两条直角边的长都为1的直角三角形的斜边．长为$\sqrt{13}$的线段能是直角边的长为正整数的直角三角形的斜边吗？

利用勾股定理，可以发现，长为$\sqrt{13}$的线段是直角边的长为正整数2，3的直角三角形的斜边．由此，可以依照如下方法在数轴上画出表示$\sqrt{13}$的点．[1]

图24.1-10

如图24.1-10，在数轴上找出表示3的点A，则OA＝3，过点A作直线l垂直于OA，在l上取点B，使AB＝2，以原点O为圆心，以OB为半径作弧，弧与数轴的交点C即为表示$\sqrt{13}$的点．

类似地，利用勾股定理，可以作出长为$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，…的线段（图24.1-11）．按照同样方法，可以在数轴上画出表示$\sqrt{1}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，…的点（图24.1-12）．

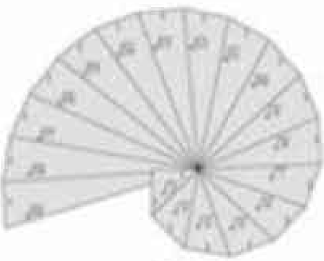
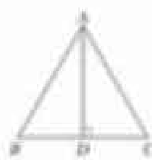


图24.1-11

图24.1-12

练习

1. 在数轴上作出表示$\sqrt{17}$的点．
2. 如图，等边三角形的边长是6．求：
   (1) 高AD的长；
   (2) 这个三角形的面积．



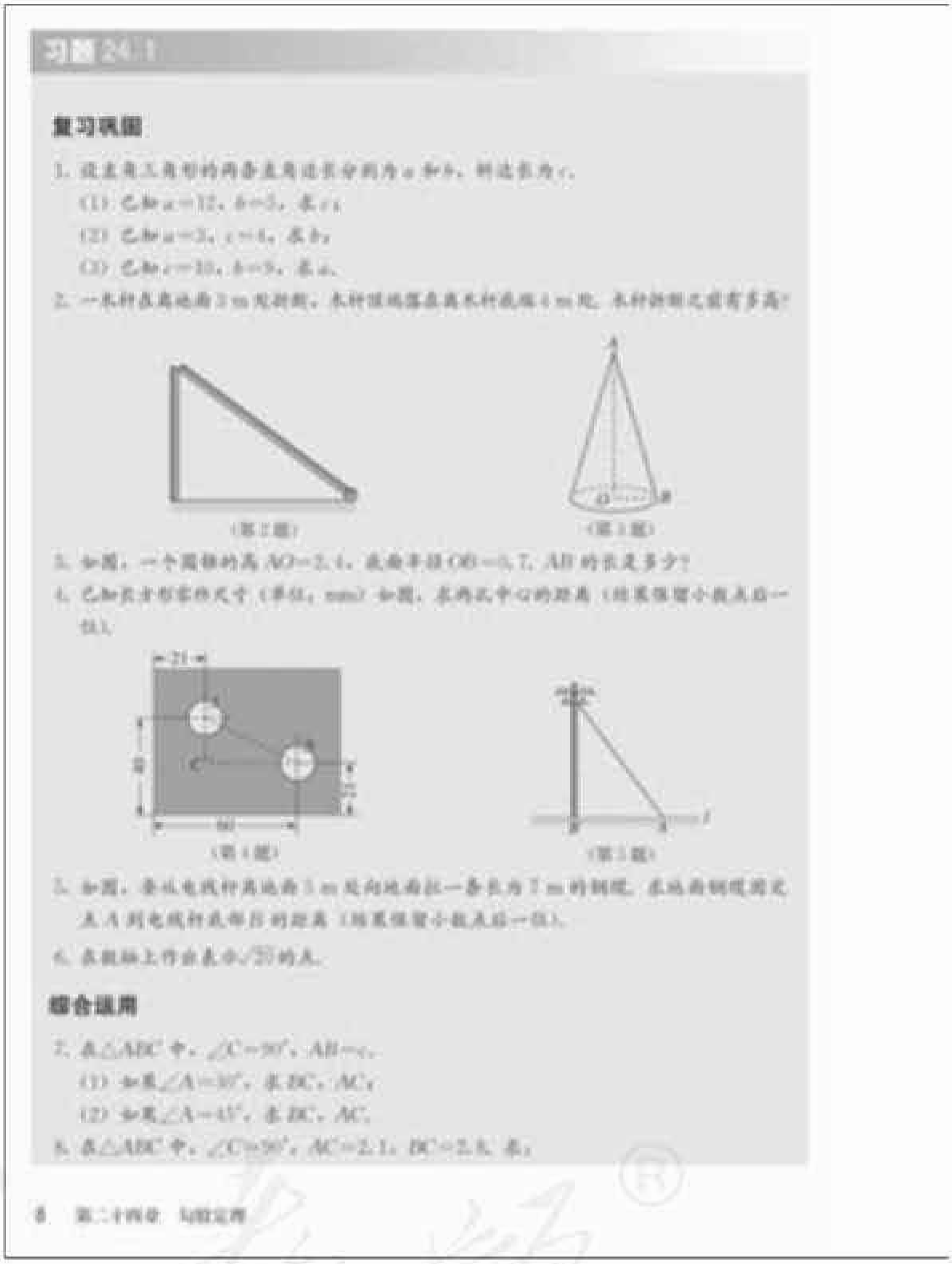
（第2题）

第二十四章　勾股定理　7

[1] 当直角边为正整数时，作图较方便．

练习答案

1. 略．
2. （1）$3\sqrt{3}$；
   （2）$9\sqrt{3}$．



习题 24.1

复习巩固

1. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b，斜边长为 c.

(1) 已知 $a=12$，$b=5$，求 c；

(2) 已知 $a=3$，$c=4$，求 b；

(3) 已知 $c=10$，$b=9$，求 a.

2. 一木杆在离地面 3 m 处折断，木杆顶端落在离木杆底端 4 m 处. 木杆折断之前有多高?

（第 2 题）　（第 3 题）

3. 如图，一个圆锥的高 $AO=2.4$，底面半径 $OB=0.7$. AB 的长是多少?

4. 已知长方形零件尺寸（单位：mm）如图，求两孔中心的距离（结果保留小数点后一位）.

（第 4 题）　（第 5 题）

5. 如图，要从电线杆离地面 5 m 处向地面拉一条长为 7 m 的钢缆. 求地面钢缆固定点 A 到电线杆底部 B 的距离（结果保留小数点后一位）.

6. 在数轴上作出表示 $\sqrt{17}$ 的点.

综合运用

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=c$.

(1) 如果 $\angle A=30°$，求 BC，AC；

(2) 如果 $\angle A=45°$，求 BC，AC.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=2.1$，$BC=2.8$. 求：

8　第二十四章　勾股定理

习题 24.1

1. 在第 1 题中，已知直角三角形的两条边，求第三条边，让学生运用勾股定理加以解决.

在第 2 题中，要先求出折断处和木杆顶部这段的长度.

第 3 题是已知圆锥的高和底面半径求母线的长，不必向学生提母线这个概念.

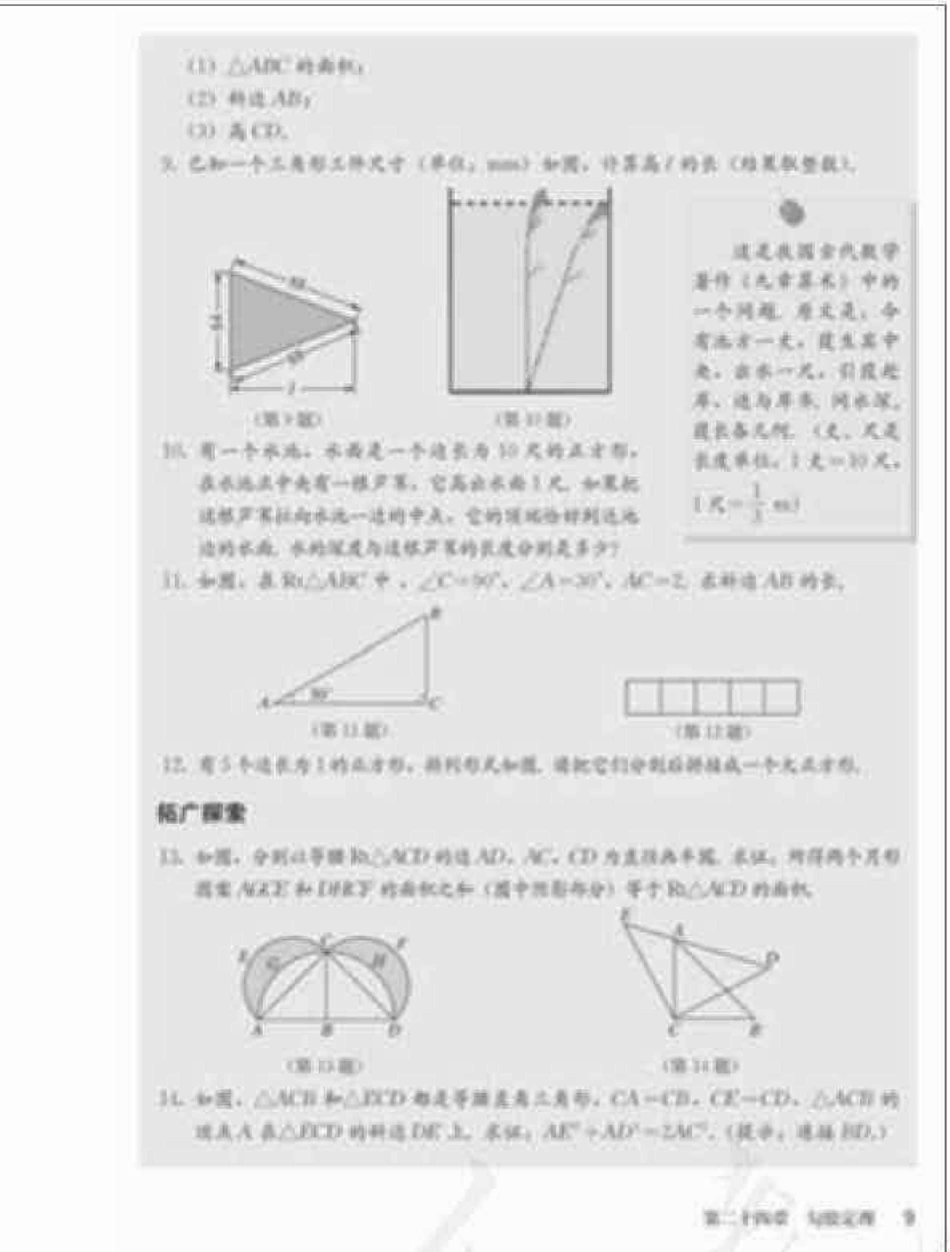
在第 4 题中，先求出 AC，BC 的长，再求 AB.

第 5 题实际上是已知直角三角形的斜边与一条直角边，求另一条直角边.

第 6 题和教科书第 6 页的“探究”有关.

2. 第 7 题的第 (1) 题首先让学生根据图形条件推出 $BC=0.5c$，在第 (2) 题中，可以推出图形实际上是等腰直角三角形，两条直角边相等，从而可以应用勾股定理解决.

在第 8 题中，由面积公式求出面积，由勾股


(1) $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 斜边 AB；

(3) 高 CD.

9. 已知一个三角形工件尺寸（单位：mm）如图，计算高 l 的长（结果取整数）.

（第9题）　（第10题）

10. 有一个水池，水面是一个边长为10尺的正方形，在水池正中央有一根芦苇，它高出水面1尺. 如果把这根芦苇拉向水池一边的中点，它的顶端恰好到达池边的水面. 水的深度与这根芦苇的长度分别是多少？

这是我国古代数学著作《九章算术》中的一个问题. 原文是：今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺. 引葭赴岸，适与岸齐. 问水深、葭长各几何.（丈、尺是长度单位，1丈=10尺，1尺=$\frac{1}{3}$ m.）

11. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AC=2$. 求斜边 AB 的长.

（第11题）　（第12题）

12. 有5个边长为1的正方形，排列形式如图. 请把它们分割后拼接成一个大正方形.

拓广探索

13. 如图，分别以等腰 Rt$\triangle ACD$ 的边 AD，AC，CD 为直径画半圆. 求证：所得两个月形图案 $AGCE$ 和 $DHCF$ 的面积之和（图中阴影部分）等于 Rt$\triangle ACD$ 的面积.

（第13题）　（第14题）

14. 如图，$\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，$CA=CB$，$CE=CD$，$\triangle ACB$ 的顶点 A 在 $\triangle ECD$ 的斜边 DE 上. 求证：$AE^2+AD^2=2AC^2$.（提示：连结 BD.）

第二十四章　勾股定理　9

定理求出斜边，再由$\frac{1}{2}$×斜边×斜边上的高=面积求出斜边上的高.

第 9 题实际是求等腰三角形底边上的高.

第 10 题可设水的深度为 x 尺，则芦苇的长度为$(x+1)$尺，可得 $x^2+5^2=(x+1)^2$. 解此方程求出水的深度，进而求出芦苇的长度.

第 11 题要先找边之间数量关系后，再应用勾股定理.

第 12 题应根据面积关系首先确定大正方形的边长，然后根据勾股定理得到分割的办法.

3. 第 13 题可以首先根据勾股定理得到：直角边上的两个半圆的面积的和，等于斜边上半圆的面积. 运用上述结论可以得出，阴影部分的面积就是直角三角形的面积.

第 14 题要应用勾股定理和全等三角形的判定方法以及等腰直角三角形的性质，有一定的综合性.

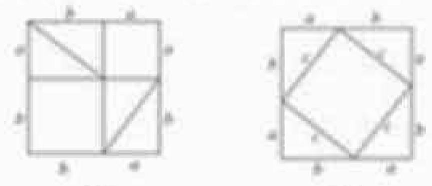
阅读与思考

勾股定理的证明

2 000 多年来，人们对勾股定理的证明颇感兴趣. 不但因为这个定理重要、基本，还因为这个定理贴近人们的生活实际，以至于古往今来，下至平民百姓，上至帝王总统都愿意探讨、研究它的证明，新的证法不断出现. 下面介绍几种用来证明勾股定理的图形，你能根据这些图形及提示证明勾股定理吗?

1. 传说中毕达哥拉斯的证法（图 1）

提示：(1) 中拼成的正方形与 (2) 中拼成的正方形面积相等.



(1) (2)

图 1

2. 赵爽的另一种证法（图 2）

提示：以斜边为边长的正方形的面积 + 4 个三角形的面积 = 大正方形的面积.

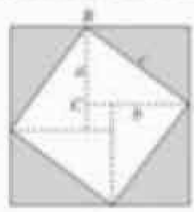


图 2

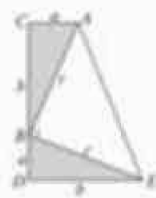


图 3

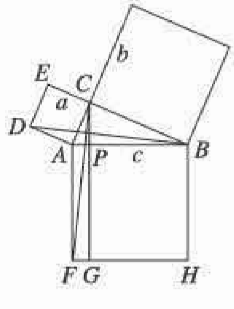
3. 美国第 20 任总统茄菲尔德的证法（图 3）

提示：3 个三角形的面积之和 = 梯形的面积.

阅读与思考

介绍勾股定理的多种证法，可以开拓学生的思路，提高学习的兴趣. 考虑到篇幅的限制，还有一种重要的证明方法没有列出，这就是《几何原本》中的证法. 下面简单介绍一下这种证法，供参考.

如图，正方形 $ACED$ 的面积等于 $2S_{\triangle ADB}$，$\triangle ADB \cong \triangle ACF$，$2S_{\triangle ACF}$ 等于长方形 $AFGP$ 的面积，所以 $a^2 = S_{长方形AFGP}$. 同理 $b^2 = S_{长方形GHBP}$. 因此 $a^2+b^2=c^2$.



24.2 勾股定理的逆定理

据说，古埃及人用图24.2-1的方法画直角：把一根长绳打上等距离的13个结，然后以3个结间距、4个结间距、5个结间距的长度为边长，用木桩钉成一个三角形，其中一个角便是直角.[1]

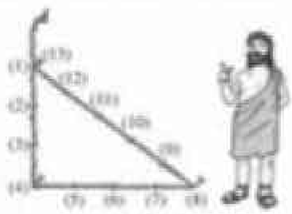


图24.2-1

相传，我国古代大禹治水测量工程时，也用类似方法确定直角.

这个问题意味着，如果围成的三角形的三边长分别为3，4，5，它们满足关系“$3^2+4^2=5^2$”，那么围成的三角形是直角三角形.

画画看，如果三角形的三边长分别为2.5 cm，6 cm，6.5 cm，它们满足关系“$2.5^2+6^2=6.5^2$”，画出的三角形是直角三角形吗？[2]换成三边分别为4 cm，7.5 cm，8.5 cm，再试一试.[3]

由上面的几个例子，我们猜想：

命题2　如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

我们看到，命题2与上节的命题1的题设、结论正好相反. 我们把像这样的两个命题叫做互逆命题. 如果把其中一个叫做**原命题**，那么另一个叫做它的**逆命题**. 例如，如果把命题1当成原命题，那么命题2是命题1的逆命题. 上节已证明命题1正确，能证明命题2正确吗？

命题1、命题2的题设、结论分别是什么？

在图24.2-2(1)中，已知△ABC的三边长分别为a，b，c，且满足$a^2+b^2=c^2$，要证△ABC一定是直角三角形，我们可以先画一个两

第二十四章　勾股定理　11

[1] 可以让学生照此办法实际操作.

[2] 画出的三角形是直角三角形.

[3] 画出的三角形也是直角三角形.

1. 把勾股定理的题设和结论交换，可以得到它的逆命题，本节证明了这个逆命题是一个真命题. 在这一对互逆定理中，勾股定理是直角三角形的一个性质定理，而其逆定理是直角三角形的一个判定定理. 本章又一次出现了性质定理和判定定理的关系. 要通过这两个定理的学习，使学生进一步加深对性质和判定之间关系的认识.

2. 勾股定理的逆定理所给出的判定一个三角形是直角三角形的方法，和前面学过的一些判定方法不同，它通过计算来作判断. 学生对利用计算证明几何结论比较陌生，实际上计算在几何中也是很重要的. 从数学方法这个意义上讲，学习勾股定理的逆定理，对拓展学生思维，进一步体会数学中的各种方法有很大的意义.

3. 勾股定理的逆定理的证明对学生来说是一个难点，证明方法学生不太容易想到，在教学中应该注意启发、引导. 勾股定理的逆定理的题设实际上是给出了三条边的条件，其形式和勾股

[1] 要强调，这三个数都是正整数时，才叫勾股数.

条直角边长分别为 a，b 的直角三角形。如果 $\triangle ABC$ 与这个直角三角形全等，那么 $\triangle ABC$ 就是一个直角三角形.

如图 24.2-2(2)，画一个 Rt$\triangle A'B'C'$，使 $B'C'=a$，$A'C'=b$，$\angle C'=90°$. 根据勾股定理，$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2$. 因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $A'B'=c$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$BC=a=B'C'$，$AC=b=A'C'$，$AB=c=A'B'$，所以 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 因此 $\angle C=\angle C'=90°$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

图 24.2-2

这样我们证明了勾股定理的逆命题是正确的，它也是一个定理. 我们把这个定理叫做**勾股定理的逆定理**. 它是判定直角三角形的一个依据.

一般地，原命题成立时，它的逆命题可能成立，也可能不成立. 如本章中的命题 1 成立，它的逆命题命题 2 也成立；命题“对顶角相等”成立，而它的逆命题“如果两个角相等，那么这两个角是对顶角”却不成立.

一般地，如果一个定理的逆命题经过证明是正确的，那么它也是一个定理，称这两个定理互为逆定理.

例 1 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形：

(1) $a=15$，$b=8$，$c=17$；

(2) $a=13$，$b=14$，$c=15$.

分析：根据勾股定理及其逆定理，判断一个三角形是不是直角三角形，只要看两条较小边长的平方和是否等于最大边长的平方.

解：(1) 因为 $15^2+8^2=225+64=289$，

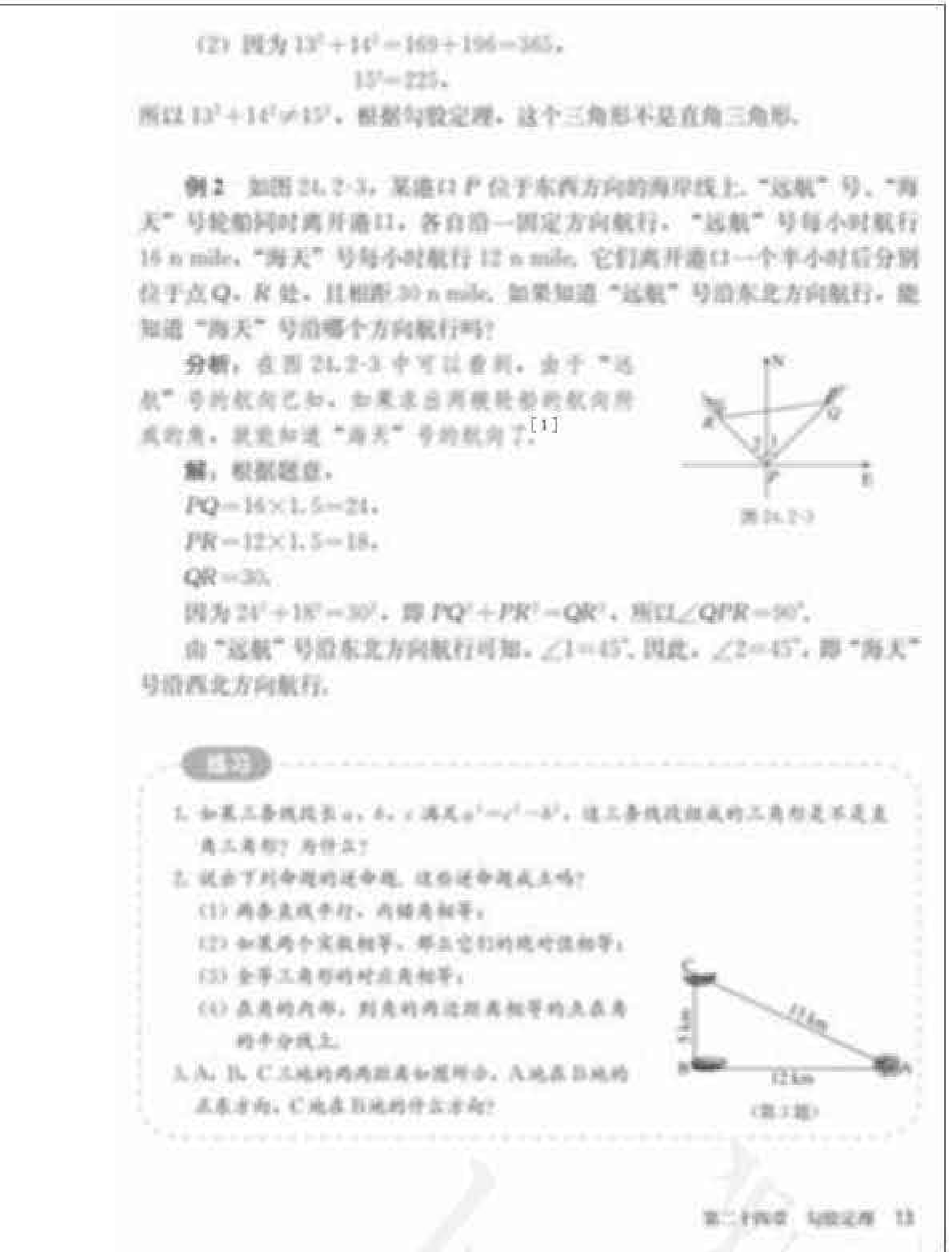
$$17^2=289,$$

所以 $15^2+8^2=17^2$，根据勾股定理的逆定理，这个三角形是直角三角形.

像 15，8，17 这样，能够成为直角三角形三条边长的三个正整数，称为勾股数.[1]

定理的结论形式一致，便想到去证明在此条件下的三角形也必然是一个直角三角形. 证明的途径是借助三角形全等，先作一个合适的直角三角形，然后证明有已知条件的三角形和此直角三角形全等. 在作此直角三角形时，应根据已经学过的三角形的作法，不可以直接要求既作三边分别等于 a，b，c，又有一个角是直角，这样条件太多不能保证作得出. 教科书中是用两边及其夹角作出直角三角形，也可以用斜边和直角边作直角三角形. 例如，作斜边为 c，一条直角为 a 的直角三角形，这时，利用勾股定理可以计算出另一条直角边长为 b. 这样，用“边边边”条件可得新作的三角形和原三角形全等，从而得出原三角形有一个角是直角.

4. 几何中有许多互逆的命题、互逆的定理，它们从正反两个方面揭示了图形的特征性质，所以互逆命题和互逆定理是几何中的重要概念. 学生已见过一些互逆的命题（定理），例如，“两直



(2) 因为 $13^2+14^2=169+196=365$，

$15^2=225$，

所以 $13^2+14^2\neq15^2$，根据勾股定理，这个三角形不是直角三角形.

例2 如图 24.2-3，某港口 P 位于东西方向的海岸线上. “远航”号、“海天”号轮船同时离开港口，各自沿一固定方向航行，“远航”号每小时航行 16 n mile，“海天”号每小时航行 12 n mile. 它们离开港口一个半小时后分别位于点 Q，R 处，且相距 30 n mile. 如果知道“远航”号沿东北方向航行，能知道“海天”号沿哪个方向航行吗？

分析：在图 24.2-3 中可以看到，由于“远航”号的航向已知，如果求出两艘轮船的航向所成的角，就能知道“海天”号的航向了.[1]

图 24.2-3

解：根据题意，

$PQ=16\times1.5=24$，

$PR=12\times1.5=18$，

$QR=30$.

因为 $24^2+18^2=30^2$，即 $PQ^2+PR^2=QR^2$，所以 $\angle QPR=90^\circ$.

由“远航”号沿东北方向航行可知，$\angle1=45^\circ$. 因此，$\angle2=45^\circ$，即“海天”号沿西北方向航行.

练习

1. 如果三条线段长 a，b，c 满足 $a^2=c^2-b^2$，这三条线段组成的三角形是不是直角三角形？为什么？
2. 说出下列命题的逆命题. 这些逆命题成立吗？
   (1) 两条直线平行，内错角相等；
   (2) 如果两个实数相等，那么它们的绝对值相等；
   (3) 全等三角形的对应角相等；
   (4) 在角的内部，到角的两边距离相等的点在角的平分线上.
3. A，B，C 三地的两两距离如图所示，A 地在 B 地的正东方向，C 地在 B 地的什么方向？

（第3题）

[1] E，N 分别表示东、北两个方向.

练习答案

1. 是. 由 $a^2=c^2-b^2$，可得 $a^2+b^2=c^2$，根据勾股定理的逆定理可判定是直角三角形.
2. (1) 内错角相等，两直线平行，成立；
   (2) 如果两个实数的绝对值相等，那么这两个实数相等，不成立；
   (3) 对应角相等的两个三角形全等，不成立；
   (4) 角平分线上的点到角的两边的距离相等，成立.
3. 正北方向.

线平行，内错角相等”和“内错角相等，两直线平行”，“全等三角形的对应边相等”和“对应边相等的三角形是全等三角形”等. 勾股定理和勾股定理的逆定理也是互逆的命题，而且这两个命题的题设和结论都比较简单. 因此，教科书在前面已有感性认识的基础上，结合勾股定理的逆定理提出了逆命题、逆定理的概念. 这些概念是第一次学习，不必要求过高，应注意把握适度的要求.

5. 在作图中可以应用勾股定理的逆定理确定直角. 在实际工作中需要在现场画出直角，本节开始介绍的方法既方便又可靠，很有实用价值.

[1] 可以利用这个结果找出许多组勾股数．例如，用 2，3，4 等大于 1 的整数代入 $3k$，$4k$，$5k$，得 6，8，10；9，12，15；12，16，20；等等．

习题 24.2

复习巩固

1. 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形：

(1) $a=7$，$b=24$，$c=25$；

(2) $a=\sqrt{41}$，$b=4$，$c=5$；

(3) $a=\frac{5}{4}$，$b=1$，$c=\frac{3}{4}$；

(4) $a=40$，$b=50$，$c=60$.

2. 下列各命题都成立，写出它们的逆命题．这些逆命题成立吗？

(1) 同旁内角互补，两直线平行；

(2) 如果两个角是直角，那么它们相等；

(3) 全等三角形的对应边相等；

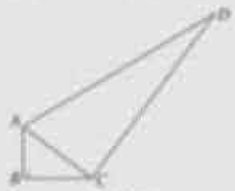
(4) 如果两个实数相等，那么它们的平方相等．

3. 小明向东走 80 m 后，沿另一方向又走了 60 m，再沿第三个方向走 100 m 回到原地．小明向东走 80 m 后是向哪个方向走的？

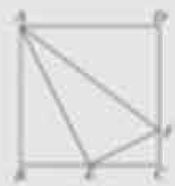
综合运用

4. 在△ABC 中，$AB=13$，$BC=10$，BC 边上的中线 $AD=12$．求 AC．

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$CD=12$，$AD=13$，$\angle B=90°$．求四边形 $ABCD$ 的面积．



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，F 是 CD 上一点，且 $CF=\frac{1}{4}CD$．求证 $\angle AEF=90°$．

拓广探索

7. 我们知道 3，4，5 是一组勾股数，那么 $3k$，$4k$，$5k$（k 是正整数）也是一组勾股数吗？[1] 一般地，如果 a，b，c 是一组勾股数，那么 ak，bk，ck（k 是正整数）也是一组勾股数吗？

14 第二十四章 勾股定理

习题 24.2

1. 第 1 题是已知三边判断一个三角形是否直角三角形，要运用勾股定理及其逆定理．

第 2 题复习巩固逆命题的概念．

第 3 题确定行走方向，要用勾股定理的逆定理计算角度．

2. 在第 4 题中，由 $AB=13$，$BD=5$，$AD=12$，可得 $\angle ADB=90°$．因此，$\angle ADC=90°$．以下有两种方法求 AC：一种是在 Rt△ADC 中，用勾股定理求 AC；另一种是由 Rt△ADC≌Rt△ADB 得 $AC=AB=13$．

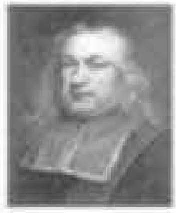
第 5，6 题都是综合运用勾股定理和它的逆定理来解决的几何问题．

3. 由第 7 题的结论，我们可以由一组勾股数找出多组勾股数．以后我们还可以由三角形相似得出这个结论．

阅读与思考

费马大定理[1]

根据勾股定理，任意直角三角形的两条直角边长 a，b 和斜边长 c 都是含三个未知数的方程 $x^2+y^2=z^2$ 的一组解。而每一组勾股数（例如，3，4，5；5，12，13；等）都是这个方程的正整数解。



费马（P. de Fermat，1601—1665）

高于二次的方程 $x^3+y^3=z^3$，$x^4+y^4=z^4$，$x^5+y^5=z^5$，…是否也有正整数解呢？这个问题引起了法国数学家费马的研究兴趣。费马在读古希腊数学家丢番图的《算术》一书时，在有方程 $x^2+y^2=z^2$ 的那页页边上，写下了具有历史意义的一段文字：“……将一个高于二次的幂分为两个同次的幂，这是不可能的。关于此，我确信已发现了一种美妙的证法，可惜这里空白的地方太小，写不下。”用数学语言来表述，费马的结论就是：当自然数 $n\geq3$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解。

上述命题被称为“费马大定理”。它的证明引起了世界各国数学家的关注，包括欧拉、高斯、勒贝格在内的许多著名数学家都对这个命题作了深入的研究，但一直没能证明它。对费马大定理的研究给数学界带来了很大的影响，很多数学成果，甚至数学分支在这个过程中诞生。费马大定理也因此被数学界称为是一只“会下金蛋的鹅”。

怀尔斯（A. Wiles，1953— ）

费马大定理的证明最终由英国数学家怀尔斯完成。怀尔斯在童年时代就梦想能证明费马大定理，后来为此作了长期的智力和准备。1986年，他发现了定理证明的一种可能的途径，就开始全力以赴地投入到定理的证明中。1993年6月，怀尔斯在英国剑桥大学的学术讨论会上报告了他的研究成果，立即引起了全世界数学家和数学爱好者的关注。在这以后，他又用了一年多的时间补证了专家小组发现的证明中的疏漏，并最终于1995年彻底完成了证明。这个有300多年历史的数学难题终于得到解决。1996年3月，怀尔斯因为他的这一杰出数学成就荣获沃尔夫奖，并于1998年8月荣获菲尔兹特别奖。费马大定理的证明被称为“世纪性的成就”，并被列入1995年的世界科技十大成就之一。

第二十四章　勾股定理　15

[1] 费马大定理可以看成是从勾股数组引出的类比、推广后的数学问题. 类比、推广方法有助于培养学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力.

阅读与思考

费马大定理是一个困扰数学家300多年的数学难题，在解决这一数学难题的过程中，反映了一代代数学家艰苦探索、不屈不挠的科学精神和在探索过程中的聪明智慧，有一定的思想教育价值，有利于培养学生对数学的兴趣，培养勇于探索、艰苦奋斗的科学精神和对科学的献身精神.

怀尔斯在童年时代就有证明费马大定理的梦想，并为此进行了长期探索和研究，考虑到篇幅所限，这一题材的一些动人故事没有写入，教学中可以参考有关材料作适度拓展.

数学活动

活动1

如图1，学校需要测量旗杆的高度．同学们发现系在旗杆顶端的绳子垂到了地面，并多出了一段，但这条绳子的长度未知．请你应用勾股定理提出一个解决这个问题的方案，并与同学交流．

图1

活动2

用四张全等的直角三角形纸片拼含有正方形的图案，要求拼图时直角三角形纸片不能互相重叠．以下各图是按要求拼出的几个图案，请你再给出几种不同拼法．

图2

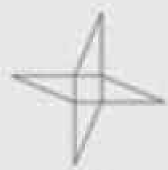


图3

图4

设直角三角形的两条直角边长分别为 a，b，斜边长为 c．试用两种不同方法计算图2中大正方形（或小正方形）的面积，从中你发现勾股定理的证明方法了吗？在拼出的其他图案中再试一试，看看在哪些图案中能用类似的方法证明勾股定理．

请你从有关书籍或互联网上再找一些证明勾股定理的方法，并与同学交流．

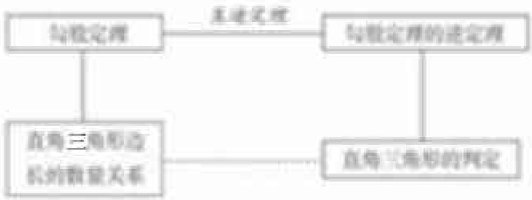
1．“活动1”要求解决一个测量问题，可以应用勾股定理，通过列方程加以解决．

2．“活动2”要求拼出类似于赵爽弦图的图案，并进一步借助图案去证明勾股定理．对于图2的大的正方形的面积，可以直接用正方形的面积公式写出一个算式，也可以用四个直角三角形的面积，加内部以直角三角形的斜边为边长的小正方形的面积写出一个算式，列出等式即可证得勾股定理．

勾股定理是初等几何中一个非常重要的定理．长期以来，人们对它进行了大量的研究，找到了许多不同的证明方法．目前世界上已经发现的证法有几百种，可以让学生搜集并研究其中的一些方法，这会有助于提高学生学习数学的兴趣和信心．

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

直角三角形是特殊的三角形，它的三边之间有特殊的数量关系．本章我们通过对面积关系的探究，发现并证明了勾股定理．勾股定理是数学中最重要的定理之一，它反映了直角三角形三边之间的数量关系，不仅在解决与直角三角形相关的问题时很有用，而且在解决其他许多数学问题时也很有用．借助于图形的面积研究相关的数量关系，是我国古代数学研究中经常采用的重要方法，它充分显示了古人的卓越智慧．

得到一个数学结论后，经常要研究其逆命题是否成立．一般地，原命题成立，逆命题未必成立，而勾股定理的逆命题是一个定理．勾股定理的逆定理提供了直角三角形的一种判定方法．勾股定理及其逆定理，从相反的路径对直角三角形进行了刻画．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 直角三角形三边的长有什么特殊的关系？

2. 赵爽证明勾股定理运用了什么思想方法？

3. 已知一个三角形的三边长，怎样判断它是不是直角三角形？你作判断的依据是什么？

4. 证明勾股定理的逆定理运用了什么方法？

5. 一个命题成立，它的逆命题未必成立，请举例说明．

第二十四章　勾股定理　17

1. 本章的主要内容是勾股定理及其逆定理．在小结时，可以让学生回顾勾股定理的探索过程，复习巩固运用勾股定理解决简单问题的方法．勾股定理是直角三角形的一条重要性质，还可以让学生把以前所学的直角三角形的有关内容加以总结．勾股定理的逆定理给出了判定直角三角形的一种方法，要让学生切实掌握．

2. 本章中给出了定理、逆定理的概念，可以在小结时结合已学的一些结论来进一步体会，以加深认识．例如，“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”和“到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”这两个结论，前一个称为角的平分线的性质定理，后一个结论是角的平分线的性质定理的逆定理．这样就可以从定理、逆定理的角度认识已学的一些结论，明确结论之间的关系．

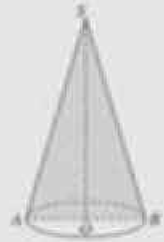
[1] 即求 AC.

复习题 24

复习巩固

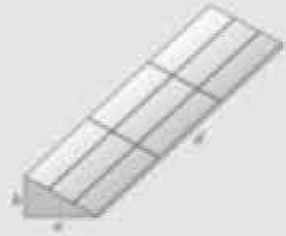
1. 两人从同一地点同时出发，一人以 20 m/min 的速度向北直行，一人以 30 m/min 的速度向东直行. 10 min 后他们相距多远（结果取整数）?

2. 如图，过圆锥的顶点 S 和底面圆的圆心 O 的平面截圆锥得截面 $\triangle SAB$，其中 $SA=SB$，AB 是圆锥底面圆 O 的直径. 已知 $SA=7$ cm，$AB=4$ cm，求截面 $\triangle SAB$ 的面积.



（第 2 题）

（第 3 题）



（第 4 题）

3. 如图，车床齿轮箱壳要钻两个圆孔，两孔中心的距离是 134 mm，两孔中心的水平距离是 77 mm. 计算两孔中心的垂直距离[1]（结果保留小数点后一位）.

4. 如图，要修一个育苗棚，棚的横截面是直角三角形，棚宽 $a=3$ m，高 $b=1.5$ m，长 $d=10$ m，求覆盖在顶上的塑料薄膜需多少平方米（结果保留小数点后一位）.

5. 一个三角形三边的比为 $1:\sqrt{3}:2$，这个三角形是直角三角形吗?

6. 下列各命题都成立，写出它们的逆命题. 这些逆命题成立吗?

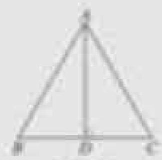
(1) 两条直线平行，内错角相等；

(2) 如果两个实数都是正数，那么它们的积是正数；

(3) 等边三角形是锐角三角形；

(4) 线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

7. 已知直角三角形的两条直角边的长分别为 $2\sqrt{3}+1$ 和 $2\sqrt{3}-1$，求斜边 c 的长.



（第 8 题）

综合运用

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=BC$，高 $AD=a$，求 AB.

18 第二十四章 勾股定理

复习题 24

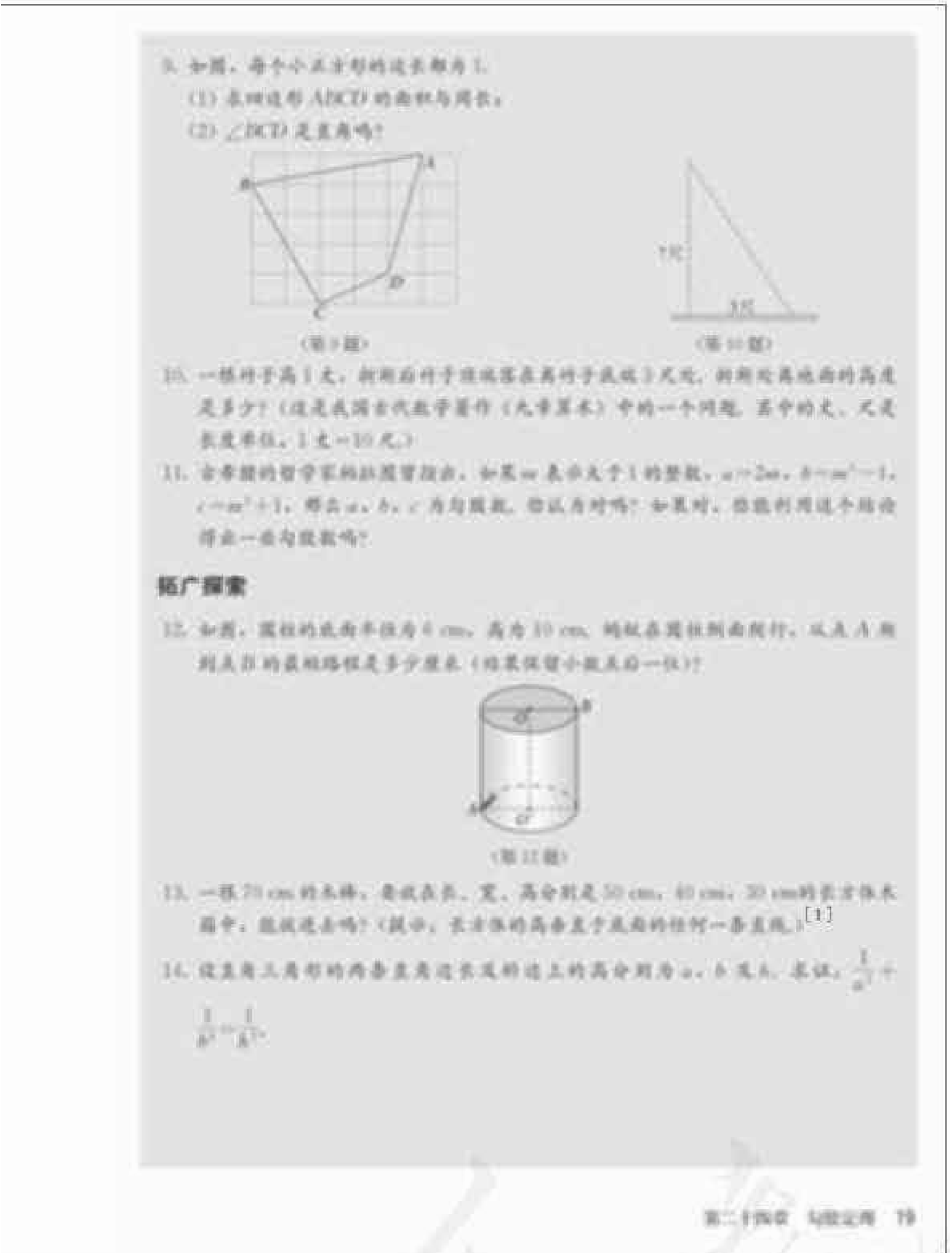
1. 第 1～7 题复习巩固本章所学的有关内容.

2. 第 8 题是根据等边三角形中边的关系，运用勾股定理加以解决.

在第 9 题中，面积可由一个长方形面积减去三个三角形和一个梯形的面积得到. 运用勾股定理可求得四边形 $ABCD$ 各边的长，从而得周长. 在 $\triangle BCD$ 中，运用勾股定理的逆定理可判定 $\angle BCD$ 是直角.

在第 10 题中，设折断处离地面的高度为 x 尺，由题意可得 $x^2+3^2=(10-x)^2$，解这个方程得所求高度.

第 11 题涉及勾股数组问题，这是一种重要的数组，常用的勾股数组应熟记. 找勾股数组当然可以用试验的方法，实际上，人们已经发现了一些求勾股数组的公式，用这种公式很容易找出许多勾股数组，如本题的结论就是一个常用的公式.



9. 如图，每个小正方形的边长都为 1.

(1) 求四边形 ABCD 的面积与周长；

(2) $\angle BCD$ 是直角吗？

（第 9 题）　　（第 10 题）

10. 一根竹子高 1 丈，折断后竹子顶端落在离竹子底端 3 尺处．折断处离地面的高度是多少？（这是我国古代数学著作《九章算术》中的一个问题．其中的丈、尺是长度单位，1 丈 = 10 尺．）

11. 古希腊的哲学家柏拉图曾指出，如果 m 表示大于 1 的整数，$a=2m$，$b=m^2-1$，$c=m^2+1$，那么 a，b，c 为勾股数．你认为对吗？如果对，你能利用这个结论得出一些勾股数吗？

拓广探索

12. 如图，圆柱的底面半径为 6 cm，高为 10 cm，蚂蚁在圆柱侧面爬行，从点 A 爬到点 B 的最短路程是多少厘米（结果保留小数点后一位）？

（第 12 题）

13. 一根 70 cm 的木棒，要放在长、宽、高分别是 50 cm，40 cm，30 cm的长方体木箱中，能放进去吗？（提示：长方体的高垂直于底面的任何一条直线．）[1]

14. 设直角三角形的两条直角边长及斜边上的高分别为 a，b 及 h．求证：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$．

第二十四章　勾股定理　19

[1] 由此可得，长方体的高垂直于底面的对角线，进而运用勾股定理.

3. 在第 12 题中，借助圆柱的侧面展开图可求得最短路程.

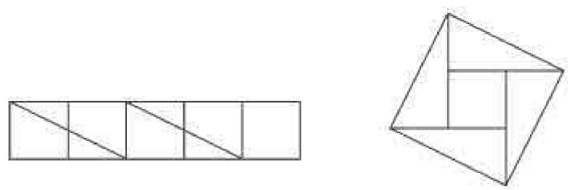
在第 13 题中，以长方体的高和底面的对角线为直角边的直角三角形的斜边长，是能够放入的最大长度（即长方体的对角线长，不必向学生提出这个概念）. 先用勾股定理求出底面的对角线长，再用勾股定理求出长方体的对角线长，并和已知木棒的长度进行比较，得出结论.

第 14 题的结论是直角三角形的一个基本结论，可以应用勾股定理、面积公式加以证明.

Ⅲ 习题解答

习题 24.1

1. (1) 13；(2) $\sqrt{7}$；(3) $\sqrt{19}$.
2. 8 m.
3. 2.5.
4. 43.4 mm.
5. 4.9 m.
6. 略.
7. (1) $BC=\frac{1}{2}c$，$AC=\frac{\sqrt{3}}{2}c$；(2) $BC=\frac{\sqrt{2}}{2}c$，$AC=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.
8. (1) 2.94；　(2) 3.5；　(3) 1.68.
9. 82 mm.
10. 12 尺，13 尺.
11. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.
12. 分割方法和拼接方法分别如图（1）和图（2）所示.



(1)　　(2)

（第 12 题）

13. $S_{半圆AEC}=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi\cdot AC^2$，$S_{半圆CFD}=\frac{1}{8}\pi\cdot CD^2$，$S_{半圆ACD}=\frac{1}{8}\pi\cdot AD^2$.

因为$\angle ACD=90°$，根据勾股定理得 $AC^2+CD^2=AD^2$，所以

$S_{半圆AEC}+S_{半圆CFD}=S_{半圆ACD}$.

$S_{阴影}=S_{\triangle ACD}+S_{半圆AEC}+S_{半圆CFD}-S_{半圆ACD}$，

即 $S_{阴影}=S_{\triangle ACD}$.

14. 证法 1：如图（1），连接 BD.

$\because$ $\triangle ECD$ 和$\triangle ACB$ 都为等腰直角三角形，且 $CE=CD$，$CA=CB$，

$\therefore$ $\angle ECD=\angle ACB=90°$.

$\therefore$ $\angle ECA=\angle DCB$.

$\therefore$ $\triangle ACE\cong\triangle DCB$.

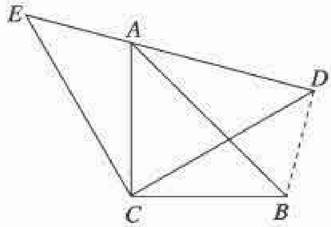
$\therefore$ $AE=DB$，$\angle CDB=\angle E=45°$.

又 $\angle EDC=45^{\circ}$，

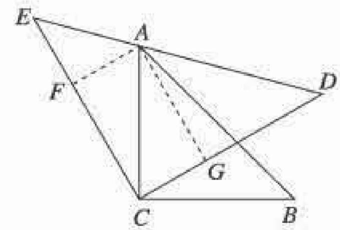
∴ $\angle ADB=90^{\circ}$.

在 Rt$\triangle ADB$ 中，$AD^2+DB^2=AB^2$，得 $AD^2+AE^2=AC^2+CB^2$，

即 $AE^2+AD^2=2AC^2$.



(1)



(2)

(第 14 题)

证法 2：如图 (2)，作 $AF\perp EC$，$AG\perp CD$，由条件可知，$AG=FC$.

在 Rt$\triangle AFC$ 中，根据勾股定理得 $AF^2+FC^2=AC^2$.

∴ $AF^2+AG^2=AC^2$.

在等腰 Rt$\triangle AFE$ 和等腰 Rt$\triangle AGD$ 中，由勾股定理得

$AF^2+FE^2=AE^2$，$AG^2+GD^2=AD^2$.

又 $AF=FE$，$AG=GD$，

∴ $2AF^2=AE^2$，$2AG^2=AD^2$.

而 $2AF^2+2AG^2=2AC^2$，

∴ $AE^2+AD^2=2AC^2$.

习题 24.2

1. (1) 是；(2) 是；(3) 是；(4) 不是.
2. (1) 两直线平行，同旁内角互补. 成立.
   (2) 如果两个角相等，那么这两个角是直角. 不成立.
   (3) 三条边对应相等的三角形全等. 成立.
   (4) 如果两个实数的平方相等，那么这两个实数相等. 不成立.
3. 向北或向南.
4. 13.
5. 36.
6. 设 $AB=4k$，则 $BE=CE=2k$，$CF=k$，$DF=3k$.

   ∵ $\angle B=90^{\circ}$，

   ∴ $AE^2=(4k)^2+(2k)^2=20k^2$.

   同理，$EF^2=5k^2$，$AF^2=25k^2$.

   ∴ $AE^2+EF^2=AF^2$.

   根据勾股定理的逆定理，$\triangle AEF$ 为直角三角形.

$\therefore\ \angle AEF=90^\circ$.

7. 因为 $(3k)^2+(4k)^2=9k^2+16k^2=25k^2=(5k)^2$，

所以 $3k$，$4k$，$5k$（k 是正整数）为勾股数.

如果 a，b，c 为勾股数，即 $a^2+b^2=c^2$，那么

$(ak)^2+(bk)^2=a^2k^2+b^2k^2=(a^2+b^2)k^2=c^2k^2=(ck)^2$.

因此，ak，bk，ck（k 是正整数）也是勾股数.

复习题 24

1. 361 m.
2. $6\sqrt{5}$ cm^2.
3. 109.7 mm.
4. 33.5 m^2.
5. 设这个三角形三边为 k，$\sqrt{3}k$，$2k$，其中 $k>0$. 由于 $k^2+(\sqrt{3}k)^2=4k^2=(2k)^2$，根据勾股定理的逆定理，这个三角形是直角三角形.
6. (1) 同位角相等，两直线平行. 成立.

(2) 如果两个实数的积是正数，那么这两个实数是正数. 不成立.

(3) 锐角三角形是等边三角形. 不成立.

(4) 与一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上. 成立.

7. $\sqrt{26}$.
8. $\frac{2}{3}\sqrt{3}h$.
9. (1) 14.5，$3\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{26}$；

(2) 由 $BC=\sqrt{20}$，$CD=\sqrt{5}$，$BD=5$，可得 $BC^2+CD^2=BD^2$. 根据勾股定理的逆定理，$\triangle BCD$ 是直角三角形，因此$\angle BCD$ 是直角.

10. 4.55 尺.
11. 因为

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(2m)^2+(m^2-1)^2\\&=4m^2+m^4-2m^2+1\\&=m^4+2m^2+1=(m^2+1)^2=c^2,\end{aligned}$$

所以 a，b，c 为勾股数.

用 $m=2$，3，4 等大于 1 的整数代入 $2m$，m^2-1，m^2+1，得 4，3，5；6，8，10；8，15，17；等等.

12. 21.3 cm.
13. 能.
14. 由直角三角形的面积公式，得 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}h\sqrt{a^2+b^2}$，等式两边平方得 $a^2b^2=h^2(a^2+b^2)$，等式

两边再同除以 $a^2b^2h^2$，得$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$，即$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$.

Ⅳ 教学设计案例

24.1 勾股定理（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

勾股定理的探究、证明及简单应用.

2. 内容解析

勾股定理：直角三角形两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$. 勾股定理是中学数学重要定理之一，它揭示了直角三角形三边之间的数量关系. 由此，在直角三角形中已知任意两边长，就可以求出第三边长. 勾股定理常用来求解线段长度或距离问题.

勾股定理的探究是从特殊的等腰直角三角形出发，到网格中直角三角形，再到一般的直角三角形，体现了从特殊到一般的探究过程和研究方法. 证明勾股定理的关键是利用割补法求以斜边为边长的正方形的面积，并以此引导学生发现证明勾股定理的思路.

我国对勾股定理的研究和其他国家相比是比较早的，在国际上得到肯定. 要通过我国古代研究勾股定理的成就的介绍，培养学生的民族自豪感；要通过对勾股定理的探索和发现，培养学生学好数学的自信心.

基于以上分析，可以确定本节课的教学重点是：探索并证明勾股定理.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 经历勾股定理的探究过程. 了解关于勾股定理的一些文化历史背景，通过对我国古代研究勾股定理的成就的介绍，培养学生的民族自豪感.

(2) 能用勾股定理解决一些简单问题.

2. 目标解析

目标 (1) 要求学生先观察以直角三角形的三边为边长的正方形面积之间的关系，通过归纳和合理的数学表示发现勾股定理的结论. 理解赵爽弦图的意义及其证明勾股定理的思路，能通过割补法构造图形证明勾股定理. 了解勾股定理相关的史料，知道我国古代在研究勾股定理上的杰出成就.

目标(2) 要求学生能运用勾股定理进行简单的计算，重点是已知直角三角形的两边长能求第三条边的长度.

三、教学问题诊断分析

勾股定理是关于直角三角形三边关系的一个特殊的结论. 在正方形网格中比较容易发现以等腰直角三角形三边为边长的正方形的面积关系，进而得出三边之间的关系. 但要从等腰直角三角形过渡到网格中的一般直角三角形，提出合理的猜想，学生有较大困难. 学生第一次尝试用构造图形的方法来证明定理存在较大的困难，解决问题的关键是要想到用合理的割补方法求以斜边为边的正方形的面积. 因此，在教学中需要先引导学生观察网格背景下的正方形的面积关系，然后思考去网格背景下的正方形的面积关系，再把这种关系表示成边长之间的关系，这有利于学生自然合理地发现和证明勾股定理.

本节课的教学难点是：勾股定理的探究和证明.

四、教学支持条件分析

借助《几何画板》软件，动态地演示三角形从网格中的等腰直角三角形，到网格中的一般直角三角形，再到去网格背景的直角三角形的变化过程，启发学生考虑用割补法求正方形的面积.

五、教学过程设计

1. 创设问题情境

引言

前面我们共同学习了三角形以及等腰三角形的有关内容，知道等腰三角形是两边相等的特殊的三角形，它有许多特殊的性质. 研究特例是数学研究的一个方向，直角三角形是有一个角为直角的特殊三角形，它有哪些特殊的性质呢？让我们一起研究吧！

问题 1 国际数学家大会是最高水平的全球性数学学科学术会议，被誉为数学界的“奥运会”. 2002 年在北京召开了第 24 届国际数学家大会. 图 1 就是大会会徽的图案. 你见过这个图案吗？它由哪些我们学习过的基本图形组成？这个图案有什么特别的含义？

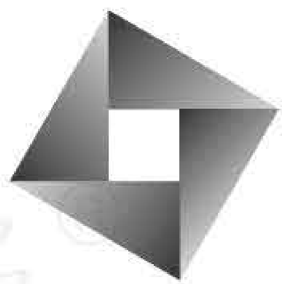


图 1

师生活动：教师引导学生寻找图形中的直角三角形、正方形等，并说明直角三角形的全等的关系，指出通过今天的学习，就能理解会徽图案的含义.

设计意图：本节课是本章的起始课，重视引言教学，从国际数学家大会的会徽说起，设置悬念，引入课题.

2. 探究勾股定理

问题 2 看似平淡无奇的现象有时却隐含着深刻的数学道理. 相传 2 500 多年前，毕达哥拉斯有一次在朋友家作客，发现朋友家用地砖铺成的地面（图 2）反映了直角三角形三边的某种数量关系. 三个正方形 A，B，C 的面积有什么关系？

师生活动：学生独立观察图形，分析、思考其中隐含的规律. 通过直接数等腰直角三角形的个数，或者用割补的方法将小正方形 A，B 中的等腰直角三角形补成一个大正方形，得到结论：小正

方形 A，B 的面积之和等于大正方形 C 的面积.

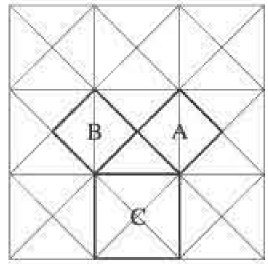


图 2

追问：由这三个正方形 A，B，C 的边长构成的等腰直角三角形三条边长之间有怎样的特殊关系？

师生活动：教师引导学生直接由正方形的面积等于边长的平方，归纳出：等腰直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

设计意图：从最特殊的直角三角形入手，通过观察正方形面积关系得到三边关系，并进行初步的一般化（等腰三角形边长的一般化）.

问题 3 在网格中的一般的直角三角形（图 3），以它的三边为边长的三个正方形 A，B，C 是否也有类似的面积关系？（在图 3 的方格纸中，每个小方格的面积均为 1.）

师生活动：分别求出 A，B，C 的面积并寻找它们之间的关系.

追问：正方形 A，B，C 所围成的直角三角形三条边之间有怎样的特殊关系？

师生活动：学生独立思考后小组讨论，难点是求以斜边为边长的正方形面积，可由师生共同总结得出可以通过割、补两种方法求出其面积，如图 4，图 5 所示. 教师在学生回答的基础上归纳方法——割补法. 可以求得 C 的面积为 13，教师引导学生直接由正方形的面积等于边长的平方归纳出：直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

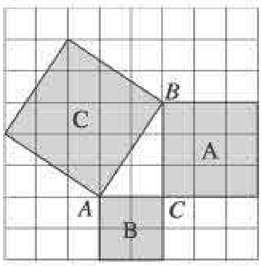


图 3

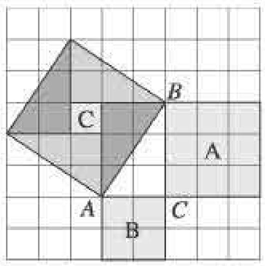


图 4

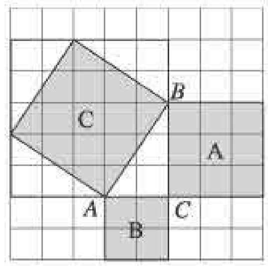


图 5

设计意图：网格中的直角三角形也是直角三角形一种特殊情况，为计算方便，通常将直角边长设定为整数. 进一步体会面积割补法，为探究无网格背景下直角三角形三边关系打下基础，提供方法.

问题 4 通过前面的探究活动，猜一猜，直角三角形三边之间应该有什么关系？

师生活动：教师引导学生得到猜想：如果直角三角形两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.

设计意图：在网格背景下，通过观察和分析等腰直角三角形及一般的直角三角形三边关系，为形成猜想提供了典型特例，于是猜想的形成变得水到渠成.

问题 5 以上这些直角三角形的边长都是具体的数值. 一般情况下，如果直角三角形的两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，如图 6 所示，刚刚提出的猜想仍然正确吗？

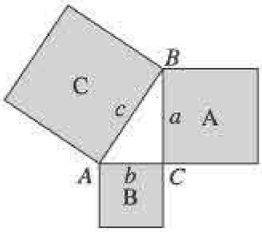


图 6

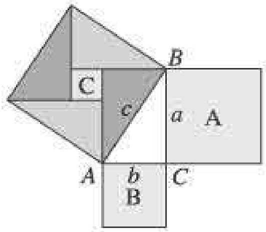


图 7

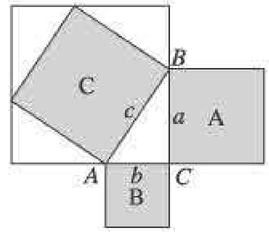


图 8

师生活动：学生通过独立思考，用 a，b 表示 c 的面积. 如图 7，用“割”的方法可得 $c^2=\frac{1}{2}ab\times4+(a-b)^2$；如图 8，用“补”的方法可得 $c^2=(b+a)^2-\frac{1}{2}ab\times4$. 经过整理都可以得到 $a^2+b^2=c^2$，即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

设计意图：从网格验证到脱离网格，通过计算推导出一般结论.

问题 6 历史上所有的文明古国对勾股定理都有研究. 下面我们看看历史上我国的数学家对勾股定理的研究，并通过小组合作完成课本拼图法证明勾股定理.

师生活动：教师展示图 9，并介绍：这个图案是 3 世纪三国时期的赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为赵爽弦图. 赵爽根据此图指出：四个全等的直角三角形（朱实）可以如图围成一个大正方形，中间的部分是一个小正方形（黄实）. 我们刚才用割的方法证明使用的就是这个图形. 教师介绍勾股定理相关史料，勾股定理的证明方法据说有 400 多种，有兴趣的同学可以继续研究.

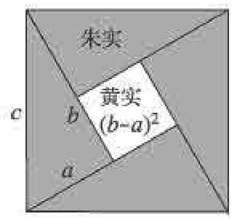


图 9

设计意图：通过拼图活动，调动学生思维的积极性，为学生提供从事数学活动的机会，发展学生的形象思维；使学生对定理的理解更加深刻，体会数学中数形结合思想. 通过对赵爽弦图的介绍，了解我国古代数学家对勾股定理的发现及证明作出的贡献，增强民族自豪感. 通过了解勾股定理的证明方法，增强学生学习数学的自信心.

3. 初步应用，巩固新知

练习 1 求图 10 至图 12 中字母所代表的正方形的面积.

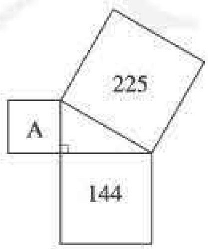


图 10

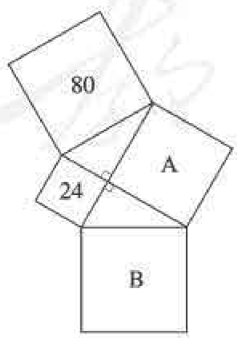


图 11

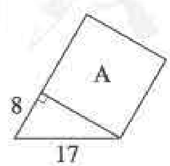


图 12

设计意图：学生应掌握三个正方形的面积关系，以及能将正方形的面积关系和直角三角形三边

之间的关系进行联系.

练习 2 图 13 中所有的三角形都是直角三角形，四边形都是正方形. 已知正方形 A，B，C，D 的边长分别是 12，16，9，12，求最大正方形 E 的面积.

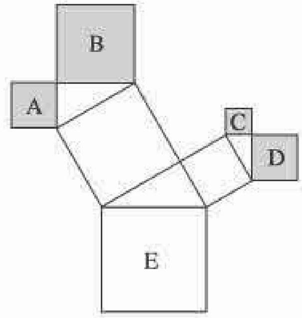


图 13

设计意图：本题是课本第 4 页练习第 2 题，进一步体会以直角三角形三边为边长的正方形的面积关系. 通过《几何画板》软件演示多层分形结构，感受数学美.

练习 3 求出图 14 中两个直角三角形未知边的长度.

设计意图：在直角三角形中，已知两边，求第三边，应用勾股定理求解. 也可建立方程解决问题，渗透方程思想.

练习 4 小明妈妈买了一部 74 cm（即 29 英寸）的电视机. 小明量了电视机的屏幕后，发现屏幕的长和宽分别只有 58 cm，46 cm，他觉得一定是售货员搞错了. 你同意他的想法吗？你能解释这是为什么吗？

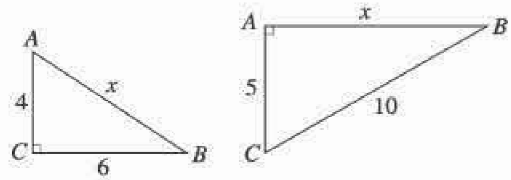


图 14

设计意图：通过实际生活的应用，感受数学来源于生活，服务于生活.

4. 小结

教师和学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 勾股定理的内容是什么？它有什么作用？

(2) 在探究勾股定理的过程中，我们经历了怎样的探究过程？

设计意图：让学生从不同角度谈本节课学习的主要内容，在学习的过程中感受到中国数学文化及数学美，感悟数形结合的数学思想，引发学生更深层次的思考，促进学生数学思维品质的提高.

5. 布置作业

(1) 整理课堂中所提到的勾股定理的证明方法；

(2) 通过上网等方式查找勾股定理的有关史料、趣事及其他证明方法.

六、目标检测设计

1. 下列说法正确的是（　　）.

(A) 若 a，b，c 是 $\triangle ABC$ 的三边，则 $a^2+b^2=c^2$

(B) 若 a，b，c 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三边，则 $a^2+b^2=c^2$

(C) 若 a，b，c 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三边，$\angle A=90°$，则 $a^2+b^2=c^2$

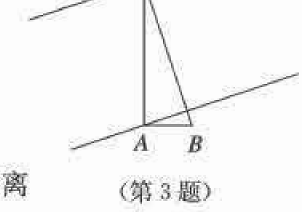
(D) 若 a，b，c 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三边，$\angle C=90°$，则 $a^2+b^2=c^2$

设计意图：考查学生能否清晰地辨别勾股定理的表述方式.

2. 若一个直角三角形的三边长为 6，8，x，则 $x=$________.

设计意图：考查学生运用勾股定理的能力，以及分类讨论的数学思想.

3. 如图，学校要把宣传标语挂到教学楼的顶部 D 处. 已知楼顶 D 处离



（第 3 题）

地面的距离 DA 为 8 m，云梯的长度为 9 m，为保证安全，梯子的底部和墙基的距离 AB 至少为 3 m. 云梯的顶部能到达 D 处吗？为什么？

设计意图：考查勾股定理在实际生活中的应用.

24.2 勾股定理的逆定理（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

勾股定理的逆定理证明及简单应用，原命题、逆命题的概念及相互关系.

2. 内容解析

勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形. 勾股定理的逆定理是利用边长关系来判定三角形是直角三角形的一种方法.

勾股定理的逆命题是真命题，勾股定理和它的逆定理是互为逆定理的关系，两个定理的题设和结论正好相反. 应该注意，对于一般命题，原命题为真命题，逆命题不一定为真命题. 在命题的研究中，研究一个命题的逆命题是一种常用的研究方法.

基于以上分析，可以确定本节课的教学重点是：探究并证明勾股定理的逆定理.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）理解勾股定理的逆定理，经历"实验测量—猜想—论证"的定理探究过程，体会"构造法"证明数学命题的基本思想.

（2）了解逆命题的概念，并了解原命题为真命题，它的逆命题不一定为真命题.

2. 目标解析

目标（1）要求经历勾股定理的逆定理的探究及证明过程，并理解通过构造一个直角三角形，证明此三角形和原三角形全等，从而证明三角形为直角三角形的方法. 要求能应用勾股定理的逆定理来判定一个三角形是直角三角形.

目标（2）要求能根据原命题写出它的逆命题，并了解原命题为真命题时逆命题不一定为真命题. 理解判断逆命题为假命题只要举出反例即可，但要说明逆命题为真命题，必须通过证明.

三、教学问题诊断分析

证明勾股定理的逆定理的实质，是通过 $a^2+b^2=c^2$ 证明三角形中有一个角为 $90°$. 直接证明这个结论很困难，但学生学过全等三角形，可以先构造一个直角三角形，使得它的直角边长分别为 a，b. 如果这两个三角形全等，由全等三角形对应角相等可知这个三角形是直角三角形. 用"同一法"证明勾股定理的逆定理，这种方法学生首次见到，较难理解. 教学时，应向学生说明证明思路.

基于以上分析，可以确定本节课的教学难点是：用同一法证明勾股定理的逆定理.

四、教学过程设计

1. 创设问题情境

问题1 前面我们学习了勾股定理，你能说出它的题设和结论吗？

师生活动：师生共同回忆勾股定理，请同学独立指出其题设和结论，并揭示勾股定理是从形的特殊性得出边之间的数量关系.

追问：我们知道一个直角三角形的两直角边长为 a，b，斜边长为 c，则有 $a^2+b^2=c^2$. 反过来，若一个三角形的三边具有 $a^2+b^2=c^2$ 的数量关系，能否确定这个三角形是直角三角形呢？今天我们一起来研究这个问题.

设计意图：通过对前面所学知识的归纳总结，联想到用三边的关系是否可以判断一个三角形为直角三角形，引导学生自然合理地提出问题.

问题2 据说古埃及人用图1的方法画直角：把一根长绳打上13个等距离的结，然后以3个结间距、4个结间距、5个结间距的长度为边长，用木桩钉成一个三角形，其中一个角便是直角. 你认为结论正确吗？

师生活动：学生测量课本中的三角形的角度，并计算三边长的关系.

设计意图：介绍前人经验，启发思考，使学生意识到数学知识来源于生活实际，激发学习兴趣.

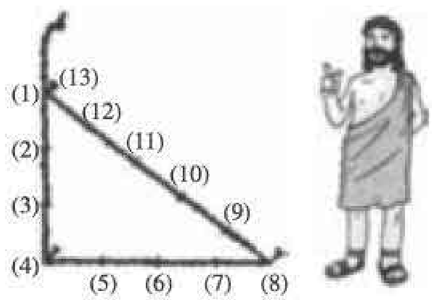


图1

实验操作：(1) 画一画：下列各组数中两个数的平方和等于第三个数的平方，分别以这些数为边长（单位：cm）画出三角形：

①2.5，6，6.5；　　　②6，8，10.

(2) 量一量：用量角器分别测量上述各三角形的最大角的度数.

(3) 想一想：请判断这些三角形的形状，并提出猜想.

师生活动：教师指导学生按要求画出三角形，并计算三边的数量关系，如 $2.5^2+6^2=6.5^2$，$6^2+8^2=10^2$. 接着度量三角形最大角的度数，发现最大角为 $90°$. 在此基础上用《几何画板》软件展示具有 $a^2+b^2=c^2$ 的三条线段（长度可变，数量关系不变），并以这三条线段为边作三角形，通过度量发现在最大角都为 $90°$，并提出猜想：如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

设计意图：教学中先要求学生画几个三角形，测量边长，然后计算边长的平方，并分析最长边的平方与其他两边平方和之间的关系，最后引导得出结论. 这种测量、计算、归纳和猜想的过程，是典型的几何探索过程.

2. 证明勾股定理的逆定理

问题3 要证明一个命题是真命题，我们首先要分析命题的题设及结论，画出图形，并写出已知、求证. 请大家完成.

师生活动：学生独立画出图形，写出已知、求证，教师通过幻灯片（或板书）显示图形、已知

及求证.

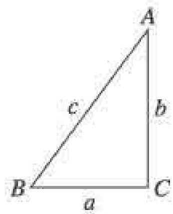


图 2

已知：如图 2，$\triangle ABC$ 的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$.

求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

设计意图：引导学生用图形和数学符号语言表示命题，明确任务.

问题 4 要证明$\triangle ABC$ 是直角三角形，只要证明$\angle C=90°$. 由命题的已知条件，能直接证明吗？

追问：对于$\triangle ABC$，我们难以直接证明它是一个直角三角形，怎么办？

师生活动：教师启发，如果能证明$\triangle ABC$ 与一个以 a，b 为直角边长的 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$全等，那么就证明了$\triangle ABC$ 是直角三角形. 为此，我们可以先作出 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$.

教师在此基础上进一步引导学生分析：构造 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$，使得 $B'C'=a$，$A'C'=b$，$\angle C'=90°$，则$\triangle A'B'C'$是一个以 a，b 为直角边长的直角三角形. 根据勾股定理得 $A'B'^2=a^2+b^2$. 又因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $A'B'^2=c^2$，即 $A'B'=c$. $\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$三边对应相等，可得两个三角形全等，因此$\angle C=\angle C'=90°$. $\triangle ABC$ 为直角三角形，即猜想是正确的. 师生共同规范地完成证明.

当我们证明了猜想是正确的，那么猜想就成为一个定理. 我们可以利用这个定理判定一个三角形是否为直角三角形.

设计意图：本问题中，难以直接证明$\triangle ABC$ 是直角三角形. 联想到三角形全等这一工具，通过构造直角三角形，证明当前三角形与一个直角三角形全等，从而证明当前三角形是直角三角形. 让学生体会这种证明思路的合理性，帮助学生突破难点.

3. 应用定理

例 1 判断下列问题中以线段 a，b，c 为边组成的三角形是不是直角三角形：

(1) $a=15$，$b=8$，$c=17$；　(2) $a=13$，$b=14$，$c=15$；　(3) $a=\sqrt{41}$，$b=4$，$c=5$.

师生活动：先由学生独立完成，教师及时给予指导. 在此活动中，教师应重点关注学生能否进一步理解勾股定理的逆定理的用处，以及能否用几何语言规范地书写过程. 在此介绍勾股数，同时引导学生在课后进一步研究第 (2) 题.

设计意图：这是利用勾股定理的逆定理进行判断的练习. 通过练习，把陈述性的定理转化为认知操作，学会用勾股定理及其逆定理判断一个三角形是否为直角三角形.

4. 介绍逆命题的概念

问题 5 比较我们刚刚学习的定理和勾股定理，这两个命题的题设和结论有何关系？

师生活动：比较两个命题的题设和结论，让学生初步感受到两个命题的题设和结论的关系，接着教师介绍原命题、逆命题、互逆定理的概念.

例 2 说出下列命题的逆命题. 这些命题的逆命题是真命题吗？

(1) 两条直线平行，内错角相等.

(2) 对顶角相等.

(3) 线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等.

师生活动：学生独立思考并口答完成. 在此活动中，教师应重点关注学生如何写出命题的逆命

题，对互逆命题关系及真假性的理解. 并让学生理解任何一个命题都有逆命题，但是逆命题不一定都是真命题.

5. 小结

教师引导学生参照以下问题回顾本节课所学主要内容，并进行相互交流：

(1) 勾股定理的逆定理的内容是什么？它有什么作用？

(2) 本节课学了原命题、逆命题等知识，你能说出它们之间的关系吗？

(3) 在论证勾股定理的逆定理时，我们经历了哪些过程？

设计意图： 问题 (1) 引导学生回顾和理解勾股定理的逆定理，明确定理的基本应用；问题 (2) 引导学生回顾逆命题的有关知识；问题 (3) 引导学生回顾和体会同一法证明命题的基本思路.

6. 布置作业

教科书第 13 页练习第 1，2 题，习题 24.2 第 4，5 题.

五、目标检测设计

1. 以长度分别为下列各组数的线段为边，其中能构成直角三角形的是（　　）.

(A) 1，2，3　　(B) 2，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$　　(C) 6，8，14　　(D) 2，1.5，2.5

设计意图： 考查应用勾股定理及其逆定理判断一个三角形是否是直角三角形.

2. 写出下列命题的逆命题，并判断这些命题的逆命题是否为真命题：

(1) 全等三角形的对应边相等；

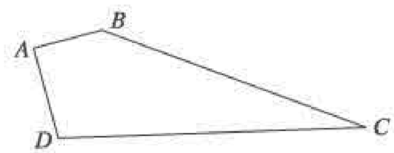
(2) 两个负数的积是正数.

设计意图： 考查互逆命题的概念及真假关系.

3. 在△ABC 中，$a=24$，$b=25$，$c=7$，求此三角形的面积.

设计意图： 考查勾股定理逆定理的应用.

4. 如图，有一四边形空地 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AB=3$，$AD=4$，$BC=12$，$CD=13$，求四边形 $ABCD$ 的面积.



（第 4 题）

设计意图： 考查综合应用勾股定理及其逆定理解决问题.

V 拓展资源

一、知识的拓广延伸与相关史料

1. 勾股定理和人类文明

勾股定理是初等几何中的一个基本定理，是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理. 但远在毕达哥拉斯出生之前，这一定理早已被人们利用. 几乎所有文明古国（中国、希腊、埃及、巴比伦、印度等）对此定理都有所研究. 我国以前也叫毕达哥拉斯定理，20 世纪 50 年

代曾开展关于这个定理命名问题的讨论，最后确定叫勾股定理.

3 500 年以前，巴比伦人就知道三边长为下列各组数的三角形为直角三角形：

120，119，169；	3 456，3 367，4 825；	4 800，4 601，6 649；	13 500，12 709，18 541；
72，65，97；	360，319，481；	2 700，2 291，3 541；	960，799，1 249；
600，481，769；	6 480，4 961，8 161；	60，45，75；	2 400，1 679，2 929；
240，161，289；	2 700，1 771，3 229；	90，56，106.	

然而，当时为什么列出这些三角形，至今还是个谜.

在中国，相传 4 000 多年前，大禹曾在治理洪水的过程中，利用勾股定理来测量两地的地势差. 在 3 000 多年以前，中国人已经知道用边长为 3，4，5 的直角三角形来进行测量. 勾股定理的叙述最早见于《周髀算经 》（成书不晚于公元前 2 世纪的西汉时期）. 书中记载了一段商高（约公元前 1120）答周公问，其中有“勾广三 ，股修四，经隅五”的话，意即直角三角形的两条直角边是 3 和 4，则斜边是 5. 书中还记载了陈子（公元前 716）答荣方问，“若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日”（古汉语中“邪”作“斜”解），这一句话明确陈述了勾股定理的内容. 3 世纪三国时期的赵爽在他的数学文献《勾股圆方图注》（《周髀算经》的注文）中运用弦图（图 24-1），巧妙地证明了勾股定理. 他把三角形涂成红色，其面积叫“朱实”，中间正方形涂成黄色叫做“黄实”，也叫“差实”. 他写道：“按弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实，加差实，亦成弦实.”

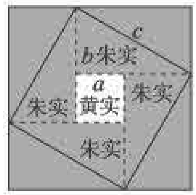


图 24-1

在印度，12 世纪的婆什迦罗（Bhaskara Ⅱ，1114—1185）的《元素计算的科学》书中也用相当含混的语言叙述了勾股定理，其证明过程也是赵爽的翻版.

2. 勾股定理在数学发展史中的地位

勾股定理是欧氏平面几何的一个核心命题，是三角学产生的出发点. 开普勒（J. Kepler，1571—1630）称几何学有两个宝藏：一个是勾股定理，另一个是黄金分割. 中国著名数学家华罗庚曾建议，用一幅反映勾股定理的数形关系图来作为和外星人交谈的语言. 就勾股定理本身而言，它揭示了直角三角形的三条边之间的关系，体现出“形数统一”的思想方法，具有科学创新的重大意义. 勾股定理启发了人类对数学的深入思考，促成了解析几何学、三角学的建立，使几何学和代数学两大门类结合起来，为数学进一步的发展拓宽了道路.

3. 勾股定理的趣话

勾股定理是数学中应用最广泛的定理之一，勾股定理的逆定理很早就被古代劳动人民所使用了，据称金字塔底座的四个直角就是应用这一关系来确定的. 至今在建筑工地上，还在用它来放线，即放“成直角”的线.

很久以来，人们对这个定理推崇的形式也是多种多样.

1955 年希腊发行了一张邮票（图 24-2），图案是由三个棋盘排列而成. 这张邮票是纪念毕达哥拉斯学派的成立以及在文化上的贡献. 邮票上的图案就是欧几里得用来证明勾股定理的“风车”图形，记载在欧几里得的《几何原本》里.

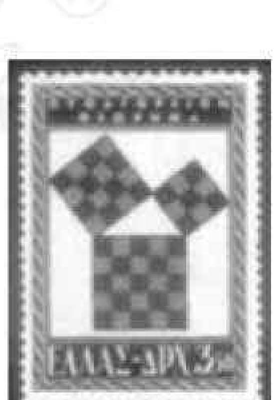


图 24-2

尼加拉瓜在 1971 年发行了一套十枚的纪念邮票，主题是“世界上十个最重要的数学公式”，其中之一也是勾股定理. 用发行邮票的方式来纪念勾股定理，肯定了勾股定理对数学发展的重要性.

2002 年的国际数学家大会在中国北京举行，这是 21 世纪全世界数学家的第一次大聚会. 这次大会的会徽就选定了我国古代数学家赵爽用来证明勾股定理的弦图，可以说是充分肯定了我国古代的数学成就，也充分弘扬了我国古代的数学文化. 我国经过努力终于获得了 2002 年数学家大会的主办权，也是国际数学界对我国数学发展的充分肯定.

4. 无理数的发现和勾股定理

勾股定理的应用自然导致开平方的问题，这就必然涉及无理数的问题. 历史上首先发现无理数的是毕达哥拉斯学派中杰出的代表人物、著名数学家希帕苏斯（Hippasus，约公元前 470 年）. 他发现边长为 1 的正方形，其对角线长度并不是有理数. 这令一向认为“万物皆数（有理数）”的毕达哥拉斯学派不能接受，毕达哥拉斯学派无法承受自己的理论将被推翻，希帕苏斯最终为宣传科学而献出了宝贵的生命. 真理不可战胜，希帕苏斯的发现对古希腊人的观念是一个极大的冲击，导致了“第一次数学危机”，促进了从有理数到实数的数系扩充，促进了数学的发展.

5. 勾股数组和不定方程

勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 本身就是一个关于 a，b，c 的方程，显然这个方程有无数组解，满足该方程的正整数解（a，b，c）通常叫做勾股数组. 若直角三角形的边长都为正整数，则这三个数便构成一组勾股数；反之，每一组勾股数都能确定一个边长是正整数的直角三角形. 因此，掌握确定勾股数组的方法对研究直角三角形具有重要意义.

毕达哥拉斯学派提出的勾股数组公式为：$a=2n+1$，$b=2n^2+2n$，$c=2n^2+2n+1$，其中 n 为正整数. 其特点是斜边和其中一直角边的差为 1.

柏拉图（Plato，公元前 427/428—前 347/348）提出的勾股数组公式为：$a=2m$，$b=m^2-1$，$c=m^2+1$，其中 m 为大于 1 的整数. 此时斜边和其中一直角边的差为 2.

以上这些表达式未给出全部勾股数组.

世界上第一次给出勾股数通解公式的是《九章算术》，其勾股数组公式为：$a=\frac{1}{2}(m^2-n^2)$，$b=mn$，$c=\frac{1}{2}(m^2+n^2)$，其中 $m>n$，m，n 是互质的奇数.

国外最先给出勾股数通解的是希腊的丢番图（Diophantus，约 250 年），其公式为：$a=2mn$，$b=m^2-n^2$，$c=m^2+n^2$，其中 $m>n$，m，n 是互质且一奇一偶的任意正整数.

6. 用出入相补原理巧证勾股定理

勾股定理是平面几何中一个极为重要的定理，世界上各个文明古国都对勾股定理的发现和研究作出过贡献. 特别是定理的证明，据说方法有 400 余种. 其中我国古代对这个定理的发现、应用和研究尤具特色.

早在魏朝时期，刘徽在注释“勾股章”时曾用“以盈补虚，出入相补”的方法作过证明，可惜插图失落. 后经清朝李潢复原，作成图 24-3，使刘徽的文字注解和图形相结合，“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类”. 这样就轻松地证明了勾股定理.

赵爽和刘徽是同一时代的数学家. 他在《勾股圆方图注》中，用弦图证明勾股定理，对后世的

启发很大. 他的注释是这样的:“按弦图，又可以勾股相乘为朱实二（图 24-4（1））；倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实（图 24-4（2）），加差实，亦成弦实（图 24-4（3））.”

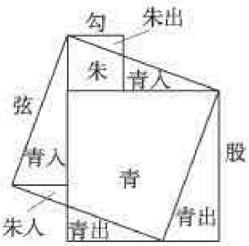
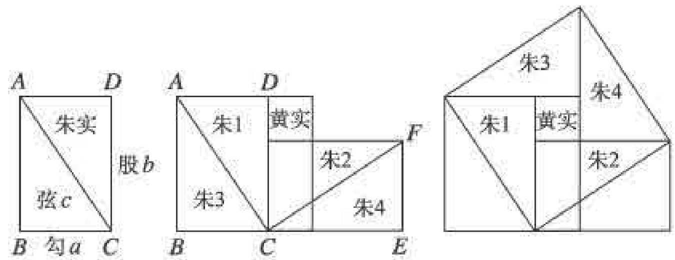


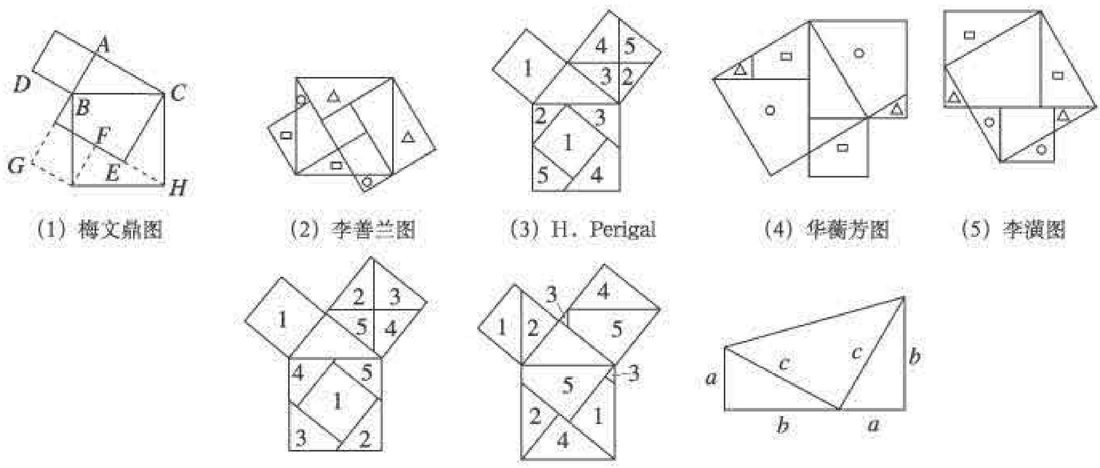
图 24-3



（1）　（2）　（3）

图 24-4

以上证明方法都用到了出入相补原理，即把一个平面图形从一处移至它处，面积不变；如果把图形分割成几块，那么各部分面积之和等于原来图形的面积. 很多中外数学家根据这一原理给出了定理的多种证法. 它不仅成为训练思维能力的“健身器”，而且其成果又构成一座美丽的数学花园. 选载几幅（图 24-5），供读者参考.



（1）梅文鼎图　（2）李善兰图　（3）H. Perigal　（4）华蘅芳图　（5）李潢图

（6）H. E. Dudeney　（7）N. Nielsen　（8）

图 24-5

7. 勾股定理的拓展

（1）余弦定理

在平面内，将直角三角形改为一般三角形，勾股定理就推广成为余弦定理.

余弦定理　如图 24-6，在任意三角形△ABC 中，设 a，b，c 为其三边，则

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

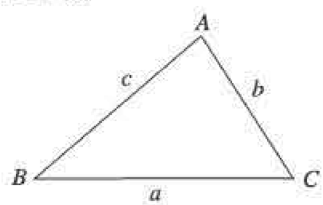


图 24-6

（2）空间勾股定理

类比勾股定理，在三维空间有如下定理：

定理 1　如图 24-7，在四面体 $ABCD$ 中，如果 $AB\perp$平面 BCD，$\angle BCD=90^\circ$，那么

$$AD^2=AB^2+BC^2+CD^2.$$

定理 2 如图 24-8，在四面体 $ABCD$ 中，如果 $AB\perp$平面 BCD，$\angle DBC=90^\circ$，那么

$$S^2_{\triangle ADC}=S^2_{\triangle ABD}+S^2_{\triangle ABC}+S^2_{\triangle DBC}.$$

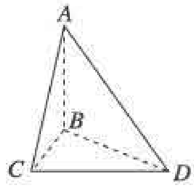


图 24-7

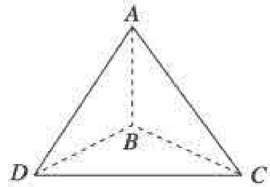


图 24-8

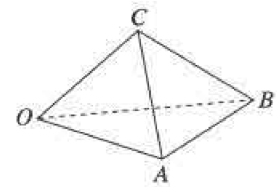


图 24-9

（3）三维余弦定理

定理 3 如图 24-9，在四面体 $OABC$ 中，若 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$，$\angle AOB=\theta_1$，$\angle BOC=\theta_2$，$\angle COA=\theta_3$. 则

$$S^2_{\triangle ABC}=S^2_{\triangle OAB}+S^2_{\triangle OBC}+S^2_{\triangle OCA}-\frac{1}{2}abc[a(\cos\theta_2-\cos\theta_1\cos\theta_3)+$$
$$b(\cos\theta_3-\cos\theta_1\cos\theta_2)+c(\cos\theta_1-\cos\theta_2\cos\theta_3)].$$

8. 射影

“射影”是几何学中一个很重要的概念，在欧氏平面几何中一般指的是正射影，即射线垂直于投射平面的射影. 用射影的观点对勾股定理及其拓展结论进行讨论：

（1）二维勾股定理和三维勾股定理的类比

二维勾股定理 如图 24-10，在平面直角坐标系中，点 A，B 分别在 x，y 轴上，则线段 AB 的平方等于它在两条坐标轴上的射影 OA，OB 的平方和.

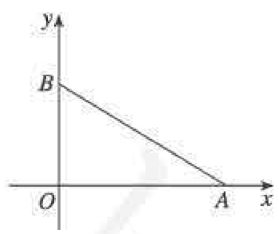


图 24-10

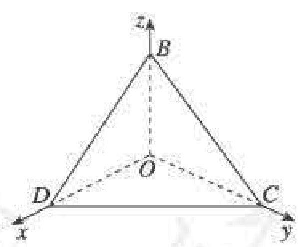


图 24-11

三维勾股定理 如图 24-11，在空间直角坐标系中，点 D，C，B 分别在 x，y，z 轴上，则 $\triangle BCD$ 的面积的平方等于 $\triangle BCD$ 在三个坐标平面 xOy，yOz，zOx 上的射影 $\triangle ODC$，$\triangle OBC$，$\triangle OBD$ 面积的平方和.

由二维勾股定理到三维勾股定理作了如下的类推：

①二维勾股定理指的是直角三角形三边平方的关系，三维勾股定理指的是直角四面体四个三角形面积平方的关系，线段是一维量，面积是二维量，即由一维类推到二维；

②在平面内，直角边可看作是斜边在这条边上的射影，在直角四面体 $OBCD$（图 24-11）中，三个直角三角形 $\triangle ODC$，$\triangle OBD$，$\triangle OBC$ 可看作是 $\triangle BDC$ 分别在三个坐标平面内的

射影.

因此，勾股定理研究的是斜边（斜面）与其在坐标轴（坐标平面）上的射影之间的关系.

(2) 射影定理

平面中勾股定理和射影定理都是阐明直角三角形三边（或线段）之间的数量关系，都是线段乘积形式. 运用类比的方法，将平面二维射影定理拓展到三维空间，得到三维空间的射影定理.

射影定理 如图 24-12，在空间直角坐标系中，点 D，C，B 分别在 x，y，z 轴上，点 H 为点 O 在平面 BCD 上的正射影，则$\triangle BOD$ 的面积是$\triangle BCD$，$\triangle BHD$ 面积的比例中项；$\triangle BOC$ 的面积是$\triangle BCD$，$\triangle BHC$ 面积的比例中项；$\triangle COD$ 的面积是$\triangle BCD$，$\triangle CHD$ 面积的比例中项.

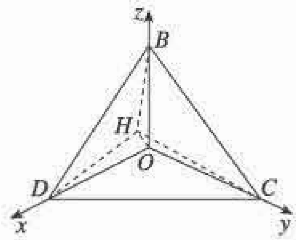


图 24-12

参考资料

[1] 梁宗巨. 数学历史典故. 沈阳：辽宁教育出版社，1995.
[2] 徐本顺，解恩泽. 数学猜想集. 长沙：湖南科学技术出版社，1998.
[3] 郭树春. 中国古代数学. 台北：台湾商务印书馆股份有限公司，1994.
[4] 郁祖权，黄澎. 中国古算解趣. 北京：科学出版社，2008.

二、拓展性问题

1. a，b，c 为直角三角形的三边，且 c 为斜边，h 为斜边上的高. 有下列说法：

①a^2，b^2，c^2 能组成三角形；

②$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$能组成三角形；

③$c+h$，$a+b$，h 能组成直角三角形；

④$\frac{1}{a^2}$，$\frac{1}{b^2}$，$\frac{1}{h^2}$能组成直角三角形.

其中正确结论的个数是（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

答案与提示：C，①不正确.

2. 勾股定理推广——边上图形一般化

勾股定理为 $a^2+b^2=c^2$，即给出一个直角三角形，直角边 a，b 边上的两个正方形面积之和，等于斜边 c 上正方形的面积（图 24-13）.

假如我们把直角边上和斜边上的正方形，换成其他正多边形，如正三角形（图 24-14），正五边形（图 24-15），正六边形……正 n 边形，它们的面积是否也有相同的数量关系？

答案与提示：直角三角形斜边上的一个正多边形，其面积等于两直角边上两个和它相似的正多边形面积之和.

设 a，b，c 三边上所列三个相似正多边形的面积分别为 S_a，S_b，S_c.

$\because \frac{S_a}{S_c}=\frac{a^2}{c^2}$，$\frac{S_b}{S_c}=\frac{b^2}{c^2}$，

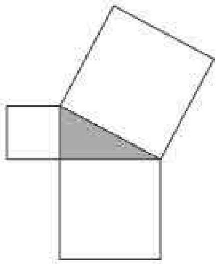


图 24-13

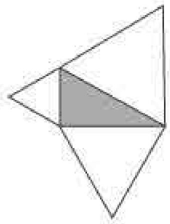


图 24-14

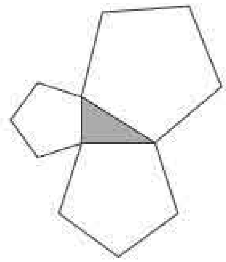


图 24-15

∴ $S_c \cdot a^2 = S_a \cdot c^2$，$S_c \cdot b^2 = S_b \cdot c^2$.

两式两边分别相加，得 $S_c(a^2+b^2)=(S_a+S_b)c^2$.

∵ $a^2+b^2=c^2$，

∴ $S_a+S_b=S_c$.

3. 利用勾股定理可顺次作出长为$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，…的线段，如作长为$\sqrt{7}$的线段，需构造出含边长为$\sqrt{7}$的直角三角形.

(1) 写出 3 种用“构造斜边长为$\sqrt{7}$的直角三角形的方法”作长为$\sqrt{7}$的线段的方案.

(2) 能否通过“构造直角边长为$\sqrt{7}$的直角三角形”求作长为$\sqrt{7}$的线段？若能，写出三角形三边；若不能，请说明理由.

(3) 在 (1) 中，作长为$\sqrt{7}$的线段，往往需要先作出其他长为无理数的线段，如$(\sqrt{6})^2+1^2=(\sqrt{7})^2$，先要作出长为$\sqrt{6}$的线段. 对于正整数 k，能否通过构造两边均为有理数的直角三角形来求出长为$\sqrt{k}$的线段？若能，请写出此时三角形三边之间的关系；若不能，请说明理由.

答案与提示：(1) $(\sqrt{7})^2=(\sqrt{6})^2+1^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2})^2=2^2+(\sqrt{3})^2$.

(2) 能用“构造直角边长为$\sqrt{7}$的直角三角形”的方法来求长为$\sqrt{7}$的线段，如$(\sqrt{7})^2=(\sqrt{m+7})^2-(\sqrt{m})^2$ ($m>0$).

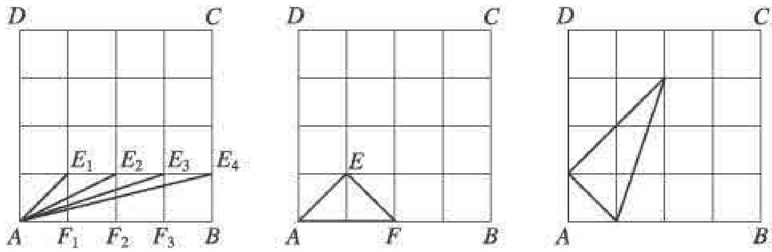
(3) 对于正整数 k，因为$(\sqrt{k})^2=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2-\left(\frac{k-1}{2}\right)^2$，所以能通过构造斜边长为$\frac{k+1}{2}$，一条直角边长为$\frac{k-1}{2}$的直角三角形来求出长为$\sqrt{k}$的线段.

4. 在大小为 4×4 的正方形方格中，三个顶点都在单位小正方形的顶点上的直角三角形共有________个 (全等的三角形只算一个).

答案与提示：(1) 三个顶点都在单位小正方形的顶点上，且直角边和 AB 或 AD 平行时 (图 24-16 (1))，一条直角边的长度有 1，2，3，4 共四种可能，另一直角边的长度也有 1，2，3，4 共四种可能. 因此，满足条件的三角形个数为 $4+3+2+1=10$.

(2) 三个顶点都在单位小正方形的顶点上且斜边和 AB 或 AD 平行时，若斜边长为 1，满足条件的三角形不存在；若斜边长为 2，满足条件的三角形存在 (图 24-16 (2))；同理，若斜边长为 4，满足条件的三角形存在. 因此，满足条件的三角形共有 2 个.

(3) 三个顶点都在单位小正方形的顶点上且三边与 AB 或 AD 都不平行时 (图 24-16 (3))，



（1）　　　　（2）　　　　（3）

图 24-16

三角形的三边只能由图中矩形的对角线组成，即由$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{17}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{20}$，$\sqrt{25}$，$\sqrt{32}$中的三条线段组成（可重复），其中满足勾股定理的线段共有 9 组：

① $\sqrt{2}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$；　② $\sqrt{2}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{20}$；　③ $\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{10}$；

④ $\sqrt{5}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{13}$；　⑤ $\sqrt{5}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{18}$；　⑥ $\sqrt{5}$，$\sqrt{20}$，$\sqrt{25}$；

⑦ $\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{18}$；　⑧ $\sqrt{8}$，$\sqrt{17}$，$\sqrt{25}$；　⑨ $\sqrt{10}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{20}$.

在这九组数中，能在 4×4 的正方形方格中组成直角三角形的只有①②③⑥⑨. 因此，满足条件的三角形共有 5 个.

综上所述，满足条件的三角形共有 17 个.

5.（1）《几何原本》中有一种证明勾股定理的方法：作 $CG\perp FH$，垂足为 G，交 AB 于 P，如图 24-17，通过证明 $S_{正方形ACED}=S_{矩形AFGP}$，$S_{正方形BCNM}=S_{矩形BHGP}$ 的方法来证明勾股定理. 请你用这种方法完成勾股定理的证明.

（2）将正方形 $ACED$、正方形 $BCNM$ 作等积变形，如图 24-18，得$\square ACQS$ 和$\square BCQT$，则有 $S_{\square ACQS}+S_{\square BCQT}=S_{正方形ABHF}$. 如图 24-19，若以直角三角形$\triangle ABC$ 的直角边 AC，BC 为边向外任意作$\square ACED$，$\square BCNM$，斜边 AB 上的$\square ABHF$ 满足什么条件时，才有 $S_{\square ACED}+S_{\square BCNM}=S_{\square ABHF}$？

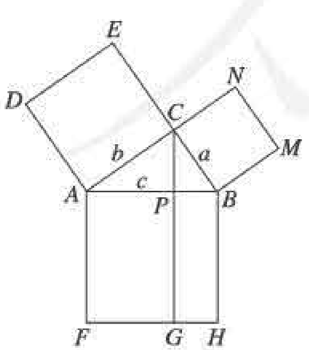


图 24-17

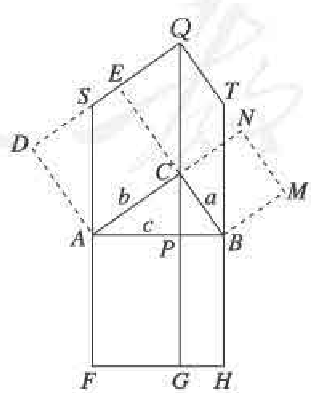


图 24-18

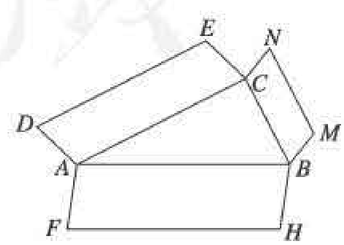


图 24-19

答案与提示：(1) 如图 24-20，连接 DB，CF，则

$\triangle ADB \cong \triangle ACF$，且 $S_{正方形ACED}=2S_{\triangle ADB}$，$S_{矩形AFGP}=2S_{\triangle ACF}$，

$\therefore\ b^2=S_{矩形AFGP}$.

同理 $a^2=S_{矩形BHGP}$.

$\therefore\ S_{正方形ACED}+S_{正方形BCNM}=S_{正方形ABHF}$.

$\therefore\ a^2+b^2=c^2$.

(2) 如图 24-21，设 DE，MN 的延长线交于点 Q，连接 QC 并延长交 AB 于点 P，在 CP 的延长线上取点 G，使 $PG=QC$，以 AB，AF 为邻边作▱$ABHF$，使 $AF \parallel PG$，且 $AF=PG$，则

$$S_{▱ACED}+S_{▱BCNM}=S_{▱ABHF}.$$

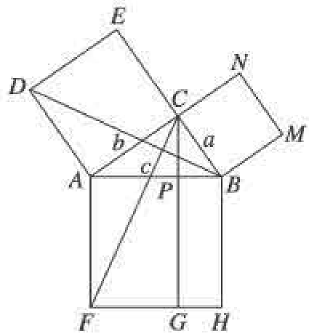


图 24-20

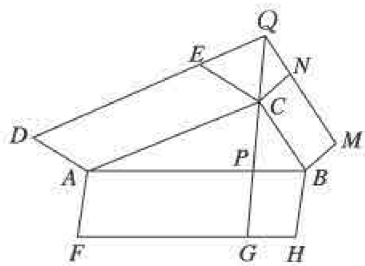


图 24-21

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容包括：勾股定理和勾股定理的逆定理及这两个定理的简单应用，互逆命题（定理）概念等. 其中，勾股定理及其逆定理是重点，确定评价内容时，应注重主要内容，并突出重点.

2. 本章评价的重点为运用勾股定理求直角三角形的边长的有关计算及解决实际问题，运用勾股定理及其逆定理判断一个三角形是不是直角三角形. 在求解线段长度的问题中除直接求解外，有时还要利用同一个量来表示两条或三条线段，需要构造方程思想来解决；勾股定理及其逆定理在实际生活中也有广泛的应用. 所以在设计测试题时，既要注重勾股定理及其逆定理的综合运用，又要适当考查“数形结合”“方程”等数学思想方法和数学建模能力.

3. 课标要求探索勾股定理及其逆定理，学生应会自己证明勾股定理及其逆定理.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

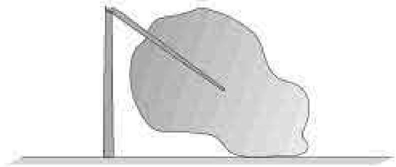
(一) 选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 如图，一棵高为 16 m 的大树被台风刮断. 若树在离地面 6 m 处折断，则树顶端落在离树底

部（　　）处.

(A) 5 m　　(B) 7 m

(C) 8 m　　(D) 10 m



（第 1 题）

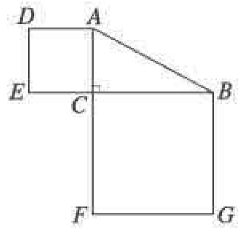
2. 下列各组数中不能作为直角三角形的三边长的是（　　）.

(A) 1.5，2，3　　(B) 7，24，25

(C) 6，8，10　　(D) 9，12，15.

3. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$. 若 $AB=15$，则正方形 $ADEC$ 和正方形 $BCFG$ 的面积和为（　　）.

(A) 150　　(B) 200　　(C) 225　　(D) 无法计算



（第 3 题）

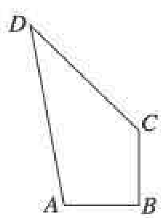
4. 甲、乙两艘客轮同时离开港口，航行的速度都是 40 m/min，甲客轮用 15 min 到达点 A，乙客轮用 20 min 到达点 B. 若 A，B 两点的直线距离为 1000 m，甲客轮沿着北偏东 30°的方向航行，则乙客轮的航行方向可能是(　　).

(A) 北偏西 30°　　(B) 南偏西 30°

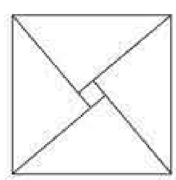
(C) 南偏东 60°　　(D) 南偏西 60°

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=1$，$CD=2$，$DA=\sqrt{6}$，且$\angle ABC=90°$，则四边形 $ABCD$ 的面积是（　　）.

(A) 2　　(B) $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$　　(C) $1+\sqrt{2}$　　(D) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 2002 年 8 月在北京召开的国际数学家大会会徽取材于我国古代数学家赵爽的弦图，它是由四个全等的直角三角形和中间的小正方形拼成的一个大正方形，如图所示. 如果大正方形的面积是 13，小正方形的面积是 1，直角三角形的较短直角边长为 a，较长直角边长为 b，那么$(a+b)^2$ 的值为（　　）.

(A) 13　　(B) 19　　(C) 25　　(D) 169

（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. 命题“在同一个三角形中，等边对等角”的逆命题是________________，它是________（填“真命题”或“假命题”）.

8. 已知一个直角三角形的两条直角边分别为 6，8，那么这个直角三角形斜边上的高为________.

9. 三角形的两边长分别为 3 和 5，要使这个三角形是直角三角形，则第三条边长是________

____.

(第 10 题)

10. 如图，一根长 18 cm 的牙刷置于底面直径为 5 cm、高为 12 cm 的圆柱形水杯中，牙刷露在杯子外面的长度为 h cm，则 h 的取值范围是________.

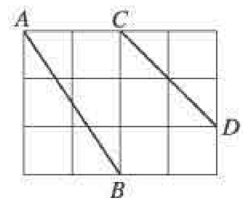
（三）解答题（每题 10 分，满分 40 分）

11. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$.

（1）已知 $c=25$，$b=15$，求 a；

（2）已知 $a=\sqrt{6}$，$\angle A=60°$，求 b，c.

12. 如图，在 4×3 正方形网格中，每个小正方形的边长都是 1.

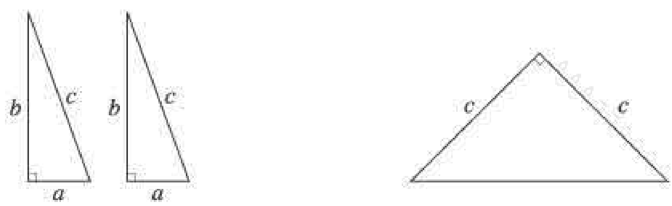


(第 12 题)

（1）分别求出线段 AB，CD 的长度；

（2）在图中画线段 EF，使得 EF 的长为$\sqrt{5}$，以 AB，CD，EF 三条线段能否构成直角三角形，并说明理由.

13. 图（1）是用硬板纸做成的两个全等的直角三角形，两直角边的长分别为 a 和 b，斜边长为 c. 图（2）是以 c 为直角边的等腰直角三角形. 请你开动脑筋，将它们拼成一个直角梯形.



(1)　　　　(2)

(第 13 题)

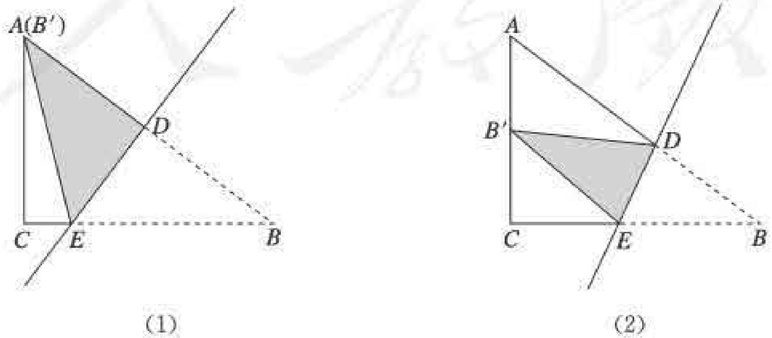
（1）画出拼成的这个图形的示意图；

（2）利用（1）画出的图形证明勾股定理.

14. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，D，E 分别是斜边 AB 和直角边 CB 上的点. 把△ABC 沿着直线 DE 折叠，顶点 B 的对应点是点 B'.

（1）如图（1），如果点 B'和顶点 A 重合，求 CE 的长；

（2）如图（2），如果点 B'落在直角边 AC 的中点上，求 CE 的长.



(1)　　　　(2)

(第 14 题)

参考答案

1. C. 本题考查利用勾股定理解决实际问题.

2. A. 本题考查利用勾股定理及其逆定理判定三角形是否为直角三角形.

3. C. 本题考查勾股定理的面积表达形式和数形结合思想.

4. C. 本题考查方位角背景下的勾股定理的逆定理的应用.

5. B. 本题考查勾股定理及其逆定理的运用.

6. C. 本题考查勾股定理.

7. 在同一个三角形中，等角对等边；真命题. 本题考查根据已知命题写出其逆命题.

8. 4.8. 本题考查勾股定理、面积法.

9. 4 或$\sqrt{34}$. 本题考查利用勾股定理求直角三角形的边长及分类讨论思想.

10. $5\leqslant h\leqslant 6$. 本题考查勾股定理在实际生活中的应用.

11. （1）20；（2）$\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$.

本题考查利用勾股定理求直角三角形的边长.

12. （1）$\sqrt{13}$，$\sqrt{8}$.

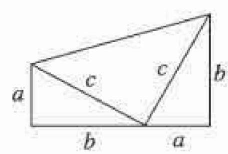
（2）图略. 因为 $CD^2+EF^2=8+5=13$，$AB^2=\sqrt{13}^2=13$，$CD^2+EF^2=AB^2$，所以能构成直角三角形.

本题考查网格背景下应用勾股定理求解线段的长度，应用勾股定理的逆定理判断三角形是否为直角三角形.

13. （1）如图所示.

（2）$S_{梯形}=\dfrac{(a+b)(a+b)}{2}=\dfrac{1}{2}ab\times 2+\dfrac{1}{2}c^2$，化简得 $a^2+b^2=c^2$.

本题考查利用数形结合的方法证明勾股定理.



（第 13 题）

14. 解：（1）设 $CE=x$，则 $AE=BE=8-x$，在$\triangle ACE$ 中，根据勾股定理得 $x^2+6^2=(8-x)^2$，解得 $x=\dfrac{7}{4}$，即 $CE=\dfrac{7}{4}$.

（2）设 $CE=x$，则 $B'E=BE=8-x$，在$\triangle B'CE$ 中，根据勾股定理得 $x^2+3^2=(8-x)^2$，解得 $x=\dfrac{55}{16}$，即 $CE=\dfrac{55}{16}$.

本题考查利用勾股定理作为等量关系，列方程解决图形相关计算问题的能力.

第二十五章　平行四边形

Ⅰ总体设计

一、本章学习目标

1. 理解平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，以及它们之间的关系.

2. 探索并证明平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质定理和判定定理，并能运用它们进行证明和计算.

3. 了解两条平行线之间距离的意义，能度量两条平行线之间的距离.

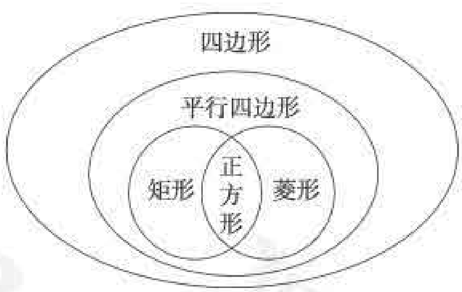
4. 探索并证明三角形中位线定理.

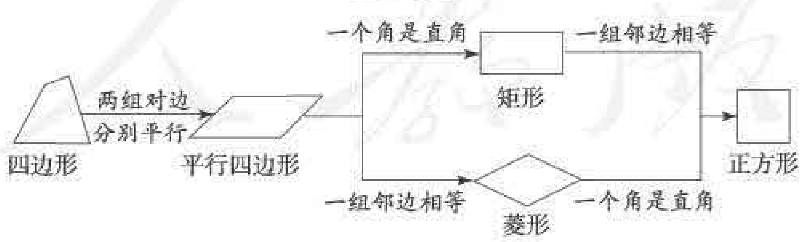
5. 通过经历平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质定理和判定定理的探索过程，丰富学生的数学活动经验和体验，进一步培养和发展学生的合情推理能力.

6. 通过平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质定理和判定定理以及相关问题的证明和计算，进一步培养和发展学生的演绎推理能力.

7. 通过分析平行四边形与矩形、菱形、正方形概念之间的联系与区别，使学生进一步认识一般与特殊的关系.

二、本章知识结构框图





三、内容安排

平行四边形是特殊的四边形. 本章我们在平行线、三角形和四边形的基础上进一步研究平行四边形；并通过平行四边形角、边的特殊化，研究矩形、菱形和正方形等特殊的平行四边形，认识这些概念之间的联系与区别，明确它们的内涵与外延；探索并证明平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质定理和判定定理，进一步明确命题及其逆命题的关系，不断发展学生的合情推理和演绎推理能力.

平行四边形是常见的几何图形，既有丰富的性质，又在现实生活中具有广泛的应用，尤其是矩形、菱形、正方形等特殊平行四边形的性质更加丰富、应用更加广泛.

学生在第一学段已经学习过平行四边形，本学段七年级下册“三角形”一章研究了多边形及其内角和等内容，包括四边形及其内角和，“全等三角形”一章又研究了三角形全等的判定及全等三角形的性质. 这些内容是学习本章的重要基础.

本章先研究平行四边形，在平行四边形的基础上，学习矩形、菱形、正方形这些特殊平行四边形.

第 25.1 节主要研究平行四边形的概念、性质定理和判定定理；在平行四边形概念和性质定理的基础上，介绍两条平行线之间距离的概念；作为性质定理和判定定理的一个应用，探索并证明三角形中位线定理.

第 25.2 节首先研究特殊的平行四边形——矩形和菱形，它们分别是有一个角是直角和有一组邻边相等的特殊平行四边形. 第 25.2.1 小节和第 25.2.2 小节分别研究矩形和菱形的概念、性质定理和判定定理. 在矩形和菱形的基础上，再研究它们的特殊情况，即同时具有两个特殊条件的平行四边形——正方形，它是有一个角是直角的特殊菱形，或者是有一组邻边相等的特殊矩形. 由此得出，正方形具有平行四边形的所有性质. 第 25.2.3 小节给出了正方形的概念，并让学生自己研究它的性质定理和判定定理.

本章重点是平行四边形的概念、性质定理和判定定理. 矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它们的性质定理和判定定理的研究方法，与平行四边形性质定理和判定定理的研究方法一脉相承. 两条平行线之间的距离相等、三角形中位线定理、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半等结论的探索与证明，都以平行四边形、矩形的概念和有关定理为依据，是平行四边形、矩形知识的综合应用. 另外，平行四边形的性质定理，也常常是证明两条线段相等、两角相等以及两条直线平行或垂直的重要依据. 掌握平行四边形的概念、性质定理和判定定理，并能应用这些知识解决问题，是学好本章的关键.

本章教学内容之间联系比较紧密，研究问题的思路和方法类似，推理论证的难度不大. 相对来说，平行四边形与矩形、菱形、正方形等特殊平行四边形之间的联系与区别，是本章教学难点，因为各种平行四边形概念交错，容易混淆. 在应用它们的性质定理和判定定理的时候，有时会出现错用、多用、少用条件的问题. 教学中要注意结合教科书中的结构图，分清这些平行四边形的从属关系，梳理它们的性质定理和判定定理，克服难点.

四、课时安排

本章教学时间约需 17 课时，具体安排如下（仅供参考）：

25.1　平行四边形	8 课时
25.2　特殊的平行四边形	7 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 突出图形性质定理和判定定理的探索与发现过程，通过合情推理发现结论，形成猜想，运

用演绎推理证明猜想

本章研究平行四边形以及矩形、菱形、正方形等特殊的平行四边形，图形比较多，而且图形的性质定理和判定定理也比较多. 教科书呈现这些内容时，注意突出图形性质定理和判定定理的探索与发现过程，由观察度量、实验操作、图形变化等方式，通过合情推理发现结论，形成猜想，运用演绎推理证明猜想. 把合情推理和演绎推理有机结合起来.

例如，通过观察度量，猜想平行四边形的对边相等、对角相等等性质；通过平行四边形角的变化，一个角为直角，探索并发现矩形的四个角都是直角、对角线相等等性质；通过平行四边形邻边的变化，邻边相等，探索并发现菱形的四条边都相等、对角线互相垂直、每一条对角线平分一组对角等性质.

2. 强调从数学本身提出问题，通过图形性质定理的逆命题，先提出判定图形是否成立的命题，然后运用演绎推理证明这些命题的真伪，得出图形的判定定理，进一步明确图形的性质定理与判定定理之间的关系

在平行四边形和矩形、菱形、正方形等特殊平行四边形的判定定理的学习过程中，教科书从这些图形的性质定理出发，通过这些图形性质定理的逆命题，先指出判定图形是否成立的命题，让学生思考，然后运用演绎推理证明这些命题的真伪，从而得出图形的判定定理.

上述呈现方式，从数学本身提出问题，由命题及其逆命题角度出发，在证明判定定理的过程中，使学生进一步明确性质定理与判定定理之间的关系：从命题角度说，判定定理与相应的性质定理之间是互逆的. 比如，在第 25.1.2 小节“平行四边形的判定”一开始，提出“思考”：“通过前面的学习，我们知道，平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分. 反过来，对边相等、对角相等、对角线互相平分的四边形是平行四边形吗？也就是说，平行四边形的性质定理的逆命题成立吗？”

3. 加强“图形的性质”和“图形的变化”“图形与坐标”等之间的联系，从多种角度认识图形的性质

教科书编写时，重视“图形的性质”和“图形的变化”“图形与坐标”等之间的联系，这些内容是一个统一的整体，只不过关注的角度不同. 例如，利用旋转由平行四边形引出矩形的概念，利用平移由平行四边形引出菱形的概念；习题中安排了在平面直角坐标系中表示平行四边形与矩形、菱形、正方形等特殊平行四边形的顶点坐标，利用图形的顶点坐标证明平行四边形与矩形、菱形、正方形等特殊的平行四边形的性质的题目. 这些都体现了“图形的性质”和“图形的变化”“图形与坐标”之间的联系.

4. 强调转化与化归等数学思想方法

转化与化归是数学中常用的方法. 在平行四边形的学习中，我们通过连接对角线，把平行四边形化归为两个全等的三角形，运用全等三角形的性质得出平行四边形的性质；在探索并证明三角形的中位线定理时，又通过构造平行四边形，把三角形中的问题转化为刚刚学习过的平行四边形的性质，利用平行四边形的性质得到三角形中位线定理；在矩形性质的学习中，自然推出直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，把直角三角形中的问题转化为矩形中的问题，用矩形的性质进行证明，得出结论. 教科书反复提到三角形与平行四边形之间的相互转化，通过三角形研究平行四边形，运用平行四边形的性质研究三角形的有关问题. 编写时，让学生了解这些思想，引导学生通过添加适当的辅助线，把未知化归为已知，运用已有知识解决问题，从而进一步提高学生分析问题、解决问题的能力.

5. 注意与现实生活的联系

平行四边形是日常生活、生产中应用广泛的几何图形，尤其是矩形、菱形、正方形等特殊的平行四边形. 本章注意它们与现实生活的联系，例如，平行四边形、矩形、菱形等概念注意从实际引入；在研究它们的性质定理和判定定理时，注意它们的实际应用；安排“实验与探究　丰富多彩的正方形”，介绍正方形在实际中的应用；教科书的例题、习题中也有一些实际应用的例子；等等. 这些材料都是从实际中提炼出来的，通过这些知识的教学，帮助学生运用所学知识解决实际问题.

六、对本章教学的建议

1. 关于平行四边形与特殊平行四边形概念之间属加种差、内涵与外延之间的关系

概念、判断和推理是思维的基本形式. 三者之中，概念是基础，在概念的基础上进行判断，在概念和判断的基础上进行推理.

本章概念比较多，概念之间联系非常密切，关系复杂. 由于平行四边形和各种特殊平行四边形的概念之间重叠交错，容易混淆，弄清它们的共性、特性及其从属关系非常重要. 实际上，有时学生掌握了它们的特殊性质，而忽视了它们的共同性质. 如有的学生不知道正方形是矩形，又是菱形，也是平行四边形，应用时常犯多用或少用条件的错误. 教学时，不仅要讲清矩形、菱形、正方形等的特殊性质，还要强调它们与平行四边形的从属关系和共同性质. 也就是说，在讲清每个概念特征的同时，强调它们的属概念，弄清这些概念之间的关系. 在原有属概念基础上附加一些条件（种差），通过扩大概念内涵、减少概念外延的方式引出新的种概念；同时在原有属概念的性质定理和判定定理的基础上，研究种概念的性质定理和判定定理.

弄清这些关系，最好用图示的办法. 例如，教科书给出了平行四边形以及特殊平行四边形的关系，研究正方形时给出了它与矩形、菱形之间包含关系的图形. 为了进一步明确上述概念的属加种差的关系，对上述概念进行分类，也是明确概念的一种逻辑方法. 通过分类，可以帮助学生更好地掌握概念，同时学习一些分类方法. 在本章“小结”中，教科书通过图示给出了本章主要概念之间的关系，让学生注意这些概念之间的联系与区别，进一步体会分类思想. 教学中要重视这些图示的作用，让学生弄清这些图形之间的关系.

在弄清这些图形之间关系的基础上，还要进一步向学生说明概念的内涵与外延之间的关系，即内涵越小，外延越大；内涵越大，外延越小. 例如，正方形的定义中，包含四边形、平行四边形、矩形、菱形所有的特征，内涵很大，但是它的外延很小，而平行四边形的外延很大. 弄清了各种特殊平行四边形的概念，各种平行四边形之间的从属关系也就清楚了，它们的性质定理、判定定理也就不会用错了.

2. 进一步培养学生的合情推理能力和演绎推理能力

从培养学生推理论证的角度来说，“平行四边形”这一章处于学生初步掌握了推理论证方法的基础上，进一步巩固和提高的阶段. 本章内容比较简单，证明方法相对比较单一，学生前面已经进行了一些推理证明的训练. 但这种训练只是初步的，需要进一步巩固和提高. 教学中同样要重视推理论证的教学，进一步提高学生的合情推理能力和演绎推理能力. 在推理与证明的要求方面，除了要求学生对经过观察、实验、探究得出的结论进行证明以外，还要求学生直接由已有的结论对有些图形的性质通过推理论证得出. 为了巩固并提高学生的推理论证能力，本章定理证明中，除了采用严格规范的证明方法外，还有一些采用了探索式的证明方法. 这种方法不是先有了定理再去证明

它，而是根据题设和已有知识，经过推理，得出结论. 另外也有一些文字叙述的证明题，要求学生自己写出已知、求证，再进行证明. 这些对学生的推理能力要求较高，难度也有增加，但能激发学生的学习兴趣，活跃学生的思维，对发展学生的思维能力有好处. 教学中要注意启发和引导，使学生在熟悉“规范证明”的基础上，推理论证能力有所提高和发展.

另外，在解决有关平行四边形的问题时，反复运用了平行线和三角形的有关知识，因此本章内容是平行线和三角形知识的深入和运用. 获得新知识后，要注意运用它们. 随着知识的丰富，学生解决问题的途径也增多了. 学完本章后，要引导学生直接运用这些知识解决有关问题，避免再通过添加辅助线转化为平行线或三角形来解决，防止学生总在熟悉的三角形中兜圈子，不会运用新知识来解决问题.

3. 注意帮助学生梳理知识内容

本章概念比较多，图形的性质定理和判定定理也比较多. 虽然难度都不大，但要全部记住这些定理，需要花费许多时间和精力. 同概念教学一样，解决这个问题也可以采用图示的方法. 学完了一个知识点后，适时引导学生对所学内容进行梳理，画出主要内容的图表，有利于学生掌握图形的概念和性质. 例如，可以将正方形的有关内容列成下图：

- 正方形
  - 定义——有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形
  - 性质
    - 边的性质
      - 对边平行
      - 四边相等
    - 角的性质——四个角都是直角
    - 对角线的性质
      - 两条对角线相等
      - 两条对角线互相垂直
      - 两条对角线互相平分
      - 每条对角线平分一组对角
  - 图形的对称性
    - 轴对称图形
    - 中心对称图形
  - 判定方法
    - 证明矩形有一组邻边相等
    - 证明菱形有一个角是直角

类似地，我们也可以引导学生列出表示平行四边形、矩形、菱形等图形的概念、性质定理和判定定理的图表，帮助学生理解这些概念.

4. 关注信息技术的应用

在本章教学中，有条件的学校还要关注信息技术工具的使用. 利用信息技术工具，可以很方便地制作图形，让图形“动”起来. 许多计算机软件还具有测量功能，这有利于我们在图形的运动变化过程中发现其中不变的位置关系和数量关系，进而发现图形的性质.

例如，平行四边形对角线互相平分性质的探究，矩形性质的得出，菱形性质的得出，中点四边形性质的探究，等等，都可以用信息技术工具实现.

Ⅱ 教材分析

[1] 章头图选用了农田的鸟瞰图，其中包含多种平行四边形，如矩形、正方形等. 它揭示了本章主要研究对象——平行四边形.

第二十五章 平行四边形

与三角形一样，平行四边形也是一种基本的几何图形. 宏伟的建筑物、开关自如的栅栏门、别具一格的窗棂……现实世界中很多物体都有平行四边形的形象. 为什么平行四边形形状的物体到处可见呢？这与平行四边形的性质有关.

前面我们学习了许多图形与几何的知识，掌握了一些探索和证明图形几何性质的方法. 本章我们将进一步学习平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，并在理解它们之间关系的基础上，利用已有的几何知识和方法，探索并证明它们的性质定理和判定定理；进一步体会研究图形几何性质的思路和方法，即通过观察、类比、特殊化等途径和方法发现图形的几何性质，再通过逻辑推理证明它们.

[1]

1. 同三角形一样，四边形也是基本的平面图形，而平行四边形是重要的四边形. 本章在学生前面学习的基础上，探索并掌握平行四边形的性质定理和判定定理，在此基础上，探索并掌握矩形、菱形、正方形等特殊平行四边形的性质定理和判定定理，并会运用它们进行有关证明和计算.

2. 在前面的学习中，已经要求学生进行证明. 通过本章的学习，进一步提高学生合情推理和演绎推理能力.

3. 本章重点是平行四边形的概念、性质定理和判定定理，它们是得出特殊平行四边形的概念、性质定理和判定定理的基础.

4. 本章概念多，性质定理和判定定理多. 理清它们之间的从属关系，以及联系与区别，有利于培养学生的逻辑思维能力. 这也是本章的教学难点，要引起注意.

5. 通过引言的学习，使学生明确本章学习的主要内容和学习方法.

25.1 平行四边形

平行四边形是常见的图形．小区的伸缩门、庭院的竹篱笆、载重汽车的防护栏等（图 25.1-1），都有平行四边形的形象．你还能举出一些例子吗？[1]

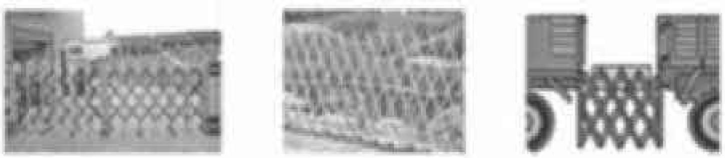


图 25.1-1

我们知道，两组对边[2]分别平行的四边形[3]叫做**平行四边形**（parallelogram）．平行四边形用"▱"表示．如图 25.1-2，平行四边形 $ABCD$ 记作"▱$ABCD$"．

图 25.1-2

25.1.1 平行四边形的性质

由平行四边形的定义，我们知道平行四边形的两组对边分别平行．除此之外，平行四边形还有什么性质呢？

探究

根据定义画一个平行四边形，观察它，除了"两组对边分别平行"外，它的边之间还有什么关系？它的角之间有什么关系？度量一下，和你的猜想一致吗？

通过观察和度量，[4]我们猜想：平行四边形的对边相等，平行四边形的对角相等．下面我们对它进行证明．

[1] 平行四边形是生活中常见的几何图形．让学生多举一些例子，复习、巩固小学已有的平行四边形的概念．

[2] 四边形中不相邻的边，也就是没有公共顶点的边叫做对边．三角形中没有对边的概念，只有角所对的边．教学时要结合图形，让学生认识清楚．

[3] 要强调平行四边形属于四边形，具有四边形的性质，但它是具有特殊条件的四边形．

[4] 观察和度量是发现结论、形成猜想的重要手段．猜想是否正确，尚需演绎推理进行严格的证明．

1. 本节主要内容是平行四边形的概念、性质定理和判定定理．要求学生掌握平行四边形的性质定理和判定定理，并运用上述定理进行证明和计算，进一步培养和发展学生的合情推理和演绎推理能力．

本节是全章的重点，是学习特殊平行四边形的概念、性质定理和判定定理的基础．

本节基础是平行线的性质、判定以及三角形全等等知识，教学时要引导学生回忆上述知识．

2. 学生以前学过平行四边形，对平行四边形并不陌生，但对于概念本质属性的理解需要一个过程．为了帮助学生理解平行四边形的本质属性，在讲平行四边形的概念前，要让学生认清什么是四边形的对边、对角．

平行四边形的概念中有两个条件——"四边形"和"两组对边分别平行"．一个"四边形"必须具备"两组对边分别平行"才是平行四边形；反之，平行四边形一定是"两组对边分别平

[1] 加强证明思路的引导，把平行四边形中的问题转化为全等三角形中的问题，实现未知问题向已知问题的转化.

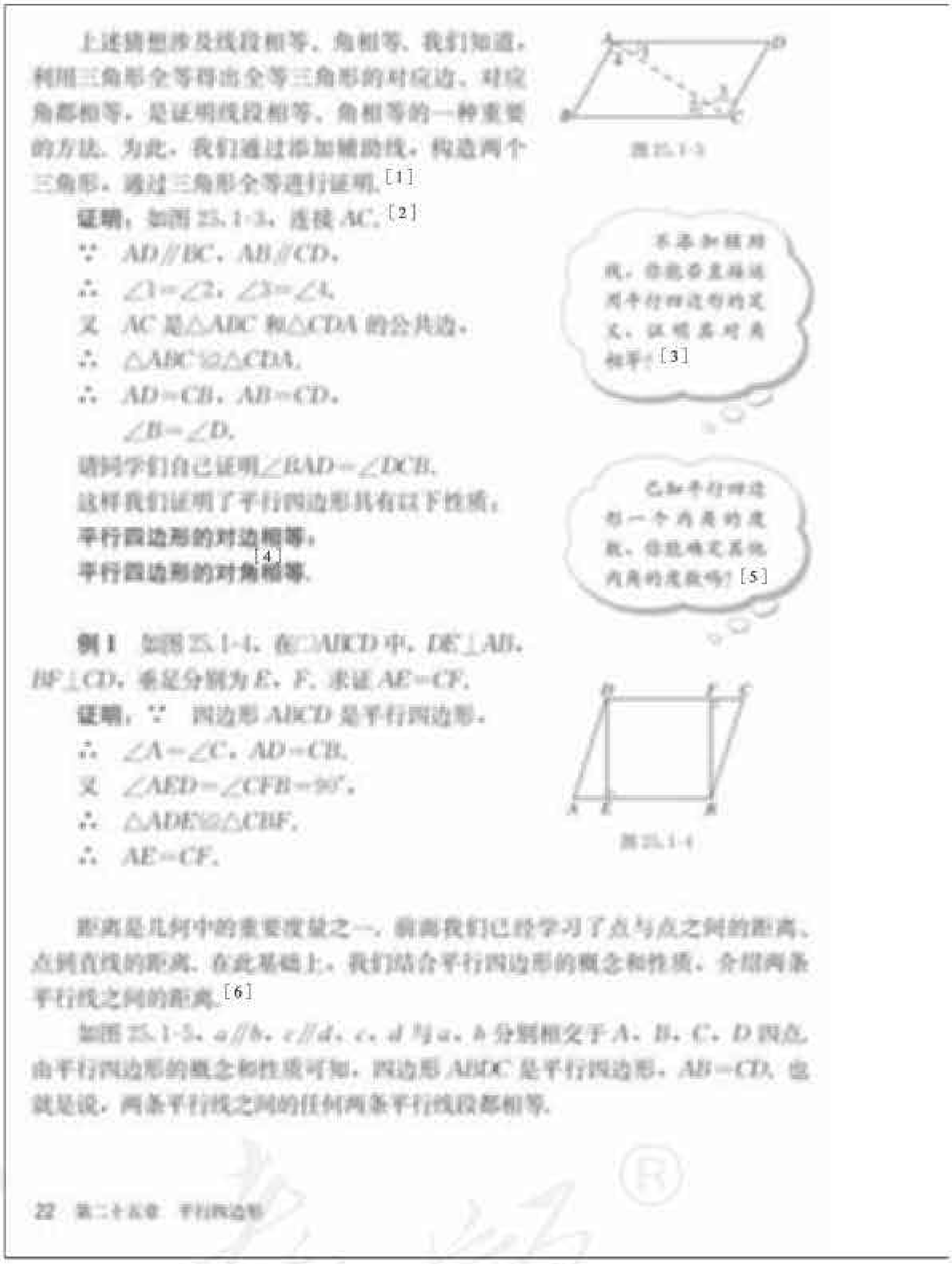
[2] 连接对角线是解决平行四边形问题常用的辅助线. 通过连接对角线，把平行四边形问题转化为三角形问题.

[3] 能. 根据两条直线平行，同旁内角互补，同一个角的同旁内角相等即可证明.

[4] 四边形中的对角是指没有公共边的两个角，也就是对着的两个角，与三角形中常说的边所对的角不同.

[5] 能. 利用平行四边形对角相等和平行线的性质，可以确定其他三个角的度数.

[6] 两条平行线之间距离概念的给出，是平行四边形概念和性质的综合应用.



上述猜想涉及线段相等、角相等. 我们知道，利用三角形全等得出全等三角形的对应边、对应角都相等，是证明线段相等、角相等的一种重要的方法. 为此，我们通过添加辅助线，构造两个三角形，通过三角形全等进行证明.[1]

图 25.1-3

证明：如图 25.1-3，连接 AC.[2]

∵ $AD /\!/ BC$，$AB /\!/ CD$，

∴ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

又 AC 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 的公共边，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

∴ $AD=CB$，$AB=CD$，

$\angle B=\angle D$.

请同学们自己证明 $\angle BAD=\angle DCB$.

这样我们证明了平行四边形具有以下性质：

平行四边形的对边相等.

平行四边形的对角相等.[4]

例 1 如图 25.1-4，在▱$ABCD$ 中，$DE \perp AB$，$BF \perp CD$，垂足分别为 E，F. 求证 $AE=CF$.

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle A=\angle C$，$AD=CB$.

又 $\angle AED=\angle CFB=90°$，

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CBF$.

∴ $AE=CF$.

图 25.1-4

距离是几何中的重要度量之一. 前面我们已经学习了点与点之间的距离、点到直线的距离. 在此基础上，我们结合平行四边形的概念和性质，介绍两条平行线之间的距离.[6]

如图 25.1-5，$a /\!/ b$，$c /\!/ d$，c，d 与 a，b 分别相交于 A，B，C，D 四点. 由平行四边形的概念和性质可知，四边形 $ABDC$ 是平行四边形，$AB=CD$. 也就是说，两条平行线之间的任何两条平行线段都相等.

22 第二十五章 平行四边形

行”的“四边形”.

3. 教科书分两步呈现平行四边形的三个性质定理. 首先设置一个“探究”栏目，让学生通过观察和度量，猜想对边相等、对角相等等性质. 接下来，对证明思路进行引导，通过三角形全等，把它转化为全等三角形问题. 然后安排了利用这两个性质的例 1. 这个过程，体现了教科书对于推理论证的处理，使证明成为学生观察、实验、探究得出结论的自然延续，把合情推理和演绎推理有机结合起来.

实际上，利用平行线的性质，可以直接证明平行四边形的对角相等. 证明平行四边形的对边相等必须通过两个三角形全等. 这里通过三角形全等同时证明了这两个定理.

4. 距离是几何中的重要概念，是几何学习的重要起点. 点与点之间的距离是点到直线的距离、两条平行线之间距离的基础.

5. 接下来，教科书呈现平行四边形对角线互

两条平行线之间的距离与点和点之间的距离、点到直线的距离有何联系与区别？[1]

图 25.1-5

图 25.1-6

从上面的结论可以知道，如果两条直线平行，那么一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等. 两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做这**两条平行线之间的距离**.[2] 如图 25.1-6，$a \parallel b$，A 是 a 上的任意一点，$AB \perp b$，B 是垂足，线段 AB 的长就是 a，b 之间的距离.

练习

1. 在▱$ABCD$ 中，
   (1) 已知 $AB=5$，$BC=3$，求它的周长；
   (2) 已知 $\angle A=38°$，求其余各内角的度数.
2. 如图，把两张对边平行的纸条，随意交叉叠放在一起，重合的部分构成了一个四边形. 转动其中一张纸条，线段 AD 和 BC 的长度有什么关系？为什么？

（第 2 题）

上面我们研究了平行四边形的边、角这两个基本要素的性质. 下面我们研究平行四边形对角线的性质.[3]

探究

如图 25.1-7，在▱$ABCD$ 中，连接 AC，BD，并设它们相交于点 O. OA 与 OC，OB 与 OD 有什么关系？你能证明发现的结论吗？

图 25.1-7

我们猜想，在▱$ABCD$ 中，$OA=OC$，$OB=OD$.

与证明平行四边形的对边相等、对角相等的方法类似，我们也可以通过三

第二十五章 平行四边形 23

[1] 点与点之间的距离是定义点到直线的距离、两条平行线之间距离的基础，它们本质上都是点与点之间的距离.

[2] 任何两条平行线之间的距离都是存在的、唯一的，都是夹在这两条平行线间最短的线段的长度.

练习答案

1. (1) 16；
   (2) 142°，38°，142°，运用平行四边形的对角和邻角的性质.
2. $AD=BC$. 这时构成四边形 $ABCD$ 的两组对边分别平行，它是平行四边形. 根据平行四边形对边相等的性质，可知 $AD=BC$.

[3] 在平行四边形边、角性质的基础上，研究其对角线的性质.

相平分的性质. 同样，教科书先设置一个“探究”栏目，让学生发现结论，形成猜想，然后利用三角形全等证明这个结论.

对角线互相平分是平行四边形的重要性质，在九年级上册“旋转”一章，学习中心对称以及中心对称图形时，我们会有进一步的体会.

6. 例 2 不仅要复习巩固平行四边形对角线互相平分的性质，而且涉及勾股定理以及平行四边形面积的计算. 这些问题常常需要运用勾股定理求平行四边形的高或底. 这些问题比较综合，需要灵活运用所学的有关知识加以解决.

7. 学习第 25.1.1 小节后，希望学生归纳总结平行四边形比一般四边形多哪些性质. 对于平行四边形的性质，引导学生按照边、角、对角线进行总结. 通过复习总结，一方面使学生掌握这些知识，同时培养学生及时复习总结的习惯，提高他们归纳总结的能力.

平行四边形既有对边，又有邻边，对边相等，

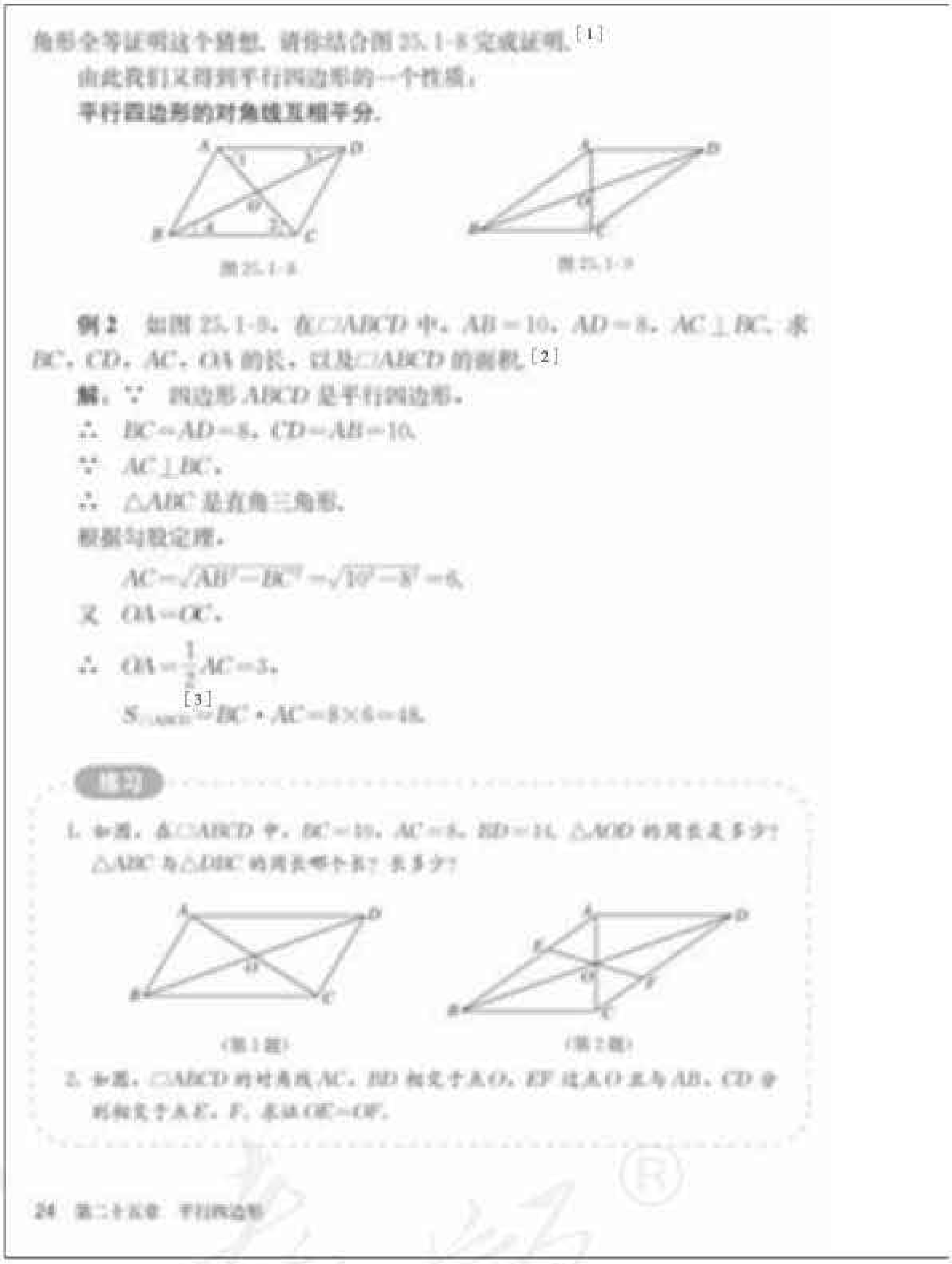
[1] 根据证明思路，可以通过证明 $\triangle OAD \cong \triangle OCB$ 来实现.

[2] 例 2 既巩固平行四边形对角线互相平分的性质，又复习勾股定理和平行四边形面积计算的知识.

[3] 用 S 表示面积时，常在它的下脚注上所求面积的图形标记，例如 $S_{\square ABCD}$ 表示 $\square ABCD$ 的面积.

练习答案

1. $\triangle AOD$ 的周长是 21，利用平行四边形对角线互相平分的性质. $\triangle DBC$ 的周长长，长 6.
2. 提示：证明 $\triangle BOE \cong \triangle DOF$，或 $\triangle AOE \cong \triangle COF$.



角形全等证明这个猜想. 请你结合图 25.1-8 完成证明.[1]

由此我们又得到平行四边形的一个性质：

平行四边形的对角线互相平分.

图 25.1-8　　图 25.1-9

例 2　如图 25.1-9，在 $\square ABCD$ 中，$AB=10$，$AD=8$，$AC \perp BC$，求 BC，CD，AC，OA 的长，以及 $\square ABCD$ 的面积.[2]

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $BC=AD=8$，$CD=AB=10$.

∵ $AC \perp BC$，

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

根据勾股定理，

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6.$$

又 $OA=OC$，

∴ $OA=\frac{1}{2}AC=3$.

$S_{\square ABCD}$[3]$=BC \cdot AC=8\times 6=48$.

练习

1. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$BC=10$，$AC=8$，$BD=14$. $\triangle AOD$ 的周长是多少？$\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的周长哪个长？长多少？

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与 AB，CD 分别相交于点 E，F. 求证 $OE=OF$.

24　第二十五章　平行四边形

邻边不一定相等. 邻边相等的平行四边形是菱形. 平行四边形既有对角，又有邻角，对角相等，邻角互补. 邻角相等的平行四边形是矩形. 平行四边形的对角线相交，而且互相平分.

25.1.2 平行四边形的判定

思考

通过前面的学习，我们知道，平行四边形的对边相等，对角相等，对角线互相平分。反过来，[1]对边相等，或对角相等，或对角线互相平分的四边形是平行四边形吗？也就是说，平行四边形的性质定理的逆命题成立吗？

可以证明，这些逆命题都成立，这样我们得到平行四边形的判定定理：

你能根据平行四边形的定义证明它们吗？

两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

两组对角分别相等的四边形是平行四边形；

对角线互相平分的四边形是平行四边形.[2]

下面我们以“对角线互相平分的四边形是平行四边形”为例，通过三角形全等进行证明.

如图 25.1-10，在四边形 $ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，且 $OA=OC$，$OB=OD$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

图 25.1-10

证明：∵ $OA=OC$，$OD=OB$，

$\angle AOD=\angle COB$，

∴ $\triangle AOD\cong\triangle COB$.

∴ $\angle OAD=\angle OCB$.

∴ $AD\parallel BC$.

同理 $AB\parallel DC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

由上我们知道，平行四边形的判定定理与相应的性质定理互为逆定理.[3]也就是说，当定理的条件与结论互换以后，所得命题仍然成立.

第二十五章 平行四边形 25

[1] 反过来，就是交换原命题的条件和结论，把原命题变成它的逆命题.

[2] 可以让学生先写出这三个判定定理的数学符号表述，再进行证明.

[3] 证明后确认正确的逆命题才能称为逆定理，否则只能称为逆命题.

8. 第 25.1.2 小节研究了平行四边形的判定方法，重点是判定定理，以及判定定理、性质定理的综合应用. 三角形中位线定理的证明是判定定理和性质定理综合应用的具体体现.

除定义外，平行四边形有四个主要判定定理：两组对边分别相等的四边形是平行四边形，两组对角分别相等的四边形是平行四边形，对角线互相平分的四边形是平行四边形，一组对边平行且相等的四边形是平行四边形. 这四个判定定理，教科书都以黑体字表示.

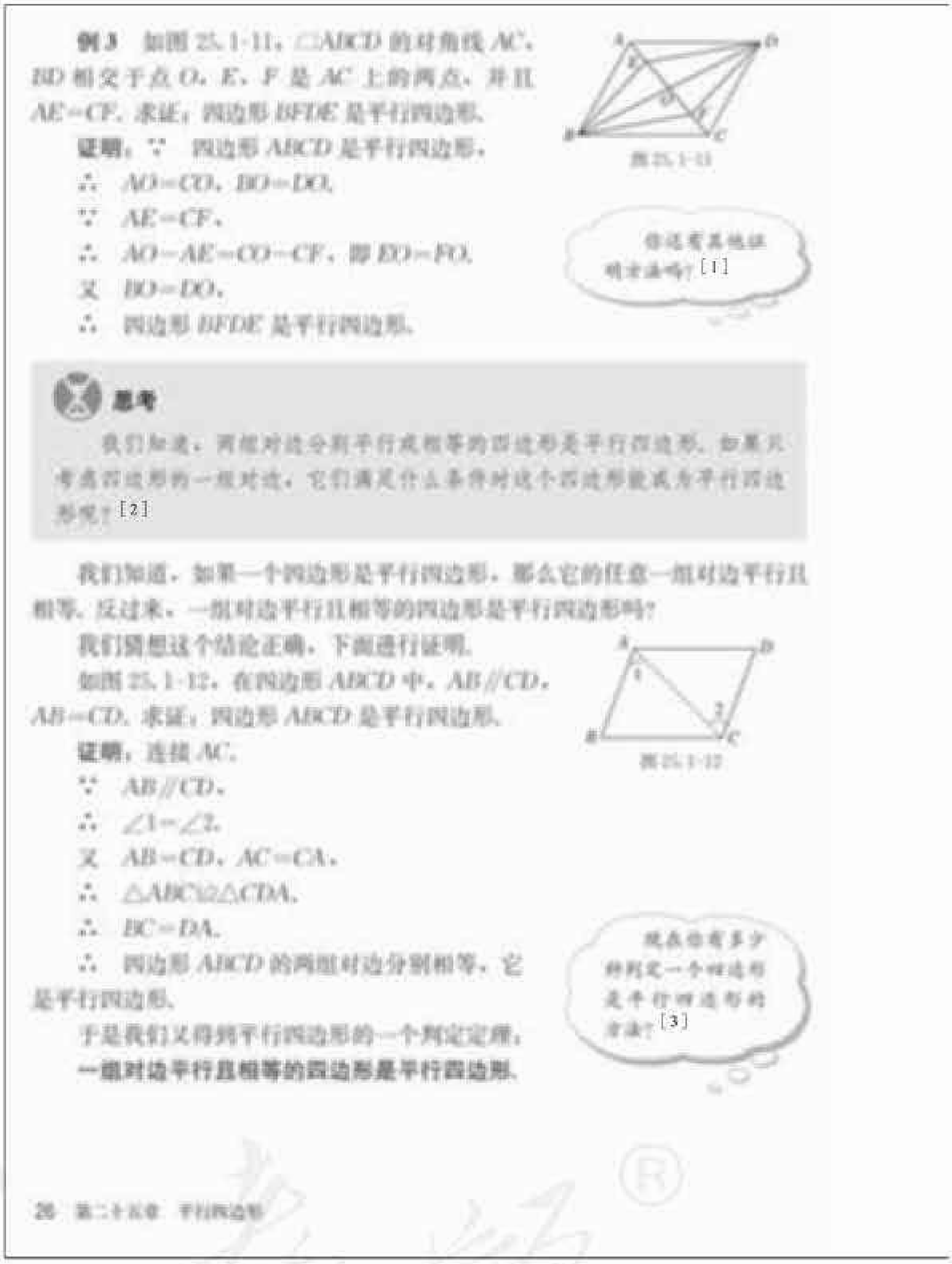
由于前面三个定理与第 25.1.1 小节的三个性质定理对应，因此教科书首先设置了“思考”栏目，让学生联系平行四边形的性质定理，根据命题之间的互逆关系，发现结论，猜想这些结论是否正确，判断能否作为判定定理. 经过证明，这些命题成立，它们可以作为平行四边形的判定定理.

9. 学生前面已经学习了互逆命题的概念，他

[1] 可以利用定义，或证明两组对边分别相等，或两组对角分别相等.

[2] 上面讨论的是两组对边的情况，这里讨论的一组对边，学生容易想到一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

[3] 引导学生分别从边、角、对角线等方面梳理平行四边形的判定方法.



例3 如图 25.1-11，▱ABCD 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 是 AC 上的两点，并且 $AE=CF$. 求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

图 25.1-11

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AO=CO$，$BO=DO$.

∵ $AE=CF$，

∴ $AO-AE=CO-CF$，即 $EO=FO$.

又 $BO=DO$，

∴ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

思考

我们知道，两组对边分别平行或相等的四边形是平行四边形. 如果只考虑四边形的一组对边，它们满足什么条件时这个四边形能成为平行四边形呢？[2]

我们知道，如果一个四边形是平行四边形，那么它的任意一组对边平行且相等. 反过来，一组对边平行且相等的四边形是平行四边形吗？

我们猜想这个结论正确，下面进行证明.

如图 25.1-12，在四边形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$AB=CD$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

图 25.1-12

证明：连接 AC.

∵ $AB // CD$，

∴ $\angle 1=\angle 2$.

又 $AB=CD$，$AC=CA$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

∴ $BC=DA$.

∴ 四边形 $ABCD$ 的两组对边分别相等，它是平行四边形.

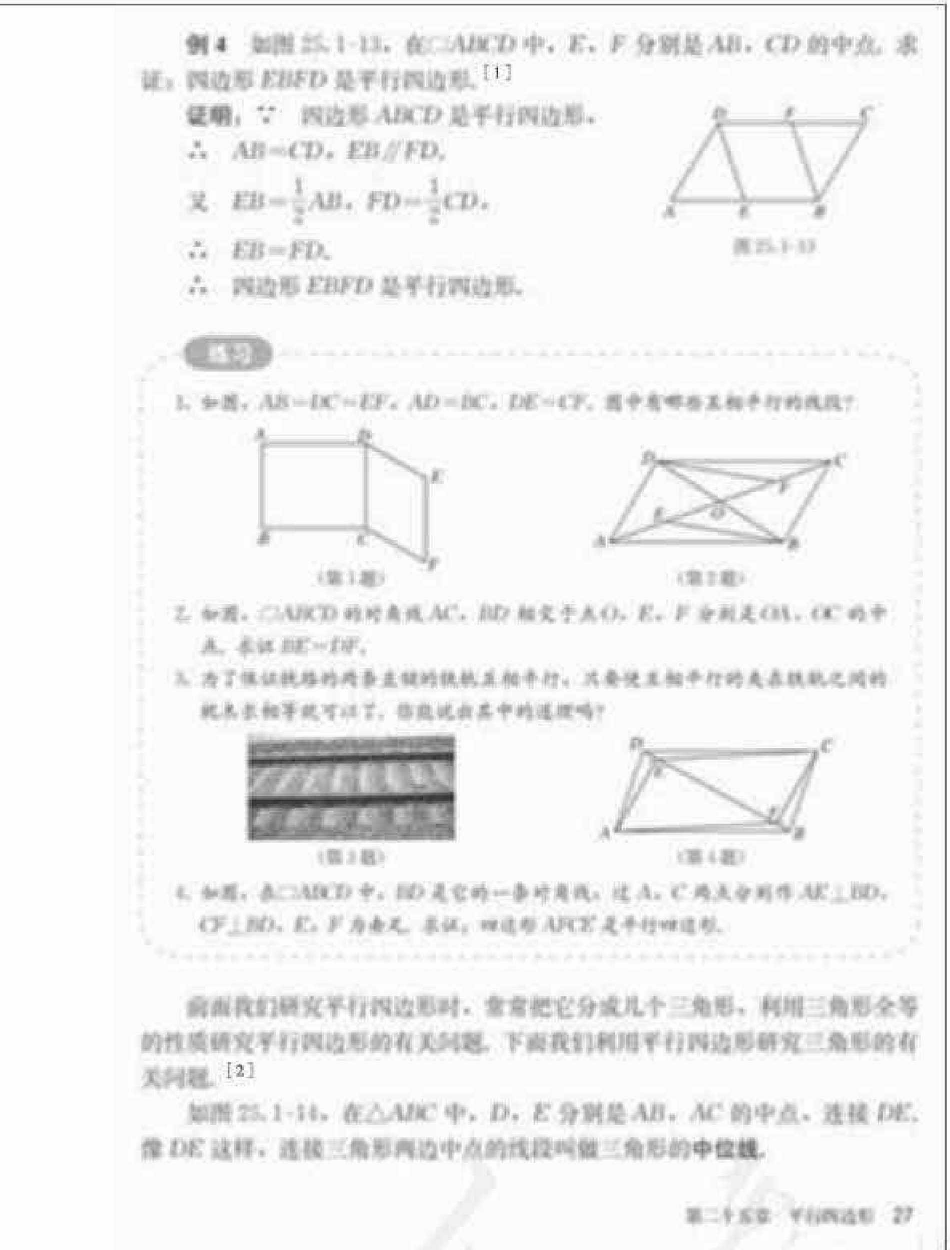
于是我们又得到平行四边形的一个判定定理：

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

们既有对平行线的判定和性质互逆关系的认识，又有对等腰三角形的判定和性质、勾股定理及其逆定理的互逆关系的亲身体验，因此由平行四边形的性质定理得到它们的逆命题，从而猜想平行四边形的判定方法很自然.

对于平行四边形的判定定理，教科书指出可以证明，并以“对角线互相平分的四边形是平行四边形”为例，进行了证明. 证明时，首先把文字语言转化为符号语言和图形语言，给出已知和结论，然后进行严格的证明. 其他两个判定定理的证明可以仿照上述方式，应用平行四边形的定义进行证明.

10. 对于“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”这个判定定理，教科书把它放在最后，作为判定定理. 一方面，我们仍然是从逆命题的角度提出问题，发现结论，形成猜想，然后进行证明；另一方面，它不是平行四边形性质定理的逆定理. 这个定理可用平行四边形的定义或


例4 如图25.1-13，在▱ABCD中，E，F分别是AB，CD的中点. 求证：四边形EBFD是平行四边形.[1]

证明：∵ 四边形ABCD是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$EB\parallel FD$.

又 $EB=\frac{1}{2}AB$，$FD=\frac{1}{2}CD$，

∴ $EB=FD$.

∴ 四边形EBFD是平行四边形.

图25.1-13

练习

1. 如图，$AB=DC=EF$，$AD=BC$，$DE=CF$. 图中有哪些互相平行的线段？

(第1题) (第2题)

2. 如图，▱ABCD的对角线AC，BD相交于点O，E，F分别是OA，OC的中点. 求证 $BE=DF$.
3. 为了保证铁路的两条直铺的铁轨互相平行，只要使互相平行的夹在铁轨之间的枕木长相等就可以了. 你能说出其中的道理吗？

(第3题) (第4题)

4. 如图，在▱ABCD中，BD是它的一条对角线，过A，C两点分别作$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，E，F为垂足. 求证：四边形AFCE是平行四边形.

前面我们研究平行四边形时，常常把它分成几个三角形，利用三角形全等的性质研究平行四边形的有关问题. 下面我们利用平行四边形研究三角形的有关问题.[2]

如图25.1-14，在△ABC中，D，E分别是AB，AC的中点，连接DE. 像DE这样，连接三角形两边中点的线段叫做三角形的**中位线**.

第二十五章 平行四边形 27

[1] 例4的证明方法有多种，这里用的是“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”的判定定理.

练习答案

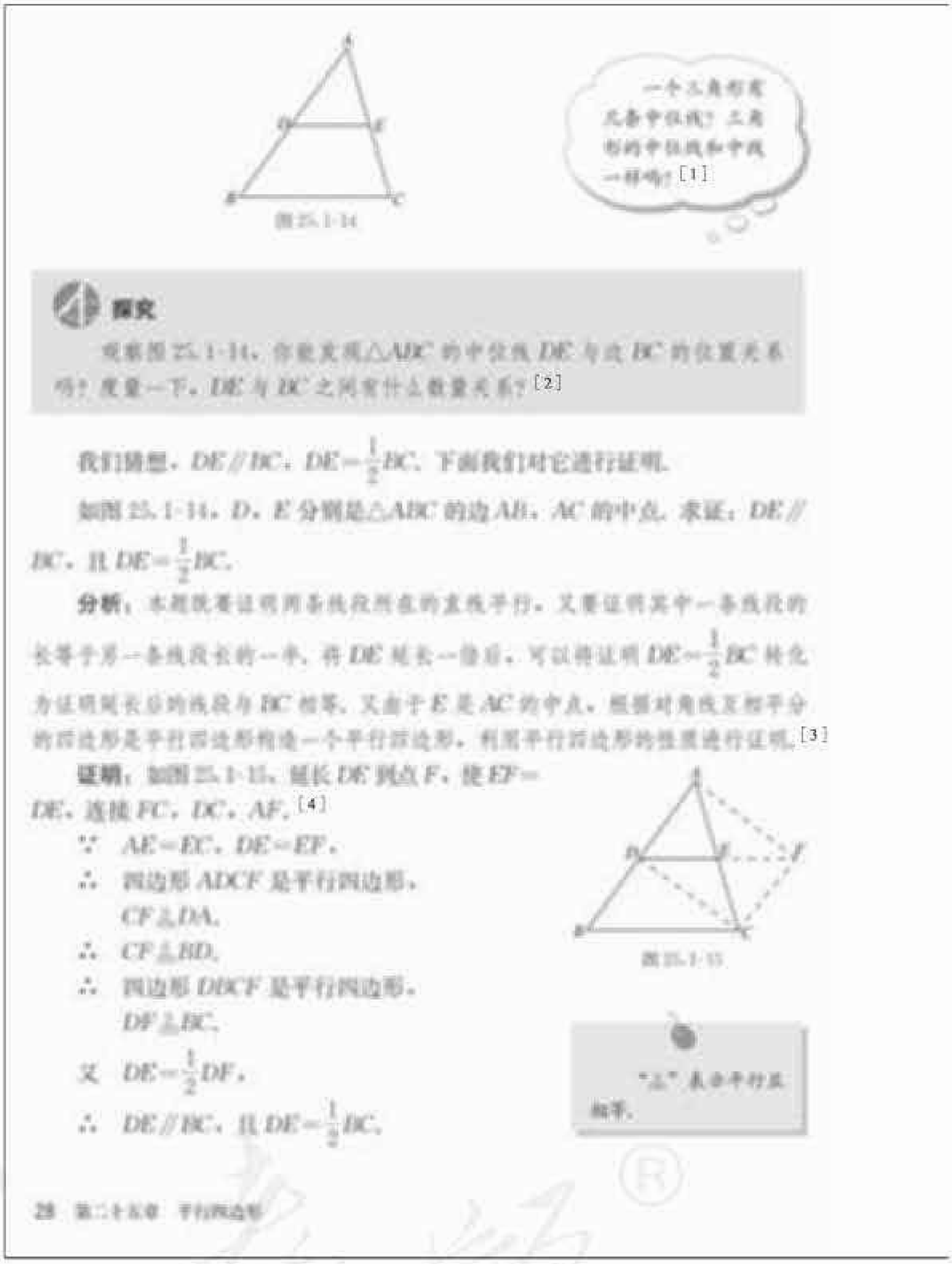
1. $AB\parallel DC\parallel EF$，$AD\parallel BC$，$DE\parallel CF$.
2. 提示：连接DE，BF，运用“对角线互相平分的四边形是平行四边形”的判定定理.
3. 根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形可知，由枕木和铁轨构成的四边形是平行四边形，而平行四边形的对边平行，所以两条铁轨平行.
4. 提示：证明 $AE\perp\!\!\!\!=CF$.

[2] 平行四边形与三角形、三角形全等等知识联系非常紧密. 除了运用三角形及其全等研究平行四边形外，我们还可以运用平行四边形的知识研究三角形中的有关问题.

前面讲到的三个判定定理来证明. 教学时，要引导学生运用不同方法进行证明，活跃学生的思维.

需要指出的是，平行线和全等三角形的有关知识，仍是证明平行四边形判定定理的基础. 因此，在证明第一个判定定理时，只能根据定义，想办法证明四边形的两组对边分别平行. 实际上，因为四个判定定理都可以用定义来证明，而且它们之间可以互相进行证明，因此它们之间的顺序不是固定不变的.

11. 学过本节后，应引导学生梳理学过的平行四边形的判定方法. 从边看有三种，即分别证明两组对边分别平行，或一组对边平行且相等，或两组对边分别相等；从角看，要证明两组对角分别相等；从对角线看，要证明对角线互相平分. 平行四边形的这些判定定理，有的是相应的性质定理的逆定理. 建议教学中先复习逆定理的概念，让学生说出性质定理的逆命题，然后证明



一个三角形有几条中位线？三角形的中位线和中线一样吗？[1]

图 25.1-14

探究

观察图 25.1-14，你能发现△ABC 的中位线 DE 与边 BC 的位置关系吗？度量一下，DE 与 BC 之间有什么数量关系？[2]

我们猜想，$DE\parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$．下面我们对它进行证明．

如图 25.1-14，D，E 分别是△ABC 的边 AB，AC 的中点．求证：$DE\parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$．

分析：本题既要证明两条线段所在的直线平行，又要证明其中一条线段的长等于另一条线段长的一半．将 DE 延长一倍后，可以将证明 $DE=\frac{1}{2}BC$ 转化为证明延长后的线段与 BC 相等．又由于 E 是 AC 的中点，根据对角线互相平分的四边形是平行四边形构造一个平行四边形，利用平行四边形的性质进行证明．[3]

证明：如图 25.1-15，延长 DE 到点 F，使 $EF=DE$，连接 FC，DC，AF．[4]

∵ $AE=EC$，$DE=EF$，

∴ 四边形 ADCF 是平行四边形．

$CF \underline{\parallel} DA$．

∴ $CF \underline{\parallel} BD$．

∴ 四边形 DBCF 是平行四边形．

$DF \underline{\parallel} BC$．

又 $DE=\frac{1}{2}DF$，

∴ $DE\parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$．

图 25.1-15

“$\underline{\parallel}$”表示平行且相等．

28 第二十五章 平行四边形

[1] 一个三角形有三条中位线．三角形的中位线与中线不一样，中线是连接三角形的顶点与其对边中点的线段．

[2] 研究线段，一般是先研究它们的位置关系，相交还是平行，垂直关系是相交的重要特例；再研究它们之间的数量关系，相等还是不等，不等的话，是倍数关系还是其他关系．

[3] 这里说的是证明的思路，也就是如何构造平行四边形，把三角形问题转化为平行四边形问题，运用平行四边形的判定定理和性质定理进行证明．

[4] 也可以作 $CF\parallel AB$，与 DE 的延长线交于点 F，通过证明 $\triangle ADE\cong\triangle CFE$，得到 AD 平行且等于 FC，运用对边平行且相等的四边形是平行四边形．以下证明与例题类似．

得出判定定理，这样便于学生记忆．

从本节开始，应强调让学生直接运用平行四边形的性质定理和判定定理解决问题．凡是可以直接运用平行四边形知识证明的问题，不要再回到用三角形全等证明．

12．平行四边形知识的运用包括三方面：一是直接运用平行四边形的性质求角的度数或线段的长度，证明角相等或互补，证明线段相等或倍分等；二是判定一个四边形是平行四边形，从而判定直线平行等；三是先判定一个四边形是平行四边形，然后运用平行四边形的性质解决某些问题．

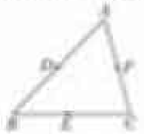
接下来，教科书安排了平行四边形性质定理和判定定理的应用：三角形中位线定理的探索及其证明．三角形中位线定理是三角形的重要性质定理．这个定理的特点是：同一个题设下，有两个结论，一个结论表明位置关系，另一个结论表明数量关系．应用这个定理时，不一定同时用到两个结论，有时用到平行关系，有时用到倍分关系．根据具体情况，灵活使用．

通过上述证明，我们得到三角形的中位线定理：[1]

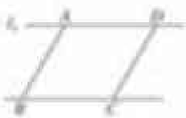
三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.

练习

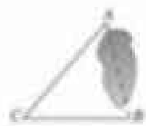
1. 如图，在$\triangle ABC$中，D，E，F分别是AB，BC，CA的中点. 以这些点为顶点，在图中，你能画出多少个平行四边形？为什么？



（第1题）



（第2题）



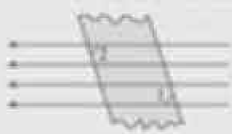
（第3题）

2. 如图，直线$l_1 /\!/ l_2$，在l_1，l_2上分别截取AD，BC，使$AD=BC$，连接AB，CD. AB和CD有什么关系？为什么？
3. 如图，A，B两点被池塘隔开，在AB外选一点C，连接AC和BC. 怎样测出A，B两点间的距离？根据是什么？

习题 25.1

复习巩固

1. 如果四边形$ABCD$是平行四边形，$AB=6$，且AB的长是$\square ABCD$周长的$\frac{3}{16}$，那么BC的长是多少？
2. 如图，在一束平行光线中插入一张对边平行的纸板. 如果光线与纸板右下方所成的$\angle 1$是$72°15'$，那么光线与纸板左上方所成的$\angle 2$是多少度？为什么？



（第2题）

（第3题）

3. 如图，$\square ABCD$的对角线AC，BD相交于点O，且$AC+BD=36$，$AB=11$，求$\triangle OCD$的周长.

第二十五章 平行四边形 29

[1] 三角形中位线定理的得出是平行四边形判定定理和性质定理的直接应用，它在图形证明和计算中具有广泛的应用.

练习答案

1. 3个，分别是$\square ADEF$，$\square BEFD$，$\square ECFD$. 对边平行且相等的四边形是平行四边形.
2. AB与CD平行且相等. 由于AD与BC平行且相等，所以四边形$ABCD$是平行四边形，因此AB与CD平行且相等.
3. 方法1：可分别延长AC和BC到D，E，使$DC=AC$，$EC=BC$，连接DE，量出DE的距离，即得AB的距离，$AB=DE$.
   方法2：可分别延长CA和CB到D，E，使$DA=AC$，$BE=BC$，连接DE，量出DE的距离，即得AB的距离，$AB=\frac{1}{2}DE$.

13. 平行四边形的概念、性质定理和判定定理都是非常重要的基础知识，都是本章的重点内容. 要让学生熟练掌握这些基础知识，如教科书配备的练习、习题不够，可从复习题或课外习题中选择补充.

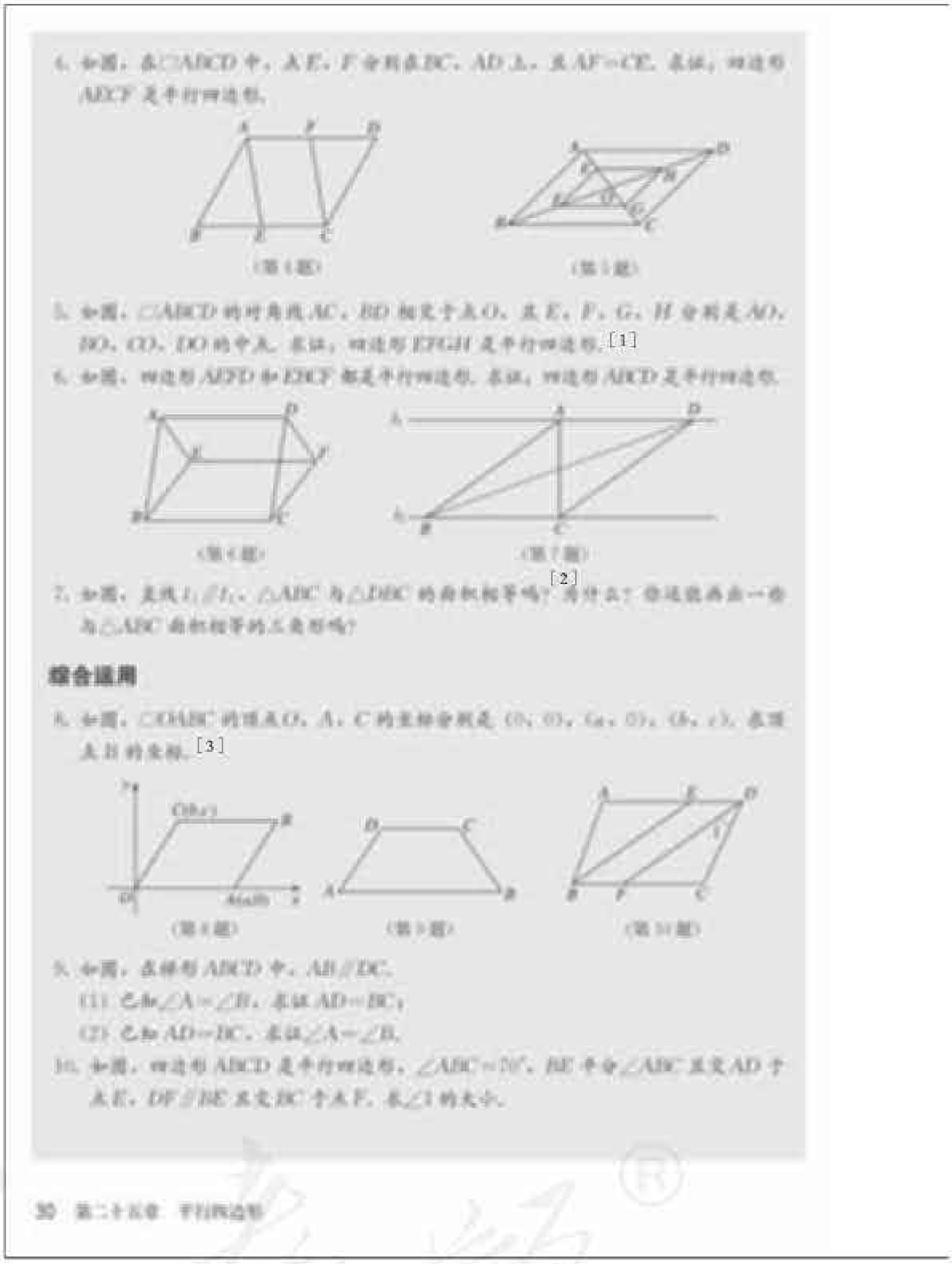
习题 25.1

1. 习题25.1共安排了15道题，都是围绕平行四边形的性质和判定展开的. “复习巩固”的第1题是一道计算题，主要用到平行四边形对边相等的性质. 第2题应用平行四边形对角相等的性质. 第3题应用平行四边形的两组对边相等，以及对角线互相平分的性质. 第4，5题要综合应用平行四边形的性质和判定方法，首先要用性质得出一些边或角相等，然后应用判定方法. 第6题主要应用平行四边形的对边平行且相等的性质和一组对边平行且相等的四边形是平行四边形的判定方法. 第7题主要利用两条平行线

[1] 可以有不同的证明方法. 证明四边形 $EFGH$ 的对角线互相平分，或利用三角形中位线的性质证明它的对边平行且相等.

[2] 同底等高的三角形面积相等.

[3] 从形式上看本题是“图形与坐标”的内容，但本质上是平行四边形本身的性质.



4. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，AD 上，且 $AF=CE$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

(第4题)　　(第5题)

5. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F，G，H 分别是 AO，BO，CO，DO 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.[1]
6. 如图，四边形 $AEFD$ 和 $EBCF$ 都是平行四边形. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(第6题)　　(第7题)

7. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$，△ABC 与△DBC 的面积相等吗？为什么？你还能画出一些与△ABC 面积相等的三角形吗？[2]

综合运用

8. 如图，▱$OABC$ 的顶点 O，A，C 的坐标分别是 $(0, 0)$，$(a, 0)$，(b, c). 求顶点 B 的坐标.[3]

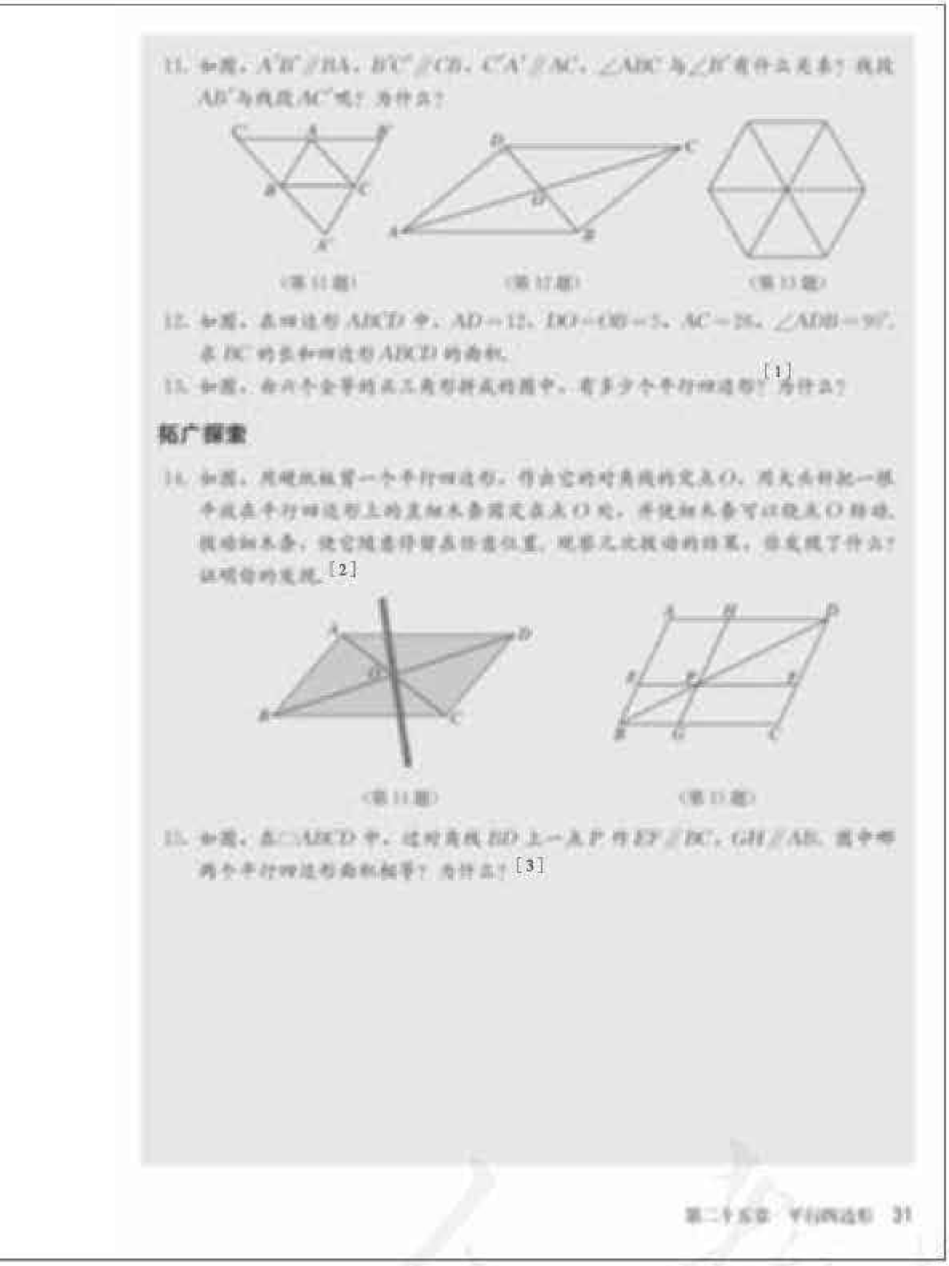
(第8题)　　(第9题)　　(第10题)

9. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$.
(1) 已知 $\angle A=\angle B$，求证 $AD=BC$；
(2) 已知 $AD=BC$，求证 $\angle A=\angle B$.
10. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=70^\circ$，BE 平分 $\angle ABC$ 且交 AD 于点 E，$DF \parallel BE$ 且交 BC 于点 F. 求 $\angle 1$ 的大小.

之间的距离以及同底等高的三角形面积相等.

2. “综合运用”共安排了 6 道题目. 第 8 题是在平面直角坐标系中，由平行四边形三个顶点的坐标确定第四个顶点的坐标，主要应用平行四边形对边相等的性质. 第 9 题从形式上看是个梯形，但是通过添加辅助线，它可以转化为平行四边形的问题，由角相等到边相等，由边相等到角相等. 第 10 题主要应用平行四边形角的性质和平行线的性质. 利用平行线的性质和平行四边形的判定方法，可以发现第 11 题图中有三个平行四边形，由此得到线段和角相等. 第 12 题首先要利用勾股定理和对角线互相平分的四边形是平行四边形的判定方法，证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，然后求 BC 的长和它的面积. 数第 13 题中的平行四边形时，要注意按照一定的顺序，充分利用等边三角形的性质.

3. 在“拓广探索”的第 14 题中，可以发现一些线段、角相等，一些三角形面积相等，一些



11. 如图，$A'B' \parallel BA$，$B'C' \parallel CB$，$C'A' \parallel AC$，$\angle ABC$ 与 $\angle B'$ 有什么关系？线段 AB' 与线段 AC' 呢？为什么？

（第11题）　（第12题）　（第13题）

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=12$，$DO=OB=5$，$AC=26$，$\angle ADB=90°$，求 BC 的长和四边形 $ABCD$ 的面积.

13. 如图，在六个全等的正三角形拼成的图中，有多少个平行四边形[1]？为什么？

拓广探索

14. 如图，用硬纸板剪一个平行四边形，作出它的对角线的交点 O，用大头针把一根平放在平行四边形上的直细木条固定在点 O 处，并使细木条可以绕点 O 转动．拨动细木条，使它随意停留在任意位置．观察几次拨动的结果，你发现了什么？证明你的发现.[2]

（第14题）　（第15题）

15. 如图，在▱$ABCD$ 中，过对角线 BD 上一点 P 作 $EF \parallel BC$，$GH \parallel AB$，图中哪两个平行四边形面积相等？为什么？[3]

第二十五章　平行四边形　31

[1] 注意不重不漏.

[2]假定木条与▱$ABCD$ 的两边 AD，BC 的交点分别为 E，F，可以发现 $OE=OF$，$AE=CF$，$DE=BF$，$\triangle AOE \cong \triangle COF$，$\triangle DOE \cong \triangle BOF$ 等.

[3] 里面有很多全等的三角形，全等三角形的面积相等，等量减等量仍然是等量.

第 14，15 题都是在图形的动态变化中寻找不变的数量关系，包括线段相等、三角形全等、面积相等等.

四边形面积相等等，证明它们主要利用平行四边形的性质和判定方法，以及三角形全等的知识等. 第 15 题是在图形的动态变化中寻找不变的数量关系，利用平行四边形的性质和三角形全等的知识，可以得到▱$AEPH$ 与▱$PGCF$ 的面积相等.

25.2 特殊的平行四边形

上节我们研究了平行四边形．下面我们通过平行四边形角、边的特殊化，研究特殊的平行四边形——矩形、菱形和正方形．[1]

25.2.1 矩形

我们先从角开始．如图 25.2-1，当平行四边形的一个角为直角时，这时的平行四边形是一个特殊的平行四边形．有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**[2]（rectangle），也就是长方形．

图 25.2-1

矩形也是常见的图形．门窗框、书桌面、教科书封面、地砖等（图 25.2-2）都有矩形的形象．你还能举出一些例子吗？

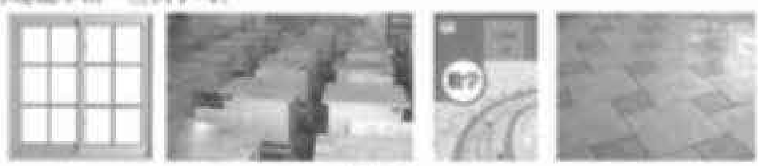


图 25.2-2

思考

因为矩形是平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质．由于它有一个角为直角，它是否具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质呢？[3]

对于矩形，我们仍然从它的边、角和对角线等方面进行研究．可以发现并证明（请你自己完成证明），矩形还有以下性质：

矩形的四个角都是直角；[4]

矩形的对角线相等．

上节我们运用平行四边形的判定和性质研究了三角形的中位线．下面我们用矩形的性质研究直角三角形的一个性质．[5]

[1] 角、边是平行四边形的基本要素，角、边的变化引起平行四边形的变化．

[2] 教学时，可以作一个教具，在课堂上演示，让学生观察角的变化．当一个角变为直角时，指出这时的平行四边形是矩形．使学生明确，矩形是有一个角是直角的特殊的平行四边形．

[3] 矩形肯定具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质．

[4] 平行四边形的邻角互补、对角相等，利用它们很容易推出这个性质．

[5] 平行四边形与三角形联系非常紧密，既可以用三角形及其全等研究平行四边形的性质定理及其判定定理，又可以运用平行四边形的知识研究三角形中的问题．由于矩形的四个角均为直角，所以自然想到用矩形研究直角三角形中的问题．

1. 本节内容是矩形、菱形、正方形的概念、性质定理和判定定理．概念是基础，重点是它们的性质定理和判定定理．

矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，其中矩形、菱形分别是有一个直角和一组邻边相等的特殊平行四边形，正方形是一组邻边相等的特殊矩形或一个角是直角的特殊菱形．

本节内容，也可以按照概念、性质、判定把三种图形放在一起安排，这样可以把它们之间的联系与区别对比的很清楚．但是担心把图形搞混，发生张冠李戴的错误，因此教科书还是按照图形来安排．

2. 矩形就是小学已经学过的长方形，学生比较熟悉，因此教科书直接给出矩形的定义．矩形是在平行四边形的前提下定义的，矩形是平行四边形，但它是特殊的平行四边形，特殊之处就是有一个角是直角．

3. 由于矩形比平行四边形多了“有一个角是

思考

如图 25.2-3，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O. 我们观察 $\text{Rt}\triangle ABC$，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，BO 是斜边 AC 上的中线，BO 与 AC 有什么关系？

图 25.2-3

根据矩形的性质，我们知道，$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$.[1] 由此，我们得到直角三角形的一个性质：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.[2]

例 1 如图 25.2-4，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle AOB=60^\circ$，$AB=4$. 求矩形对角线的长.

图 25.2-4

解： ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ AC 与 BD 相等且互相平分.

∴ $OA=OB$.

又 $\angle AOB=60^\circ$，

∴ $\triangle OAB$ 是等边三角形.

∴ $OA=AB=4$.

∴ $AC=BD=2OA=8$.

练习

1. 求证：矩形的对角线相等.
2. 一个矩形的一条对角线长为 8，两条对角线的一个交角为 120°，求这个矩形的边长（结果保留小数点后两位）.
3. 矩形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？

上面我们研究了矩形的性质. 下面我们研究如何判定一个平行四边形或四边形是矩形.

第二十五章 平行四边形 33

[1] 要求学生写出规范的证明过程.

[2] 这是直角三角形非常重要的性质，具有广泛的应用.

练习答案

1. 提示：如教科书图 25.2-3，证明 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$.
2. 4，6.93.
3. 是. 它有两条对称轴，分别是对边中点连线所在的直线.

直角”的条件，自然增加了一些特殊的性质. 对于矩形的性质，教科书设置了“思考”栏目，从矩形是特殊的平行四边形出发，让学生从角、边和对角线三方面思考其不同于平行四边形的特殊性质.

类比运用平行四边形研究三角形中位线等问题，我们容易想到运用矩形研究直角三角形中的有关问题.

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质，是矩形性质的一个推论. 它是直角三角形的一个重要性质，在求线段长或线段倍分关系时，这个结论常被用到.

4. 对于矩形的判定定理，我们完全类比平行四边形判定定理的研究过程，从矩形性质定理的逆命题出发，提出猜想，发现结论，然后给出证明.

应着重指出，在所有判定方法中，用定义判定是最基本的判定方法，其他判定方法都是以定

[1] 可以完全类比平行四边形判定定理的研究过程，从矩形性质定理的逆命题出发，寻找判定定理发现及其证明的过程.

[2] 这个判定定理的证明不难，可以让学生自己完成.

[3] 测量对边长度相等，确保它是平行四边形；再测量它的对角线相等，保证它是矩形.

[4] 四个角都是直角的四边形是矩形. 其实判定一个四边形是矩形，知道三个角是直角就可以了. 因为由四边形内角和定理可知，这时第四个角也是直角.

由矩形的定义可知，有一个角是直角的平行四边形是矩形. 除此之外，还有没有其他判定方法呢？

与研究平行四边形的判定方法类似，我们研究矩形的性质定理的逆命题，看看它们是否成立.[1]

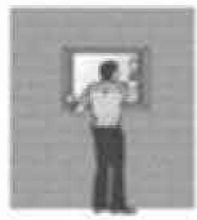
思考

我们知道，矩形的对角线相等. 反过来，对角线相等的平行四边形是矩形吗？

可以发现并证明矩形的一个判定定理：[2]

对角线相等的平行四边形是矩形.

工人师傅在做门窗或矩形零件时，不仅要测量两组对边的长度是否分别相等，常常还要测量它们的两条对角线是否相等，以确保图形是矩形. 你知道其中的道理吗？[3]



思考

前面我们研究了矩形的四个角，知道它们都是直角. 它的逆命题成立吗？即四个角都是直角的四边形是矩形吗？进一步，至少有几个角是直角的四边形是矩形？[4]

可以发现并证明矩形的另一个判定定理：

有三个角是直角的四边形是矩形.

例 2 如图 25.2-5，在▱ABCD 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $OA=OD$，$\angle OAD=50^\circ$. 求 $\angle OAB$ 的度数.

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$.

又 $OA=OD$，

∴ $AC=BD$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

图 25.2-5

34 第二十五章 平行四边形

义为基础推导出来的. 矩形的常用判定方法有三种：一个角是直角的平行四边形是矩形，对角线相等的平行四边形是矩形，有三个角是直角的四边形是矩形.

在上面的两个判定定理中，需要注意它们的前提条件：一个是平行四边形，另一个是四边形.

对于矩形的两个判定定理，教科书都设置了“思考”栏目，从性质定理的逆命题出发，从数学本身提出问题. 这样做的目的，是加强数学自身的逻辑力量，进一步提高合情推理和演绎推理能力.

∴ $\angle DAB=90^\circ$.

又 $\angle OAD=50^\circ$,

∴ $\angle OAB=40^\circ$.

练习

1. 八年级（3）班同学要在广场上布置一个矩形的花坛，计划用红花摆成两条对角线. 如果一条对角线用了38盆红花，还需要从花房运来多少盆红花？[1] 为什么？如果一条对角线用了49盆呢？[2]

（第1题）

2. 如图，▱ABCD 的对角线 AC，BD 相交于点 O，△OAB 是等边三角形，且 AB=4，求▱ABCD 的面积.

（第2题）

25.2.2 菱形

我们观察平行四边形的一组邻边. 如图25.2-6，当这组邻边相等时，这时的平行四边形也是一个特殊的平行四边形. 有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形[3] (rhombus).

图25.2-6

菱形也是常见的图形. 一些门窗的窗格、美丽的中国结、伸缩的衣帽架（图25.2-7）等都有菱形的形象. 你还能举出一些例子吗？

图25.2-7

思考

因为菱形是平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质. 由于它的一组邻边相等，它是否具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质呢？

第二十五章 平行四边形 35

[1] 由于38为偶数，因此对角线的中点在第19盆红花与第20盆红花的中间.

[2] 由于49为奇数，因此对角线的中点在第25盆红花处.

练习答案

1. 需要再搬来38盆红花. 根据矩形的对角线相等，以及对角线交点处不放花. 需要再搬来48盆红花. 根据矩形的对角线相等，以及对角线交点处要放花.
2. $16\sqrt{3}$.

[3] 动态演示平行四边形变成菱形的过程，使学生对菱形与平行四边形的关系形成深刻的印象.

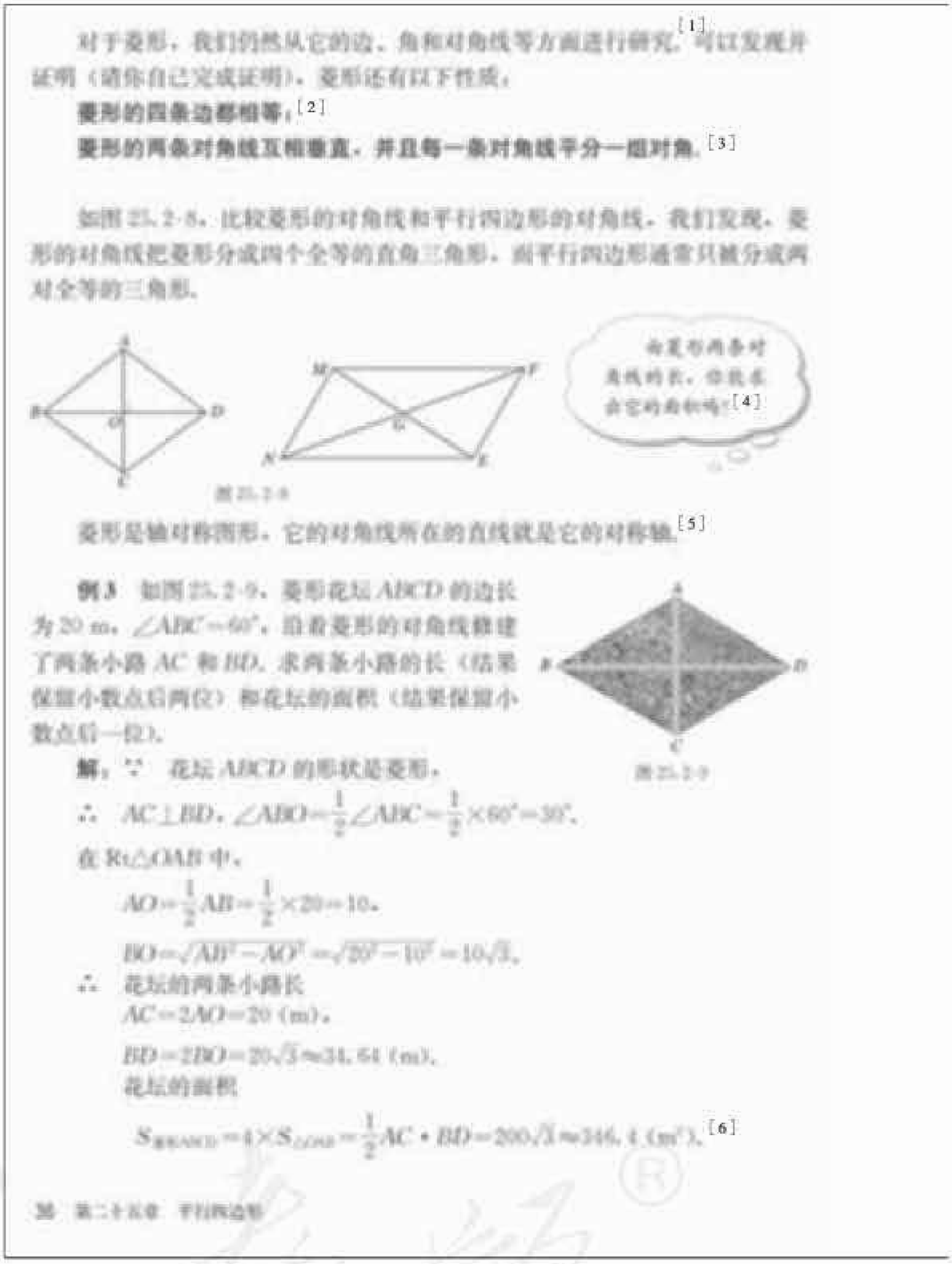
5. 和矩形类似，菱形也是特殊的平行四边形. 讲定义时也要突出两条：一是强调菱形是平行四边形，二是一组邻边相等.

6. 菱形比平行四边形多了“一组邻边相等”的条件. 和矩形类似，它比平行四边形多了一些特殊性质.

对菱形性质的探讨，可以完全类比矩形性质的探讨，从图形本身的特征出发进行研究.

对于菱形的四条边都相等的性质，根据菱形的定义和平行四边形对边相等的性质很容易证明. 而关于菱形的对角线性质的证明，需要用到等腰三角形底边上的高、中线和顶角平分线三线合一的性质，证明时要引导学生回忆等腰三角形的这个性质.

7. 根据菱形对角线的性质、三角形面积公式和图形面积的性质——图形的面积等于它各部分面积的和，可以得到计算菱形面积的一个特殊公式. 计算菱形面积时，除应用计算平行四边形



对于菱形，我们仍然从它的边、角和对角线等方面进行研究．[1]可以发现并证明（请你自己完成证明），菱形还有以下性质：

菱形的四条边都相等；[2]

菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角．[3]

如图 25.2-8，比较菱形的对角线和平行四边形的对角线，我们发现，菱形的对角线把菱形分成四个全等的直角三角形，而平行四边形通常只被分成两对全等的三角形．

图 25.2-8

菱形是轴对称图形，它的对角线所在的直线就是它的对称轴．[5]

例 3 如图 25.2-9，菱形花坛 $ABCD$ 的边长为 20 m，$\angle ABC=60°$，沿着菱形的对角线修建了两条小路 AC 和 BD．求两条小路的长（结果保留小数点后两位）和花坛的面积（结果保留小数点后一位）．

图 25.2-9

解： ∵ 花坛 $ABCD$ 的形状是菱形，

∴ $AC\perp BD$，$\angle ABO=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$．

在 Rt△OAB 中，

$AO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 20=10$，

$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}$．

∴ 花坛的两条小路长

$AC=2AO=20$ (m)，

$BD=2BO=20\sqrt{3}\approx 34.64$ (m)．

花坛的面积

$S_{菱形ABCD}=4\times S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=200\sqrt{3}\approx 346.4$ (m²)．[6]

[1] 我们始终从边、角和对角线三方面研究平行四边形以及特殊的平行四边形的性质．

[2] 由于菱形是有一组邻边相等的平行四边形，由平行四边形对边相等的性质容易证明菱形的这个性质．

[3] 利用菱形四条边相等和等腰三角形三线合一的性质容易证明菱形的这个性质．

[4] 菱形被它的两条对角线分成四个全等的直角三角形，它们的底和高分别是两条对角线的一半．利用三角形的面积公式可以得到，菱形的面积等于它的两条对角线长的积的一半．

[5] 这个性质非常重要，这是从“图形的变化”的角度认识菱形的性质．

[6] 可以让学生用不同方法计算菱形的面积．

面积的一般方法外，还可以应用菱形的对角线计算面积，应用时可以根据已知条件灵活选择计算方法．例 3 除了用以巩固菱形的性质外，还可以引导学生利用不同的方法计算菱形的面积．

菱形的对角线不仅互相平分，而且互相垂直．垂直关系在计算规则图形的面积时，有着重要的作用．

8. 完全类比矩形判定的研究方法，我们研究菱形的判定方法．定义是最基本的方法，另外两个判定定理都是以定义为基础推导出来的．

在应用对角线判定菱形时，要注意定理包括两个条件：一是平行四边形，二是两条对角线互相垂直．为了加深印象，也可以举出反例向学生提问：“对角线互相垂直的四边形是菱形吗？”同时可以用下图来证实，虽然对角线 $AC\perp BD$，但它不是菱形．

练习

1. 四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AB=5$，$AO=4$，求 AC 和 BD 的长.
2. 已知菱形的两条对角线的长分别是 6 和 8，求菱形的周长和面积.

上面我们研究了菱形的性质，下面我们研究如何判定一个平行四边形或四边形是菱形.

由菱形的定义可知，有一组邻边相等的平行四边形是菱形. 除此之外，还有没有其他判定方法呢?

与研究平行四边形、矩形的判定方法类似，我们研究菱形的性质定理的逆命题，看看它们是否成立.[1]

思考

我们知道，菱形的对角线互相垂直. 反过来，对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗?

可以发现并证明菱形的一个判定定理：

对角线互相垂直的平行四边形是菱形.[2]

例 4 如图 25.2-10，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AB=5$，$AO=4$，$BO=3$. 求证：▱$ABCD$ 是菱形.

证明：∵ $AB=5$，$AO=4$，$BO=3$，

∴ $AB^2=AO^2+BO^2$.

∴ $\triangle OAB$ 是直角三角形.

∴ $AC \perp BD$.

∴ ▱$ABCD$ 是菱形.

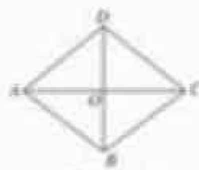


图 25.2-10

思考

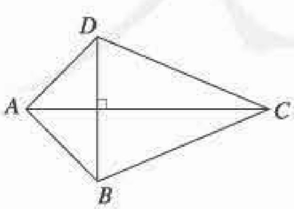
我们知道，菱形的四条边相等. 反过来，四条边相等的四边形是菱形吗?

练习答案

1. $AC=8$，$BD=6$.
2. 20，24.

[1] 完全类比平行四边形、矩形判定定理的研究过程，从性质定理的逆命题出发.

[2] 可以利用线段垂直平分线的性质"线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等"证明它的邻边相等.



菱形的常用判定方法可以归纳为四种：(1) 一组邻边相等的平行四边形；(2) 四条边相等的四边形；(3) 对角线互相垂直的平行四边形；(4) 对角线互相垂直平分的四边形. 这些判定方法中，(1)(3) 是从平行四边形出发的，(2)(4) 是从四边形出发的.

9. 矩形、菱形都是添加了一个条件的特殊平行四边形. 学完本小节后，最好作一个小结，对比矩形、菱形的概念、性质定理和判定定理，一方面复习巩固所学知识，另一方面把容易混淆的问题搞清楚.

[1] 要求学生对规范的文字证明题进行训练，不断巩固和提高证明格式的书写和演绎推理能力.

练习答案

1. 证明略.
2. 这是一个特殊的平行四边形——菱形. 由勾股定理的逆定理可知，这个平行四边形的对角线互相垂直. 面积为 $36\sqrt{5}$.
3. 它是一个菱形. 可以证明它的四条边相等.

[2] 正方形是有一组邻边相等的矩形，也是有一个角是直角的菱形.

[3] 正方形是轴对称图形，它有四条对称轴，分别是对边中点的连线以及两条对角线所在的直线.

[4] 正方形的四个角都是直角；四条边都相等；对角线相等，并且互相垂直平分.

[5] 可以先证它是一个矩形，再证它是菱形；也可以先证它是菱形，再证它是矩形.

可以发现并证明菱形的另一个判定定理：

四条边相等的四边形是菱形.

练习

1. 求证：

(1) 对角线互相垂直的平行四边形是菱形；

(2) 四条边相等的四边形是菱形.[1]

2. 一个平行四边形的一条边长是 9，两条对角线的长分别是 12 和 $6\sqrt{5}$，这是一个特殊的平行四边形吗？为什么？求出它的面积.

3. 如图，两张等宽的纸条交叉叠放在一起，重合部分构成的四边形 ABCD 是一个菱形吗？为什么？

（第 3 题）

25.2.3 正方形

正方形（square）是我们熟悉的几何图形，它的四条边都相等，四个角都是直角. 因此，正方形既是矩形，又是菱形[2]（图 25.2-11），它既有矩形的性质，又有菱形的性质.

正方形是轴对称图形吗？它的对称轴是什么？[3]

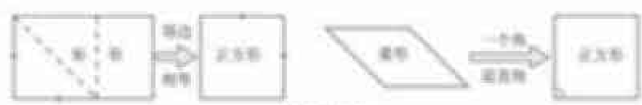


图 25.2-11

思考

正方形有哪些性质？[4] 如何判定一个四边形是正方形？[5] 把它们写出来，并和同学交流一下，然后证明其中的一些结论.

例 5 求证：正方形的两条对角线把这个正方形分成四个全等的等腰直角三角形.

58 第二十五章 平行四边形

10. 接下来，教科书研究了正方形，包括正方形的概念、性质定理和判定定理，重点是正方形的概念.

掌握正方形的概念是学好本小节的关键. 正方形可以定义为有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形. 这里实际包含两层意思：(1) 一组邻边相等的平行四边形（菱形）；(2) 有一个角是直角的平行四边形（矩形）. 正方形不仅是特殊的平行四边形，也是特殊的矩形，又是特殊的菱形. 教学时要结合教科书中的图 25.2-11，具体说明正方形与矩形、菱形的关系. 这些关系是教学的重点，也是难点. 要结合图形或简单的集合关系图，使学生搞清正方形与平行四边形、矩形、菱形之间的关系.

11. 对于正方形的性质定理和判定定理，教科书没有直接给出，而是设置了一个“思考”栏目，让学生在掌握正方形与平行四边形、矩形、菱形关系的基础上，通过思考，自己得出. 教学

已知：如图 25.2-12，四边形 $ABCD$ 是正方形，对角线 AC，BD 相交于点 O.

求证：$\triangle ABO$，$\triangle BCO$，$\triangle CDO$，$\triangle DAO$ 是全等的等腰直角三角形.

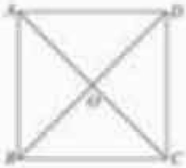


图 25.2-12

图中共有多少个等腰直角三角形？[1]

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AC=BD$，$AC\perp BD$，$AO=BO=CO=DO$.[2]

∴ $\triangle ABO$，$\triangle BCO$，$\triangle CDO$，$\triangle DAO$ 都是等腰直角三角形，并且 $\triangle ABO\cong\triangle BCO\cong\triangle CDO\cong\triangle DAO$.

思考

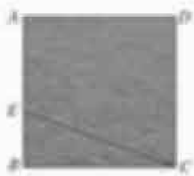
正方形、菱形、矩形、平行四边形之间有什么关系？与同学们讨论一下，并列表或用框图表示这些关系.[3]

练习

1. (1) 把一张长方形纸片按如图方式折一下，就可以裁出正方形纸片，为什么？

   (2) 如何从一块长方形木板中截出一块最大的正方形木板呢？

（第 1（1）题）



（第 2 题）

2. 如图，$ABCD$ 是一块正方形场地. 小华和小明在 AB 边上取定了一点 E，测量知，$EC=30$ m，$EB=10$ m. 这块场地的面积和对角线长分别是多少？

[1] 8 个.

[2] 正方形的两条对角线相等，并且互相垂直平分.

[3] 可以参考“小结”中的图形，引导学生把平行四边形、矩形、菱形、正方形之间的关系搞清楚.

练习答案

1. (1) 这样得到的是一组邻边相等，并且一个角是直角的平行四边形，因此它是正方形；

   (2) 上面 (1) 中正方形的面积最大.

2. 800 m^2，40 m.

时，要注意适当引导，帮助学生归纳得出.

因为正方形是平行四边形，又是矩形、菱形，所以它的性质是它们性质的综合. 正方形不仅具有平行四边形的所有性质，而且具有矩形、菱形的所有性质.

12. 对于怎样判定一个四边形是正方形，由于层次比较多，不必让学生一一列举出来. 但要向学生强调既能判定一个四边形是矩形，又能判定这个四边形是菱形；或者先判定这个四边形是菱形，再判定这个四边形是矩形. 这些都可以判定它是一个正方形.

练习答案

3. 4 个都是. 它们都符合正方形的判定条件.

[1] 对角线相等的平行四边形是矩形.

[2] 这是判定矩形的另一种方法.

[3] 一个角是直角的平行四边形是矩形.

[4] 在直角三角形中，30°角所对的直角边是斜边的一半，反之亦成立.

3. 满足下列条件的四边形是不是正方形？为什么？

(1) 对角线互相垂直且相等的平行四边形；

(2) 对角线互相垂直的矩形；

(3) 对角线相等的菱形；

(4) 对角线互相垂直平分且相等的四边形.

习题 25.2

复习巩固

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $\angle 1=\angle 2$. 它是一个矩形吗？为什么？[1]

（第 1 题）

（第 3 题）

2. 求证：四个角都相等的四边形是矩形.[2]

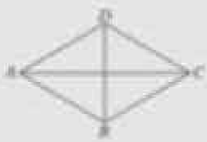
3. 一个木匠要制作矩形的踏板. 他在一个对边平行的长木板上分别沿与长边垂直的方向锯了两次，就能得到矩形踏板. 为什么？[3]

4. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2AC$. 求 $\angle A$，$\angle B$ 的度数.[4]

5. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ACD=30°$，$BD=6$. 求：

(1) $\angle BAD$，$\angle ABC$ 的度数；

(2) AB，AC 的长.



（第 5 题）

（第 6 题）

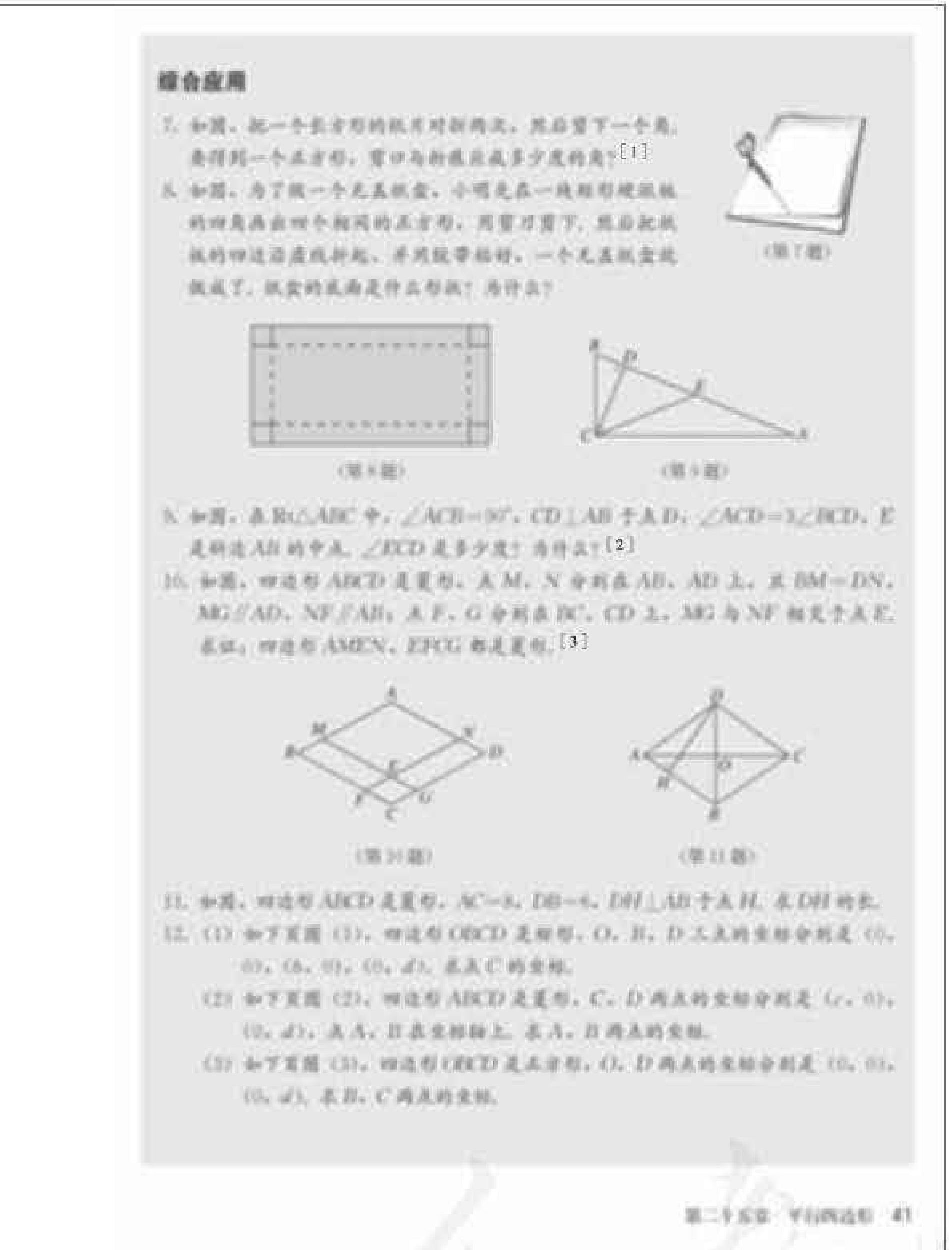
6. 如图，$AE \parallel BF$，AC 平分 $\angle BAD$，且交 BF 于点 C，BD 平分 $\angle ABC$，且交 AE 于点 D，连接 CD. 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

40 第二十五章 平行四边形

习题 25.2

1. “复习巩固”的第 1 题要用对角线相等的判定定理来判定平行四边形是矩形. 第 2 题给出了又一种判定四边形是矩形的方法. 第 3 题是一个实际问题，利用一个角是直角的平行四边形是矩形的判定方法. 第 4 题是关于 30°角的直角三角形性质的逆命题. 第 5 题是一道计算题，需要综合应用菱形的概念和性质. 第 6 题是关于菱形的判定问题，可以选择不同的判定方法.

2. “综合运用”的第 7 题是一道关于折叠的题目，需要有一定的想象能力，并综合运用正方形的性质. 第 8 题是在一个矩形纸板上裁出一个底面是矩形的纸盒，这里要用到矩形的性质和判定以及正方形的性质，同样，这个问题也有不同的证明方法，应鼓励灵活选择. 第 9 题是一道应用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的题目. 第 10 题是一道判定菱形的题目，在保持位置


综合应用

7. 如图，把一个长方形的纸片对折两次，然后剪下一个角。要得到一个正方形，剪口与折痕应成多少度的角？[1]

8. 如图，为了做一个无盖纸盒，小明先在一块矩形硬纸板的四角画出四个相同的正方形，用剪刀剪下，然后把纸板的四边沿虚线折起，并用胶带粘好，一个无盖纸盒就做成了。纸盒的底面是什么形状？为什么？

（第7题）

（第8题）　（第9题）

9. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于点 D，$\angle ACD=3\angle BCD$，E 是斜边 AB 的中点。$\angle ECD$ 是多少度？为什么？[2]

10. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 M，N 分别在 AB，AD 上，且 $BM=DN$，$MG\parallel AD$，$NF\parallel AB$，点 F，G 分别在 BC，CD 上，MG 与 NF 相交于点 E。求证：四边形 $AMEN$，$EFCG$ 都是菱形。[3]

（第10题）　（第11题）

11. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$AC=8$，$DB=6$，$DH\perp AB$ 于点 H。求 DH 的长。

12. (1) 如下页图 (1)，四边形 $OBCD$ 是矩形，O，B，D 三点的坐标分别是 $(0,0)$，$(b,0)$，$(0,d)$，求点 C 的坐标。

(2) 如下页图 (2)，四边形 $ABCD$ 是菱形，C，D 两点的坐标分别是 $(c,0)$，$(0,d)$，点 A，B 在坐标轴上，求 A，B 两点的坐标。

(3) 如下页图 (3)，四边形 $OBCD$ 是正方形，O，D 两点的坐标分别是 $(0,0)$，$(0,d)$，求 B，C 两点的坐标。

第二十五章　平行四边形　41

[1] 折叠问题需要学生具有一定的想象能力．如果想象有困难，可以动手操作试一试．

[2] 综合应用直角三角形的性质：(1) 直角三角形中两个锐角之和为 90°；(2) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半．

[3] 如可能，可以使用几何软件动态演示图形运动变化过程中一些不变的性质．

关系和数量关系不变的前提下，这个图形也可以动起来，在动的过程中，四边形 $AMEN$，$EFCG$ 都是菱形．第 11 题是一道应用菱形性质的计算题．第 12 题是平面直角坐标系中的矩形、菱形和正方形，通过确定顶点的坐标，考查上述图形的性质．第 13 题的图形也可以动起来，只要保持题目中所给的条件不变，四边形 $EFMN$ 始终是正方形．对于第 14 题，如果学生想象有困难，可以先让学生动手操作，得到不同的平行四边形，再计算它们对角线的长．

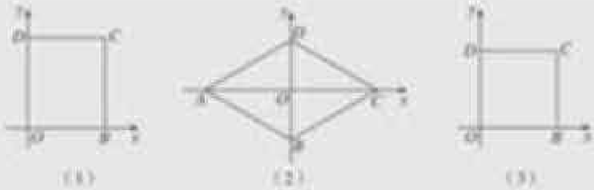
3．“拓广探索”共安排了 3 道题目．第 15，16 题都要综合运用特殊平行四边形的性质、判定以及全等三角形、三角形的中位线等知识，有一定难度．第 17 题的方法有很多，只要保持两条小路互相垂直，并且过正方形的中心即可，这个结论可以让学生证明．

[1] 如可能，可以使用几何软件动态演示图形运动变化过程中一些不变的性质.

[2] 可以让学生用纸片剪出来，拼接一下，看看能得到什么样的四边形.

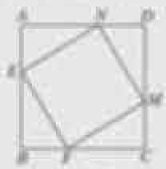
[3] 这个问题的辅助线添加比较困难，可以引导学生从要得到的结论入手，逐步深入分析.

[4] 让学生动手画一画，逐步探索规律.

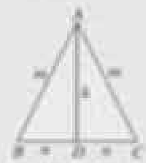


（第12题）

13. 如图，E，F，M，N 分别是正方形 ABCD 四条边上的点，且 AE=BF=CM=DN. 试判断四边形 EFMN 是什么图形，并证明你的结论.[1]



（第13题）



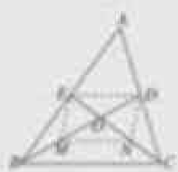
（第14题）

14. 如图，将等腰三角形纸片 ABC 沿底边 BC 上的高 AD 剪成两个三角形. 用这两个三角形你能拼成多少种平行四边形？试一试，分别求出它们的对角线的长.[2]

拓广探索

15. 如图，四边形 ABCD 是正方形，G 是 BC 上的任意一点，DE⊥AG 于点 E，BF∥DE，且交 AG 于点 F. 求证：AF−BF=EF.

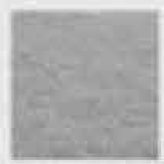
（第15题）



（第16题）

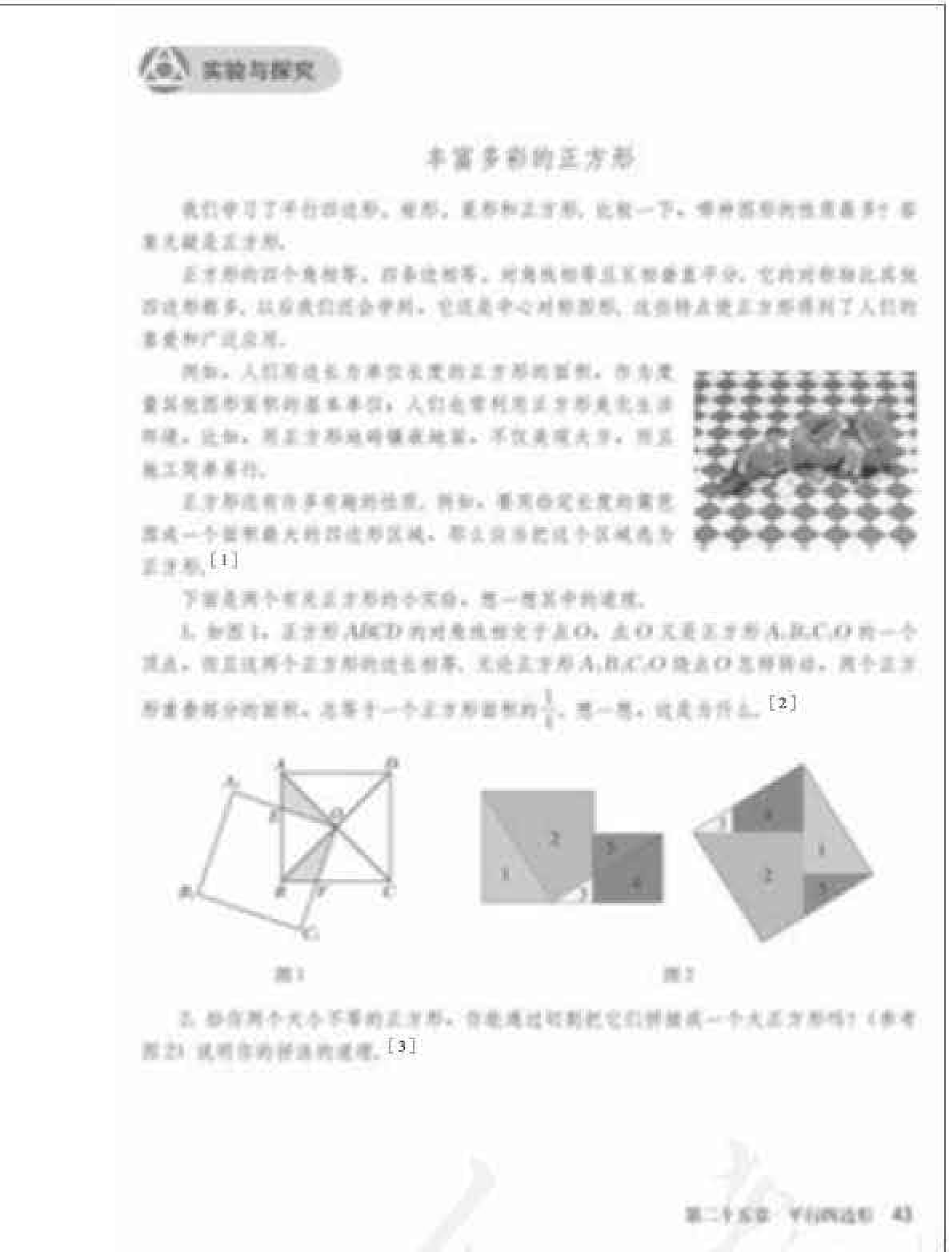
16. 如图，在△ABC 中，BD，CE 分别是边 AC，AB 上的中线，BD 与 CE 相交于点 O. BO 与 OD 的长度有什么关系？BC 边上的中线是否一定过点 O？为什么？（提示：分别作 BO，CO 的中点 M，N，连接 ED，EM，MN，ND.）[3]

17. 如图是一块正方形草地，要在上面修建两条交叉的小路，使得这两条小路将草地分成的四部分面积相等，你有多少种方法？并与你的同学交流一下.[4]



（第17题）

42 第二十五章 平行四边形


实验与探究

丰富多彩的正方形

我们学习了平行四边形、矩形、菱形和正方形. 比较一下，哪种图形的性质最多? 答案无疑是正方形.

正方形的四个角相等，四条边相等，对角线相等且互相垂直平分. 它的对称轴比其他四边形都多. 以后我们还会学到，它还是中心对称图形. 这些特点使正方形得到了人们的喜爱和广泛应用.

例如，人们用边长为单位长度的正方形的面积，作为度量其他图形面积的基本单位；人们也常利用正方形美化生活环境，比如，用正方形地砖铺设地面，不仅美观大方，而且施工简单易行.

正方形还有许多有趣的性质. 例如，要用给定长度的篱笆围成一个面积最大的四边形区域，那么应当把这个区域围为正方形.[1]

下面是两个有关正方形的小实验，想一想其中的道理.

1. 如图1，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，而且这两个正方形的边长相等. 无论正方形 $A_1B_1C_1O$ 绕点 O 怎样转动，两个正方形重叠部分的面积，总等于一个正方形面积的 $\frac{1}{4}$. 想一想，这是为什么.[2]

图1　　图2

2. 你有两个大小不等的正方形，你能通过切割把它们拼接成一个大正方形吗？(参考图2) 说明你的拼法的道理.[3]

第二十五章　平行四边形　43

［1］这个结论可以证明，这里举出具体的例子向学生说明. 例如，对于一个周长为 20 的矩形，当一边是 3，邻边是 7 时，它的面积是 21；当一边是 6，邻边是 4 时，它的面积是 24；当一边是 5 时，这个矩形变为正方形，此时面积是 25. 可以发现，矩形两邻边长度越接近时，它的面积越大. 当两邻边长相等时，面积最大.

［2］因为在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，$AO=BO$，$\angle OAE=\angle OBF$，$\angle AOE=90^\circ-\angle BOE=\angle BOF$，所以 $\triangle AOE \cong \triangle BOF$. 所以 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOE}+S_{\triangle EOB}=S_{四边形OEBF}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

［3］拼法参考图 2. 假设两个小正方形的边长分别为 a，b，则拼成的大正方形的边长应当为 $\sqrt{a^2+b^2}$.

实验与探究

正方形是一种很简单的图形. 由于它既是平行四边形，又是矩形、菱形，因此它具有这些四边形的性质. 同时，它还有一些特殊的性质，这些特殊性质对于研究其他图形（例如在证明勾股定理中的应用）或在生活、生产中都得到广泛的应用.

这个“实验与探究”首先归纳总结了正方形的性质，并在这个基础上作了一些引申，如人们用边长为单位长度的正方形的面积作为度量其他图形面积的基本单位，周长一定的矩形中正方形的面积最大，以及正方形的美学价值，等等. 最后，教科书还给出了两个关于正方形的小实验，让学生动手操作，并思考其中的道理.

这个“实验与探究”对于巩固学生的课堂知识和扩大知识面，培养学生理论联系实际，激发学习兴趣都有好处.

[1] 相等.

提示：$\triangle ABM \cong \triangle NBM$，作 $NG \perp BC$，垂足为 G，则 $\mathrm{Rt}\triangle BNG$ 中，$NG=\frac{1}{2}BN$，因此$\angle ABM=\angle MBN=\angle NBC=30°$.

[2] 有了 30°的角，利用它与 15°，60°，120°，150°角的倍分关系，可以很容易得到这些角.

[3] 黄金矩形是黄金分割的一种，当矩形的宽与长的比近似为 0.618 时，这样的矩形就是黄金矩形.

数学活动

活动1 折纸做60°、30°、15°的角

如果我们身旁没有量角器或三角尺，又需要作 60°，30°，15°等大小的角，可以采用下面的方法（如图 1）：

(1) 对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF，把纸片展平.

(2) 再一次折叠纸片，使点 A 落在 EF 上，并使折痕经过点 B，得到折痕 BM，同时，得到了线段 BN.

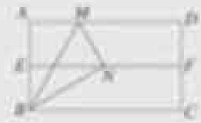


图 1

观察所得的$\angle ABM$，$\angle MBN$ 和$\angle NBC$，这三个角有什么关系？[1]你能证明吗？

通过证明可知，这是从矩形得到 30°角的好方法，简单而准确. 由此，15°，60°，120°，150°等角就容易得到了.[2]

活动2 黄金矩形[3]

宽与长的比是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（约为 0.618）的矩形叫做黄金矩形. 黄金矩形给我们以协调、匀称的美感. 世界各国许多著名的建筑，为取得最佳的视觉效果，都采用了黄金矩形的设计，如希腊的巴特农神庙（图 2）等.

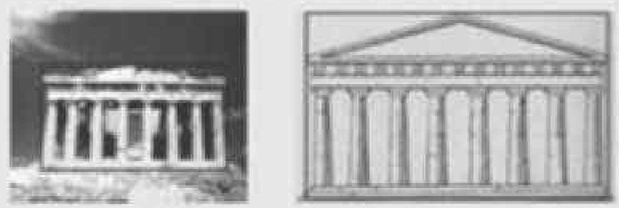


图 2

44 第十八章 平行四边形

1. 本章安排了两个数学活动，都是围绕特殊的平行四边形展开的. “活动 1” 是折纸作 60°，30°，15°的角. 教科书给出了一个利用矩形纸片折出 30°角的方法. 运用折的过程中得到的全等三角形，以及直角边和斜边的关系判定 30°角的方法，容易证明$\angle ABM=\angle MBN=\angle NBC=30°$，再利用 30°的角和 15°，60°，150°角的数量关系，容易得到这些角. 这个活动既有动手操作，又有一定的趣味性，还可以复习矩形的性质、三角形全等以及直角三角形等知识.

2. 黄金分割是几何中的一个著名问题. 黄金分割就是把一条线段分成两条线段，其中较长线段是原线段与较短线段的比例中项. 这个问题在古代就引起重视，古希腊数学家欧多克斯（Eudoxus，公元前 408—前 355）就曾提出这样的问题.

黄金分割在几何作图中有很多应用，如五角星的各边就是按照黄金分割划分的，圆内接正十

下面我们折叠出一个黄金矩形：

第一步，在一张矩形纸片的一端，利用图 3 的方法折出一个正方形，然后把纸片展平.

图 3

图 4

第二步，如图 4，把这个正方形折成两个相等的矩形，再把纸片展平.

第三步，折出内侧矩形的对角线 AB，并把 AB 折到图 5 中所示的 AD 处.

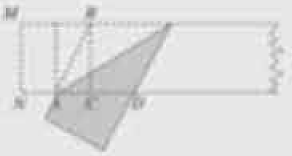


图 5

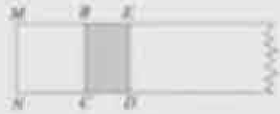


图 6

第四步，展平纸片，按照所得的点 D 折出 DE，矩形 $BCDE$（图 6）就是黄金矩形.

你能说明为什么吗？（提示：设 MN 的长为 2.）[1]

第二十五章　平行四边形　45

[1] 设 MN 的长为 2，则 $AC=1$，$AD=AB=\sqrt{5}$，$CD=AD-AC=\sqrt{5}-1$. 矩形 $BCDE$ 的宽与长的比为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，它是一个黄金矩形.

边形也能归结为黄金分割. 黄金分割广泛应用在设计中，比如黄金矩形，就是黄金分割在设计中的一个主要应用. 在设计建筑物、工艺品、日常用品涉及矩形时，如果设计成黄金矩形，容易引起美感.

黄金分割还有很多应用，如摄影、建筑设计、音乐等. “优选法”中的 0.618 法，也是黄金分割的一种应用.

“活动 2”除了介绍黄金矩形外，主要介绍通过折纸得到黄金矩形的方法. 根据教科书的提示，容易得到矩形 $BCDE$ 是黄金矩形. 其实，矩形 $MNDE$ 也是黄金矩形，不过这时它的宽长比为 $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$，需要进行根式的运算化简.

[1] 这是本章学过的各种平行四边形之间的关系图．通过图形，使学生掌握各种平行四边形之间的关系．

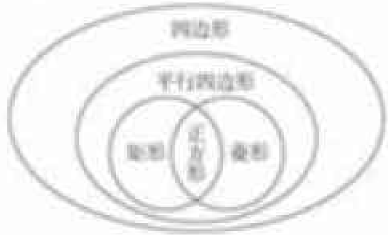
[2] 思路和方法非常重要．我们从构成平行四边形的基本要素——边、角和对角线等方面研究平行四边形的性质，从一个图形具备什么条件后会成为另外一个图形出发，研究平行四边形的判定方法．特别强调，性质定理和判定定理的互逆关系．

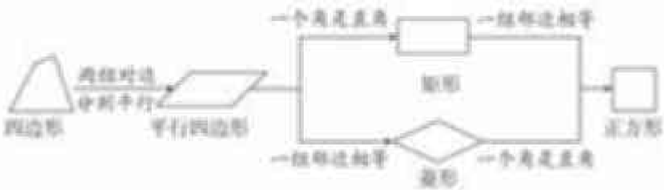
研究矩形、菱形、正方形的思路和方法，同平行四边形完全一样．

[3] 比如，利用矩形的性质，我们得到直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半等．

小　结

一、本章知识结构图[1]





二、回顾与思考

本章我们主要学习了平行四边形的性质定理、判定定理，探索并证明了三角形的中位线定理，介绍了平行线间距离的概念；通过平行四边形边、角的特殊化，获得了特殊的平行四边形——矩形、菱形和正方形，了解了它们之间的关系；根据它们的特殊性，得到了这些特殊的平行四边形的性质定理和判定定理．

在学习这些知识的过程中，我们采用了从一般到特殊的研究方法，利用图形的性质定理与判定定理之间的关系，通过证明性质定理的逆命题，得到了图形的判定定理．这些方法在今后的学习中都是很有用的．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．你能概述一下研究平行四边形的思路和方法吗？[2]

2．平行四边形有哪些性质？如何判定一个四边形是平行四边形？

3．矩形、菱形、正方形除了具有平行四边形的性质外，分别还具有哪些性质？如何判定一个四边形是矩形、菱形、正方形？你能总结一下研究这些性质和判定的方法吗？

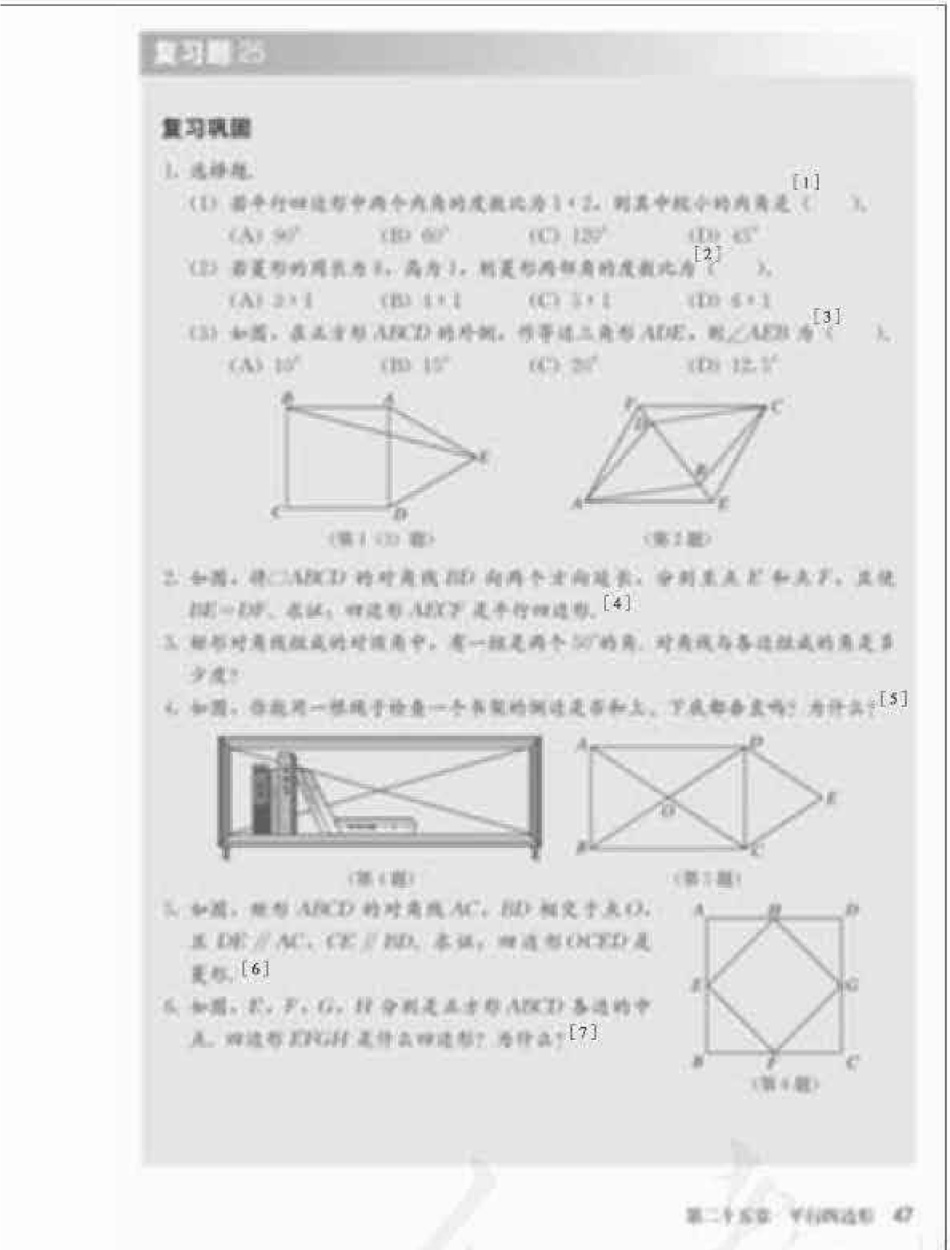
4．本章我们利用平行四边形的性质，得出了三角形的中位线定理．你能仿照这一过程，再得出一些其他几何结论吗？[3]

48　第十八章　平行四边形

1．“小结”给出了本章知识内容之间的概念关系图，并以问题的形式回顾了本章的主要内容．

教科书给出了两幅图：第一幅图，以集合图示方式表示本章所学概念之间的从属关系；第二幅图，列出平行四边形与各种特殊平行四边形之间的关系结构图．学生可以清楚地认识本章所学概念之间的关系．

2．在“回顾与思考”中，给出了一些问题．学生可以结合这些问题，复习本章学过的主要内容，包括平行四边形和各种特殊平行四边形的概念，从边、角、对角线、对称轴等方面研究它们的性质，梳理它们的判定方法，并结合这些性质和判定方法复习各种平行四边形之间的关系等．



复习题 25

复习巩固

1. 选择题.

(1) 若平行四边形中两个内角的度数比为 1∶2，则其中较小的内角是（　）.[1]

(A) 90°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 45°

(2) 若菱形的周长为 8，高为 1，则菱形两邻角的度数比为（　）.[2]

(A) 3∶1　(B) 4∶1　(C) 5∶1　(D) 6∶1

(3) 如图，在正方形 $ABCD$ 的外侧，作等边三角形 ADE，则 $\angle AEB$ 为（　）.[3]

(A) 10°　(B) 15°　(C) 20°　(D) 12.5°

（第 1 (3) 题）　（第 2 题）

2. 如图，将▱$ABCD$ 的对角线 BD 向两个方向延长，分别至点 E 和点 F，且使 $BE=DF$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.[4]

3. 矩形对角线组成的对顶角中，有一组是两个 50° 的角. 对角线与各边组成的角是多少度?

4. 如图，你能用一根绳子检查一个书架的侧边是否和上、下底都垂直吗？为什么？[5]

（第 4 题）　（第 5 题）

5. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $DE \parallel AC$，$CE \parallel BD$. 求证：四边形 $OCED$ 是菱形.[6]

6. 如图，E，F，G，H 分别是正方形 $ABCD$ 各边的中点. 四边形 $EFGH$ 是什么四边形？为什么？[7]

（第 6 题）

第二十五章　平行四边形　47

[1] 平行四边形的对角相等、邻角互补.

[2] 菱形的四条边相等，直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半，菱形的邻角互补.

[3] 这实际给出了 15° 角的一种作法.

[4] 可以利用“对角线互相平分的四边形是平行四边形”，也可以通过全等，证明 $CF \mathrel{\perp\!\!\!\!\perp} AE$. 在本章的学习中，尽量直接运用平行四边形的判定方法.

[5] 证明它是一个矩形.

[6] 一组邻边相等的平行四边形是菱形.

[7] 运用三角形中位线定理.

复习题 25

1. “复习巩固”共安排了 6 道题目. 第 1 题是选择题，都是关于求角的度数的问题，都要用到平行四边形、菱形、正方形的性质. 第 2 题有多种证明方法，鼓励学生用多种方法进行证明. 第 3 题要利用矩形的性质. 第 4 题是一个实际问题，首先利用对边相等证明它是一个平行四边形，再根据对角线相等证明它是矩形，从而侧边和上、下底都垂直. 第 5 题要综合利用矩形的性质和菱形的判定方法. 第 6 题是中点四边形问题，任何一个四边形的中点四边形都是平行四边形.

2. “综合运用”共安排了 6 道题目. 第 7 题要用到平行四边形的性质、三角形全等以及平行线的有关知识. 第 8 题主要是正方形性质的运用. 第 9 题研究中点四边形，第 6 题是本题的一种特殊情况，研究中点四边形，一般是通过连接

[1] 先证明四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

[2] 利用 $\triangle ABE \cong \triangle DAF$，得到 BE 和 AF 等长，并且互相垂直.

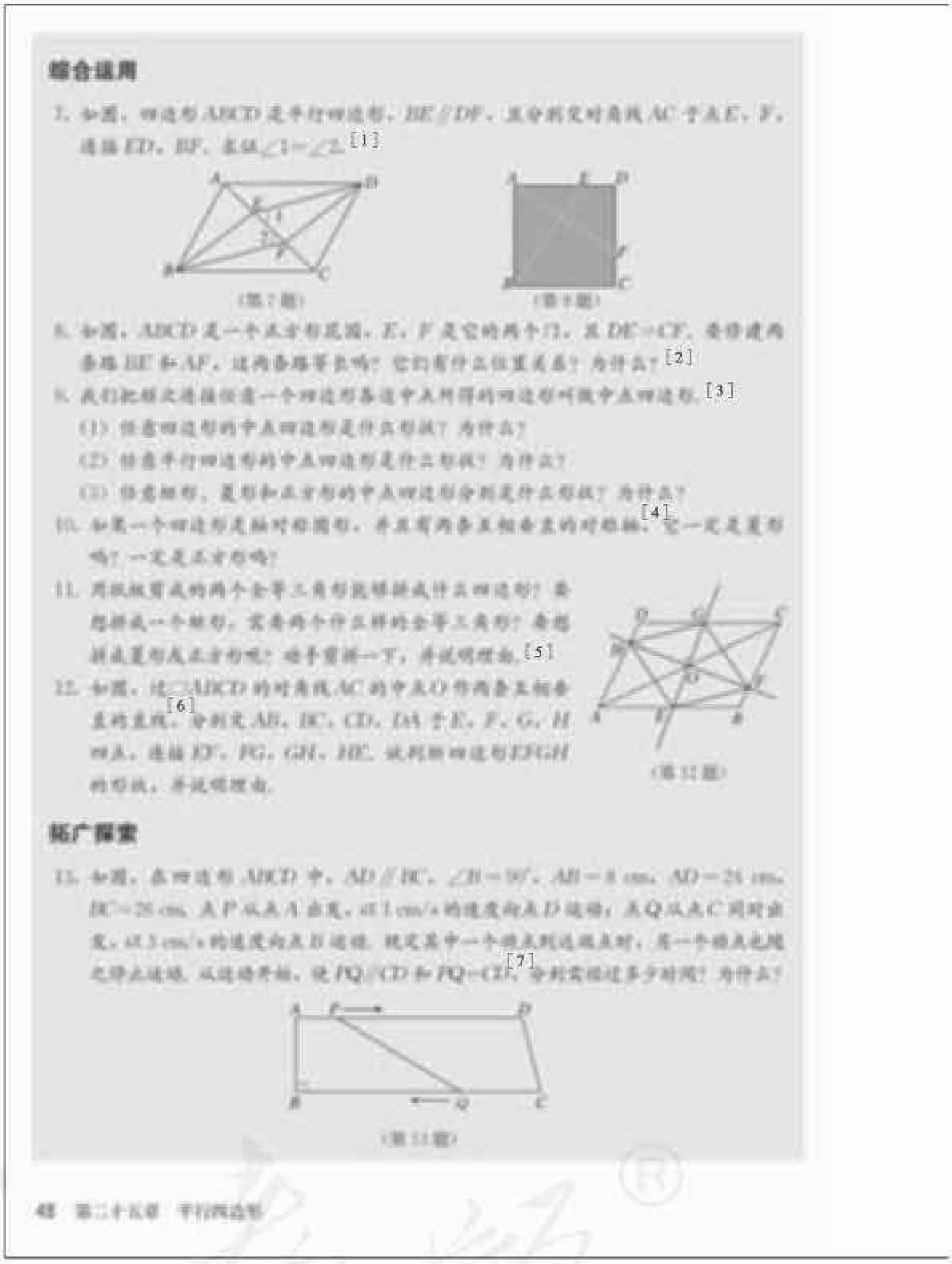
[3] 中点四边形是特殊的四边形，每种特殊的平行四边形的中点四边形形状不尽相同.

[4] 这个四边形有两条对称轴，而且对称轴互相垂直.

[5] 在动手操作的基础上，发现结论，然后进行证明.

[6] 平行四边形两条对角线的交点是这个平行四边形的对称中心，经过对称中心的直线有很多重要的性质，引导学生还能发现哪些性质.

[7] 注意 $PQ=CD$ 时有两种情况：(1) 平行；(2) 相交.


综合运用

7. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$BE \parallel DF$，且分别交对角线 AC 于点 E，F，连接 ED，BF. 求证 $\angle 1=\angle 2$. [1]

（第 7 题）　（第 8 题）

8. 如图，$ABCD$ 是一个正方形花园，E，F 是它的两个门，且 $DE=CF$. 要修建两条路 BE 和 AF，这两条路等长吗？它们有什么位置关系？为什么？[2]

9. 我们把依次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫做中点四边形. [3]

(1) 任意四边形的中点四边形是什么形状？为什么？

(2) 任意平行四边形的中点四边形是什么形状？为什么？

(3) 任意矩形、菱形和正方形的中点四边形分别是什么形状？为什么？

10. 如果一个四边形是轴对称图形，并且有两条互相垂直的对称轴，[4] 它一定是菱形吗？一定是正方形吗？

11. 用纸板剪成的两个全等三角形能够拼成什么四边形？要想拼成一个矩形，需要两个什么样的全等三角形？要想拼成菱形或正方形呢？动手剪拼一下，并说明理由. [5]

12. 如图，过 ▱$ABCD$ 的对角线 AC 的中点 O 作两条互相垂[6]直的直线，分别交 AB，BC，CD，DA 于 E，F，G，H 四点，连接 EF，FG，GH，HE. 试判断四边形 $EFGH$ 的形状，并说明理由.

（第 12 题）

拓广探索

13. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle B=90°$，$AB=8$ cm，$AD=24$ cm，$BC=26$ cm. 点 P 从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度向点 D 运动；点 Q 从点 C 同时出发，以 3 cm/s 的速度向点 B 运动. 规定其中一个动点到达端点时，另一个动点也随之停止运动. 从运动开始，使 $PQ \parallel CD$ 和 $PQ=CD$，[7] 分别需经过多少时间？为什么？

（第 13 题）

48　第二十五章　平行四边形

对角线，把四边形中的问题转化为三角形中的问题，运用三角形中位线定理解决. 第 10 题主要是菱形和正方形性质的综合运用. 第 11 题要求学生对一些特殊四边形有比较深的认识，熟悉它们的内在特征，对于这个问题如果想象起来有困难，可以动手操作，试一试. 第 12 题需要灵活运用平行四边形对角线的性质，以及运用对角线互相垂直平分的四边形是菱形的判定方法.

3. “拓广探索”共有 3 道题目. 第 13 题需要灵活运用图形的性质，通过设未知数，列方程，将这个几何问题转化为代数问题来解决，学生解决这类问题时往往有一定困难，主要原因是，P，Q 两点都运动，解决这类问题先要判断 P，Q 两点的运动情况，然后将满足条件的时刻，看作静止状态，问题就容易解决. 第 14 题有一定的难度，要添加辅助线，通过三角形全等进行证明，注意让学生结合图形，通过分析已知条件和结论，正确添加辅助线. 第 15 题是平行

14. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 BC 的中点，$\angle AEF=90°$，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F. 求证 $AE=EF$.（提示：取 AB 的中点 G，连接 EG.）[1]

15. 求证：平行四边形两条对角线的平方和等于四条边的平方和.[2]

（第 14 题）

第二十五章 平行四边形 49

[1] 证明 $\triangle AGE \cong \triangle ECF$.

[2] 本题有多种证明方法，核心是构造直角三角形，然后运用勾股定理和平行四边形的性质.

四边形中的一个重要结论，需要灵活运用平行四边形的性质、勾股定理进行证明，证明过程中涉及相对复杂的代数恒等变形，这对学生来说可能是个挑战.

Ⅲ 习题解答

习题 25.1

1. 10.
2. $72°15'$，平行四边形的对角相等.
3. 29.
4. 提示：利用 $AF \perp\!\!\!= CE$.
5. 提示：利用四边形 $EFGH$ 的对角线互相平分.
6. 提示：利用 $AD \perp\!\!\!= EF \perp\!\!\!= BC$.
7. 相等. 提示：在直线 l_1 上任取一点 P，$\triangle PBC$ 的面积与$\triangle ABC$ 的面积相等（同底等高).
8. $B(a+b, c)$.
9. 提示：过点 C 作 $CE /\!/ AD$，交 AB 于点 E，可得四边形 $AECD$ 为平行四边形.
10. $35°$.
11. 由四边形 $ABCB'$ 是平行四边形，可知$\angle ABC=\angle B'$，$AB'=BC$；再由四边形 $C'BCA$ 是平行四边形，可知 $C'A=BC$. 从而 $AB'=AC'$.
12. 因为 $AD=12$，$DO=5$，利用勾股定理可得 $AO=13$，从而四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，它是一个平行四边形. 所以 $BC=AD=12$，四边形 $ABCD$ 的面积为 120.
13. 6 个，利用对边相等的四边形是平行四边形.
14. 设木条与▱$ABCD$ 的边 AD，BC 分别交于点 E，F，可以发现 $OE=OF$，$AE=CF$，$DE=BF$，$\triangle AOE \cong \triangle COF$，$\triangle DOE \cong \triangle BOF$ 等. 利用平行四边形的性质可以证明上述结论.
15. ▱$AEPH$ 与▱$PGCF$ 面积相等. 利用$\triangle ABD$ 与$\triangle CDB$，$\triangle PHD$ 与$\triangle DFP$，$\triangle BEP$ 与$\triangle PGB$ 分别全等，从而▱$AEPH$ 与▱$PGCF$ 面积相等.

习题 25.2

1. 是. 利用$\angle 1=\angle 2$，可知 $BO=CO$，从而 $BD=AC$，▱$ABCD$ 的对角线相等，它是一个矩形.
2. 由于四边形的内角和为 $360°$，四个角又都相等，所以它的四个角都是直角. 因此这个四边形是矩形.
3. 能. 这时他得到的是一个角为直角的平行四边形，即矩形.
4. $\angle A=60°$，$\angle B=30°$.
5. (1) $\angle BAD=60°$，$\angle ABC=120°$；(2) $AB=6$，$AC=6\sqrt{3}$.
6. 提示：由$\angle ABD=\angle DBC=\angle ADB$，可知 $AB=AD$，同理可得 $AB=BC$. 从而 $AD \perp\!\!\!= BC$，四边形 $ABCD$ 是一组邻边相等的平行四边形，它是菱形.
7. $45°$.
8. 矩形，它的四个角都是直角.

9. $45°$. 提示：$\angle BCD=\angle EAC=\angle ECA=22.5°$.

10. 提示：四边形 $AMEN$，$EFCG$ 都是一组邻边相等的平行四边形.

11. $DH=4.8$. 提示：由 $AB\cdot DH=2AO\cdot OD=2S_{\triangle ABD}$ 可得.

12. (1) $C(b,\ d)$；(2) $A(-c,\ 0)$，$B(0,\ -d)$；(3) $B(d,\ 0)$，$C(d,\ d)$.

13. 正方形. 提示：利用$\triangle BFE\cong\triangle CMF\cong\triangle DNM\cong\triangle AEN$，证明四边形 $EFMN$ 的四条边相等，四个角都是直角.

14. 3 种. 可以分别以 AD，$AB(AC)$，$BD(CD)$ 为四边形的一条对角线，得到 3 种平行四边形，它们的对角线长分别为 h，$\sqrt{4n^2+h^2}$（或$\sqrt{3n^2+m^2}$）；m，m；n，$\sqrt{n^2+4h^2}$（或$\sqrt{3h^2+m^2}$）.

15. 提示：由$\triangle ADE\cong\triangle BAF$，可得 $AE=BF$，从而 $AF-BF=EF$.

16. $BO=2OD$，BC 边上的中线一定过点 O. 利用四边形 $EMND$ 是平行四边形，可知 $BO=2OD$；设 BC 边上的中线和 BD 相交于点 O'，可知 $BO'=2O'D$，从而 O 与 O'重合.

17. 分法有无数种. 只要保持两条小路互相垂直，并且都过正方形的中心即可.

复习题 25

1. (1) B；(2) C；(3) B.

2. 提示：连接 AC，利用对角线互相平分的四边形是平行四边形.

3. $65°$和 $25°$.

4. 可以. 通过测量对边以及对角线是否分别相等来检验.

5. 提示：一组邻边相等的平行四边形是菱形.

6. 正方形. 提示：证明四边形 $EFGH$ 四边相等、四个角都是直角.

7. 由$\triangle ABE\cong\triangle CDF$，可知 $BE=DF$. 又 $BE\parallel DF$，所以四边形 $BFDE$ 是平行四边形. 所以 $DE\parallel BF$，从而$\angle 1=\angle 2$.

8. 由$\triangle ABE\cong\triangle DAF$ 可知，BE 和 AF 等长，并且互相垂直.

9. (1) 平行四边形，利用三角形中位线定理可证一组对边平行且相等，或两组对边分别平行；(2) 平行四边形；(3) 菱形、矩形、正方形.

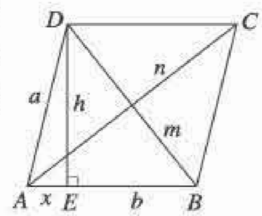
10. 不一定是菱形，不一定是正方形.

11. 平行四边形；要拼成一个矩形，需要两个全等的直角三角形；要拼成一个菱形，需要两个全等的等腰三角形；要拼成一个正方形，需要两个全等的等腰直角三角形.

12. 菱形. 提示：先证明$\triangle AOE\cong\triangle COG$，$\triangle AOH\cong\triangle COF$，可得 $OE=OG$，$OF=OH$，所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形. 又 $EG\perp FH$，从而$\square EFGH$ 是菱形.

13. 6 s；6 s 或 7 s. 提示：设经过 t s，四边形 $PQCD$ 成为平行四边形，根据 $PD=QC$，可列方程 $24-t=3t$，解得 $t=6$. 若 $PQ=CD$，则四边形 $PQCD$ 为平行四边形或梯形（腰相等），为平行四边形时有 $t=6$；为梯形（腰相等）时，有 $QC=PD+2(BC-AD)$，可列方程 $3t=24-t+4$，解得 $t=7$.

14. 提示：证明$\triangle AGE\cong\triangle ECF$.



(第 15 题)

15. 提示：如图，在$\square ABCD$ 中，设 $AD=a$，$AB=b$，$BD=m$，$AC=n$，

$DE=h$，$AE=x$，则分别有 $h^2=a^2-x^2$①，$h^2=n^2-(b+x)^2$②，$h^2=m^2-(b-x)^2$③，由①×2=②+③，化简可得 $m^2+n^2=2a^2+2b^2$.

Ⅳ 教学设计案例

25.1 平行四边形（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

平行四边形的概念，平行四边形边、角的性质，平行线间的距离.

2. 内容解析

平行四边形是基本的几何图形之一，它不仅具有丰富的几何性质，而且在生产和生活中具有广泛的应用. 对边平行是平行四边形的本质属性. 初中平行四边形的学习综合了平行线与三角形的相关知识，突出演绎推理，是训练学生思维的良好平台.

平行四边形的定义采用属加种差的方式，它揭示了平行四边形与四边形之间的联系与区别. 平行四边形性质的探究，经历了感知（观察）、猜想、证明等过程，主要研究边、角、对角线的性质. 平行四边形性质的证明，应用了将四边形问题转化为三角形问题的思想.

初中几何研究的一般思路是：先概括一类几何对象的共同本质特征，得到定义，然后研究其性质与判定. 这种思路贯穿本章的学习内容. 平行四边形性质的教学不仅要关注相关知识及其形成过程，还应引导学生进一步体会几何研究的一般思路与方法，体会对性质的研究就是对其构成要素特征的揭示.

在研究了平行四边形的性质后，教科书引进了平行线间距离的概念.

基于以上分析，本节课的教学重点是：平行四边形边、角的性质探索和证明.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）理解平行四边形的概念.

（2）探索并掌握平行四边形对边相等、对角相等的性质.

（3）初步体会几何研究的一般思路与方法.

2. 目标解析

目标（1）的具体要求是：知道平行四边形与四边形的区别与联系，能应用概念进行判断和推理.

目标（2）的具体要求是：能利用平行四边形的定义证明其边、角的性质，能利用平行四边形对边相等或对角相等的性质进行基本的计算或证明；初步学会分别从题设或结论出发寻求论证思路

的方法，体会数学转化的思想.

目标（3）是指在平行四边形性质的探究过程中，让学生体会对图形性质的研究实际上就是揭示图形中各几何要素之间的关系；知道观察、度量、实验、猜想、证明是几何研究的基本活动，体会“用合情推理发现结论，用演绎推理证明结论”这一几何研究的基本思考方式.

三、教学问题诊断分析

在小学阶段，学生已经对平行四边形的有关性质有所了解，在七年级又学习了利用全等三角形进行推理证明. 因此，这节课的教学重点是平行四边形性质的探究与证明. 观察、度量等只是发现结论、形成猜想的辅助手段.

学生证明平行四边形性质的主要困难是在证明过程中添加辅助线，构造全等三角形. 由于学生已经具备利用三角形全等证明线段或角相等的方法，在证明平行四边形性质时，教师应引导学生由目标（证明线段相等）出发分析达到目标的方法（通过三角形全等证明边、角相等），引导学生连接对角线，构造全等三角形进行证明.

基于以上分析，本节课的教学难点是：通过连接对角线，用全等三角形知识证明平行四边形性质.

四、教学过程设计

1. 观察抽象，形成概念

引言

前面我们已经学习了许多图形与几何知识，掌握了一些探索和证明图形几何性质的方法，本节开始，我们继续研究生活中的常见图形.

问题 1　观察下列图片，从中能否找到平行四边形的形象？

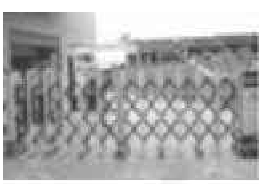
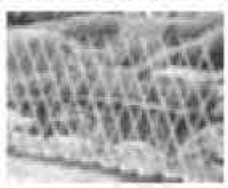
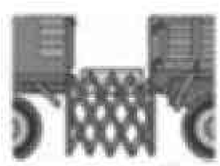




图 1

师生活动：学生积极踊跃发言，教师用电脑演示从实物中抽象出平行四边形的过程.

设计意图：通过图片展示，让学生真切感受生活中存在大量平行四边形的原型. 进而从实际背景中抽象出平行四边形，让学生经历将实物抽象为图形的过程.

问题 2　你知道什么样的图形叫做平行四边形吗？

师生活动：教师引导学生回顾小学学习过的平行四边形的概念：两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形. 说明定义的两方面作用：既可以作为性质，又可以作为判定平行四边形的依据. 介绍平行四边形的符号表示方法.

设计意图：给出定义，强调定义的作用.

2. **概括证明，探究性质**

问题 3　回忆我们的学习经历，研究几何图形的一般思路是什么？

师生活动：学生可能难以回答，此时教师引导学生回顾全等三角形的学习过程，得出研究的一般过程：先给出定义，再研究性质和判定. 教师进一步指出：性质的研究，其实就是对边、角等基本要素的研究.

设计意图：对图形性质的研究，重在解决研究什么和怎么研究的问题，引导学生通过类比全等三角形确定平行四边形性质的研究目标和研究思路.

问题 4　对于平行四边形，从定义出发，你能得出它的性质吗？

师生活动：教师引导学生通过观察、度量，提出猜想.

猜想 1：四边形 $ABCD$ 是平行四边形$\Rightarrow AB=CD$，$AD=BC$.

猜想 2：四边形 $ABCD$ 是平行四边形$\Rightarrow \angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$.

追问 1：你能证明这些结论吗？

师生活动：一般地，学生会先考虑分别证明这两个结论. 利用平行线的性质证明对角相等，通过添加辅助线，利用全等证明对边相等. 证后会发现用全等可以同时证明这两个结论. 让学生领悟，证明线段相等（或角相等）通常采用证明三角形全等的方法. 而图形中没有三角形，只有四边形，我们需添加辅助线，构造全等三角形，将四边形问题转化为三角形问题来解决，突破难点. 进而总结提炼出化四边形问题为三角形问题的基本思路.

设计意图：引导学生证明猜想，体会证明思路的分析方法和把四边形问题转化为三角形问题的基本想法.

追问 2：通过证明，发现上述两个猜想正确. 这样就得到了平行四边形的两个重要性质. 你能说出这两个命题的题设与结论，并运用这两个性质进行推理吗？

师生活动：教师引导学生辨析定理的题设和结论，明确应用性质进行推理的基本模式：

$\because$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形（已知），

$\therefore$　$AB=CD$，$AD=BC$（平行四边形的对边相等），

$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$（平行四边形的对角相等）.

设计意图：把性质转化为操作程序.

3. **应用知识，解决问题**

问题 5　如图 2，在▱$ABCD$ 中，

(1) 若$\angle B=40°$，求其余三个角的度数.

(2) 若 $AD=8$，▱$ABCD$ 的周长为 24，求其余三条边的长度.

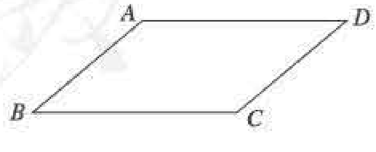


图 2

师生活动：出示题目后让学生口答，并说明理由. 此题解决后进一步复述平行四边形边、角的性质：平行四边形的对边平行且相等，平行四边形的邻角互补、对角相等.

设计意图：这两个小题，分别从边和角两方面直接利用平行四边形的性质计算.

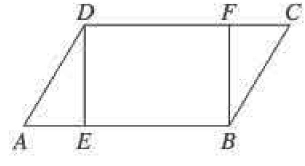


图 3

例 1　如图 3，在▱$ABCD$ 中，$DE\perp AB$，$BF\perp CD$，垂足分别为

E，F. 求证：$AE=CF$.

师生活动：师生交流，要证明线段相等，我们可以利用全等三角形的性质，而全等的条件可由平行四边形的性质得到. 在此基础上，引导学生写出证明过程，并组织学生进行点评. 本题也可以先用定义证明四边形 $DEBF$ 是平行四边形，得到 $BE=DF$，再证 $AE=CF$.

设计意图：应用性质进行推理，体会得到证明思路的方法.

追问：$DE=BF$ 吗？如图 4，直线 $a\parallel b$，A，C 为直线 a 上任意两点，点 A 到直线 b 的距离和点 C 到直线 b 的距离相等吗？为什么？

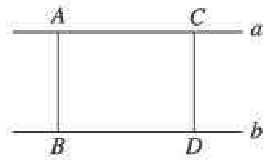


图 4

师生活动：结合前面的分析，可以得出如果两条直线平行，那么一条直线上所有点到另一条直线的距离都相等. 此时教师适时介绍两条平行线间距离的概念.

设计意图：结合例题的进一步追问，自然引出平行线间距离的概念，点到即可，不必深究.

例 2 如图 5，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，P 是底边 BC 上一动点，且 $PE\parallel AB$，$PF\parallel AC$. 求证：$PE+PF=AB$.

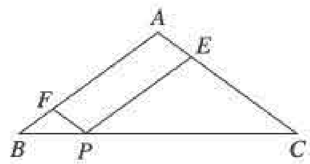


图 5

师生活动：实际教学中，教师引导学生分析思路，写出证明过程.

设计意图：应用平行四边形和等腰三角形的性质解决问题，引导学生体验分析解题思路的方法.

4. **小结**

教师引导学生参照下面问题回顾总结：

(1) 本节课我们学习了哪些知识？

(2) 你觉得对一个几何图形的研究通常是怎样进行的？

(3) 对于平行四边形，你觉还需要进一步研究什么？

设计意图：通过小结，梳理本节课所学知识，体会数学思想方法.

5. **布置作业**

教科书第 23 页练习第 1，2 题；习题 25.1 第 1，2，7，8 题.

五、目标检测设计

1. 在▱$ABCD$ 中，若 $\angle B=70^\circ$，则 $\angle D=$（　　）.

(A) 130°　(B) 110°　(C) 70°　(D) 35°

设计意图：考查平行四边形对角相等的性质.

2. 在▱$ABCD$ 中，若 $AB=2$，$BC=3$，则 $AD=$______，$CD=$______.

设计意图：考查平行四边形对边相等的性质.

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别在 AD，BC 上，且 $EF\parallel AB$. 求证：$EF=CD$.

设计意图：考查应用平行四边形的概念和性质进行推理的能力.

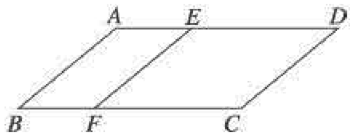
4. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AE=CF$，求证：$AF=CE$.

设计意图：考查综合运用平行四边形性质与三角形全等知识解决问题的能力.

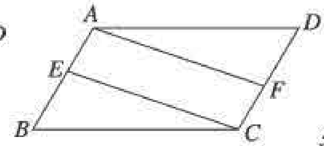
5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AE\parallel CD$，且 AE 交 BC 于点 E，BD 平分 $\angle ABC$.

求证：$AB=CE$.

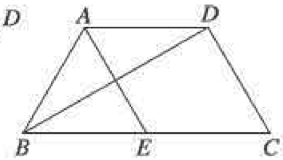
设计意图：考查综合运用平行四边形的概念、性质以及等腰三角形的性质与判定等知识分析问题、解决问题的能力.



（第 3 题）



（第 4 题）



（第 5 题）

25.1　平行四边形（第 3 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

平行四边形的三个判定定理：两组对边分别相等的四边形是平行四边形，两组对角分别相等的四边形是平行四边形，对角线互相平分的四边形是平行四边形.

2. 内容解析

平行四边形的三个判定定理分别从边、角、对角线等方面说明判定平行四边形的条件. 在平行四边形的判定中，平行四边形的定义是第一种判定方法，其他判定方法都需要借助定义，通过证明才能成为判定定理.

平行四边形判定的探究是在类比勾股定理及其逆定理、等腰三角形的性质与判定定理以及平行线的性质与判定等基础上进行的. 通过类比这些性质和判定的命题关系得到启发：从平行四边形性质出发，探索其逆命题真假. 在平行四边形判定的探究过程中，运用类比思想，以及原命题与逆命题的关系，发现结论，形成猜想，用演绎推理证明猜想，发展学生的推理能力.

在运用平行四边形判定定理解决问题的过程中，需要学生根据已知条件，尝试从不同角度寻求判定平行四边形的最佳方法，训练学生思维的灵活性与深刻性.

基于以上分析，本节课的教学重点是：平行四边形判定定理的探究与应用.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）经历平行四边形判定定理的猜想与证明过程，体会类比思想及探究图形判定的一般思路.

（2）掌握平行四边形的三个判定定理，能根据不同条件灵活选取适当的判定定理进行推理论证.

2. 目标解析

目标（1）的具体要求是：体会对图形判定探究的一般思路是从图形性质的逆命题出发，先形成猜想，然后利用定义进行演绎证明.

目标（2）的具体要求是：在证明平行四边形的过程中，能根据不同条件选择不同的判定定理

进行推理论证.

三、教学问题诊断分析

对于八年级下学期的学生而言，经过近三年的初中学习，推理意识与能力有所加强. 在知识储备上，学生已经学习了平行四边形的性质，对命题与逆命题、定理与逆定理已经有了初步的认识. 因此平行四边形判定的学习不能只是在实验操作中发现，而应当从性质定理的逆命题出发，先进行猜想，再进行证明. 这样的学习经历有利于他们后续的学习. 但可能有些学生还不能有意识地从性质定理的逆命题出发，提出判定平行四边形的条件. 另外，根据一个数学命题写出它的逆命题，学生可能也有困难.

基于以上分析，本节课的教学难点是：通过研究性质定理的逆命题提出判定定理的猜想.

四、教学过程设计

1. 复习反思，引出课题

问题 1 通过前面的学习，我们对平行四边形已经有了一些了解，请说说你都知道了哪些？

师生活动：学生回答学习了平行四边形的概念“两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形”，还有平行四边形的性质：对边相等，对角相等，对角线互相平分.

追问 1：根据以往几何学习的经验，接下来我们应该研究什么呢？

师生活动：学生回答研究平行四边形的判定.

追问 2：根据定义，可以判定一个四边形是不是平行四边形. 除了平行四边形的定义，我们如何寻找其他的判定方法呢？

设计意图：通过对已有知识与经验的回顾反思，引导学生提出研究平行四边形判定问题.

2. 经验类比，提出猜想

问题 2 在以前的学习经历中，我们有过类似的经验吗？

师生活动：在教师引导下，学生回忆学过的一些图形判定定理的内容，如勾股定理的逆定理、等腰三角形判定定理以及平行线的判定等. 通过与相应图形性质定理的对比，得到启发：可以尝试从性质定理的逆命题出发研究图形的判定.

追问 1：对于平行四边形，我们能否也可以通过研究性质定理的逆命题获得判定平行四边形的方法呢？

师生活动：教师顺势给出下表，待学生补充完善后形成猜想，并填入表格.

平行四边形的性质	平行四边形的判定
平行四边形的对边相等	猜想 1：
平行四边形的对角相等	猜想 2：
平行四边形的对角线互相平分	猜想 3：

追问 2：原命题正确，逆命题一定正确吗？

师生活动：学生回答不一定. 教师适时提出得到的猜想是否正确必须经过逻辑推理才能确定.

设计意图：从对命题的结构分析中提出猜想；在对原命题正确，而逆命题不一定正确的反思中体会证明的必要性.

3. 理性思考，证明定理

问题 3 你能证明上述猜想吗？

师生活动：对于猜想 1 与猜想 2，教师引导学生画出图形，写出已知、求证，要求学生口头证明；对于猜想 3，要求自己选择适当的方法写出书面证明.

下面以“对角线互相平分的四边形是平行四边形”为例进行证明. 教师引导学生画出图形，并写出已知、求证.

如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，且 $OA=OC$，$OB=OD$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

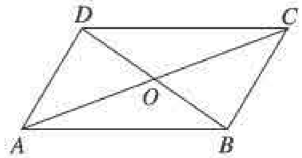


图 1

追问：要证明 $AB/\!/DC$ 以及 $AD/\!/BC$，根据平行线的判定，需要利用角的关系进行证明，你能得到相应的角的关系吗？

师生活动：学生回答可利用三角形全等证明内错角相等，从而得到两条直线平行. 教师及时强调化四边形为三角形的思想. 在此基础上师生共同完成证明过程.

小结：通过推理论证的真命题可以成为定理. 我们把上述三个结论称为平行四边形的判定定理. 加上平行四边形的定义，我们一共有四种判定平行四边形的方法.

设计意图：引导学生从定义出发，证明上述逆命题为真. 理解平行四边形的性质（平行四边形的对角线互相平分）和判定（对角线互相平分的四边形是平行四边形）都是从定义出发经过推理得到的真命题.

4. 运用定理，解决问题

例 1 如图 2，$AB=DC=EF$，$AD=BC$，$DE=CF$. 求证：$AB/\!/EF$.

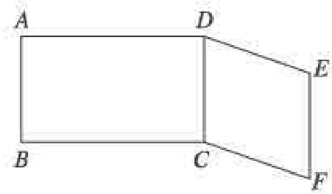


图 2

师生活动：学生独立思考形成思路后，由学生口述证法，教师板演.

设计意图：在平行四边形的证明中，常用的是利用边或对角线进行证明. 由于书上的例题只涉及对角线的证法，所以增加此例，同时示范证明过程的写法. 这样下面的例 2 可以更多地关注思路分析与判定定理的灵活应用上.

例 2 如图 3，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 是对角线 AC 上的两点，且 $AE=CF$. 求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

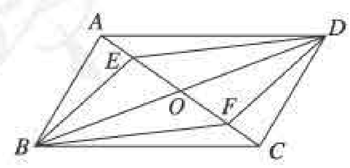


图 3

师生活动：先由学生独立思考. 若学生有想法，则由学生先说思路，然后教师追问：你是怎样想到的？对学生思路中的合理成分进行总结；若学生没有思路，教师可引导学生分析：从条件出发，你能够联想到的结论有哪些？从要证明的结论出发，证明一个四边形是平行四边形可以有哪些方法？启发学生形成思路.

追问：你还有其他证明方法吗？你更喜欢哪一种证法？

结论：在证明平行四边形时，若条件集中在对角线上，运用与对角线有关的判定定理解决问题

相对简便. 分析问题条件的特点，选择适当的判定定理，可以帮助我们获得简便的解题方法.

设计意图：引导学生多角度思考证明思路，初步学会评价证明思路的合理性.

例 3 在例 2 中，若 E，F 为直线 AC 上的两点，如图 4，其他条件不变，结论还成立吗？请证明你的结论.

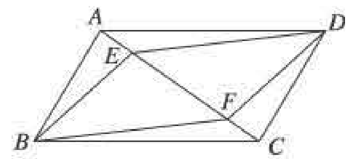


图 4

师生活动：教师引导学生分析思路. 若学生提出不同的思路，应对不同思路进行点评.

设计意图：对例 2 进行简单变式，促进知识的迁移，发展数学思维.

5. **小结**

教师引导学生参照下面问题，回顾本节课所学的主要内容，进行相互交流：

(1) 通过本节的学习，我们一共有几种判定平行四边形的方法？

(2) 在具体证明中，如何选择这些判定方法？

(3) 结合本节课的学习过程，谈谈对研究几何图形判定方法的思考.

学生畅谈后，教师结合图 5 从发现问题、提出问题（通过考察性质定理的逆命题，得到猜想）、分析问题和解决问题（利用定义证明猜想，形成判定定理）的角度进行总结.

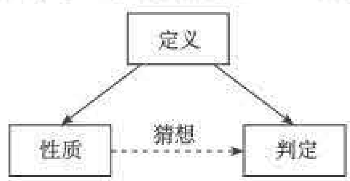


图 5

设计意图：通过小结，梳理本节课所学内容，总结方法，体会思想.

6. **布置作业**

教科书第 27 页练习第 1，2 题；习题 25.1 第 5，12 题.

五、目标检测设计

1. 已知四边形 $ABCD$，下面给出的四对条件能否判定它是平行四边形？若能，请在该条件后面写出判定的依据.

(1) $AB=BC$，$AD=CD$ ____________________；

(2) $AB=CD$，$AD=BC$ ____________________；

(3) $\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle D$ ____________________；

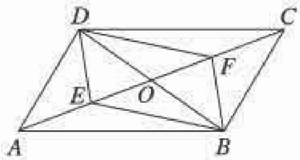
(4) $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$ ____________________.

设计意图：考查学生对判定定理 1，2 的理解.

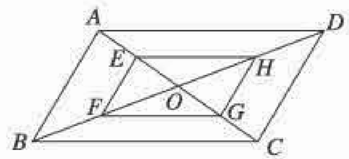
2. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 是对角线 AC 上的两点. 请补充一个关于点 E，F 的条件，使四边形 $DEBF$ 是平行四边形. 你补充的条件是________________.

设计意图：考查判定定理 3，强化学生对平行四边形图形特征（中心对称性）的认识.

3. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，E，F，G，H 分别是线段 AO，BO，CO，



（第 2 题）

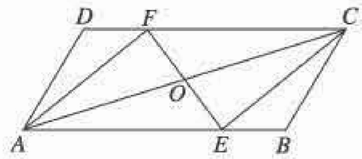


（第 3 题）

DO 上的点，且 $AE=CG$，$BF=DH$. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

设计意图：考查根据已知条件，灵活选取判定定理进行推理论证的能力.

4. 如图，O 是▱$ABCD$ 的对角线 AC 的中点，过点 O 的直线分别与 AB，CD 交于点 E，F. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.



（第 4 题）

设计意图：考查综合运用平行四边形的性质和判定解决问题的能力.

25.2 特殊的平行四边形（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

矩形的概念，矩形的性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

2. 内容解析

矩形是特殊的平行四边形，因此矩形具有一般平行四边形的全部性质. 作为一种特殊的平行四边形，矩形还具有一般平行四边形不具有的特殊性质. 矩形的研究突出体现了从一般到特殊的思路. 从动态的角度看，一个平行四边形在变形过程中，对边平行且相等关系不会改变，但内角的度数与对角线的长度会随之改变. 特别地，当平行四边形的一个角变为直角时，其余三个角也变为直角，此时对角线不仅互相平分而且长度相等. 这是一个从一般到特殊的动态演变过程，其研究思路与方法对其他特殊平行四边形的学习有借鉴作用.

“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”这个结论，是由矩形对角线相等且互相平分得到的. 它是研究矩形性质过程中自然发现的结论，是利用特殊平行四边形研究三角形的一个典范，体现了四边形与三角形间的联系. 这个结论是直角三角形的一个重要性质，在今后学习中有着广泛的应用.

基于以上分析，本节课的教学重点是：矩形不同于一般平行四边形的特殊性质的发现、证明与初步应用.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）理解矩形的概念，明确矩形与平行四边形的区别与联系.

（2）探索并证明矩形的性质，会用矩形性质解决相关问题.

（3）理解“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”这一重要结论.

2. **目标解析**

目标（1）的具体要求是：理解矩形的概念，要求学生明确矩形是特殊的平行四边形，知道矩形的定义是探究矩形性质和判定的出发点.

目标（2）的具体要求是：经历对矩形性质的理性思辨和整理归纳的过程，形成对矩形性质的完整认识，明确性质的条件与结论，能在不同情境和复杂问题中，综合运用矩形的性质解决相关问题.

目标（3）的具体要求是：理解“直角三角形斜边上的中线等于斜边一半”这一重要结论，会应用这一结论解决简单的问题.

三、教学问题诊断分析

从学生的学习过程看，矩形在生活中广泛存在，所以学生从小就有对矩形的整体感知. 在小学学习中，已经初步认识矩形的四个角都是直角，掌握矩形面积的计算公式，但这些都是在直观感知基础上的归纳认识. 学生头脑中的固有经验是把平行四边形、矩形、正方形作为独立的图形看待. 在本节课学习中，需要建立平行四边形和矩形之间的联系，把矩形看做特殊的平行四边形，并从这种特殊化中发现矩形的特殊性质，这对学生来说有一定困难.

在研究四边形问题时常借助三角形知识进行，反之也可以用四边形知识研究三角形. 在前面的学习中，学生接触了用平行四边形知识研究三角形中位线，这对本节利用矩形知识研究直角三角形有所帮助，但还很不够，因为学生这方面的经验还很欠缺.

因此，本节课的教学难点是：能从矩形与平行四边形之间特殊与一般的关系出发，探究矩形的性质；能从矩形出发研究直角三角形中的有关问题.

四、教学过程设计

1. **提出问题，引发思考**

引言

对一类几何图形的研究，我们常常按照从一般到特殊的思路进行. 比如研究了一般三角形后，我们研究了把边特殊化得到的等腰三角形、把角特殊化得到的直角三角形. 对于平行四边形我们也延续这样的思路进行研究.

问题1 把平行四边形的一个内角特殊化——变为90°，会有什么样的特殊图形产生呢？你能给这种图形下一个定义吗？生活中存在这种图形吗？

师生活动：教师对实物进行动态演示. 让学生观察从一般的平行四边形到矩形的变化过程，得出矩形的定义：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

追问：矩形在实际生活中大量存在和应用，这是因为此类图形有一些特殊的性质. 你认为矩形有哪些性质？我们如何研究矩形的性质？

设计意图：借助实物的动态变化，让学生直观感知角的变化带来平行四边形的改变. 体会矩形是平行四边形角特殊化后的产物，自然引出矩形的概念. 通过举例说明，使学生真实感受矩形的广

泛应用，激发学习兴趣.

2. 探究性质，深化认知

问题 2 如图 1，作为特殊的平行四边形，矩形具有平行四边形的所有性质. 此外，矩形还有一般平行四边形不具有的特殊性质吗？

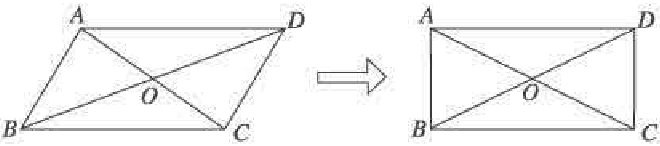


图 1

追问 1：对于矩形，我们仍然从边、角和对角线等方面进行研究.

(1) 矩形的边是否有不同于一般平行四边形的特殊性质？

(2) 矩形的角是否有不同于一般平行四边形的特殊性质？

(3) 矩形的对角线是否有不同于一般平行四边形的特殊性质？

师生活动：在已有活动教具的基础上，将对角线用橡皮筋连接. 通过动态观察，引导学生体会边长确定时平行四边形的边、角、对角线的变化特点及制约关系. 并在矩形形状时停留，引导学生类比平行四边形性质的探究过程，从边、角、对角线的角度进行思考、讨论、交流，得出初步猜想并归纳整理成文字表述.

猜想 1：矩形的四个角都是直角；猜想 2：矩形的对角线相等.

设计意图：调动已有学习经验，结合教具进行演示. 使学生在动态中感知，在静态中思考，类比经验探究矩形的特殊性质.

追问 2：你能证明这些猜想吗？

师生活动：性质 1 的证明相对简单，让学生在定义的基础上进行口述证明即可.

证明矩形的对角线相等方法多样，如直接运用勾股定理进行证明，利用三角形全等证明线段相等，利用轴对称构造等腰三角形三线合一进行证明，等等. 充分挖掘，鼓励学生尝试不同的证明方法，完整书写利用全等的证明过程. 对于利用勾股定理与构造图形转化的证明思路由学生口述完成即可.

设计意图：引导学生证明猜想，得到定理. 再次体会几何研究的“观察—猜想—证明”过程.

追问 3：矩形是轴对称图形吗？如果是，指出它的对称轴.

师生活动：引导学生通过对折实验把矩形性质归结为轴对称的有关性质：对应角相等（四个角都是直角），对应线段相等（对角线相等）.

设计意图：引导学生用轴对称观点探究矩形的性质.

问题 3 在前面的学习中，我们利用平行四边形知识研究了三角形的中位线. 类似地，你能结合图 2，发现直角三角形的一些特殊性质吗？

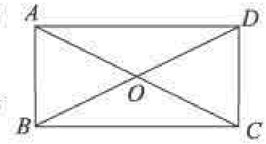


图 2

师生活动：学生分小组讨论，交流后得出结论：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

设计意图：理解直角三角形与矩形的关系，进一步体会用特殊四边形的性质研究特殊三角形的策略，得到直角三角形斜边上中线的性质.

追问：如图 3，三位学生正在做投圈游戏，他们分别站在一个直角三角形的三个顶点处，目标物放在斜边的中点处. 这样的队形对每个人公平吗？请说明理由.

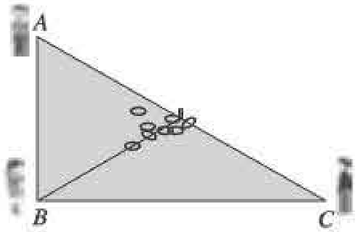


图 3

师生活动：学生积极发言，教师适时点拨.

设计意图：应用刚得到的结论解释其中的数学道理，巩固新知，体会定理的应用价值.

3. **运用性质，解决问题**

例 1　如图 4，矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，且 $\angle AOB=60^\circ$，$AB=4$，求矩形对角线的长.

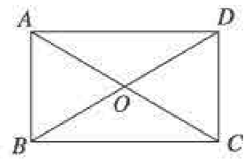


图 4

师生活动：教师先引导学生分析解题思路. 因为矩形是特殊的平行四边形，所以它具有对角线相等且互相平分的特殊性质. 根据矩形的这个特性和已知，可得$\triangle OAB$ 是等边三角形，因此对角线的长度可求. 在此基础上写出解题过程.

追问：你还能得出哪些结论？

师生活动：学生在思考解决的过程中，不仅将相关知识综合起来，而且能整体感知图形特征，从而进一步领会矩形与直角三角形、等腰（边）三角形之间的关系.

设计意图：运用矩形的性质解决问题，体会矩形与直角三角形、等腰（边）三角形之间的关系.

例 2　如图 5，在矩形 $ABCD$ 中，$AE /\!/ BD$，且交 CB 的延长线于点 E. 求证：$\angle EAB=\angle CAB$.

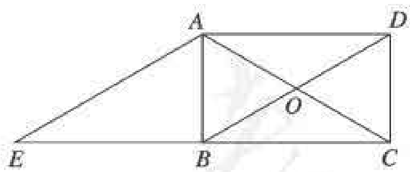


图 5

证法 1：由矩形对角线相等且互相平分，得 $OA=OB$，进而$\angle OAB=\angle OBA$，再由 $AE /\!/ BD$ 得$\angle EAB=\angle OBA$. 进一步得到$\angle EAB=\angle CAB$.

证法 2：由矩形对角线相等得 $AC=BD$，再证四边形 $AEBD$ 是平行四边形，得 $AE=AC$，又因为$\angle ABC=90^\circ$，利用等腰三角形三线合一可证.

设计意图：可用多种方法证明结论，有利于拓宽学生思维，使矩形性质在与其他各类相关知识综合运用中融会贯通.

4. **小结**

请结合下面问题，说说你对矩形的认识并相互交流：

（1）矩形有哪些性质？它是轴对称图形吗？能否从轴对称角度说说矩形区别于一般平行四边形的特殊性质？

（2）用矩形性质可以得到直角三角形的什么性质？

（3）本节研究矩形的过程经历了哪些阶段？在学习中哪个地方你感触最深？

设计意图：问题（1）从知识层面引导学生回顾矩形的定义和性质；问题（2）引导回顾“直角三角形斜边上中线等于斜边的一半”；问题（3）引导学生反思学习过程，进一步理解“从一般到特殊”的图形研究思路，积累数学活动经验.

5. **布置作业**

教科书第 33 页练习第 1，2，3 题；习题 25.2 第 9 题.

五、目标检测设计

1. 矩形的定义中有两个条件：一是______________，二是________________.

设计意图：考查矩形的定义.

2. 矩形具有而一般平行四边形不具有的性质是（　　）.

（A）对角线相等　（B）对边相等　（C）对角相等　（D）对角线互相平分

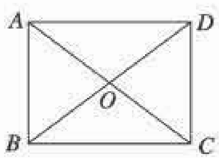
设计意图：考查矩形的性质，明确矩形与一般平行四边形的区别.

3. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AC=10$，BO 是斜边上的中线，则 BO 的长为________.

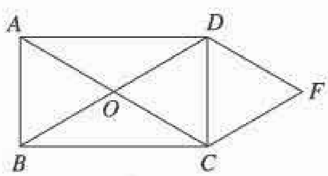
设计意图：考查直角三角形斜边上的中线性质.

4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AB=6$，$BC=8$，则$\triangle ABO$ 的周长为________.

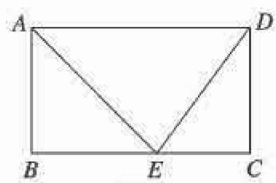
设计意图：考查运用矩形性质和勾股定理进行推理计算的能力.



（第 4 题）



（第 5 题）



（第 6 题）

5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，且$\angle CDF=\angle BDC$，$\angle DCF=\angle ACD$. 求证：$DF=CF$.

设计意图：考查应用矩形对角线性质进行推理证明的能力.

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，AE 平分$\angle BAD$，交 BC 于点 E，$ED=5$，$EC=3$，求矩形的周长及对角线的长.

设计意图：考查综合运用矩形性质、勾股定理、等腰三角形的判定与性质等知识进行推理计算的能力.

平行四边形复习课

一、内容和内容解析

1. 内容

平行四边形、矩形、菱形、正方形的相关知识.

2. 内容解析

平行四边形、矩形、菱形和正方形的原型广泛存在于现实生活中. 从平行四边形到矩形、菱形，再到正方形，是通过角或边的特殊化得到的. 因此，矩形、菱形和正方形具有平行四边形的所有性质，除此以外，它们还有一般平行四边形不具有的性质. 正方形既是特殊的矩形又是特殊的菱形，因此它兼有矩形和菱形的性质.

对于这些平行四边形的研究，都是采用了先给出几何对象的定义，再探究其性质和判定的研究思路，以及从图形性质定理的逆命题出发，探究图形判定条件的方法. 平行四边形性质和判定的探究，体现了用三角形及全等三角形有关知识研究平行四边形的方法；三角形中位线的探究和直角三角形斜边上中线性质的发现，体现了用平行四边形和矩形的有关知识研究三角形性质的方法.

这些知识、研究思路及研究方法构成了本章主要内容. 一方面，把这些知识和思想方法整理成具有良好结构的系统，从整体上把握知识体系，深化对相关知识和数学思想方法的理解，这是复习课的主要目的；另一方面，通过选择适当的知识进行推理计算并解决问题的训练，发展逻辑推理能力和解决问题能力，这也是复习课主要目的之一.

综上所述，本节课的教学重点是：整体梳理平行四边形的知识结构体系，根据具体问题情境选择适当的知识进行推理计算并解决问题.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）进一步理解平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念及其相互联系.

（2）掌握平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质和判定.

（3）会把各种平行四边形的相关知识进行结构化整理.

2. 目标解析

目标（1）要求学生能说出各种平行四边形之间的区别与联系，并能画出关系图.

目标（2）要求学生能从边、角、对角线三方面说出各种平行四边形的性质与判定，并比较它们的异同；能根据问题的特点，选择适当的定义、定理进行推理和计算，能把相关知识应用到新的情境中.

目标（3）要求学生能在独立回顾平行四边形相关知识的基础上，把知识整理成适当的结构体系，并能有条理地叙述本章的核心知识.

三、教学问题诊断分析

复习是一种特殊的学习活动，具有重复性、系统性、综合性和反思性. 复习的主要目的是加强

知识联系、深化知识理解、优化知识结构，体会数学思想方法，发展数学认知. 复习课的核心认知活动是知识体系的重组和知识的选择性应用. 由于学生独立整理知识的经验不多，综合能力有限，难以整理出系统、简约的知识结构，而且复习中还需要根据问题情境，选择适当的知识来解决问题，学生可能遇到很多困难.

综上所述，本节课的难点是：知识体系的结构化整理和选择性应用.

四、教学过程设计

1. 创设情境，回顾知识

问题 1 本章学习了哪些特殊的四边形？是按照什么次序学习的？请说说这些四边形之间的关系.

师生活动：学生回顾研究次序“平行四边形—矩形、菱形—正方形”及“一般到特殊”的研究思路，交流对各种平行四边形关系的理解. 学生可能从以下几个角度理解：（1）概念内涵关系，如图 1；（2）概念外延关系，如图 2. 可能有相当多学生语言描述不完整，因此，教师要进行适当的引导.

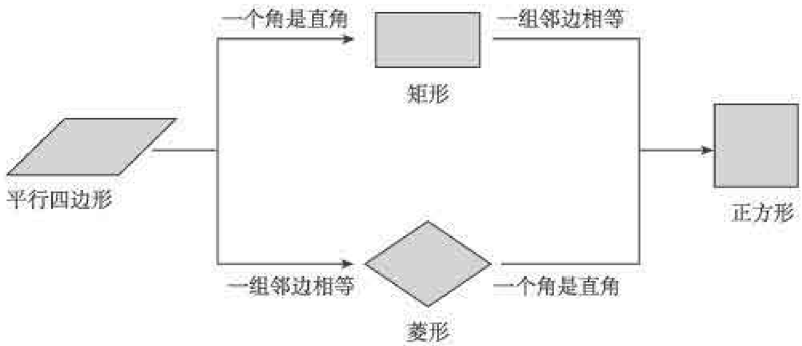


图 1

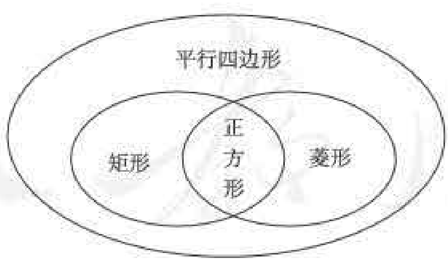


图 2

设计意图：引导学生有条理地回顾概念，并建立概念之间的联系.

问题 2 各种平行四边形中，它们各自的研究内容、研究步骤、研究方法有什么共同点？能列表说明吗？

师生活动：教师引导学生列出以下表格进行说明：

图形	研究内容	研究步骤	研究方法
平行四边形	边、角、对角线的特征	下定义—探性质—研判定	观察、猜想、证明；把平行四边形转化为三角形，从性质定理的逆命题讨论中研究判定定理
矩形	边、角、对角线的特征	下定义—探性质—研判定	一般到特殊的方法，类比平行四边形
菱形	边、角、对角线的特征	下定义—探性质—研判定	一般到特殊的方法，类比平行四边形和矩形
正方形	边、角、对角线的特征	下定义—探性质—研判定	一般到特殊的方法，类比矩形和菱形

由此归纳：

研究内容：各种平行四边形的边、角、对角线的特征.

研究步骤：下定义—探性质—研判定.

研究方法：观察、猜想、证明，把四边形转化为三角形，从性质定理的逆命题讨论中研究判定定理，类比，特殊化.

在此基础上，教师指出，这些经验具有一般性，是研究图形的一般思路.

设计意图：通过各种平行四边形的研究内容、研究步骤和研究方法的回顾，归纳几何问题研究的一般步骤和方法.

问题 3　你能说说平行四边形、矩形、菱形和正方形的性质和判定吗？

师生活动：学生独立思考，分组交流，集中展示（每个小组展示一类平行四边形性质和判定）.

2. 整理知识，优化知识结构

问题 4　你能把各种平行四边形的性质和判定整理成易记的知识结构吗？试一试！

师生活动：学生先自进整理，教师进行知识整理方法的个别指导. 在此基础上，进行知识整理结果的交流活动，优化知识结构. 教师可在最后展示自己的知识整理结果供学生参考. 各种平行四边形的判定和性质如图 3，从边、角、对角线三方面进行考虑.

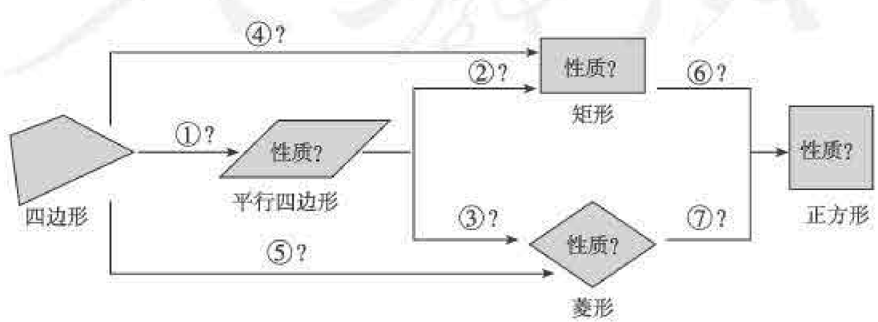


图 3

设计意图：开展独立的知识整理活动和相互交流，发展知识组织能力.

3. 基础练习

练习 (1) 结合图 3，在下面标号后写出所有的判定定理：

①____;

②____;

③____.

(2) 平行四边形的一个内角为 40°，一组邻边为 3 和 4，求它的各边长和各内角度数.

(3) 如果矩形的对角线长为 13，一边长为 5，则该矩形的周长是__________.

(4) 依次连接菱形各边中点得到的四边形是哪一种特殊的四边形？请说出你的理由.

设计意图：选择应用各种平行四边形的性质和判定进行推理和计算，巩固知识.

4. 综合应用，解决问题

例 1 如图 4，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，过点 B 作 $BP \parallel AC$，过点 C 作 $CP \parallel BD$，BP 与 CP 相交于点 P. 试判断四边形 $BPCO$ 的形状，并说明理由.

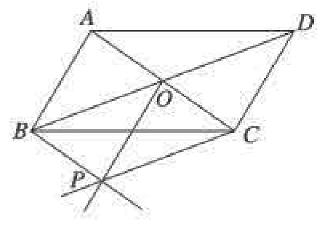


图 4

师生活动：教师引导学生在读题的基础上先判断形状，再说明理由.（得到的是平行四边形，理由是两组对边分别平行的四边形是平行四边形.）

追问 1：若连接 OP 得四边形 $ABPO$，它是什么四边形？

师生活动：学生在原图基础上连接 OP，作出判断，然后说明理由.（得到的也是平行四边形，理由是一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.）

追问 2：若将$\square ABCD$ 改为矩形 $ABCD$，其他条件不变，得到的四边形 $BPCO$ 是什么四边形？

师生活动：教师引导学生重新画一个图形，将平行四边形改为矩形，判断四边形的形状，并说明理由.（得到是菱形，理由是有一组邻边相等的平行四边形是菱形.）

追问 3：若得到的四边形 $BPCO$ 是矩形，应将$\square ABCD$ 改为什么四边形？

师生活动：教师引导学生得出：把$\square ABCD$ 改为菱形.

追问 4：能否得到正方形 $BPCO$ 呢？此时四边形 $ABCD$ 又是什么四边形？

师生活动：师生一起探究：要得到正方形，$\square ABCD$ 的对角线既要相等，又要互相垂直，应该是正方形.

设计意图：通过一系列的改变条件或结论，使学生对平行四边形、矩形、菱形和正方形的性质、判定以及它们之间的关系有了更进一步的理解，使学生能较灵活地运用平行四边形、矩形、菱形和正方形的性质、判定解决有关问题. 在分析过程中渗透类比思想，培养学生从多角度思考问题的习惯.

5. 小结

教师引导学生参照下面问题，回顾本节课所学的主要内容，进行相互交流：

(1) 各种平行四边形的研究次序是怎样的？

(2) 各种平行四边形的研究内容、研究步骤和研究方法是怎样的？

(3) 平行四边形的性质和判定有哪些？它们之间有什么关系？

(4) 平行四边形、矩形、菱形和正方形之间有什么关系？矩形、菱形和正方形有哪些特殊性质？怎样判定？

(5) 各种平行四边形的研究中还得到了哪些重要的结论？

师生活动：教师和学生一起回顾本节课的主要内容，先让学生自己疏理本节课的基础知识及主要思想方法.

设计意图：通过小结，使学生梳理本节课所学内容，掌握本节课的核心——各种平行四边形的性质、判定以及它们的联系与区别.

6. **布置作业**：

必做题：教科书复习题25第1，2，4，6，7，9，12题.

选做题：教科书复习题25第13，14题.

五、目标检测设计

1. 在▱$ABCD$中，$\angle A=50^\circ$，$AB=30$，则$\angle B=$____，$DC=$____.

设计意图：考查平行四边形的性质.

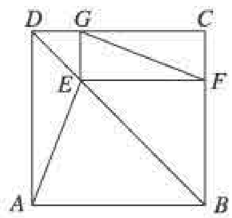
2. 下列命题中，是真命题的是（　　）.

(A) 有两边相等的平行四边形是菱形　　(B) 有一个角是直角的四边形是矩形

(C) 四个角相等的菱形是正方形　　(D) 两条对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

设计意图：考查矩形、菱形和正方形的判定方法.

3. 如图，E是正方形$ABCD$的对角线BD上的一点，且$EF\perp BC$，$EG\perp CD$，垂足分别是F，G. 求证：$AE=FG$.



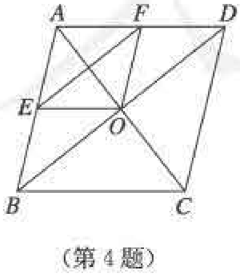
（第3题）

设计意图：考查综合应用矩形的性质、判定以及正方形的性质解决问题的能力.

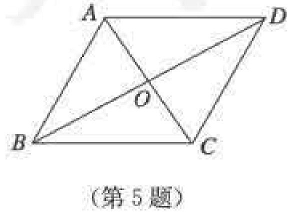
4. 如图，E，F分别是菱形$ABCD$的边AB，AD的中点，且$AB=5$，$AC=6$.

(1) $\triangle OEF$是什么三角形？证明你的结论.

(2) 求线段EF的长.



（第4题）



（第5题）

5. 如图，在菱形$ABCD$中，$\angle ABC$与$\angle BAD$的度数比为$1:2$，菱形$ABCD$的周长是48. 求：

(1) 菱形$ABCD$两条对角线的长度；

（2）菱形 $ABCD$ 的面积.

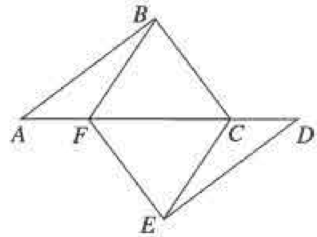
设计意图：考查综合应用菱形性质解决问题的能力.

6. 如图，点 A，F，C，D 在同一条直线上，点 B，E 分别在直线 AD 的两侧，且 $AB=DE$，$\angle A=\angle D$，$AF=DC$.

（1）求证：四边形 $BFEC$ 是平行四边形.

（2）若 $\angle ABC=90°$，$AB=4$，$BC=3$，当 AF 为______时，四边形 $BFEC$ 是菱形.

设计意图：考查平行四边形的判定以及菱形的性质和判定.



（第 6 题）

V 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 平行四边形法则

如图 25-1，两个夹角为 θ（$0°<\theta<180°$）的共点力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$，可以用表示这两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的大小和方向的有向线段为邻边作平行四边形，平行四边形中这两条邻边之间对角线的大小和方向就表示合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向，这种方法我们常常称为平行四边形法则.

实际上，不仅对力，对既有大小、又有方向的量求和时，我们一般都采用平行四边形法则.

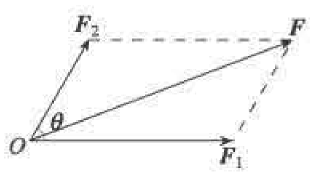


图 25-1

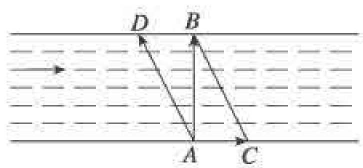


图 25-2

下面利用平行四边形法则解决一个实际问题. 如图 25-2，一条小河水流的速度为 2 km/h，一艘船从 A 点出发以 4 km/h 的速度向垂直于对岸的方向行驶. 它能到达对岸与 A 点正对的 B 点吗？如果要使小船到达 B 点，在 A 点怎样调整小船的方向？我们知道，船从 A 点出发以 4 km/h 的速度向垂直于对岸的方向行驶，它是不能到达与 A 点正对的 B 点的. 由平行四边形法则，$AC=2$，$AD=4$，则 $BC=4$，$AB=2\sqrt{3}$，$\angle DAB=\angle ABC=30°$. 所以船在 A 点应沿北偏西 30°方向行驶，它的实际速度为 $2\sqrt{3}$ km/h.

2. 梯形

我们知道，两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形. 除了平行四边形，生活中还大量存在一组对边平行，而另一组对边不平行的四边形，这类四边形叫做梯形. 其中一条腰垂直于底边的梯形叫做直角梯形（图 25-3），两条腰相等的梯形叫做等腰梯形（图 25-4）. 你能探讨这些梯形的性质吗？

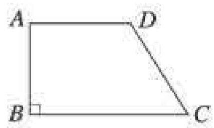


图 25-3

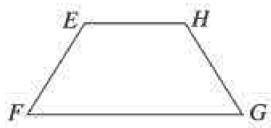


图 25-4

有了梯形，我们对四边形的认识更加丰富了，它们的关系如图 25-5.

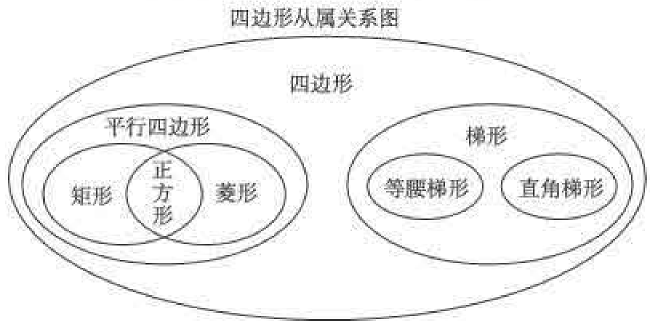


图 25-5

下面我们研究等腰梯形的性质. 现有一张矩形白纸，要求只剪一刀，得到一个等腰梯形（图 25-6），你能做到吗？

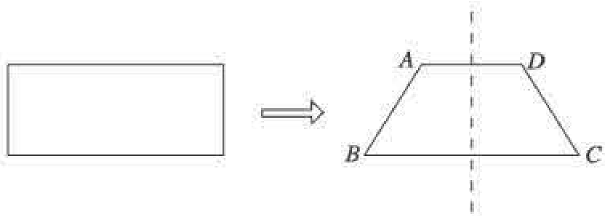


图 25-6

可以发现，等腰梯形是轴对称图形，连接上、下底中点的直线是它的对称轴. 根据等腰梯形的轴对称性，我们可以发现，等腰梯形同一底上的两个角相等，等腰梯形的对角线相等. 请你证明这些结论.

在有关梯形性质的研究中，我们经常通过添加辅助线，把梯形转化为平行四边形或三角形. 梯形中常见的辅助线有：①作梯形的高，得到矩形和直角三角形；②平移腰或对角线，得到平行四边形或三角形；③延长两腰交于一点，得到两个三角形.

3. 距离与面积

距离是几何中的重要度量之一. 回顾几何的学习，我们知道距离是几何学习的重要起点.

如图 25-7，如果我们用点表示位置，经过两点有一条直线，并且只有一条直线. 点与点之间存在很多路径，这些路径中有一条最短的路径，就是连接这两点的线段. 这条线段的长度，我们定义为这两点间的距离. 六年级下册中，我们有一个关于线段的基本事实：两点的所有连线中，线段最短. 由上，我们不难得出，两点之间的距离是存在的，而且是唯一的.

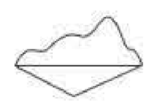


图 25-7

在几何的学习中，仅仅有距离还是不够的．如图 25-8，点 A 与点 B、点 C 的距离是相等的，如何把点 B 与点 C 区别开来？这时我们引进了角度的概念．有了角度，我们就把点 B 与点 C 区别开来了．

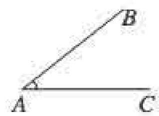


图 25-8

上面我们是从点表示位置出发，讲几何学习中的距离和角度，这给我们很大的启发．距离和角度是几何学习的重要起点，以后几何学习的内容，无论是图形的形状、大小还是位置关系，都是在它们的基础上展开和发展的．

有了点与点之间的距离，我们可以定义点到直线的距离．在引入这个概念之前，我们先有这样的结论：过一点有且只有一条直线与已知直线垂直．在此基础上，我们得到：(1) 连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短（图 25-9）；(2) 直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离．进而定义两条平行线间的距离，两条平行线间的距离是两条平行线上点与点之间最短路径的长度（图 25-10）．从上面三类距离我们不难看出，点与点之间的距离是基础，点到直线的距离、两条平行线间的距离，都是在点与点之间距离的基础上定义的一个非负数值（线段长度）．而且距离有三个特点：(1) 存在；(2) 最短；(3) 唯一．

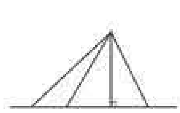


图 25-9

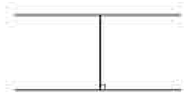


图 25-10

在距离的基础上，再谈图形的面积就水到渠成了．面积也是几何中的重要度量之一．如果说距离是一维空间的基本度量，那么面积就是二维空间的基本度量．单位正方形的面积我们定义为 1 个面积单位．有了面积单位，我们得到矩形、平行四边形、三角形、梯形等多边形和圆的面积，以及它们的计算公式．在目前关于多边形面积计算的内容中，面积与距离的概念紧密关联．有了距离，我们才得到多边形面积的计算公式．

面积非常直观，看得见、摸得着，其计算公式涉及垂直等图形的位置关系，在几何证明中具有广泛的应用．我国古代数学的成就中，有很多是充分运用面积得到几何关系的，著名的出入相补原理作用居功至伟．

出入相补（又称以盈补虚）原理是中国古代数学中一条用于推证几何图形的面积或体积的基本原理，它有以下四方面内容：

(1) 一个几何图形，可以切割成任意多块任何形状的小图形，总面积（或总体积）保持不变，总面积（或总体积）等于所有分割成的小图形面积（或体积）之和．

(2) 一个几何图形，可以任意旋转、倒置、移动、复制，面积（或体积）不变．

(3) 多个几何图形，可以任意拼合，总面积（或总体积）不变．

(4) 几何图形与其复制图形拼合，总面积（或总体积）加倍．

出入相补原理最早由三国时代魏国数学家刘徽创建．之所以称其为原理，是因为它比公理、定理等更直接、更基本，是不需要证明的事实．吴文俊先生对于出入相补原理曾给予很高的评价．他认为，充分运用原理解决几何中的问题，体现了我国古代人民的智慧，既简便又实用，是我国古代数学的重要成就之一，需要继承、借鉴，挖掘其内涵，发扬光大．我国古代对勾股定理的证明，就是充分运用出入相补原理，通过面积的方法来实现的．

看看教科书中的一些题目，你们能够运用面积的方法证明它们吗？

4. 概念的内涵与外延

概念反映的是对象的本质属性. 那么什么是本质属性呢？本质属性是决定该对象之所以成为该对象而区别于别的对象的那些属性. 也就是说，是这个对象必有这些属性，有这些属性的必是这个对象. 例如“平行四边形”这个概念，各种形形色色、大大小小的平行四边形的本质属性是两组对边分别平行的四边形. 凡是平行四边形都具有“两组对边分别平行”的属性，凡是具有“两组对边分别平行的四边形”这一属性的对象都是平行四边形.

概念的思维形式有个基本的逻辑特征，即每个概念都有内涵和外延.

概念的内涵指反映在概念中的对象的本质属性，概念的外延指具有概念所反映的本质属性的对象. 通常说的概念的含义就是概念的内涵；概念的适用范围就是概念的外延. 以“矩形”为例，“一个内角为直角的平行四边形”是矩形这个概念的内涵，而所有具有“一个内角为直角的平行四边形”属性的几何图形都是矩形这个概念的外延.

有的同学认为正方形不是矩形，他认为“矩形是长方形，而正方形是正方形，正方形怎么能是长方形呢?”这说明他对矩形这个概念还不明确. 矩形不必是长方的，矩形的本质属性——也就是矩形这个概念的内涵仅仅是：一个内角为直角的平行四边形. 以这一本质属性（内涵）来衡量正方形，正方形是不是一内角为直角的平行四边形呢？回答是肯定的. 所以正方形属于矩形这个概念的外延范围.

在本章中，我们还研究了菱形、正方形的概念，你能说说这些概念的内涵和外延吗？

二、拓展性问题

1. 丝巾是正方形的吗？

小燕在商场里看到一条很漂亮的方丝巾，非常想买. 但她拿起来看时感觉丝巾不太方. 售货员看见她犹豫的样子，就拿过丝巾拉起一组对角，让小燕看看另一组对角是否对齐了，如图 25-11 所示. 可不知为什么，小燕感觉还是有些不对劲儿. 于是，售货员又拉起另一组对角，再次让小燕检验最初拉起的一组对角是否又对齐了. 最后，小燕终于买了这条柔软漂亮的丝巾.

图 25-11

你认为小燕买的这条丝巾真是正方形的吗？

很显然，按照售货员的检验方法是不能保证它是正方形的. 只能说明这条丝巾的两组对角分别相等，四条边也相等，也就相当于丝巾的两条对角线所在直线是对称轴. 而这只能保证丝巾是菱形，不能保证它是正方形.

因为正方形的对称轴共有四条，除了两条对角线所在直线外，还有两条是对边中点连线所在直线. 所以只要拉起一组对边的中点，将丝巾对折，看看另一组对边是否重合即说明它是不是正方形. 如图 25-12 所示，另一组对边显然不能重合，那么丝巾就不是正方形. 若拉起一组对边的中点将丝巾对折后，另一组对边能重合，如图 25-13 所示，那么丝巾就一定是正方形.

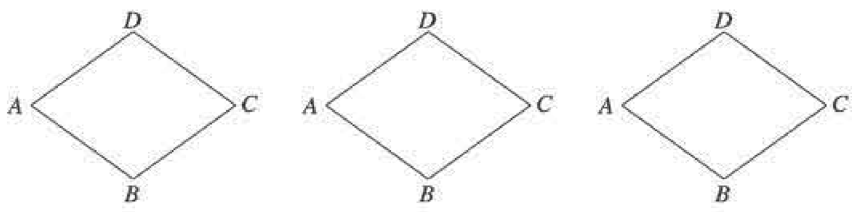
图 25-12

图 25-13

2. 一个内角是 72°的菱形的分割

（1）如图 25-14，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=72°$. 请设计三种不同的分法，将菱形 $ABCD$ 分割成四个三角形，使得每个三角形都是等腰三角形.

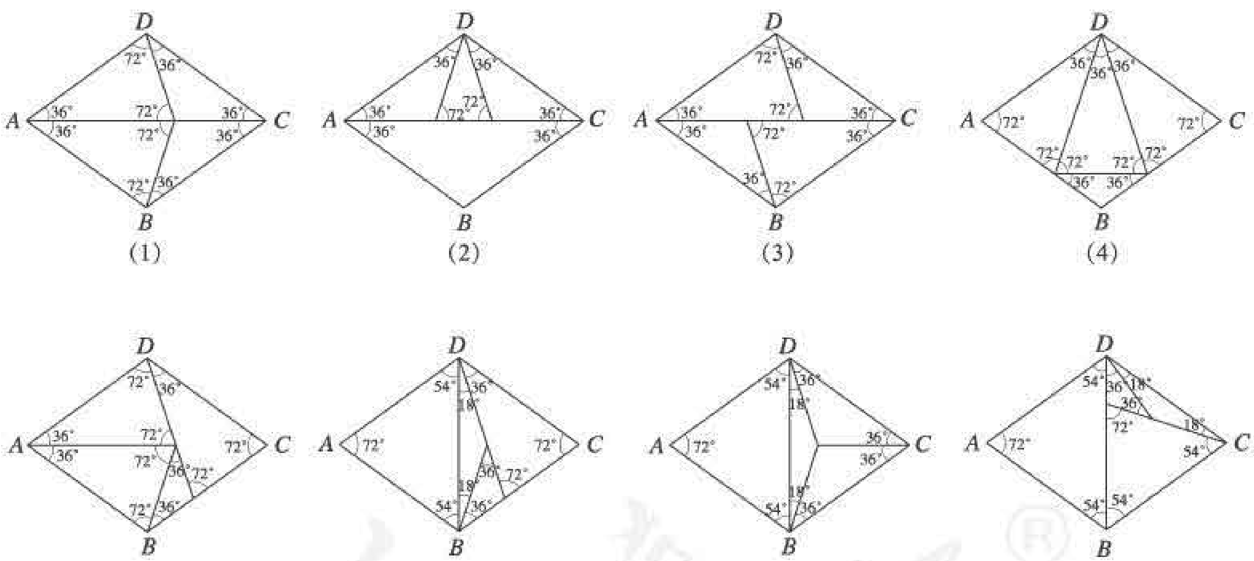
画图工具不限，要求画出分割线段；标出所得三角形内角的度数；不要求写出画法和证明；只要有一条分割线段位置不同，就认为是两种不同的分法.



（1）　　（2）　　（3）

图 25-14

答案与提示：



（1）　　（2）　　（3）　　（4）

（5）　　（6）　　（7）　　（8）

图 25-15

（2）你能把上述菱形分成四个面积相等的三角形吗？有多少种分法？试一试！

3. 变为等边三角形的铰链正方形

如何把一个正方形变成等边三角形？著名趣题大师亨利·杜德尼给出了一种完美的解答——只需要把正方形分割成特定的四块，它们就能拼成一个等边三角形.

把一个正方形分割成如图 25-16 的四块，由铰链连接，在这里铰链用黑点表示. 如果把①固定住，绕着铰链旋转其他三块，就可以把它们重新组合成一个新的形状. 只用眼睛看，你能想象出新的形状是什么吗？如果看不出来，你可以动手操作一下试试，是不是很有趣？

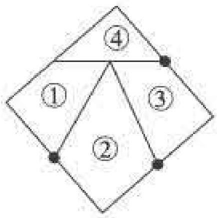


图 25-16

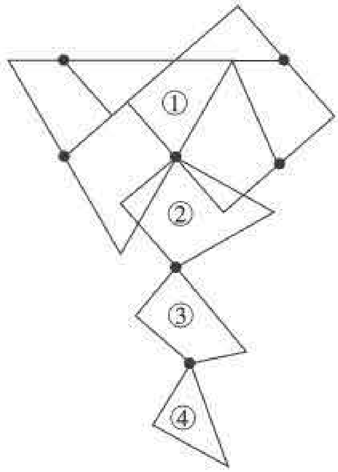


图 25-17

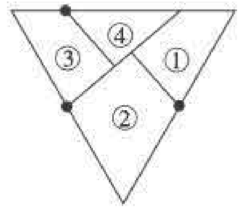


图 25-18

如图 25-17，用铰链连接的一片片多边形绕一个方向旋转就得到正方形，绕另一个方向旋转就得到等边三角形. 如图 25-18，两个铰链平分等边三角形的两边，第三个铰链和多边形①④的公共顶点把第三边分成的比大约是 0.982∶2∶1.018.

这个巧妙的分割被设计师用在生活中. 图 25-19 是四个被铰链连在一起的异型小茶几，每一个都具备完整的功能. 你可以将它们就这么弯折着摆在客厅，组合成无数颇具现代感的造型. 当然，也可以用来完成杜德尼的完美变换，只需要让它们按顺时针或逆时针拼合在一起，它们就能在正方形和等边三角形之间完美切换.

图 25-19

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章主要内容是平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念、性质与判定. 具体要求是：理解平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念以及它们之间的关系；探索并证明平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质定理与判定定理；了解两条平行线间距离的意义；探索并证明三角形中位线定理；探索并掌握“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”这个重要结论.

2. 本章评价中应注意以下问题：

(1) 关注对平行四边形、矩形、菱形、正方形之间关系的理解，以及平行四边形知识与三角

形、三角形全等、勾股定理等知识的联系.

(2) 注重对学生推理能力的评价. 关注学生能否清晰、有条理地表达自己的思考过程，能否在推理过程中做到步步有据.

(3) 注重对学生应用所学知识及方法解决问题能力的评价. 关注学生能否从不同角度分析问题、解决问题，能否掌握分析几何证明思路的基本方法，能否运用所学知识解释生产、生活中的现象，等等.

(4) 关注学生学习过程的评价. 在本章学习过程中，学生不断经历并体会研究几何图形的思路和方法，即从定义出发研究图形性质，从研究性质定理的逆命题着手探究图形的判定方法等. 评价中关注学生能否观察、分析图形的基本结构；能否通过类比和归纳，发现结论，获得猜想；能否通过演绎推理证明获得的猜想；等等.

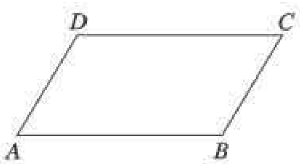
二、测试题（时间：45 分，满分 100 分）

（一）选择题（每题 5 分，共 30 分）

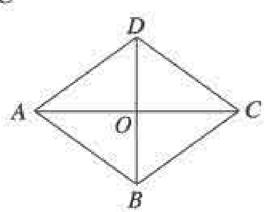
1. 如图，下列四组条件中，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是（　　）.

(A) $AB=DC$，$AD=BC$　　(B) $AB/\!/DC$，$AD/\!/BC$

(C) $AB/\!/DC$，$AD=BC$　　(D) $AB/\!/DC$，$AB=DC$



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O. 下列结论中不一定成立的是（　　）.

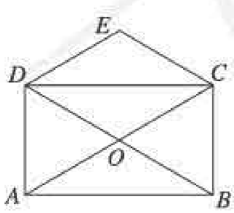
(A) $AB/\!/DC$　　(B) $AC=BD$　　(C) $AC\perp BD$　　(D) $OA=OC$

3. 顺次连接矩形四边中点得到的四边形一定是（　　）.

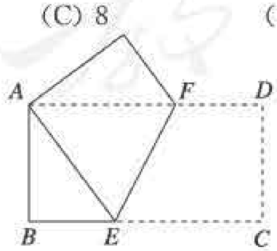
(A) 正方形　　(B) 矩形　　(C) 菱形　　(D) 等腰梯形

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$CE/\!/BD$，$DE/\!/AC$. 若 $AC=4$，则四边形 $OCED$ 的周长为（　　）.

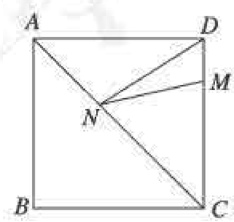
(A) 4　　(B) 6　　(C) 8　　(D) 10



（第 4 题）



（第 5 题）



（第 6 题）

5. 如图，将一个边长分别为 4，8 的矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 C 与点 A 重合，则折痕 EF 的长是（　　）.

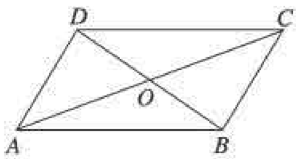
(A) $\sqrt{3}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) $\sqrt{5}$　　(D) $2\sqrt{5}$

6. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 8，点 M 在 DC 上，且 $DM=2$，N 是 AC 上一动点，则 $DN+MN$ 的最小值为（　　）.

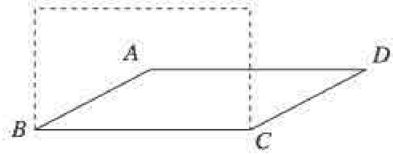
(A) 8　　　　(B) $8\sqrt{2}$　　　　(C) $2\sqrt{17}$　　　　(D) 10

（二）填空题（每题 6 分，共 24 分）

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，AC，BD 相交于点 O. 若 $AC=6$，则 AO 的长度等于________.



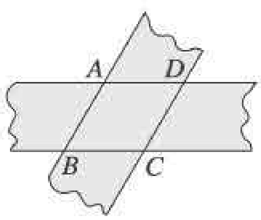
（第 7 题）



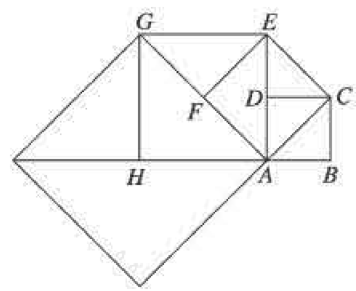
（第 8 题）

8. 如图，若将四根木条钉成的矩形木框变形为▱$ABCD$ 的形状，并使其面积变为矩形面积的一半，则▱$ABCD$ 的最小内角的大小为________.

9. 如图，将两条宽度都为 3 的纸条重叠在一起，使 $\angle ABC=60^\circ$，则四边形 $ABCD$ 的面积为________.



（第 9 题）



（第 10 题）

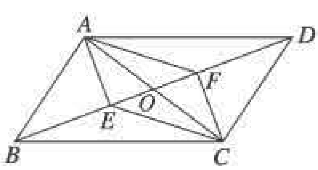
10. 如图，设四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，以对角线 AC 为边作第二个正方形 $ACEF$，再以对角线 AE 为边作第三个正方形 $AEGH$，如此下去. 则第 n 个正方形的边长为__________.

（三）解答题（第 11 题 14 分，第 12，13 题各 16 分，共 46 分）

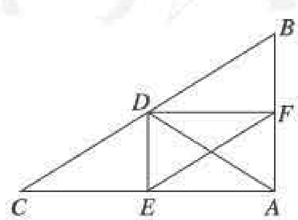
11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$BE=DF$；$AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为 E，F.

(1) 求证：$\triangle ABE \cong \triangle CDF$；

(2) 若 AC 与 BD 交于点 O，求证：$AO=CO$.



（第 11 题）



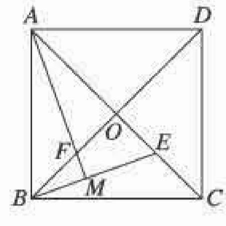
（第 12 题）

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=90^\circ$，DE，DF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，连接 EF，AD. 求证：$EF=AD$.

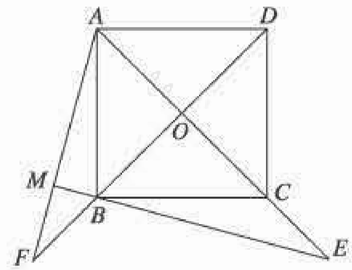
13. 如图（1），正方形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E 是 AC 上一点，连接 EB. 过点 A 作 $AM \perp BE$，垂足为 M，AM 与 BD 相交于点 F.

（1）求证：$OE=OF$.

（2）如图（2），若点 E 在 AC 的延长线上，$AM \perp BE$ 于点 M，AM 交 DB 的延长线于点 F，其他条件不变. 结论“$OE=OF$”还成立吗？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由.



（1）



（2）

（第 13 题）

参考答案

1. C. 本题考查平行四边形的判定.
2. B. 本题考查菱形的性质.
3. C. 本题考查菱形的判定、三角形中位线定理和矩形的性质.
4. C. 本题考查菱形的判定、矩形的性质和三角形中位线定理.
5. D. 本题考查矩形的性质、勾股定理以及方程的思想.
6. D. 本题考查正方形的性质、轴对称以及动态变化过程中最大（小）值.
7. 3. 本题考查平行四边形的判定与性质.
8. 30°. 本题考查矩形与平行四边形的概念及其性质.
9. $6\sqrt{3}$. 本题考查菱形的性质以及菱形与平行四边形的关系.
10. $(\sqrt{2})^{n-1}$. 本题考查综合运用正方形的性质以及发现规律的能力.
11. 提示：(1) 由 $AE \perp BD$，$CF \perp BD$，可得 $\angle AEB=\angle CFD=90^\circ$. 又由 $AB=CD$，$BE=DF$，在直角三角形中利用“HL”即可证得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$.

    (2) 由 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$，可得 $\angle ABE=\angle CDF$，$AB \parallel CD$. 又由 $AB=CD$，可得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AO=CO$.

    本题考查平行四边形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质.
12. 提示：由 DE，DF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，可得四边形 $EAFD$ 是平行四边形. 又 $\angle CAB=90^\circ$，可得 ▱$EAFD$ 是矩形，根据矩形的对角线相等即可得证.

    本题考查三角形中位线的性质、平行四边形的判定以及矩形的判定与性质.
13. 提示：(1) 证明 $\triangle AOF \cong \triangle BOE$；(2) 结论仍然成立，证明 $\triangle AOF \cong \triangle BOE$.

    本题考查综合应用正方形性质解决问题的能力.

第二十六章　一次函数

Ⅰ总体设计

一、本章学习目标

1. 以探索简单实际问题中的数量关系和变化规律为背景，经历“找出常量和变量，建立函数模型表示变量之间的单值对应关系，讨论函数模型，解决实际问题”的过程，体会函数是刻画现实世界中变化规律的重要数学模型.

2. 结合实例，了解常量、变量的意义和函数的概念，体会“变化与对应”的思想，了解函数的三种表示方法（列表法、解析式法和图象法），能结合图象数形结合地分析简单的函数关系.

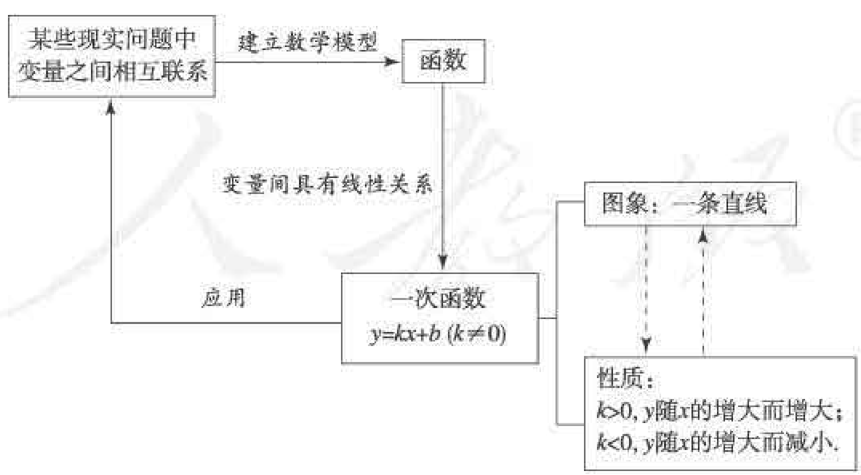
3. 能确定简单实际问题中函数自变量的取值范围，并会求函数值.

4. 结合具体情境体会和理解正比例函数和一次函数的意义，能根据已知条件确定它们的表达式，会画它们的图象，能结合图象讨论这些函数的增减变化，能利用这些函数分析和解决简单实际问题.

5. 通过讨论一次函数与二元一次方程等的关系，从运动变化的角度，用函数的观点加深对已经学习过的方程等内容的认识，构建和发展相互联系的知识体系.

6. 进行探究性课题学习，以选择方案为问题情境，进一步体会建立数学模型的方法与作用，提高综合运用函数知识分析和解决实际问题的能力.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章主要内容包括：常量与变量的意义，函数的概念，函数的三种表示法，一次函数的概念、

图象、性质和应用举例，一次函数与二元一次方程等内容的关系，以及以建立一次函数模型来选择最优方案为素材的课题学习.

全章包括三节：26.1　函数；26.2　一次函数；26.3　课题学习　选择方案. 关于这三节的地位与作用有如下的整体设计.

第 26.1 节是全章的基础部分，内含 2 个小节. 第 26.1.1 小节“变量与函数”结合简单的实际问题，对事物的运动变化进行数量化讨论，先引出常量和变量的意义，再从描述变量之间对应关系的角度刻画了一般函数的基本特征，从而初步建立函数的概念，并给出函数的解析式的意义. 第 26.1.2 小节“函数的图象”，在已学的直角坐标系内容的基础上，以具体函数为例，介绍能形象化地表示函数的重要工具——函数的图象，并归纳表示函数的三种方法（解析式法、列表法和图象法），为今后继续研究各类具体的函数进行必要的准备.

第 26.2 节是全章的重点内容，内含 3 个小节. 第 26.2.1 小节“正比例函数”以火车运行中“路程＝平均速度×时间”为问题情境，引出正比例函数的概念、图象和增减变化规律. 第 26.2.2 小节“一次函数”以登山中气温随海拔而变化为问题情境，引出一次函数的概念，并对比正比例函数，研究一次函数的图象和增减变化规律. 一次函数是一种最基本的初等函数，对它的讨论中函数解析式与函数图象的相互联系与转化能发挥重要作用，这是“数形结合”的思想方法的体现，它对今后进一步研究其他类型的函数具有启示作用. 第 26.2.3 小节“一次函数与方程、不等式”从一次函数的角度，对一次方程和不等式进行再认识，揭示函数与以前学习的方程等内容之间的联系.

第 26.3 节是全章的拓展提高部分. 作为探究性学习的内容，它以课题学习的形式呈现，通过对“怎样选取上网收费方式”和“怎样租车”两个典型问题的讨论，探求解决实际问题的最优方案，展示函数的应用价值，突出建立数学模型的思想方法和实际意义.

必须指出，函数是数学中极为重要的基本概念，它对数学的发展有重大影响，是数学学习中的重要知识点. 但是由于函数概念涉及运动变化，抽象性较强，因此初学者接受并理解它有一定难度，这是本章的难点.

“变化与对应”的思想体现在函数概念之中，用运动变化的眼光，以函数为工具，把抽象的数量关系和直观的函数图象结合起来，从“数”与“形”两方面动态地分析问题，从而全面地认识函数，是本章学习的突出特点.

四、课时安排

本章教学时间约需 19 课时，具体分配如下（仅供参考）：

26.1 函数	7 课时
26.2 一次函数	7 课时
26.3 课题学习　选择方案	3 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、编写本章时考虑的问题

认识本章的特点有助于更好地使用教科书. 编写本章时特别关注数学思想方法的体现，力求能

引导学生认识和体会它们.

1. 重视数学概念中蕴含的思想，引导学生从“运动变化和联系对应”的角度认识函数

本章教学是学生学习函数的第一阶段，其教学目标如前所述，重点在于初步认识函数概念，并具体讨论一次函数这类最简单的初等函数. 本章教科书力求渗透和体现变化与对应的思想，使学生能潜移默化地感受、体会函数内容中最基本的东西，在对数学思想方法的学习方面有所收获.

数学是以数量关系和空间形式为主要研究对象的科学，数量关系和空间形式是从现实世界中抽象出来的，世界永远是处于运动变化之中的，因此无论是数量关系中还是空间形式中都充满了有关运动变化的问题. 函数正是研究运动变化的重要数学模型，它在当今数学的各个领域都扮演着极为重要的角色.

函数概念的出现是客观实际需要，也是数学内部发展的需要. 它是以变化与对应的思想为基础的数学概念. 怎样认识函数概念呢？学习函数概念不能只注重背记定义而不关注它的实质，要使学生理解定义的真正含义，即函数是反映运动变化与联系对应的数学概念. 应使学生了解对于许多客观事物必须从运动变化的角度进行数量化研究，许多问题中的各种变量是相互联系的，变量之间存在对应规律，这会表现为变量的值之间存在对应关系，其中就有单值对应关系，而刻画这种关系的数学模型就是函数. 本章所讨论的是最简单、最基本的函数，但是不论简单函数还是复杂函数，在本质上都是上面所说的那样的数学模型. 作为关于函数内容的初始教学，应有意识地体现函数的本质，这正是本章内容中蕴含的基本思想. 当然，对于运动变化与联系对应的思想的认识也是需要逐步理解的，因此教科书在本章不同部分对这一思想的渗透采用了不同的做法，以达到逐步深化的目的，希望能帮助学生从具体到抽象，从特殊到一般地认识这一思想.

通过本章教学，学生应对函数形成初步的正确认识，即认识到虽然函数的表示方法有多种，而且不同问题中函数的具体形式可以形形色色，但是各种函数都是反映变化规律的数学工具，现在学习的函数都是刻画同一个变化过程中两个变量之间的单值对应关系的模型.

2. 借助实际问题情境，引导学生由具体到抽象地认识函数；通过函数应用举例，体现数学建模思想

现实中存在大量问题涉及具有简单函数关系的变量，其中许多问题中的数量关系是一次（也称线性）的，这为学习一次函数提供了大量的现实素材. 本章教科书中，实际问题情境多次出现，其作用主要体现在以下方面：

（1）引入或解释函数等概念. 这样做的目的是借助直观的、具体的事物为理解抽象的内容服务. 例如，通过第 26.1 节中一系列具体例子解释变量间的对应关系等，通过火车运行问题引入正比例函数，通过登山问题引入一次函数等.

（2）作为函数的应用举例的一些内容. 例如，第 26.1 节例 4 中的水位预测问题，第 26.3 节中的选择方案问题等，它们都可以体现数学建模思想，反映函数的广泛应用性.

本章开始的引言明确提出：“为了研究这些运动变化现象中变量间的依赖关系，数学中逐渐形成了函数概念. 人们通过研究函数及其性质，更深入地认识现实世界中许多运动变化的规律.” 在本章的教学中，要充分注意有关现实背景，通过它们反映出函数来自实际又服务于实际，不断加强对函数是解决现实问题的一种重要数学模型的认识.

找出问题中相关变量之间的关系，并以数学形式表现这种关系，是本章中用数学模型表示和解决实际问题的关键步骤，而正确地理解问题情境是基础. 学习本章时，对一个问题可以从多种角度思考，图象、表格、式子等都是可以借助的工具，使用它们的目的在于发现和理清问题中变量之间的关系. 在建立函数模型后，还需注意结合问题的实际意义检验模型的合理性. 为增强学生的数学建模能力，教师还可以结合实际情况选择更贴近学生生活的各种问题，引导学生用函数分析解决它们.

3. 引导学生重视数形结合的研究方法

本章所讨论的对象是函数，函数的表示法之一是图象法，即通过坐标系中的曲线上点的坐标反映变量之间的对应关系. 这种表示方法将数量关系直观化、形象化，从而可以数形结合地研究问题. 正如恩格斯所说："笛卡儿变数的出现，是数学中的一个转折点，从此运动和辩证法进入了数学." 数学的发展说明，函数和数形结合的表示方法，在数学发展中具有重要地位. 由于有了它们，解析几何和微积分的产生也就自然地提到日程上了.

本章多处涉及数形结合的研究方法. 结合具体内容使学生自然地理解它，并逐步加以灵活运用，发挥从数和形两个方面共同分析问题、解决问题的优势，是必要且可能的. 本章教科书在体现函数解析式与函数图象的结合方面，有细致的安排设计，注意了数与形的互补作用，体现两者的联系，突出两者间的转化对分析问题、解决问题的特殊作用. 这样处理的目的，是希望学习了本章之后学生不仅要知道相关函数的图象，更要不断体会函数图象的作用和数形结合的方法，为今后进一步学习数学打下牢固的基础.

六、对本章教学的建议

1. 在传授知识时关注引导学生认识与体会相关的数学思想方法

本章教学中，应力求引导学生不仅着眼于具体的数学知识，更要认识相关的数学思想方法，不断加深对它们的领会，从更高的角度认识问题的本质.

数学思想方法是具体的数学知识的灵魂，数学思想方法对一个人的影响往往要大于具体的数学知识. 数学思想方法是以数学知识为载体来体现的，而对于隐含于数学知识中的数学思想方法的认识需要一个较长的过程，既需要教材的渗透，也需要教师的点拨. 希望教师能结合反映运动变化、数学建模、数形结合等的问题，引导学生逐步感受和理解数学思想方法的重要作用.

2. 加强对知识之间内在联系的认识，引导学生体会函数观点的统率作用

本章教学中，应注意函数与以前所学习的方程、不等式等其他代数知识的关系，力求使学习函数能够在发展和构建一个较好的知识体系方面起一定作用. 为此，在第 26.2.3 小节"一次函数与方程、不等式"的教学中，应认识到此时对方程等的再认识已不是原来水平上的回顾复习，而是站在更高处进行动态的分析. 教师需要明确安排这一节的目的，把握这些内容的要求尺度，抓住一次函数与二元一次方程（组）的联系这个重点. 希望通过这些内容的教学，加强知识间横向和纵向的联系，发挥函数对相关内容的统率作用，使学生能用一次函数把以前学习的方程、不等式等数学对象统一起来认识，逐步达到新旧知识的融会贯通，进一步体会函数的重要性，提高多角度地、灵活地分析问题与解决问题的能力.

一次函数的教学中，应体现出“从特殊到一般”地认识问题是学习的一种有效途径. 在讨论函数解析式、图象、性质等问题时，应引导学生注意比较函数 $y=kx$ 和 $y=kx+b$ 的异同，考虑前者如何转化为后者以及由此产生的图象变化. 从而利用两者之间的联系，将正比例函数作为一次函数的特殊形式来认识，再将已获得的结论扩充到对一般的一次函数的讨论之中. 教学中应注意教科书内容的前后联系，使学生认识分析问题、解决问题时“先从特殊对象切入，再扩展推广到一般对象”的策略.

3. 加强对基础知识和基本技能的掌握，提高基本能力

本章中函数的基本概念，函数的一般表示法和一次函数的概念、解析式、图象、性质等是基础知识；会画一次函数（包括正比例函数）的图象，能结合图象讨论这些函数的增减性等是基本技能；能利用一次函数分析和解决简单实际问题是基本能力. 掌握基础知识和基本技能，培养训练基本能力，都应在教学中得到落实. 例如，第 26.1 节中对于描点法画函数图象的一般步骤进行了归纳，这对后续学习其他函数内容很重要，应使学生熟悉它. 又如，一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）中 k 的正负对函数的增减性（图象的升降）的影响等，是一次函数的基本性质，应使学生从数形两方面理解. 用待定系数法确定一次函数的表达式，关系到图象到解析式的转化，涉及方程组与解析式的联系，对提高学生的综合数学能力很有益.

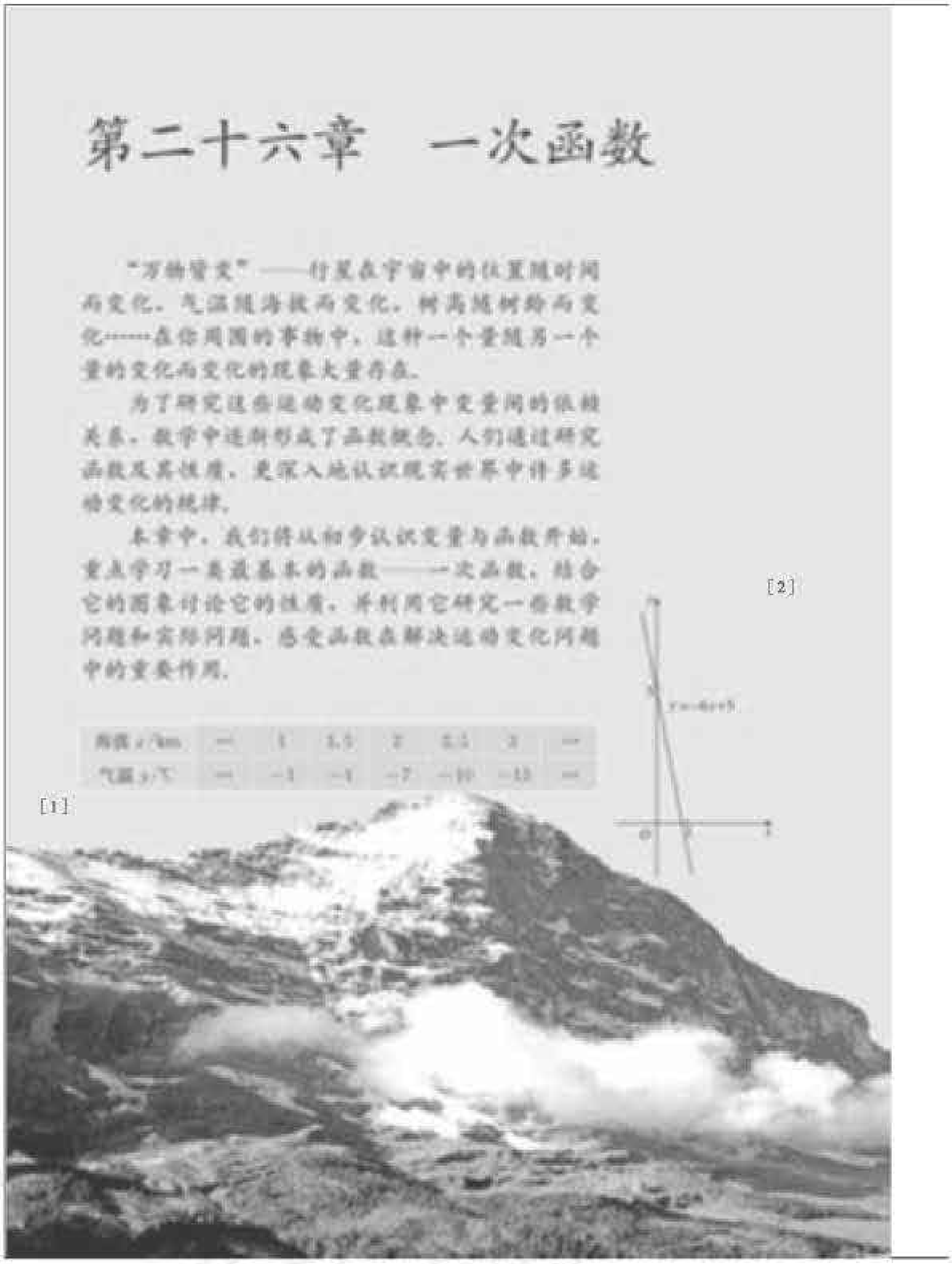
4. 结合课题学习，引导学生提高实践意识与综合应用数学知识的能力

本章第 26.3 节“课题学习 选择方案”的教学具有特殊的地位和作用. 这是以一次函数为主要知识点的专题内容，其中的“寻求最佳方案”是现实中经常面临的问题. 对于这类问题，数学知识大有用武之地. 这一节讨论的两个问题，与客观实际的接近程度很高，并且适合综合运用函数的解析式、图象等知识进行分析. 因此，这些问题具有一定的实践性、综合性、探究性、趣味性，是检验和提高学习能力的较好素材. 本节的教学应特别关注引导学生独立思考，分析实际问题中所包含的变量及其关系，并以函数形式表示它们，即建立函数模型. 在独立思考的基础上，可以进行合作交流式的学习活动，深化对问题的认识. 本节的教学形式应与一般例题教学有所区别，要更强调学生的主动性，使他们通过研究问题进一步感受建立数学模型的思想方法，切实提高实践意识与综合应用数学知识的能力.

Ⅱ 教材分析

[1] 这幅章前图画面中，近处有绿洲，远处有雪山，它与本章第 26.2.2 节中的登山中的气温问题互相呼应. 自然界中，随着海拔的升高，气温下降. 气温的值 y 与海拔的改变量 x 之间具有一次函数关系. 这可以作为引出一次函数的实际问题情境.

[2] 这里的表格、图象及解析式是对本章第 26.2.2 节中的登山中的气温问题里的一次函数关系的三种描述方式.



第二十六章　一次函数

"万物皆变"——行星在宇宙中的位置随时间而变化，气温随海拔而变化，树高随树龄而变化……在你周围的事物中，这种一个量随另一个量的变化而变化的现象大量存在.

为了研究这些运动变化现象中变量间的依赖关系，数学中逐渐形成了函数概念. 人们通过研究函数及其性质，更深入地认识现实世界中许多运动变化的规律.

本章中，我们将从初步认识变量与函数开始，重点学习一类最基本的函数——一次函数，结合它的图象讨论它的性质，并利用它研究一些数学问题和实际问题，感受函数在解决运动变化问题中的重要作用.

海拔 x/km	…	1	1.5	2	2.5	3	…
气温 y/℃	…	-1	-4	-7	-10	-13	…

[1]

[2]

1. 函数是重要的数学概念，它有广泛的应用，在义务教育阶段的数学课程中占重要地位. 函数解析式属于代数式（式子中不含有加、减、乘、除、乘方和开方之外的运算）的函数，叫做代数函数. 在本套教科书中有关代数函数的内容出现的先后顺序是：第二十六章一次函数（八年级下册），第二十八章二次函数（九年级上册），第二十九章反比例函数（九年级上册）. 学生在初中阶段对函数的认识是逐步深入的.

2. 多项式函数一般按照其中自变量（元）的个数和自变量的最高次数（指数）分类，这与方程的分类类似. 按照《课标（2011 年版）》，初中阶段所学习的多项式函数包括一次函数（含正比例函数）和二次函数，它们分别对应一次、二次解析式. 此外，还学习反比例函数、锐角三角函数，但锐角三角函数属于超越函数（三角运算不属于代数运算）.

26.1 函数

26.1.1 变量与函数

先请思考下面几个问题：[1]

(1) 汽车以 60 km/h 的速度匀速行驶，行驶路程为 s km，行驶时间为 t h. 填写表 26-1，s 的值随 t 的值的变化而变化吗？[2]

表 26-1

t / h	1	2	3	4	5
s / km					

(2) 电影票的售价为 10 元/张. 第一场售出 150 张票，第二场售出 205 张票，第三场售出 310 张票，三场电影的票房收入各多少元？设一场电影售出 x 张票，票房收入为 y 元，y 的值随 x 的值的变化而变化吗？

(3) 你见过水中涟漪吗？如图 26.1-1，圆形水波慢慢地扩大. 在这一过程中，当圆的半径 r 分别为 10 cm，20 cm，30 cm 时，圆的面积 S 分别为多少？S 的值随 r 的值的变化而变化吗？[3]

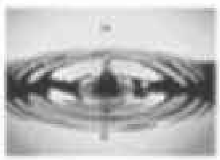


图 26.1-1

(4) 用 10 m 长的绳子围一个矩形. 当矩形的一边长 x 分别为 3 m，3.5 m，4 m，4.5 m 时，它的邻边长 y 分别为多少？y 的值随 x 的值的变化而变化吗？[4]

这些问题反映了不同事物的变化过程. 其中有些量的数值是变化的，例如时间 t，路程 s，售出票数 x，票房收入 y……有些量的数值是始终不变的，例如速度 60 km/h，票价 10 元/张……在一个变化过程中，我们称数值发生变化的量为**变量**（variable），数值始终不变的量为**常量**（constant）.[5]

练习

指出下列问题中的变量和常量：

(1) 某市的自来水价为 4 元/t. 现要抽取若干户居民调查水费支出情况，记某户月用水量为 x t，月应交水费为 y 元.

第二十六章　一次函数　51

[1] 这里的几个问题既为引出常量与变量的概念而设计，也为后面学习函数概念作准备.

[2] 本题的匀速运动中，$s=60t$，通过填表可以体会 s 与 t 的单值对应关系.

[3] $S=\pi r^2$ 是圆面积与半径的对应关系，由此可以根据半径的值计算圆面积.

[4] 由 $y=5-x$ 可以根据 x 的具体数值计算 y 的数值.

[5] 一般地，常量是不发生变化的量，变量是发生变化的量，这些都是针对某个变化过程而言的. 在今后研究函数时，对于常值函数，例如 $y=1$（x 是任意实数），也可认为 y 是总取同一个值的变量. 但是，在本节中不宜过早地提及常量可当作特殊的变量，以免使初学函数者混淆常量与变量.

练习答案

(1) 变量 x，y；常量 4.

1. 第 26.1 节分两小节，即 26.1.1 变量与函数，26.1.2 函数的图象. 其中，函数的一般概念，即变化与对应意义下的函数定义是本节的重点.

2. 本节最前面的 4 个问题中都含有变量之间的单值对应关系，通过讨论这些问题不仅可以引出常量与变量的概念，而且也为后面引出变量间的单值对应关系进而学习函数的定义作了铺垫. 这种从实际问题出发开始讨论的方式，出于从具体到抽象地认识事物的考虑. 这 4 个问题的内容有行程问题、销售问题、几何问题等，问题的呈现形式有填表、求值等，这些都与后续讨论函数概念有联系，为归纳出变量间的单值对应关系进行铺垫. 对如何发挥这些问题的作用，教学中应通盘规划，对如何使用这些例子作出整体安排，使其前后衔接. 围绕学生比较熟悉其背景的几个例子，系统地认识变量与函数的概念，有助于认识相关概念之间的联系和区别.

3. 对于函数概念的学习，需要经历从具体到

练习答案

（2）变量 t，w；常量 0.2，30.

（3）变量 r，C；常量 π.

（4）变量 x，y；常量 10.

[1] 这里的“思考”栏目引导学生发现：这些问题中都有两个变量相关，其中一个变量对另一变量存在单值对应关系.

[2] 这里的“归纳”栏目回答了上面“思考”栏目提出的问题，为引出函数概念作准备.

（2）某地手机通话费为 0.2 元/min，李明在手机话费卡中存入 30 元，记此后他的手机通话时间为 t min，话费卡中的余额为 w 元.

（3）水中涟漪（圆形水波）不断扩大，记它的半径为 r，圆周长为 C，圆周率（圆周长与直径之比）为 π.

（4）把 10 本书随意放入两个抽屉（每个抽屉内都放），第一个抽屉放入 x 本，第二个抽屉放入 y 本.

思考[1]

问题（1）～（4）中是否各有两个变量？同一个问题中的变量之间有什么联系？

在问题（1）中，观察填出的表格，可以发现：t 和 s 是两个变量，每当 t 取定一个值时，s 就有唯一确定的值与其对应．例如 $t=1$，则 $s=60$；$t=2$，则 $s=120$……$t=5$，则 $s=300$.

在问题（2）中，可以发现：x 和 y 是两个变量，每当 x 取定一个值时，y 就有唯一确定的值与其对应．例如，若 $x=150$，则 $y=1\ 500$；若 $x=205$，则 $y=2\ 050$；若 $x=310$，则 $y=3\ 100$.

在问题（3）中，可以发现：r 和 S 是两个变量，每当 r 取定一个值时，S 就有唯一确定的值与其对应．它们的关系式为 $S=\pi r^2$．据此可以算出 r 分别为 10 cm，20 cm，30 cm 时，S 分别为 100π cm²，400π cm²，900π cm².

在问题（4）中，可以发现：x 和 y 是两个变量，每当 x 取定一个值时，y 就有唯一确定的值与其对应．它们的关系式为 $y=5-x$．据此可以算出 x 分别为 3 m，3.5 m，4 m，4.5 m 时，y 分别为 2 m，1.5 m，1 m，0.5 m.

归纳[2]

上面每个问题中的两个变量互相联系，当其中一个变量取定一个值时，另一个变量就有唯一确定的值与其对应.

一些用图或表格表达的问题中，也能看到两个变量之间有上面那样的关系.

52 第十九章 一次函数

抽象的认识过程，其中的关键是认识变量之间的单值对应关系．当一个变量取定一个值时，单值对应有两重含义：（1）另一变量有对应值；（2）对应值只有一个．为此，应通过不同形式，包括观察表格、解析式和图象中不同变量的取值等，体会相关变量之间的对应关系．当我们考虑单值对应关系时，对于两个相关变量往往不是同等对待的，而是先对其中一个赋值，再考虑另一个的对应值．如果后者对前者的每一取值都有对应值，并且每次的对应值只有一个，则称后者对前者是单值对应的．这时称前者为自变量，后者为前者的函数，也称两者具有函数关系．有些问题（例如当 $y=10x$ 时）中，选两个变量中的任何一个取值，另一个变量都有唯一的对应值，即两者互为对方的函数（例如 $y=10x$ 与 $x=\dfrac{y}{10}$ 是两个函数）．不是所有具有函数关系的两个变量都互为函数，例如当 $y=x^2$ 时，y 对 x 是单值对应，它

思考[1]

(1) 图26.1-2是体检时的心电图，其中图上点的横坐标 x 表示时间，纵坐标 y 表示心脏部位的生物电流，它们是两个变量。在心电图中，对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应吗？

图26.1-2

(2) 下面的我国人口数统计表（表26-2）中，年份与人口数可以分别记作两个变量 x 与 y。对于表中每一个确定的年份 x，都对应着一个确定的人口数 y 吗？

表26-2 中国人口数统计表

年份	人口数/亿
1984	10.34
1989	11.06
1994	11.78
1999	12.32
2010	13.71

一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是**自变量**（independent variable），y 是 x 的**函数**（function）。如果当 $x=a$ 时 $y=b$，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的**函数值**.[2]

可以认为：在前面问题（1）中，时间 t 是自变量，路程 s 是 t 的函数。当 $t=1$ 时，函数值 $s=60$，当 $t=2$ 时，函数值 $s=120$；在心电图中，时间 x 是自变量，心脏部位的生物电流 y 是 x 的函数；在人口数统计表中，年份 x 是自变量，人口数 y 是 x 的函数，当 $x=2010$ 时，函数值 $y=13.71$.

从上面可知，函数是刻画变量之间对应关系的数学模型，许多问题中变量之间的关系都可以用函数来表示.

例1 汽车油箱中有汽油50 L．如果不再加油，那么油箱中的油量 y（单

第二十六章 一次函数 53

[1] "思考"栏目中的两个问题分别用图象和表格表示变量之间的对应关系，这一方面说明变量之间的单值对应关系存在于许多问题中，另一方面也为后面介绍函数的多种表示法作准备.

心电图是医学检查中用仪器记录心脏跳动状况的曲线，其中每个点的横、纵坐标是有单值对应关系的两个变量.

[2] 函数的定义中包括了对应值的存在性和唯一性两重意思．函数是对变量而言的，函数值是对具体数值而言的.

是 x 的函数；而 x 对 y 不是单值对应（如对于 $y=4$，x 有两个对应值 ± 2），所以 x 不是 y 的函数．本章教学中，一般讨论问题时都已确定了哪个变量为自变量，所以不需要讨论两个变量是否都可以作为自变量的问题.

4．本章中，除特别指出要讨论自变量的取值范围的具体问题之外，一般不对自变量取值范围作正式讨论，不出现"函数的定义域"的概念，而只是突出变量间的单值对应．这样安排是为了降低初学函数阶段的难度，保证重点知识的落实.

5．由于函数概念的表述比较抽象、含义深刻，本节的难点是往往不能一下子就能从其定义的文字真正地理解它的内涵，因而把握不准函数的本质．突破难点的办法是由具体例子逐步过渡到抽象定义，教学中开始阶段不应急于给出定义，而需要让学生经历分析具体问题中变量之间存在什么样的具体对应关系的过程，并引导学生发现这些关系的共同之处为都是单值对应．通过

[1] 这里要用含 x 的式子来表示 y，即式子应为 $y=f(x)$ 的形式，$f(x)$ 是一个含有 x 的式子.

[2] 这里要根据问题的实际意义来确定自变量 x 的取值范围，由 x，y 都不能取负数值，可确定 x 的取值的下限和上限.

[3] 这里要计算函数值，注意此时自变量的取值要在其取值范围之内. 因此，需要先看 200 是否符合 (2) 的结果.

位：L）随行驶路程 x（单位：km）的增加而减少，耗油量为 0.1 L/km.

(1) 写出表示 y 与 x 的函数关系的式子；[1]

(2) 指出自变量 x 的取值范围；[2]

(3) 汽车行驶 200 km 时，油箱中还有多少汽油？[3]

解：(1) 行驶路程 x 是自变量，油箱中的油量 y 是 x 的函数，它们的关系为

$$y=50-0.1x.$$

(2) 仅从式子 $y=50-0.1x$ 看，x 可以取任意实数. 但是考虑到 x 代表的实际意义为行驶路程，因此 x 不能取负数. 行驶中的耗油量为 $0.1x$，它不能超过油箱中现有汽油量 50，即

$$0.1x\leqslant 50.$$

因此，自变量 x 的取值范围是

$$0\leqslant x\leqslant 500.$$

(3) 汽车行驶 200 km 时，油箱中的汽油量是函数 $y=50-0.1x$ 在 $x=200$ 时的函数值. 将 $x=200$ 代入 $y=50-0.1x$，得

$$y=50-0.1\times 200=30.$$

汽车行驶 200 km 时，油箱中还有 30 L 汽油.

0.1x 表示什么意思？

确定自变量的取值范围时，不仅要考虑使函数关系式有意义，而且还要注意问题的实际意义.

像 $y=50-0.1x$ 这样，用关于自变量的数学式子表示函数与自变量之间的关系，是描述函数的常用方法. 这种式子叫做函数的**解析式** (analytic expression).

练习

1. 下列问题中哪些量是自变量？哪些量是自变量的函数？试写出函数的解析式.
   (1) 改变正方形的边长 x，正方形的面积 S 随之改变.
   (2) 每分向一水池注水 0.1 m³，注水量 y（单位：m³）随注水时间 x（单位：min）的变化而变化.
   (3) 秀水村的耕地面积是 10^6 m²，这个村人均占有耕地面积 y（单位：m²）随这个村人数 n 的变化而变化.
   (4) 水池中有水 10 L，此后每小时漏水 0.05 L，水池中的水量 V（单位：L）随时间 t（单位：h）的变化而变化.

54　第二十六章　一次函数

练习答案

1. (1) 自变量 x，函数 S，$S=x^2$；
   (2) 自变量 x，函数 y，$y=0.1x$；
   (3) 自变量 n，函数 y，$y=\dfrac{10^6}{n}$；
   (4) 自变量 t，函数 V，$V=10-0.05t$.

对多个问题的分析，归纳出各问题中都具有相关的两个变量，这两个变量间都具有一个变量随另一个变量而变，而且是单值对应关系. 在具体经验积累到一定程度的基础上，再给出函数的定义，并说明这个定义是对各种具体对象所具有的关系抽象概括后的描述，是对相关的两个变量的地位分别命名. 其中在变化过程中居于主动地位的变量叫做自变量，随之变化且对应值有唯一确定性的另一个变量叫做自变量的函数. 有了定义的文字后，还需要适当地再用具体例子对定义中的文字加以解释. 这个认识过程需要一个较长的时间，教学中需要安排活动，反复加深对函数概念的理解.

6. 学生开始学习本节时，对于常量与变量比较容易区分，但是对于函数与函数值可能发生混淆. 教学中需要引导学生认识到两者的区别，函数是变量，例如 $y=2x$，y 是可以随 x 的变化而变化的量，变量 y 是变量 x 的函数；函数值是

2. 梯形的上底长 2 cm，高 3 cm，下底长 x cm 大于上底长但不超过 5 cm. 写出梯形面积 S 关于 x 的函数解析式及自变量 x 的取值范围.

26.1.2 函数的图象

有些问题中的函数关系很难列式子表示，但是可以用图来直观地反映，例如用心电图表示心脏部位的生物电流与时间的关系. 即使对于能列式表示的函数关系，如果也能画图表示，那么会使函数关系更直观.

例如，正方形的面积 S 与边长 x 的函数解析式为 $S=x^2$，根据问题的实际意义，可知自变量 x 的取值范围是 $x>0$.[1] 我们还可以利用在坐标系中画图的方法来表示 S 与 x 的关系.

计算并填写表 26-3.

表 26-3[2]

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
S	0	0.25	1						

自变量 x 的一个确定的值与它所对应的唯一的函数值 S，是否确定了一个点 (x, S) 呢？

如图 26.1-3，在直角坐标系中，画出上面表格中各对数值所对应的点，然后连接这些点. 所得曲线上每一个点都代表 x 的值与 S 的值的一种对应，例如点 $(2, 4)$ 表示当 $x=2$ 时，$S=4$.

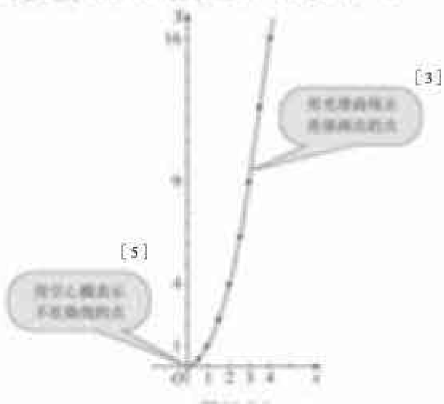


图 26.1-3

表示 x 与 S 的对应关系的点有无数个，但是实际上我们只能描出其中有限个点，同时想象出其他点的位置.[4]

练习答案

2. $S=\dfrac{3(2+x)}{2}$，即

$$S=\frac{3}{2}x+3,\ 2<x\leqslant 5.$$

[1] 这里是根据几何意义（正方形的边长必定是正数值）确定自变量的取值范围的.

[2] 填空答案：2.25，4，6.25，9，12.25，16.

[3] 描点法画函数图象时，要描出的点的个数应取得适当. 一般地，如果函数在描出的两点之间是连续的，那么已描出的点之间的连线要光滑（不出现明显的拐弯点）.

[4] 一般地，描点法画出的函数图象是近似的. 描出的点只能有有限多个，其他点的位置需要根据描出的点联想而得出.

[5] 由于 $x=0$ 不在 x 的取值范围之内，所以点 $(0, 0)$ 不在函数图象上，故用空心圈表示它. 如果这点在函数图象上，则要画成实心点.

变量所取的某个具体数值. 一个函数可能有许多不同的函数值，例如函数 $y=2x$ 在 $x=1$ 时的函数值是 2，在 $x=-1$ 时的函数值是 -2. 通过类似这样的具体例子，可以使学生提高分辨能力，认识到函数与函数值的区别在于：前者是变量，后者是常数.

7. 变量间的单值对应关系有多种表示方法，常见的有列表法、解析式法和图象法. 教科书在引出函数的定义之前所举的具体例子中，有意识地使用了这些不同的表示形式. 这一方面有助于全面地了解变量间的单值对应关系，进而形成对函数的较全面的认识；另一方面也为后面学习函数的三种表示方法进行了适当的准备. 希望教学中能体会教科书如此安排的用意.

8. 生活中有很多关于函数的问题情境，教学中可以启发学生去发现这样的例子，分析其中哪个量是自变量，哪个量是函数，它们之间是如何对应的等. 这样做既有利于借助具体例子认识

［1］一般函数的图象是一条曲线，图象上各点的横坐标是自变量的取值，纵坐标是相应的函数值．组成图象的所有点的横坐标的集合恰好是自变量的取值范围．

［2］这个“思考”栏目是为学习由图象分析函数的变化趋势而设计的，由图象分析数量变化规律是研究问题的方法之一．这里的气温变化情况难以用确切的解析式来表达，只能通过分析仪器自动绘制的气温变化曲线得到相关信息．

一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的**图象**（graph）[1]．图 26.1-3 的曲线即函数

$$S=x^2\ (x>0)$$

的图象．

通过图象可以数形结合地研究函数．

思考[2]

图 26.1-4 是自动测温仪记录的图象，它反映了北京的春季某天气温 T 如何随时间 t 的变化而变化．你从图象中得到了哪些信息？

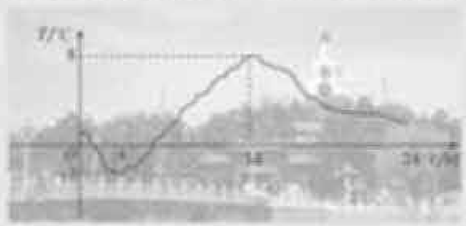


图 26.1-4

如有条件，你可以用带有温度探头的计算机（器），测量、记录温度，并绘制表示温度变化的图象．

可以认为，气温 T 是时间 t 的函数，图 26.1-4 是这个函数的图象．由图象可知：

（1）这一天中凌晨 4 时气温最低（-3 ℃），14 时气温最高（8 ℃）．

（2）从 0 时至 4 时气温呈下降状态（即温度随时间的增长而下降），从 4 时到 14 时气温呈上升状态，从 14 时至 24 时气温又呈下降状态．

（3）我们可以从图象中看出这一天中任一时刻的气温大约是多少．

例 2　如图 26.1-5 所示，小明家、食堂、图书馆在同一条直线上．小明从家去食堂吃早餐，接着去图书馆读报，然后回家．图 26.1-6 反映了这个过程中，小明离家的距离 y 与时间 x 之间的对应关系．

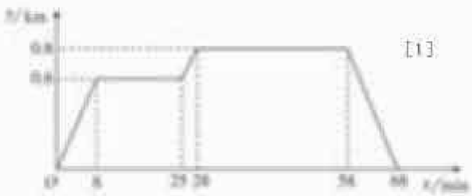
图 26.1-5

56　第二十六章　一次函数

抽象的数学概念，又能提高学生把所学数学知识与现实世界相联系的意识和能力．

习题 26.1 第 3 题是以框图形式表示用计算器进行普通四则运算的操作程序．学生对这样的运算并不陌生，但是可能不曾注意过其中隐含函数关系．这题表示函数的形式较特殊．通过研究这样的问题可以引导学生注意函数存在于许多数学问题之中，以函数的观点可以重新认识已学过的数学内容．

9．本节的例 1 包括 3 个小题，它们的要求分别为写函数解析式，指出自变量的取值范围和计算函数值．其中，第（1）小题，写出函数解析式是重点，是基础．要正确地写出函数解析式，就需要对问题的实际背景了解清楚，教学中应对此有适当介绍和解释．这个问题中的函数是一次函数，本节中虽然还不能指出这一点，但是让学生接触一下这样的具体函数，可以为后面的学习积累感性认识．第（2）小题要求指出自变量



[1]

图 26.1-6

根据图象回答下列问题：

（1）食堂离小明家多远？小明从家到食堂用了多少时间？

（2）小明吃早餐用了多少时间？

（3）食堂离图书馆多远？小明从食堂到图书馆用了多少时间？

（4）小明读报用了多少时间？

（5）图书馆离小明家多远？小明从图书馆回家的平均速度是多少？

分析：小明离家的距离 y 是时间 x 的函数．由图象中有两段平行于 x 轴的线段可知，小明离家后有两段时间先后停留在食堂与图书馆里．[2]

解：（1）由纵坐标看出，食堂离小明家 0.6 km；由横坐标看出，小明从家到食堂用了 8 min．

（2）由横坐标看出，$25-8=17$，小明吃早餐用了 17 min．

（3）由纵坐标看出，$0.8-0.6=0.2$，食堂离图书馆 0.2 km；由横坐标看出，$28-25=3$，小明从食堂到图书馆用了 3 min．

（4）由横坐标看出，$58-28=30$，小明读报用了 30 min．

（5）由纵坐标看出，图书馆离小明家 0.8 km；由横坐标看出，$68-58=10$，小明从图书馆回家用了 10 min，由此算出平均速度是 0.08 km/min．[3]

例 3 在下列式子中，对于 x 的每一个确定的值，y 有唯一的对应值，即 y 是 x 的函数．画出这些函数的图象：

（1）$y=x+0.5$；　　（2）$y=\dfrac{6}{x}$ $(x>0)$．

解：（1）从式子 $y=x+0.5$ 可以看出，x 取任意实数时这个式子都有意义，所以 x 的取值范围是全体实数．

从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表（计算并填写表 26-4 中空格）．

第二十六章　一次函数　57

[1] 这个函数的图象是由几条线段组成的折线，其中每条线段代表一个阶段的活动．这条线段左右端点横坐标之差的绝对值，对应相应活动所用的时间．

[2] 如果当自变量 x 在某个区间上取值时，函数 y 的值始终是同一个常数，那么在这个区间上的函数图象就是一条平行于 x 轴的线段．例 2 中在两个时间段上 y 的值不变，即表明小明在这两段时间内分别停留在两处．

[3] 行走一段路程的平均速度等于路程与行走时间的商．

的取值范围，这是在前一小题基础上的发展．单纯从函数解析式上分析可知，这里的自变量可以取任意实数，但是由于问题的实际意义，自变量不可以取负数，并且不能大于某个值，因此自变量的取值范围是一个区间（$0\leqslant x\leqslant 500$）．在这里安排这个内容，是要加强联系实际，同时也使现在所学的内容与前面所学的不等式等内容联系起来，以新带旧．教学中应注意对这类问题不要作过多过深的扩张．

10．函数的图象以几何形式直观地表示变量间的单值对应关系，是研究函数的重要工具．学习函数的图象不仅要了解它的一般意义和画法，更重要的是了解其中包含的数形结合地研究问题的思想，学习如何以图象为工具讨论函数．

关于函数图象的意义，要注意“把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标”，所有这样的点构成完整的函数图象．但实际上由于条件所限，我们往往只画出图象中的一部分．

［1］填空答案：-2.5，-1.5，3.5.

［2］函数图象从左向右上升，说明随着 x 的值增加（即点的位置从左向右移动），y 的值也增加（即点的位置从下向上移动）.

［3］当自变量在分母上时，它的取值不应使分母为 0，否则式子无意义. 例 3（2）中限定 $x>0$，即本题只画在此限定条件下函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象. 若无限制条件，函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 中 x 的取值范围是 $x\neq 0$，即一切非 0 的数.

［4］填空答案：12，4，2.4，1.714，1.2，1.

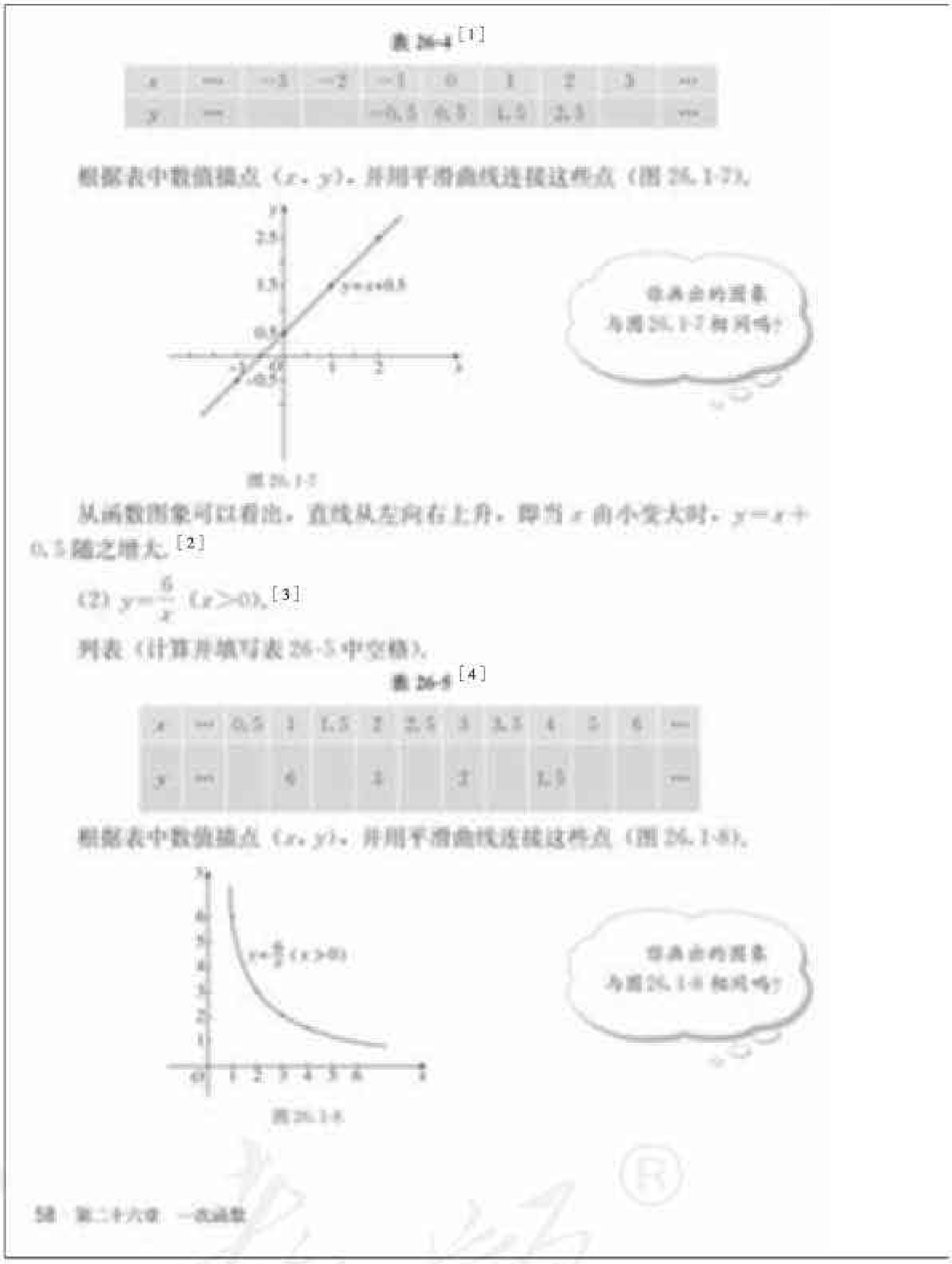


表 26-4［1］

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…			-0.5	0.5	1.5	2.5		…

根据表中数值描点 (x, y)，并用平滑曲线连接这些点（图 26.1-7）.

图 26.1-7

从函数图象可以看出，直线从左向右上升，即当 x 由小变大时，$y=x+0.5$ 随之增大.［2］

（2）$y=\dfrac{6}{x}$（$x>0$）.［3］

列表（计算并填写表 26-5 中空格）.

表 26-5［4］

x	…	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6	…
y	…		6		3		2		1.5			…

根据表中数值描点 (x, y)，并用平滑曲线连接这些点（图 26.1-8）.

图 26.1-8

58 第二十六章 一次函数

教科书从对一个具体函数 $S=x^2(x>0)$ 的讨论出发，让学生经历列表、描点、连线等绘制函数图象的具体过程，这既可以加深对图象的意义的认识，了解图象上点的横、纵坐标与自变量值、函数值之间的对应关系，又为学习如何画函数图象及后面对用描点法画函数图象的一般步骤进行归纳作准备.

随着现代信息技术的不断进步，画函数图象的手段已迅速发展，使用计算机或具有画图功能的计算器可以方便地画出某些函数的图象. 但是，使用这些工具无法得到经历用描点法画图象的感受. 要对函数的图象形成正确的理解，离不开亲历描点法画函数图象的过程.

11. 有些函数的图象的产生过程是由式到图，即由解析式到列表，再用描点法画出的；有些函数的图象（例如用仪器自动记录温度变化的曲线）却不能这样画出. 对于不易求出解析式的函数，如果能得到它的图象，那么可以根据图象

从函数图象可以看出，曲线从左向右下降，即当 x 由小变大时，$y=\frac{6}{x}$ $(x>0)$ 随之减小。[1]

归纳

描点法画函数图象的一般步骤如下：

第一步，列表——表中给出一些自变量的值及其对应的函数值；

第二步，描点——在直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点；

第三步，连线——按照横坐标由小到大的顺序，把所描出的各点用平滑曲线连接起来。

练习

1. (1) 画出函数 $y=2x-1$ 的图象；
   (2) 判断点 $A(-2.5, -4)$，$B(1, 3)$，$C(2.5, 4)$ 是否在函数 $y=2x-1$ 的图象上。
2. 如图是某一天北京与上海的气温随时间变化的图象。
   (1) 这一天内，上海与北京何时气温相同？
   (2) 这一天内，上海在哪段时间比北京气温高？在哪段时间比北京气温低？

（第2题）

3. (1) 画出函数 $y=x^2$ 的图象；
   (2) 从图象中观察，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大，还是 y 随 x 的增大而减小？当 $x>0$ 时呢？

由上可知，写出函数解析式，或者列表格，或者画函数图象，都可以表示具体的函数。这三种表示函数的方法，分别称为解析式法、列表法和图象法。

思考

从前面的例子看，你认为三种表示函数的方法各有什么优点？[2]

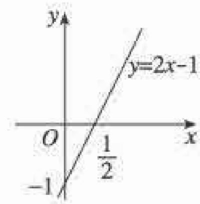
表示函数时，要根据具体情况选择适当的方法，有时为全面地认识问题，需要同时使用几种方法。

第二十六章 一次函数 59

[1] 函数图象从左向右下降，说明随着 x 的值增加（即点的位置从左向右移动），y 的值反而下降（即点的位置从上向下移动）。

练习答案

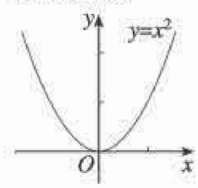
1. (1)



(2) 点 A，B 不在图象上，点 C 在图象上。

2. (1) 7 时，12 时；
   (2) 0～7 时，12～24 时上海气温高，7～12 时上海气温低。

3. (1)



(2) $x<0$，y 随 x 增大而减小；$x>0$，y 随 x 增大而增大。

[2] 列表法直接给出部分函数值，解析式法明显地表示对应规律，图象法直观地表示变化趋势。

分析函数的变化规律．这种看图分析的能力很有用．本节安排了一个关于自动测温仪的“思考”栏目，让学生通过观察图象分析气温变化情况，得出函数的增减状况及其最大值和最小值，这是为培养学生的读图能力而安排的．

12．本节的例 2 是分析图象的问题．题中的图象是由 5 条线段组成的，它对应 5 个时间段内的活动，其中变量 x 表示时间，每条线段左右端点横坐标之差的绝对值表示了相应的时长，变量 y（纵坐标）表示小明离家的距离．课程标准中有类似这类问题的例子，这类问题的作用主要是结合问题的实际背景加深对图象意义的了解．

13．本节的例 3 是由函数解析式画函数图象的问题．完成这类题目的一般步骤即例 3 后面的“归纳”中总结的三步．本例的作用是先给出画具体函数图象的过程，为后面的一般性归纳作准备．

例 3 的第（2）小题中，函数 $y=\frac{6}{x}$ 中自变

[1] 这里用表格形式表示了 6 对变量的值，从中可以发现对应规律为每小时水位上升 0.3 m，由此可进一步写出函数解析式，然后画出图象.

[2] 这里的预测是建立在未来 2 h 内水位上升规律不改变的假设之上的.

[3] 根据问题的已知数据，有 $0\leqslant t\leqslant 5$. 相应地，函数图象应是线段，其左右端点的横坐标分别为 0 和 5.

例 4 一个水库的水位在最近 5 h 内持续上涨. 表 26-6 记录了这 5 h 内 6 个时间点的水位高度，其中 t 表示时间，y 表示水位高度.

表 26-6 [1]

t/h	0	1	2	3	4	5
y/m	3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5

(1) 在平面直角坐标系中描出表中数据对应的点，这些点是否在一条直线上？由此你能发现水位变化有什么规律吗？

(2) 水位高度 y 是否为时间 t 的函数？如果是，试写出一个符合表中数据的函数解析式，并画出这个函数的图象. 这个函数能表示水位的变化规律吗？[2]

(3) 据估计这种上涨规律还会持续 2 h，预测再过 2 h 水位高度将为多少米.

解：(1) 如图 26.1-9，描出表 26-6 中数据对应的点. 可以看出，这 6 个点在一条直线上. 再结合表中数据，可以发现每小时水位上升 0.3 m. 由此猜想，如果画出这 5 h 内其他时刻（如 $t=2.5$ h 等）及其水位高度所对应的点，它们可能也在这条直线上，即在这个时间段中水位可能是始终以同一速度均匀上升的.

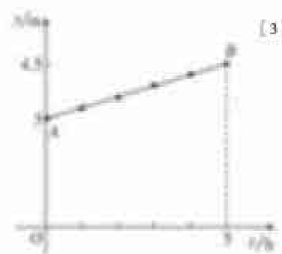


图 26.1-9

(2) 由于水位在最近 5 h 内持续上涨，对于时间 t 的每一个确定的值，水位高度 y 都有唯一的值与其对应，所以 y 是 t 的函数. 开始时水位高度为 3 m，以后每小时水位上升 0.3 m. 函数

$$y=0.3t+3\ (0\leqslant t\leqslant 5)$$

是符合表中数据的一个函数，它表示经过 t h水位上升 $0.3t$ m，即水位 y 为 $(0.3t+3)$ m，其图象是图 26.1-10 中点 $A\ (0,3)$ 和点 $B\ (5,4.5)$ 之间的线段 AB.

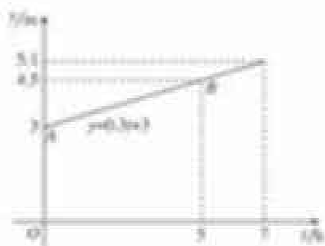


图 26.1-10

如果在这 5 h 内，水位一直匀速上升，即升速为 0.3 m/h，那么函数 $y=0.3t+3\ (0\leqslant t\leqslant 5)$ 就精确地表示了这种变化规律. 即使在这 5 h 内，水位的升速有些变化，

60 第二十六章 一次函数

量 x 的取值不能为 0，否则分母为 0，函数无意义. 题中给定自变量 $x>0$，所以要注意画出的图象在 y 轴的右边而且不能与 y 轴相交，否则与 $x>0$ 不一致. 教学中可以对这样的地方进行设问，请学生回答其中的道理，以增强数形结合表达问题的能力.

对例 3 后面的“归纳”栏目的教学，应引导学生在回顾例 3 的解题过程的基础上自主地完成，教师最后进行概括总结.

14. 对函数图象的进一步认识还需要配备适当的思考问题. 习题 26.1 第 7 题的设计意图为结合图象强调函数概念中的单值对应关系，即对于自变量 x 的每个确定的值，函数 y 只有唯一的对应值. 第 8 题的设计意图为结合具体问题利用图象表现函数的增减性以及变化规律，注意到“漏壶”中水位随时间增长而下降，故应排除左图；又注意到水位下降是匀速的，故应选择中间的图，因为它是直线型的，表示在相同时间内水

但由于每小时水位上升 0.3 m 是确定的，因此这个函数也可以近似地表示水位的变化规律.

(3) 如果水位的变化规律不变，则可利用上述函数预测，再过 2 h，即 $t=5+2=7$ (h) 时，水位高度

$$y=0.3\times 7+3=5.1\ (\text{m}).$$

把图 26.1-9 中的函数图象（线段 AB）向右延伸到 $t=7$ 所对应的位置，得图 26.1-10，从它也能看出这时的水位高度约为 5.1 m.[1]

由例 4 可以看出，函数的不同表示法之间可以转化.

练习

1. 用列表法与解析式法表示 n 边形的内角和 m（单位：度）关于边数 n 的函数.
2. 用解析式法与图象法表示等边三角形的周长 l 关于边长 a 的函数.
3. 一条小船沿直线向码头匀速前进. 在 0 min，2 min，4 min，6 min 时，测得小船与码头的距离分别为 200 m，150 m，100 m，50 m. 小船与码头的距离 s 是时间 t 的函数吗？如果是，写出函数解析式，并画出函数图象. 如果船速不变，多长时间后小船到达码头？

习题 26.1

复习巩固

1. 购买一些铅笔，单价为 0.2 元/支，总价 y 元随铅笔支数 x 变化，指出其中的常量与变量，自变量与函数，并写出表示函数与自变量关系的式子.
2. 一个三角形的底边长为 5，高 h 可以任意伸缩. 写出面积 S 随 h 变化的解析式，并指出其中的常量与变量，自变量与函数，以及自变量的取值范围.
3. 在计算器上按下面的程序操作.

输入 x（任意一个数）→ 按键 × 2 + 5 = → 显示 y（计算结果）

第二十六章　一次函数　81

[1] 根据对未来时间内水位上涨规律不变的假设，函数 $y=0.3t+3$ 中 t 的取值可以达到 7. 于是，$t=7$ 所对应的 y 的值即所求的预测结果.

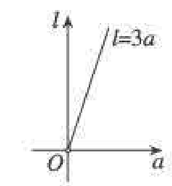
练习答案

1.

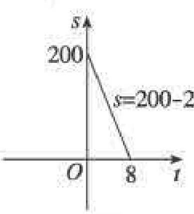
边数 n	3	4	5	…
内角和 m/度	180	360	540	…

$m=180(n-2)$，$n\geqslant 3$，且 n 为整数.

2. $l=3a$ $(a>0)$.



3. 是函数. $s=200-25t$ $(0\leqslant t\leqslant 8)$. 8 min 后船到码头.



位下降高度也相同.

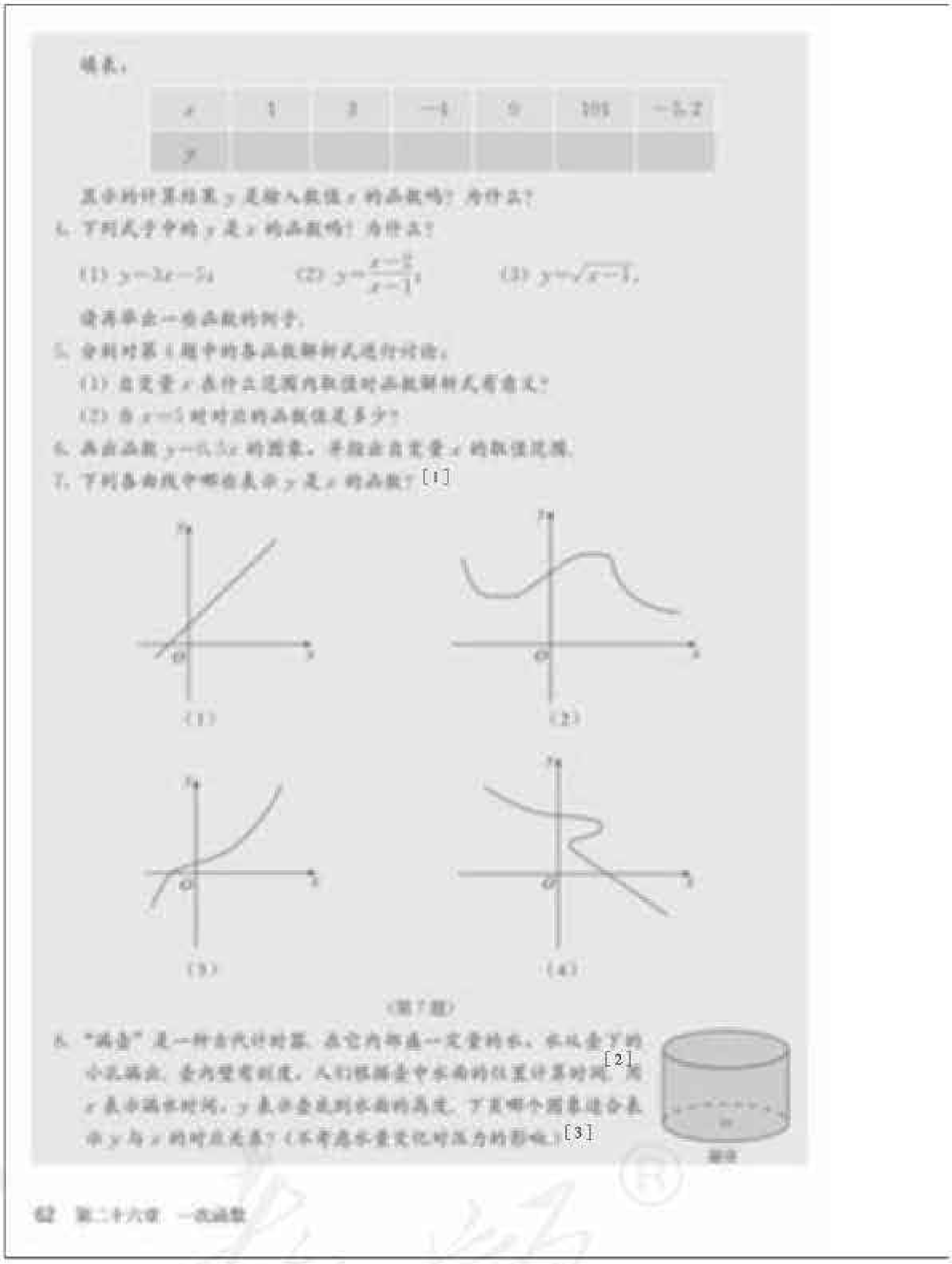
15. 例 3 后的“思考”栏目引导学生考虑函数的三种表示法各有什么优点. 事实上，各种表示法有不同的长处，列表法可以清楚地列出一些自变量和函数的对应值，这会对某些特定的数值带来一目了然的效果，例如火车时刻表、平方表等；解析式法可以从数量关系的角度明确自变量与函数的对应关系，例如表示自由落体的公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 等；图象法可以直观形象地反映函数的变化趋势，而且对于一些无法用解析式表达的函数，图象可以充当重要角色，例如自动测温曲线. 在不同条件下选择适当的方法表示函数，也是一种灵活解决问题的能力，它需要掌握各种表示法的特点和长处. 本节最后的练习题中有用多种表示法来表示同一函数的问题，完成它们后不妨对不同方法的优点进行适当比较.

16. 本节的例 4 是关于水库水位变化的问题，它要求综合使用函数的各种表示法. 本题的设计

[1] 由于当 $x=a$ 时 y 至多有唯一的对应值，因此函数图象与直线 $x=a$（任一平行于 y 轴的直线）至多有一个交点. 不符合这一要求的曲线不是函数图象.

[2] “漏壶”是一种古代的计时工具，它根据有漏洞的容器中的水在一定时间内流出一定的量的道理制成. 类似的计时工具还有“沙漏”等.

[3] 随着水位的下降，水流出的速度会有微小的变化，但本题中对此忽略不计，即认为水位匀速下降.


填表：

x	1	3	-4	0	101	-2.7
y						

显示的计算结果 y 是输入数值 x 的函数吗？为什么？

4. 下列式子中的 y 是 x 的函数吗？为什么？

(1) $y=3x-5$；　(2) $y=\frac{x-2}{x-1}$；　(3) $y=\sqrt{x-1}$.

请再举出一些函数的例子.

5. 分别对第 4 题中的各函数解析式进行讨论：

(1) 自变量 x 在什么范围内取值时函数解析式有意义？

(2) 当 $x=5$ 时对应的函数值是多少？

6. 画出函数 $y=0.5x$ 的图象，并指出自变量 x 的取值范围.

7. 下列各曲线中哪些表示 y 是 x 的函数？[1]

(1)　(2)　(3)　(4)

(第 7 题)

8. “漏壶”是一种古代计时器，在它内部盛一定量的水，水从壶下的小孔漏出，壶内壁有刻度. 人们根据壶中水面的位置计算时间.[2] 用 x 表示漏水时间，y 表示壶底到水面的高度，下面哪个图象适合表示 y 与 x 的对应关系？（不考虑水量变化对压力的影响.）[3]

漏壶

意图中包括体现函数的不同表示法之间的互相转化. 本题中未给出函数解析式，而要求学生根据给出的表格（其中有 6 对相关数据）发现变量之间的对应规律，根据规律写出函数解析式. 这对发现能力的培养很有益，教学中应引导学生积极探索. 此外本例还含有关于预测的问题，这可以培养学生利用所学函数知识推测未来事物的变化趋势的能力.

17. 关于描点法画函数图象中的连线方法，教科书采用了用平滑曲线连接相邻的点的方式. 此外也有用折线连接相邻的点的方式. 一般地，对于普通初等函数（非分段函数），用平滑曲线连接比用折线连接得到的图象的近似程度要更好一些. 例如函数 $y=x^2$，用平滑曲线画出的图象更接近于真实的图象——抛物线. 对于一次函数，由于画图象时相邻的点都在同一直线上，所以连接它们的平滑曲线就是直线.

18. 描点法画函数图象是最初级的方法，要

（1）　　（2）　　（3）

（第3题）

综合运用

9. 已知张强家、体育场、文具店在同一直线上. 下面的图象反映的过程是：张强从家跑步去体育场，在那里锻炼了一阵后又走到文具店去买笔，然后散步走回家. 图中 x 表示时间，y 表示张强离家的距离.

（第9题）

根据图象回答下列问题：

(1) 体育场离张强家多远？张强从家到体育场用了多少时间？

(2) 体育场离文具店多远？

(3) 张强在文具店停留了多少时间？

(4) 张强从文具店回家的平均速度是多少？

10. 某种活期储蓄的月利率是0.06%，存入100元本金，求本息和 y[2]（本金与利息的和，单位：元）随所存月数 x 变化的函数解析式，并计算存期为4个月时的本息和.

11. 正方形边长为3，若边长增加 x，则面积增加 y[3]，求 y 随 x 变化的函数解析式，指出自变量与函数，并以表格形式表示当 x 等于1，2，3，4时 y 的值.

12. 甲、乙两车沿直路同向行驶，车速分别为20 m/s和25 m/s. 现甲车在乙车前500 m处，设 x s（$0\leqslant x\leqslant 100$）[4]后两车相距 y m，用解析式和图象表示 y 与 x 的对应关系.

13. 甲、乙两车从A城出发前往B城. 在整个行程中，汽车离开A城的距离 y 与时刻 t 的对应关系如下页图所示.

(1) A，B两城相距多远？

(2) 哪辆车先出发？哪辆车先到B城？

第二十六章　一次函数　63

［1］图象表示5种活动的全过程，即去体育场、在体育场锻炼、去文具店、在文具店买笔、回家.

［2］本息和即本金与利息之和：本息和＝本金＋本金×利率×存期. 本题中不考虑复利，即利息不再产生利息.

［3］注意本题中的 y 是面积的增加量，它等于相应的面积减9所得的差.

［4］注意 x 的取值范围.

比较准确地画函数图象，需要描出较多的点，操作起来较烦琐. 如果对于要画图象的函数进行过研究，已经掌握了函数随自变量变化的一定规律，那么就可以利用规律采用更直接、更简单的方法画函数图象，例如本章第26.2节中介绍的画一次函数图象的两点法等.

19. 本节内容是关于函数的最基础的知识，对后续内容有很深远的影响. 打好基础至关重要，教学中对这些内容应予以充分重视.

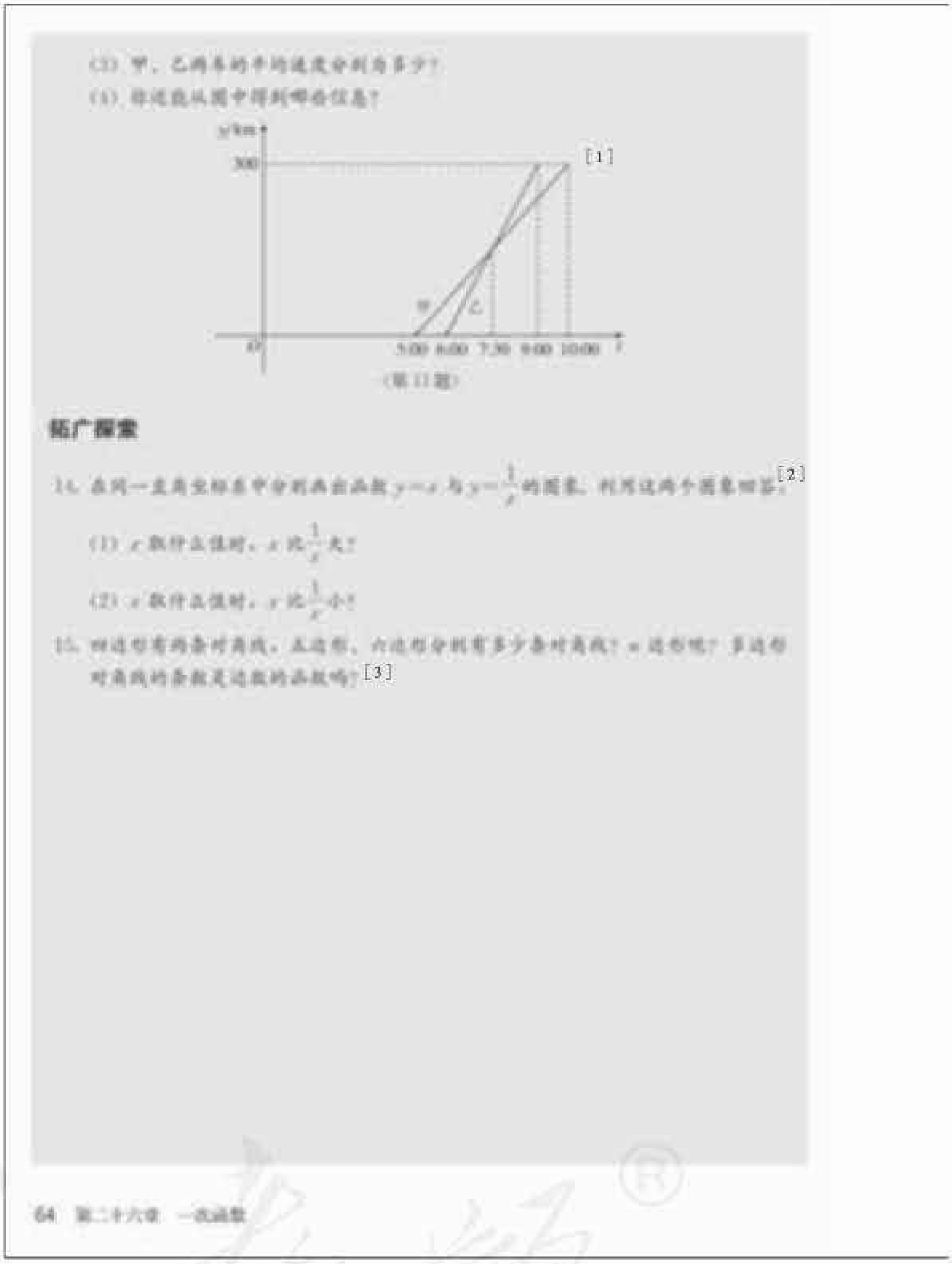
习题26.1

1. 习题26.1中“复习巩固”的题目有3类：

（1）复习巩固常量、变量、自变量、函数及函数值等概念的问题；

（2）画简单函数的图象或根据图象复习巩固函数概念的问题；

（3）对函数概念和图象加深认识的问题，如第3，7，8题.



(3) 甲、乙两车的平均速度分别为多少？

(4) 你还能从图中得到哪些信息？

（第11题）

拓广探索

14. 在同一直角坐标系中分别画出函数 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的图象，利用这两个图象回答：[2]

(1) x 取什么值时，x 比 $\frac{1}{x}$ 大？

(2) x 取什么值时，x 比 $\frac{1}{x}$ 小？

15. 四边形有两条对角线，五边形、六边形分别有多少条对角线？n 边形呢？多边形对角线的条数是边数的函数吗？[3]

64　第二十六章　一次函数

[1] 蓝、红色线段分别为甲、乙两车所对应的函数. 根据 t 和 y 的意义，结合图象中两线段的位置关系，可以发现图象中含有的信息.

[2] 比较同一坐标系中的两个函数图象，由它们的高低可以发现函数的大小关系.

[3] 对本题应从具体到抽象、从特殊到一般地考虑. 想到 n 边形中，从一个顶点出发可引 $(n-3)$ 条对角线，即可顺势推出结果.

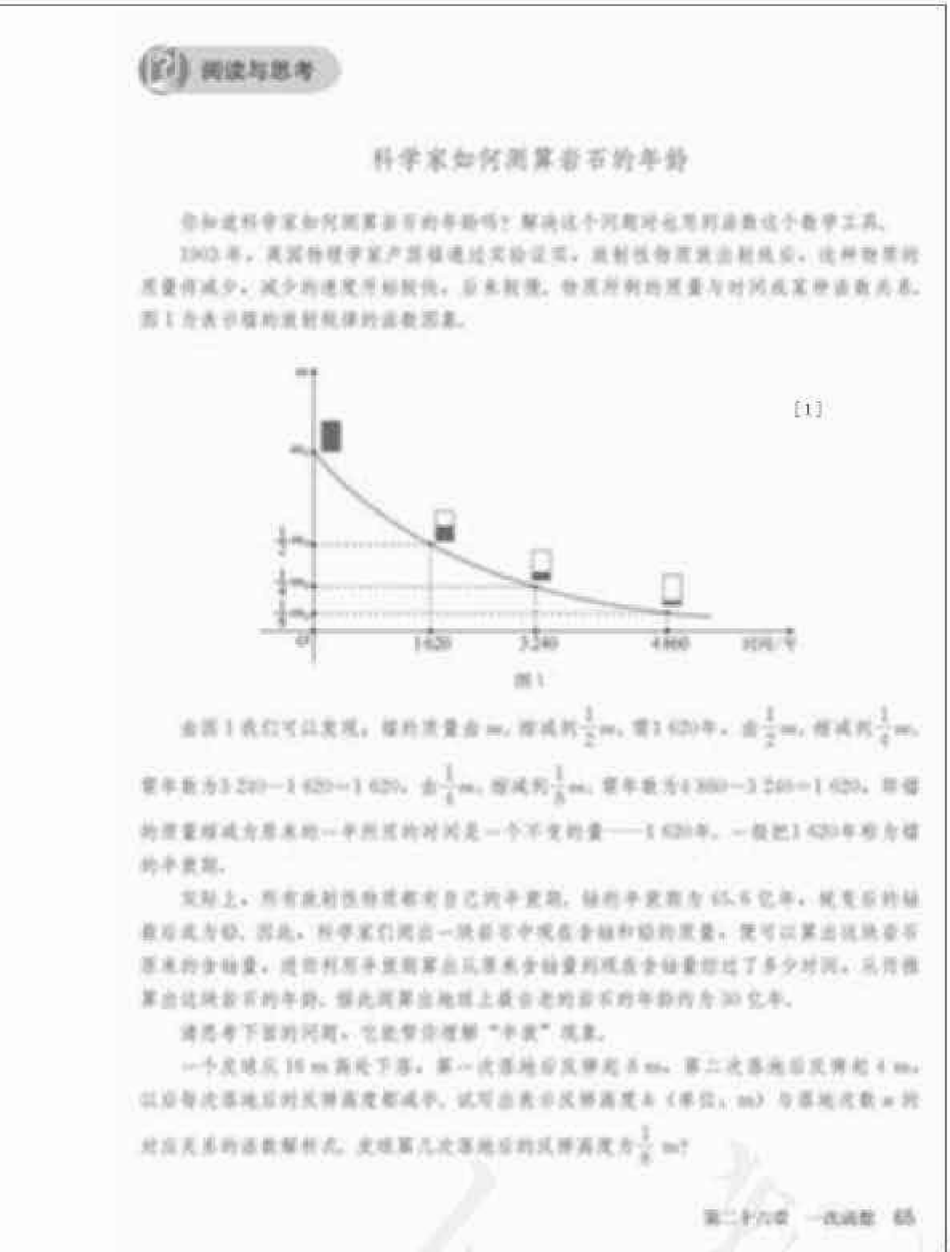
2. 习题 26.1 中“综合运用”的题目有 2 类：

(1) 观察图象并由其发现有关信息的问题；

(2) 分析变量间的规律，并用解析式或图象表示函数关系的问题.

这些题目有不同的实际背景，需要将其数学化，即以函数形式表达相关变量的关系.

3. 习题 26.1 中“拓广探索”的题目有 2 道. 第 14 题中，画出两个函数的图象后，需要比较它们的相对位置，根据同一个横坐标所对的两个函数图象上点的纵坐标的大小，确定两个函数的大小关系. 第 15 题中，对 $n=4$，5，6 的情形得出答案后，需要分析其中的共同规律，进而对一般的 n 边形得出对角线的条数 $\frac{n(n-3)}{2}$，并体会出它是 n 的函数. 解答本题的过程是“从特殊到一般”的认识过程.



阅读与思考

科学家如何测算岩石的年龄

[1]

图1

[1] 这是实际问题数学化后的指数函数 $y=m_0a^x$ 的图象，其中 a 是0.5的1 620次算术根，即 $a^{1\,620}=0.5$，$a>0$.

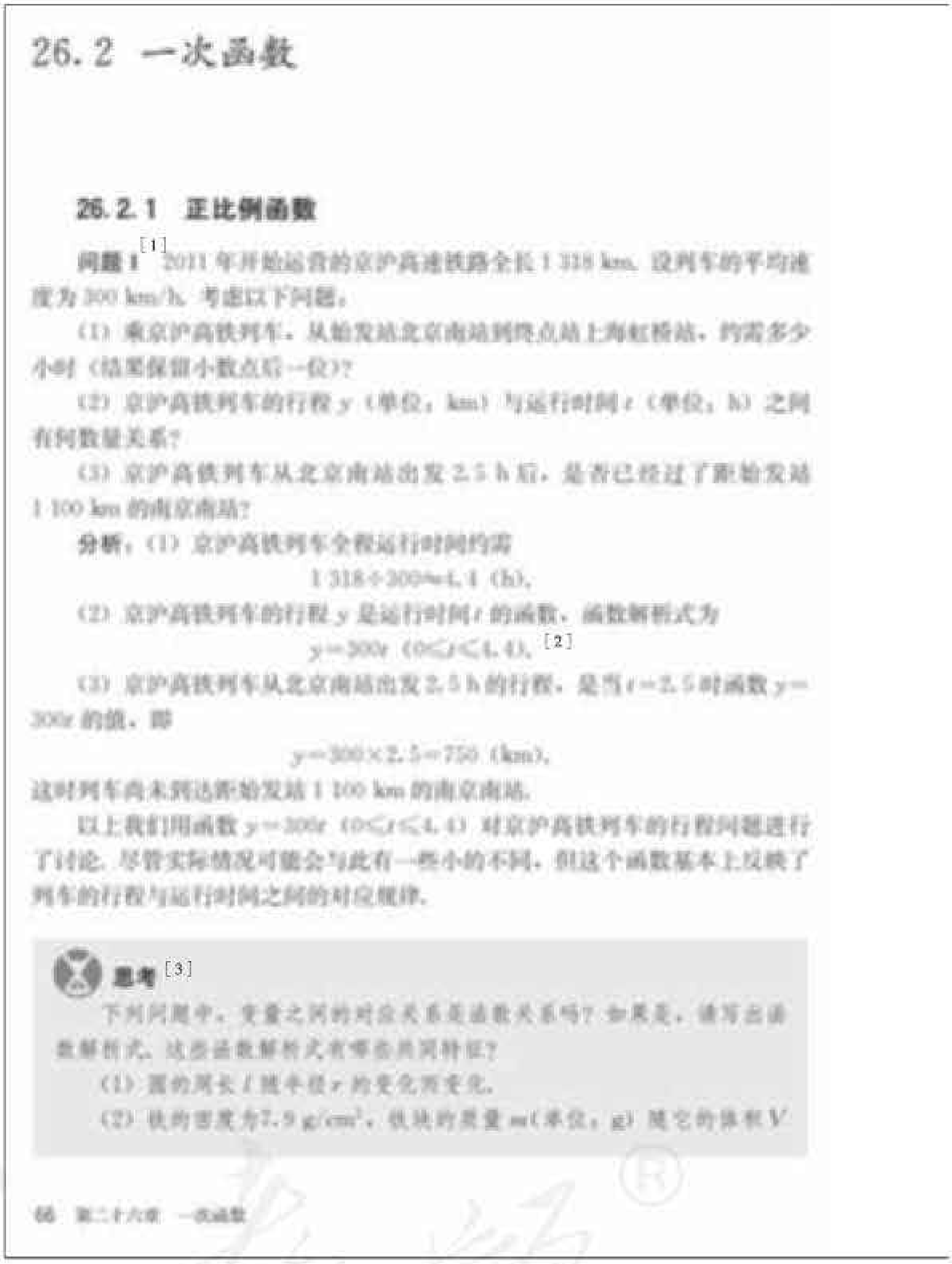
高中数学中有关于指数函数的内容.

阅读与思考

这篇短文通过介绍科学家如何测算岩石的年龄，展现了函数的一项应用.

文中介绍的放射性物质衰减后的余量与时间之间的函数关系，是指数函数关系，但是初中不学习这种函数．为使学生能直观地了解这种函数，短文采用了图象表示它．由于教科书已经介绍了函数图象的一般意义，所以学生可以借助图象初步了解半衰期的含义，并了解利用铀的半衰期作为已知的常数，可以根据岩石中铀及其蜕变物质铅的含量测算岩石的年龄．在这个测算过程中，要用时间与铀的含量之间的函数关系．从短文中既能对考古中的科学知识进行普及，又能看到函数的一种具体应用.

短文最后的思考题，通过一个很容易试验的皮球反弹问题，让读者发现其中的函数关系并进行计算，这对于理解前面介绍的内容会有帮助.



26.2 一次函数

26.2.1 正比例函数

问题 1[1] 2011 年开始运营的京沪高速铁路全长 1 318 km. 设列车的平均速度为 300 km/h. 考虑以下问题：

（1）乘京沪高铁列车，从始发站北京南站到终点站上海虹桥站，约需多少小时（结果保留小数点后一位）？

（2）京沪高铁列车的行程 y（单位：km）与运行时间 t（单位：h）之间有何数量关系？

（3）京沪高铁列车从北京南站出发 2.5 h 后，是否已经过了距始发站 1 100 km 的南京南站？

分析：（1）京沪高铁列车全程运行时间约需

$$1\,318 \div 300 \approx 4.4\ (\text{h}).$$

（2）京沪高铁列车的行程 y 是运行时间 t 的函数，函数解析式为

$$y=300t\ (0 \leqslant t \leqslant 4.4).$$ [2]

（3）京沪高铁列车从北京南站出发 2.5 h 的行程，是当 $t=2.5$ 时函数 $y=300t$ 的值，即

$$y=300\times 2.5=750\ (\text{km}).$$

这时列车尚未到达距始发站 1 100 km 的南京南站.

以上我们用函数 $y=300t$（$0\leqslant t\leqslant 4.4$）对京沪高铁列车的行程问题进行了讨论. 尽管实际情况可能会与此有一些小的不同，但这个函数基本上反映了列车的行程与运行时间之间的对应规律.

思考[3]

下列问题中，变量之间的对应关系是函数关系吗？如果是，请写出函数解析式. 这些函数解析式有哪些共同特征？

（1）圆的周长 l 随半径 r 的变化而变化.

（2）铁的密度为 7.9 g/cm^3，铁块的质量 m（单位：g）随它的体积 V

68 第二十六章 一次函数

[1] 本节先从特殊的一次函数——正比例函数说起. 引入问题中数量关系为行程问题中的“路程＝速度×时间”，当速度为常量时，这可以归为正比例函数. 问题 1 以京沪高铁为背景，这可以增加现代铁路运输知识.

[2] $y=300t$ 是问题 1 的函数解析式. 由于自变量 t 是火车运行时间（单位：h），故对它的限制即 $0\leqslant t\leqslant 4.4$. 作为对一个实际问题的讨论，其中自变量的取值范围应注明.

[3] 这里的“思考”栏目给出更多的实际背景，为下面引出正比例函数的概念服务.

1. 第 26.2 节的内容是本章的重点知识. 教科书首先安排了正比例函数的内容，讨论了这种函数的定义、图象和增减性等，然后以此为基础，继续学习一次函数的定义、图象和增减性等，这是一个从特殊概念向一般概念推广的认识过程. 教学中应引导学生注意两个概念之间的联系与区别，体会类比和联想的方法，培养“由此及彼”地认识问题的能力.

2. 本节中，正比例函数和一次函数的概念都是从实际问题引出的，这样设计的目的是为了更好地体现函数概念的实际背景，反映数学与实际的关系，即数学理论来源于实际又服务于实际. 这样安排也有助于提高学生将实际问题抽象为函数模型的能力（即数学建模能力）.

教科书中的问题 1（列车的行驶问题）和问题 2（登山时的气温变化问题），分别作为引出正比例函数和一次函数的问题，在数量关系上具有典型性，而且问题的实际背景都不复杂，比较

（单位：cm^3）的变化而变化。

(3) 每个练习本的厚度为0.5 cm，一些练习本摞在一起的总厚度 h（单位：cm）随练习本的本数 n 的变化而变化。

(4) 冷冻一个0 ℃的物体，使它每分下降2 ℃，物体的温度 T（单位：℃）随冷冻时间 t（单位：min）的变化而变化。

上面问题中，表示变量之间关系的函数解析式分别为

(1) $l=2\pi r$；[1]　　(2) $m=7.8V$；

(3) $h=0.5n$；　　(4) $T=-2t$.

正如函数 $y=300t$ 一样，上面这些函数都是常数与自变量的积的形式.

一般地，形如 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）的函数，叫做**正比例函数**（proportional function），其中 k 叫做比例系数.[2]

练习

1. 下列式子中，哪些表示 y 是 x 的正比例函数？

(1) $y=-0.1x$；　(2) $y=\frac{x}{2}$；　(3) $y=2x^2$；　(4) $y^2=4x$.

2. 列式表示下列问题中的 y 与 x 的函数关系，并指出哪些是正比例函数.

(1) 正方形的边长为 x cm，周长为 y cm；

(2) 某人一年内的月平均收入为 x 元，他这年（12个月）的总收入为 y 元；

(3) 一个长方体的长为2 cm，宽为1.5 cm，高为 x cm，体积为 y cm^3.

下面我们研究正比例函数的图象.

例1　画出下列正比例函数的图象：

(1) $y=2x$，$y=\frac{1}{3}x$；　　(2) $y=-1.5x$，$y=-4x$.

解：(1) 函数 $y=2x$ 中自变量 x 可为任意实数. 表26-7是 y 与 x 的几组对应值.

表26-7

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−6	−4	−2	0	2	4	6	…

第二十六章　一次函数　67

[1] 注意虽然 π 是字母，但是它表示常数.

[2] 正比例函数的定义是从解析式的形式（$y=kx$）的角度给出的，注意定义中对比例系数的要求：k 是常数，$k\neq0$.

练习答案

1. (1)(2).
2. (1) $y=4x$，是正比例函数；
   (2) $y=12x$，是正比例函数；
   (3) $y=3x$，是正比例函数.

容易理解. 教学中，如果有更贴近学生的实际问题具有这样的函数关系，那么可以采用那些问题替换教科书中的问题.

3. 正比例函数和一次函数都是根据函数的解析式来定义的，本套教科书后面的二次函数也是这样定义的. 这些函数都属于初等函数中的一元多项式函数. 一般地，设自变量为 x，则多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$（$a_0\neq0$，$n\in\mathbf{N}$）叫做 n 次函数，其中 $a_i(i=0, 1, \cdots, n)$为常数.

学习正比例函数和一次函数的定义时，要弄清解析式中各字母的意义，知道哪些是常数，哪些是变量，哪个是自变量，哪个是函数. 应知道一次函数对自变量系数的限制条件为 $k\neq0$.

4. 在第二学段（小学），曾经学习过正比例关系，即两个相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果这两个量中相对应的两个数的比值（也就是商）一定，这两种量就叫做成正比例的量，它们的关系叫做正比例关系. 上述定

[1] 画这个函数图象的步骤同前面画函数 $y=2x$ 图象的步骤一样，教学中应引导学生自主完成.

[2] 画这个函数图象的步骤同前面画函数 $y=-1.5x$ 图象的步骤一样，教学中应引导学生自主完成.

如图 26.2-1，在直角坐标系中描出以表中的值为坐标的点，将这些点连接起来，得到一条经过原点和第三、第一象限的直线，它就是函数 $y=2x$ 的图象.

用同样的方法，[1] 可以得到函数 $y=\frac{1}{3}x$ 的图象（图 26.2-1），它也是一条经过原点和第三、第一象限的直线.

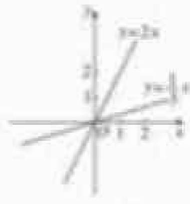
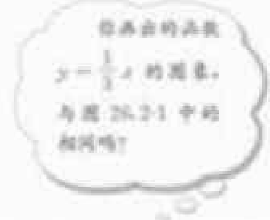


图 26.2-1



(2) 函数 $y=-1.5x$ 中自变量 x 可为任意实数. 表 26-8 是 y 与 x 的几组对应值.

表 26-8

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	4.5	3	1.5	0	-1.5	-3	-4.5	…

如图 26.2-2，在直角坐标系中描出以表中的值为坐标的点，将这些点连接起来，得到一条经过原点和第二、第四象限的直线，它就是函数 $y=-1.5x$ 的图象.

用同样的方法，[2] 可以得到函数 $y=-4x$ 的图象（图 26.2-2），它也是一条经过原点和第二、第四象限的直线.

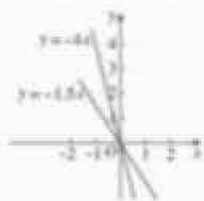
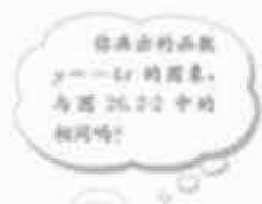


图 26.2-2



第二十六章 一次函数

义与正比例函数定义在本质上是一致的，仅是表达方式不同. 此外，应注意第二学段中提比值时一般不涉及负数. 教学中，可以联系以前所学的正比例关系的概念，但需指出正比例函数中比例系数 k 可以是正数也可以是负数.

5. 本节例 1 要画正比例函数 $y=2x$ 和 $y=-1.5x$ 的图象，所用方法为描点法. 画这些函数图象的步骤完全相同，图象的形状都是过原点的直线，只是直线在坐标系中的位置不同. 教科书列出了画这两个函数图象的具体步骤，教学中要让学生参照它们独立完成画函数 $y=\frac{1}{3}x$，$y=-4x$ 等的图象，这既是对描点法的巩固，又是让学生在亲自动手实践的过程中感悟这些函数的图象的相同点与不同点，为后面的发现规律作准备.

教科书在画函数 $y=2x$ 和 $y=-1.5x$ 的图象时，已说明自变量 x 可以是任意实数，教学中

以上 4 个函数的图象都是经过原点的直线，其中函数 $y=2x$ 和 $y=\frac{1}{3}x$ 的图象经过第三、第一象限，从左向右上升；函数 $y=-1.5x$ 和 $y=-4x$ 的图象经过第二、第四象限，从左向右下降。

一般地，正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）的图象是一条经过原点的直线，我们称它为直线 $y=kx$。当 $k>0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第三、第一象限，从左向右上升，**即随着 x 的增大 y 也增大**；当 $k<0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第二、第四象限，从左向右下降，**即随着 x 的增大 y 反而减小**.[1]

思考

经过原点与点（1，k）（k 是常数，$k\neq0$）的直线是哪个函数的图象？[2] 画正比例函数的图象时，怎样画最简单？为什么？

因为两点确定一条直线，所以可用两点法画正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）的图象. 一般地，过原点和点（1，k）（k 是常数，$k\neq0$）的直线，即正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）的图象.[3]

练习

用你认为最简单的方法画出下列函数的图象：

(1) $y=\frac{3}{2}x$；　　(2) $y=-3x$.

26.2.2 一次函数

问题 2[4] 某登山队大本营所在地的气温为 5 ℃，海拔每升高 1 km 气温下降 6 ℃. 登山队员由大本营向上登高 x km 时，他们所在位置的气温是 y ℃. 试用函数解析式表示 y 与 x 的关系.

分析：y 随 x 变化的规律是：从大本营向上，当海拔增加 x km 时，气温从 5 ℃ 减少 $6x$ ℃. 因此 y 与 x 的函数解析式为

$$y=5-6x.$$

这个函数也可以写为

第二十六章　一次函数　69

[1] 这里结合图象归纳出正比例函数的增减性. 注意有些学生受算术中正比例概念的影响，片面地认为正比例函数总是随自变量的增大而增大，应指出正比例函数的增或减是由比例系数 k 的正或负决定的.

[2] 可以先断定这个函数是 $y=kx$ 的形式，再由 $x=1$ 时 $y=k$ 确定这个函数是 $y=kx$.

[3] 画正比例函数的图象时可以用两点法，如过原点和点(1，k)画直线 $y=kx$.

练习答案

(1) 过原点和点 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$ 作直线；

(2) 过原点和点（1，-3）作直线.

[4] 本章章前图及其中的表格和图象与这个问题相对应.

应指出：一般地，正比例函数中的自变量可以是任意实数.

6. 教科书在讨论正比例函数的增减性时，是通过观察函数图象的升降发现结论的，这是一种直观的发现方法，而不是关于正比例函数增减性的严格证明. 对于这个性质可以作出如下的证明：

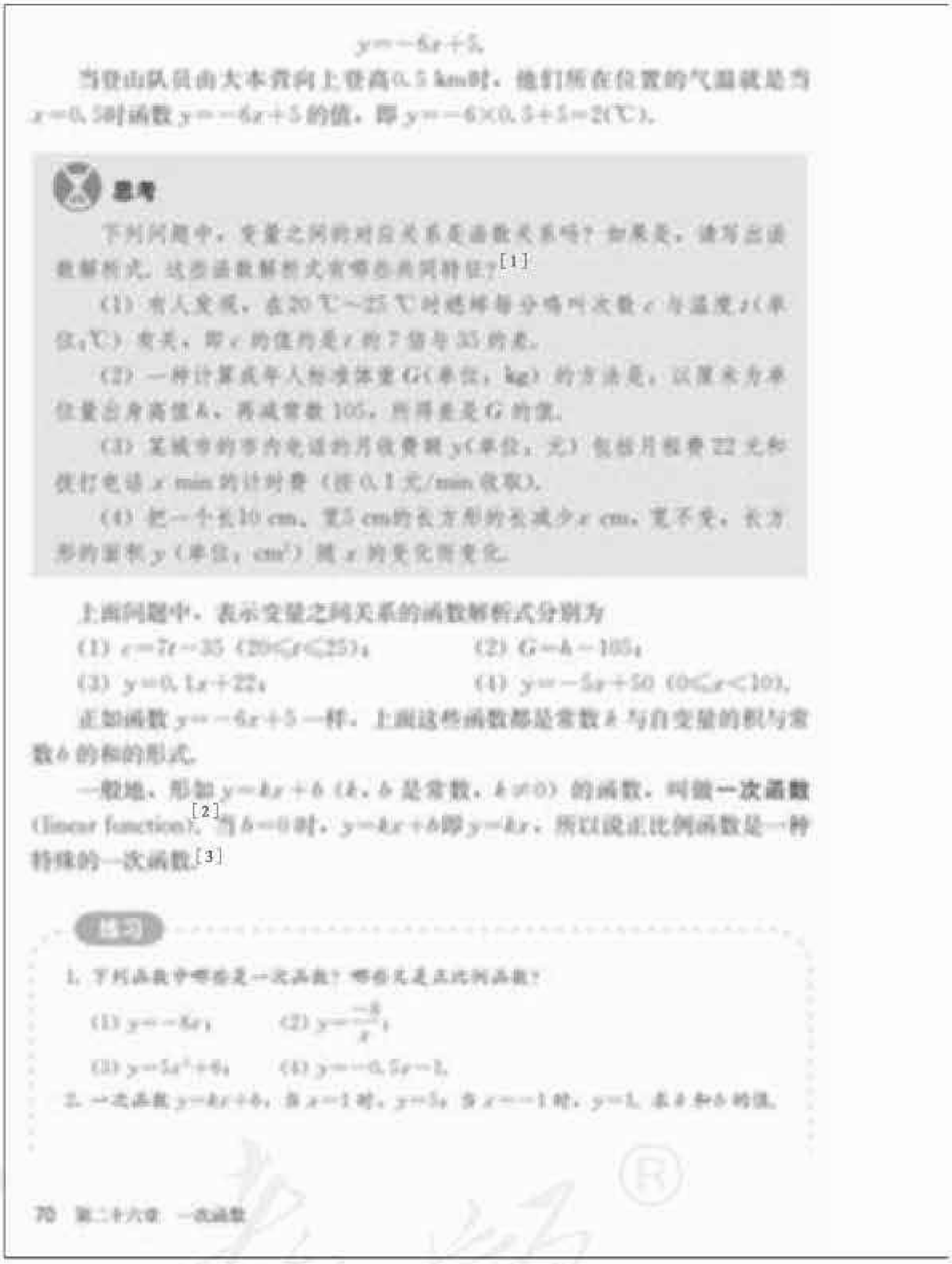
设 x_1，x_2 为任意两个实数，且 $x_1<x_2$，考虑函数 $y=kx$ 在 x_1，x_2 处的函数值的大小.

(1) 若 $k>0$，则 $kx_2-kx_1=k(x_2-x_1)>0$；

(2) 若 $k<0$，则 $kx_2-kx_1=k(x_2-x_1)<0$.

因此，若 $k>0$，函数 $y=kx$ 随自变量 x 的增大而增大；若 $k<0$，函数 $y=kx$ 随自变量 x 的增大而减小.

教学中，一般不要求对上述性质进行严格的证明，只要能结合图象对这个性质有所认识即可. 但是，如果学生能够接受，也不妨在直观认识的基础上加上适当的式子证明，从数形两方面加深对这个性质的理解.



$$y=-6x+5.$$

当登山队员由大本营向上登高0.5 km时，他们所在位置的气温就是当$x=0.5$时函数$y=-6x+5$的值，即$y=-6\times0.5+5=2$(℃).

思考

下列问题中，变量之间的对应关系是函数关系吗？如果是，请写出函数解析式. 这些函数解析式有哪些共同特征？[1]

(1) 有人发现，在20 ℃~25 ℃时蟋蟀每分鸣叫次数c与温度t(单位：℃)有关，即c的值约是t的7倍与35的差.

(2) 一种计算成年人标准体重G(单位：kg)的方法是，以厘米为单位量出身高值h，再减常数105，所得差是G的值.

(3) 某城市的市内电话的月收费额y(单位：元)包括月租费22元和拨打电话x min的计时费(按0.1元/min收取).

(4) 把一个长10 cm，宽5 cm的长方形的长减少x cm，宽不变，长方形的面积y(单位：cm²)随x的变化而变化.

上面问题中，表示变量之间关系的函数解析式分别为

(1) $c=7t-35$ $(20\leqslant t\leqslant 25)$；　(2) $G=h-105$；

(3) $y=0.1x+22$；　(4) $y=-5x+50$ $(0\leqslant x<10)$.

正如函数$y=-6x+5$一样，上面这些函数都是常数k与自变量的积与常数b的和的形式.

一般地，形如$y=kx+b$ (k，b是常数，$k\neq0$) 的函数，叫做**一次函数**(linear function).[2] 当$b=0$时，$y=kx+b$即$y=kx$，所以说正比例函数是一种特殊的一次函数.[3]

练习

1. 下列函数中哪些是一次函数？哪些又是正比例函数？

(1) $y=-8x$；　(2) $y=\frac{-8}{x}$；

(3) $y=5x^2+6$；　(4) $y=-0.5x-1$.

2. 一次函数$y=kx+b$，当$x=1$时，$y=5$；当$x=-1$时，$y=1$. 求k和b的值.

70　第十九章　一次函数

[1] 这里需要先引导学生写出函数解析式，再根据式子发现它们在形式上的共同点.

[2] 一次函数的定义是根据它的解析式的形式特征给出的，要注意其中对常数k，b的要求.

[3] 一次函数中常数b可以为0，这时的一次函数即正比例函数. 这里给出了一次函数与正比例函数之间的关系，即一般与特殊的关系.

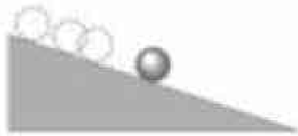
练习答案

1. (1) (4) 是一次函数，(1) 是正比例函数.
2. $k=2$，$b=3$.

7. 关于正比例函数的图象是一条过原点的直线，教科书是从特例到一般用不完全归纳法给出的. 在有了这一结论后，画正比例函数的图象时，就可以通过两点画出. 教科书对此设计了"思考"栏目，启发学生自己想出两点法. 紧接在后面的练习，是为使用两点法而设计的. 所谓的两点法中有一点是原点，另一点可以是(1，k)，也可以是(2，$2k$)，(3，$3k$)等，具体如何选取要根据问题而确定. 例如，画函数$y=2x$，$y=\frac{1}{2}x$，$y=\frac{2}{3}x$的图象时，除原点外另一点分别选取(1，2)，(2，1)，(3，2)比较容易画. 函数$y=kx$的图象简称直线$y=kx$.

8. 一次函数是自变量的k(常数)倍与一个常数b的和. b是当自变量的值为0时的函数值. 特别地，如果$b=0$，则一次函数就是正比例函数. 一次函数的解析式中只有一个自变量(一元)，其次数为1(一次). 由于一次函数的图象是

3. 一个小球由静止开始沿一个斜坡向下滚动，其速度每秒增加 2 m/s.
(1) 求小球速度 v（单位：m/s）关于时间 t（单位：s）的函数解析式. 它是一次函数吗？
(2) 求第 2.5 s 时小球的速度.



（第 3 题）

例 2 画出函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 的图象.

解：函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 中，自变量 x 可以是任意实数. 列表表示几组对应值（计算并填写表 26-9 中空格）.

表 26-9 [1]

x	-2	-1	0	1	2
$y=-6x$			0	-6	
$y=-6x+5$			5	-1	

画出函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 的图象（图 26.2-3）.

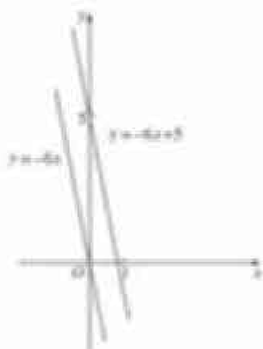


图 26.2-3

思考

比较上面两个函数的图象的相同点与不同点，填出你的观察结果：[2]

这两个函数的图象形状都是______，并且倾斜程度______. 函数 $y=-6x$ 的图象经过原点，函数 $y=-6x+5$ 的图象与 y 轴交于点______，即它可以看作由直线 $y=-6x$ 向___平移___个单位长度而得到.

练习答案

3. (1) $v=2t$，是一次函数；
(2) 5 m/s.

[1] 表 26-9

x	-2	-1	0	1	2
$y=-6x$	12	6	0	-6	-12
$y=-6x+5$	17	11	5	-1	-7

[2] 填空答案：直线，相同，(0，5)，上，5.

一条直线，所以一次函数也被称为线性函数.

教科书的“思考”栏目用了多个例子说明一次函数的实际背景，事实上大量的实际问题中变量之间具有一次函数关系. 教学中可以结合学生的生活实际，用学生熟悉的实际问题来加深他们对一次函数的理解.

9. 本节的例 2 是画两个函数 $y=-6x$ 和 $y=-6x+5$ 的图象. 这道例题的设计意图，是通过对比这两个函数的解析式及函数值，发现两个函数的图象的关系，进而利用学生已有的对正比例函数图象的认识来认识一般的一次函数的图象.

例 2 中安排了两个关系密切的函数 $y=-6x$ 和 $y=-6x+5$，容易发现，它们的解析式仅在常数项上有区别，其他部分完全相同. 因此，对自变量的任一值，这两个函数相应的值总差同一个常数. 这反映在图象上，就是不论横坐标为几，两个函数图象的纵坐标总差同一个值，即一个函数的图象总比另一个函数的图象高出同一高

[1] 这里给出了函数 $y=kx+b$ 与函数 $y=kx$ 的图象之间的关系，通过平移它们可以互相转化.

[2] 两点法与平移法作图的结果相同，但平移法需要先有一个函数（如 $y=kx$）的图象为基础.

比较两个函数解析式，你能说出两个函数的图象有上述关系的道理吗？

联系上面结果，考虑一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象是什么形状，它与直线 $y=kx$（$k\neq0$）有什么关系.

比较一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）与正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）的解析式，容易得出：

一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象可以由直线 $y=kx$ 平移 $|b|$ 个单位长度得到（当 $b>0$ 时，向上平移；当 $b<0$ 时，向下平移）.[1] 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象也是一条直线，我们称它为直线 $y=kx+b$.

例3 画出函数 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$ 的图象.

分析：由于一次函数的图象是直线，因此只要确定两个点就能画出它.

解：列表表示当 $x=0$，$x=1$ 时两个函数的对应值（表26-10）.

表26-10

x	0	1
$y=2x-1$	-1	1
$y=-0.5x+1$	1	0.5

过点(0，−1)与点(1，1)画出直线 $y=2x-1$；过点(0，1)与点(1，0.5)画出直线 $y=-0.5x+1$.（图26.2-4）

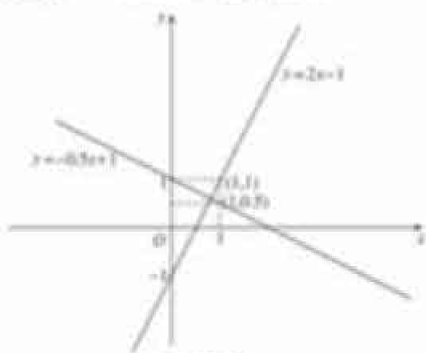


图26.2-4

先画直线 $y=2x$ 与 $y=-0.5x$，再分别平移它们，也能得到直线 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$.[2]

度. 教学中，可以引导学生通过比较解析式、表格和图象，发现两个函数的区别，以及这样的区别的不同表现形式，最后能认识到这些表现形式是从不同角度反映两个函数的差别，这些形式是相互联系的.

10. 本节例2的后面，安排了“思考”栏目，引导学生通过比较函数 $y=-6x$ 和 $y=-6x+5$ 的图象的相同点与不同点，发现将函数 $y=-6x$ 的图象向上平移5个单位长度，就能得到函数 $y=-6x+5$ 的图象，并从解析式的角度探讨为什么会有这样的现象. 这样安排可以将以前学习过的图形平移与现在讨论的函数图象联系起来，进而得出后面的猜想，发现函数 $y=kx+b$ 的图象与直线 $y=kx$ 有什么关系.

关于一次函数 $y=kx+b$ 的图象的形状，本节是这样推出的：函数 $y=kx+b$ 的图象，可以由函数 $y=kx$ 的图象平移 $|b|$ 个单位长度得到，而函数 $y=kx$ 的图象是过点（0，0）的一条

探究[1]

画出函数 $y=x+1$，$y=-x+1$，$y=2x+1$，$y=-2x+1$ 的图象．由它们联想：一次函数解析式 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）中，k 的正负对函数图象有什么影响？

观察前面一次函数的图象，可以发现规律：

当 $k>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 从左向右上升；当 $k<0$ 时，直线 $y=kx+b$ 从左向右下降．由此可知，一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）具有如下性质：

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小．

我们先通过观察发现图象（形）的规律，再根据这些规律得出关于数值大小的性质．这种数形结合的研究方法在数学学习中很常见．[2]

练习

1. 直线 $y=2x-3$ 与 x 轴交点坐标为______，与 y 轴交点坐标为______，图象经过______象限，y 随 x 的增大而______．
2. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，并指出每小题中三个函数的图象有什么关系．
   (1) $y=x-1$，$y=x$，$y=x+1$；
   (2) $y=-2x-1$，$y=-2x$，$y=-2x+1$．
3. 分别在同一直角坐标系中画出下列 (1) (2) 中各函数的图象，并指出每组函数图象的共同之处．
   (1) $y=\frac{1}{2}x+1$，$y=x+1$，$y=2x+1$；
   (2) $y=-\frac{1}{2}x-1$，$y=-x-1$，$y=-2x-1$．

例4 已知一次函数的图象过点（3，5）与（-4，-9），求这个一次函数的解析式．

分析：求一次函数 $y=kx+b$ 的解析式，关键是求出 k，b 的值．从已知条件可以列出关于 k，b 的二元一次方程组，并求出 k，b．

因为图象过（3，5）与（-4，-9）点，所以这两点的坐标必适合解析式．

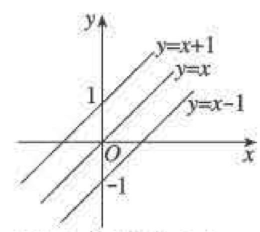
第二十六章　一次函数　73

[1] 这里的“探究”栏目的设计目的，是通过画函数图象的过程及观察比较，引出下面关于 k 对函数增减性影响的归纳．

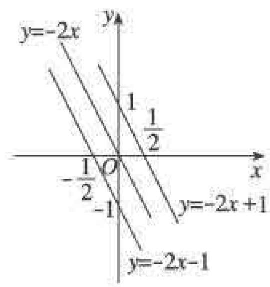
[2] 由形到数的认识是数形结合的一种探究方法，但不是唯一的方法．

练习答案

1. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，$(0, -3)$，第三、四、一，增大．
2. (1) 3 条直线平行．



(2) 3 条直线平行．



3. 图略．(1) 都是经过 (0，1)的直线；(2) 都是经过（0，-1）的直线．

直线，所以函数 $y=kx+b$ 的图象是过点（0，b）的一条直线．这样，不经过比较烦琐的描点法，就能得到对函数 $y=kx+b$ 的图象的认识，这是一个由此及彼的认识过程．

11．本节的例 3 是画一次函数的图象，在“分析”中，教科书指出：由于一次函数的图象是直线，因此只要确定两个点就能画出它．这就会在前面画正比例函数的图象的基础上，引导学生考虑如何简单地画一次函数的图象．对于一般的一次函数，为计算简单，可以选择点（0，b）和点（1，$k+b$）来画直线 $y=kx+b$．用两点法画具体的一次函数时，应结合它的解析式选点．

12．前面已经讨论过正比例函数的增减性，对一次函数的增减性可以进行类似的讨论．一般地说，讨论一次函数的增减性并不会形成新的难点．教学中，除通过图象解释一次函数的增减性外，也可以分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情形，利用不等式解释或证明这个性质，具体方法为：

解：设这个一次函数的解析式为 $y=kx+b\ (k\neq 0)$。

因为 $y=kx+b$ 的图象过点 $(3,\ 5)$ 与 $(-4,\ -9)$，所以

$$\begin{cases}3k+b=5,\\-4k+b=-9.\end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases}k=2,\\b=-1.\end{cases}$$

这个一次函数的解析式为 $y=2x-1$。

像例 4 这样先设出函数解析式，再根据条件确定解析式中未知的系数，从而得出函数解析式的方法，叫做**待定系数法**。

由于一次函数 $y=kx+b$ 中有 k 和 b 两个待定系数，因此用待定系数法时需要根据两个条件列二元一次方程组（以 k 和 b 为未知数），解方程组后就能具体写出一次函数的解析式.[1]

例 3 与例 4 从两方面说明，

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \boxed{\begin{array}{c}\text{函数解析式}\\ y=kx+b\end{array}} \arrow[r, shift left, "\text{选取}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{满足条件的两定点}\\ (x_1,\ y_1)\text{与}(x_2,\ y_2)\end{array}} \arrow[l, shift left, "\text{解出}"] \arrow[r, shift left, "\text{画出}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{一次函数的图象}\\ \text{直线}l\end{array}} \arrow[l, shift left, "\text{选取}"] \end{tikzcd}$$ [2]

例 5 “黄金 1 号”玉米种子的价格为 5 元/kg. 如果一次购买 2 kg 以上的种子，超过 2 kg 部分的种子价格打 8 折.

（1）填写表 26-11.

表 26-11

购买量/kg	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	…
付款金额/元									…

（2）写出付款金额关于购买量的函数解析式，并画出函数图象.

分析：付款金额与种子价格相关，问题中种子价格不是固定不变的，它与购买量有关. 设购买 x kg 种子，当 $0<x\leqslant 2$ 时，种子价格为5 元/kg；当 $x>2$ 时，其中有 2 kg 种子按 5 元/kg 计价，其余的 $(x-2)$kg（即超出2 kg部分）种子按 4 元/kg（即 8 折）计价. 因此，写函数解析式与画函数图象时，应对 $0<x\leqslant 2$ 和 $x>2$ 分段讨论.[3]

74 第二十六章 一次函数

[1] 一般地，已知一次函数的图象经过两个点时，根据这两点的坐标，通过解二元一次方程组，可以确定这个函数的解析式.

这里结合例 4 介绍待定系数法. 这种方法的一般步骤是，先写出含字母系数的解析式，再根据题中条件确定系数的值.

[2] 这里用框图形式表现一次函数的解析式与图象之间可以互相转化.

[3] 例 5 涉及分段函数. 分段函数是在不同区间上有不同对应方式的函数. 这里不介绍分段函数的名称，只是给出需要对自变量分段讨论的例题. 讨论中要关注分段点的选取.

设 x_1，x_2 为任意两个实数，且 $x_1<x_2$，比较函数 $y=kx+b$ 在 x_1，x_2 处的值的大小. 这样做可以进一步从数形结合的角度加深对一次函数的增减性的理解.

13. 本节的例 4 是根据直线上两点的坐标，求相应一次函数的解析式. 通过此例学生可以对待定系数法有所了解. 教学中，要使学生能够掌握通过方程（组）确定相应系数从而确定函数解析式的方法. 这种方法在解析几何中经常被用来解决由曲线（图象）确定方程（函数）的问题. 现在接触这种方法可以为今后的进一步学习作些准备.

14. 本节的例 3 和例 4 从两个不同方面说明了函数解析式与函数图象可以相互转化，实现这种转化的工具就是点的坐标，它是连接数与形两种对象的纽带. 教学中，在分别讨论过这两道例题后，把它们联系起来，讨论两个不同方向的转化很有必要，这样可以培养从多个角度思考问题，

解：(1)

表 26-12

购买量/kg	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	…
付款金额/元	2.5	5	7.5	10	12	14	16	18	…

(2) 设购买量为 x kg，付款金额为 y 元.

当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=5x$；

当 $x>2$ 时，$y=4(x-2)+10=4x+2$.

函数图象如图 26.2-5.

y 与 x 的函数解析式也可合起来表示为
$$y=\begin{cases}5x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 4x+2, & x>2.\end{cases}$$

[1]

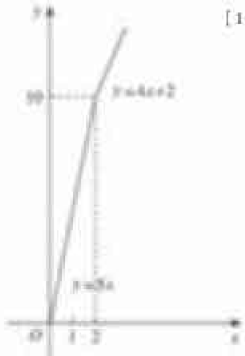


图 26.2-5

思考[2]

你能由上面的函数解析式解决以下问题吗？由函数图象也能解决这些问题吗？

(1) 一次购买 1.5 kg 种子，需付款多少元？

(2) 一次购买 3 kg 种子，需付款多少元？

练习

1. 已知一次函数的图象经过点 (9, 0) 和点 (24, 20)，写出函数解析式.
2. 一个试验室在 0:00—2:00 保持 20 ℃ 的恒温，在 2:00—4:00 匀速升温，每小时升高 5 ℃. 写出试验室温度 T（单位：℃）关于时间 t（单位：h）的函数解析式，并画出函数图象.

第二十六章　一次函数　75

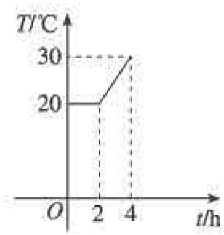
[1] 分段函数的图象由几段曲线组成，画图时要注意分段点的位置.

[2] 这里的“思考”栏目，引导学生关注自变量在不同区间取值时要选对应的函数关系.

练习答案

1. $y=\dfrac{4}{3}x-12$.

2. $T=\begin{cases}20, & 0\leqslant t\leqslant 2,\\ 5t+10, & 2<t\leqslant 4.\end{cases}$



更全面地认识事物的能力.

15. 本节的例 5 要求学生从实际问题中抽象出函数的解析式和图象. 问题中的函数关系要分两种情况进行讨论，以购买量在 2 kg 上下来区分，它们是两个不同的一次函数. 对于这种分段函数的问题，要特别注意每个函数相应的自变量变化区间. 在解析式和图象上都要反映出自变量的相应取值范围. 教学中，应注意这里不是以讲分段函数为重点，只是让学生了解有些问题的函数模型是分段讨论的. 此例的教学目的重在培养数学建模能力.

16. 第 26.2.3 节从一次函数的角度讨论了三个已学对象：一元一次方程、一元一次不等式和二元一次方程组. 它们不是新知识，但对其认识还有待于进一步深化. 本节用函数的观点对它们重新进行分析，这种再认识不是简单的回顾复习，而是居高临下地进行动态分析. 教师应体会安排这一节的意图，把握本节内容的要求尺度. 通过本节

[1] 这里的“思考”栏目为讨论一元一次方程与一次函数的联系而设置.

[2] 从函数的角度看，解一元一次方程等价于求某个一次函数的零点. 教学中可结合图象对此加以解释.

[3] 这里的“思考”栏目为讨论一元一次不等式与一次函数的联系而设置. 教学中可引导学生对比上一个“思考”问题，来思考这个问题.

26.2.3 一次函数与方程、不等式

方程、不等式与函数之间有着密切的联系. 下面我们先从函数的角度看解一元一次方程.

思考[1]

下面 3 个方程有什么共同点和不同点？你能从函数的角度对解这 3 个方程进行解释吗？

(1) $2x+1=3$；　(2) $2x+1=0$；　(3) $2x+1=-1$.

可以看出，这 3 个方程的等号左边都是 $2x+1$，等号右边分别是 3，0，-1. 从函数的角度看，解这 3 个方程相当于在一次函数 $y=2x+1$ 的函数值分别为 3，0，-1 时，求自变量 x 的值. 或者说，在直线 $y=2x+1$ 上取纵坐标分别为 3，0，-1 的点，看它们的横坐标分别为多少（图 26.2-6）.

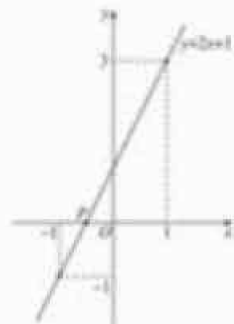


图 26.2-6

因为任何一个以 x 为未知数的一元一次方程都可以变形为 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ 的形式，所以解一元一次方程相当于在某个一次函数 $y=ax+b$ 的函数值为 0 时，求自变量 x 的值.[2]

我们再从函数的角度看解一元一次不等式.

思考[3]

下面 3 个不等式有什么共同点和不同点？你能从函数的角度对解这 3 个不等式进行解释吗？

(1) $3x+2>2$；　(2) $3x+2<0$；　(3) $3x+2<-1$.

可以看出，这 3 个不等式的不等号左边都是 $3x+2$，而不等号及不等号右边却有不同. 从函数的角度看，解这 3 个不等式相当于在一次函数 $y=3x+2$ 的函数值分别大于 2、小于 0、小于 -1 时，求自变量 x 的取值范围. 或者说，

78　第二十六章　一次函数

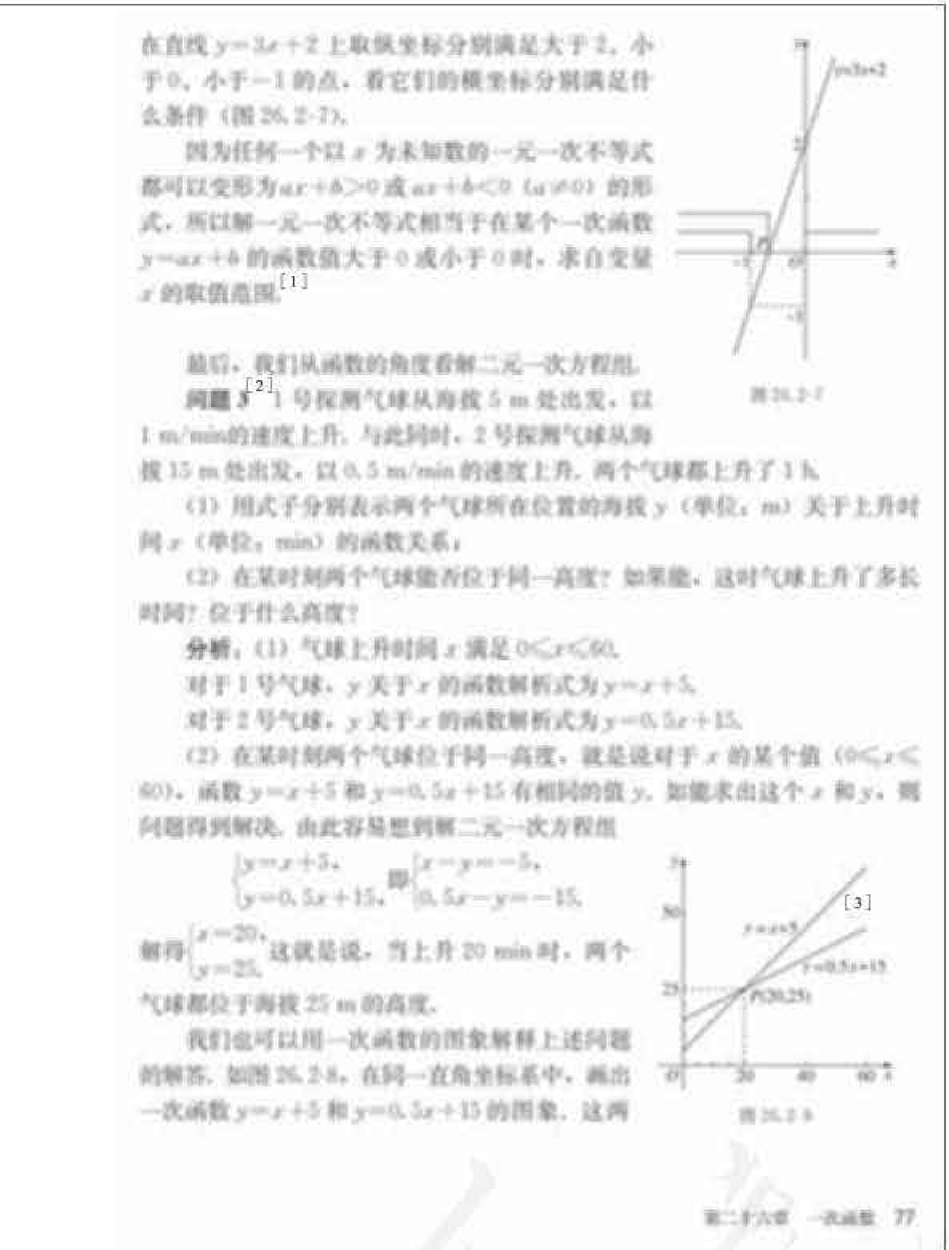
的教学，应加强知识间横向和纵向的联系，发挥函数对相关内容的统领作用，能用一次函数的观点把以前学习的方程和不等式等进行整合.

17. 任何一个一元一次方程都能写为 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ 的形式，其左边恰是一次函数 $y=kx+b$ 的形式. 解这个方程，从函数值的角度考虑，就是函数值为 0 时求自变量为何值；从函数图象的角度考虑，就是确定直线 $y=ax+b$ 与 x 轴的交点的横坐标. 教科书就从这两个角度讨论一元一次方程与一次函数的关系.

18. 任何一个一元一次不等式都能写为 $ax+b>$（或$<$）0 的形式，其左边与一次函数 $y=kx+b$ 一致，所以从变化与对应的观点考虑问题，解一元一次不等式也可以归结为两种认识：

（1）从函数值的角度看，就是寻求使一次函数 $y=ax+b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围；

（2）从函数图象的角度看，就是确定直线



在直线 $y=3x+2$ 上取纵坐标分别满足大于 2，小于 0，小于 -1 的点，看它们的横坐标分别满足什么条件（图 26.2-7）。

因为任何一个以 x 为未知数的一元一次不等式都可以变形为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$ $(a\neq 0)$ 的形式，所以解一元一次不等式相当于在某个一次函数 $y=ax+b$ 的函数值大于 0 或小于 0 时，求自变量 x 的取值范围.[1]

图 26.2-7

最后，我们从函数的角度看解二元一次方程组.

问题 3[2] 1 号探测气球从海拔 5 m 处出发，以 1 m/min 的速度上升．与此同时，2 号探测气球从海拔 15 m 处出发，以 0.5 m/min 的速度上升．两个气球都上升了 1 h.

（1）用式子分别表示两个气球所在位置的海拔 y（单位：m）关于上升时间 x（单位：min）的函数关系；

（2）在某时刻两个气球能否位于同一高度？如果能，这时气球上升了多长时间？位于什么高度？

分析：（1）气球上升时间 x 满足 $0\leqslant x\leqslant 60$.

对于 1 号气球，y 关于 x 的函数解析式为 $y=x+5$.

对于 2 号气球，y 关于 x 的函数解析式为 $y=0.5x+15$.

（2）在某时刻两个气球位于同一高度，就是说对于 x 的某个值 $(0\leqslant x\leqslant 60)$，函数 $y=x+5$ 和 $y=0.5x+15$ 有相同的值 y．如能求出这个 x 和 y，则问题得到解决．由此容易想到解二元一次方程组

$$\begin{cases}y=x+5,\\ y=0.5x+15,\end{cases} 即 \begin{cases}x-y=-5,\\ 0.5x-y=-15.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=20,\\ y=25.\end{cases}$ 这就是说，当上升 20 min 时，两个气球都位于海拔 25 m 的高度.

我们也可以用一次函数的图象解释上述问题的解答．如图 26.2-8，在同一直角坐标系中，画出一次函数 $y=x+5$ 和 $y=0.5x+15$ 的图象．这两

[3]

图 26.2-8

第二十六章　一次函数　77

[1] 从函数的角度看，解一元一次不等式等价于求某一次函数的正（负）区间（即使函数值为正（负）的自变量取值范围）．教学中可结合图象对此加以解释.

[2] 问题 3 为讨论二元一次方程（组）与一次函数的联系而设置.

[3] 这里的图象是对问题 3 的解答从“形”的角度进行解释．对它的认识要联系上面的方程组.

$y=ax+b$ 位于 x 轴上（或下）方的部分对应 x 轴的哪一部分.

教科书就从这两个角度讨论一元一次不等式与一次函数的关系.

19. 本节问题 3 以气球升空问题为背景，讨论二元一次方程组与一次函数的关系.

一般地，二元一次方程 $mx+ny=p$ 能写为 $y=kx+b$ 的形式．因此，一个二元一次方程对应一个一次函数，从而也对应一条直线．一个二元一次方程组对应两个一次函数，从而也对应两条直线．教科书正是按照这种逻辑关系来分析二元一次方程组和一次函数的关系.

一般地，如果一个二元一次方程组有唯一的解 $\begin{cases}x=a,\\ y=b,\end{cases}$ 那么这个解就是方程组对应的两条直线的交点的坐标．二元一次方程组的图象解法，就是依据了这样的道理.

20. 人对事物的认识需要不断深化，学习数

[1] 这里扼要说明二元一次方程与一次函数的联系.

[2] 这里扼要说明二元一次方程组与一次函数的联系，对图象法解二元一次方程组的道理进行解释.

条直线的交点坐标为 (20，25)，这也说明当上升 20 min 时，两个气球都位于海拔25 m的高度.

一般地，因为每个含有未知数 x 和 y 的二元一次方程，都可以改写为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的形式，所以每个这样的方程都对应一个一次函数，于是也对应一条直线. 这条直线上每个点的坐标（x，y）都是这个二元一次方程的解.[1]

由上可知，由含有未知数 x 和 y 的两个二元一次方程组成的每个二元一次方程组，都对应两个一次函数，于是也对应两条直线. 从“数”的角度看，解这样的方程组，相当于求自变量为何值时相应的两个函数值相等，以及这个函数值是多少；从“形”的角度看，解这样的方程组，相当于确定两条相应直线交点的坐标. 因此，我们可以用画一次函数图象的方法得到方程组的解.[2]

归纳

方程（组）与函数之间互相联系，从函数的角度可以把它们统一起来. 解决问题时，应根据具体情况灵活地把它们结合起来考虑.

练习

考虑下面两种移动电话计费方式：

	方式一	方式二
月租费/（元/月）	30	0
本地通话费/（元/min）	0.30	0.40

用函数方法解答何时两种计费方式费用相等.

习题 26.2

复习巩固

1. 一列火车以 90 km/h 的速度匀速前进. 求它的行驶路程 s（单位：km）关于行驶时间 t（单位：h）的函数解析式，并画出函数图象.
2. 函数 $y=-5x$ 的图象在第_____象限内，经过点（0，____）与点（1，____），y 随 x 的增大而______.

78 第二十六章 一次函数

练习答案

画出函数 $y=0.3x+30$ 和 $y=0.4x$ 的图象，它们的交点为 (300，120)，这说明通话300 min时两种计费方式收费都是120元.

学概念也是如此. 过去学习方程（组）和不等式时，是直接面对这些概念，没有将它们与其他概念更多地联系起来. 现在是在学习新概念（函数）后回头审视老概念，看问题的角度和高度都发生了变化，认识应更深刻，即应能将老概念纳入扩大后的新知识体系之中，这样才能体现学习中的进步. 教学中，应对第 26.2.3 节的设计意图有明确的认识，这样才能有的放矢.

习题 26.2

1. 习题 26.2 中“复习巩固”的题目有 2 类：

（1）复习巩固正比例函数的概念、图象、性质、方法的基本问题；

（2）复习巩固关于一次函数的概念、图象、性质、方法的基本问题.

这些题目虽然简单，但是基础性强，学生应对它们有正确的理解，并能很熟练地完成它们.

3. 一个弹簧不挂重物时长 12 cm，挂上重物后伸长的长度与所挂重物的质量成正比．如果挂上 1 kg 的物体后，弹簧伸长 2 cm．[1] 求弹簧总长 y（单位：cm）关于所挂物体质量 x（单位：kg）的函数解析式．
4. 分别画出下列函数的图象：
(1) $y=4x$；　(2) $y=4x+1$；
(3) $y=-4x+1$；　(4) $y=-4x-1$.
5. 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=2x+4$ 与 $y=-2x+4$ 的图象，并指出每个函数中当 x 增大时 y 如何变化．
6. 已知一次函数 $y=kx+b$，当 $x=2$ 时 y 的值为 4，当 $x=-2$ 时 y 的值为 -2，求 k 与 b．
7. 已知一次函数的图象经过点 $(-1, 5)$ 和点 $(6, 3)$，求这个函数的解析式．
8. 当自变量 x 取何值时，函数 $y=\frac{5}{2}x+1$ 与 $y=5x+17$ 的值相等？这个函数值是多少？

综合运用

9. 点 $P(x, y)$ 在第一象限，且 $x+y=8$，点 A 的坐标为 $(6, 0)$，设 $\triangle OPA$ 的面积为 S.
(1) 用含 x 的式子表示 S，写出 x 的取值范围[2]，画出函数 S 的图象；
(2) 当点 P 的横坐标为 5 时，$\triangle OPA$ 的面积为多少？
(3) $\triangle OPA$ 的面积能大于 24 吗？为什么？[3]
10. 不画图象，仅从函数解析式能否看出直线 $y=3x+4$ 与 $y=3x-4$ 具有什么样的位置关系？
11. 从 A 地向 B 地打长途电话，通话时间不超过 3 min 收费 2.4 元，超过 3 min 后每分钟加收 1 元．写出通话费用 y（单位：元）关于通话时间 x（单位：min）的函数解析式．有 10 元钱时，打一次电话最多可以通话多长时间？（本题中 x 取整数，不足 1 min 的通话时间按 1 min 计费．）[4]
12. (1) 当 $b>0$ 时，函数 $y=x+b$ 的图象经过哪几个象限？
(2) 当 $b<0$ 时，函数 $y=-x+b$ 的图象经过哪几个象限？
(3) 当 $k>0$ 时，函数 $y=kx+1$ 的图象经过哪几个象限？
(4) 当 $k<0$ 时，函数 $y=kx+1$ 的图象经过哪几个象限？
13. 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{5}{2}x+1$ 和 $y=5x+17$ 的图象，并结合图象比较这两个函数的函数值的大小关系．

第二十六章　一次函数　79

[1] 由已知条件可知，重物每增加 1 kg 时，弹簧伸长 2 cm.

[2] 这里要根据问题的条件，即点 P 在第一象限，且 $x+y=8$ 来确定自变量的取值范围.

[3] 这里要根据已知的函数值反过来求自变量的值，注意自变量的取值要在其取值范围之内，函数才能取到已知的值.

[4] 括号内的规定不仅是为了便于计算，而且也符合通常的实际收费规定.

2. 习题 26.2 中“综合运用”的题目有 5 道. 解第 9 题要根据动点 P 的位置计算三角形的面积，解题时要注意自变量的取值范围. 解第 10 题要根据函数解析式推断两条直线的几何关系，解决问题时不应用画出图象再比较的笨方法，可以从两直线都可以由 $y=3x$ 平移得来入手考虑. 解第 11 题的关键是建立正确的函数模型，要结合题意考虑 x 的取值. 通过解第 12 题可以归纳出 k 和 b 的取值对直线 $y=kx+b$ 位置的影响. 解第 13 题时确定两条直线的交点坐标很重要，由交点的横坐标可以划分相应的区间.

3. 习题 26.2 中“拓广探索”的题目有 2 道. 第 14 题是根据图象回答问题，只要能正确理解折线图中横、纵坐标的意义，分段考虑问题就能得出答案. 第 15 题的难点在于要分别根据两种不同的计价方式列出相应的函数解析式，第 (3) 问的答案可以从函数图象得到启示，再利用不等式得到确切结果.

[1] 应在第 (2) 问中找到两图象交点的坐标，按计划要买的商品的原价 (x) 与交点的横坐标的大小关系，分情况讨论方案的选择.

拓广探索

14. 图中的折线表示一骑车人离家的距离 y 与时刻 x 的关系. 骑车人 9:00 离开家，15:00 回到家. 请你根据这个折线图回答下列问题：

(1) 这个人何时离家最远？这时他离家多远？

(2) 何时他开始第一次休息？休息多长时间？这时他离家多远？

(3) 11:00～12:30 他骑了多少千米？

(4) 他在 9:00～10:30 和 10:30～12:30 的平均速度各是多少？

(5) 他返家时的平均速度是多少？

(6) 14:00 时他离家多远？回家路上，何时他离家 9 km？

(第 14 题)

15. 甲、乙两家商场平时以同样价格出售相同的商品. 春节期间两家商场都让利酬宾，其中甲商场所有商品按 8 折出售，乙商场对一次购物中超过 200 元后的价格部分打 7 折.

(1) 以 x（单位：元）表示商品原价，y（单位：元）表示购物金额，分别就两家商场的让利方式写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 在同一直角坐标系中画出 (1) 中函数的图象；

(3) 春节期间如何选择这两家商场去购物更省钱？[1]

80 第二十六章 一次函数

信息技术应用

用计算机画函数图象

由解析式画函数图象时，一般采用描点连线法。描出的点越多，画出的函数图象越准确。但是，仅靠手工操作有时很难画出准确的图象。用计算机可以帮助我们又快又准地画出函数图象。[1]下面介绍根据函数解析式用《几何画板》软件画函数图象的一些例子。

例如，画函数 $y=3x-2$ 的图象，选用《几何画板》软件绘制函数图象功能（new function / graph），输入函数解析式 $y=3x-2$，计算机便自动画出如下图象（图1中的直线）。

图1

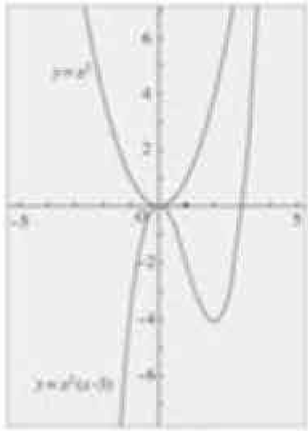


图2

类似地，在同一坐标系中，可以画出函数 $y=x^2$ 与 $y=x^2(x-3)$ 的图象（图2中蓝色的曲线与红色的曲线）。

从画出的函数图象可以看出，函数图象与函数性质之间存在着必然的联系。例如

图象特征		函数变化规律
从左向右曲线呈上升状态	⇔[2]	y 随 x 的增大而增大
从左向右曲线呈下降状态	⇔	y 随 x 的增大而减小
曲线上的最高点是 (a, b)	⇔	当 $x=a$ 时，y 有最大值 b
曲线上的最低点是 (a, b)	⇔	当 $x=a$ 时，y 有最小值 b

根据上面例子中的函数图象，你发现这些函数各具有什么性质？

第二十六章 一次函数 87

[1] 用计算机画函数图象的基本原理与描点法一致，只是它的取值、计算、描点和连线由计算机完成，比人工完成要快速准确.

[2] ⇔表示其左右两边等价，即有左就有右，有右就有左.

信息技术应用

这篇选学材料介绍了使用计算机画函数图象的一些例子. 这里使用的《几何画板》是一种比较容易使用的计算机画图软件，它可以根据输入的一般初等函数的解析式，自动画出相应的函数图象. 从教科书所举的例子，可以看出一次函数、二次函数和三次函数的图象形状差别很大，它们分别是直线、抛物线和三次曲线.

从函数图象的直观形状，可以发现函数的变化规律以及取最大（小）值的情况. 观察书中的三个具体函数图象，对这三个函数的变化规律进行判断，会有助于读者熟悉函数图象与函数的数量变化规律之间的联系.

这篇选学材料比较适合于有条件使用《几何画板》的学生. 如暂时不具备这样的条件，可以通过阅读它了解函数图象特征与函数变化规律之间的内在联系.

26.3 课题学习　选择方案

做一件事情，有时有不同的实施方案. 比较这些方案，从中选择最佳方案作为行动计划，是非常必要的. 在选择方案时，往往需要从数学角度进行分析，涉及变量的问题常用到函数. 同学们通过讨论下面两个问题，可以体会如何运用一次函数选择最佳方案. 解决这些问题后，可以进行后面的实践活动.

问题 1　怎样选取上网收费方式？

表 26-13 给出 A，B，C 三种上宽带网的收费方式.

表 26-13 [1]

收费方式	月使用费/元	包时上网时间/h	超时费/（元/min）
A	30	25	0.05
B	50	50	0.05
C	120	不限时	

选取哪种方式能节省上网费？

分析：在方式 A，B 中，上网时间是影响上网费的变量；在方式 C 中，上网费是常量.

设月上网时间为 x h，则方案 A，B 的收费金额 y_1，y_2 都是 x 的函数. 要比较它们，需在 $x>0$ 的条件下，考虑何时（1）$y_1=y_2$，（2）$y_1<y_2$，（3）$y_1>y_2$. 利用函数解析式，通过方程、不等式或函数图象能够解答上述问题. 在此基础上，再用其中省钱的方式与方式 C 进行比较，则容易对收费方式作出选择.

在方式 A 中，月使用费 30 元与包时上网时间 25 h 是常量. 考虑收费金额时，要把上网时间分为 25 h 以内和超过 25 h 两种情况，得到的是如下的函数

$$y_1=\begin{cases}30, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ 30+0.05\times 60(x-25), & x>25.\end{cases}$$

化简，得

$$y_1=\begin{cases}30, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ 3x-45, & x>25.\end{cases}$$

这个函数的图象如图 26.3-1 所示.

[1] 方案 A 和 B 中，若累计上网时间不超出“包时上网时间”，则只收“月使用费”；若累计上网时间超出“包时上网时间”，则对超出部分再加收“超时费”.

这里以分为时间单位，为简单起见不对 1 min 内的时间再细分. 粗略地考虑这一实际问题，可以用一次函数作为收费方式的数学模型.

1. 第 26.3 节是全章的拓展提高部分. 作为探究性学习的内容，它以课题学习的形式呈现. 通过对“怎样选取上网收费方式”和“怎样租车”两个典型问题的讨论，探求解决实际问题的最优方案，展示函数的应用价值，突出建立数学模型的思想方法和实际意义.

2. 本节中的问题 1“怎样选取上网收费方式”是现代日常生活中的常见问题. 分析问题中所列的三种不同的收费方式，可以发现它们都与当月的上网时间有关，即上网费是上网时间的函数（方案 A，B 是包括一次函数的分段函数，方案 C 对应常值函数）. 比较这三个函数，又可以发现对于上网时间有不同需求的人可以从中选择不同的收费方式，以达到省钱的目的. 通过分析变量间的关系，列出函数解析式，然后比较三个函数解析式或相应的图象，找出不同的上网时间范围内上网费最低的方案. 这是利用一次函数模型分析和解决实际问题的过程.

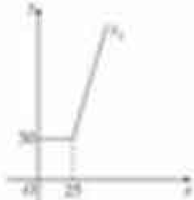


图 26.3-1

类似地，可以得出方式 B，C 的收费金额 y_2，y_3 关于上网时间 x 的函数解析式.

在图 26.3-1 中画出 y_2，y_3 的图象，结合函数图象与解析式，填空：

当上网时间________[1]时，选择方式 A 最省钱；

当上网时间________[2]时，选择方式 B 最省钱；

当上网时间________[3]时，选择方式 C 最省钱.

问题 2 怎样租车？

某学校计划在总费用 2 300 元的限额内，租用汽车送 234 名学生和 6 名教师集体外出活动，每辆汽车上至少要有 1 名教师.

现有甲、乙两种大客车，它们的载客量和租金如表 26-14 所示.

表 26-14

	甲种客车	乙种客车
载客量/（人/辆）	45	30
租金/（元/辆）	400	280

（1）共需租多少辆汽车？

（2）给出最节省费用的租车方案.

分析：（1）可以从乘车人数的角度考虑租多少辆汽车，要注意到以下要求：

①要保证 240 名师生都有车坐；

②要使每辆汽车上至少有 1 名教师.

根据①可知，汽车总数不能小于____[4]；根据②可知，汽车总数不能大于____[5]；综合起来可知汽车总数为____[6].

（2）租车费用与所租车的种类有关. 可以看出，当汽车总数 a 确定后，在

第二十六章　一次函数　83

填空答案：

[1] 不超过 $31\frac{2}{3}$ h.

[2] 超过 $31\frac{2}{3}$ h 而不超过 $73\frac{1}{3}$ h.

[3] 超过 $73\frac{1}{3}$ h.

[4] 6.

[5] 6.

[6] 6.

教科书对方案 A 作了较细致的讨论，而把其他方案的讨论及比较这些方案留给学生自行探究. 这样处理既有引导，又留有自主发挥的余地. 教学中对教科书这样的设计意图应予以关注.

3. 本节中的问题 2“怎样租车”选取了与学校生活有较密切联系的问题情境. 问题中没有直接给出不同方案让学生选择，而只给出乘车人数及要求与车辆类型及费用，这样陈述问题更接近于实际生活. 分析问题时要由题中的多项已知条件综合考虑，从而产生最佳乘车方案. 这就比问题 1 又提高了要求，它更能培养运用数学分析和解决问题的能力. 为降低难度，问题设了两问，回答第（1）问要确定租车的总数，这就为回答第（2）问时把租车费表示为一个可求值的函数作了准备. 回答第（2）问时要构造函数，还要确定自变量的取值范围，这需要综合使用已知各项条件，对学生具有一定的挑战性.

4. 把本节的实际问题中的数量关系用一次函

填空答案：

[1] $120x+1\ 680$.

[2] 4.

[3] 5.

[4] 4 或 5.

[5] 两种方案：

① 4 辆甲种客车，2 辆乙种客车；

② 5 辆甲种客车，1 辆乙种客车.

方案①费用少.

满足各项要求的前提下，尽可能少地租用甲种客车可以节省费用.

设租用 x 辆甲种客车，则租车费用 y（单位：元）是 x 的函数，即

$$y=400x+280(a-x).$$

将（1）中确定的 a 的值代入上式，化简这个函数，得

$$y=\underline{\qquad\qquad}^{[1]}.$$

为使 240 名师生有车坐，x 不能小于_____[2]；为使租车费用不超过 2 300 元，x 不能超过_____[3]. 综合起来可知 x 的取值为_____[4].

在考虑上述问题的基础上，你能得出几种不同的租车方案？为节省费用应选择其中哪个方案？[5]试说明理由.

归纳

解决含有多个变量的问题时，可以分析这些变量之间的关系，从中选取一个取值能影响其他变量的值的变量作为自变量，然后根据问题的条件寻求可以反映实际问题的函数，以此作为解决问题的数学模型.

实践活动：

结合日常生活中某个可以选择多种实施方案的实际问题，例如购物、配送、上网、通信等，利用数学知识进行分析，选择最佳方案，并写出有关活动的报告.

数来表示，是解决问题的关键，一次函数作为数学模型发挥了重要作用. 通过对这些问题的探究，必然使学生对数学建模的作用产生新的认识.

5. 本节的“归纳”栏目对如何建立实际问题的函数模型作了原则性的总结，教学中可以引导学生结合解决问题 1 和问题 2 的过程来体会“归纳”的含义.

6. 本节的最后对学生提出完成实践活动的要求，希望教学中能落实教科书在这里的设计意图. 为增强学生的数学建模能力，教师还可以结合实际情况选择更贴近学生生活的各种问题，引导学生用函数分析解决它们.

7. 本节内容适合学生在教师引导下更多地发挥主观能动性，积极探索和发现，即使遇到一定困难，也能逐步找到解决方案. 因此，教学中应注意采用适当的方式，避免与普通例题教学中以教师分析讲解为主的方式雷同.

数学活动

活动1

（1）根据下表的数据，在直角坐标系中画出世界人口增长曲线图.

（2）选择一个近似于人口增长曲线的一次函数[1]，写出它的解析式.

（3）按照这样的增长趋势[2]，估计 2020 年的世界人口数.

世界人口数统计表[3]

年份 x	1960	1974	1987	1999	2010
人口数 y/亿	30	40	50	60	69

活动2

水龙头关闭不严会造成滴水．为了调查漏水量与漏水时间关系，可进行以下的试验与研究：

（1）在滴水的水龙头下放置一个能显示水量的容器，每 5 min 记录一次容器中的水量，并填写下表：

时间 t/min	0	5	10	15	20	25	30
水量 w/ml							

（2）建立直角坐标系，以横轴表示时间 t，纵轴表示水量 w，描出以上述试验所得数据为坐标的各点，并观察它们的分布规律.

（3）试写出 w 关于 t 的函数解析式，并由它估算这种漏水状态下一天的漏水量.

第二十六章　一次函数　[illegible]

[1] 根据表中数据作出的曲线不是严格的直线型，可以选择一条与它最接近的直线作为替代它的近似曲线.

[2] 设想（2）中得到的一次函数也能反映未来时间内的人口增长规律.

[3] 从表中数据可发现，大约每过 13 年左右世界人口增加 10 亿．由此可建立模拟函数：

$$y=30+\frac{10}{13}(x-1\,960),$$

即 $y=\frac{10}{13}x-1\,478$（x 为年份，y 为人口数）．由它估计 2020 年世界人口数约为 76 亿.

1．“活动 1”要求根据表格中的数据，画出人口增长曲线图．这里的自变量应选择时间，人口数作为时间的函数．在直角坐标系中标出表中 5 组数据对应的点并依次连接它们，就得到人口增长曲线，这条曲线近似于直线型，可以用待定系数法得出一次函数，作为表示时间与人口数之间对应关系的近似函数．利用近似函数，可以对表中所列时间之后的年份预测人口数．由于一次函数仅是近似的经验型公式，所得的解析式并无唯一的标准答案，相应的预测结果也有差别，但是它们在数值上应接近.

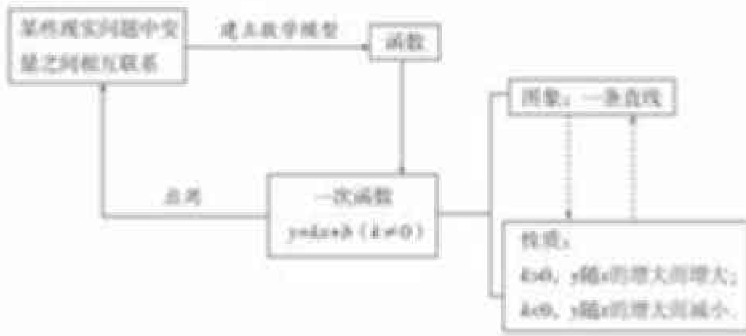
2．“活动 2”要求通过小试验收集数据，然后利用图象描述数据，从数据中发现两个变量之间的函数关系，并利用它进行计算推断．与“活动 1”相比，“活动 2”多了收集数据的环节．通过“活动 2”可以增加学生的节水意识.

[1] 这幅框图表示了本章主要内容之间的联系，突出了函数是现实世界的数学模型，一次函数的图象与性质互相关联.

[2] 由于函数的内容有一定抽象性，因此复习中要结合具体例子加深对抽象内容的认识.

小　结

一、本章知识结构图[1]



二、回顾与思考[2]

客观世界中变量大量存在. 本章结合一些实际问题，分析了一个变化过程中两个变量的一种对应关系，即每当其中某个变量取一个定值时，另一变量有唯一确定的值与其对应，由此初步认识了函数及其表示法.

一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）是一种最基本的函数，它刻画了一类常见的变化规律. 正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）是一次函数的特例. 一次函数的图象是一条直线，利用图象可以直观地分析函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的增减性. 观察发现，当 $k>0$（$k<0$）时，图象从左向右上升（下降），这表明，函数 y 的值随自变量 x 的增大而增大（减小）. 利用图象研究函数的方法体现了数形结合的思想.

利用函数解决问题时，关键在于分析问题中变量之间的对应关系，并考虑如何表示这种关系，从而将实际问题转化为函数模型. 如果判断出某问题的变化规律可用一次函数模型刻画，那么可根据已知条件用待定系数法得出函数解析式.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 举例说明两个变量 x 和 y 满足什么条件时，y 是 x 的函数.
2. 函数有哪些表示法？它们各有什么优点？请举例说明.
3. 一次函数 $y=kx+b$ 的图象是什么图形？当 $b=0$ 时，函数 $y=kx+b$ 的

86　第二十六章　一次函数

1. 复习课可以引导学生先回忆本章的主要内容及学习的先后顺序，体会本章知识结构图，加深学生对各部分内容之间的关系的认识，使知识结构图更好地发挥总结作用.

2. “回顾与思考”概括了本章的核心内容. 函数是研究变量之间关系的重要数学模型，函数概念中隐含着变化与对应的思想，利用函数观点可以从运动变化的角度加深对数学问题的理解. 在本章复习中，不仅要关注基础知识、基本技能、基本能力，还应注意帮助学生加深对基本数学思想方法的认识，积累基本活动经验，培养学生对运动变化和对应关系的把握能力，进一步加强数形结合地分析问题和解决问题的能力.

3. 一次函数的定义、图象和性质是本章的主要基础知识，会根据问题的条件写出一次函数的解析式，会画一次函数的图象和了解一次函数的性质，是学习本章后应具备的基本技能. 复习中应使以上“双基”得到落实. 本章从函数的角


图象经过哪个定点？常数 k 对函数 $y=kx+b$ 的图象有什么影响？由此能说明 y 与 x 之间的什么变化规律？

4. 由一条不平行于坐标轴的已知直线，能求出它对应的一次函数的解析式吗？如果能，应怎样求？由此体会由形到数的转化.

5. 举例说明如何利用函数解决实际问题.

复习题 26

复习巩固

1. 小亮现已存款 100 元，为赞助"希望工程"，他计划今后三年每月存款 10 元，存款总金额 y（单位：元）将随时间 x（单位：月）的变化而改变. 指出其中的常量与变量，自变量与函数，并写出函数解析式.
2. 判断下列各点是否在直线 $y=2x+6$ 上. 这条直线与坐标轴交于何处？
$(-5,-4)$，$(-7,20)$，
$\left(-\frac{7}{2},1\right)$，$\left(\frac{2}{3},7\frac{1}{3}\right)$.
3. 填空：
(1) 直线 $y=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x$ 经过第______象限，y 随 x 的增大而______；
(2) 直线 $y=3x-2$ 经过第______象限，y 随 x 的增大而______.
4. 根据下列条件分别确定函数 $y=kx+b$ 的解析式：
(1) y 与 x 成正比例，当 $x=5$ 时，$y=6$；
(2) 直线 $y=kx+b$ 经过点 $(3,6)$ 与点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.
5. 试根据函数 $y=3x-15$ 的性质或图象，确定 x 取何值时：
(1) $y>0$；(2) $y<0$.

综合运用

6. 在某火车站托运物品时，不超过 1 kg 的物品需付 2 元，以后每增加 1 kg（不足

第二十六章　一次函数　87

度对前面的相关内容进行了再认识，这对从整体上认识所学数学知识的联系很有益.

复习题 26

1. 复习题 26 中"复习巩固"的题目有 5 道. 这些题目都是关于基础知识和基本技能的内容，应达到能较熟练地解它们的程度.

2. 复习题 26 中"综合运用"的题目有 7 道. 这些题目从不同角度结合多种问题情境来体现函数的应用. 第 6 题为简单起见，只考虑物品质量取整数值的情形. 第 7 题中对自变量的大小有两方面的约束，解题时容易忽略它的上限. 第 8 题图象是由三条线段组成的折线. 线段倾斜程度的不同，表示水面升高的速度不同. 容器各段的半径越大时，这段容器中水面的升速越小. 解题时应结合图象所表示的意义和物理现象中的规律进行考虑. 第 9 和 10 题都是与几何图形有关的问题，解题时要注意其中自变量的取值范围. 第 11 题

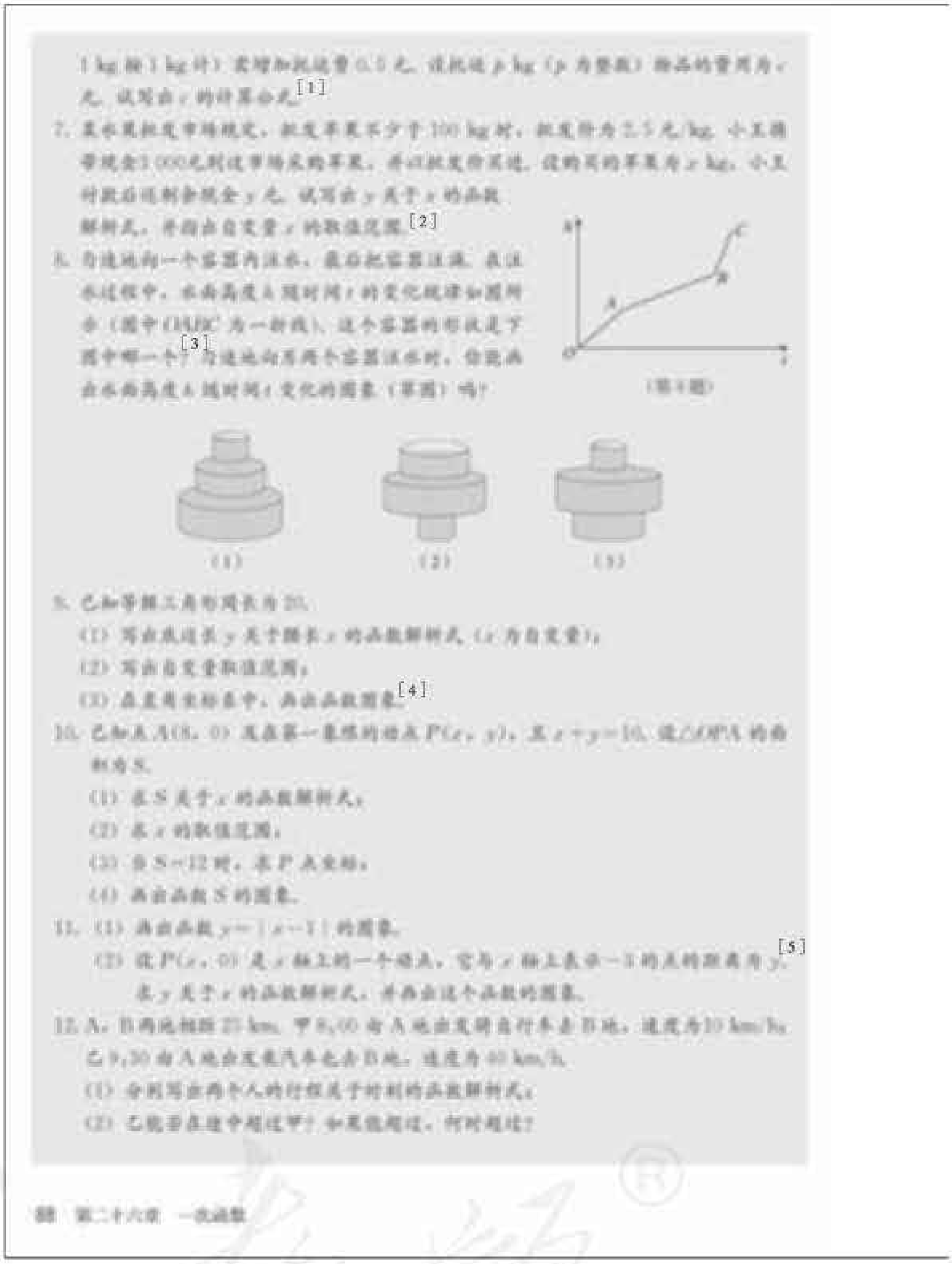
[1] p 为整数，即 $p=1$，2，3，…，不需考虑 p 不是整数的情形.

[2] 注意现金的数量与 x 的取值范围有关.

[3] 选择答案时要根据容器由下到上半径的变化情形，考虑水面上升速度变化的情形，再联系图象（折线）中线段倾斜程度的变化情形进行思考.

[4] 画图象时要对应自变量的取值范围.

[5] 动点 $P(x,0)$ 与数轴上表示定值 a 的定点 Q 的距离 $PQ=|x-a|$.



1 kg 按 1 kg 计）要增加邮费 0.5 元．设邮寄 p kg（p 为整数）物品的费用为 c 元．试写出 c 的计算公式.[1]

7. 某水果批发市场规定，批发苹果不少于 100 kg 时，批发价为 2.5 元/kg．小王携带现金 3 000 元到这市场采购苹果，并以批发价买进．设购买的苹果为 x kg，小王付款后还剩余现金 y 元．试写出 y 关于 x 的函数解析式，并指出自变量 x 的取值范围.[2]

8. 匀速地向一个容器内注水，最后把容器注满．在注水过程中，水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图所示（图中 $OABC$ 为一折线），这个容器的形状是下图中哪一个？[3] 匀速地向另两个容器注水时，你能画出水面高度 h 随时间 t 变化的图象（草图）吗？

（第 8 题）

9. 已知等腰三角形周长为 20.

（1）写出底边长 y 关于腰长 x 的函数解析式（x 为自变量）；

（2）写出自变量取值范围；

（3）在直角坐标系中，画出函数图象.[4]

10. 已知点 $A(8,0)$ 及在第一象限的动点 $P(x,y)$，且 $x+y=10$，设△OPA 的面积为 S.

（1）求 S 关于 x 的函数解析式；

（2）求 x 的取值范围；

（3）当 $S=12$ 时，求 P 点坐标；

（4）画出函数 S 的图象.

11. （1）画出函数 $y=|x-1|$ 的图象.

（2）设 $P(x,0)$ 是 x 轴上的一个动点，它与 x 轴上表示 -3 的点的距离为 y.[5] 求 y 关于 x 的函数解析式，并画出这个函数的图象.

12. A，B 两地相距 25 km．甲 8:00 由 A 地出发骑自行车去 B 地，速度为 10 km/h；乙 9:30 由 A 地出发乘汽车也去 B 地，速度为 40 km/h.

（1）分别写出两个人的行程关于时刻的函数解析式；

（2）乙能否在途中超过甲？如果能超过，何时超过？

第二十六章　一次函数

中的函数解析式带有绝对值符号，其实它是由两个一次函数组成的分段函数，对于分段点的确定涉及对绝对值意义的理解. 第 12 题是行程问题，由于是以平均速度考虑问题，因此两人的运动形式都按匀速运动考虑. 注意本题中要求以“时刻”为自变量，所以数学模型是一次函数. 对第（2）问的解答，可以借助函数图象，也可以直接从函数值角度思考.

3. 复习题 26 中“拓广探索”的题目有 3 道. 其中解第 13 题的关键在于正确理解函数图象. 第 14 题中的 a，b 是两个未知数，需要根据 100 s，200 s和300 s时的情境列方程组来确定它们的值，进而求出“全程”. 第 15 题是选择方案问题，这是一个简单线性规划问题. 本题与第 26.3 节的问题有共同之处. 根据题中关于存量和运量的已知条件列出表示总费用的函数解析式，再根据题中关于运价的已知条件考虑自变量取何值时总运费最少，便可得出最佳方案.

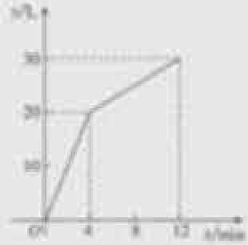
拓广探索

13. 一个有进水管与出水管的容器，从某时刻开始4 min内只进水不出水，在随后的8 min内既进水又出水，每分的进水量和出水量是两个常数[1]. 容器内的水量 y（单位：L）与时间 x（单位：min）之间的关系如图所示.

(1) 当 $0 \leq x \leq 4$ 时，求 y 关于 x 的函数解析式.

(2) 当 $4 < x \leq 12$ 时，求 y 关于 x 的函数解析式.

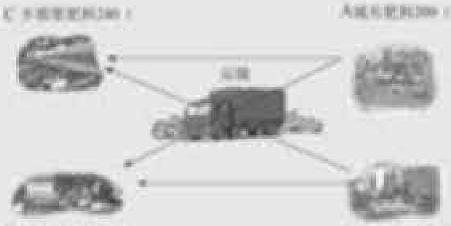
(3) 每分进水、出水各多少升？



（第13题）

14. 一次越野赛跑中，当小明跑了1 600 m时，小刚跑了1 450 m. 此后两人分别以 a m/s和 b m/s匀速跑. 又过100 s时小刚追上小明，200 s时小刚到达终点，300 s时小明到达终点. 这次越野赛跑的全程为多少米？

15. A城有肥料200 t，B城有肥料300 t，现要把这些肥料全部运往C，D两乡. 从A城往C，D两乡运肥料的费用分别为20元/t和25元/t；从B城往C，D两乡运肥料的费用分别为15元/t和24元/t，现C乡需要肥料240 t，D乡需要肥料260 t. 怎样调运可使总运费最少？



（第15题）

第二十六章　一次函数

[1] 前 4 min 和后 8 min每分进水量相同，前 4 min 内不出水，后 8 min 每分出水量相同.

Ⅲ 习题解答

习题 26.1

1. 常量 0.2，变量 x，y，自变量 x，函数 y，$y=0.2x$.

2. 常量 5，变量 h，S，自变量 $h(h>0)$，函数 S，$S=\frac{5h}{2}$.

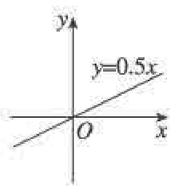
3. 7，11，-3，5，207，-5.4，y 是 x 的函数，符合函数定义.

4. y 是 x 的函数，符合函数定义. 例子略.

5. （1）$y=3x-5$，x 可为任意实数；$y=\frac{x-2}{x-1}$，$x\neq1$；$y=\sqrt{x-1}$，$x\geqslant1$.

（2）$y=3x-5$，$x=5$，$y=10$；$y=\frac{x-2}{x-1}$，$x=5$，$y=\frac{3}{4}$；$y=\sqrt{x-1}$，$x=5$，$y=2$.

6. 自变量 x 的取值范围是全体实数.



（第 6 题）

7. 图（1）（2）（3）中 y 是 x 的函数，图（4）中 y 不是 x 的函数.

8. 图（2）.

9. （1）2.5 km，15 min；

（2）1 km；

（3）20 min；

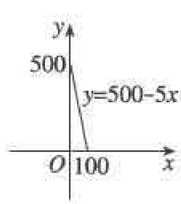
（4）$\frac{3}{70}$ km/min.

10. $y=100+0.06x$，100.24 元.

11. $y=x^2+6x$，自变量 x，函数 y，

x	1	2	3	4
y	7	16	27	40

12. $y=500-5x$（$0\leqslant x\leqslant100$）.



（第 12 题）

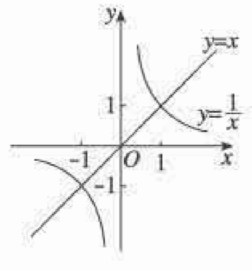
13. （1）300 km；

（2）甲先出发，乙先到达；

（3）甲 60 km/h，乙 100 km/h；

（4）6:00～7:30 甲在乙前，7:30 乙追上甲，7:30～9:00 乙在甲前.

14. （1）$-1<x<0$ 或 $x>1$；　（2）$x<-1$ 或 $0<x<1$.



（第 14 题）

15. 五边形有 5 条对角线，六边形有 9 条对角线，n 边形有$\frac{n(n-3)}{2}$条对角线，多边形对角线的条数是边数的函数.

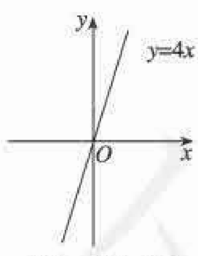
习题 26.2

1. $s=90t$（$t\geqslant 0$）. 图象略.

2. 二、四，0，-5，减小.

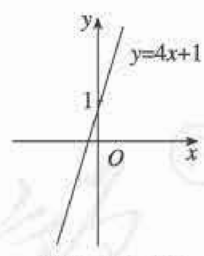
3. $y=12+2x$（$0\leqslant x\leqslant m$，m 是弹簧能承受物体的最大质量）.

4. （1）



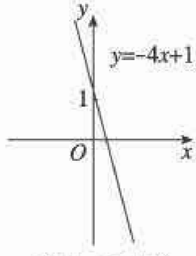
（第 4（1）题）

（2）



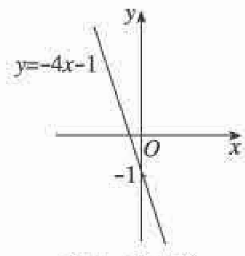
（第 4（2）题）

（3）



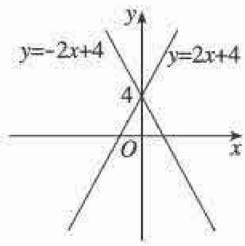
（第 4（3）题）

（4）



（第 4（4）题）

5.



（第 5 题）

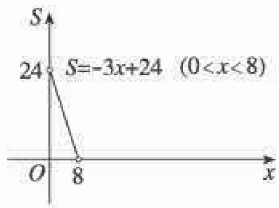
$y=2x+4$ 随 x 增大而增大，$y=-2x+4$ 随 x 增大而减小.

6. $k=\dfrac{3}{2}$，$b=1$.

7. $y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{33}{5}$.

8. $x=-\dfrac{32}{5}$，$y=-15$.

9. (1) $S=-3x+24$ $(0<x<8)$；



（第 9 题）

(2) 9；

(3) 不能大于 24，因为 $0<x<8$，所以 $0<S=-3x+24<24$.

10. 平行.

11. $y=\begin{cases}2.4, & 0<x\leqslant 3,\\ x-0.6, & x>3.\end{cases}$ 由函数解析式得 $x=10.6$，由不足 1 min 的通话时间要按 1 min 计算可知，有 10 元钱最多通话 10 min.

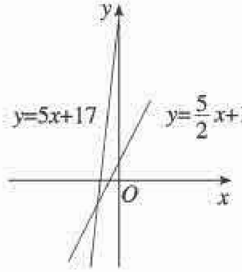
12. (1) 第一、二、三象限；

(2) 第二、三、四象限；

(3) 第一、二、三象限；

(4) 第一、二、四象限.

13.



（第 13 题）

当 $x<-\frac{32}{5}$ 时，$y=\frac{5}{2}x+1>y=5x+17$；

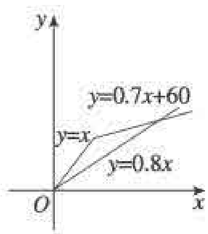
当 $x=-\frac{32}{5}$ 时，$y=\frac{5}{2}x+1=y=5x+17$；

当 $x>-\frac{32}{5}$ 时，$y=\frac{5}{2}x+1<y=5x+17$.

14. (1) 12:30～13:30，45 km；
   (2) 10:30，30 min，30 km；
   (3) 15 km；
   (4) 20 km/h，7.5 km/h；
   (5) 30 km/h；
   (6) 18 km，14:30.

15. (1) 甲商场 $y=0.8x$ ($x\geqslant 0$)，乙商场 $y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 200,\\ 0.7x+60, & x>200.\end{cases}$

   (2)



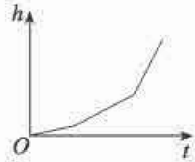
（第 15 题）

   (3) 当购物金额按原价小于 600 元时，在甲商场购物省钱；当购物金额按原价大于 600 元时，在乙商场购物省钱；当购物金额按原价等于 600 元时，在两商场购物花钱一样多.

复习题 26

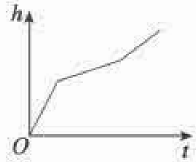
1. 常量 100，10，变量 x，y，自变量 x，函数 y，$y=100+10x$ ($0\leqslant x\leqslant 36$，x 为整数).
2. $(-5,-4)$ 和 $\left(\frac{2}{3},7\frac{1}{3}\right)$ 在直线 $y=2x+6$ 上，这条直线与坐标轴交于点 $(0,6)$，$(-3,0)$.
3. (1) 二、一、四，减小；
   (2) 三、四、一，增大.
4. (1) $y=\frac{6}{5}x$；(2) $y=\frac{13}{5}x-\frac{9}{5}$.
5. (1) $x>5$；(2) $x<5$.
6. $c=0.5p+1.5$ (p 为正整数).
7. $y=3\,000-2.5x$ ($100\leqslant x\leqslant 1\,200$).
8. 图 (3).

(1)



（第 8（1）题）

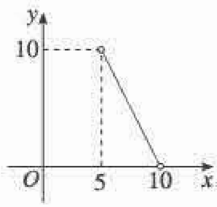
(2)



（第 8（2）题）

9. （1） $y=20-2x$ （$5<x<10$）；（2） $5<x<10$；

（3）



（第 9 题）

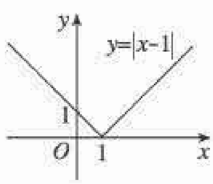
10. （1） $S=-4x+40$；

（2） $0<x<10$；

（3） $P(7, 3)$；

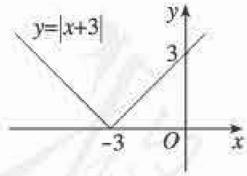
（4） 图象略.

11. （1）



（第 11（1）题）

（2） $y=|x+3|$.



（第 11（2）题）

12. （1） 甲：$y=10x-80$，$8\leqslant x\leqslant 10.5$；乙：$y=40x-380$，$9.5\leqslant x\leqslant 10.125$.

（2） 10 时以后乙超过甲.

13. （1） $y=5x(0\leqslant x\leqslant 4)$；（2） $y=\frac{5}{4}x+15(4<x\leqslant 12)$；

（3） 进水 5 L/min，出水 3.75 L/min.

14. 2 050 m.

15. 最佳方案：从 A 往 D 运 200 t，从 B 往 C 运 240 t，从 B 往 D 运 60 t.

Ⅳ 教学设计案例

26.1 函数（第2课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

函数的概念.

2. 内容解析

函数是描述运动变化规律的重要数学模型，它刻画了变化过程中变量之间的对应关系. 函数概念是中学数学的核心概念，是继续学习一次函数、二次函数、反比例函数等内容的基础. 函数与方程、不等式等知识有密切的联系，函数的表示法中体现了数形结合的思想方法.

本章内容包括函数的概念和表示法、正比例函数和一次函数. 一次函数是函数值变化量与自变量变化量的比值固定不变的简单函数模型. 研究一次函数可以获得初中函数研究的一般步骤（下定义——画图象——观察图象——概括性质）和基本思想（模型思想、数形结合的思想、运动变化和对应的思想），发展数学观察、表征、抽象概括和推理能力. 函数概念学习过程中蕴含的核心数学认知活动是数学抽象概括活动.

变量 y 要成为变量 x 的函数，需满足两个条件：（1）在同一变化过程中，有两个变量 x 和 y；（2）对于变量 x 的每一个确定值，变量 y 都有唯一确定的值与之对应. “单值对应”是函数概念的关键词，是函数概念的核心所在.

综上所述，本节课教学的重点是：概括并理解函数概念中的单值对应关系.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）了解函数的概念.

（2）能结合具体实例概括函数的概念.

（3）在函数概念的形成过程中体会运动变化与对应的思想.

2. 目标解析

目标（1）的具体要求是：能在具体实例（包括解析式、表格、图象）中辨别变量之间的关系是否是函数关系，能举出函数的实例.

目标（2）的具体要求是：能观察运动变化的具体实例，分析变量之间的对应关系并发现其单值对应的特征，通过归纳实例中变量之间的单值对应特征概括函数的概念.

目标（3）的具体要求是：在函数概念的形成过程中，初步体会变量之间的联系，感受变化与对应的思想.

三、教学问题诊断分析

学生在小学阶段学习过正比例关系和反比例关系，知道具有正（或反）比例关系的两个量中，一个量随着另一个量的增大而增大（或减小）；在字母表示数中，接触过当字母取值变化时，代数式的值随之变化. 学生在生活中也具有对两个量之间存在依存关系的体验，如气温随时间的变化而变化，单价固定时总价随着数量的变化而变化. 尽管这些学习经验和生活经验可以帮助学生理解函数的含义，但初次接触函数概念，学习中还是会遇到较大困难. 其中主要困难在于难以概括出“一个变量的值的确定导致另一个变量取值的唯一确定”这一函数概念的核心，当一个变量的值取定时，另一个变量怎样才算“唯一确定”？学生容易认为，函数关系中的“唯一确定”仅指通过公式求出的唯一的值，对不能用公式求出值的单值对应关系难以理解. 因此，本节的难点是对函数概念中的“单值对应”含义的理解.

四、教学过程设计

1. 创设情境，提出问题

引言

通过前面的学习，我们体会到万物皆变，在运动变化过程中往往蕴含着量的变化，研究变量之间的关系是把握变化规律的关键.

设计意图：通过引言教学，复习上一节课所学内容，提出本节课需要研究的问题，引起合理的选择性注意，起先行组织者作用.

2. 合作探究，形成概念

问题 1 下面各题的变化过程中，各有几个变量？其中一个变量的变化是怎样影响另一个量的变化的？

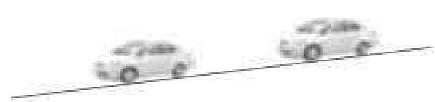


图 1

(1) 如图 1，汽车以 60 km/h 的速度匀速行驶，行驶的时间为 t h，行驶的里程为 s km.

(2) 每张电影票的售价为 10 元，设某场电影售出 x 张票，票房收入为 y 元.

(3) 如图 2，圆形水波慢慢地扩大，在这一过程中，圆的半径为 r，面积为 S.

(4) 如图 3，用 10 m 长的绳子围一个矩形，矩形的一边长为 x，它的邻边长为 y.

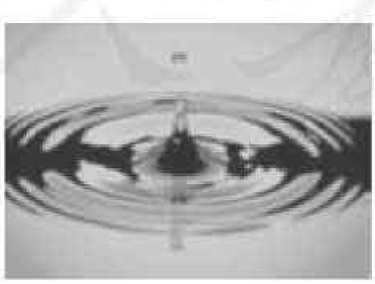


图 2

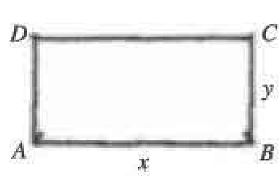


图 3

师生活动：教师与学生一起分析变化过程（1）中变量之间的关系. 在变化过程（1）的分析中，首先引导学生得出有两个变量 t，s，然后是 s 随着 t 的变化而变化.

设计意图：初步概括变量的联动性.

追问：s 是怎样随着 t 的具体变化而变化呢？能用数值加以说明吗？

师生活动：教师引导学生取定 t 的一些值，计算 s 的对应值并列表：

行驶时间 t/h	1	2	3	4	5
行驶里程 s/（km/h）	60	120	180	240	300

当 t 的值取定后，s 的值有一个且只有一个. 也就是说，当 t 取定一个值时，s 的值由 t 的值完全确定，而且唯一确定.

师生活动：引导学生对变化过程（2）（3）（4）进行类似于变化过程（1）的变量关系分析，并得到如下结论：

变化过程（1）有两个变量 t，s.	当 t 取定一个值时，s 有唯一确定的值与之对应.
变化过程（2）有两个变量 x，y.	当 x 取定一个值时，y 有唯一确定的值与之对应.
变化过程（3）有两个变量 r，S.	当 r 取定一个值时，S 有唯一确定的值与之对应.
变化过程（4）有两个变量 x，y.	当 x 取定一个值时，y 有唯一确定的值与之对应.

设计意图：通过师生共同讨论，分析问题 1（1）中一个变量的变化对另一个变量变化的影响. 在此基础上，学生独立进行问题 1(2)(3)(4) 变量之间对应关系的分析，为发现这些对应关系的共同特征，实现函数概念的第一次概括提供归纳的样例.

问题 2 能用自己的语言说说这些问题中变量之间关系的共同特点吗？试一试！

师生活动：教师引导学生归纳，变化过程中有两个变量，当一个变量取定一个值时，另一个变量有唯一确定的值与之对应. 如由 $s=60t$，当 $t=1$，2，3 时能分别求出唯一的 s 的值.

设计意图 对能用解析式表示的变量之间的对应关系的共同特征进行初步概括.

问题 3 下面是我国体育代表团在第 23～30 届夏季奥运会上获得的金牌数统计表. 把届数和金牌数分别记作两个变量 x 和 y，对于表中的每一个确定的届数 x，都对应着一个确定的金牌数 y 吗？

届数 x	23	24	25	26	27	28	29	30
金牌数 y	15	5	16	16	28	32	51	38

师生活动：引导学生说出届数与金牌数的对应关系，体会用表格也可以由一个变量的值确定出另一个相关变量的值.

设计意图：让学生感受到当一个变量取定一个值时，可以通过查表唯一确定出另一个变量的值，突出函数的本质属性，剥离"用公式表示变量关系"这一非本质属性.

问题 4 图 4 是北京某天的气温变化图，你能说出 9:00，10:00，13:00 的气温吗？

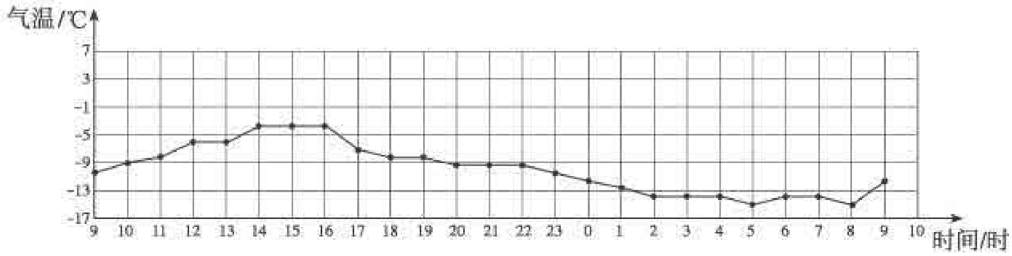


图 4

师生活动：教师在网上打开天气预报页面，引导学生阅读气温变化图，体会由气温图可以根据时间确定气温数值，体会这也是变量之间的单值对应关系.

追问：一天中，当时间确定时，气温的数值也是唯一确定的吗？

设计意图：让学生体会到，当一个变量取定一个值时，通过图象也可以唯一确定另一个变量的值，突出函数的本质属性，剥离“用公式表示变量关系”这一非本质属性.

问题 5 上述实际问题中两个变量之间的关系，当一个变量取定一个值时，既有通过公式确定另一个变量唯一的值，又有通过对应表格确定另一变量唯一的值，还有通过图象确定另一个变量唯一的值. 综合这些现象，你能归纳出上面实例中变量之间关系的共同特点吗？请大家相互讨论.

师生活动：学生分组讨论，归纳出如下结论：在一个变化过程中，有两个变量，当一个变量取定一个值时，另一个变量有唯一确定的值与之对应. 教师与学生一起概括出函数概念：一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 和 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是自变量，y 是 x 的函数.

追问：请结合问题 1（2）说说函数定义中“变化”“对应”“唯一确定”的含义.

师生活动：学生交流，教师引导学生进行点评，并顺势带出函数值的概念：设 y 是 x 的函数，如果当 $x=a$ 时，对应的 $y=b$，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的函数值.

设计意图：在前面分步概括的基础上，概括出三类不同表现形式的变量对应关系的共同特征，形成函数概念.

3. **初步辨析，了解概念**

练习 1 下表是我国大陆地区若干年份的人口统计表，表中的人口数 y 是年份 x 的函数吗？

年份 x	人口数 y/亿
1984	10.34
1989	11.06
1994	11.76
1999	12.52
2010	13.71

练习 2 下列问题中哪些是自变量？哪些是自变量的函数？试写出用自变量表示函数的式子：

（1）每分向一水池注水 0.1 m^3，注水量 y（单位：m^3）随注水时间 x（单位：min）的变化而

变化.

(2) 改变正方形的边长 x，正方形的面积 S 随之变化.

(3) 某汽车油箱中有 40 L 油，它在高速公路上行驶，耗油量为 0.07 L/km，汽车行驶的里程为 x km，油箱中剩下的汽油量为 y L.

设计意图：形成函数概念后，及时进行概念辨析.

4. 综合应用，深化理解

练习 3 P 是数轴上的一个动点，它所表示的实数是 m，P 点到坐标原点的距离为 s.

(1) s 是 m 的函数吗？为什么？

(2) m 是 s 的函数吗？为什么？

练习 4 图 5 是一只蚂蚁在墙上爬行的路线图，请问：

(1) 蚂蚁离地面的高度 h 是离起点的水平距离 t 的函数吗？为什么？

(2) 反过来，t 是 h 的函数吗？为什么？

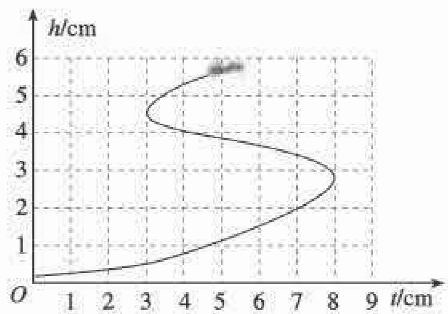


图 5

练习 5 请举出一个函数的实例.

师生活动：学生独立完成，教师个别指导，并引导学生进行自我评价和相互评价.

设计意图：通过正反两方面的例子，进行函数概念的进一步辨析，深化对函数概念的理解.

5. 小结

参照下面问题，教师引导学生回顾本节课所学的主要内容，通过相互交流分享观点：

(1) 请举例说明什么是函数.

(2) 请结合实例说说你对函数定义中“对于变量 x 每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应”的认识.

设计意图：问题 (1) 引导学生回顾函数概念，问题 (2) 引导学生再次理解函数概念中的单值对应关系及确定对应关系的方法（式子、表格、图象）.

6. 布置作业

教科书习题 26.1 第 1～4 题；举一个函数的实例.

五、目标检测设计

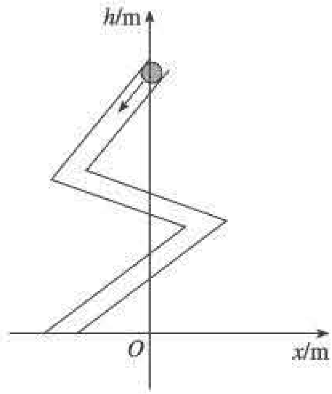
1. 判断下列哪些变化过程中的变量之间关系是函数关系. 如果是，指出其中的自变量和函数.

(1) 某超市中鸡蛋价格是 9 元/kg，鸡蛋的销售收入 y（单位：元）随着销售量 x（单位：kg）

的变化而变化；

(2) 把边长为 10 cm 的正方形纸板的四角都截去一个边长为 x cm 的小正方形，做成一个无盖的方盒，该方盒的容积 V（单位：cm^3）随 x（单位：cm）的变化而变化；

(3) 如图，小球沿着弯管往下滚，小球所在位置的横坐标为 x（单位：m），纵坐标为 h（单位：m），h 随着 x 的变化而变化.



第 1 (3) 题

设计意图：考查函数的概念.

2. 用关系式表示题 1 (1) (2) 中的函数，并求 1 (1) (2) 中当自变量的值分别为 1，2，3 时的函数值.

设计意图：考查对函数值意义的了解和求函数值.

3. 请举一个函数的实例.

设计意图：考查函数的概念.

26.2 一次函数（第 4 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

一次函数的图象及性质.

2. 内容解析

用描点法画函数图象，通过观察图象研究函数的性质，这是直观地认识函数性质的基本方法. 这一基本方法与针对函数解析式的代数及微分分析方法相结合，构成了研究函数的基本方法. 增减性是函数的核心性质，函数的其他性质，如最大（小）值、周期性、变化率等，都是基于这一核心性质的拓展.

描点法是画陌生函数图象的通法. 两点法是画一次函数图象的特殊方法，是在确认一次函数图象为一条直线后，根据两点确定一条直线而得到的简便画图方法.

对一次函数的图象与性质的认识，需要经过两次概括. 首先对一个具体的一次函数的性质概括，这需要观察当自变量的值增大时，函数值是增大还是减小. 自变量增大意味着图象上动点的位置从左向右移动，函数值的增大（或减小）就是动点上升（或下降）. 其次是概括一次函数 $y=kx+b$ 的增减性与系数 k 的符号之间的关系，这需要对 k 的不同符号对增减性的影响情况进行归纳.

正比例函数是特殊的一次函数，一次函数图象可以看作由正比例函数图象经过平移得到. 这样，一次函数的增减性就与相对应的正比例函数相同.

一次函数性质的核心是其增减性与系数 k 的符号之间的关系. 在一次函数的图象及其性质研究中，蕴含了数形结合的思想、分类讨论的思想和观察、表征、类比、归纳等数学认知活动.

综上所述，本节课的教学重点是：用数形结合的思想方法，通过画图观察，概括一次函数的性质（函数的增减性与系数 k 的符号之间的关系）.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 会画一次函数的图象.

(2) 能从图象角度理解正比例函数与一次函数的关系.

(3) 能根据一次函数的图象和表达式 $y=kx+b$ ($k\neq0$)，理解当 $k>0$ 和 $k<0$ 时图象的变化情况，从而理解一次函数的增减性.

(4) 通过观察图象、类比正比例函数性质概括一次函数性质的活动，发展数学感知、数学表征和数学概括的能力，体会数形结合的思想，发展几何直观.

2. 目标解析

(1) 面对一个陌生的初等函数，观察和归纳是直观认识函数性质的基本方法. 在观察了用描点法画出的一次函数图象后发现它是一条直线，再根据两点确定一条直线获得一次函数图象的两点画图法. 两点法画一次函数图象是适合于一次函数的简便画法. 要求学生能熟练应用两点法画出一个具体的一次函数图象.

(2) 理解正比例函数与对应的一次函数的关系，则要求知道一次函数 $y=kx+b$ 的图象可由正比例函数 $y=kx$ 的图象平移得到，能由正比例函数的图象和性质推断出一次函数的图象和性质.

(3) 结合图象理解一次函数图象当 $k>0$ 和 $k<0$ 时的变化情况，具体表现为：①针对具体的一次函数，能从图象上观察出增减性；②知道 k 的符号变化是导致函数图象（直线）方向变化，进而造成增减性变化的唯一因素；③能根据 $k>0$ 和 $k<0$ 分别画出函数图象并确定函数的增减性.

(4) 体会数形结合思想，要求学生感受到“以图表示数，以数解释形”，并在这种用图形表示数学对象的过程中发展数学直观；发展数学感知能力，要求学生能通过图象的直观观察发现其特征；发展数学表征能力，要求学生会用图象描述变量之间的对应关系，用变量的变化规律解释图形特征；发展数学概括能力，要求学生能在教师的引导下自己概括出一次函数的性质.

三、教学问题诊断分析

学生通过学习函数的概念和表示法，初步体会了函数的研究方法；通过学习正比例函数，获得了对一类具体函数的数形结合的探究经验. 一次函数的表达式比正比例函数多了一个常数 b，所以函数图象的位置受到 k，b 两个常数的共同影响，但是函数的增减性仍然只受系数 k 的影响. 在具体的学习过程中，如果学生没有经历画图、观察、概括的过程，可能只是记住结论；学生在探究性质时，会跟着老师画图、观察、概括，但在理解、记忆和应用性质时，往往又撇开了图象；学生在观察图象时，往往没有把图象特征通过坐标的意义转化为函数性质，只停留在语义记忆层次上.

基于以上分析，本节课的难点是：以坐标为中介，把函数图象特征解释成变量的对应关系和变化规律.

四、教学支持条件分析

观察从直线 $y=kx$ 到 $y=kx+b$ 的平移变化、y 随 x 的变化、k 的符号变化导致函数增减性的

变化时，需要在学生独立画图象、观察图象的基础上，用电脑动画充分展示其运动变化过程，这便于学生理解和记忆.

五、教学过程设计

1. 回顾旧知，提出问题

问题 1 前面，我们初步学习了一次函数，你能写出两个具体的一次函数解析式吗？什么叫一次函数？

师生活动：学生随便写出两个一次函数解析式，如 $y=2x-3$，$y=-3x+1$ 等.

设计意图：回顾一次函数概念. 开放性地先让学生写几个简单的一次函数解析式，既是为了帮助学生回顾一次函数的概念，也是为了后面研究函数性质提供画图象的具体函数（最好与教材中的函数不同）. 这样可以避免出现学生只看教材依样画葫芦的情况，保证学生用描点法画图象的独立性.

问题 2 前面我们还学习了正比例函数，能说说正比例函数 $y=kx$ 的性质吗？是怎样获得这些性质的？

师生活动：教师引导学生说出正比例函数的性质及其研究步骤：画图象—观察图象—解释变量（坐标）意义.

设计意图：回顾正比例函数性质及其研究方法，为在研究一次函数图象和性质中进行类比提供参照对象.

问题 3 针对函数 $y=kx+b$，大家想研究什么？应该怎样研究？

师生活动：教师引导学生自然合理地提出要研究的问题——研究函数的增减性，研究步骤：画图象—观察图象—解释变量（坐标）意义.

设计意图：通过回顾和比较正比例函数的性质及其研究过程，引导学生自然合理地提出一次函数的研究任务和研究方法.

2. 合作交流，探究性质

问题 4 让我们从具体一次函数 $y=2x-3$ 的性质研究开始，先要画图象，怎样画？

师生活动：在学生说出画图象的步骤（列表、描点、连线）后，学生独立在工作单上画图（图 1）.

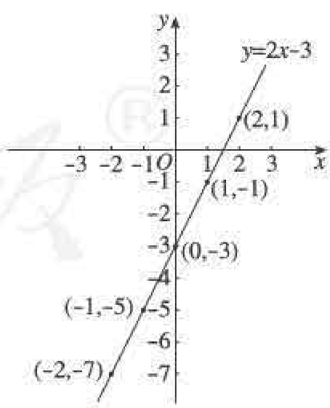


图 1

设计意图：根据研究步骤，引导学生先用描点法画一次函数图象.

追问 1：看一看，画出的图象是什么？

追问 2：为什么说画出的图象是一条直线？能说明理由吗？

师生活动：类比正比例函数 $y=2x$ 的图象，直观发现函数 $y=2x-3$ 的图象是平行于直线 $y=2x$ 的一条直线. 再比较一次函数 $y=2x-3$ 与 $y=2x$ 的解析式，发现当 x 分别取 -2，-1，0，1，2，… 时，一次函数 $y=2x-3$ 的函数值都比正比例函数的函数值对应地小 3，这个规律对自变量的任何取值都成立. 这反映在图象上是直线 $y=2x$ 向下平移 3 个单位长度就得到函数 $y=2x-3$ 的图象，

因此，函数 $y=2x-3$ 的图象（图 2）确实是一条直线.

设计意图：让学生先按照研究正比例函数的方法用描点法画 $y=2x-3$图象，直观观察、发现图象可能是直线. 通过回顾正比例函数图象也是直线，让学生自然、合理地想到需要与正比例函数 $y=2x$的图象进行比较. 从表达式和图象两方面分析（结合图形平移相关知识）两个图象之间的关系，然后通过动画展示验证，从而确认函数$y=2x-3$ 的图象的确是一条直线.

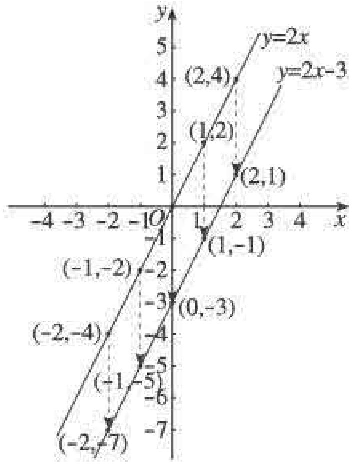


图 2

问题 5 对于一般的一次函数 $y=kx+b$，它的图象形状是什么?

师生活动：教师引导学生比较解析式 $y=kx+b$ 和 $y=kx$，把解析式中函数值之间的关系通过坐标转化为图象的平移关系，从而由函数 $y=kx$ 的图象是直线得到函数 $y=kx+b$ 的图象也是直线.

设计意图：把研究一次函数 $y=2x-3$ 图象形状得到的结论推广到一般的一次函数.

问题 6 既然一次函数的图象是一条直线，在几何中直线是怎样确定的？由此，能得到画一次函数图象的简便方法吗?

师生活动：得到画一次函数图象的简便方法——两点法.

设计意图：结合“两点确定一条直线”，引导学生自然、合理地发现可用“两点法”简便地画一次函数图象.

问题 7 学习正比例函数时，我们通过画 k 的符号不同的若干具体函数图象，观察发现了函数增减性与系数 k 的符号的关系，在一次函数中我们能否也这么办？试一试!

师生活动：教师引导学生类比正比例函数图象性质的研究，提出一次函数性质的研究目标（增减性与 k 的符号的关系）和研究方法，然后教师布置任务：用简便方法分别在同一坐标系中画出下列一次函数的图象：(1) $y=x+1$，$y=3x+1$；(2) $y=-x+1$，$y=-3x+1$.

设计意图：通过类比正比例函数的图象性质的研究方法，引导学生先画出若干个一次函数的图象，同时巩固两点法画一次函数图象.

追问 1：结合对上面函数图象的观察，能用自己的语言说出一次函数 $y=kx+b$ 图象的特征吗?

追问 2：能进一步说出函数值怎样随着自变量 x 的变化而变化吗?

师生活动：在学生得到结论后，教师用动画展示（当 $k>0$ 且固定时，让 x 变化，看 y 怎样变化；当 $k<0$ 且固定时，让 x 变化，看 y 怎样变化）这种变化规律. 在此基础上，通过让 k 的值从正变到负，引导学生观察发现，当 k 的正负号不变时，函数的增减性是一致的；当 k 的正负号变化时，函数的增减性也随之变化. 固定 k 的值，让 b 的值变化，发现函数的增减性不变，从而在直观上验证一次函数的增减性只与 k 的正负有关，如图 3 和图 4.

设计意图：本阶段学习中，先让学生用简便方法（两点法）画四个具有典型性的具体函数图象，然后通过观察、比较、归纳，概括出一次函数的性质. 为了让学生更深刻地理解函数增减性与系数 k 的关系，采用《几何画板》软件制作动画，让学生通过动态的视觉感知和语言表征，进一步理解系数 k 对一次函数 $y=kx+b$ 的增减性的影响.

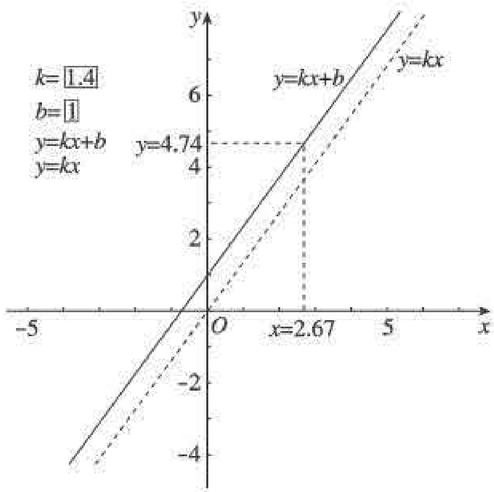


图 3

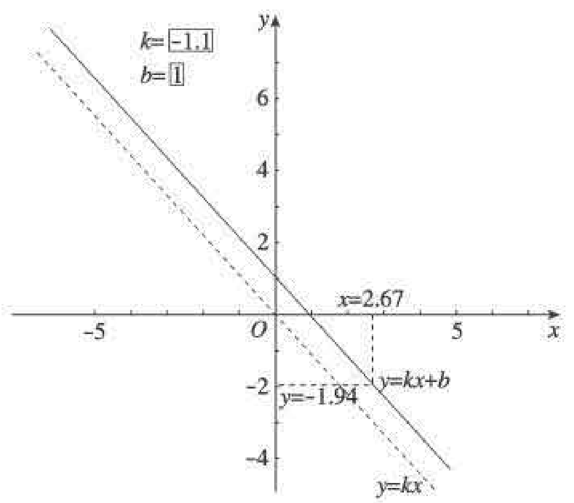


图 4

3. **初步应用，巩固知识**

练习 1　直线 $y=2x-3$ 与 x 轴交点的坐标为________，与 y 轴交点坐标为________，图象经过________象限，y 随 x 的增大而________.

练习 2　在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，每小题中三个函数图象有什么关系？

(1) $y=x-1$，$y=x$，$y=x+1$；

(2) $y=-2x-1$，$y=-2x$，$y=-2x+1$.

练习 3　在同一坐标系中画出下列函数的图象，并指出它们的共同之处：

$$y=\frac{1}{2}x+1,\ y=x+1,\ y=2x+1,\ y=-x+1.$$

师生活动：学生独立完成练习并进行相互交流评价.

设计意图：及时巩固函数的图象和性质.

4. **综合应用，深化理解**

练习 4　一次函数 $y=kx+b$，y 随 x 的增大而减小. 若 $b>0$，则它的图象经过__________________象限.

练习 5　图 5 是函数 $y=\begin{cases}3-x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x-1, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 的图象，请说说这个函数的最小值是多少，并说明理由.

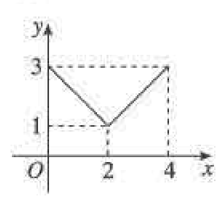


图 5

设计意图：综合考查一次函数的增减性和图象特征之间的关系.

5. **小结**

参照下面问题，教师引导学生回顾本节课所学的主要内容，通过相互交流分享观点：

(1) 一次函数 $y=kx+b$ 的图象是什么？怎样用简便方法画一次函数的图象？

(2) 一次函数有哪些性质？一次函数与正比例函数有什么关系？

(3) 我们是怎样对一次函数的性质进行研究的？

师生活动：教师在学生交流的基础上概括：与正比例函数一样，我们通过“画图象—观察图象—解释变量（坐标）意义”的步骤发现了一次函数的性质，在性质探究过程中，“以图表示数，以数解释形”的思想得到成功运用. 这种函数性质的探究步骤和数形结合的思想在今后其他函数的学习中仍然很有用.

设计意图 让学生在回顾课堂经历的基础上，从知识、方法等角度总结自己的收获，并通过交流互相分享、相互启发. 教师通过概括性引导提升学生对一次函数性质的认识.

6. **布置作业**

教科书习题 26.2 第 4，5，9，12，14 题.

六、目标检测

1. 一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+4$ 的图象是由正比例函数________的图象向________平移________个单位长度得到的一条直线.

设计意图：考查一次函数图象与正比例函数图象的关系.

2. 画出函数 $y=2x-3$ 的图象，并填空：

直线 $y=2x-3$ 与 x 轴的交点坐标为________，与 y 轴的交点坐标为________.

设计意图：考查一次函数的图象与坐标轴交点的坐标.

3. 函数 $y=kx+2$ 中，若 y 随着自变量 x 的增大而增大，则函数的图象一定不经过第____象限.

设计意图：考查一次函数图象位置与解析式中 k，b 符号之间的关系.

4. 画出下列函数图象，说出这些图象之间的关系，分别指出当 x 的值增大时，y 怎样变化.

（1）$y=3x-1$；（2）$y=3x+1$；（3）$y=3x-4$.

设计意图：考查两点法画一次函数图象及函数增减性.

5. 一次函数 $y=kx+b$ 与 x 轴交点的横坐标为（-2，0）. 若 $b<0$，则当 x 的值增大时，y 怎样变化?

设计意图：考查一次函数的图象与增减性，以及数形结合的思想.

26.2 一次函数（第 6 课时）

一、内容和内容解析

1. **内容**

一次函数与一元一次方程、二元一次方程（组）、一元一次不等式的关系.

2. **内容解析**

函数、方程和不等式是初中数学的核心内容，函数是联系方程、不等式的纽带. 通过函数图象，可以直观地表示方程（组）和不等式的解或解集的含义. 用函数的观点看一元一次方程，则可以把解一元一次方程理解为已知一次函数的函数值求对应的自变量的值；用函数的观点看二元一次

方程，则以二元一次方程的解为坐标的点集就是一次函数的图象，二元一次方程组的解就是相应的两个一次函数图象（两条直线）的交点坐标；用函数的观点看一元一次不等式，它的解集就是使得函数值在某个范围的自变量的取值范围．研究函数、方程、不等式之间的联系可以深化相关知识的理解，优化知识结构．建立这种联系的关键是建立一次函数与二元一次方程的联系．

综上所述，本节课的教学重点是：理解一次函数与二元一次方程（组）的联系．

二、目标和目标解析

1．目标

（1）认识一次函数与一元一次方程、二元一次方程（组）、一元一次不等式之间的联系，会用函数观点解释方程和不等式及其解或解集的意义．

（2）经历用函数图象表示方程和不等式的过程，进一步体会“以形表数，以数释形”的数形结合思想．

2．目标解析

目标（1）要求能用函数的观点看一元一次方程、二元一次方程（组）和一元一次不等式，知道解一元一次方程就是已知一次函数的值求自变量的值；解一元一次不等式就是已知一次函数的取值范围求对应自变量的取值范围；知道函数反映的是变量之间对应关系的整体，方程则反映了变量的具体取值之间的对应关系．

目标（2）要求学生通过以函数图象为中介，用函数的观点看方程和不等式，进一步体会用图象可以直观地描述函数、方程、不等式之间的联系．

三、教学问题诊断分析

学生已经分别学习过一次函数、一元一次方程、二元一次方程组和一元一次不等式，知道它们都是刻画现实问题中数量关系的重要模型，但没有建立这些知识之间的有效联系，不知道方程（组）、不等式模型与函数模型的联系．用函数观点理解二元一次方程需要把方程的解（x，y）看作是一对变量 x 和 y，从图象的角度看，需要把解（x，y）看作函数图象上点的坐标，把描述方程的曲线看作以方程的解为坐标的点集．从函数图象的角度看一元一次方程，实际上是已知一次函数图象上点的纵坐标求与其对应的横坐标；用函数图象的观点看不等式，需要把不等式的解集看作图象上纵坐标的值在一定范围内的点对应的横坐标的值的集合．

把一次函数图象上点的坐标与方程（组）的解建立联系，这是学习的难点．

四、教学过程设计

1．创设情境，提出问题

问题1　如图1，1号探测气球从海拔5 m处出发，以1 m/min的速度上升．与此同时，2号探测气球从海拔15 m处出发，以0.5 m/min的速度上升．两个气球都上升了1 h．请用解析式分别表示两个气球所在位置的海拔 y（单位：m）与上升时间 x（单位：min）的函数关系．

师生活动：教师用动画展示气球的运动过程，学生独立写出函数解析式 $y=x+5$ 和 $y=$

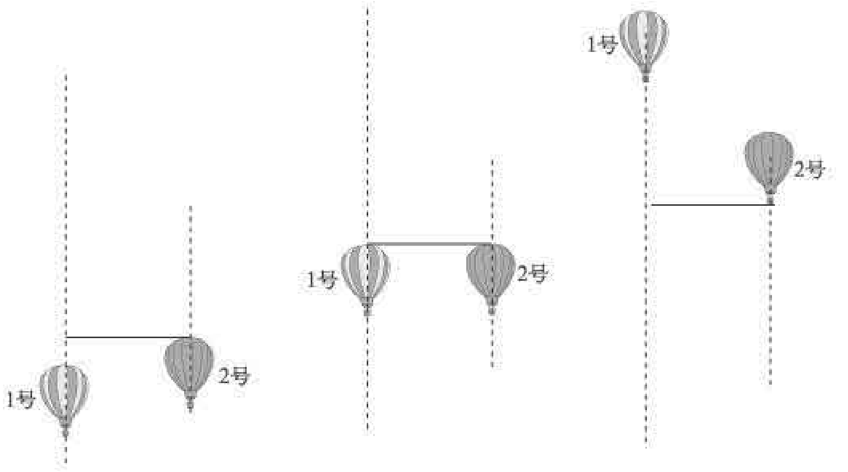


图 1

$0.5x+15$.

设计意图：通过动画展示两气球高度的变化过程，让学生能直观地感知到两气球相对高度的变化；通过用函数式表示变化过程，得到研究一次函数与二元一次方程（组）关系的素材.

追问 1：确定了一次函数的解析式，也就确定了变量的变化规律. 我们得到了两个式子：$y=x+5$，$y=0.5x+15$. 如果把 x，y 看作未知数，那么这两个式子表示什么意义？

设计意图：让学生用方程观点看一次函数，发现一次函数的表达式是一个二元一次方程.

追问 2：这说明一次函数与二元一次方程应该有密切的联系，具体是怎样联系的呢？

设计意图：提出问题，明确学习内容，引导学生把注意力聚焦在思考一次函数与二元一次方程的关系上.

2. 观察思考，探究新知

问题 2 写三个一次函数，用方程观点看式子，有什么发现？再写三个二元一次方程，如果把未知数看作变量，变量之间的关系是什么？

师生活动：教师引导学生分别用函数观点看二元一次方程，用方程观点看一次函数，发现其联系（图 2）.

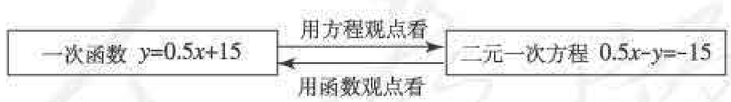


图 2

设计意图：通过式子之间的转换，让学生体会只要把未知数和变量的角色互换，则二元一次方程和一次函数也实现了互相转化. 从数量关系讲，它们的本质相同，只是看问题的角度不同.

追问 1：如果从形的观点看，它们之间又有什么联系呢？

追问 2：在同一坐标系内，（1）画出函数 $y=0.5x+15$ 的图象；（2）画出以方程 $0.5x-y=-15$的 5 个解为坐标的点. 你有什么发现？

师生活动：学生画图发现，以方程 $0.5x-y=-15$ 的解为坐标的点都在一次函数 $y=0.5x+15$ 的图象上，函数 $y=0.5x+15$ 图象上的点的坐标都是二元一次方程 $0.5x-y=-15$ 的解. 教师

引导学生总结：不管从数的角度还是从形的角度看，一次函数和二元一次方程的数量关系的本质相同，只不过是观点和表现形式不同（图 3）.

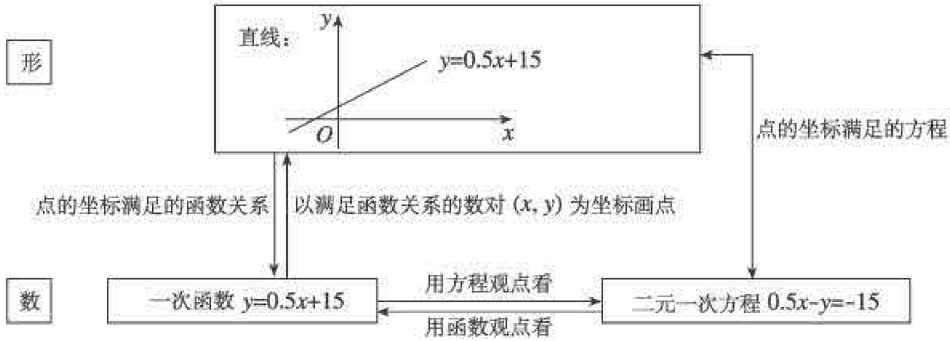


图 3

设计意图：引导学生通过画图和观察，直观地发现以方程 $0.5x-y=-15$ 的解为坐标的点全部在函数 $y=0.5x+15$ 的图象上，函数图象上每点的坐标都是方程 $0.5x-y=-15$ 的一个解.

我们知道，两个有相同未知数的二元一次方程组成的方程组一般有一个解，那么从函数的观点看，这有什么含义？让我们还是从气球的上升问题说起.

问题 3 由于两气球上升的速度不同，开始时 2 号气球高，1 号气球低，那么永远如此吗？什么时刻 1 号气球的高度赶上 2 号气球的高度？你会从数和形两方面分别加以研究吗？

师生活动：教师把学生分成两组，一组同学从数量关系的角度研究，另一组同学从图形的角度研究.

（1）从数量关系的角度研究

1 号气球的高度与时间关系为 $y=x+5$；

2 号气球的高度与时间关系为 $y=0.5x+15$.

当两气球在同一时刻的高度相同时，时间 a 和高度 b 同时满足这两个方程，也就是由这两个方程组成的方程组的解. 解方程组 $\begin{cases} y=x+5, \\ y=0.5x+15, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=20, \\ y=25. \end{cases}$ 因此气球上升 20 min 时，它们的高度相同，都是 25 m.

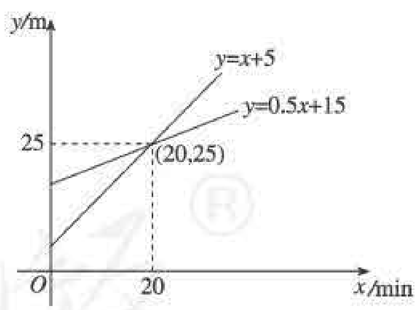


图 4

（2）从图形的角度研究

在同一坐标系中画出两个函数的图象，如图 4. 从中发现，当 $x=20$ 时，对应的函数值相等，都是 25. 也就是说，两直线交于一点，交点坐标为（20，25）.

设计意图：引导学生用函数的观点，从数和形两方面深化对二元一次方程组解的认识. 为形成下面对一次函数与二元一次方程组关系的归纳提供样例.

追问：回顾上面解题过程，用函数观点看方程组 $\begin{cases} y=x+5, \\ y=0.5x+15, \end{cases}$ 你能得到哪些结论？你能把得到的结论推广到一般情况吗？

师生活动：教师引导学生总结：由上可知，每个二元一次方程组都对应两个一次函数，于是也

对应两条直线. 从“数”的角度看，解二元一次方程组相当于求自变量为何值时相应的两个函数值相等，以及这个函数值是多少；从“形”的角度看，解二元一次方程组相当于确定两条相应直线交点的坐标.

3. 迁移应用，巩固知识

例 1 下面三个方程有什么共同特点？你能从函数的角度对这三个方程进行解释吗？

(1) $2x+1=3$；(2) $2x+1=0$；(3) $2x+1=-1$.

师生活动：教师引导学生发现，解这三个方程，就是求函数 $y=2x+1$ 的函数值分别为 3，0，-1 时对应的自变量的值，并画出图象，如图 5.

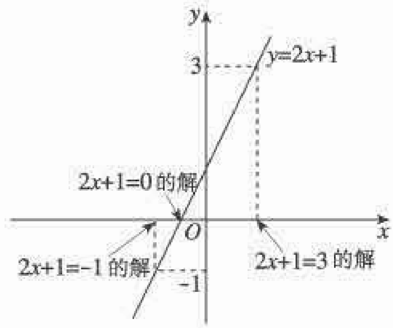


图 5

追问 1：能把得到的结论推广到一般情况吗？

师生活动：教师引导学生得出：一般地，一元一次方程 $ax+b=c$（a，b，c 为常数，$a\neq0$）的解就是当函数 $y=ax+b$ 的函数值为 c 时的自变量的值.

追问 2：我们知道，任何一元一次方程都可以化为 $ax+b=0$ 的形式，你能用函数的观点解释这个方程吗？

师生活动：教师引导学生得出，解任何一元一次方程，都可以转化为求一次函数值为 0 时自变量的值的问题，如图 6.

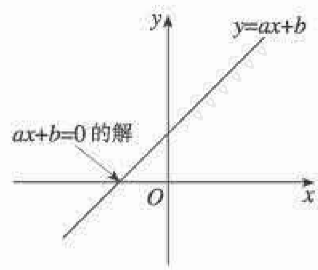


图 6

设计意图：*用数形结合的方法，建立一次函数与一元一次方程的联系.*

例 2 下面三个不等式有什么共同特点？你能用函数的观点解释这三个不等式吗？能把你得到的结论推广到一般情况吗？

(1) $3x+2>2$；(2) $3x+2<0$；(3) $3x+2<-1$.

师生活动：教师引导学生通过观察发现不等式与函数的关系，并进一步归纳：解不等式 $ax+b>c$(或$<c$)，就是求函数 $y=ax+b$ 的值大于 c(或小于 c) 时，对应自变量的取值范围. 并在此基础上进一步得到：解一元一次不等式 $ax+b>0$(或<0) 可以转化为求函数 $y=ax+b$ 的函数值大于 0（或小于 0）时，自变量的取值范围，如图 7.

设计意图：*比照研究一次函数和二元一次方程（组）关系的方法，用函数观点看一元一次方程和一元一次不等式.*

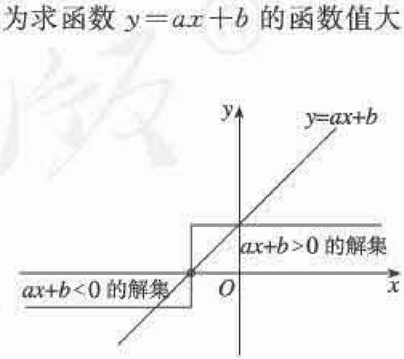


图 7

4. 小结

请大家带着下面的任务，回顾课堂历程，清点并交流收获：

(1) 请用函数的观点，从数和形两个角度说说你对二元一次方程有什么新的理解；

(2) 请用函数的观点，从数和形两个角度说说你对二元一次方程组的认识；

(3) 请用函数的观点，说说你对一元一次方程有什么新的认识；

(4) 请用函数的观点，说说一次函数与一元一次不等式的联系.

师生活动：在学生总结交流的基础上，教师进行概括性引导：方程（组）、不等式和函数之间互相联系，用函数的观点可以把它们统一起来，解决问题时，可以根据具体情况把它们灵活地结合起来使用.

设计意图：小结中的第（1）问引导学生从数和形两个角度概括一次函数与二元一次方程的联系；第（2）问引导学生从数和形两个角度理解一次函数与二元一次方程组的联系；第（3）问引导学生思考一次函数与一元一次方程的联系；第（4）问引导学生思考一次函数与一元一次不等式的联系.

5. **布置作业**

教科书习题 26.2 第 8，10，11，13 题.

五、目标检测设计

1. 以方程 $2x-3y=6$ 的解（x，y）为坐标的所有点组成的图形是函数____________的图象；以方程 $x+y=4$ 的解（x，y）为坐标的所有点组成的图形是函数____________的图象；用函数观点看，解方程组 $\begin{cases}2x-3y=6,\\x+y=4\end{cases}$ 的含义是解得当自变量取______时，函数__________和函数__________有相同的函数值________.

设计意图：考查一次函数和二元一次方程（组）的联系.

2. 函数 $y=-3x+6$，当 x 为何值时，对应的函数值 y

(1) 等于 5? (2) 小于 5? (3) 大于 5?

设计意图：考查一次函数与一元一次方程和不等式的关系.

3. 在同一坐标系中画出函数 $y=\frac{1}{2}x+4$ 和 $y=x+1$ 的图象，并回答下面问题：

(1) 当 x 为何值时，这两个函数的函数值相等?

(2) 当 x 在什么范围内时，$y=\frac{1}{2}x+4$ 的函数值大于 $y=x+1$ 的函数值?

设计意图：考查一次函数与一元一次方程、一元一次不等式的关系.

4. 如果直线 $y=k_1x+b_1$ 和直线 $y=k_2x+b_2$（$k_1>k_2>0$）的交点坐标为（a，b），则不等式 $k_1x+b_1<k_2x+b_2$ 的解集是__________.

设计意图：考查用函数观点看一元一次不等式.

5. 甲乙两人在操场上练习 100 m 跑步，甲的平均速度是 6 m/s，乙的平均速度是 5 m/s. 如果甲让乙先跑 2 s，甲能追上乙吗？如果能，什么时候追上？请用方程和函数两种方法解决这个问题.

设计意图：综合考查一次函数、二元一次方程组和一元一次不等式之间的联系.

26.3 课题学习　选择方案（第1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

用函数思想解决方案选择问题——选择哪种上网收费方式省钱?

2. 内容解析

函数是反映变量之间对应关系和变化规律的重要模型. 它在研究自然界和现实生活中的变化规律及解决相关问题中有着广泛的应用.

利用函数模型解决问题的基本过程是：首先，设变量（自变量和因变量），建立因变量与自变量的函数关系，把实际问题转化为函数问题；其次，研究函数性质，把握变量之间的对应关系和变化规律，解决函数问题；第三，解释函数问题解的实际意义，得到实际问题的解. 这种利用函数模型解决问题的过程如图1所示.

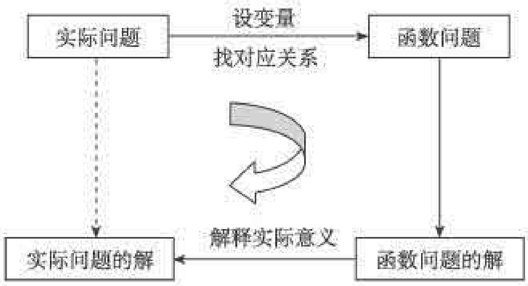


图1

一次函数模型是最简单的函数模型——线性模型. 一次函数在$(-\infty,+\infty)$上没有最大值，也没有最小值. 但由于实际问题中的一次函数的自变量取值范围往往是在某一范围内，如某一闭区间$[a,b]$或半开半闭区间$(a,b]$或$[a,b)$，这样，一次函数就会在区间的端点（闭端点）取得最大（小）值.

具体的一次函数$y=kx+b$（k，b是常数，$k\neq0$）中，函数的变化率是固定不变的k，但不同的两个一次函数往往有不同的变化率，比较变化规律是解决实际生活中方案选择问题时常用的数学方法.

综上所述，本节课教学的重点是：应用一次函数模型解决方案选择问题.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 会用一次函数知识解决方案选择问题，体会函数模型思想.

(2) 能从不同的角度思考问题，优化解决问题的方法.

(3) 能进行解决问题过程的反思，总结解决问题的方法.

2. 目标解析

本节内容属于实践与综合应用目标领域，是解决问题的教学，而不单纯是一次函数的应用.

目标（1）要求能根据实际问题建立一次函数模型，比较若干一次函数的变化规律和趋势，应用一次函数的相关性质解决问题，认识到函数模型应用的方法，感受函数模型的应用价值.

目标（2）要求能从不同的角度感知问题中的数量关系，对实际问题中的数量关系进行有向多元表征，构建不同的模型，用不同的方法解决问题，并能比较评价各种解决方案.

目标（3）要求在解决问题过程中，能进行“现状—目标”差距评估，调整解题思路，在解决问题后，能对解决问题步骤、程序和方法进行总结提炼.

三、教学问题诊断分析

本节课的认知要求高，属于问题解决层次. 问题解决过程需要感知和确定问题、表征和定义问题、形成解决问题策略、组织信息、资源分配、监控、评估等认知活动. 问题解决学习过程有其自身的特点. 首先，它是指向问题的，而非指向知识的；其次，它是具有挑战性的整体问题，甚至是问题情境，没有铺垫和提示；第三，它需要不断进行问题的感知、表征及转换，把整体目标分解为一系列的分目标，生成连接起点和终极目标的目标链，进行问题的不断转化；第四，解题思路不是显然的，而是要根据问题的情境和特点进行系统的规划和选择.

与学习数学概念、数学事实原理等比较，学生学习数学问题解决的经验相对缺乏，因此，在学习解决问题时会遇到较大困难. 学生习惯于接受老师的解题分析，一旦自己独立面对陌生问题，就无从下手. 学生的主要困难是：（1）不会审题，难以从整体上把握数量关系；（2）不能用适当的方法表示问题中的数量关系，因此就难以形成适当的数学模型；（3）不会进行系统的解题规划而习惯于提取直接的解题经验；（4）只要得到答案就完事，没有反思的习惯.

问题解决学习活动的核心价值是通过这种高层次的数学学习活动发展数学感知、表征、抽象概括、推理计算等认知能力，发展发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力. 而这些教育价值的实现，必须以独立完整地经历相关的认知活动为前提.

本节课教学的难点是：规划解决问题思路，建立函数模型.

四、教学过程设计

1. 创设情境，提出问题

引言

做一件事情，有时有不同的实施方案. 比较这些方案，从中选择最佳方案作为行动计划，是非常必要的. 应用数学的知识和方法对各种方案进行比较分析，可以帮助我们清楚地认识各种方案，作出理性的决策. 请说说自己生活中需要选择方案的例子.

当我们面对不同的方案，怎样运用数学方法进行比较并作出合理的选择？请看下面问题：

下表给出 A，B，C 三种上宽带网的收费方式.

收费方式	月使用费/元	包时上网时间/h	超时费/（元/min）
A	30	25	0.05
B	50	50	0.05
C	120	不限时	

选择哪种收费方式能节省上网费用？

设计意图：通过引言，让学生体会到现实中方案选择问题普遍存在，对各种方案运用数学方法作出分析，在此基础上进行理性选择，具有重要的现实意义．为此，提出一个现实问题以供研究．

2．**理解问题，明确目标**

问题 1　面对这样一个问题，从哪里入手？

追问 1：这个问题要我们做什么？

追问 2：选择方案的依据是什么？

师生活动：教师引导学生，通过阅读问题明确问题的起点（条件）和目标，知道根据省钱原则选择方案．

设计意图：感知问题首先要感知问题的起点和目标，即知道在什么条件下需要做什么事．在解决问题的过程中，问题的目标必须始终保持在大脑中，设计问题 1 及两个子问题就是为了让学生明确问题的起点和目标．

3．**分析问题，规划思路**

问题 2　要比较三种收费方式的费用，需要做什么？

师生活动：教师引导学生认识到需要算出每种方案各自的费用并进行比较．

追问 1：方式 C 需要多少钱？

追问 2：方式 A，B 的费用确定吗？影响费用的因素是什么？

追问 3：方式 A，B 的费用与上网时间 t 有什么关系？

师生活动：以教师引导的形式进行如下分析：

（1）费用的构成要素及其关系

当上网时间不超过规定时间时，费用＝月费；

当上网时间超过规定时间时，

图 2

（2）用适当方法表示出 A，B 两种方案的费用（设上网时间为 t h）

用结构图表示数量关系：

方式 A

当上网时间不超过 25 h 时，费用＝30 元；

当上网时间超过 25 h 时，

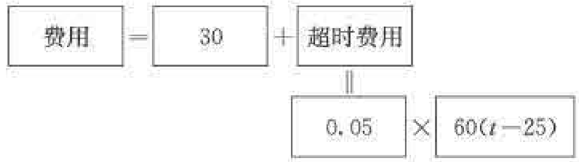


图 3

方式 B

当上网时间不超过 50 h 时，费用＝50 元；

当上网时间超过 50 h 时，

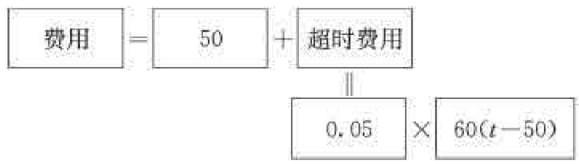


图 4

用表格表示数量关系：

	月费/元	上网时间/h	超时费用/元	总费用/元
方式 A	30	$t(>25)$	$3(t-25)$	$30+3(t-25)$
方式 B	50	$t(>50)$	$3(t-50)$	$50+3(t-50)$

用式子表示数量关系：

方案 A $y=\begin{cases}30, & 0\leqslant t\leqslant 25;\\ 3t-45, & t>25.\end{cases}$

方案 B $y=\begin{cases}50, & 0\leqslant t\leqslant 50;\\ 3t-100, & t>50.\end{cases}$

用函数图象表示数量关系，如图 5.

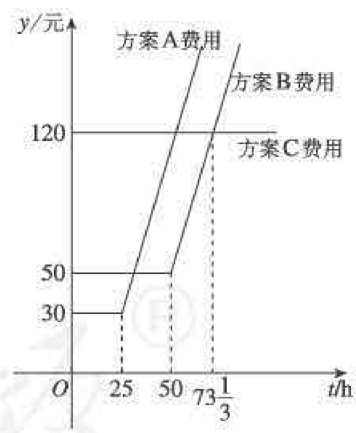


图 5

追问 4：怎样比较三种收费方式的费用？

设计意图：感知问题的整体结构和数量关系，是从粗略到精细，从定性到定量的过程. 要感知本题中费用随上网时间的变化而变化，并把这两个变量作为研究的对象，并不是自动生成的，需要经过费用构成要素分析、各要素的可变性分析、变量的确定、变量之间关系的确定及数量表示等过程. 在感知问题中数量关系的基础上，教师要进一步引导学生标出已知数据，设出变量或未知数，用式子表示这些数量之间关系. 最终把问题转化为比较一次函数的函数值大小.

4. **建立模型，解决问题**

任务 1 请把原来的问题描述为函数问题.

师生活动：学生独立建立函数模型，把实际问题转化为函数问题.

设上网时间为 t h，方案 A 费用为 y_1元，方案 B 费用为 y_2元，方案 C 费用为 y_3 元，则

$$y_1=\begin{cases}30, & 0\leqslant t\leqslant 25,\\ 3t-45, & t>25;\end{cases}\quad y_2=\begin{cases}50, & 0\leqslant t\leqslant 50,\\ 3t-100, & t>50;\end{cases}\quad y_3=120,\ t\geqslant 0.$$

比较 y_1，y_2，y_3 的大小.

设计意图：通过前面的分析，在写出函数式的基础上，通过建立一次函数模型，把实际问题转化为一次函数的问题，这是感知问题、分析问题基础上的用一次函数模型对实际问题进行数学表征. 通过这种表征，把实际问题转化为函数问题.

任务 2 独立解决上面的函数问题，并进行相互交流.

师生活动：教师引导学生解决函数问题.

结合图象可知：

(1) $y_1=y_2$，即 $3t-45=50$，解方程，得 $t=31\frac{2}{3}$；

(2) $y_1<y_2$，即 $3t-45<50$，解不等式，得 $t<31\frac{2}{3}$；

(3) $y_1>y_2$，即 $3t-45>50$，解不等式，得 $t>31\frac{2}{3}$.

(4) $y_2=y_3$，即 $3t-100=120$，得 $t=73\frac{1}{3}$.

(5) $y_2>y_3$，即 $3t-100>120$，解不等式，得 $t>73\frac{1}{3}$.

设计意图：上述函数问题，需要在画出函数图象、观察函数图象的基础上对上网时间进行分段讨论. 让学生体会根据函数图象作出整体时间分段规划，应用方程和不等式解决具体时间段中的函数值大小比较，精细分析数量关系的过程.

任务 3 请解释你得到结果的实际意义，并检查自己解题过程正确与否.

师生活动：教师引导学生解释上述结果的实际意义.

当上网时间不超过 $31\frac{2}{3}$ h 时，选择方案 A 最省钱；

当上网时间为 $31\frac{2}{3}$ h 至 $73\frac{1}{3}$ h 时，选择方案 B 最省钱；

当上网时间超过 $73\frac{1}{3}$ h 时，选择方案 C 最省钱.

设计意图：让学生解释数学模型解的实际意义，发展自我评价的意识.

5. **小结**

请大家带着下列问题回顾上述问题的解决过程，谈谈自己的感悟，分享各自的观点：

(1) 你是怎样明确问题的目标任务的？

(2) 你是怎样发现问题中的已知数据和数量关系的？

(3) 你是怎样发现问题中的变量之间的函数关系的？

(4) 回忆以前用方程解决问题的思考框图，你能画出用一次函数解决问题的思考框图吗？

设计意图：让学生带着问题回顾解决实际问题的过程，可以提高反思过程的针对性，突出反思

问题解决的关键节点和核心思想这两个重点，帮助学生概括应用一次函数解决实际问题的基本思路（图 6）.

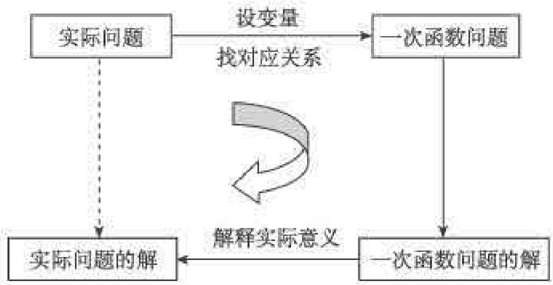


图 6

6. **布置作业**

小张准备安装空调，请你调查市场上不同节能级别的空调的价格、耗电量，了解当地的电费价格，运用数学知识进行分析，给小张提一个购买建议. 把你的调查分析及建议写成书面报告.

设计意图：课题学习不以训练技巧为目标，而是以联系实际，发展发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力为目标. 因此，本节课安排的作业是实践性作业. 同时，把实际问题解决的过程和结果作为评价学生利用一次函数模型解决方案选择问题的水平，不再设计另外的书面检测试题.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. **函数概念发展的历史**

（1）几何观点下的函数概念萌芽

17 世纪，意大利科学家伽俐略（G. Galileo，1564—1642）在 1638 年出版的《关于两门新科学的对话》一书中，几乎从头到尾包含着函数或称为“变量的关系”这一概念，并用文字和比例的语言表达函数的关系. 1637 年前后，法国数学家笛卡尔（R. Descartes，1596—1650）在他的《几何学》中，已经注意到了一个变量对于另一个变量的依赖关系，但他当时尚未意识到需要提炼一般的函数概念. 苏格兰数学家格雷果里（J. Gregory，1638—1675）在他的 1667 年的论文《论圆和双曲线的求积》中，定义了这样一个量，它是从其他量经过一系列的代数运算得到的，或者其他可以想象的运算得到的. 17 世纪后期，英国科学家牛顿（I. Newton，1642—1727）、德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716）建立微积分的时候，绝大部分函数是被当作曲线来研究的，莱布尼茨在他的 1673 年的一篇手稿里，用“函数”一词来表示任何一个随曲线上点的运动而变化的量.

（2）解析式观点下的函数概念

瑞士数学家约翰·伯努利（J. Bernoulli，1667—1748）自 1697 年就谈到一个由任何方式用常量和变量构成的量，其在函数概念中所说的任一形式，包括代数式和超越式. 1698 年，他采用莱

布尼茨的“x 的函数”一词来表示他得到的量.

1714 年，莱布尼茨在他的著作《历史》中，用“函数”一词表示依赖于一个变量的量. 1718 年，约翰·伯努利给出了他的函数表示方法“Φx”. 瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707－1783）于 1734 年首先使用 $f(x)$ 表示函数，这一经典的函数符号表示方法一直沿用至今. 欧拉给出的定义是：一个变量 x 的函数是由这个变量 x 和一些数以任何方式组成的解析表达式. 他把约翰·伯努利给出的函数定义称为解析函数，并进一步把它区分为代数函数和超越函数，还考虑了“随意函数”（表示任意画出曲线的函数）. 不难看出，欧拉给出的函数定义比约翰·伯努利的定义更普遍、更具有广泛意义.

（3）对应关系观点下的函数

1822 年，法国数学家傅里叶（J.-B.-J. Fourier，1768－1830）发现某些函数可用曲线表示，也可用一个式子表示，或用多个式子表示，从而结束了函数概念是否以唯一的式子表示的争论，把对函数的认识又推到了一个新的层次. 1821 年，法国数学家柯西（A.-L. Cauchy，1789－1857）从定义变量开始给出了函数的定义，但他仍然支持用函数解析式表示函数关系，这是一个很大的局限.

突破这一局限的是德国数学家狄利克雷（P. G. L. Dirichlet，1805－1859）. 1837 年，狄利克雷认为怎样去建立 x 与 y 之间的关系无关紧要，他给出了一个经典的不能用任何代数式或超越式表示、也不能画出图象的处处不连续的函数：

$$f(x)=\begin{cases}1\text{（当 } x \text{ 为有理数时），}\\ 0\text{（当 } x \text{ 是无理数时）.}\end{cases}$$

他拓广了函数概念，指出：“对于在某区间上的每一个确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么 y 叫做 x 的函数.”（这里的函数包含“一对多”的多值函数.）狄利克雷的函数定义，出色地避免了以往函数定义中所有的关于依赖关系的描述，简明精确地强调对应，以完全清晰的方式为所有数学家无条件地接受. 至此，我们已可以说，函数概念、函数的本质定义已经形成，这就是人们常说的经典函数定义.

（4）集合论观点下的函数概念

德国数学家康托尔（G. Cantor，1845－1918）创立的集合论在数学中占有重要地位之后，美国数学家维布伦（O. Veblen，1880－1960）用“集合”和“对应”的概念给出了近代函数定义. 通过集合概念，把函数的对应关系、定义域及值域进一步具体化了，且打破了“变量是数”的限制，变量可以是数，也可以是其他对象（点、线、面、体、向量、矩阵等）.

1914 年，德国数学家豪斯多夫（F. Hausdorff，1868—1942）在《集合论纲要》中用“序偶”来定义函数，其优点是避开了意义不明确的“变量”“对应”概念，不足之处是又引入了不明确的概念“序偶”. 波兰数学家库拉托夫斯基（K. Kuratowski，1896—1980）于 1921 年用集合概念来定义“序偶”，即序偶 (a, b) 为集合 $\{\{a\}, \{b\}\}$. 这样，就使豪斯多夫的定义很严谨了. 1930 年新的现代函数定义为：若对集合 M 的任意元素 x，总有集合 N 的确定元素 y 与之对应，则称在集合 M 上定义了一个函数，记为 $y=f(x)$. 其中元素 x 称为自变元，元素 y 称为因变元.

函数概念经过 300 多年的锤炼、变革，形成了函数的现代定义形式，但这并不意味着函数概念

发展的历史终结. 20 世纪 40 年代，物理学研究的需要发现了一种叫做 Dirac-δ 函数，它只在一点处不为零，而在全直线上的积分却等于 1. 这在原来的函数和积分的定义下是不可思议的，但由于广义函数概念的引入，把函数、测度及以上所述的 Dirac-δ 函数等概念统一了起来.

在我国，“函数”一词是清朝数学家李善兰最先使用的，他在《代数学》的译本（1859 年）中，把“function”译成“函数”，提出“凡式中有天，为天之函数”. 我国古代以天、地、人、物表示未知数，所以这个函数的定义用现在的话说是：若一式中含有 x，则这个式叫做 x 的函数.

2. 几个重要概念

（1）常量与变量

用数量刻画事物变化过程是对变化过程的数学表示，也是用函数模型研究变化过程的基础. 从因果关系上讲，函数表达式是在明确了谁是变量的前提下对函数关系的解析表示，如果不知道变量是什么，就没有函数表达式. 常量、变量并不一定是带单位的量，也可以是变数和常数. 常量和变量是相对的，在不同的研究过程中，常量和变量的身份可以相互转换.

（2）函数

初中函数的定义中包括了“在某一变化过程中的两个变量”“对于自变量的每一个取值，因变量有唯一的值与它对应”，这体现了以下两重意义：第一，函数研究的是变化过程中的变量变化的相互依存关系，而且中学阶段中的函数指的是单变量关系（自变量和因变量都只有一个），自变量和因变量的变化是互相影响的，自变量的变化导致因变量的变化；第二，自变量的变化完全决定了因变量的变化，只要自变量的数值确定，则因变量的值也就唯一确定了，这种对应关系意味着初中函数概念指的是单值对应函数，自变量与因变量的值的对应关系可以“多对一”，但不能“一对多”.

函数的集合映射定义是：对于集合 A 和集合 B，如果集合 A 的元素和集合 B 的元素之间存在着一种对应关系 f，对于 $\forall x \in A$，集合 B 中都有唯一的元素 y 与之对应，即 $x \xrightarrow{f} y$，则称 f 是集合 A 到集合 B 的一个映射. 如果 A，B 是数集，则称 f：$A \to B$ 为函数，记做 $y=f(x)$. 其中 x 叫自变量，与一个确定元素 x 对应的元素 y 叫自变量为这个确定元素时的函数值，A 叫做函数的定义域，函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫函数的值域.

如果用关系定义广义函数（包括隐函数和多值函数），则函数是集合 A，B 的笛卡尔直积 $A \times B=\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ 的子集 f（也叫集合 A，B 之间的一个关系）. 这其实是从图象的角度定义函数. 如果集合 A，B 是实数集，则函数指的是由一些有序数对（a，b）对应的点所组成的集合. 这一集合 $f \subset A \times B=\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ 决定了函数的定义域、值域和对应法则. 而单值函数（包括隐函数）的关系定义是：满足如下条件的一个关系 f，$f=\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$：若 (a, b)，$(a, c) \in f$，则 $b=c$.

（3）函数的图象

一元函数图象是在平面直角坐标系中用来直观地表示变量之间的对应关系和变化规律的点集：$f=\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$：若 (a, b)，$(a, c) \in f$，则 $b=c$. 其原理是：用点的横坐标表示自变量，用点的纵坐标表示对应的函数值.

函数图象的本质是以符合函数对应关系的自变量、因变量的值分别为横、纵坐标的所有点组成

的点集，因此需要同时符合两个条件：符合函数关系的点全部都在函数图象上；图象上的任何点都符合函数关系.

函数的三种表示法各有优缺点：图象法直观，但数量关系精确度较差；列表法简单易行，有一定的直观性，精确度高，但只能反映局部情况；解析式法表示对应关系精确，便于进行计算和数据分析，但直观性较差，而且很多情况下不能求出函数解析式. 在函数研究中，往往根据实际情况，综合使用三种表示法分析函数关系，如先求出函数解析式，然后画出函数图象观察变量的变化规律和变化趋势，再概括总结，最后用于解决问题. 值得注意的是，在根据实际问题中的数量关系求函数解析式时，要注意确定自变量的取值范围.

3. 一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq0$）中一次项系数 k 和常数项 b 的意义

单调性是中学学习的函数中最核心、最基本的性质，课程标准着重提出了一次函数单调性与系数 k 的关系的学习要求，没有提出系数 b 的意义的学习要求. 在教学中，应该把一次函数图象和性质学习的重点放在单调性与系数 k 的关系上. 对于直线与方程之间的关系，高中还会进一步学习，初中不要太多涉及这方面的问题.

一次函数的图象是不平行于坐标轴的直线（因此一次函数也叫线性函数，一次函数模型也叫线性模型），系数 k 决定了直线的倾斜程度，而系数 b 决定了直线与 y 轴的交点位置. 如果 k 固定，b 变化，则直线平移；如果 b 不变，k 变化，则直线绕着点（0，b）旋转. 在解析几何中的直线方程还包括 $x=a$ 和 $y=b$（a，b 是常数）型，前者表示横坐标取固定值而纵坐标可以取任意值，后者表示纵坐标取固定值而横坐标可以取任意值；前者表示与 y 轴平行或重合的直线，后者表示与 x 轴平行或重合的直线. 所有的直线都可以看作方程 $Ax+By+C=0$（A，B，C 为常数，$A^2+B^2\neq0$），而两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$ 平行的条件是 $A_1:A_2=B_1:B_2\neq C_1:C_2$. 两直线交点的坐标就是相应的直线方程 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 组成的二元一次方程组的解.

4. 一次函数的变化率（斜率）

对于一个具体的一次函数 $y=kx+b$，其中的系数 k 是固定不变的. 对于任何一次函数 $y=kx+b$图象上的两点（x_1，y_1），（x_2，y_2），都有$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$，也就是说，对于任意两对对应值，其函数值的变化值与对应的自变量的变化值的比（这个比值叫函数的变化率）是一个不变的常数（即直线的斜率）.

5. 一次函数在闭区间（或半开半闭区间）上的最值问题

一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq0$），$x\in\mathbf{R}$ 的图象是一条直线，因此一次函数在 $\mathbf{R}$ 上没有最大和最小值. 但由于实际问题中的一次函数的自变量取值范围可能是闭区间 $[a, b]$（或半开半闭区间 $(a, b]$ 或 $[a, b)$），因此就可能存在最大值或最小值（或者两者都有）. 根据一次函数的单调性，一次函数在闭区间（或半开半闭区间）上的最值是区间的端点（左端点或右端点或两端点）. 但一次函数在任何开区间（a，b）上没有最大值，也没有最小值. 函数的最值是基于函数单调性及端点函数值比较而得到的重要性质，这一性质在最优化方案选择中具有重要的应用. 根据高等数学的知识，任何在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数都有最大值和最小值，而一次函数在闭区间上的最大最小值存在就是这一连续函数性质定理的例子.

6. **数学模型与数学建模**

（1）数学模型

对于现实中的问题原型，为了某个特定的目的，作出一些必要的简化和修改，运用数学工具得到的数学结构，叫做现实问题的数学模型. 也可以说，数学模型是用数学语言（数、符号、式、表、图、程序）描述的模拟现实的模型. 把现实模型抽象、简化为某种数学结构是数学模型的基本特征，它或者能解释特定现象的现实状态，或者能预测对象的发展变化，或者能提供处理对象的最优决策或控制.

（2）数学建模

把现实问题加以提炼，抽象为数学模型，求出数学模型的解，验证解的合理性，并用数学模型的解来解释现实问题，这一种数学知识的应用过程叫数学建模.

数学建模的步骤：

① 模型准备：了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息，用数学语言来描述问题.

② 模型假设：根据实际对象和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设.

③ 模型建立：在假设的基础上，利用适当的数学工具来刻画各要素之间的数学关系，建立相应的数学结构（尽量用简单的数学工具）.

④ 模型求解：利用获取的数据资料，对模型的所有参数作出计算或估计.

⑤ 模型检验：将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来检验模型的准确性、合理性和适用性. 如果模型与实际比较吻合，则要对计算结果给出实际意义，并进行解释. 如果模型与实际吻合较差，则应修改模型，再次重复建模过程.

⑥ 模型应用：应用方式因问题的性质和建模的目的而异.

学习数学建模的目的：

① 体会数学的应用价值，培养数学应用意识.

② 增强数学学习的兴趣，学会合作，学会探究，发展发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力.

③ 认识数学知识的应用过程，发展创新思维.

参考资料

[1] 伽利略. 关于两门新科学的对话. 武际可，译. 北京：北京大学出版社，2006.

[2] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想（第二册）. 朱学贤，申又枨，叶其孝，等，译. 上海：上海科学技术出版社，2002.

[3] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想（第三册）. 万伟勋，石生明，孙树本，等，译. 上海：上海科学技术出版社，2002.

[4] A. D. 亚历山大洛夫，等. 数学——它的内容、方法和意义. 王元，万哲先，等，译. 北京：科学出版社，2001.

二、拓展性问题

1. 数列规律探究问题

数学中的数据排列规律探究，实际上是求数列的通项. 数列可看作是自变量为正整数的函数，即一类特殊的函数. 如果能从函数的角度来研究，可能会使问题更容易解决. 求解的步骤可以归纳为：

① 确定自变量和因变量，并列出表格填上这些变量的对应值.

② 通过对应值发现对应关系，试列出函数解析式；或者在坐标系上画出图象（散点图），猜想是什么类型的函数，并用待定系数法求得函数解析式.

③ 验证并化简得到的函数解析式，得到数列的规律（通项）.

用棱长为 1 的小正方体按照一定的规律，排成图 26-1（1）（2）（3）. 按照这样的方法继续摆放，由上到下分别叫第 1 层、第 2 层、第 3 层……第 n 层，求第 n 层小正方体的个数 s.

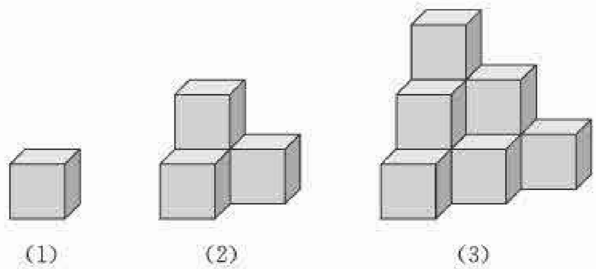


图 26-1

答案与提示：（1）列表：

n	1	2	3	4	…
s	1	3	6	10	…

（2）发现当自变量的值为 n 时，$s=1+2+3+\cdots+n$.

（3）验证并化简 $s=1+2+3+\cdots+n$，得 $s=\dfrac{n^2+n}{2}$.

2. 个人工资收入所得税问题

我国现行个人工资收入所得税计算方法如下表：

级数	含税级距	税率/%
1	不超过 1 500 元的部分	3
2	超过 1 500 元至 4 500 元的部分	10
3	超过 4 500 元至 9 000 元的部分	20
4	超过 9 000 元至 35 000 元的部分	25
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35
7	超过 80 000 元的部分	45

注：本表中“含税级距”指以每月收入额减去 3 500 元后的余额.

如果个人月工资收入（税前）为 x 元，应缴税款为 y 元.

（1）求 y 关于 x 的函数解析式；

（2）小张每月税后收入 4 973 元，他每月交个人所得税多少元？

答案与提示：（1）y 关于 x 的函数解析式是：

当 $x \leqslant 3\,500$ 时，$y=0$；

当 $3\,500<x\leqslant 5\,000$ 时，$y=0.03(x-3\,500)$；

当 $5\,000<x\leqslant 8\,000$ 时，$y=45+0.1(x-5\,000)$；

当 $8\,000<x\leqslant 12\,500$ 时，$y=345+0.2(x-8\,000)$；

当 $12\,500<x\leqslant 38\,500$ 时，$y=1\,245+0.25(x-12\,500)$；

当 $38\,500<x\leqslant 58\,500$ 时，$y=7\,745+0.3(x-38\,500)$；

当 $58\,500<x\leqslant 83\,500$ 时，$y=13\,745+0.35(x-58\,500)$；

当 $x>83\,500$ 时，$y=22\,495+0.45(x-83\,500)$.

（2）由于税前收入 5 000 元时，应交税款 $0.03(5\,000-3\,500)=45$(元)，税后收入为 4 955 元，还不到 4 973 元，因此小张的税前工资应超大于 5 000 元但不超过 8 000 元. 设小张税前工资为 x 元，则 $x-[45+0.1(x-5\,000)]=4\,973$，解这个方程得 $x=5\,020$. 所以小张的月税前工资为 5 020元，所交税额为 $45+0.1\times 20=47$（元）.

3. 用函数方法研究数轴上动点到定点（两个及以上）距离和的变化规律

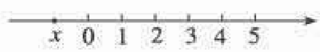


图 26-2

如图 26-2，数轴上一动点的坐标为 x，这个点到坐标分别为 1，5 两点的距离和为 y，问：

（1）随着 x 增大，y 怎样变化？证明你的结论.

（2）当 x 取什么值时，y 取最小值？y 的最小值是多少？

答案与提示：（1）根据绝对值的意义，把函数式转化为

$$y=\begin{cases}6-2x & (x<1),\\ 4 & (1\leqslant x\leqslant 5),\\ 2x-6 & (x>5).\end{cases}$$

画出图象如图 26-3，观察图象，可以直观地看出：

当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小；

当 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，y 是一个固定的值 4；

当 $x>5$ 时，y 随 x 的增大而增大；

当 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，y 有最小值 4.

证明：①当 $x<1$ 时，任取 $x_1<x_2<1$，

$y_2-y_1=(6-2x_2)-(6-2x_1)=-2(x_2-x_1)<0$，

所以 $y_2<y_1$，即当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

②当 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，任取 $1\leqslant x_1<x_2\leqslant 5$，$y_2=y_1=4$，所以，当自变量在这个范围内时，函数值不变.

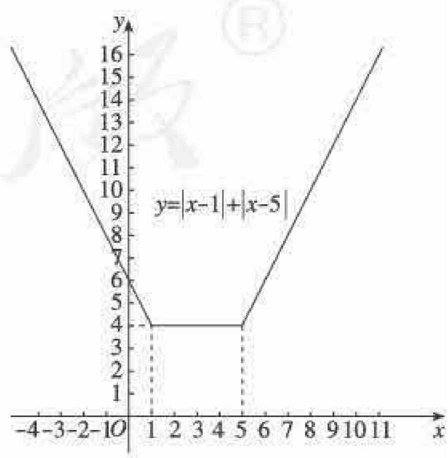


图 26-3

③当 $x>5$ 时，任取 $5<x_1<x_2$，

$$y_2-y_1=(2x_2-6)-(2x_1-6)=2(x_2-x_1)>0,$$

所以 $y_2>y_1$，即当 $x>5$ 时，y 随 x 的增大而增大.

根据上述分析，当 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，y 有最小值 4.

注：(1) 证明上述结论，还可以进一步转化为证明“若对于任意两个自变量的值 x_1，x_2，$x_1<x_2$ 都有 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}>0$（或 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<0$），则 y 随 x 的增大而增大（或 y 随 x 的增大而减小）”.

(2) 上述分段给出的三个函数可以合并为一个函数 $y=|x-1|+|x-5|$（$x\in\mathbf{R}$）. 一般地，$y=|x-a|+|x-b|$（$x\in\mathbf{R}$，a，b 是任意实数）表示数轴上的动点 x 到分别表示数 a，b 两点的距离之和.

(3) 一般地，研究函数性质的基本步骤是：建立模型、直观观察、理性证明、应用拓广. 也就是，先建立函数模型，结合图象等观察发现函数性质，然后证明性质，在这样整体把握函数的变化规律后解决问题，再通过抽象概括，拓广问题.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容包括变量与函数的概念，函数的表示法，一次函数（包括正比例函数）的解析式、图象及性质.

对于函数概念，应考查能否判断具体问题中的函数关系，是否能在具体问题中建立函数模型、选择适当的表示法表示函数关系、转换函数的不同表示方法、根据函数图象初步分析具体的变量对应关系和变化规律.

2. 对于一次函数（包括正比例函数），应考查建立一次函数模型、一次函数的性质及其应用、一次函数和方程（组）及不等式的关系. 重点考查应用一次函数模型解决实际问题的能力.

3. 本章内容中，教科书突出体现了数学模型和数形结合的思想. 前者主要表现在用函数模型刻画和研究事物变化规律的过程，后者主要表现在函数图象及其性质的研究过程. 因此，建议在适当的问题情境中，关注对这两种重要的数学思想的领悟和应用的评价，数形结合包括“以形表数”和“以数释形”两方面.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 下列变量之间关系中，一个变量是另一个变量的正比例函数的是（　　）.

(A) 正方形的面积 S 随着边长 x 的变化而变化

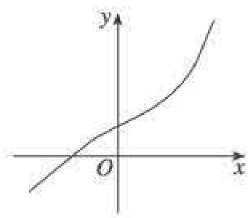
(B) 正方形的周长 C 随着边长 x 的变化而变化

(C) 水箱以 0.5 L/min 的流量往外放水，水箱中的剩水量 V L 随着放水时间 t min 的变化而

变化

(D) 面积为 20 的三角形的一边 a 随着这边上的高 h 的变化而变化

2. 如果某函数的图象如图所示，那么 y 随着 x 的增大而（　　）.



（第 2 题）

(A) 增大　　　　(B) 减小

(C) 不变　　　　(D) 有时增大有时减小

3. 一次函数 $y=kx+b$ 中，y 随 x 的增大而减小，$b<0$，则这个函数的图象不经过（　　）.

(A) 第一象限　　　　(B) 第二象限

(C) 第三象限　　　　(D) 第四象限

4. 如果 $P(2,\ m)$，$A(1,\ 1)$，$B(4,\ 0)$ 三点在同一直线上，则 m 的值为（　　）.

(A) 2　　　　(B) $-\dfrac{2}{3}$

(C) $\dfrac{2}{3}$　　　　(D) 1

5. 某油箱容量为 50 L 的汽车，加满汽油后开了 200 km 时，油箱中的汽油大约消耗了$\dfrac{1}{4}$. 如果加满汽油后汽车行驶的路程为 x km，油箱中的剩油量为 y L，则 y 与 x 之间的函数解析式和自变量取值范围分别是（　　）.

(A) $y=0.062\ 5x$，$x>0$　　　　(B) $y=50-0.062\ 5x$，$x>0$

(C) $y=0.062\ 5x$，$0\leqslant x\leqslant 800$　　　　(D) $y=50-0.062\ 5x$，$0\leqslant x\leqslant 800$

6. 食用油沸点的温度远高于水的沸点温度（100 ℃）. 小明为了用刻度不超过 100 ℃的温度计测量出某种食用油沸点的温度，在锅中倒入一些这种食用油，用煤气灶均匀加热，并每隔 10 s 测量一次锅中油温，测量得到的数据如下表：

时间 t/s	0	10	20	30	40
油温 y/℃	10	30	50	70	90

而且，小明发现，烧了 110 s 时，油沸腾了. 你估计这种油沸点的温度是（　　）.

(A) 200 ℃　　(B) 230 ℃　　(C) 260 ℃　　(D) 290 ℃

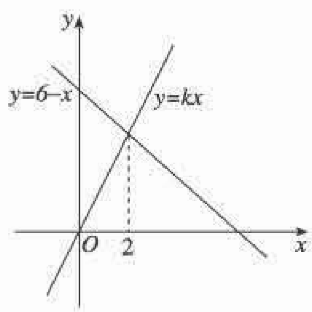
（二）填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 某电梯从 1 层（地面）直达 3 层用了 20 s，若电梯运行是匀速的，则乘坐该电梯从 2 层直达 8 层所需要的时间是________ s.

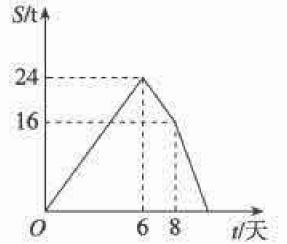
8. 直线 $y=2x-6$ 与 y 轴的交点的坐标为________，与 x 轴交点的坐标是________.

9. 函数 $y=kx$ 与 $y=6-x$ 的图象如图所示，则 $k=$________.

10. 春耕期间，某农资门市部连续 8 天调进一批化肥进行销售，在开始调进化肥的第 7 天开始销售. 若进货期间每天调入化肥的吨数与销售期间每天销售化肥的吨数都保持不变，这个门市部的化肥存量 S（单位：t）与时间 t（单位：天）之间的函数关系如图所示，则该门市部这次化肥销售活动（从开始进货到销售完毕）所用时间是____________.



（第 9 题）



（第 10 题）

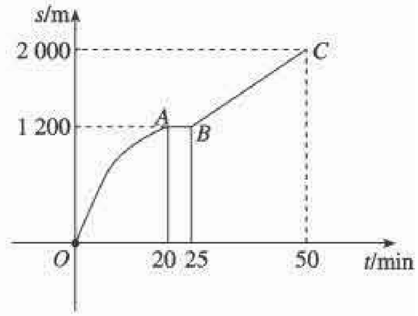
（三）**解答题**（第 11，12 题每题 10 分，第 13 题 14 分，第 16 题 16 分，共 50 分）

11. 一次函数图象经过（-2，1）和（1，3）两点.

（1）求这个一次函数的解析式；

（2）当 $x=3$ 时，求 y 的值.

12. 如图是小明散步过程中所走的路程 s（单位：m）与步行时间 t（单位：min）的函数图象.



（第 12 题）

（1）小明在散步过程中停留了多少时间？

（2）求小明散步过程步行的平均速度.

（3）在哪一时间段，小明是匀速步行的？在这一时间段，他步行的速度是多少？

13. 直线 a：$y=x+2$ 和直线 b：$y=-x+4$ 相交于点 A，分别与 x 轴相交于点 B 和点 C，与 y 轴相交于点 D 和点 E.

（1）求△ABC 的面积；

（2）求四边形 $ADOC$ 的面积.

14. 某景点的门票销售分两类：一类为散客门票，价格为 40 元/张；另一类为团体门票（一次性购买门票 10 张及以上），每张门票价格在散客门票价格基础上打 8 折. 某班部分同学要去该景点旅游，设参加旅游 x 人，购买门票需要 y 元.

（1）如果每人分别买票，求 y 与 x 之间的函数解析式；

（2）如果买团体票，求 y 与 x 之间的函数解析式，并写出自变量的取值范围；

（3）请根据人数变化设计一种比较省钱的购票方案.

参考答案

1. B. 本题主要考查正比例函数的概念.
2. A. 本题主要考查函数图象的阅读理解.
3. A. 本题主要考查一次函数的图象和性质.
4. C. 本题主要考查一次函数的图象.
5. D. 本题主要考查列函数解析式和确定自变量的取值范围.
6. B. 本题主要考查应用一次函数模型解决实际问题.

7. 60. 本题主要考查用正比例函数的性质解决实际问题.

8. (0，-6)，(3，0). 本题主要考查一次函数的图象.

9. 2. 本题主要考查一次函数与二元一次方程组的联系，以及数形结合的思想.

10. 10 天. 本题主要考查函数建模与数形结合的思想，以及读图能力.

11. (1) $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$；(2) $\frac{13}{3}$.

本题主要考查函数的图象、待定系数法求一次函数解析式和函数值的概念.

12. (1) 5 min；(2) 40 m/min；(3) 第 25～50 分，速度为 32 m/min.

本题主要考查函数图象的阅读理解.

13. (1) $S_{\triangle ABC}=9$，$S_{四边形ADOC}=7$.

本题主要考查一次函数与二元一次方程组的联系，以及数形结合的思想.

14. (1) $y=40x$；(2) $y=\begin{cases}320，0\leqslant x\leqslant 10，\\ 32x，x>10；\end{cases}$ (3) 8 人以下买散客票；8 人以上买团体票；恰好 8 人时，即可按 10 人买团体票，也可买散客票.

本题主要考查用一次函数、方程和不等式解决实际问题.

第二十七章　一元二次方程

Ⅰ 总体设计

一、本章学习目标

1. 理解配方法，能用配方法、公式法、因式分解法解数字系数的一元二次方程.

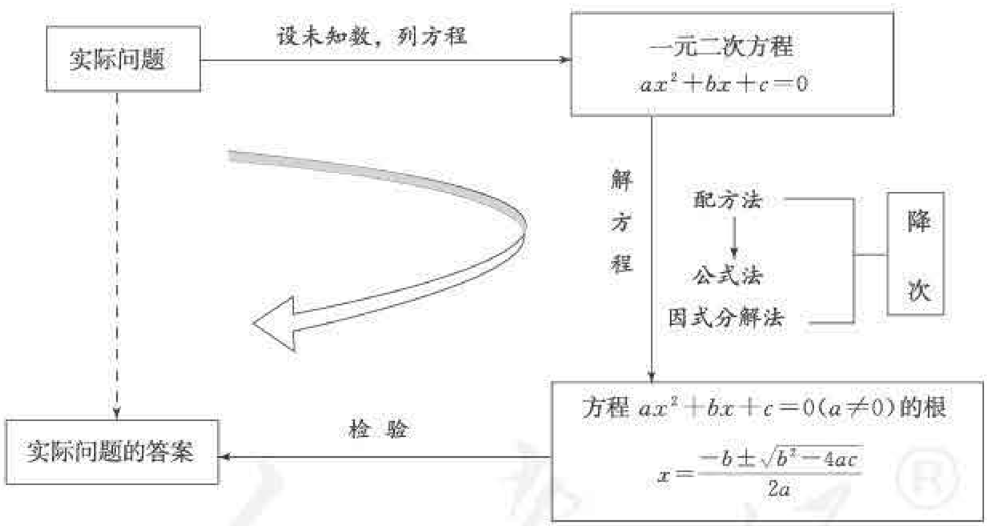
2. 会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实根和两个实根是否相等.

3. 了解一元二次方程的根与系数的关系.

4. 能根据具体问题的实际意义，检验方程的解是否合理.

5. 能根据具体问题中的数量关系列出一元二次方程，并利用一元二次方程模型解决简单的实际问题.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

现实生活中，许多问题中的数量关系可以抽象为一元二次方程. 因此，从深化数学模型思想、加强应用意识的角度看，从实际问题中抽象出数量关系，列出一元二次方程，求出它的根进而解决实际问题，是本章学习的一条主线.

学生已经学习一元一次方程的解法和实际应用，知道可以利用运算律、等式的基本性质，通过去括号、移项、合并同类项等求出它的解. 学生还学过二元一次方程组以及三元一次方程组的解法和实际应用，知道可以通过消元，将它们转化为一元一次方程. 从数学知识的内部发展看，二元、三元一次方程组可以看成是对一元一次方程在“元”上的推广. 自然地，如果在次数上做推广，首先就是一元二次方程. 类比二（三）元一次方程组的解法，可以想到：能否将一元二次方程转化为一

元一次方程？如何转化？因此，利用什么方法将“二次”降为“一次”，这是本章学习的另一条主线.

与一元一次方程、二元一次方程组的解法相比，一元二次方程的解法涉及更多的知识，可以根据方程的具体特点，选择相关的知识和方法，对方程进行求解. 这是培养学生的思维品质（特别是思维的敏捷性、灵活性、深刻性等）的机会. 根据《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（以下简称《课标（2011 年版）》）的规定，教科书着重介绍了配方法、公式法和因式分解法等一元二次方程的解法，而且限定在解数字系数的一元二次方程.

解一元二次方程的基本策略是降次，即通过配方、因式分解等，将一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来解. 具体地，根据平方根的意义，可得出方程 $x^2=p$ 和$(x+n)^2=p$ 的解法；通过配方，可将一元二次方程转化为$(x+n)^2=p$ 的形式再解；一元二次方程的求根公式，就是对方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）配方后得出的. 如能将 ax^2+bx+c 分解为两个一次因式的乘积，则可令每个因式为 0 来解.

一元二次方程的三种解法——配方法、公式法和因式分解法各有特点. 一般地，配方法是推导一元二次方程求根公式的工具. 掌握了公式法，就可以直接用公式求一元二次方程的根了. 当然，也要根据方程的具体特点，选择适当的解法，因式分解法就显示了这样的灵活性. 配方法是一种重要的、应用广泛的数学方法，如后面研究二次函数时也要用到它. 在推导求根公式的过程中，从 $x^2=p$ 到$(x+n)^2=p$ 再到$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），是方程形式的不断推广，体现了从特殊到一般的过程；而求解方程的过程则是将推广所得的方程转化为已经会解的方程，体现了化归思想. 显然，这个过程对于培养学生的推理能力、运算能力等都是很有作用的.

与《义务教育数学课程标准（实验稿）》相比，《课标（2011 年版）》重新强调了一元二次方程根的判别式和一元二次方程根与系数关系的重要性，要求“会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实根和两个实根是否相等”，“了解一元二次方程的根与系数的关系”，这是需要注意的一个变化. 这里不仅是为了一元二次方程理论的完整性，更重要的是为了解决初高中衔接问题. 实际上，一元二次方程根的判别式、一元二次方程根与系数的关系在高中数学中有着广泛的应用，是学习高中数学的必备基础.

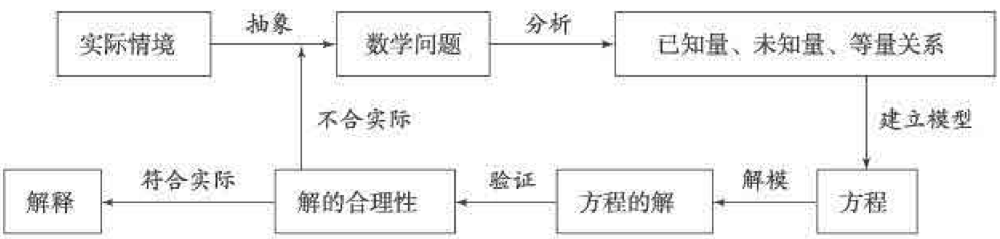
教科书先以一个设计人体雕像的实际问题作为开篇，并在第 27.1 节中又给出两个实际问题，通过建立方程，引导学生思考这些方程的共同特点，从而归纳得出一元二次方程的概念、一般形式，给出一元二次方程根的概念. 在这个过程中，通过归纳一些具体方程的共同特点，定义一元二次方程的概念，体现了研究代数学问题的一般方法；一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 也是对具体方程从“元”（未知数的个数）、“次数”和“项数”等角度进行归纳的结果；$a\neq0$ 的规定是由“二次”所要求的，这实际上也是从不同侧面理解一元二次方程概念的契机.

一元二次方程的解法，包括配方法、公式法和因式分解法等，是全章的重点内容之一. 教科书在第 27.2 节中，首先通过实际问题，建立了一个最简单的一元二次方程，并利用平方根的意义，通过直接开平方法得到方程的解；然后将它一般化为 $x^2=p$，通过分类讨论得到其解的情况，从而完成解一元二次方程的奠基. 接着，教科书安排“探究”栏目，自然引出解$(x+3)^2=5$并总结出“降次”的策略，从而为用配方法解比较复杂的一元二次方程作好铺垫，然后教科书重点讲解了配方的步骤，并归纳出通过配方将一元二次方程转化为$(x+n)^2=p$ 后的解的情况. 以配方法为基础，教科书安排了“探究”栏目，引导学生自主地用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，得到求根公式. 最后，通过实际问题，获得一个显然可以用“提取公因式法”而达到“降次”目的的方程，从而引出因式分解法解一元二次方程，并在“归纳”栏目中总结出几种解法的基本思

路、各自特点和适用范围等. 上述过程的思路自然，体现了从简单的、特殊的问题出发，通过逐步推广而获得复杂的、一般的问题，并通过将一般性问题化归为特殊问题，获得这一类问题的解. 这是具有普适性的数学思想方法.

由于限定在实数范围，因此对求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，首先要关注判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的讨论. 这是使学生领悟分类讨论数学思想方法的契机. 另一方面，求根公式不仅直接反映了方程的根由系数唯一确定（系数 a，b，c 确定，方程就确定，其根自然就唯一确定），而且也反映了根与系数的联系. 这里体现了一种多角度看问题的思想观点，而“韦达定理”是根与系数联系性的更简洁的表现方式. 教科书仍然采用从特殊到一般的方法，先讨论“将方程 $(x-x_1)(x-x_2)=0$ 化为 $x^2+px+q=0$ 的形式，x_1，x_2 与 p，q 之间的关系”，在“$x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$”的启发下，利用求根公式求 x_1+x_2 和 x_1x_2，进而得到根与系数的关系. 让学生学习根与系数的关系，不仅能深化对一元二次方程的理解，提高用一元二次方程分析和解决问题的能力，而且也是培养学生发现和提出问题的能力的机会. 根与系数的关系是求根公式的自然延伸，得出它的过程并不复杂，而其中蕴含的思想很重要. 所以，对于根与系数的关系，教科书着重在其数学思想的启发和引导上，而对用根与系数的关系去解决问题，严格地控制了难度.

前已述及，用一元二次方程解决实际问题是本章内容的一条主线. 为了更好地体现这一思想，教科书除在一元二次方程的概念、表示和解法研究中注重从实际问题出发外，在第 27.3 节还专门安排了三个“探究”，让学生建立一元二次方程模型解决实际问题，再一次经历如下过程：



最后，在本章小结中，教科书通过知识结构图，再次强调建立一元二次方程模型解决实际问题的基本过程，并在“回顾与思考”中梳理了“降次”的基本思路、过程以及具体方法.

四、课时安排

本章教学时间约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）：

27.1　一元二次方程	1 课时
27.2　解一元二次方程	7 课时
27.3　一元二次方程与实际问题	4 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 注重联系实际，体现建模思想，发展应用意识

一元二次方程是初中数学中最重要的数学模型之一，它有丰富的实际背景. 通过建立一元二次方程模型解决实际问题，可以使学生更深入地体会数学与现实世界的联系，发展学生的应用意识.

因此，本章的编写，自始至终都注重联系实际，从实际问题中引出一元二次方程的有关知识，并最终回到建立一元二次方程模型解决实际问题中去.

本章开篇，教科书利用人体雕像这一典型的黄金分割问题，通过建立数学模型得到一个一元二次方程，由此引发学习本章内容的需要. 接着，通过制作无盖方盒问题和邀请参赛球队的个数问题，又得到两个一元二次方程，然后引导学生从“未知数的个数”和“最高次数”两个方面进行归纳，抽象出一元二次方程的概念及其数学符号表示（一元二次方程的一般形式）. 在讨论一元二次方程的解法时，教科书又通过简单的实际问题，引导学生分析其中的已知量、未知量和等量关系，建立一元二次方程，得出方程的解，并检验所得的结果是否符合实际，最终将问题推广，得出具有一般意义的一元二次方程的解法. 在掌握解法的基础上，专门安排了“一元二次方程与实际问题”，以“探究”的方式提出问题，使学生完整地经历“问题情境—建立模型—求解验证”的数学活动过程. 这样编排，不仅可以使学生认识到学习一元二次方程是解决实际问题的需要，而且还可以使学生在学会一元二次方程解法的过程中，体验运用数学知识解决实际问题的基本过程，积累数学活动经验，从而培养模型思想，逐步形成应用意识.

2. 重视相关的知识联系，建立合理的逻辑过程，突出解方程的基本策略

对于方程及其解法，学生从小学就开始接触. 进入初中后，学生又学习了一元一次方程、二元一次方程组以及可化为一元一次方程的分式方程. 因此，学生对于解方程涉及的数学思想（化归）、理论依据（等式的性质、运算律）以及基本思路（通过恒等变形，把方程逐步化为 $x=a$ 的形式）等都已比较熟悉. 对于一元二次方程的解法，基本思路仍然是“设法把方程化为 $x=a$ 的形式”，而一元二次方程与熟悉的方程比较，差异在“次数”. 因此，将“二次”降为“一次”就能使“新方程”转化为“旧方程”，这样就明确了解一元二次方程的关键问题——如何降次.

教科书采用从特殊到一般、从具体到抽象的方法，从熟悉的方程 $x^2=p$ 出发，经过不断推广而得到一般的 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）；探究解法时，则利用“配方法”，把“新方程”化归为已解决的形式. 具体过程如下：

首先，根据平方根的意义，通过直接开平方得到方程 $x^2=25$ 的解，再推广到求方程 $x^2=p$ 的解，引导学生对 $p>0$，$p=0$ 和 $p<0$ 三种情况进行讨论.

然后，通过分析变式$(x+3)^2=5$的解决过程，归纳出“把一个一元二次方程‘降次’，转化为两个一元一次方程”的思路，再给出$(x+3)^2=5$的等价形式 $x^2+6x+4=0$，并用框图表示将 $x^2+6x+4=0$ 转化为$(x+3)^2=5$的过程，最后归纳出“配方法”. 在此基础上，引导学生讨论通过配方将一元二次方程转化为$(x+n)^2=p$ 的形式后的解，让他们再次经历分类讨论的过程.

接着，再通过“探究　任何一个一元二次方程都可以写成一般形式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）（Ⅲ）. 能否也用配方法得出（Ⅲ）的解呢?”让学生借助用配方法解一元二次方程的已有经验，自主推导出求根公式.

上述过程，让学生反复经历了“具体—抽象”“配方—分类讨论”的过程，不仅获得了求根公式，而且有利于突破两个难点：针对一般形式的一元二次方程的配方，分类讨论.

再接着，通过实际问题得到方程 $10x-4.9x^2=0$，学生很容易想到，这个方程不需要通过配方、开平方降次，只要通过因式分解，将方程化为 $x(10-4.9x)=0$，就能实现降次. 然后再进行归纳，得出针对某些方程的简便解法——因式分解法. 实际上，这是一个“从一般到特殊”的过程，针对某些特殊形式的一元二次方程的特殊解法. 数学中，一般都要在研究一般情况后，再看看有什么特殊情况. 考察“特例”是数学研究的基本套路.

最后进行根与系数关系的研究. 从“发现和提出数学问题”的角度看，研究一元二次方程的解法是“给定方程的系数，求未知数的值”. 另一方面，我们也可以这样提出问题：已知一元二次方程的两个根，能否求出它的系数的值？事实上，方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）总可以化为 $x^2+px+q=0$ 的形式. 如果 $x^2+px+q=0$ 的两个根为 x_1，x_2，则有$(x-x_1)(x-x_2)=0$，展开并比较方程的系数，就容易得到 $p=-(x_1+x_2)$，$q=x_1x_2$. 由此得到启发，利用求根公式求 x_1+x_2 和 x_1x_2，可得到根与系数的关系. 教科书在一定程度上体现了上述逻辑思考过程.

3. 注重培养发现和提出问题、分析和解决问题的能力

因为学生已经具备研究一元二次方程的概念、解法的知识基础，只要他们能把这些知识调动起来，应用到研究中去，他们就能独立地发现解法，所以教科书注重通过栏目和“边空设问”等方式启发学生的思维，为他们提供独立探究的机会. 例如：

(1) 引入一元二次方程概念的过程中，教科书在“边空”中多次安排提示性设问“方程中未知数的个数和最高次数各是多少?”再在“思考”栏目中提出归纳几个方程共同特点的学习任务；在给出一元二次方程概念、一般形式后，通过“为什么规定 $a\neq0$?”引导学生辨析概念. 最后通过例题，让学生用概念作判断. 这样安排，体现了概念学习的一般过程，教科书在归纳具体方程的共同特点、辨析概念的关键词等关键环节设置问题，引导学生进行独立思考与发现.

(2) 在探索一元二次方程解法的过程中，教科书在讨论了“方程 $x^2=p$ 的解”以后，循序渐进地安排了如下栏目：

探究　对照上面解方程（Ⅰ）的过程，你认为应怎样解方程$(x+3)^2=5$?

探究　怎样解方程 $x^2+6x+4=0$?

在上述两个“探究”的基础上，讨论“如果一个一元二次方程通过配方转化成$(x+n)^2=p$ 的形式，那么它的解有哪些情形?”

探究　任何一个一元二次方程都可以写成一般形式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）（Ⅲ）. 能否也用配方法得出（Ⅲ）的解呢?

思考　除配方法或公式法以外，能否找到更简单的方法解方程①?

上述过程中，教科书通过“一般化”“推广”“特殊化”等，引导学生不断地发现问题、解决问题.

(3) 在“一元二次方程与实际问题”中，教科书以“探究”栏目的方式给出例题，在分析题意、解决问题的过程中，通过“边空提问”提示学生思考数学结论的现实意义，并通过“思考”栏目进一步提出拓展性、开放性问题. 例如，解决了“探究 1　有一个人患了流感，经过两轮传染后共有 121 个人患了流感，每轮传染中平均一个人传染了几个人?”以后，教科书提出了两个问题：

通过对这个问题的探究，你对类似的传播问题中的数量关系有新的认识吗?

如果按照这样的传染速度，经过三轮传染后共有多少个人患流感?

对这些问题的思考，可以加深学生对“传播问题”的认识，感受与“增长率”相关的数学模型中的数量关系，同时还能培养学生用数学模型解释现实问题的能力，这就是一个培养分析问题和解决问题能力的过程.

六、对本章教学的建议

1. 为学生构建研究一元二次方程解法的连贯过程

宏观而言，学生已具备解一元二次方程的基本思想——化归，即把方程转化为一次方程，最终

化为 $x=a$；而且也具有将一元二次方程转化为一次方程所需要的平方根、配方、因式分解等知识基础. 问题在于学生在面对解一元二次方程的任务时，不知道该用这些知识及其思想方法，也就是说他们“不是做不到，而是想不到”. 因此，教学的关键是要通过适当的问题提示，把这些知识调动起来，联系起来，使它们在研究解法中发挥作用. 具体而言，可以按如下线索安排：

实际背景引入（如章引言中的方程）→从已有经验中总结解方程的一般思想方法（化归为一元一次方程）→类比二元一次方程组的“消元”，得到解一元二次方程的思路“降次”→从简单、具体、特殊的一元二次方程（如 $x^2=25$，$x^2=p$；$(x+3)^2=5$，$x^2+6x+4=0$，$(x+n)^2=p$ 等）探索“降次”的方法（直接开平方、配方法）→用配方法推导求根公式（公式法）→针对特殊的一元二次方程的特殊解法（因式分解法）.

教学过程中，要注意整体性，让学生经历研究一元二次方程解法的完整过程，避免不同解法之间的割裂. 其中，方程 $x^2=p$ 的解具有奠基作用，特别是对 p 的分类讨论，蕴含了对判别式的分类讨论，所以一定要认真处理好；推广的方程 $(x+3)^2=5$ 与 $x^2+6x+4=0$ 是获得配方法的载体；配方法是公式法的基础；公式法是直接利用公式求根，省略了配方过程；因式分解法是解特殊形式的一元二次方程的简便方法.

为了让学生获得解一元二次方程的方法，教学中应加强类比、从特殊到一般等思想方法的引导.

2. 注重模型思想、应用意识的培养

许多现实问题的数量关系都可以抽象为一元二次方程，与前面所学的方程比较，一元二次方程有更广泛的应用，是初中学生体会和理解数学与外部世界联系的重要载体. 教科书充分考虑到一元二次方程的这一地位，教学中要体现好这一编写意图，注意让学生经历建立和求解一元二次方程模型的完整过程，即从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立一元二次方程表示数学问题中的数量关系，求出结果并讨论结果的意义，从而把模型思想、应用意识的培养落在实处.

在建立数学模型解决实际问题的过程中，难点在于数量关系的分析和数学模型的选择，本章也不例外. 教学中应注意引导学生仔细分析题意，借助适当的直观工具，如画图、列表等，找出问题中的已知量、未知量，找到关键词并由此确定等量关系，进而建立一元二次方程. 要注意培养学生良好的解题习惯，包括借助直观方法分析题意、检验所得方程及其根的实际意义，找出合乎实际的结果等.

3. 注意控制教学要求

学习本章的主要目的是让学生掌握一元二次方程模型并能灵活用于解决问题. 其中，学习根与系数关系的目的在于使学生更深入地体会根与系数的确定性关系，更全面地认识一元二次方程. 传统上，针对判别式、根与系数的关系等往往要进行大量的形式化训练，这对锻炼学生的思维有一定好处，但复杂的代数变形对提高学生的数学能力（特别是数学建模能力）没有多大帮助. 因此，要注意把握好这些教学要求，控制好形式化训练的难度，特别是不要搞用根与系数的关系解决其他问题的训练.

为了提高学生的发现和提出问题的能力，可以把“根与系数的关系”设置为一个研究性学习课题. 例如，引导学生思考“系数 a，b，c 确定，那么方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）确定，它的两个根也唯一确定. 反之，如果已知一元二次方程的两个根，系数是否也唯一确定?”然后展开研究. 进一步地还可以让学生思考几个独立条件确定一个一元二次方程、方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个根与二次三项式 ax^2+bx+c（$a\neq0$）的因式分解等问题.

Ⅱ 教材分析

第二十七章　一元二次方程

在设计人体雕像时，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，可以增加视觉美感. 按此比例，如果雕像的高为 2 m，那么它的下部应设计为多高？

如图，雕像的上部高度 AC 与下部高度 BC 应有如下关系：

$$AC:BC=BC:2，即 BC^2=2AC.$$ [1]

设雕像下部高 x m，可得方程 $x^2=2(2-x)$，整理得

$$x^2+2x-4=0.$$

这个方程与我们学过的一元一次方程不同，其中未知数 x 的最高次数是 2. 如何解这类方程？如何用这类方程解决一些实际问题？这就是本章要学习的主要内容.

[2]

[1] 这里先把比例式转化，是为了避免出现分式方程.

[2] 这幅图是辽宁抚顺雷锋纪念馆前的雷锋雕像. 它配合引言中的人体雕像上下高度比问题，本章由这个问题引出一元二次方程.

1. 方程是应用广泛的数学模型，在初中数学课程中占有重要地位. 本套教科书中，方程内容出现的顺序是：一元一次方程（七年级上册），二元一次方程组（七年级下册），分式方程（八年级上册），一元二次方程（八年级下册）.

2. 整式方程按其中未知数（元）的个数和未知数的最高次数分类. 一元二次方程与前面所学整式方程相比，变化在于未知数的最高次数由一次升为二次，从而使一元二次方程的解法更多样、更复杂. 一般地，解代数方程（组）的基本思路是化归为一元一次方程，所以把方程由二次降为一次是解一元二次方程的基本策略.

3. 本章注重在分析、解决实际问题的过程中讲解数学知识. 开篇的引入问题是人体雕像设计问题，转化为几何问题，就是要确定线段的内外比分点，也称为黄金分割问题. 本章在第 27.2 节后安排了选学内容“阅读与思考　黄金分割数”，对这一问题作了拓展性介绍.

[1] 为了制作无盖方盒，铁皮各角切去的正方形应大小相同.

[2] 这是对观察方向上的引导.

[3] 这种比赛形式也叫做单循环比赛，其特点是任何两队之间都要比赛一场，而且只比赛一场.

27.1 一元二次方程

方程

$$x^2+2x-4=0 \qquad ①$$

中有一个未知数 x，x 的最高次数是 2. 像这样的方程有广泛的应用，请看下面的问题.

问题 1 如图 27.1-1，有一块矩形铁皮，长 100 cm，宽 50 cm，在它的四角各切去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，就能制作一个无盖方盒. 如果要制作的无盖方盒的底面积为 3 600 cm²，那么铁皮各角应切去多大的正方形？[1]

图 27.1-1

设切去的正方形的边长为 x cm，则盒底的长为 $(100-2x)$ cm，宽为 $(50-2x)$ cm. 根据方盒的底面积为 3 600 cm²，得

$$(100-2x)(50-2x)=3\,600.$$

整理，得

$$4x^2-300x+1\,400=0.$$

化简，得

$$x^2-75x+350=0. \qquad ②$$

由方程②可以得出所切正方形的具体尺寸.

方程②中未知数的个数和最高次数各是多少？[2]

问题 2 要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队之间都要比赛一场.[3] 根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛，比赛组织者应邀请多少个队参赛？

全部比赛的场数为 $4\times7=28$.

设应邀请 x 个队参赛，每个队要与其他 $(x-1)$ 个队各赛一场，因为甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以全部比赛共 $\frac{1}{2}x(x-1)$ 场.

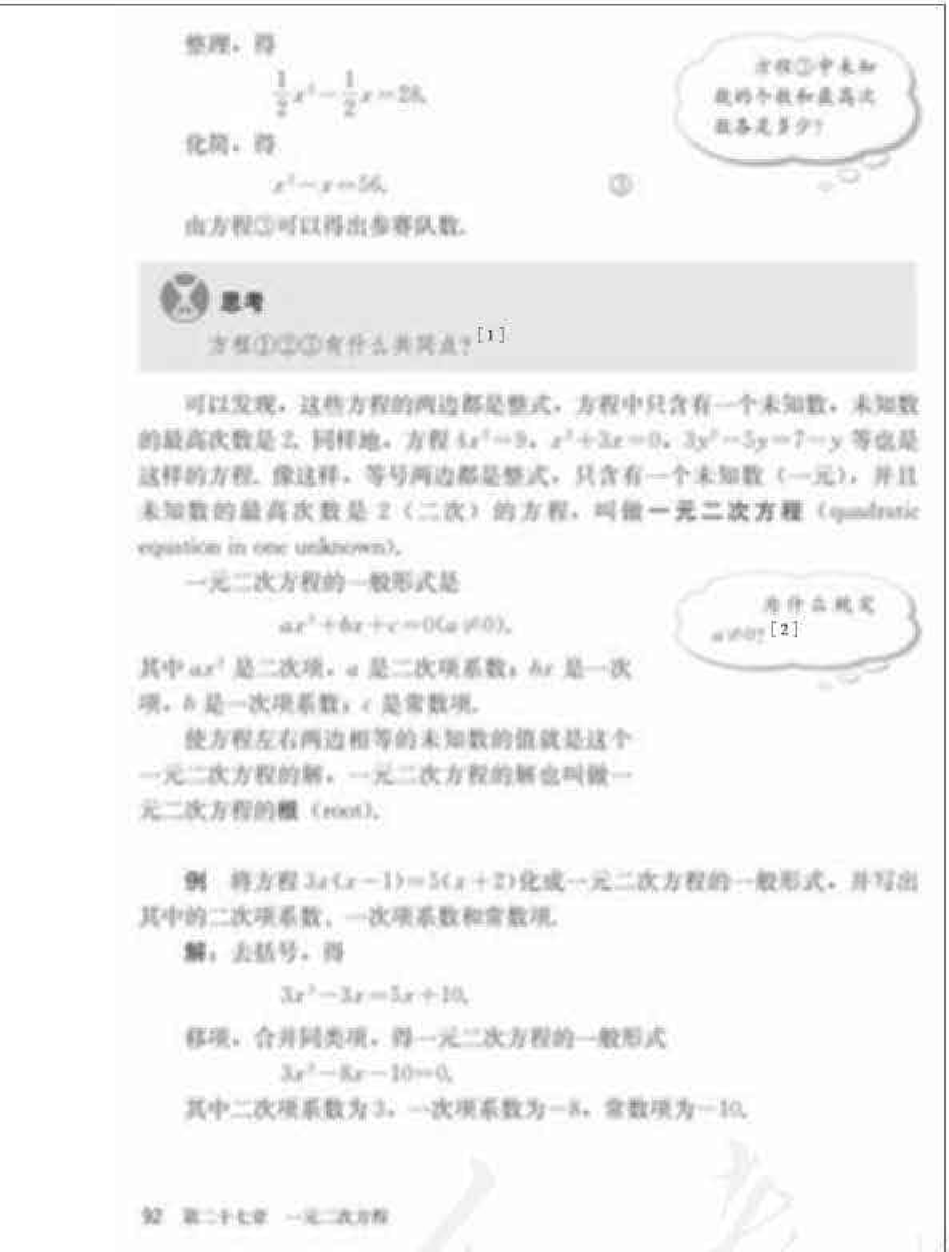
列方程

$$\frac{1}{2}x(x-1)=28.$$

第二十七章 一元二次方程 91

1. 本节在引言的基础上，安排两个实际问题，得出一元二次方程的具体例子，再引导学生观察三个具体方程，发现它们在形式上的共同点，给出一元二次方程的概念及其表示. 这个过程体现了概念学习的一般进程：分析典型丰富的具体例证，抽取不同事例的共同特征、舍弃非本质特征，概括得到概念，给出符号表示，对关键词进行辨析，通过例子巩固概念. 这里，通过现实问题认识概念，是为了增强学生对一元二次方程与现实生活的联系的认识.

2. 一元 n 次方程的一般形式是：$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_0\neq0)$，这里是以未知数个数和次数为标准定义的. 一元二次方程是一种简单的多项式方程，其一般形式为 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$. 教科书根据概念的这一要求，在具体例子的归纳方向上作出引导，以利于学生思考，并给出辨析性问题“为什么规定 $a\neq0$?”教学时应让学生充分经历这一过程.



整理，得

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=28.$$

化简，得

$$x^2-x=56. \quad ③$$

由方程③可以得出参赛队数.

方程③中未知数的个数和最高次数各是多少？

思考

方程①②③有什么共同点？[1]

可以发现，这些方程的两边都是整式，方程中只含有一个未知数，未知数的最高次数是2. 同样地，方程 $4x^2=9$，$x^2+3x=0$，$3y^2-5y=7-y$ 等也是这样的方程. 像这样，等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是2（二次）的方程，叫做**一元二次方程**（quadratic equation in one unknown）.

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0).$$

为什么规定 $a\neq 0$？[2]

其中 ax^2 是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数；c 是常数项.

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的**根**（root）.

例 将方程 $3x(x-1)=5(x+2)$ 化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

解：去括号，得

$$3x^2-3x=5x+10.$$

移项，合并同类项，得一元二次方程的一般形式

$$3x^2-8x-10=0.$$

其中二次项系数为3，一次项系数为-8，常数项为-10.

92 第二十七章 一元二次方程

［1］思考三个方程的共同点，是为给出一元二次方程的概念作准备. 前面在观察方程的特点上已经作了引导.

［2］用字母 a，b，c 表示具体的常数，这些字母可以取不同的值，但 $a\neq 0$，否则方程就不是二次的了.

3. 列方程的问题贯穿本节始终. 这样安排，既可以使学生认识引入一元二次方程概念的现实必要性，也可以分散列方程这一教学难点，循序渐进地培养从实际问题中抽象方程模型的能力. 本节的重点是理解一元二次方程概念及其有关概念，其中涉及一元二次方程根的概念，但教学中不要过早把学生的注意力引向解方程.

练习答案

1. （1）$5x^2-4x-1=0$，
   5，-4，-1；
   （2）$4x^2-81=0$，
   4，0，-81；
   （3）$4x^2+8x-25=0$，
   4，8，-25；
   （4）$3x^2-7x+1=0$，
   3，-7，1.
2. （1）$4x^2-25=0$；
   （2）$x^2-2x-100=0$；
   （3）$x^2-3x+1=0$.


练习

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项：
(1) $5x^2-1=4x$；　(2) $4x^2=81$；
(3) $4x(x+2)=25$；　(4) $(3x-2)(x+1)=8x-3$.
2. 根据下列问题，列出关于 x 的方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式：
(1) 4 个完全相同的正方形的面积之和是 25，求正方形的边长 x；
(2) 一个矩形的长比宽多 2，面积是 100，求矩形的长 x；
(3) 把长为 1 的木条分成两段，使较短一段的长与全长的积，等于较长一段的长的平方，求较短一段的长 x.

习题 27.1

复习巩固

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项：
(1) $3x^2+1=6x$；　(2) $4x^2+5x=81$；
(3) $x(x+5)=0$；　(4) $(2x-2)(x-1)=0$；
(5) $x(x+5)=5x-10$；　(6) $(3x-2)(x+1)=x(2x-1)$.
2. 根据下列问题列方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式：
(1) 一个圆的面积是 $2\pi\ \mathrm{m}^2$，求半径；
(2) 一个直角三角形的两条直角边相差 3 cm，面积是 9 cm^2，求较长的直角边的长.
3. 下列哪些数是方程 $x^2+x-12=0$ 的根？
-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4.

综合运用

根据下列问题列方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式（第 4~6 题）.
4. 一个矩形的长比宽多 1 cm，面积是 132 cm^2，矩形的长和宽各是多少？
5. 有一根 1 m 长的铁丝，怎样用它围成一个面积为 0.06 m^2 的矩形？
6. 参加一次聚会的每两人都握了一次手，所有人共握手 10 次，有多少人参加聚会？

拓广探索

7. 如果 2 是方程 $x^2-c=0$ 的一个根，那么常数 c 是多少？求出这个方程的其他根.

第二十七章　一元二次方程　93

习题 27.1

1.“复习巩固”的题目有两类：

（1）巩固对一元二次方程的一般形式的认识，为后面讨论一元二次方程的解法作准备；

（2）巩固对一元二次方程根的概念的认识，为后面讨论更复杂的方程的解法作铺垫.

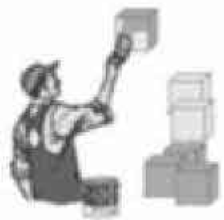
2.“综合运用”要求列方程并化为一元二次方程的一般形式. 它们除复习巩固一元二次方程的一般形式外，还可以培养学生分析实际问题列出方程的能力，这是本章重点培养的能力之一.

3.“拓广探索”的题目，一是灵活应用方程的解的概念，二是用开平方法解方程，为下一节学习作准备.

27.2 解一元二次方程

27.2.1 配方法

问题 1[1] 一桶油漆可刷的面积为 $1\,500\ \mathrm{dm}^2$，李林用这桶油漆恰好刷完 10 个同样的正方体形状的盒子的全部外表面，你能算出盒子的棱长吗？



设其中一个盒子的棱长为 x dm，则这个盒子的表面积为 $6x^2\ \mathrm{dm}^2$，根据一桶油漆可刷的面积，列出方程

$$10\times 6x^2=1\,500. \quad ①$$

整理，得

$$x^2=25.$$

根据平方根的意义，得

$$x=\pm 5,$$

即

$$x_1=5,\ x_2=-5.$$

可以验证，5 和 -5 是方程①的两个根，因为棱长不能是负值，所以盒子的棱长为 5 dm.

> 用方程解决实际问题时，要考虑所得结果是否符合实际意义.

一般地，[2] 对于方程

$$x^2=p, \quad (Ⅰ)$$

(1) 当 $p>0$ 时，根据平方根的意义，方程（Ⅰ）有两个不等的实数根

$$x_1=-\sqrt{p},\ x_2=\sqrt{p};$$

(2) 当 $p=0$ 时，方程（Ⅰ）有两个相等的实数根 $x_1=x_2=0$；

(3) 当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x，都有 $x^2\geq 0$，所以方程（Ⅰ）无实数根.

94 第二十七章 一元二次方程

[1] 问题 1 虽然简单，但其解答过程是一个完整的用一元二次方程模型解决问题的过程：抽象出实际问题中的数量关系—列一元二次方程—解方程—验证.

[2] 这个“一般地”是一个从特殊到一般的推广. 教学中要注意先让学生独立思考.

1. 第 27.2.1 小节仍然结合实际问题展开，重点讨论用配方法解一元二次方程.

问题 1 是引例，列出一元二次方程并不困难，其目的是为了使学生直接想到用直接开平方法解方程 $x^2=25$. 教学时应让学生联系前面的相关知识.

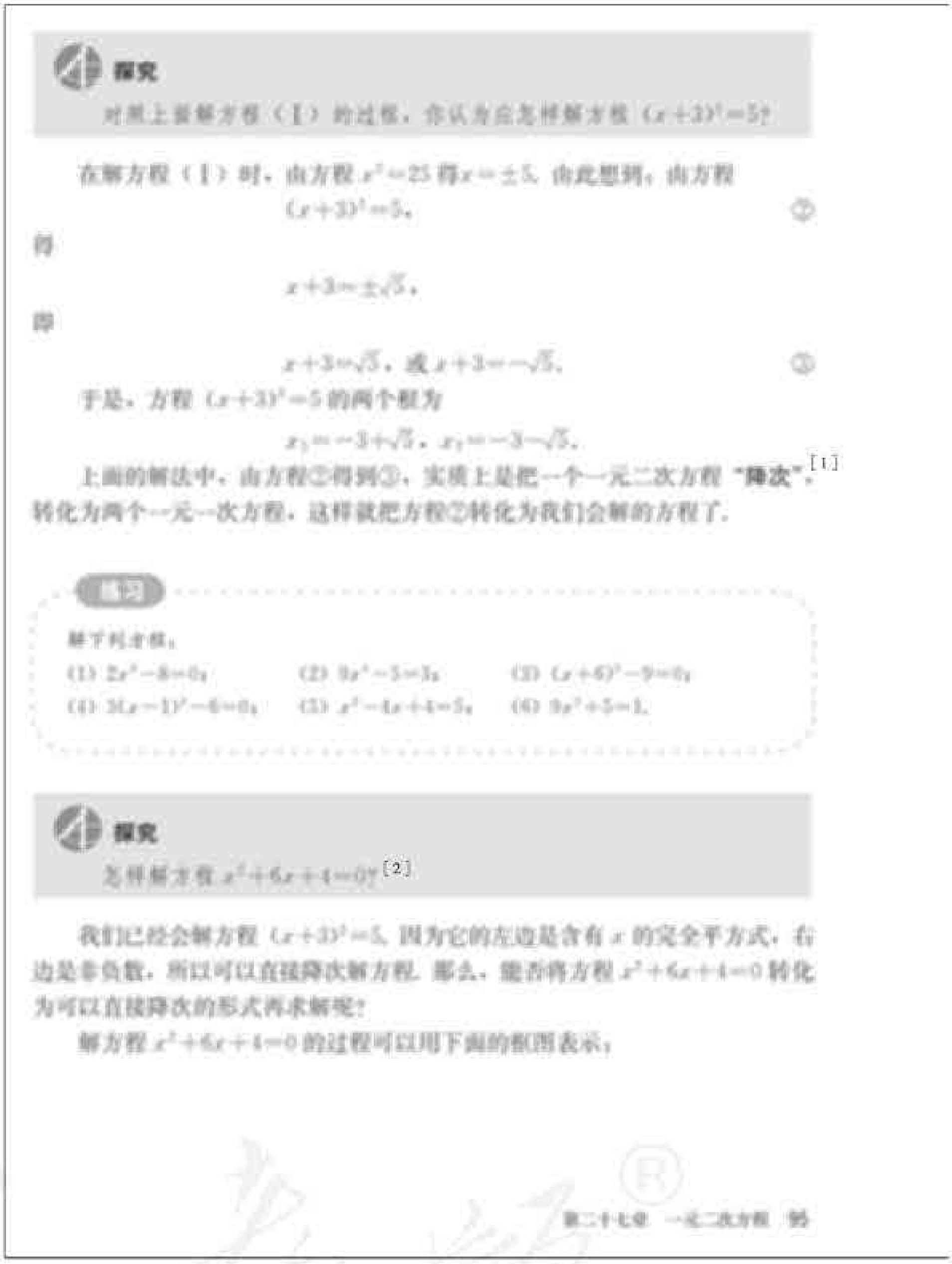
2. 方程 $x^2=p$ 的解需要分类讨论. 这个过程直接利用平方根的意义就能完成，简单但反映本质，在整个一元二次方程解法的讨论中具有奠基作用. 教学时要让学生先独立思考完成，然后再交流，务必使学生牢固掌握.

3. 方程 $(x+3)^2=5$ 是对 $x^2=p$ 在项数上的推广，可以用直接开平方法来解. “探究”中的问题提醒学生对照解 $x^2=p$ 的过程，是为了加强与已有解法的联系，由此自然地引出“降次”的策略.

4. 方程 $x^2+6x+4=0$ 配方后就是 $(x+3)^2=5$，这样安排主要是避免复杂的方程形式的干扰，

[1] “降次”是解一元二次方程的基本策略. 可以让学生用“降次”说明前面解方程 $x^2=25$ 的过程.

[2] 它是方程 $(x+3)^2=5$ 的另一种形式，两者对照容易使学生想到“配方”.



探究

对照上面解方程（Ⅰ）的过程，你认为应怎样解方程 $(x+3)^2=5$？

在解方程（Ⅰ）时，由方程 $x^2=25$ 得 $x=\pm5$. 由此想到，由方程

$$(x+3)^2=5, \quad ②$$

得

$$x+3=\pm\sqrt{5},$$

即

$$x+3=\sqrt{5}，或 x+3=-\sqrt{5}. \quad ③$$

于是，方程 $(x+3)^2=5$ 的两个根为

$$x_1=-3+\sqrt{5}，x_2=-3-\sqrt{5}.$$

上面的解法中，由方程②得到③，实质上是把一个一元二次方程“降次”[1]，转化为两个一元一次方程，这样就把方程②转化为我们会解的方程了.

练习

解下列方程：

(1) $2x^2-8=0$； (2) $9x^2-5=3$； (3) $(x+6)^2-9=0$；

(4) $3(x-1)^2-6=0$； (5) $x^2-4x+4=5$； (6) $9x^2+5=1$.

探究

怎样解方程 $x^2+6x+4=0$？[2]

我们已经会解方程 $(x+3)^2=5$. 因为它的左边是含有 x 的完全平方式，右边是非负数，所以可以直接降次解方程. 那么，能否将方程 $x^2+6x+4=0$ 转化为可以直接降次的形式再求解呢？

解方程 $x^2+6x+4=0$ 的过程可以用下面的框图表示：

第二十七章 一元二次方程

练习答案

(1) $x=\pm2$；

(2) $x=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$；

(3) $x=-3$，$x=-9$；

(4) $x=1\pm\sqrt{2}$；

(5) $x=2\pm\sqrt{5}$；

(6) 无解.

有利于学生想到把含有未知数的项配成完全平方式. 教学中应注意贯彻教科书这一“削支强干”的意图，不要在方程的复杂程度上做文章.

5. 教科书在讨论直接开平方法时，循序渐进地安排了两类方程：$x^2=p$ 和 $(x+n)^2=p$，后者可以看成前者的推广. 在解法上则通过将新方程转化为旧方程来解决. 这样安排有利于学生体会如何从简单情形出发，通过不断推广而得到更一般的方程形式；再通过“新化归为旧”而使新方程得解. 这是一个具有一般意义的研究方法，教学中应引导学生认真体会.

6. 将方程 $x^2+6x+4=0$ 配方的过程，通过与方程 $(x+3)^2=5$ 比较，可以发现应该将方程中含 x 的项配成完全平方的形式. 于是产生后面的“移项”“方程两边加一次项系数一半的平方”“方程一边写成完全平方形式”等具体做法. 教学中，应引导学生理解每一个步骤的目的，并在理解的基础上牢固记忆配方的步骤. 当二次项系

$x^2+6x+4=0$ [1]

↓ 移项

$x^2+6x=-4$

↓ 两边加 9（即 $\left(\frac{6}{2}\right)^2$）使左边配成 $x^2+2bx+b^2$ 的形式

$x^2+6x+9=-4+9$

↓ 左边写成完全平方形式

$(x+3)^2=5$

↓ 降次

$x+3=\pm\sqrt{5}$

↓

$x+3=\sqrt{5}$，或 $x+3=-\sqrt{5}$

↓ 解一次方程

$x_1=-3+\sqrt{5}$，$x_2=-3-\sqrt{5}$

为什么在方程 $x^2+6x=-4$ 的两边加 9？加其他数行吗？[2]

可以验证，$-3\pm\sqrt{5}$ 是方程 $x^2+6x+4=0$ 的两个根.

像上面那样，通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做**配方法**. 可以看出，配方是为了降次，把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来解.

例 1 解下列方程：[3]

(1) $x^2-8x+1=0$；　(2) $2x^2+1=3x$；　(3) $3x^2-6x+4=0$.

分析：(1) 方程的二次项系数为 1，直接运用配方法.

(2) 先把方程化成 $2x^2-3x+1=0$. 它的二次项系数为 2，为了便于配方，需将二次项系数化为 1，为此方程的两边都除以 2.

(3) 与(2)类似，方程的两边都除以 3 后再配方.

解：(1) 移项，得

$$x^2-8x=-1.$$

96　第二十七章　一元二次方程

[1] 框图形式直观地反映了配方法解一元二次方程的步骤，有利于学生记忆.

[2] 这个问题是为了引导学生认识配方到底配什么，使他们理解当二次项系数为 1 时，“方程两边加一次项系数一半的平方”是配方的关键.

[3] 例 1 的三个方程中，第一个是二次项系数为 1 的类型，后两个是二次项系数不为 1 的类型. 这样安排的目的是使学生容易想到“先把二次项系数化为 1，然后再配方”.

数为 1 时，“方程两边加一次项系数一半的平方”是配方的关键.

7. 教科书结合具体方程，以框图形式给出了用配方法解方程的全过程. 其中突出了配方、降次等关键环节，并通过边空提问的方式引导学生思考配方到底“配什么”.

8. 在给出了配方法以后，教科书安排了例 1，其中包含二次项系数不为 1 的情形. 这一例题的目的是使学生熟练配方法.

本例题包括两类一元二次方程：

(1) 二次项系数为 1：

$$x^2+px+q=0;$$

(2) 二次项系数不为 1：

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0,\ a\neq1).$$

前一类型在问题 1 中已经讨论过，其配方的关键步骤是“方程两边加一次项系数一半的平方”；后一类型一般需先将方程两边除以二次项系数，化二次项系数为 1 后再配方.

[1] 本题的教学应先让学生思考“如何配方”．“配方”实际上是利用 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ 把二次项系数化为 1，可以把注意力放在一次项系数上，从而为正确配方带来方便．当然这也是为了化归为前一种情况．

[2] 一元二次方程不一定有解，这里可以让学生想一想什么条件下有解，为后面讲判别式埋下伏笔．

配方，得

$$x^2-8x+4^2=-1+4^2,$$

$$(x-4)^2=15.$$

由此可得

$$x-4=\pm\sqrt{15},$$

$$x_1=4+\sqrt{15},\ x_2=4-\sqrt{15}.$$

(2)[1] 移项，得

$$2x^2-3x=-1.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}.$$

配方，得

$$x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

由此可得

$$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{1}{4},$$

$$x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}.$$

(3) 移项，得

$$3x^2-6x=-4.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2-2x=-\frac{4}{3}.$$

配方，得

$$x^2-2x+1^2=-\frac{4}{3}+1^2,$$

$$(x-1)^2=-\frac{1}{3}.$$

因为实数的平方不会是负数，所以 x 取任何实数时，$(x-1)^2$ 都是非负数，上式都不成立，即原方程无实数根．[2]

第二十七章 一元二次方程 97

9. 例 1 的第（3）题的另一个作用是具体说明某些一元二次方程无实数根．这里给出的理由是“实数的平方不会是负数”，这也为后面利用判别式判别一元二次方程实数根的存在性作了铺垫．教学时应注意让学生在思考的基础上说出方程无解的理由．

10. 配方法不仅是解一元二次方程的基本方法，而且也是讨论二次函数等所必备的基础．实际上，配方法是一种重要的代数变形工具．

11. 在例 1 的基础上，教科书对用配方法解方程的情况进行了归纳，即通过配方把方程化为 $(x+n)^2=p$ 后，要根据 p 的正负判断方程的解的情况．教学时可以先让学生思考：从前面对方程（Ⅰ）的讨论得到启发，把方程转化为 $(x+n)^2=p$ 后，你能得到方程（Ⅱ）的解的各种情况吗？在学生独立思考的基础上再给出结论．

12. 因为一元二次方程有无数个，所以如果局限于配方法，每一个方程都要先配方，这样比

一般地，如果一个一元二次方程通过配方转化成

$$(x+n)^2=p \text{[1]} \qquad (\text{Ⅱ})$$

的形式，那么就有：

（1）当 $p>0$ 时，方程（Ⅱ）有两个不等的实数根

$$x_1=-n-\sqrt{p},\ x_2=-n+\sqrt{p};$$

（2）当 $p=0$ 时，方程（Ⅱ）有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-n;$$

（3）当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x，都有 $(x+n)^2\geq 0$，所以方程（Ⅱ）无实数根.

练习

1. 填空：

（1）x^2+10x+___$=(x+$___$)^2$；　（2）x^2-12x+___$=(x-$___$)^2$；

（3）x^2+5x+___$=(x+$___$)^2$；　（4）$x^2-\frac{2}{3}x+$___$=(x-$___$)^2$.

2. 解下列方程：

（1）$x^2+10x+9=0$；　（2）$x^2-x-\frac{7}{4}=0$；

（3）$3x^2+6x-4=0$；　（4）$4x^2-6x-3=0$；

（5）$x^2+4x-9=2x-11$；　（6）$x(x+4)=8x+12$.

27.2.2 公式法

探究[2]

任何一个一元二次方程都可以写成一般形式

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0). \qquad (\text{Ⅲ})$$

能否也用配方法得出（Ⅲ）的解呢？

我们可以根据用配方法解一元二次方程的经验来解决这个问题.

移项，得

$$ax^2+bx=-c.$$

二次项系数化为 1，得

98　第二十七章　一元二次方程

[1] 将一元二次方程配方为 $(x+n)^2=p$ 后，需要根据 p 的取值情况对方程的解进行讨论. 这个过程可以让学生类比 $x^2=p$ 的讨论自主完成.

练习答案

1. （1）25，5；
（2）36，6；
（3）$\frac{25}{4}$，$\frac{5}{2}$；
（4）$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{3}$.

2. （1）$x=-9$，$x=-1$；
（2）$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{2}$；
（3）$x=-1\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$；
（4）$x=\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{21}}{4}$；
（5）无实数解；
（6）$x=-2$，$x=6$.

[2] 这个“探究”应该先让学生自己尝试解决.

较繁琐. 因此，在数学史上，数学家们希望用公式来求一元二次方程，这样可以避免配方的麻烦，这是理性精神的体现. 教学时可以引导学生思考、讨论“为什么要学公式法”的问题，这样可以培养学生的理性精神，使情感、态度、价值观的教育得到具体落实.

13. 有了前面用配方法解数字系数的一元二次方程的铺垫，学生熟悉了配方法的基本步骤，再用配方法推导一元二次方程的求根公式就比较容易了. 由此得到一元二次方程的另一种解法——公式法. 教学时应注意引导学生认识求根公式的来龙去脉，让学生自己先推导，然后再对照教科书进行检查，这样有利于学生理解和记忆公式，在应用时也可以减少错误.

14. 求根公式的推导，困难在于字母符号多、分式运算复杂. 让学生自己动手推导，在加深认识求根公式的同时，还可以培养学生的运算能力.

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$ [1]

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad ①$$

因为 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$. 式子 b^2-4ac 的值有以下三种情况：[2]

(1) $b^2-4ac>0$

这时 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$，由①得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

方程有两个不等的实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) $b^2-4ac=0$

这时 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$，由①可知，方程有两个相等的实数根[3]

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

(3) $b^2-4ac<0$

这时 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，由①可知 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，而 x 取任何实数都不能使 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，因此方程无实数根.

一般地，式子 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的**判别式**，通常用希腊字母“Δ”表示它，即 $\Delta=b^2-4ac$.

归纳

由上可知，当 $\Delta>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个不等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 无实数根.

[1] 方程 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ 的二次项系数是 1，一次项系数是 $\frac{b}{a}$，配方的关键步骤是两边加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，这样配出的平方式为 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

[2] 由前面对方程（Ⅰ）（Ⅱ）的讨论可知，方程①的解的情况由 $\Delta=b^2-4ac$ 决定，因此需对 Δ 的取值分类讨论，同时也把 Δ 称为判别式——判别方程是否有解的式子.

[3] 当 $b^2-4ac=0$ 时，

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}.$$

这时我们说方程有两个相等的实数根，而不说方程只有一个实数根.

15. 公式法的优点是操作简单、直接计算，它利用了配方法解一元二次方程一般形式的结果，省去了配方的中间过程. 教学中应使学生认识到：抽象的一般形式具有广泛的应用价值，一元二次方程的一般形式代表了所有的一元二次方程，因此它的求根公式适用于所有的一元二次方程.

16. 教学中应注意：即使学生已经熟悉了用配方法解数字系数的一元二次方程，用配方法解字母系数的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0),$$

仍是难点. 因此，需要重点分析方程

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

的左边，由二次项系数是 1，一次项系数是 $\frac{b}{a}$，得出配方的关键步骤是两边加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，这样配出的平方式为 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

当 $\Delta \geqslant 0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的实数根可写为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**求根公式**. 求根公式表达了用配方法解一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的结果. 解一个具体的一元二次方程时，把各系数直接代入求根公式，可以避免配方过程而直接得出根，这种解一元二次方程的方法叫做**公式法**.

例 2 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-4x-7=0$； (2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$；

(3) $5x^2-3x=x+1$； (4) $x^2+17=8x$.

解：(1) $a=1$，$b=-4$，$c=-7$.

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-7)=44>0$.

方程有两个不等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{44}}{2\times1}=2\pm\sqrt{11},$$

确定 a，b，c 的值时，要注意它们的符号.[1]

即

$$x_1=2+\sqrt{11}，x_2=2-\sqrt{11}.$$

(2) $a=2$，$b=-2\sqrt{2}$，$c=1$.

$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times2\times1=0$.

方程有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2\sqrt{2}}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3) 方程化为 $5x^2-4x-1=0$.[2]

$a=5$，$b=-4$，$c=-1$.

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times5\times(-1)=36>0$.

方程有两个不等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\times5}=\frac{4\pm6}{10},$$

即

[1] 用求根公式解方程时，学生容易忽视系数的符号.

[2] 求根公式是与一元二次方程一般形式相对应的，因此使用求根公式之前应先将方程化为“一般形式”.

17. 通过配方得到 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，要引导学生分析使方程有解的条件. 显然，只有当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时方程才有解.

$$x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{5}.$$

(4) 方程化为 $x^2-8x+17=0$.

$a=1,\ b=-8,\ c=17$.

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times1\times17=-4<0$.

方程无实数根.

回到本章引言中的问题，雕像下部高度 x（单位：m）满足方程

$$x^2+2x-4=0.$$

用公式法解这个方程，得

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=-1\pm\sqrt{5},$$

即

$$x_1=-1+\sqrt{5},\ x_2=-1-\sqrt{5}.$$

如果结果保留小数点后两位，那么，$x_1\approx1.24$，$x_2\approx-3.24$.

这个方程的两个根中，只有 $x_1\approx1.24$ 符合问题的实际意义，因此雕像下部高度应设计为约 1.24 m.

练习

1. 解下列方程：

(1) $x^2+x-6=0$；　(2) $x^2-\sqrt{3}x-\frac{1}{4}=0$；

(3) $3x^2-6x-2=0$；　(4) $4x^2-6x=0$；

(5) $x^2+4x+8=4x+11$；　(6) $x(2x-4)=5-8x$.

2. 求第 27.1 节中问题 1 的答案.

27.2.3 因式分解法

问题 2 根据物理学规律，如果把一个物体从地面以 10 m/s 的速度竖直上抛[1]，那么物体经过 x s 离地面的高度（单位：m）为

$$10x-4.9x^2.$$

第二十七章　一元二次方程　101

练习答案

1. (1) $x=-3$，$x=2$；

(2) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm1$；

(3) $x=1\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$；

(4) $x=0$，$x=\frac{3}{2}$；

(5) $x=\pm\sqrt{3}$；

(6) $x=-1\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$.

2. 切去边长为 5 cm 的正方形.

[1] 竖直上抛运动中，物体离上抛点的距离为

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2.$$

其中 v_0 为初速度，t 为时间，g 为重力加速度，$g\approx9.8\ \mathrm{m/s^2}$.

18. 因式分解法是解某些一元二次方程的简便方法. 先将方程一边化为 0，另一边分解为两个一次因式的乘积，分别令每个因式等于 0，就将一元二次方程化归为两个一次方程. 它依据的是两个实数的积等于 0 的条件，即这两个实数中必有等于 0 的.

根据上述规律，求出物体落回地面所需经过的时间（结果保留小数点后两位）.

设物体经过 x s 落回地面，这时它离地面的高度为 0 m，即

$$10x-4.9x^2=0. \quad ①$$

思考

除配方法或公式法以外，能否找到更简单的方法解方程①？

方程①的右边为 0，左边可以因式分解，得

$$x(10-4.9x)=0.$$

这个方程的左边是两个一次因式的乘积，右边是 0. 我们知道，如果两个因式的积为 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0；反之，如果两个因式中任何一个为 0，那么它们的积也等于 0. 所以

> 如果 $a \cdot b=0$，那么 $a=0$，或 $b=0$.[1]

$$x=0，或 10-4.9x=0. \quad ②$$

所以，方程①的两个根是

$$x_1=0，x_2=\frac{100}{49}\approx 2.04.$$

这两个根中，$x_2\approx 2.04$ 表示物体约在 2.04 s 时落回地面，而 $x_1=0$ 表示物体被上抛离开地面的时刻，即在 0 s 时物体被抛出，此刻物体的高度是 0 m.

思考

解方程①时，二次方程是如何降为一次的？[2]

可以发现，上述解法中，由①到②的过程，不是用开平方降次，而是先因式分解，使方程化为两个一次式的乘积等于 0 的形式，再使这两个一次式分别等于 0，从而实现降次. 这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

102 第二十七章　一元二次方程

[1] 在实数范围内，两个因式的积等于 0 时，这两个因式中必有等于 0 的. 反之，不论哪个因式等于 0，积都等于 0.

[2] 通过因式分解，转化为每个一次因式等于 0，得到两个一次方程.

19. 从数学问题的一般研究思路来看，在解决了一般情况后，往往要看一下是否存在某些特殊情形. 对特殊情形的研究，一方面可以看成是对问题认识的深化，另一方面也是为解决问题提供新的思路. 因式分解法就是针对那些容易分解为两个一次因式乘积的二次三项式方程的特殊解法.

[1] 这里用提公因式 $x-2$ 的方法分解因式.

[2] 这里用平方差公式分解因式.

例3 解下列方程：

(1) $x(x-2)+x-2=0$；　　(2) $5x^2-2x-\frac{1}{4}=x^2-2x+\frac{3}{4}$.

解：(1) 因式分解[1]，得

$$(x-2)(x+1)=0.$$

于是得

$$x-2=0, \text{ 或 } x+1=0,$$

$$x_1=2, \quad x_2=-1.$$

(2) 移项、合并同类项，得

$$4x^2-1=0.$$

因式分解[2]，得

$$(2x+1)(2x-1)=0.$$

于是得

$$2x+1=0, \text{ 或 } 2x-1=0,$$

$$x_1=-\frac{1}{2}, \quad x_2=\frac{1}{2}.$$

可以试用多种方法解本例中的两个方程.

归纳

配方法要先配方，再降次；通过配方法可以推出求根公式，公式法直接利用求根公式解方程；因式分解法要先使方程一边化为两个一次因式相乘，另一边为0，再分别使各一次因式等于0. 配方法、公式法适用于所有一元二次方程，因式分解法在解某些一元二次方程时比较简便. 总之，解一元二次方程的基本思路是：将二次方程化为一次方程，即降次.

练习

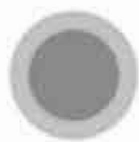
1. 解下列方程：

(1) $x^2+x=0$；　　(2) $x^2-2\sqrt{3}x=0$；

(3) $3x^2-6x=-3$；　　(4) $4x^2-121=0$；

(5) $3x(2x+1)=4x+2$；　　(6) $(x-4)^2=(5-2x)^2$.

2. 如图，把小圆形场地的半径增加 5 m 得到大圆形场地，场地面积扩大了一倍. 求小圆形场地的半径.



（第2题）

第二十七章　一元二次方程　103

练习答案

1. (1) $x_1=0$，$x_2=-1$；

   (2) $x_1=0$，$x_2=2\sqrt{3}$；

   (3) $x_1=x_2=1$；

   (4) $x_1=\frac{11}{2}$，$x_2=-\frac{11}{2}$；

   (5) $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{1}{2}$；

   (6) $x_1=1$，$x_2=3$.

2. $5(1+\sqrt{2})$ m.

20. 配方法、公式法和因式分解法是三种基本的解一元二次方程的方法. 教科书通过“归纳”栏目对这几种方法的各自特点及其适用范围进行了总结，并指出了“降次”是基本思路. 教学中，应及时引导学生归纳总结，明确各种解法的来源、特点，在面对具体问题时，要根据方程的特点作出恰当的选择.

*27.2.4 一元二次方程的根与系数的关系

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，不仅表示可以由方程的系数 a，b，c 决定根的值，而且反映了根与系数之间的联系. 一元二次方程根与系数之间的联系还有其他表现方式吗？[1]

> **思考**[2]
>
> 从因式分解法可知，方程 $(x-x_1)(x-x_2)=0$（x_1，x_2 为已知数）的两根为 x_1 和 x_2，将方程化为 $x^2+px+q=0$ 的形式，你能看出 x_1，x_2 与 p，q 之间的关系吗？

把方程 $(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的左边展开，化成一般形式，得方程

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

这个方程的二次项系数为 1，一次项系数 $p=-(x_1+x_2)$，常数项 $q=x_1x_2$.

于是，上述方程两个根的和、积与系数分别有如下关系：

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q.$$

> **思考**
>
> 一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，二次项系数 a 未必是 1，它的两个根的和、积与系数又有怎样的关系呢？

根据求根公式可知，

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由此可得

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

* 本小节内容为选学内容.

104 第二十七章 一元二次方程

[1] 这段话提出了考察“根与系数之间的联系”的思考任务.

[2] 这一“思考”与下一个“思考”是特殊与一般的关系. 对于二次项系数为 1 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$，如果它有两个根 x_1，x_2，那么就有 $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$，对照两边的系数就得到根与系数的关系.

21. 虽然第 27.2.4 小节是选学内容，但从一元二次方程理论的完整性、初高中衔接等角度考虑，本节内容都是需要的. 因此，应当认真地完成本节的教学.

22. 第 27.2.4 小节内容的教学，首先要注意如何发现和提出问题. 实际上，前面解决的是“给定方程，求根”的问题，所谓“给定方程”就是“给定系数”，而且这时根的情况是唯一确定的，也就是根由系数唯一确定. 数学中，正面研究了一个问题，往往要从反面看看是否有值得研究的问题，这里就是“如果知道方程的根，那么方程会有什么形式?”当二次项系数为 1 时，如果方程的两个根为 x_1，x_2，那么对应的一元二次方程是 $(x-x_1)(x-x_2)=0$；当二次项系数为 a 时，如果方程的两个根为 x_1，x_2，那么对应的一元二次方程是 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$. 为了使学生更容易发现和提出问题，教科书采取从特殊到一般的方式，先让学生思考二次项系数

[1] 方程两边同时除以 a，就转化成了前一种情形.

[2] 由于《课标（2011 年版）》规定第 27.2.4 小节为选学内容，所以这里的例题比较简单. 教学时可以根据学生的实际情况灵活处理，对于程度较好的学生可适当补充计算 $x_1^2+x_2^2$，x_1-x_2，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ 之类的问题，但不要补充过于复杂的变形问题.

练习答案

(1) $x_1+x_2=3$，
$x_1x_2=-15$；

(2) $x_1+x_2=-\dfrac{4}{3}$，
$x_1x_2=\dfrac{1}{3}$；

(3) $x_1+x_2=1$，
$x_1x_2=-1$；

(4) $x_1+x_2=2$，
$x_1x_2=\dfrac{1}{2}$.

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

因此，方程的两个根 x_1，x_2 和系数 a，b，c 有如下关系：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

把方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的两边同除以 a，能否得出该结论？[1]

这表明任何一个一元二次方程的根与系数的关系为：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比.

例 4[2] 根据一元二次方程的根与系数的关系，求下列方程两个根 x_1，x_2 的和与积：

(1) $x^2-6x-15=0$；　　(2) $3x^2+7x-9=0$；

(3) $5x-1=4x^2$.

解：(1) $x_1+x_2=-(-6)=6$，$x_1x_2=-15$.

(2) $x_1+x_2=-\dfrac{7}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{-9}{3}=-3$.

(3) 方程化为 $4x^2-5x+1=0$，$x_1+x_2=-\dfrac{-5}{4}=\dfrac{5}{4}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{4}$.

练习

不解方程，求下列方程两个根的和与积：

(1) $x^2-3x=15$；　　(2) $3x^2+2=1-4x$；

(3) $5x^2-1=4x^2+x$；　　(4) $2x^2-x+2=3x+1$.

习题 27.2

复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $36x^2-1=0$；　　(2) $4x^2=81$；

(3) $(x+5)^2=25$；　　(4) $x^2+2x+1=4$.

第二十七章　一元二次方程　105

为 1 的情形，然后再研究一般形式时根与系数的关系.

教科书通过求根公式直接计算 x_1+x_2，x_1x_2 而得出根与系数的关系，其目的是希望引导学生能从一元二次方程最基础的知识出发思考问题. 实际上，如果将方程 $ax^2+bx+c=0$ 转化为 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$，由前面已经解决的情形立即可得结果.

习题 27.2

1. “复习巩固”中：

第 1～6 题是为巩固一元二次方程的解法而设计的.

第 7 题是巩固根与系数的关系.

“复习巩固”的题目应使学生切实掌握.

2. “综合运用”中：

第 8 题要注意检验根是否符合实际.


2. 填空：

(1) x^2+6x+______$=(x+$____$)^2$；　(2) x^2-x+______$=(x-$____$)^2$；

(3) $4x^2+4x+$______$=(2x+$____$)^2$；　(4) $x^2-\frac{2}{5}x+$______$=(x-$____$)^2$.

3. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+10x+16=0$；　(2) $x^2-x-\frac{3}{4}=0$；

(3) $3x^2+6x-5=0$；　(4) $4x^2-x-9=0$.

4. 利用判别式判断下列方程的根的情况：

(1) $2x^2-3x-\frac{3}{2}=0$；　(2) $16x^2-24x+9=0$；

(3) $x^2-4\sqrt{2}x+9=0$；　(4) $3x^2+10=2x^2+8x$.

5. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+x-12=0$；　(2) $x^2-\sqrt{2}x-\frac{1}{4}=0$；

(3) $x^2+4x+8=2x+11$；　(4) $x(x-4)=2-8x$；

(5) $x^2+2x=0$；　(6) $x^2+2\sqrt{5}x+10=0$.

6. 用因式分解法解下列方程：

(1) $3x^2-12x=-12$；　(2) $4x^2-144=0$；

(3) $3x(x-1)=2(x-1)$；　(4) $(2x-1)^2=(3-x)^2$.

*7. 求下列方程两个根的和与积：

(1) $x^2-3x+2=10$；　(2) $5x^2+x-5=0$；

(3) $x^2+x=5x+6$；　(4) $7x^2-5=x+8$.

综合运用

8. 一个直角三角形的两条直角边相差 5 cm，面积是 7 cm^2，求斜边的长.

9. 参加一次商品交易会的每两家公司之间都签订了一份合同，所有公司共签订了 45 份合同. 共有多少家公司参加商品交易会？

10. 分别用公式法和因式分解法解方程 $x^2-6x+9=(5-2x)^2$.

11. 有一根 20 m 长的绳，怎样用它围成一个面积为 24 m^2 的矩形？

拓广探索

12. 一个凸多边形共有 20 条对角线，它是几边形？是否存在有 18 条对角线的多边形？如果存在，它是几边形？如果不存在，说明得出结论的道理.[1]

13. 无论 p 取何值，方程 $(x-3)(x-2)-p^2=0$ 总有两个不相等的实数根吗？给出答案并说明理由.[2]

106 第二十七章　一元二次方程

[1] 凸 n 边形对角线数为

$$\frac{1}{2}n(n-3).$$

每个顶点与除它本身及相邻两点之外的 $(n-3)$ 个点的连线，都是对角线.

[2] 将方程转化为一般形式，再看判别式的取值情况.

第 9 题要注意正确理解“每两家公司之间都签订了一份合同”的意思.

第 10 题用公式法需化为一元二次方程的一般形式，较复杂；用平方差公式进行因式分解更简单.

3. “拓广探索”中：

第 12 题中的等量关系为

$$凸 n 边形对角线数=\frac{1}{2}n(n-3).$$

应使学生明白这个式子的道理.

第 13 题的目的是加强对判别式的认识.

[1] 设 $AB=1$ 可以使方程简单，且不失一般性. 如果设 $AB=a$，则对应的结果为 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

[2] 证明时需要考虑正五角星内角的度数及相应三角函数的值.

[3] 这种优选法叫做黄金分割法，也叫做 0.618 法.

阅读与思考

黄金分割数

本章引言中有一个关于人体雕塑的问题，要使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，这个高度比应是多少？

把上面的问题一般化，如图 1，在线段 AB 上找一个点 C，C 把 AB 分为 AC 和 CB 两段，其中 AC 是较小的一段，如果使 $AC:CB=CB:AB$，为简单起见，设 $AB=1$[1]，$CB=x$，则 $AC=1-x$，代入 $AC:CB=CB:AB$，得 $(1-x):x=x:1$，也即 $x^2+x-1=0$，解方程，得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

根据问题的实际意义，取 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，这个值就是上面问题中所求的高度比.

人们把 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 这个数叫做黄金分割数. 如果把一条线段分为两部分，使其中较长一段与整个线段的比是黄金分割数，那么较短一段与较长一段的比也是黄金分割数.

图 1

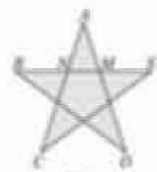


图 2

五角星是常见的图案，如图 2，在这五角星中存在黄金分割数，可以证明其中 $\frac{MN}{NB}=\frac{BN}{BM}=\frac{BM}{BE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.[2]

长期以来，很多人认为黄金分割数是一个很特别的数. 一些美术家认为，如果人的上、下身长之比接近黄金分割数，那么可以增加美感. 据说，一些名画和雕塑中的人体大都符合这个比. 一位科学家曾提出，在一棵树的生长过程中，$\frac{n\text{ 年后的树枝数目}}{n+1\text{ 年后的树枝数目}}$ 约是黄金分割数.

优选法是一种具有广泛应用价值的数学方法，著名数学家华罗庚曾为普及它作出重要贡献. 优选法中有一种 0.618 法应用了黄金分割数.[3] 同学们可以查阅资料，了解 0.618 法的应用.

这是著名数学家华罗庚在日本去世前几个小时做学术报告，讲解优选法的照片. 华先生说过，他要工作到人生的最后一刻，他实践了自己的诺言.

第二十七章 一元二次方程 107

阅读与思考

这是一篇作为选学内容的短文. 本内容从引言中的雕像问题说起，建立线段的内外比分点问题的方程模型，并得到方程的解为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$——黄金分割数.

黄金分割数在现实中有较广泛的应用. 除了几何上的“美学”价值、优选法中的 0.618 法等以外，现实中的许多现象都可以借助这个奇妙的数进行研究. 例如，高中阶段要学习的数列中，有著名的“斐波那契数列”，这个数列就与黄金分割数有紧密的关系.

教学中应鼓励学生查阅资料，进一步了解黄金分割数的应用.

27.3 一元二次方程与实际问题

同一元一次方程、二元一次方程（组）等一样，一元二次方程也可以作为反映某些实际问题中数量关系的数学模型．本节继续讨论如何利用一元二次方程解决实际问题．

探究1

有一个人患了流感，经过两轮传染后共有121个人患了流感，每轮传染中平均一个人传染了几个人?[1]

分析：设每轮传染中平均一个人传染了 x 个人．

开始有一个人患了流感，第一轮的传染源就是这个人，他传染了 x 个人，用代数式表示，第一轮后共有______[2]个人患了流感；第二轮传染中，这些人中的每个人又传染了 x 个人，用代数式表示，第二轮后共有______[3]个人患了流感．

列方程

$$1+x+x(1+x)=121.$$

解方程，得

$$x_1=10,\ x_2=-12\text{（不合题意，舍去）}.$$

平均一个人传染了10个人．

通过对这个问题的探究，你对类似的传播问题中的数量关系有新的认识吗?

思考

如果按照这样的传染速度，经过三轮传染后共有多少个人患流感?[4]

探究2

两年前生产1 t甲种药品的成本是5 000元，生产1 t乙种药品的成本是6 000元，随着生产技术的进步，现在生产1 t甲种药品的成本是3 000元，生产1 t乙种药品的成本是3 600元，哪种药品成本的年平均下降率较大?[5]

108 第二十七章 一元二次方程

[1] 这里的一轮指一个传染周期．例如，开始有1个人（不妨记为 a）患流感，第一轮中 a 传染给 b，c，d，这时有 $(1+3)$ 个人患流感；第二轮中这 $(1+3)$ 个人每人又传染给3个人，这一轮的新患感冒人数为 $3\times(1+3)$．所以，第二轮后患流感者总人数为

$$3\times(1+3)+(1+3)=16.$$

“探究1”中，对传播方式的理解是一个难点，上述具体分析后再推广到一般，可以作为化解难点的方法．

[2] $1+x$．

[3] $1+x+x(1+x)$．

[4] $121+10\times121=1\ 331$．

[5] 成本的年下降率等于 $\dfrac{\text{前一年成本}-\text{本年成本}}{\text{前一年成本}}$．

1．第27.3节进一步以“探究”的形式讨论如何用一元二次方程解决实际问题，问题中的数量关系更复杂些，目的是使学生更深入地认识一元二次方程与现实生活的联系性，加强建模思想，培养运用一元二次方程分析和解决实际问题的能力．其中，重点是分析实际问题中的数量关系，列一元二次方程．要注意让学生经历完整的建立一元二次方程解决实际问题的过程．

一般地，应用数学知识解决实际问题的难点在于如何找出问题中的数量关系．同样，本节学习中，正确地分析问题中的数量关系，找出可以作为列方程依据的主要相等关系，是建立一元二次方程模型的主要难点．

本节内容应让学生在独立思考、解决问题的基础上进行合作讨论，在分析解决问题的过程中更深入地体会一元二次方程的应用价值．

2．探究1以流感为问题情境，讨论按一定传播速度逐步传播的问题．这类问题在现实世界

分析：容易求出，甲种药品成本的年平均下降额为[1] $(5\ 000-3\ 000)\div 2=1\ 000$（元），乙种药品成本的年平均下降额为 $(6\ 000-3\ 600)\div 2=1\ 200$（元）。显然，乙种药品成本的年平均下降额较大。但是，年平均下降额（元）不等同于年平均下降率（百分数）。

设甲种药品成本的年平均下降率为 x，则一年后甲种药品成本为 $5\ 000(1-x)$ 元，两年后甲种药品成本为 $5\ 000(1-x)^2$ 元，于是有

$$5\ 000(1-x)^2=3\ 000.$$

解方程，得

$$x_1\approx 0.225,\quad x_2\approx 1.775.$$

为什么选择 22.5% 作为答案？[2]

根据问题的实际意义，甲种药品成本的年平均下降率约为 22.5%。

乙种药品成本的年平均下降率是多少？[3] 请比较两种药品成本的年平均下降率。

思考

经过计算，你能得出什么结论？成本下降额大的药品，它的成本下降率一定也大吗？应怎样全面地比较几个对象的变化状况？[4]

探究3

如图 27.3-1，要设计一本书的封面，封面长 27 cm，宽 21 cm，正中央是一个与整个封面长宽比例相同的矩形。如果要使四周的彩色边衬所占面积是封面面积的四分之一，上、下边衬等宽，左、右边衬等宽，应如何设计四周边衬的宽度（结果保留小数点后一位）？

图 27.3-1

分析：封面的长宽之比是 $27:21=9:7$，中央的矩形的长宽之比也应是 $9:7$。设中央的矩形的长和宽分别是 $9a$ cm 和 $7a$ cm，由此得上、下边衬与左、右边衬的宽度之比是

第二十七章　一元二次方程　109

[1] 成本的年下降额等于前一年成本－本年成本.

[2] 根据问题的实际意义，成本的年下降率应是小于 1 的正数，所以应选取 0.225.

[3] 类似于甲种药品成本年平均下降率的计算，由方程

$6\ 000(1-x)^2=3\ 600$，

得乙种药品成本年平均下降率为 0.225.

两种药品成本的年平均下降率相等.

[4] 成本下降额较大的产品，其成本下降率不一定较大. 成本下降额表示绝对变化量，成本下降率表示相对变化量，两者兼顾才能全面比较对象的变化状况.

中很常见，例如细胞分裂、信息传播、储蓄收益等. 本节中讨论的是两轮的传播，它可以用一元二次方程作为数学模型. 教学中，应引导学生注意本问题中第一轮的传染源有 1 人，第二轮的传染源有 $x+1$ 人，即假设最早的患者仍在继续传染别人. 虽然实际问题与此不一定完全一致，但这样假设便于用一元二次方程作为实际问题的近似数学模型. 这类问题还可以进一步推广到两轮以上的传播问题，其基本数量关系是一致的，只是如果用方程作为数学模型时会涉及更高次的方程. 探究 1 后面的思考问题虽然涉及三轮传播，但只是求值问题，不需要用方程解决.

3. 探究 2 以生产成本变化为问题情境，讨论平均变化率的问题. 这类问题在现实世界中也有许多原型，例如经济增长率、人口增长率等. 本节中讨论的是两轮（即两个时间段）的平均变化率，可以用一元二次方程作为数学模型. 设平均变化率为 x，则有下列关系：

$$\frac{1}{2}(27-9a):\frac{1}{2}(21-7a)$$
$$=9(3-a):7(3-a)$$
$$=9:7.$$

设上、下边衬的宽均为 $9x$ cm，左、右边衬的宽均为 $7x$ cm，则中央的矩形的长为 $(27-18x)$cm，宽为 $(21-14x)$cm.

要使四周的彩色边衬所占面积是封面面积的四分之一，则中央的矩形的面积是封面面积的四分之三. 于是可列出方程

$$(27-18x)(21-14x)=\frac{3}{4}\times27\times21.$$

整理，得

$$16x^2-48x+9=0.$$

方程的哪个根符合实际意义？为什么？[1]

解方程，得

$$x=\frac{6\pm3\sqrt{3}}{4}.$$

上、下边衬的宽均为______[2]cm，左、右边衬的宽均为______[3]cm.

思考

如果换一种设未知数的方法，是否可以更简单地解决上面的问题？请你试一试.[4]

习题 27.3

复习巩固

1. 解下列方程：
   (1) $x^2+10x+21=0$；　(2) $x^2-x-1=0$；
   (3) $3x^2+6x-4=0$；　(4) $3x(x+1)=3x+3$；
   (5) $4x^2-4x+1=x^2+6x+9$；　(6) $7x^2-\sqrt{6}x-5=0$.
2. 两个相邻偶数的积是 168，求这两个偶数.
3. 一个直角三角形的两条直角边的和是 14 cm，面积是 24 cm²，求两条直角边的长.

110 第二十七章　一元二次方程

[1] $x=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{4}$ 合乎实际. 取另一个根，上、下边衬的宽度之和会超过封面的长度.

[2] 1.8.

[3] 1.4.

[4] 可以考虑其他解法. 例如，设中央矩形的长、宽分别为 $9x$ cm，$7x$ cm. 列方程

$$9x\cdot7x=\frac{3}{4}\times27\times21.$$

解得 $x\approx2.6$. 进而得上、下边衬的宽度为
$(27-9\times2.6)\times0.5=1.8$，
左、右边衬的宽度为
$(21-7\times2.6)\times0.5=1.4$.

变化前数量$\times(1+x)^2=$变化后数量.

探究 2 的问题中，涉及成本下降额和成本下降率这两个接近而不同的概念，前者表示绝对变化量，单位是元；后者表示相对变化量，是表示比率的数字. 通过这个问题，可以使学生体会分析问题时应对变化额与变化率两者兼顾，这样才能全面认识一种变化情况.

4. 探究 3 的问题中，已知封面及正中央矩形的长宽比都是 9∶7，由此可以推出上、下边衬与左、右边衬宽度之比也是 9∶7. 这一关系在解决问题中是很重要的，根据它可以合理地设未知数.

探究 3 的问题中，方程的两个根都是正数，但它们并不都是问题的解. 必须根据它们值的大小，来确定哪个更合乎实际. 这种取舍更多地要考虑问题的实际意义，这是检验数学模型的解是否符合实际的过程.

[1] 这样的比赛叫做双循环比赛，设有 x 个队参赛，则共比赛 $x(x-1)$ 场.

综合运用

4. 某种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是 91. 每个支干长出多少小分支？

5. 一个菱形两条对角线长的和是 10 cm，面积是 12 cm^2，求菱形的周长.

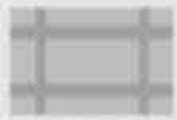
6. 参加足球联赛的每两队之间都进行两场比赛，共要比赛 90 场，共有多少个队参加比赛？[1]

7. 青山村种的水稻 2010 年平均每公顷产 7 200 kg，2012 年平均每公顷产 8 450 kg，求水稻每公顷产量的年平均增长率.

8. 要为一幅长 29 cm，宽 22 cm 的照片配一个镜框，要求镜框的四条边宽度相等，且镜框所占面积为照片面积的四分之一，镜框边的宽度应是多少厘米（结果保留小数点后一位）？

拓广探索

9. 如图，要设计一幅宽 20 cm，长 30 cm 的图案，其中有两横两竖的彩条，横、竖彩条的宽度比为 3∶2. 如果要使彩条所占面积是图案面积的四分之一，应如何设计彩条的宽度（结果保留小数点后一位）？



（第 9 题）

10. 如图，线段 AB 的长为 1.

（第 10 题）

(1) 线段 AB 上的点 C 满足关系式 $AC^2=BC\cdot AB$，求线段 AC 的长度；

(2) 线段 AC 上的点 D 满足关系式 $AD^2=CD\cdot AC$，求线段 AD 的长度；

(3) 线段 AD 上的点 E 满足关系式 $AE^2=DE\cdot AD$，求线段 AE 的长度.

上面各小题的结果反映了什么规律？

第二十七章　一元二次方程　111

习题 27.3

1. “复习巩固”中，第 1 题是为复习巩固一元二次方程的解法而安排的直接解方程的题目. 第 2，3 题有比较简单的问题情境，需要列、解一元二次方程，从而复习巩固应用一元二次方程解决实际问题的基本步骤.

2. “综合运用”中，第 4，6 题与简单的组合计数有关；第 5，8 题要结合几何图形的知识解决；第 7 题是关于平均变化率的问题.

这些题目没有按问题类型划分题型，教学中可以根据需要对问题类型进行适当归纳，但要避免搞题型教学.

3. “拓广探索”中，第 9 题应注意表示彩条所占面积时不要将横、竖彩条交叉部分的面积重复计算. 第 10 题，AC 的长度 x 是黄金分割数，后面有关系 $AD=x^2$，$AE=x^3$，….

数学活动

活动　三角点阵中前 n 行的点数计算

图1是一个三角点阵，从上向下数有无数多行，其中第一行有1个点，第二行有2个点……第 n 行有 n 个点……

图1

容易发现，10是三角点阵中前4行的点数和．你能发现300是前多少行的点数的和吗？[1]

用试验的方法，由上而下地逐行相加其点数，可以得到答案．但是这样寻找答案需要花费较多时间．你能用一元二次方程解决这个问题吗？[2]

（提示：$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$．）

三角点阵中前 n 行的点数和能是600吗？如果能，求出 n；如果不能，试用一元二次方程说明道理．

如果把图1的三角点阵中各行的点数依次换为2，4，6，…，$2n$，…，你能探究出前 n 行的点数和满足什么规律吗？这个三角点阵中前 n 行的点数和能是600吗？如果能，求出 n；如果不能，试用一元二次方程说明道理．

112 第二十七章　一元二次方程

[1] 显然，用逐个数的办法繁琐，效率低而且容易出错．学生从自己的经验中可以想到，如果能找到一个公式就能解决任意行数的问题．这就是代数的力量．

[2] 把问题与一元二次方程联系起来，这是一个建模过程．需要设未知数，列方程．按条件，设有 n 行，则其点数和为 $1+2+\cdots+n$．这个和可以利用

$$\begin{aligned}1+n&=2+(n-1)\\&=3+(n-2)\\&=\cdots\end{aligned}$$

化简得到．

本“数学活动”按照如下思路展开：

第一步，学生通过“逐个数”的方法，容易数出前4行的点数和．紧接着，要数300个点的行数，很繁琐．

第二步，自然地提出如何“一劳永逸”地解决问题．在提示自然数的前 n 项和公式后，建立一元二次方程模型获得解决．

第三步，通过将问题转化为“是否存在自然数 n，使 $n(n+1)=600$？”可以获得解决．

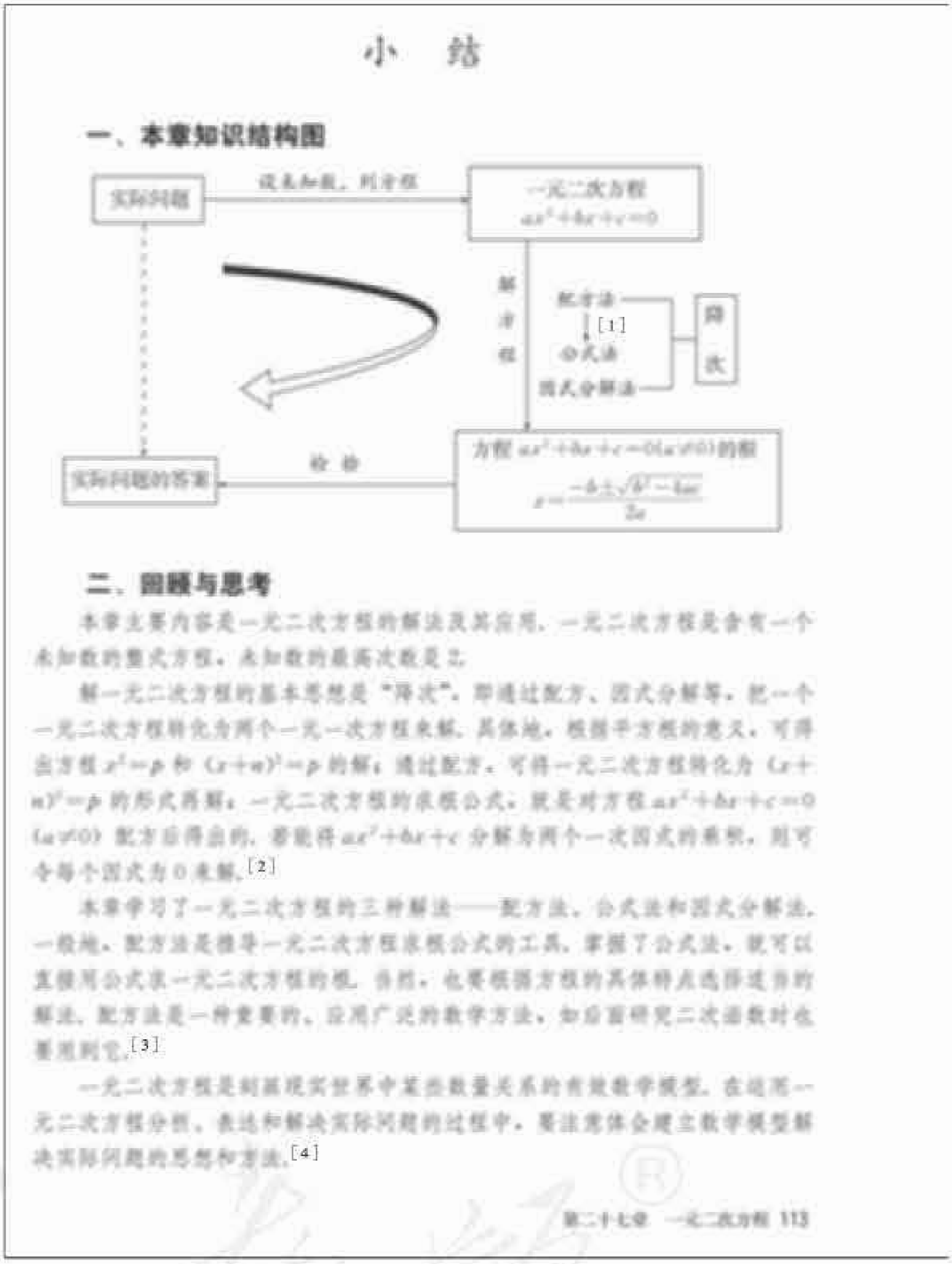
第四步，问题拓展．点数换为2，4，6，…，$2n$，…，前 n 行的点数和为 $n(n+1)$．解方程 $n(n+1)=600$ 即可获得答案．

[1] 图中的箭头表示配方法是公式法的基础，由配方法可以得出公式法.

[2] 这段系统总结了“降次”的各种方法及其相互关系.

[3] 这段强调了配方法的基础地位，它是解决“二次问题”的通性通法.

[4] 这段指出了一元二次方程模型的现实意义.



小　结

一、本章知识结构图

二、回顾与思考

本章主要内容是一元二次方程的解法及其应用. 一元二次方程是含有一个未知数的整式方程，未知数的最高次数是2.

解一元二次方程的基本思想是“降次”，即通过配方、因式分解等，把一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来解. 具体地，根据平方根的意义，可得出方程 $x^2=p$ 和 $(x+n)^2=p$ 的解；通过配方，可将一元二次方程转化为 $(x+n)^2=p$ 的形式再解；一元二次方程的求根公式，就是对方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 配方后得出的；若能将 ax^2+bx+c 分解为两个一次因式的乘积，则可令每个因式为0来解.[2]

本章学习了一元二次方程的三种解法——配方法、公式法和因式分解法. 一般地，配方法是推导一元二次方程求根公式的工具，掌握了公式法，就可以直接用公式求一元二次方程的根. 当然，也要根据方程的具体特点选择适当的解法. 配方法是一种重要的、应用广泛的数学方法，如后面研究二次函数时也要用到它.[3]

一元二次方程是刻画现实世界中某些数量关系的有效数学模型. 在运用一元二次方程分析、表达和解决实际问题的过程中，要注意体会建立数学模型解决实际问题的思想和方法.[4]

第二十七章　一元二次方程　113

1. “本章知识结构图”是按照“建立一元二次方程模型解决实际问题”的思路构建的，把方程的解法融入其中. 教学中可以引导学生结合具体实际问题的解决过程进行总结，让学生概括数学建模的思想和列、解一元二次方程的基本过程，以促进学生对知识结构图的理解.

2. “回顾”从四个方面展开. 一是本章主要内容；二是总结“降次”的基本思想及其具体做法；三是三种解法的相互关系，其中强调了配方法的基础地位；四是强调用一元二次方程模型解决实际问题的重要性.

3. “思考”意在引导学生建立前后知识的联系，引导学生总结本章知识的来龙去脉.

化归思想，即逐步使方程变形为 $x=a$ 的形式，是解方程的基本指导思想，它对各种方程都适用，通过小结应继续强调这一思想. 而将一元二次方程“化归”的基本策略是“降次”.

4. 整式方程以“元”和“次数”为分类标准.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 比较你所学过的各种整式方程，说明它们的未知数的个数与次数. 你能写出这些方程的一般形式吗?

2. 一元二次方程有哪些解法? 各种解法在什么情况下比较适用? 你能说说“降次”在解一元二次方程中的作用吗?

3. 求根公式与配方法有什么关系? 如何判别一元二次方程根的情况?

4. 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根 x_1，x_2 与系数 a，b，c 有什么关系? 我们是如何得到这种关系的?

5. 你能举例说明用一元二次方程解决实际问题的过程吗?

复习题 27

复习巩固

1. 解下列方程:

(1) $196x^2-1=0$;　　(2) $4x^2+12x+9=81$;

(3) $x^2-7x-1=0$;　　(4) $2x^2+3x=3$;

(5) $x^2-2x+1=25$;　　(6) $x(2x-5)=4x-10$;

(7) $x^2+5x+7=3x+11$;　　(8) $1-8x+16x^2=2-8x$.

2. 两个数的和为 8，积为 9.75，求这两个数.

3. 一个矩形的长和宽相差 3 cm，面积是 4 cm²，求这个矩形的长和宽.

*4. 求下列方程两个根的和与积:

(1) $x^2-3x-10=0$;　　(2) $2x^2+7x+1=0$;

(3) $3x^2-1=2x+5$;　　(4) $x(x-1)=3x+7$.

综合运用

5. 一个直角梯形的下底比上底长 2 cm，高比上底短 1 cm，面积是 8 cm². 画出这个梯形.

6. 一个长方体的长与宽的比为 5∶2，高为 5 cm，表面积为 40 cm². 画出这个长方体的展开图.

7. 要组织一次篮球联赛，赛制为单循环形式（每两队之间都赛一场），计划安排 15 场比赛，应邀请多少个球队参加比赛?

8. 如下页图，利用一面墙（墙的长度不限），用 20 m 长的篱笆，怎样围成一个面积为 50 m² 的矩形场地? [1]

114 第二十七章　一元二次方程

[1] 以墙作为这个矩形的一条边，矩形的其他三条边用篱笆围成.

例如，一元一次方程、二元一次方程（组）、一元二次方程等. 一元 n 次方程的一般形式是

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ (a_0\neq0).$$

复习题 27

1. “复习巩固”的题目有两类：(1) 解一元二次方程；(2) 用一元二次方程解决简单问题.

2. “综合运用”的题目中，第 5，6，8，11 题都与几何图形相关. 其中第 5，6 题要先求出有关边长后再画图；第 8 题要注意实际意义——篱笆只要围三边；第 11 题“能否围成”的含义是“方程是否有解”. 第 7 题要注意 x 个队之间按单循环制比赛的场次是 $x(x-1)$ 的一半. 第 9，10 两题是同一类问题，第 9 题中年利率是百分比，但不是问题中待求的降息百分率，两者容易混淆. 这些题目的复习重点在列方程.

[1] 降息前年利率为2.25%，经过两次降息年利率变为1.98%，假设两次降息的变化率一样，这个变化率就是平均每次降息的百分率. 注意本题中年利率与利息变化率不同，(2.25%－1.98%)÷2＝0.135%是年利率的平均下降量，而不是平均降息的百分率（变化率）.

[2] 横向甬道的形状是等腰梯形，它的中位线就是梯形花坛的中位线.

（第8题）

9. 某银行经过最近的两次降息，使一年期存款的年利率由2.25%降至1.98%，平均每次降息的百分率是多少（结果写成$a\%$的形式，其中a保留小数点后两位）？[1]

10. 向阳村2010年的人均收入为12 000元，2012年的人均收入为14 520元，求人均收入的年平均增长率.

11. 用一条长40 cm的绳子怎样围成一个面积为75 cm²的矩形？能围成一个面积为101 cm²的矩形吗？如能，说明围法；如不能，说明理由.

拓广探索

12. 如图，要设计一个等腰梯形的花坛，花坛上底长100 m，下底长180 m，上下底相距80 m，在两腰中点连线处有一条横向甬道，上下底之间有两条纵向甬道，各甬道的宽度相等，甬道的面积是梯形面积的六分之一，甬道的宽应是多少米（结果保留小数点后两位）？[2]

（第12题）

13. 一个小球以5 m/s的速度开始向前滚动，并且均匀减速，4 s后小球停止滚动.

(1) 小球的滚动速度平均每秒减少多少？

(2) 小球滚动5 m约用了多少秒（结果保留小数点后一位）？

（提示：匀变速直线运动中，每个时间段内的平均速度$\bar{v}$（初速度与末速度的算术平均数）与路程s，时间t的关系为$s=\bar{v}t$.）

第二十七章　一元二次方程　115

3. “拓广探索”中，第12题首先需要确定横向甬道的位置及其面积的计算方法.

第13题的实际问题是匀变速运动. 速度的平均变化量等于初速度减末速度的差除以时间所得的商$\left(\dfrac{\text{初速度}-\text{末速度}}{\text{时间}}\right)$. 题后的提示启发学生利用$s=\bar{v}t$求解第（2）问，即$t=\dfrac{s}{\bar{v}}$，其中平均速度$\bar{v}=\dfrac{1}{2}\left[5+\left(5-\dfrac{5}{4}t\right)\right]$可利用第（1）问的结果得到.

Ⅲ 习题解答

习题 27.1

1. (1) $3x^2-6x+1=0$，3，-6，1；

   (2) $4x^2+5x-81=0$，4，5，-81；

   (3) $x^2+5x=0$，1，5，0；

   (4) $x^2-2x+1=0$，1，-2，1；

   (5) $x^2+10=0$，1，0，10；

   (6) $x^2+2x-2=0$，1，2，-2.

2. (1) 设半径为 x m，即 $x^2-2=0$；

   (2) 设长直角边为 x cm，$x^2-3x-18=0$.

3. -4，3.

4. 设长为 x cm，宽为 $(x-1)$ cm，$x^2-x-132=0$.

5. 设长为 x m，宽为 $(0.5-x)$ m，$x^2-0.5x+0.06=0$.

6. 设有 x 人，$\frac{1}{2}x(x-1)=10$，即 $x^2-x-20=0$.

7. $c=4$，$x=-2$.

习题 27.2

1. (1) $x_1=\frac{1}{6}$，$x_2=-\frac{1}{6}$；　(2) $x_1=\frac{9}{2}$，$x_2=-\frac{9}{2}$；

   (3) $x_1=0$，$x_2=-10$；　(4) $x_1=1$，$x_2=-3$.

2. (1) 9，3；(2) $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$；(3) 1，1；(4) $\frac{1}{25}$，$\frac{1}{5}$.

3. (1) $x_1=-2$，$x_2=-8$；　(2) $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$；

   (3) $x_1=-1+\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$x_2=-1-\frac{2\sqrt{6}}{3}$；　(4) $x_1=\frac{1+\sqrt{145}}{8}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{145}}{8}$.

4. (1) $\Delta=21$，方程有两个不等的实数根；(2) $\Delta=0$，方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta=-4$，方程没有实数根；(4) $\Delta=24$，方程有两个不等的实数根.

5. (1) $x_1=-4$，$x_2=3$；　(2) $x_1=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$；

   (3) $x_1=1$，$x_2=-3$；　(4) $x_1=-2+\sqrt{6}$，$x_2=-2-\sqrt{6}$；

   (5) $x_1=0$，$x_2=-2$；　(6) 无实数根.

6. (1) $x_1=x_2=2$；　(2) $x_1=6$，$x_2=-6$；

(3) $x_1=1$，$x_2=\frac{2}{3}$；　　(4) $x_1=-2$，$x_2=\frac{4}{3}$.

7. (1) 3，-8；(2) $-\frac{1}{5}$，-1；(3) 4，-6；(4) $\frac{1}{7}$，$-\frac{13}{7}$.

8. $\sqrt{53}$ cm.

9. 10.

10. $x_1=2$，$x_2=\frac{8}{3}$.

11. 矩形的长为 6 m，宽为 4 m.

12. 八边形；不存在，因为方程$\frac{1}{2}n(n-3)=18$无正整数解.

13. 总有两个不相等的实数根，因为 $b^2-4ac=1+4p^2>0$.

习题 27.3

1. (1) $x_1=-3$，$x_2=-7$；　　(2) $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$；

(3) $x_1=-1+\frac{\sqrt{21}}{3}$，$x_2=-1-\frac{\sqrt{21}}{3}$；　　(4) $x_1=1$，$x_2=-1$；

(5) $x_1=4$，$x_2=-\frac{2}{3}$；　　(6) $x_1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{146}}{14}$，$x_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{146}}{14}$.

2. 12，14 或-12，-14.

3. 6 cm，8 cm.

4. 9.

5. $4\sqrt{13}$ cm.

6. 10.

7. $\frac{1}{12}\approx 8.3\%$.

8. 1.5 cm.

9. 横向彩条宽 1.8 cm，竖向彩条宽 1.2 cm.

10. (1) $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$；(2) $AD=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$；(3) $AE=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$.

复习题 27

1. (1) $x_1=\frac{1}{14}$，$x_2=-\frac{1}{14}$；　　(2) $x_1=3$，$x_2=-6$；

(3) $x_1=\frac{7+\sqrt{53}}{2}$，$x_2=\frac{7-\sqrt{53}}{2}$；　　(4) $x_1=\frac{-3+\sqrt{33}}{4}$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{33}}{4}$；

(5) $x_1=-4$，$x_2=6$；　　(6) $x_1=2$，$x_2=\frac{5}{2}$；

(7) $x_1=-1+\sqrt{5}$，$x_2=-1-\sqrt{5}$；　　(8) $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=-\frac{1}{4}$.

2. 6.5，1.5.

3. 4 cm，1 cm.

4. (1) 5，-10；(2) -3.5，0.5；(3) $\frac{2}{3}$，-2；(4) 4，-7.

5. 梯形上底为 3 cm，下底为 5 cm，高为 2 cm. 图略.

6. 长方体长为 2.5 cm，宽为 1 cm，高为 5 cm. 图略.

7. 6.

8. 矩形长为 10 m，宽为 5 m.

9. 6.19%.

10. 10%.

11. 长 15 cm，宽 5 cm. 不能围成 101 cm^2 的矩形，因为方程 $x^2-20x+101=0$ 无解.

12. 6.50 m.

13. (1) $\frac{5}{4}$ m/s；(2) 1.2 s.

Ⅳ 教学设计案例

27.2　解一元二次方程（第 1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

用开平方法及配方法解一元二次方程.

2. 内容解析

二元、三元一次方程组可以看成是对一元一次方程在“元”上的推广，通过消元，将它们转化为一元一次方程求解；一元二次方程可以看成是对一元一次方程在“次”上的推广，通过“降次”把它转化为一次方程求解. 形如 $x^2=p$ 的方程可以直接开平方求解. 如果通过配方将方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 化为 $(x+n)^2=p$ 的形式，那么就可以利用开平方法求解了. 这就是配方法的基本思想.

本节课结合具体方程，通过将方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 配方化为能运用开平方法求解的方程的形式，进而求出方程的解. 配方法不仅为下节课推导一元二次方程的求根公式作好了知识上的准备，而且也是后续学习二次函数等知识的基础.

基于以上分析，确定本节课的教学重点是：理解配方法的基本思想，会用配方法解一元二次方程.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 会用直接开平方法解一元二次方程.

(2) 掌握配方的基本步骤，会用配方法解一元二次方程.

(3) 在探究用配方法解一元二次方程的过程中，进一步体会化归思想.

2. 目标解析

达成目标（1）的标志是：知道方程符合 $x^2=p$ 或$(x+n)^2=p(p\geqslant 0)$ 时，能通过开平方，将二次方程转化为一次方程求解.

达成目标（2）的标志是：知道配方的基本步骤，当二次项系数为 1 时，将方程两边同时加上一次项系数一半的平方，可以把方程一边化为含有完全平方的式子；并知道解二次项系数为 1 的一元二次方程的基本步骤.

达成目标（3）的标志是：能通过对比，发现二次项系数为 1 时，配方的关键是将方程两边同时加上一次项系数一半的平方；二次项系数不为 1 时，先将二次项系数化为 1.

三、教学问题诊断分析

学生在之前的学习中，已经掌握了完全平方式的结构特征，已经具有了一定的转化思想. 本节课首先研究的方程，可以根据平方根的意义直接开平方求解. 对需要合理变形转化为可以直接开平方形式的方程，学生在以前的学习中没有类似经验，可能出现思维障碍：配方法是怎样想到的？“配方”到底“配”什么？配方中不能做到“恒等变形”，配方时，只在方程一边加一次项系数一半的平方，而另一边不加.

基于以上分析，本节课的教学难点是：如何想到“配方法”.

四、教学支持条件分析

利用幻灯片，提供丰富的学习内容，如：人体雕像问题引例，用框图形式表示配方法解方程的全过程.

五、教学过程设计

1. 引入问题，获得思路

问题 1 在设计人体雕像时，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，可以增加视觉美感. 按此比例，如果雕像的高为 2 m，那么它的下部应设计为多高？

师生活动：教师展示章前引言问题，学生独立思考，列方程并整理得 $x^2+2x-4=0$.

追问：这是一个一元二次方程，本节课将学习如何解这样的方程. 请同学们回忆一下，我们以前学过解哪些方程？从这些方程的解法中，你能得到什么启发？

师生活动：学生回顾以前学习过的方程，教师引导学生得出：

解二元一次方程组、三元一次方程组是通过“消元”，将方程转化为一元一次方程. 类比可知，如果能设法把二次“降”为一次，那么就可以将一元二次方程转化为会解的一元一次方程了.

设计意图：通过类比“消元法”，得出解一元二次方程的基本思路——降次.

2. 探索“配方法”

问题 2 我们的目标是要得到一元二次方程的一般解法. 为此，我们先从特殊的方程入手. 你会解方程 $x^2=25$ 吗？依据是什么？

师生活动：教师先引导学生判断方程 $x^2=25$ 是一元二次方程，并指出二次项系数、一次项系数和常数项各是多少，再根据平方根的意义解方程 $x^2=25$.

追问 1：类似地，你能给出下列方程的解吗？

$$x^2=3，2x^2-8=0，x^2=0，x^2=-2.$$

追问 2：上述方程有什么共同点？你能归纳一下这类方程的解的情况吗？

师生活动：学生口答解方程的过程，归纳出一般形式 $x^2=p$，并根据 p 的取值范围得到方程的解的三种情况. 教师板书.

设计意图：根据平方根的意义解一元二次方程 $x^2=p$，并根据 p 的取值讨论出方程的解的三种情况，为探究配方法奠定基础.

问题 3 如果我们把上述方程稍作变形，例如给定方程 $(x+3)^2=5$，你认为可以怎么解？

师生活动：学生独立思考，并给出解法. 不难想到，这一类方程与 $x^2=p$ 没有实质差异，也可以根据平方根的意义，直接开平方求解. 教师可引导学生将解方程的过程叙述为：对方程 $(x+3)^2=5$ 两边开平方，将它转化为两个一元一次方程 $x+3=\sqrt{5}$，或 $x+3=-\sqrt{5}$ 进行求解.

设计意图：让学生体会方程结构的特征，为后续实现化归奠定基础.

问题 4 怎样解方程 $x^2+6x+4=0$①？

师生活动：先让学生观察、尝试. 如果学生有困难，教师可以通过如下问题引导学生思考.

追问 1：我们已经会解哪类一元二次方程？能将这个方程转化为会解的形式吗？

如果学生有困难，教师再提出如下问题.

追问 2：把方程 $(x+3)^2=5$ 的左边展开，得到 $x^2+6x+9=5$②. 比较方程①②，你发现了什么？由此你能得到方程①的解法吗？

追问 3：把方程①化成方程 $(x+3)^2=5$ 的步骤是什么？其中的关键是什么？

师生活动：先让学生独立思考、合作学习. 然后，教师组织交流，引导学生发现转化的步骤：

第一步，把方程①左边的常数项 $+4$ 移到等号的右边，得到 $x^2+6x=-4$③；

第二步，在方程③的等号两边分别加 9；

第三步，将方程左边写成完全平方式.

追问 4：为什么在方程③两边加 9？加其他数可以吗？你能说明理由吗？

师生活动：教师提出问题，学生思考、讨论、发表意见，教师组织学生讨论，并引导学生发现：要想使方程左边化成完全平方式，对照完全平方式中一次项系数的特征可知，当二次项系数为 1 时，需要在二次式加上一次项系数一半的平方，即 $\left(\frac{+6}{2}\right)^2=3^2=9$. 而加其他数不能把方程左边的式子化成完全平方式，所以不行.

设计意图：通过一系列教师追问，引导学生通过比较方程①和方程 $(x+3)^2=5$，获得配方的基本思路和步骤．

问题 5　结合方程①的解答过程，你能说出解一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的基本思路吗？具体步骤是什么？要注意什么问题？

师生活动：学生独立思考、讨论、总结，教师引导学生得出：基本思路是将含有未知数的项配成完全平方式，具体步骤：(1) 将 q 移到方程右边；(2) 在方程两边加上一次项系数 p 的一半的平方；(3) 根据 $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ 的取值讨论解的情况．要注意保证变形的过程是恒等变形．

设计意图：引导学生归纳总结出用配方法解方程 $x^2+px+q=0$ 的具体操作步骤．

练习　解方程 $x^2+2x-4=0$．

师生活动：学生独立完成．请学生板书，教师与学生一起总结解方程的步骤，给出规范格式，完成引例．这里要强调根据实际意义检验方程的根．

设计意图：细化解题步骤，明确解题过程中每一步的目的，做到按部就班、环环落实．

问题 6　通过解方程$(x+3)^2=5$，$x^2+6x+4=0$，以及引例中的方程，你能归纳这些方程的解法吗？

师生活动：先由学生归纳，通过补充完善，得出：将方程化为$(x+n)^2=p$，根据 p 的取值情况，得到方程的解的三种情况．

设计意图：从特殊到一般，归纳用配方法解方程的一般思路．配方成为$(x+n)^2=p$ 的形式后，要让学生知道 p 可能的取值情况，由此得出方程的解的三种情况，为下节课推导求根公式奠定基础．

3．小结

教师与学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答以下问题：

(1) 用配方法解一元二次方程的基本思路是什么？

(2) 配方法解一元二次方程的一般步骤是什么？

(3) 用配方法解一元二次方程的过程中，应该注意哪些问题？

师生活动：教师提出小结问题，学生思考、交流后发表观点，教师引导学生总结得到：

(1) 把方程转化为$(x+n)^2=p$ 的形式，运用开平方法，降次求解．

(2) 解一元二次方程的一般步骤：

移项 → 配方 → 降次 → 解一次方程 → 方程的解x_1, x_2

(3) 配方时，要在方程两边都加上一次项系数一半的平方．

设计意图：通过思考、交流让学生对本节课内容进行回顾，培养学生归纳概括能力．

4．布置作业

(1) 教科书第 95 页练习，第 98 页练习 1，2．

(2) 思考：利用本节课的知识，试解关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$．

六、目标检测设计

1. 在括号中填上适当的数，使等式成立：$x^2+4x+(\quad)=(x+\quad)^2$.

设计意图：考查对配方法的理解.

2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2=5$；　　(2) $(x-2)^2-3=0$；　　(3) $x^2-4x-5=0$.

设计意图：考查用开平方法及配方法解一元二次方程.

27.2　解一元二次方程（第7课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

一元二次方程根与系数的关系.

2. 内容解析

一元二次方程根与系数的关系是一元二次方程中一种重要的关系. 利用这一关系可以解决许多问题，同时在高中数学的学习中有着更加广泛的应用. 实际上，一元 n 次方程的根与系数之间也存在着确定的数量关系.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，反映了方程的根是由系数 a，b，c 所决定的，从一方面反映了根与系数之间的联系；而本节课中的 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ 是从另一方面更简洁地反映了一元二次方程的根与系数之间的联系，即通常所说的一元二次方程根与系数的关系.

本节课从思考一元二次方程的根与方程中的系数之间的关系开始，由特殊到一般，先让学生思考二次项系数为1的情形，然后再思考并证明一般形式时的根与系数的关系. 本节课为选学内容，所以在利用根系关系解决问题时需酌情控制难度.

基于以上分析，确定本节课的教学重点是：一元二次方程根与系数关系的探索及简单应用.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 了解一元二次方程根与系数的关系，能进行简单应用.

(2) 在一元二次方程根与系数关系的探究过程中，感受由特殊到一般地认识事物的规律.

2. 目标解析

达成目标 (1) 的标志是：学生知道一元二次方程根与系数的关系，并利用根与系数关系求出两根之和、两根之积.

达成目标 (2) 的标志是：学生能够借助问题的引导，发现、归纳并证明一元二次方程根与系数的关系.

三、教学问题诊断分析

一元二次方程根与系数的关系是在学生已经学习了一元二次方程解法的基础上，对一元二次方程根与系数之间的关系进行再探究. 如果让学生思考一元二次方程 $ax^2+bx=c=0$ 的两个根与系数之间有怎样的关系，学生会回答出求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，而不会想到两根之和、两根之积与系数之间的关系. 因此，教师要利用教科书中的思考栏目，引导学生从直观入手得到两根之和、两根之积与系数之间关系的猜想，进而由特殊到一般地探索一元二次方程根与系数的关系.

另外，在计算两根之积时，能否观察出式子中具有平方差公式的结构，并运用平方差公式正确进行计算，也是一部分学生的难点.

基于以上分析，本节课的教学难点是：发现一元二次方程根与系数的关系.

四、教学过程设计

1. 复习一元二次方程一般形式及求根公式

问题 1 一元二次方程的根与方程中的系数之间有怎样的关系？

师生活动：学生回顾一元二次方程的一般形式及求根公式.

设计意图：复习一元二次方程的一般形式及求根公式，使学生进一步明确求根公式是方程的根与系数之间的一种关系，并为本节课根系关系的推导作准备.

2. 猜想二次项系数为 1 时，根与系数的关系

问题 2 若一元二次方程的两根为 x_1，x_2，则有 $x-x_1=0$，且 $x-x_2=0$，那么方程 $(x-x_1)(x-x_2)=0$（x_1，x_2 为已知数）的两根是什么？将方程化为 $x^2+px+q=0$ 的形式，你能看出 x_1，x_2 与 p，q 之间的关系吗？

师生活动：学生独立思考，得出方程两根为 x_1，x_2，通过将 $(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的左边展开，化为一般形式，得到方程 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$. 这个方程的二次项系数为 1，一次项系数 $p=-(x_1+x_2)$，常数项 $q=x_1x_2$. 学生独立观察并讨论后，发现两根之和 $x_1+x_2=-p$，两根之积 $x_1x_2=q$.

设计意图：通过教师引导和点拨，让学生在二次项系数为 1 的方程中发现一元二次方程根与系数的关系.

3. 猜想并验证一元二次方程根与系数的关系

问题 3 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，二次项系数 a 未必是 1，它的两个根的和、积与系数又有怎样的关系呢？

说明：学生有可能利用问题 2 的猜想，通过将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 转化为 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 的形式，得出猜想：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

师生活动：学生思考后，教师提出如下问题.

追问：如何证明这两者之间的关系呢？（利用一元二次方程的一般形式和求根公式）

师生活动：师生共同完成证明过程：

设 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个根. 所以

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1\cdot x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{(2a)^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.\end{aligned}$$

从而得出一元二次方程的两个根 x_1，x_2 和系数 a，b，c 有如下关系：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

设计意图：通过讨论，让学生经历从特殊到一般的探究过程，明确一元二次方程的根与系数的关系. 如果学生利用二次项系数为 1 的情形给出证明，应当予以肯定.

4. 练习、巩固根与系数的关系

例 根据一元二次方程的根与系数的关系，求下列方程两个根 x_1，x_2 的和与积：

（1）$x^2-6x-15=0$；　　（2）$3x^2+7x-9=0$；　　（3）$5x-1=4x^2$.

师生活动：学生在解决问题时可能会出现先求出一元二次方程的根，再求两根之和、两根之积的情况，也可能出现根与系数关系记忆不准确的情况，在（3）题中可能没有整理成一般形式. 教师要及时引导学生进行订正.

设计意图：加强对一元二次方程的根与系数关系的认识，并进一步熟悉根与系数关系的应用.

练习 不解方程，求下列方程两个根的和与积：

（1）$x^2-3x=15$；　　（2）$3x^2+2=1-4x$；

（3）$5x^2-1=4x^2+x$；　　（4）$2x^2-x+2=3x+1$.

师生活动：四名学生板书，其他学生在练习本上完成，教师巡视、指导，然后小组交流，并评价.

设计意图：让学生进一步巩固对一元二次方程的根与系数关系的认识.

5. 小结

教师与学生一起回顾本节课所学主要内容，并请学生回答以下问题：

（1）一元二次方程根与系数的关系是什么？

（2）我们是如何得到根与系数关系的？

设计意图：通过小结，使学生梳理本节课所学内容，把握本节课的核心——一元二次方程根与系数的关系，并体验教学活动充满着探索性与创造性.

6. 布置作业

教科书习题27.2第7题.

五、目标检测设计

求下列方程两个根的和与积：

(1) $x^2-4x+7=10$；　(2) $5x^2-2=x+3$；　(3) $2x^2=3x$.

设计意图：考查学生对一元二次方程根与系数关系的了解情况.

一元二次方程复习课（两课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

对本章内容进行梳理总结并建立知识体系，综合应用本章知识解决问题.

2. 内容解析

本节课是复习课，是在学生已经学习一元二次方程的有关知识的基础上，分两课时对本章内容进行梳理总结并建立知识体系，综合应用本章知识解决问题. 第1课时着重对本章内容进行梳理总结并建立知识体系，第2课时着重综合应用本章知识解决问题.

从实际问题中抽象出数量关系，列出一元二次方程，求出它的根进而解决实际问题，是本章学习的一条主线. 选择适当的方法将“二次”降为“一次”，从而解一元二次方程，是本章学习的另一条主线. 一元二次方程是本套初中数学教科书所学习的最后一种方程，对本章的小结，也有对初中阶段方程学习的总结作用.

基于以上分析，确定本节课的教学重点是：从两条主线对本章内容进行梳理总结并建立知识体系.

二、目标和目标解析

1. 目标

(1) 复习本章的重点内容，整理本章知识，形成有关方程的知识体系，体会化归思想.

(2) 提高建立一元二次方程模型解决实际问题的能力，培养应用意识.

2. 目标解析

达成目标(1)的标志是：知道方程的主要学习内容是方程的概念、解法和应用，形成有关方程的知识体系. 总结各种已学方程的解题思想和化归过程，理解解方程的基本思想是通过消元、降次、分式化整式等，使方程转化为 $x=a$ 的形式.

能说出探索一元二次方程解法的过程和结果，包括：解一元二次方程的降次思想，能根据一元二次方程的特点选择恰当解法，能说出各化归步骤的依据等.

达成目标(2)的标志是：能够在具体的问题情境中建立一元二次方程模型，运用一元二次方程解决问题；能画出建模结构图.

三、教学问题诊断分析

学生在初中阶段学习了各种方程的解法，本课要对解方程的知识进行系统梳理和重新建构，需要建立不同知识间的内在联系，对解方程的思想方法进行归纳整理，从而建立初中阶段解方程的知识结构．这需要学生有较强的系统思维能力，因此是本课的难点．

针对不同方程的具体特点，选用不同的解法，简洁有效地解出方程，这也是一个难点．

分析实际问题中的数量关系，建立方程模型，始终是一个难点．

四、教学过程设计

1．知识梳理

问题 1　方程 $(m+2)x^{|m|}+3mx+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，m 的值为________；若是关于 x 的一元一次方程，m 的值为________．

师生活动：教师出示问题，学生先独立思考、回答．为了帮助学生有逻辑地思考，教师可追问以下问题．

追问 1：一元二次方程的一般式是什么？由此你能给出 m 需要满足的条件吗？

追问 2：一元一次方程的一般式是什么？m 需要满足什么条件？

追问 3：我们还学过哪种整式方程？写出一般形式．比较你所学过的各种整式方程，说明它们的未知数个数与次数．

设计意图：学生要会辨析几种整式方程的概念，分析出符合定义的未知数的次数．通过此题引导学生进一步理解一元二次方程的概念及一般形式，回顾已学的其他整式方程，加强知识的前后联系，帮助学生建立有关方程的知识体系．

2．解法回顾

问题 2　解方程：$x^2-2x+1=25$．你能给出哪些解法？你认为哪种解法最适合本方程？

师生活动：教师出示问题，学生独立思考、解答、展示．教师反馈并提出以下问题．

追问 1：一元二次方程有哪些解法？它们在什么情况下最适用？

追问 2：这几种解法之间有何联系？在基本思想上有何共同点？

设计意图：本题主要复习一元二次方程的解法，通过比较不同解法，体会如何根据方程特点选择解法．方程左边可以写成完全平方式，所以可用配方法；也可将方程整理成一般式，用公式法；还可以用因式分解法．让学生深入思考这几种解法之间的联系，体会配方法的重要意义以及“降次”的基本思想．

3．一元二次方程的根的情况

问题 3　已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+4x+2k=0$ 有两个不相等的实数根．

（1）求 k 的取值范围；

（2）当 k 取最大整数值时，用公式法求该方程的解；

（3）求方程两根的和与积（用 k 表示）．

师生活动：学生独立思考、讨论、展示．教师提出以下问题．

追问 1：什么情况下一元二次方程有两个不相等的实数根？

追问 2：如何判别一个一元二次方程根的情况？

追问 3：根的判别式是依据什么来对一元二次方程根的情况进行判断的？

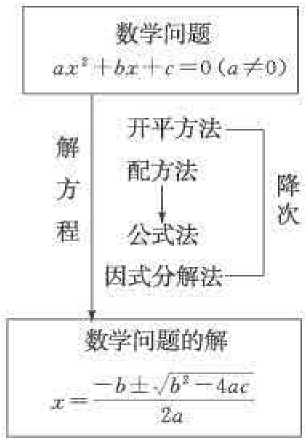
追问 4：求根公式与配方法有什么关系？

追问 5：方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根 x_1，x_2 与系数 a，b，c 有什么关系？我们是如何得到这种关系的？

设计意图：通过分析一元二次方程有两个不等实根，引导学生回顾判别式的作用. 通过教师追问，加深了解求根公式与配方法的关系，完善一元二次方程解法的体系.

问题 4　请同学们根据刚才所复习的内容整理一下本章所学的主要知识. 你能发现它们之间的联系吗？能画出这些知识的结构图吗？

师生活动：教师组织学生画出解一元二次方程的知识结构图：



设计意图：明确解一元二次方程的基本思想，梳理四种解法之间的关系，复习方程根的情况，完善知识结构.

4. 一元二次方程的实际应用

问题 5　小明参加“做文明市民”宣讲小分队，利用周末时间发放宣传材料. 第一周发放 300 份，第三周发放 363 份. 求宣传材料发放份数的周平均增长率.

师生活动：学生独立完成，选代表板演、讲解. 师生一起总结，着重分析题目中的数量关系，明确增长率的意义和等量关系.

问题 6　某农场要建一个长方形的养鸡场，鸡场的一边靠长为 25 m 的墙，另外三边用木栏围成，木栏长 40 m.

(1) 养鸡场面积能达到 180 m^2 吗？

(2) 养鸡场面积能达到 220 m^2 吗？

(3) 养鸡场面积能达到 250 m^2 吗？

如果能，请给出设计方案；如果不能，请说明理由.

师生活动：学生独立完成，选代表板演、讲解. 教师引导学生思考问题之间的联系，通过对比三个方程列式和解的关系，启发学生通过根的判别式判定解的范围.

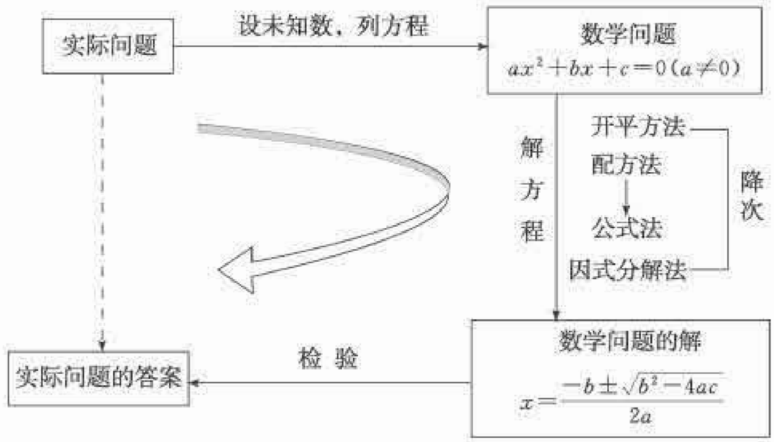
设计意图：通过实际问题的解决，体会建立一元二次方程模型解决实际问题的过程；提醒学生

注意对问题实际意义的分析；为后续用函数知识分析类似问题作适当铺垫.

问题 7 你能总结一下本章的知识结构图吗?

师生活动：教师组织学生完善本章的知识结构图，得出本章主要研究三大块内容：一是一元二次方程的概念，二是一元二次方程的解法，三是用一元二次方程分析和解决实际问题.

本章知识结构图



设计意图：让学生主动建构本章的知识结构，形成知识体系．在此基础上，教师出示本章知识框图，帮助学生形成知识结构.

5. **布置作业**

复习题 27 第 1，2，3，8 题.

五、目标检测设计

1. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-x+\frac{1}{4}m-1=0$ 有实数根，则 m 的取值范围是（　　）.

(A) $m\geqslant2$　　(B) $m\leqslant5$　　(C) $m>2$　　(D) $m<5$

设计意图：考查一元二次方程根的判别式.

2. 某商品的价格为 100 元，连续两次降价 $x\%$后的价格是 81 元，则 x 为（　　）.

(A) 9　　(B) 10　　(C) 19　　(D) 8

设计意图：考查一元二次方程的应用，以及对增长率问题的掌握情况.

3. 解下列方程：

(1) $(x+3)(x-6)=-8$；　　(2) $3x^2-6x=4$.

设计意图：考查解法的选择.（1）整理成一般式后，适合用因式分解法；（2）整理成一般式后，适合用公式法.

4. 怎样用一条长 40 cm 的绳子围成一个面积为 75 cm² 的矩形？能围成一个面积为 101 cm² 的矩形吗？如果能，说明围法；如不能，说明理由.

设计意图：考查一元二次方程的实际应用.

V 拓展资源

一、知识的拓展延伸与相关史料

1. 一元二次方程几种解法之间的关系

解一元二次方程有下列几种常用方法：

(1) 配方法，如 $x^2+6x+7=0$，经配方得$(x+3)^2=2$，再用直接开平方法；

(2) 公式法；

(3) 因式分解法.

这三种方法并不是孤立的. 直接开平方法，实际也是因式分解法. 解方程 $x^2+6x+7=0$，只要变形为$(x+3)^2-(\sqrt{2})^2=0$即可. 或原方程 $x^2+6x+7=0$ 经配方化为$(x+3)^2=2$，再求解时，还是归到用平方差公式的因式分解法，所以配方法归为用因式分解法的手段. 公式法在推导公式过程中用的是配方法和直接开平方法，因此，它还是归到因式分解法. 所不同的是，公式法用一元二次方程的系数来表示根，因而可以作为公式. 由此可见，对因式分解法应予以足够的重视. 因式分解法还可推广到高次方程.

2. 我国古代的一元二次方程

提起代数，人们自然就把它和方程联系起来. 事实上，过去代数的中心问题就是对方程的研究. 我国古代对代数的研究，特别是对方程解法的研究有着优良的传统，并取得了重要成果.

我国古代数学家研究过二次方程的解法. 当时的解法虽然与现在的解法不同，但已与现在的解法相似. 下面是我国南宋数学家杨辉在 1275 年提出的一个问题：

直田积（矩形面积）八百六十四步（平方步），只云阔（宽）不及长一十二步（宽比长少一十二步）. 问阔及长各几步.

答：阔二十四步，长三十六步.

这里，我们不谈杨辉的解法，只用已学过的知识解决上面的问题.

设阔（宽）为 x 步，则长为$(x+12)$步.

根据题意，列出方程

$$x(x+12)=864.$$

展开，整理，得

$$x^2+12x-864=0.$$

解这个方程，得

$$\begin{aligned} x &= \frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times1\times(-864)}}{2} \\ &= \frac{-12\pm\sqrt{3\ 600}}{2} \\ &= \frac{-12\pm60}{2}. \end{aligned}$$

$$x_1=24,\ x_2=-36\text{（舍去）},$$
$$x_1+12=36.$$

答：矩形的阔（宽）为 24 步，长为 36 步.

上面的问题选自杨辉所著《田亩比类乘除算法》. 原题另一个提法是："直田积八百六十四步，只云阔与长共六十步，问阔及长各几步. 答：阔二十四步，长三十六步."这个问题同样可以类似求解.

3. **掌握数学思想方法，以不变应万变**

本章内容蕴含了丰富的数学思想方法，主要有转化思想、类比思想、降次法、配方法等.

（1）转化思想

我们知道，解方程的过程就是不断地通过变形把原方程转化为与它等价的最简单方程的过程. 因此，转化思想是解方程过程中思维活动的主导思想. 在本章，转化无所不在，无处不有，可以说这是本章的精髓和特色之一，其表现主要有以下方面：

① 未知转化为已知，这是解方程的基本思路；

② 一元二次方程转化为一元一次方程，这是通过将原方程降次达到的；

③ 特殊转化为一般，一般转化为特殊.

例如，通过用配方法解数字系数的一元二次方程 $x^2+6x+4=0$ 归纳出用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的方法，进而得出一元二次方程的求根公式. 而用公式法又可以解各种具体形式的一元二次方程，推导出一元二次方程根与系数的关系. 又如，通过设未知数，找出等量关系，列方程，解方程，把实际问题转化为解方程问题，等等.

掌握转化思想并举一反三，还可以解决很多其他方程问题. 如高次方程转化为一元一次或一元二次方程，分式方程转化为整式方程，无理方程转化为有理方程，二元二次方程组转化为二元一次方程组. 总之，本章学习的关键之一是学会如何"转化".

（2）类比思想

本章多次运用类比找出新旧知识的联系，在新旧知识间进行对比，以利于更快更好地掌握新知识.

如用配方法解一元二次方程时，可类比平方根的概念和意义；列一元二次方程解应用题，可类比列一元一次方程解应用题的思路和一般步骤.

类比思想是联系新旧知识的纽带，有利于帮助我们开阔思路，研究解题途径和方法，有利于掌握新知识、巩固旧知识，学习时应特别重视.

掌握了类比和转化这两大数学思想，举一反三，还可解决许多方程的相关问题. 我们来看下面两个例子.

例 1 解分式方程 $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{x^2-4}+\dfrac{2}{2-x}=1$.

分析：这是一个可化为一元二次方程的分式方程，可类比解可化为一元一次方程的分式方程的方法和步骤，通过去分母，将分式方程转化为整式方程来解.

解：原方程两边同乘 x^2-4，得

$$x-2+4x-2(x+2)=x^2-4.$$

整理得 $x^2-3x+2=0.$

解得 $x_1=1,\ x_2=2.$

检验：把 $x=1$ 代入，$x^2-4\neq 0$；

把 $x=2$ 代入，$x^2-4=0.$

所以 $x=2$ 是原方程的增根，原方程解为 $x=1.$

例 2 解方程组 $\begin{cases} x+y=7, & ① \\ xy=12. & ② \end{cases}$

分析：这是一个二元二次方程组，可类比解二元一次方程组的方法，通过消元、降次，把二元二次方程转化为一元二次方程或一元一次方程.

解：由①得 $x=7-y.$ ③

把③代入②，得 $y^2-7y+12=0.$

解得 $y_1=3,\ y_2=4.$

把 $y_1=3$ 代入③，得 $x_1=4$；

把 $y_2=4$ 代入③，得 $x_2=3.$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=4. \end{cases}$

4. **配方法的妙用**

所谓配方，就是把一个多项式经过适当变形配成完全平方式. 配方法除一元二次方程求根公式推导这一典型应用外，在因式分解、化简二次根式、证明恒等式、解方程、求代数式最值等问题中都有广泛应用，是一种很重要、很基本的数学方法.

例 1 分解因式 $x^2-120x+3\ 456.$

分析：由于常数项的数值较大，如果运用十字相乘法分解，需要试验多次，因此可采用配方法.

解：原式 $=x^2-120x+3\ 600+3\ 456-3\ 600$

$=(x-60)^2-144$

$=(x-60+12)(x-60-12)$

$=(x-48)(x-72).$

例 2 化简 $\sqrt{7-2\sqrt{10}}.$

解：原式 $=\sqrt{5-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}+2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{2}.$

例 3 解方程 $x^4-15x^2+10x+24=0.$

分析：这是一个四次方程，应设法降次后来解，为此先将方程的左端利用配方法分解因式. 将 $-15x^2$ 及 24 适当拆项后可达到分解因式的目的.

解：原方程可变形为 $x^4+10x^2+25-25x^2+10x-1=0.$

即 $$(x^2+5)^2-(5x-1)^2=0.$$

所以 $$(x^2+5+5x-1)(x^2+5-5x+1)=0.$$

即 $$x^2+5x+4=0 \text{ 或 } x^2-5x+6=0.$$

由 $x^2+5x+4=0$，得 $$x_1=-1,\ x_2=-4.$$

由 $x^2-5x+6=0$，得 $$x_3=2,\ x_4=3.$$

故原方程的解为 $x_1=-1$，$x_2=-4$，$x_3=2$，$x_4=3$.

例 4 求 $4x^2+y^2-2y-4x+15$ 的最小值.

解：可将原式配方，得$(2x-1)^2+(y-1)^2+13\geqslant 13$.

所以当 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$ 时，原式有最小值 13.

5. 伟大的韦达

一元二次方程的根与系数的关系，常常也称做韦达定理，这是因为这个定理是 16 世纪法国杰出的数学家韦达（Viète，1540—1603）发现的.

韦达 1540 年出生于法国普瓦图. 早年学习法律，曾以律师身份在法国议会里工作，韦达不是专职数学家，但他非常喜欢在政治生涯的间隙和工作余暇研究数学，并作出了很多重要贡献，成为那个时代最伟大的数学家. 韦达是第一个有意识地和系统地使用字母表示数的人，并且对数学符号进行了很多改进. 他在 1591 年所写的《分析方法入门》是最早的符号代数著作. 他确定了符号代数的原理与方法，使当时的代数学系统化并且把代数学作为解析的方法使用. 因此，他获得了“代数学之父”之称. 他还写下了《应用于三角形的数学定律》（1579 年）等不少数学论著. 韦达的著作，以独特形式包含了文艺复兴时期的数学内容. 只可惜韦达著作的文字比较晦涩难懂，在当时不能得到广泛传播. 韦达逝世后，由别人汇集整理并编成的《韦达文集》于 1646 年出版. 韦达 1603 年死于巴黎，享年 63 岁. 下面是关于韦达的两则趣事.

（1）与罗门的较量

数学家罗门曾提出一个 45 次方程的问题向各国数学家挑战. 法国国王便把这个问题交给了韦达，韦达当时就得出一解，回家后一鼓作气，很快又得出了 22 解. 答案公布，震惊了数学界. 韦达又回敬了罗门一个问题. 罗门冥思苦想数日方才解出，而韦达却轻而易举地做了出来，为祖国争得了荣誉，他的数学造诣由此可见一斑.

（2）韦达的“魔法”

在法国和西班牙的战争中，法国人对于西班牙的军事动态总是了如指掌，在军事上总能先发制人，因而不到两年工夫就打败了西班牙. 西班牙的国王对法国人在战争中的“未卜先知”十分恼火又无法理解，认为是法国人使用了“魔法”. 原来，韦达利用自己精湛的数学方法，成功地破译了西班牙的军事密码，为他的祖国赢得了战争的主动权. 另外，韦达还设计并改进了历法. 所有这些都体现了韦达作为大数学家的深厚功底.

6. 怎样巧用韦达定理解“看错数”问题

小明和小红一起做作业，在解一道一元二次方程时，小明在化简过程中写错了常数项，因而得到方程的两个根是 8 和 2；小红在化简过程中写错了一次项的系数，因而得到方程的两个根是 -9 和 -1. 你知道原来的方程是什么吗？

我们可以设这个方程是 $x^2+px+q=0$.

由题意知小明把方程错写成 $x^2+px+q'=0$.

小红把方程错写成 $x^2+p'x+q=0$.

8 和 2 是方程 $x^2+px+q'=0$ 的两个根，

-9 和 -1 是方程 $x^2+p'x+q=0$ 的两个根，

由韦达定理可知：$p=-(8+2)=-10$，$q=(-9)\times(-1)=9$.

故原来的方程是 $x^2-10x+9=0$.

7. 二次三项式的因式分解

我们把形如 $ax^2+bx+c\,(a\neq0)$ 的多项式叫做 x 的二次三项式. 在了解了形如 $x^2+(p+q)x+pq$ 的二次三项式分解因式的方法的基础上，现在介绍利用求出一元二次方程的根的方法，将一般的二次三项式分解因式.

观察二次三项式的因式分解和解一元二次方程可以发现，在解一元二次方程 $2x^2-6x+4=0$ 时，可以先把左边的二次三项式分解因式，得 $2(x^2-3x+2)=0$，即 $2(x-1)(x-2)=0$. 这样，就可以得到方程的两个根：$x_1=1$，$x_2=2$.

反过来，我们也可以利用求出一元二次方程的两个根的方法，把二次三项式分解因式.

事实上，我们令二次三项式 $ax^2+bx+c\,(a\neq0)$ 为 0，得一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$. 再用求根公式求得这个一元二次方程的两个根的和，那么由计算可知 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$，就是

$\dfrac{b}{a}=-(x_1+x_2)$，$\dfrac{c}{a}=x_1\cdot x_2$.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=a(x-x_1)(x-x_2).$$

这就是说，在分解二次三项式 ax^2+bx+c 的因式时，可先求出方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个根 x_1，x_2，然后写成 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

二、拓展性问题

1. 回答下列问题：

（1）若方程 $(m^2-2)x^2-1=0$ 有一个根是 1，则 m 的值是多少？

（2）已知 2 和 -1 是方程 $2x^2+mx+n=0$ 的两个根，求 m 和 n 的值.

（3）若方程 $3x^2-5x-2=0$ 有一个根是 a，则 $6a^2-10a$ 的值是多少？

（4）已知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根是 1，那么 $a+b+c$ 的值是多少？

答案与提示：以上各题均体现了方程根的意义，方程的根是使等式成立的未知数的值，将这个值代入方程求解参数即可. 其中第（2）题应用韦达定理更简单.（1）$m=\pm\sqrt{3}$；（2）$m=-2$，$n=-4$；（3）4；（4）0.

2. 解方程：（1）$(3y^2-y)^2=3(3y^2-y)-2$；（2）$(t^2+t-1)(t^2+t+2)=4$.

答案与提示：两个方程均为高次方程，观察方程结构，可通过换元法达到降次的目的.（1）设 $3y^2-y=x$，则原方程变为 $x^2=3x-2$. 解得 $y_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$，$y_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$，$y_3=1$，$y_4=-\dfrac{2}{3}$.

(2) 设$t^2+t=x$，则原方程变为$(x-1)(x+2)=4$. 解得$t_1=-2$，$t_2=1$.

3. 已知m，n是二次方程$x^2+1\,999x+7=0$的两个根，求$(m^2+1\,998m+6)(n^2+2\,000n+8)$的值.

答案与提示：根据方程根的意义，将原式整理为$-(m+1)(n+1)$，应用韦达定理，$m+n=-1\,999$，$m\cdot n=7$可求得原式的值为1 991.

4. 已知关于x的方程$(a-2)x^2-2(a-1)x+(a+1)=0$，a为何非负整数时，(1) 方程只有一个实数根？(2) 方程有两个相等的实数根？(3) 方程有两个不相等的实数根？

答案与提示：原方程形式上为二次，但二次项系数为字母参数，需讨论. 如方程只有一个根，应为一次方程，故二次项系数为0. 如方程有两个根，则$a-2\neq0$. 对 (2) (3) 题，分别令根的判别式等于0，大于0. 可得，(1) $a=2$；(2) $a=3$；(3) $a=0$或$a=1$.

5. 在实数范围内分解因式：(1) $-2x^2-4x+3$；(2) $4x^2-4x-1$.

答案与提示：(1) $-2\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}\right)$；(2) $(2x-1-\sqrt{2})(2x-1+\sqrt{2})$.

6. 对于向上抛的物体，在没有空气阻力的条件下，有这样的关系式：$h=vt-\dfrac{1}{2}gt^2$，其中h是上升高度，v是初速度，g是重力加速度（为方便起见，g取10 m/s^2），t是抛出后所经历的时间. 如果将一物体以$v=25(m/s)$的初速度向上抛，物体何时处在离抛出点20 m高的地方？

答案与提示：由$h=vt-\dfrac{1}{2}gt^2$，得$20=25t-\dfrac{10}{2}t^2$. 整理得$t^2-5t+4=0$，解得$t_1=1$，$t_2=4$. 所以物体抛出后经过1 s和4 s，两次处在离抛出点20 m高的地方.

说明：对以上结论你或许会觉得难以相信，并且很可能不假思索地将$t_2=4$舍去，但第二解也是有意义的，物体实际上的确两次到达20 m的地方，一次是在上升的时候，而另一次则是在下降的时候.

可以算出，物体以25 m/s的初速度上抛时经过1 s到达离抛出点20 m的地方后，还要再经过1.5 s到达最高点31.25 m处，然后过1.5 s回落到离抛出点20 m的地方，又过1 s回到原来抛出的地方.

7. 某零售商购进一批单价为16元的玩具，销售一段时间后，为了获得更多利润，商店决定提高销售价格. 经过试验发现，若按每件20元的价格销售时，每月能卖360件；若按每件25元的价格销售时，每月能卖210件. 假定每月销售件数为y是价格x（单位：元）的一次函数.

(1) 试求y与x之间的关系式；

(2) 在商品不积压且不考虑其他因素的条件下，销售价格定为多少时，才能使每月获得最大利润？每月的最大利润是多少？

答案与提示：(1) 设此一次函数为$y=ax+b$. 根据已知条件，当$x=20$时，$y=360$；当$x=25$时，$y=210$. 将x，y代入$y=ax+b$得

$$\begin{cases}360=20a+b, & ①\\ 210=25a+b. & ②\end{cases}$$

①-②得 $150=-5a$.

所以 $a=-30$，代入②得

$$\begin{aligned} b &= 210-25a \\ &= 210-25\times(-30) \\ &= 210+750=960. \end{aligned}$$

所以，此一次函数为 $y=-30x+960(16<x<32)$.

(2) 已知这种商品以每件 20 元的价格销售时，每月能卖 360 件；若以每件 25 元的价格销售时，每月能卖 210 件. 可知每件涨价 5 元销售量减少 360－210＝150（件），平均每件涨价 1 元，销售量就要减少 30 件.

又已知每件进货价为 16 元，当以每件 20 元价格销售时每件可赚 20－16＝4（元）. 再提高售出价. 设每件再涨价 x 元，则销售量就要减少 $30x$ 件，并设每月获得利润为 y 元. 按题意得

$$y=(4+x)(360-30x)=-30(x-4)^2+1\,920.$$

当 $x=4$ 时，$y_{最大}=1\,920$.

此时每件可赚 $4+x=4+4=8$(元).

16＋8＝24，可知销售价格定为每件 24 元时，才能使每月获得最大利润，每月最大利润是 1 920 元.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容是一元二次方程的有关概念、解法、根的判别式、根系关系以及一元二次方程的应用. 对于一元二次方程的有关概念，应考查学生是否能用一元二次方程的概念对方程的系数等作出判断，能否理解二次项系数不能为 0 以及一元二次方程解的概念. 对于一元二次方程的解法，应考查学生是否掌握解一元二次方程的基本思想，能否根据一元二次方程的具体特点，灵活选择适当的方法解方程. 对于一元二次方程根的判别式，应考查学生能否正确计算一元二次方程根的判别式的值，并能依据它判断一元二次方程根的情况. 对于一元二次方程根与系数的关系，只要考查学生是否知道有关结论. 对于一元二次方程的应用，应考查学生能否掌握从实际问题中找出数量关系，列出一元二次方程，解方程，并将解方程的结果回归到实际问题中.

2. 对本章的考查，应注意以下问题：

(1) 对于一元二次方程解法，应考查能否灵活应用配方法、公式法、因式分解法解数字系数的一元二次方程. 不要在字母系数的方程的解上追求复杂性.

(2) 对于一元二次方程的应用，应着重考查能否根据实际背景，分析数量关系，找到关键的等量关系，建立一元二次方程模型解决问题，要关注方程的解是否符合实际意义.

3. 在评价中，要关注对学生学习过程的评价. 如学习配方法解一元二次方程时，关注学生通过配方达到降次目的思路的产生过程.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

（一）选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 若关于 x 的方程$(m-1)x^2+mx-1=0$是一元二次方程，则 m 的取值范围是（　　）.

(A) $m\neq1$　　(B) $m=1$　　(C) $m\geqslant1$　　(D) $m\neq0$

2. 用配方法解方程 $x^2+8x+9=0$，变形后的结果正确的是（　　）.

(A) $(x+4)^2=-7$　　(B) $(x+4)^2=-9$

(C) $(x+4)^2=7$　　(D) $(x+4)^2=25$

3. 下列所给方程中，没有实数根的是（　　）

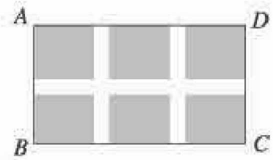
(A) $x^2+x=0$　　(B) $5x^2-4x-1=0$

(C) $3x^2-4x+1=0$　　(D) $4x^2-5x+2=0$

4. 已知方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两根分别为 x_1 和 x_2，则 x_1+x_2 的值等于（　　）.

(A) 2　　(B) -2　　(C) $\dfrac{3}{2}$　　(D) $-\dfrac{3}{2}$

5. 如图所示，某小区规划在一个长 16 m，宽 9 m 的矩形场地 $ABCD$ 上，修建同样宽的小路，使其中两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分种草. 如果使草坪部分的总面积为 112 m²，设小路的宽为 x cm，那么 x 满足的方程是（　　）.



（第 5 题）

(A) $2x^2-25x+16=0$

(B) $x^2-25x+32=0$

(C) $x^2-17x+16=0$

(D) $x^2-17x-16=0$

6. 菱形 $ABCD$ 的一条对角线长为 6，边 AB 的长是方程 $x^2-7x+12=0$ 的一个根，则菱形 $ABCD$ 的周长为（　　）.

(A) 16　　(B) 12　　(C) 16 或 12　　(D) 24

（二）填空题（每小题 6 分，共 24 分）

7. 方程 $5x^2-x-3=x^2-3+x$ 的二次项系数是________，一次项系数是________，常数项是________.

8. 若关于 x 的一元二次方程$(m-1)x^2+x+m^2-1=0$有一根为 0，则 $m=$________.

9. 方程 $x^2=2x$ 的根是________.

10. 小明设计了一个魔术盒，当任意实数对（a，b）进入其中时，会得到一个新的实数 a^2+2b-3. 例如把（2，-5）放入其中，就会得到$2^2+2\times(-5)-3=-9$. 现将实数对（m，$-3m$）放入其中，得到实数 4，则 $m=$________.

（三）解答题（第 11 题每小题 5 分，共 15 分；第 12 题 12 分；第 13 题 13 分. 共 40 分）

11. 解方程：

(1) $x^2-4x-1=0$；

(2) $2(x-1)^2-16=0$；

(3) $3x^2-5x+1=0$.

12. 列方程解应用题

李师傅去年开了一家商店. 今年 1 月份开始盈利，2 月份盈利 2 400 元，4 月份的盈利达到 3 456 元，且从 2 月到 4 月，每月盈利的平均增长率都相同.

(1) 求每月盈利的平均增长率；

(2) 按照这个平均增长率，预计 5 月份这家商店的盈利将达到多少元?

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+2m-1=0$ 有两个相等的实数根，求 m 的值及方程的根.

参考答案

1. A. 本题考查学生对一元二次方程概念的理解.
2. C. 本题考查学生对配方法的掌握程度.
3. D. 本题考查学生对一元二次方程根的判别式的掌握.
4. B. 本题考查学生对一元二次方程根与系数关系的理解.
5. C. 本题考查学生对实际问题中未知量与已知量之间关系的分析能力.
6. A. 本题考查学生代数与几何简单综合问题的解题能力.
7. 4，-2，0. 本题考查学生对一元二次方程系数的理解.
8. -1. 本题考查学生对方程根的概念的理解.
9. $x_1=0$，$x_2=2$. 本题考查学生解一元二次方程的能力.
10. 7 或 -1. 本题考查学生的阅读理解能力及解方程的能力.
11. (1) $x_1=2+\sqrt{5}$，$x_2=2-\sqrt{5}$；　(2) $x_1=1+2\sqrt{2}$，$x_2=1-2\sqrt{2}$；　(3) $x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$，$x_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$. 本题考查学生根据方程的特点选择适当方法解方程的能力.
12. (1) 20%；(2) 4 147.2 元. 本题考查学生对等量关系的分析能力，以及将生活中的问题转化为数学问题的能力.
13. $m=5$，$x_1=x_2=3$. 本题考查学生对一元二次方程根的判别式的掌握及解方程的能力.