

义务教育教科书

数 学

教师教学用书

五年级
下册



人民教育出版社 课程教材研究所
小学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

义务教育教科书教师教学用书·数学五年级·下册 / 人民教育出版社课程教材研究所小学数学课程教材研究开发中心编著. —2版. —北京: 人民教育出版社, 2016.10

ISBN 978-7-107-31346-2

I. ①义… II. ①人… III. ①小学数学课—教学参考资料 IV. ①G623

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第313652号

义务教育教科书教师教学用书 数学 五年级 下册

出版发行 人民教育出版社

(北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编: 100081)

网 址 <http://www.pep.com.cn>

经 销 全国新华书店

印 刷 ×××印刷厂

版 次 2016年10月第2版

印 次 年 月第 次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16

印 张 21

字 数 500千字

定 价 元

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或本产品任何部分·违者必究
如发现内容质量问题、印装质量问题, 请与本社联系。电话: 400-810-5788

主 编：卢 江 杨 刚
副 主 编：王永春 陶雪鹤 刘加霞

原本册编写人员：袁玉霞 曹培英 李晓梅 高枝国 卢 江 陶雪鹤
王永春 丁国忠 张 华 周小川 熊 华 刘 丽
刘福林

本册修订人员：王彦伟 曹培英 潘红娟 彭晓玫 陈亚明 夏井川
陶雪鹤 熊 华 刘 丽 陈 曦

审 稿：陶雪鹤

责 任 编 辑：熊 华

人教版®

说 明

一、为了帮助教师了解《义务教育教科书 数学》各册的教学内容、教材编排和教学目标，更好地进行数学教学，我们编辑出版了这套教师教学用书。全套书共十二册，与各册教科书配合使用。

二、教师教学用书的主要内容

(1) 本册教材说明：包括本册教材的教学内容和教学目标、教材的编写特点、教学中需要准备的教具和学具、课时安排等。帮助教师对全册教材有个概括的了解，作好开学前的准备。

(2) 各单元的教材说明和教学建议：包括每个单元的教学目标、内容安排及其特点、教学建议；每一页教科书的教材分析和教学建议，以及本单元教学的教学设计或教学片段、备课资料、评价建议与评价样例。供教师备课时参考。

三、这套教师教学用书，在编写过程中吸收了以往教学用书的一些编写经验和内容，在编排上有如下特点。

(1) 与教科书密切配合，除了对全册和各单元教材作概要介绍外，针对每页教科书的具体教学内容进行教材编写意图分析，提出比较详细的教学建议。

(2) 加强对教材的分析，着重说明每部分教材的地位作用、编排顺序、前后联系、编写特点、重点难点，并注意说明练习题的编排意图和教学目标，以便于教师备课时查阅。

(3) 注意提出一些具体的、切实可行的教学建议，特别着重以现代教学论作指导，说明如何运用操作、直观、启发来引导学生思考，既使学生获得正确的数学概念和规律性知识，又使思维能力得到发展。

四、编写这套教师教学用书时，虽然作了一些努力，但是限于时间和编者水平，难免有不妥之处。希望广大教师和教研人员提出批评和修改建议。

五、使用这套教师教学用书时，教师应该根据自身的特点和风格以及学生的实际情况，有选择、灵活地运用书中的有关内容。教师应充分发挥主动性和积极性，改革教育、教学方法，提高教学质量。使学生获得“四基”，增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力，形成创新意识和实践能力。

六、这套教师教学用书从2012年秋季开始陆续出版，至2014年已经全部出齐。2016年秋季，我们进行了如下修订：一是根据教师使用的反馈意见，对内容进行完善，如增加部分练习题参考答案及说明，丰富教学设计或教学片段、备课资料等参考资源；二是开发“人教小数微课”移动应用平台（APP），提供教材及知识点讲解等微课资源；三是进一步丰富书后所附光盘中的教学课件等多媒体资源。

2016年6月

目 录

《义务教育教科书 数学》五年级下册说明	1
一、教学内容和教学目标	1
二、教材的编写特点	2
三、教学中需要准备的教具和学具	6
四、课时安排	7
各单元的教材说明和教学建议	9
第一单元 观察物体（三）	9
一、教材说明和教学建议	9
（一）教学目标	9
（二）内容安排及其特点	9
（三）教学建议	10
（四）具体内容的教材分析和教学建议	12
二、教学设计或教学片段	15
课题：观察物体	15
三、备课资料	18
四、评价建议与评价样例	20
第二单元 因数与倍数	22
一、教材说明和教学建议	22

(一) 教学目标	22
(二) 内容安排及其特点	22
(三) 教学建议	25
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	27
二、教学设计或教学片段	41
课题 1: 3 的倍数的特征	41
课题 2: 两数之和的奇偶性	43
三、备课资料	46
四、评价建议与评价样例	49
第三单元 长方体和正方体	51
.....	
一、教材说明和教学建议	51
(一) 教学目标	51
(二) 内容安排及其特点	51
(三) 教学建议	53
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	55
二、教学设计或教学片段	82
课题 1: 长方体和正方体的认识	82
课题 2: 长方体和正方体的表面积	85
三、备课资料	90
四、评价建议与评价样例	94
探索图形	98
.....	
一、教材说明和教学建议	98
(一) 教学目标	98
(二) 内容安排及其特点	98
(三) 教学建议	99
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	100
二、教学设计或教学片段	101
课题: 探索图形	101
三、评价建议与评价样例	105

第四单元 分数的意义和性质	107
.....	
一、教材说明和教学建议	107
(一) 教学目标	107
(二) 内容安排及其特点	107
(三) 教学建议	109
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	111
二、教学设计或教学片段	150
课题 1: 分数的意义	150
课题 2: 约分	154
课题 3: 公倍数与最小公倍数	157
课题 4: 分数和小数的互化	165
三、备课资料	168
四、评价建议与评价样例	192
第五单元 图形的运动 (三)	195
.....	
一、教材说明和教学建议	195
(一) 教学目标	195
(二) 内容安排及其特点	195
(三) 教学建议	196
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	198
二、教学设计或教学片段	204
课题: 图形的旋转	204
三、备课资料	208
四、评价建议与评价样例	211
第六单元 分数的加法和减法	213
.....	
一、教材说明和教学建议	213
(一) 教学目标	213
(二) 内容安排及其特点	213
(三) 教学建议	214
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	216

二、教学设计或教学片段	230
课题1：异分母分数加、减法	230
课题2：解决问题	233
三、备课资料	237
四、评价建议与评价样例	239

打电话 242

一、教材说明和教学建议	242
(一) 教学目标	242
(二) 内容安排及其特点	242
(三) 教学建议	244
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	246
二、教学设计或教学片段	248
课题：打电话	248
三、备课资料	251
四、评价建议与评价样例	252

第七单元 折线统计图 253

一、教材说明和教学建议	253
(一) 教学目标	253
(二) 内容安排及其特点	253
(三) 教学建议	254
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	255
二、教学设计或教学片段	262
课题：单式折线统计图	262
三、备课资料	265
四、评价建议与评价样例	270

第八单元 数学广角——找次品 273

一、教材说明和教学建议	273
-------------	-----

(一) 教学目标	273
(二) 内容安排及其特点	273
(三) 教学建议	274
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	276
二、教学设计或教学片段	280
课题：找次品	280
三、备课资料	284
四、评价建议与评价样例	294
第九单元 总复习	296
.....	
一、教材说明和教学建议	296
(一) 教学目标	296
(二) 内容安排及其特点	296
(三) 教学建议	298
(四) 具体内容的教材分析和教学建议	300
二、教学设计或教学片段	308
课题：整理与复习——因数与倍数	308
三、评价建议与评价样例	311
附录1 教材教学内容编排结构表	313
附录2 人教版义务教育教科书配套教学资源简介	315

人教版®

《义务教育教科书 数学》五年级下册说明

人民教育出版社、课程教材研究所小学数学课程教材研究开发中心研制出版的《义务教育教科书 数学（一~六年级）》是《义务教育课程标准实验教科书 数学（一~六年级）》（以下简称“实验教材”）经修订后形成的一套新教材。实验教材以《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》（以下简称《标准（实验稿）》）的基本理念和所规定的教学内容为依据，在总结以往九年义务教育小学数学教材研究和使用的经验的基础上编写的。实验教材从2001年秋季开始使用，经过国家级实验区和省级实验区实验使用证明，这是一套我国城乡广大地区普遍适用的小学数学教材。从2011年7月开始，实验教材的编写者根据新颁布的《义务教育数学课程标准（2011年版）》（以下简称《标准（2011）》）对实验教材进行了全面而系统的修订，形成了《义务教育教科书 数学（一~六年级）》，于2013年3月全部通过国家基础教育课程教材专家工作委员会的审查，并已于2012年秋季开始陆续替换实验教材。

下面就五年级下册教材中几个主要问题作一简要说明，以供教师参考。

一、教学内容和教学目标

这一册教材包括下面一些内容：观察物体、因数与倍数、长方体和正方体、分数的意义和性质、图形的运动、分数的加法和减法、折线统计图、数学广角和数学综合与实践活动等。

因数与倍数、长方体和正方体、分数的意义和性质、分数的加法和减法、折线统计图等都是本册教材的重点教学内容。

在数与代数方面，这一册教材安排了因数与倍数、分数的意义和性质、分数的加法和减法。因数与倍数，在前面学习整数及其四则运算的基础上教学初等数论的一些基础知识，包括因数和倍数的意义，2、5和3的倍数的特征，质数和合数。教材在三年级上册分数的初步认识的基础上教学分数的意义和性质以及分数的加法、减法，结合约分教学最大公因数，结合通分教学最小公倍数。

在图形与几何方面，这一册教材安排了观察物体、长方体和正方体、图形的运动三个单元。在已有知识和经验的基础上，通过丰富而现实的数学活动，让学生获得探究学习的经历，在前面学习辨认从不同方向看到的物体的形状图的基础上，让学生根据看到的形状图通过操作还原该物体，培养学生的推理能力和空间观念；探索并体会长方体和正方体的特征、图形之间的关系及图形之间的转化，掌握长方体、正方体的体积、表面积公式及公式之间的关系，探索某些实物体积的测量方法；认识图形的旋转变换；促进学生空间观念的进一步发展。

在统计方面，本册教材让学生学习折线统计图的知识。在学习条形统计图的基础上，认识到当数据随着时间的变化而变化时，比较适合用折线统计图描述数据，体会折线统计图的特点。

在用数学解决问题方面，教材结合分数的加法和减法、长方体和正方体等多个单元，教学用所学的知识解决生活中的简单问题，掌握解决问题的方法和策略。

在数学思想方法方面，教材除了结合因数与倍数、长方体和正方体、分数的意义和性质、图形的运动、分数的加法和减法、折线统计图等知识，让学生体会、理解和掌握归纳法、符号思想、分类思想、演绎推理思想、转化思想、数形结合思想、模型思想等思想方法外，还安排了“数学广角”的教学内容，引导学生通过观察、猜测、试验、推理等活动体会优化、推理、模型和转化的数学思想方法，体会解决问题策略的多样性以及运用优化、转化的方法解决问题的有效性，感受数学的魅力。

本册教材根据学生所学习的数学知识和已有的生活经验，安排了两个数学综合与实践活动，让学生通过小组合作的探究活动或有现实背景的活动，运用所学知识解决问题，体会探索的乐趣和数学的实际应用，感受用数学的愉悦，培养学生的数学意识和实践能力。

这一册教材的教学目标是，使学生：

1. 理解分数的意义和基本性质，会比较分数的大小，会进行假分数、带分数、整数、小数之间的互化，能够比较熟练地进行约分和通分。

2. 掌握因数和倍数、质数和合数、奇数和偶数等概念，以及2、3和5的倍数的特征；会求100以内的两个数的最大公因数和最小公倍数。

3. 理解分数加、减法的意义，掌握分数加、减法的计算方法，比较熟练地计算简单的分数加、减法，会解决有关分数加、减法的简单实际问题。

4. 知道体积和容积的意义及度量单位，会进行单位之间的换算，感受有关体积和容积单位的实际意义。

5. 结合具体情境，探索并掌握长方体和正方体的体积、表面积的计算方法，探索某些实物体积的测量方法。

6. 能在方格纸上将简单图形旋转 90° ；欣赏生活中的图案，灵活运用平移、轴对称和旋转在方格纸上设计图案。

7. 认识折线统计图，体会折线统计图的特点，能根据需要选择合适的统计图描述数据。

8. 经历从实际生活中发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的过程，体会数学在日常生活中的作用，初步形成综合运用数学知识解决问题的能力。

9. 体会解决问题策略的多样性及运用优化的数学思想方法解决问题的有效性，感受数学的魅力。形成发现生活中的数学的意识，初步形成观察、分析及推理的能力。

10. 体会学习数学的乐趣，提高学习数学的兴趣，建立学好数学的信心。

11. 养成认真作业、书写整洁的良好习惯。

二、教材的编写特点

如前所述，这套教材的实验教材是以《标准（实验稿）》的基本理念和所规定的教学内容为依据，在总结以往九年义务教育小学数学教材研究和经验的基础上进行设计的。在使用十

年后，2012年在总结实验与使用经验的基础上，根据《标准（2011）》提出的新要求，广泛听取并吸收小学数学教师和教研人员的意见和建议，对实验教材进行了系统、细致的修订。通过教材的修订，我们期望使本套小学数学教材的内容质量得到全面提升，体现数学的价值，体现时代精神与科技进步，渗透社会主义核心价值体系；使教材结构更为科学合理，符合学生学习数学的认知规律，减轻学生课业负担，增强学生学好数学和会用数学的信心，获得适应未来社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验，初步形成发现、提出、分析和解决数学问题的能力；使教材的风格和特色更加鲜明，将数学学科体系的严谨性与学生自主学习的开放性有机结合，更好地促进教育教学活动，初步培养学生严谨求实又勇于探索创新的科学精神，更加符合实施素质教育的要求；使教材的版面设计清爽美观，图文配合恰当，装帧精美，语言准确并适合于小学生阅读。

修订后的教材，既具有原实验教材的主要特点，同时又呈现出一些新的特色。

（一）改进因数与倍数的编排，易于学生理解

在小学阶段，有关因数与倍数的知识是传统的教学内容。以往人们认为，它既是小学生应该掌握的重要的基础知识，又是发展小学生逻辑思维的良好素材。同时，人们普遍认为，这部分教学内容概念集中，比较抽象，概念之间的联系紧密，学生理解起来比较困难。也由于以往对这部分内容的编排，联系实际的素材不多，学习这部分内容，既需要学生理解并记忆一些概念，又要求能够运用这些概念进行一定的推理、判断，所以学习过程显得比较枯燥。因此，这部分内容向来是小学数学教学的难点内容。

本册教材因数与倍数的编排除了保留原实验教材的主要特点外，还进行了以下一些改进。

（1）因数和倍数的概念改由整数除法算式引出，通过让学生对整数除法算式进行分类，体会没有余数（整除）的算式中被除数与除数、商之间的关系，帮助学生更好地理解相关概念，同时为后面找一个数的因数和倍数作准备。

（2）将2、5的倍数特征合并在一起进行教学，从2、5的倍数的特征到3的倍数的特征，再到质数和合数，用百数表贯穿始终，让学生在经历对整数特征探究的过程中能更好地发现规律，理解概念。

（3）增加了用数的特征解决问题。通过探索奇数、偶数的和，让学生经历对整数特征探索的过程，特别是合情推理的探索过程，渗透研究数学的科学方法。

这样的编排更加体现了因数与倍数的本质，不仅可以使学生很好地掌握与数论相关的最基本的知识，体会数学学习的乐趣和实际价值，同时还可以使学生获得逻辑思维的训练、自主探索意识和能力的培养，从而逐步提高数学素养。

（二）改进分数有关内容的编排，注重沟通知识间的相互联系，加强学生对分数意义的理解

从本学期开始，学生将要系统地学习分数的意义和性质、分数的四则运算。同整数、小数知识一样，分数知识也是小学数学教学的重要内容，是进一步学习数学和其他学科所必需的基础知识。分数的概念比较难理解，计算起来也比较复杂。为了便于学生理解和掌握分数，本套

教材仍然采用了原实验教材的编排体系。在系统认识了小数和初步认识分数的基础上，本册的教学将引导学生由感性认识上升到理性认识，概括出分数的意义，比较完整地从小数的产生、分数与除法的关系等方面加深对分数意义的理解，进而学习并理解与分数有关的基本概念，掌握必要的约分、通分、分数与小数的互化等技能，以及分数的加、减法计算。同时，还注意采取了下面几个方面的措施。

(1) 真分数和假分数，突出了单位“1”，将原教材的例2（假分数）和例3（带分数）整合，很好地沟通了假分数和整数、带分数的关系，为例3教学把假分数化成整数或带分数作了铺垫，同时加强了对化法的道理的理解。

(2) 约分和通分不再从问题情境引入，直接从数学问题出发进行教学。原情境改为新增的“解决问题”的内容，即例3，利用最大公因数和最小公倍数的原理和转化的方法解决问题，再通过数形结合的画图方法加深理解题意、检验解题方法的合理性。

(3) 分数的加法和减法加强了对算理的说明，并以文字形式对计算法则进行总结和概括；同时新增“解决问题”的内容，通过数形结合的画图方法分析数量关系、解决问题。

（三）提供丰富的图形与几何的教学内容，注重动手实践与自主探索，促进学生空间观念的发展

小学阶段图形与几何教学的主要目标是发展学生的空间观念，与前几册一样，本册教材继续把促进学生空间观念的发展作为图形与几何内容编排的研究重点。本册教材在保留原实验教材主要特点的基础上，进行了以下改进。

(1) 增加了“观察物体”。在已有知识和经验的基础上，通过丰富而现实的数学活动，让学生获得探究学习的经历，在前面学习辨认从不同方向看到的物体的形状图的基础上，让学生根据看到的形状图通过操作还原该物体，培养学生的推理能力和空间观念。

(2) 将旋转的认识分为两个层次编排：例1为线段的旋转；例2为图形的旋转。例2让学生在方格纸上旋转直角三角尺，通过实物操作直观感受图形顺时针旋转的特征，并留给学生发现、探索的空间。例3教学画出简单图形旋转 90° 后的图形，比原实验教材降低了难度，主要体现在两点：一是有例2作为例3的铺垫；二是三角形的两条直角边都在方格纸的纵线、横线上，旋转中心为直角所在的顶点。

(3) 图形的运动新增“解决问题”的内容。增设例4，让学生借助方格纸上的七巧板，通过在方格纸上平移、旋转各块板，拼出给定大轮廓的图形。使学生运用所学的图形运动的知识，解决简单的对图形进行分割、组合、变换的问题，培养学生分析问题、解决问题的能力，同时培养学生的空间观念。

（四）改进统计内容的编排，发展学生的数据分析观念，逐步形成从数学的角度思考问题的思维习惯

根据《标准（2011）》的要求，小学阶段不再学习众数的知识。本套教材把单式折线统计图和复式折线统计图整合在一起进行编排和教学，加强知识之间的联系，提高课堂教学效率。

教材所采用的素材注重两个方面：一是贴近学生生活，更加反映社会发展；二是突出了使用折线统计图的必要性，以及折线统计图的特征和优势。其中例2突出了解决问题的完整过程，以及统计的全过程：抽样—调查—整理、描述数据—分析数据—判断、预测。

（五）加强数学思想方法的教学，培养学生数学思维能力和提高数学素养

数学思想方法作为数学四基中的第三基，表明了它的地位和作用。数学思想方法不仅可以使学生提高学习数学的效率和水平，而且还能有效地提高学生的逻辑思维能力，进而奠定发展更高素质的基础。因此，培养学生掌握数学思想方法是数学教学要达到的重要目标之一。本套教材总体设想之一是：系统而有步骤地体现数学思想方法，尝试把重要的数学思想方法通过学生可以理解的简单形式，采用生动有趣的事例呈现出来。通过教学使学生受到数学思想方法的熏陶，形成探索、解决数学问题的兴趣与方法，逐步发展数学思维能力和提高数学素养。

本册教材加强了思想方法的编排和教学。除了在数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践这四个领域加强体现分类思想、推理思想、归纳法、类比法、数形结合思想、变换思想、统计思想等思想方法外，还单独设计“数学广角”单元，安排了“找次品”的教学，旨在通过“找次品”体现优化、推理、模型和转化思想，让学生充分感受到数学与我们日常生活的密切联系。优化是一种重要的数学思想方法，运用之可有效地分析和解决问题。教材以“找次品”这一探索性操作活动为载体，让学生通过观察、猜测、试验等方式感受解决问题策略的多样性，再通过归纳、推理的方法体会运用优化策略解决问题的有效性，感受数学的魅力，培养观察、分析、推理以及解决问题的能力，培养他们探索数学问题的兴趣。

（六）加强解决问题的编排，培养发现、提出、分析和解决数学问题的能力

用数学解决问题能力的培养是义务教育阶段数学课程的重要目标之一，因此解决问题教学在数学教学中有着重要的作用。它既是发展学生数学思维的过程，又是培养学生应用意识、创新意识的重要途径。与前面几册教材一样，本册教材仍然注意将解决问题的教学融合于各部分内容的教学中，通过各部分内容的教学培养学生用数学解决问题的能力。同时在“数学广角”单元以及数学综合与实践活动中，加强了综合运用知识解决问题和解决问题策略多样化的教学，使学生逐步提高数学思维能力和解决问题的能力。本册教材设计了“探索图形”和“打电话”两个数学综合实践活动，让学生通过小组合作的探究性活动，综合运用所学的数学知识和方法（如简单的优化思想方法、通过数形结合的画图方法发现事物隐含的规律等），动手实践解决问题，体会数学在日常生活中的应用价值，增强学生应用数学的意识，不断提高学生的实践能力和解决问题的能力。

（七）情感、态度、价值观的培养渗透于数学教学中，用数学的魅力和学习的收获激发学生的学习兴趣与内在动机

本次数学课程改革强调了对学生情感、态度和价值观的培养，全面提高学生的素质。小学高年级学生已经具有了一定的知识和生活经验，对自然与社会现象有了一定的探求欲望，此时

需要教育者进行有目的的启发与引导。在数学教学中，就是要通过数学学习活动，使学生形成丰富的情感、积极的态度和正确的价值观，这同样是学生学习、生存和发展的重要基础。本册教材不仅内容涉及数学教学内容的各个领域，为学生探索奇妙的数学世界提供了丰富素材，而且注意结合教学内容安排了许多体现数学文化的阅读材料、数学史实等，使学生的数学学习活动丰富多彩、充满魅力。这些都有助于学生初步认识数学与人类生活的密切联系，了解数学的价值，激发学生学习数学的欲望。

1. 提供丰富的培养学习数学兴趣的素材。

考虑到学生年龄的增长、视野的扩大等因素，教材注意选择知识内容深刻、内涵更丰富的教学素材，使学生在学数学的同时，受到情感、态度、价值观的熏陶。例如，数学综合与实践活动“打电话”、数学广角“找次品”等，都蕴含了优化、推理等思想方法，简洁、巧妙的解决问题策略中闪烁着数学方法的奇妙。“数学在使人赏心悦目和提供审美价值方面，至少可与其他任何一种文化门类媲美。”（M·克莱因）这些都有利于激发学生学习数学的兴趣，形成稳定的探索数学的爱好。

2. 注意反映数学与人类生活的密切联系以及数学的文化价值。

与前几册教材一样，本册教材仍然注意采用阅读材料的形式，结合教学内容编排一些有关的数学史料，丰富学生对数学发展的整体认识，培养学生探索数学、学习数学的兴趣与欲望。如安排了多个“你知道吗？”“生活中的数学”，介绍了现实生活中数学知识的应用、数学家的故事等。这些内容不仅可以使学生对数学本身产生浓厚的兴趣，激励他们扩大知识面和进一步探索研究的欲望，而且对学生的情感、态度、价值观的形成与发展也能起到潜移默化的作用。

3. 通过自主探索的活动，让学生获得学习成功的体验，增进学好数学的信心。

结合学生的年龄特点和教学内容，本册教材设计了很多需要学生自主探索的活动。例如，质数与合数概念的得出、找出100以内的质数等教学，教材设计了让学生自主探索1~20各数的因数个数的特点，从而为理解质数与合数的概念获得丰富的感性经验；而找出100以内的质数则让学生自主探索，体验找质数的一般方法“筛法”。长方体体积计算公式的推出，让学生小组合作探索出长方体中所含体积单位的数量与它的长、宽、高的关系，再总结出长方体体积的计算公式。求最大公因数和最小公倍数的教学，教材展示了学生自主探索出的多种方法，具有较强的自主性和开放性，等等。让学生有更多的机会应用数学知识，进行自主探索的实践，并通过这些活动获得自己成功、能力增强等良好体验，从而逐步增强学好数学、会用数学的信心。

三、教学中需要准备的教具和学具

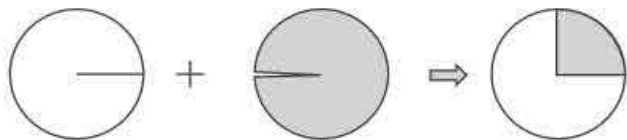
在前面几册的教师教学用书中，已经介绍了许多教具和学具，其中的一些仍可继续使用，如小棒、方木块、量角器、三角尺、直尺、七巧板、计算器、简易天平等。本册的教学还需要一些新教具和学具，这里介绍几种，供参考。

（一）长方体和正方体实物及模型

教师和学生收集一些长方体和正方体形状的实物，如药盒、牙膏盒、火柴盒、化妆品盒、积木等。教科书第123页还印有长方体和正方体的展开图，可让学生剪下来贴在厚纸上，然后制成长方体和正方体。

（二）演示分数用的教具

教师可以自制演示分数用的教具，制作的方法是：用硬纸板做两个大小相同而颜色不同的圆，顺着一条半径分别剪开，将两个圆从剪开的地方互相交叉放在一起，并使它们重合（如下图）。教学时，教师转动一个圆，可以演示不同的分数。在圆周上，可以画出刻度，表示 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ，……。



（三）其他教具

教师还可以根据各部分教学内容的需要，自己准备或设计制作一些教具和学具。如教学体积时准备 1 m^3 、 1 dm^3 模型，容纳 1 L 、 100 mL 液体的量杯；教学因数与倍数时，可根据教科书上的图制成教具等。

四、课时安排

根据教育部《义务教育课程设置实验方案》，本册教材为五年级下学期数学教学安排了61课时的教学内容，各部分教学内容教学课时大致安排如下，教师教学时可以根据本班具体情况适当灵活掌握。

一、观察物体（三）（2课时）

二、因数与倍数（7课时）

1. 因数和倍数 2课时左右
2. 2、5、3的倍数的特征 3课时左右
3. 质数和合数 2课时左右

三、长方体和正方体（12课时）

1. 长方体和正方体的认识 2课时左右
2. 长方体和正方体的表面积 2课时左右
3. 长方体和正方体的体积 7课时左右

整理和复习	1 课时
综合与实践：探索图形 (1 课时)	
四、分数的意义和性质 (19 课时)	
1. 分数的意义	4 课时左右
2. 真分数和假分数	2 课时左右
3. 分数的基本性质	2 课时左右
4. 约分	4 课时左右
5. 通分	4 课时左右
6. 分数和小数的互化	2 课时左右
整理和复习	1 课时
五、图形的运动 (三) (3 课时)	
六、分数的加法和减法 (7 课时)	
1. 同分母分数加、减法	2 课时左右
2. 异分母分数加、减法	2 课时左右
3. 分数加减混合运算	3 课时左右
综合与实践：打电话 (1 课时)	
七、折线统计图 (3 课时)	
八、数学广角 (2 课时)	
九、总复习 (4 课时)	

人教版®

各单元的教材说明和教学建议

第一单元 观察物体（三）

一、教材说明和教学建议

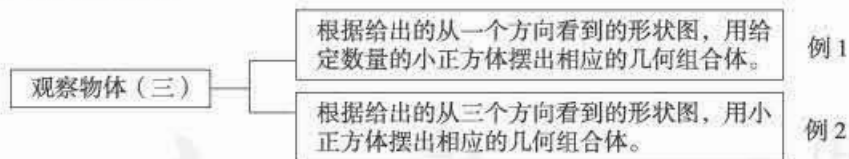
（一）教学目标

1. 能根据给出的从一个方向看到的形状图，用给定数量的小正方体摆出相应的几何组合体，让学生体会可能有不同的摆法。
2. 能根据给出的从三个方向看到的形状图，用小正方体摆出相应的几何组合体，体会有些摆法的确定性。
3. 通过用小正方体拼搭几何组合体的活动，经历观察、操作、想象、猜测、分析和推理等过程，积累活动经验，提高学生的空间想象和推理能力，进一步发展空间观念。

（二）内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

本单元的主要学习内容是在前面经历了从不同角度观察实物和单个立体图形以及几何组合体的学习基础上，进一步学习根据从一个或多个方向观察到的图形拼搭出相应的几何组合体。主要包括两个方面的内容：



“观察物体”属于“图形与几何”的相关知识，《标准（2011）》对于该内容在义务教育阶段内三个学段分别有不同的要求：

第一学段	第二学段	第三学段
能根据具体事物、照片或直观图辨认从不同角度观察到的简单物体。	能辨认从不同方向（前面、侧面、上面）看到的物体的形状图。	通过丰富的实例，了解中心投影和平行投影的概念；会画直棱柱、圆柱、圆锥、球的主视图、左视图、俯视图，能判断简单物体的视图，并会根据视图描述简单的几何体；了解直棱柱、圆锥的侧面展开图，能根据展开图想象和制作实物模型；通过实例，了解上述视图与展开图在现实生活中的应用。

三个学段的要求既体现了从整体到局部的认识过程，也符合学生的认知特点，逐渐深入、

循序渐进。在小学阶段，关于观察物体的具体编排分为以下三个层次。

第一层次（二年级下册）：从不同角度观察实物和单个的立体图形（积木）。

第二层次（四年级下册）：从三个不同的位置观察同一个几何组合体，看到的形状可能不同；从同一位置观察三个不同的几何组合体，看到的形状可能相同，为后面根据从不同位置看到的形状图拼搭几何体作准备。

第三层次（五年级下册）：根据从一个方向看到的形状图拼搭几何组合体；根据从三个方向看到的形状图拼搭几何组合体。也就是根据观察到的形状图，通过空间想象和逆向推理，还原出原来的立体图形。

2. 教材编排特点。

本单元的编排具有以下几个特点。

(1) 合理安排，优化教材知识结构。

为了使学生更好地掌握观察物体的知识，教材根据儿童已有的经验及心理发展规律按从易到难螺旋上升的编排原则优化知识结构，进行教学内容的编排。如前所述，小学分三个层次进行编排，教材先帮助学生从直观观察立体图形形象，头脑中建立表象，能够根据直观立体图形进行想象，进而分辨不同方向观察立体图形得到的形状图。进一步，由建立的几何直观进行空间想象，通过逆向推理，根据观察到的形状图还原立体图形。按梯度教学，循序渐进地促进学生空间观念的发展，提高学生空间想象能力。

另一方面，本单元的编排也是从易到难。首先，例1教学从一个方向看到的形状图对几何组合体进行还原，学生需要借助空间想象力进行操作，初步经历逆向思考的过程。接下来，例2教学从三个方向看到的形状图还原几何组合体，利用例1的经验进行操作，进一步培养学生的空间想象力和推理能力。

(2) 注重动手实践与自主探索，促进学生空间观念的发展。

学生在具体的数学活动中，动脑、动手、动口，多种感官协调活动，这样的数学活动有利于学生在相互交流中从多角度去感悟，强化感知和思维，丰富自己的活动经验。

本单元的编排，特别注重学生的动手操作和自主探索。由观察到的形状图（平面图形）还原几何组合体（立体图形）的过程，需要将抽象的空间想象具体化，这就必然要让学生通过动手操作，借助建立的直观表象进行推理，在拼摆小正方体的活动中不断验证、加以完善，探索出拼搭的方法。在操作、想象、推理和交流中促进空间观念的发展。

(三) 教学建议

1. 准备好必要的教具和学具。

由于本单元有大量的观察和拼搭等活动，所以除教具外，最好每个学生都准备一套相应的学具。可以结合实际，指导学生自制学具。

2. 注意让学生真正地、充分地进行活动和交流。

只有在活动的过程中，学生才能真正经历观察、想象、猜测、分析和推理等过程，学生的空间想象力和思维能力才能得以锻炼，空间观念才能得到发展。因此，教师要切实组织好学生

的课堂活动，要让所有的学生都能真正地、实实在在地进行观察和操作。注意不要让教师的演示或少数学生的活动和回答来代替每一位学生的亲自动手、亲自体验和亲自思考。应鼓励学生敢于发表自己的意见，与同伴交流自己的想法，在交流中厘清思路、互相启发。

3. 精心组织教学，使操作更有实效。

本单元教材所涉及的内容学生比较感兴趣，教材也给学生提供了充分的思考和活动空间，这有利于活跃课堂气氛，但因需要操作的环节比较多，教师需要精心组织教学，做到“活而不乱”。同时注意切不可动手操作替代动脑思考，否则容易削弱课堂教学的实效。如教学例2时，学生动手操作活动前，先让学生想一想：你打算怎样摆？交流方法后再动手探索。

4. 建议用2课时教学。

人教版®

（四）具体内容的教材分析和教学建议

编写意图

(1) 本单元内容是让学生根据观察到的平面图形还原立体图形，借助操作实现从二维到三维空间的转化，培养学生的空间观念。

(2) 例1是根据从一个方向看到的形状图，用给定数量的小正方体摆出相应的几何组合体。一方面，通过动手操作实现从平面图形到立体图形的转化；另一方面，让学生体会只根据一个方向看到的形状图，可以摆出不同的几何组合体。同时，在增加小正方体数量的摆法中，进一步体会并发现其中的规律，也就是保证从正面看有3个小正方体，为后面进一步学习作铺垫。

(3) 例2是根据从三个方向看到的形状图摆出相应的几何组合体。有了例1的经验，教材放手让学生自主完成。在还原的过程中，让学生分别从不同的方向试着拼摆，通过不断的调整和交流来体会最终的摆法。本例的摆法是确定的，但有时也会出现根据从三个方向看到的图形摆出不同的几何体。

“做一做”进一步巩固例2拼摆的方法和发现的规律。



教学建议

(1) 培养空间想象力，发展空间观念。

从二维到三维空间的转化，必须借助学生的空间想象力和动手操作。学生在操作中不断尝试，再调整，完善和发展空间观念。而空间想象力需要大量的几何直观支撑，可先从观察立体图形，想象、辨认平面图形引入，通过复习积累直观表象，为后面的抽象推理作铺垫。

如，在例1的操作探索中，注意及时引导学生交流，分享经验，充分经历“猜”“搭”“辩”“想”“赏”的过程，积累活动经验，更好地完成后面的探索。例2的教学，可以有不同

的思路：一种是借助例1的经验，先根据一个方向看到的摆，再根据其他两个方向进行调整；另一种是借助表象尝试摆出一个立体图形，再验证和调整。并且，三个方向选择的顺序没有规定，学生可以自主探索，通过交流发现最后的结果都是一样的，从而体会最终的摆法。

(2) 把握操作要求。

需要说明的是，本单元所有要摆的立体图形都是组合的小正方体，它们中间是没有分开的，并且都是棱和棱的拼摆，不涉及错开的情形。如果学生出现分开摆放的情况，可适当说明。另外，根据三个方向看到的形状图还原该立体，有时候摆法也不是唯一的。

练习一

1. 右边的三个图形分别是从哪里看到的? 填一填。



2. (1) 如果从正面看到的是 ，用5个小正方体可以怎样摆?

(2) 如果再从上面看到的是 ，你能确定这5个小正方体是怎样摆的吗? 摆摆看。

3. 根据下面从三个方向看到的图形摆一摆。



4. 下面是用小正方体搭建的一些几何体。



(1) 哪些从正面看是 ? 哪些从左面看是 ?

(2) 如果从正面看到的和⑤一样，用5个小正方体摆一摆，有多少种不同的摆法?

(3) 和同桌之间互相提一个问题并解答。

5

编写意图

(1) 第1题复习辨认从不同方向观察一个立体图形得到的三个形状图。这是从三维立体空间到二维平面图形的转换，主要培养学生的空间想象能力，可作为复习引入，为例题的教学作准备。

(2) 第2题第(1)题是配合例1的习题，让学生体会有不同的摆法。第(2)题增加一个方向看到的形状图，可以让学生体会从不确定到确定的过程，以及这个过程当中的“变与不变”，培养学生的空间观念和推理能力。

(3) 第3题是配合例2的习题，进一步巩固操作思考方法，培养学生空间想象力和推理能力。

(4) 第4题是开放性的练习题。第(1)题让学生体会从同一个方向观察不同的几何组合体，可能看到的形状相同。第(2)题让学生用5个小正方体按要求摆，借助空间想象进行猜测，再动手操作加以验证。第(3)题在前两题的基础上放手让学生自己发现、提出问题，并互相解答。

教学建议

(1) 充分利用直观教具，形成表象。

教学时注意提供丰富的学具，帮助学生从直观观察立体图形，头脑中建立表象，到最终能够根据直观立体图形进行想象，进而分辨不同方向观察立体图形得到的形状图，为从二维到三维空间的逆向转换打下坚实的直观表象基础。同时，注意教学的梯度，循序渐进地帮助学生建立空间观念，提高空间想象能力。

(2) 让学生充分地参与到观察、操作过程中，处处体现“想象”，发展学生的空间观念。

观察、操作、想象、推理等是发展学生空

间观念的重要途径。在练习中，教师要始终将学生放在第一位，使学生积极主动地参与学习活动，力求在各个环节上体现“想象”，即：观察中想象、操作中想象、应用中想象，帮助学生建立三维立体图形与二维平面图形之间的联系，发展空间观念。

第4题第(2)题，可放手让学生探索后交流，体会摆法的不确定性。如用5个小正方体摆，有7种不同的摆法。



(一四型，4种)



(二三型，3种)

编写意图

(1) 第5题根据从两个方向看到的形状图进行立体图形的辨认。学生可以从不同角度进行思考：既可以根据从两个方向看到的形状图判断几何体，也可以观察几何体验证两个方向的平面图。帮助学生更好地建立平面和立体空间的转换和空间观念。

(2) 第6题让学生根据从一个方向观察到的形状图，用给定数量的小正方体摆出相应的几何组合体，让学生体会可以有不同摆法。并通过观察发现：按右边女孩的想法，在后面添加无数个小正方体，都能确保正面观察到的图形不变。

(3) 第7题是根据从上面观察到的形状图，及在每个积木所在位置上的小正方体的个数，让学生辨认所搭建的积木从另外两个方向观察到的形状图。虽然只给出一个方向看到的形状图，但是可以根据相应的数量来确定立体图形。如果学生判断有困难，可以利用学具摆一摆。

(4) “成长小档案”引导学生回顾和交流本单元学习的内容和方法。

3. 哪个几何体符合要求？在对的括号里打“√”。

从正面看

从上面看

4. 这是我从正面看到的图形。

有多少个小正方体？

(1) 如果是4个小正方体，可以怎样摆？

(2) 如果是5个、6个、7个或更多的小正方体，可以怎样摆？

7.

我的积木从上面看是这个形状。

上面的数字表示在这个位置上所用的小正方体的个数。

搭过这组积木，从正面看是_____，从侧面看是_____。

1 2 3 4

本单元结束了，你有什么收获？

想象不出来时，用小正方体摆一摆就简单了。

可以根据三个方向观察到的图形摆出原来的几何体。

成长小档案

★

教学建议

(1) 注重方法的引导和交流。

在交流之前，让每个学生都通过独立探究和思考，再将个体的想象经验进行分享交流。应特别注意学生思维方法上的引导。

如，第5题，可以根据平面图形进行判断，也可以观察立体图形来选择。第7题，根据上面看到的摆出一个，然后根据数量进行调整和确认。最后，还要关注学生操作后的验证环节。

(2) 采用有梯度的活动，满足不同思维层次的学生需求。

活动的设计要改变单一、静止观察的方

式，使学生在观察、想象和操作中深刻地体会立体图形与视图之间的联系，积累三维图形与二维图形转换的经验，发展空间观念。对于难度较大的题目，可以辅以动手操作或者多媒体课件的演示，让学生直观地看到从立体到平面、从平面到立体的全过程，帮助学生建立二维与三维之间的联系，培养推理能力，发展空间观念。

二、教学设计或教学片段

课题：观察物体

教学设计：田慧琴。

教学内容：教科书第2页例1、例2的内容。

教学目标：

1. 根据从一个方向看到的图形，用小正方体摆出相应的几何组合体，体会摆法的多样化。
2. 根据从三个方向看到的图形摆出相应的几何组合体，体会有些摆法的确定性。
3. 使学生经历观察、操作、想象、猜测、分析和推理等过程，积累活动经验，提高学生的空间想象和推理能力，进一步发展空间观念。

教学重点：根据看到的平面图形按要求摆出相应的立体图形。

教学难点：借助空间想象还原立体图形。

教学准备：课件、正方体教具、小正方体学具。

教学过程：

（一）情境激趣，导入新课

教师：同学们，我这里有几个立体图形，但只让你们看到它的正面，你能猜出我放的是什么立体图形吗？看看谁能猜对。（学生答，教师随机点评）

（出示课件：趣味竞猜。）

预设：长方体和球体、长方体和圆柱体、长方体和圆锥体；圆柱体和球体、横着放的圆柱体和竖着放的圆柱体、横放的圆柱体和圆锥体。

教师：其实，老师摆的是两个圆柱体。看来，同学们只看正面图并不好确定究竟摆的是什么立体图形。别急，今天的知识能帮到你们！（板书：观察物体）

（设计意图：趣味竞猜，激发学习兴趣，唤起学生的已有知识经验，为后续学习作好准备。）


（二）自主活动，探究新知

1. 根据一个面摆放，体会摆法的多样性。

（1）出示探究内容，明确探究要求。

教师：同学们，请看大屏幕！让我们来看一看，题中告诉了我们哪些数学信息？

（出示课件）

探究问题：用4个同样的小正方体，摆出从正面看是的图形。

（2）学生动手拼摆，验证交流方法。

教师：请同学们拿出4个小正方体，根据你的理解，用手中的4个小正方体先摆一摆。摆

好后仔细观察正面，验证自己的摆法是否正确，最后和同桌交流一下你是怎么摆的。

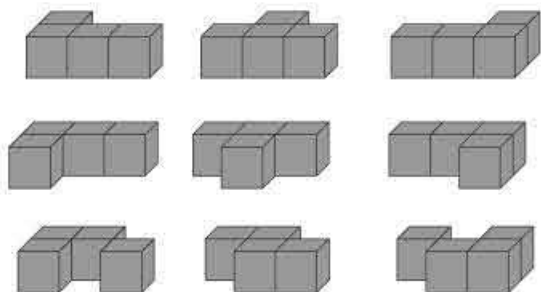
(设计意图：给出探究要求，让学生在独立思考、动手操作和小组交流的过程中初步感知摆放方法的多样化。)

(3) 全班交流反馈，形成认识。

①呈现摆法。

教师：谁来说说你的摆法？（教师指定学生上台展示，然后反馈全班同类型的摆法有多少。）

预设：



②观察验证。

教师：这些摆法你试过了吗？快和小组内的同学一起摆一摆。观察一下，从正面看到的是三个正方形吗？

③揭示方法。

教师：刚才我们摆了那么多图形，其实这些图形的摆法都是有联系的，你们看这三种（手指第一行）都是先摆好三个小正方体，从正面看有三个小正方体（边说边摆），再在它们三个的后面任意摆一个。从正面看，前面的小正方体遮住了后面摆的小正方体。所以从正面看仍然是三个小正方体。谁能说说第二行是怎么摆的？

学生：第二行也是先摆好三个小正方体，从正面看有三个小正方体。再在前面的任意位置摆一个。从正面看，后摆的这个遮住了前面摆的其中一个小正方体，还是不影响从正面看到的图形。

教师：说得真好！第二行的摆法也有一定的规律呢！大家看看，如果我们把三个当中的一个前移一下，或后移一下，方法是不是就更多了呢！

(4) 应用体验。

教师：如果再增加1个同样的小正方体，保证从正面看还是三个正方形，你还会摆吗？

预设：放在后面被遮挡住或放在前面挡住已有的一个都行。

教师：我们刚才根据正面图形用小正方体摆几何体，同学们有什么发现？

小结：正面看起来形状相同的几何体，其摆法不一定相同。根据从一个方向观察到的图形摆小正方体，摆法是多样的。最后，我们发现虽然摆法很多，但是有规律可循。所以，只看一个面并不能确定组合的几何体究竟是什么样子，还需要从更多不同的方向观察到的图形。

(设计意图：通过操作和交流，让学生发现只看一个面摆小正方体的方法是多样的，同时体会不同方法的内在联系。最后增加的体验练习，让学生由依赖几何直观逐步过渡到空间想

象。在活动过程中，培养学生观察发现、联系比较、分析推理、归纳概括的能力，获得基本的数学活动经验。)

2. 根据三个面摆放，体会有些摆法的确性。

(1) 出示探究内容，明确探究要求。

教师：下面分别给出了从正面、左面、上面看到的图形，你能用小正方体摆出原来的形状吗？(出示课件教材例2)

(2) 学生动手拼摆，验证交流方法。

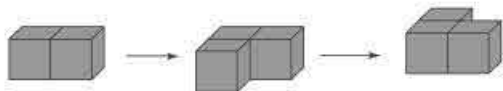
教师：现在有从三个方向看到的图形，可以怎样摆呢？同学们可以先思考一下，和同桌交流后再动手。摆好后同样可以自己验证摆出的图形是否正确。

(设计意图：有了前面根据一个方向看到的图形还原几何组合体的经验，这里可以放手让学生在独立思考、同桌交流和动手操作的过程中完成从平面图形到立体图形还原的逆向思考。)


(3) 全班交流反馈，形成认识。

教师：谁来介绍你的摆法？(教师指定学生上台展示。)

学生1(边说边摆)：我先根据从正面看到的图形，用两个小正方体摆出这样的形状。然后再根据从左面看到的图形，在原来的形状上增加一个小正方体，这时从正面看到的图形不变。最后再看从上面看到的图形，发现这个小正方体应该往下挪。



教师：现在摆出的形状正确吗？我们一起来验证一下。(引导学生从三个方向验证。)

学生2：我是先根据从上面看到的图形先摆出来()，然后发现从正面、左面看到的图形都符合。

学生3：我先根据这三个方向看到的图形，想象该怎样摆，然后摆好后再验证。

.....

教师：同学们，看看他们摆出来的图形一样吗？(一样)

教师：通过拼摆，大家有什么发现？

预设1：从这三个方面观察可以确定一个物体的形状，而只观察一个面不一定能知道物体的形状。

预设2：这里根据三个方向观察到的形状摆小正方体，可以确定物体的形状。

预设3：不管哪种摆法，最后结果都一样。

小结：还原原来的物体时，我们可以按一定的顺序进行拼摆，在这个过程中不断进行调整，最后通过验证加以确认。通常，由三个方向看到的图形可以确定原来物体的形状。

(设计意图：在交流的过程中，让学生明确，这里根据观察到的三个面摆小正方体的方法是确定的，体会还原过程的多样性，以及最后结果的确性，注意引导学生由几何直观过渡到空间想象与分析推理。当然，有时候由三个面摆放也会出现不同的结果，还需要结合进一步的信息去确认，这里不作要求。)

(三) 实践应用

教师：同学们很善于思考，下面你能用自己的发现来完成这个挑战吗？我们来动手，根据这三个面看到的情况摆一摆，并验证自己的摆法是否正确。

1. “做一做”。

教师：这是从正面、左面、上面看到的图形，这个立体图形是怎样拼摆的？如果想不出，借助手中的学具摆一摆。



从正面看



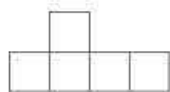
从左面看



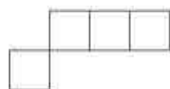
从上面看

(设计意图：通过“做一做”让学生进一步明确“三视图通常可以确定一个物体的具体形状”，帮助学生建立空间观念。)

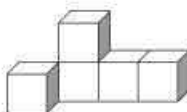
2. 哪个几何体符合要求？在对的括号里打“√”。



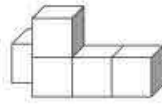
从正面看



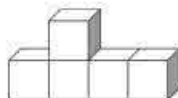
从上面看



()



()



()

教师：如果上面看换成



是哪个图形？(口答)

(设计意图：通过一定的练习，进一步加深学生对知识与方法的应用，培养学生的应用意识，同时发展学生的空间观念。第2题，可以引导学生通过不同的思路进行分析。)

(四) 全课小结

教师：同学们，今天的数学课你们有哪些收获呢？

三、备课资料

范·希尔 (Van Hiele) 关于学生几何思维水平的研究^①

就像皮亚杰等人的工作一样，范·希尔的理论有着广泛的影响并被深入地研究。在20世纪50年代的荷兰，几何教学所面临的问题是很普遍的。范·希尔夫妇作为荷兰一所中学的数

^① 鲍建生：《数学学习的心理基础与过程》，上海：上海教育出版社，2009年第1版。

学教师，每天都亲身经历着这些问题，最让他们感到困惑的是教材所呈现的问题或作业所需要的语言及专业知识常常超出了学生的思维水平，这使得他们开始关注皮亚杰的工作。经过一段时间的研究，范·希尔的理论认为学生通过几何思维水平的进步，从一个像格式塔的直观化水平不断地提高到描述、分析、抽象和证明等复杂水平。将学生几何思维的发展水平分为如下5个层次。

层次	思维对象	水平框架描述
层次0： 直观化	形状、实物	学生把图形看作整体，能通过整体轮廓辨认图形，并能操作其几何构图元素（如边、角）；能画图或仿画图形，使用标准或不标准名称描述几何图形；能根据对形状的操作解决几何问题，但无法使用图形之特征或要素名称分析图形，也无法对图形做概括的论述。
层次1： 描述/分析	形状的种类	学生通过图形的性质来识别图形，并能确定图形的特征。能分析图形的组成要素及特征，并依此建立图形的特性，利用这些特性解决几何问题，但无法解释性质间的关系，也无法了解图形的定义；能根据组成要素比较两个形体，利用某一性质做图形分类，但无法解释图形某些性质之间的关联，也无法导出公式和使用正式的定义。
层次2： 抽象/关联	形状的性质	学生能形成抽象的定义，区分概念的必要条件和充分条件。能建立图形及图形性质之间的关系，可以提出非形式化的推论，了解建构图形的要素，能进一步探求图形的内在属性及其包含关系，使用公式与定义及发现的性质做演绎推论。但不能了解证明与定理的重要性，不能由不熟悉的前提去建立证明结果的成立，也未能建立定理网络之间的内在关系。这个阶段是标志性的飞跃。
层次3： 形式推理	性质之间的关系	学生在公理化系统中建立定理。学生可以了解到证明的重要性的了解“不定义元素”“定理”和“公理”的意义，确信几何定理是需要形式逻辑推演才能建立的，理解解决几何问题必须具备充分或必要条件；能猜测并尝试用演绎方式证实其猜测，能够以逻辑推理解释几何学中的公理、定义、定理等，也能推理出新的定理，建立定理间的关系网络，能比较一个定理的不同证明方式；能理解证明中的必要与充分条件。
层次4： 严密性/ 元数学	几何演绎的公理系统	在最高思维水平，思维对象转变成公理系统本身而不是在一个系统里的演绎。他们感兴趣的是不同公理系统之间的关系和区别。这是大学数学系学生的思维水平，他们学习几何，把它作为数学的一个分支。

范·希尔几何思维发展理论的特点：几何学习不是一个连续的过程，而是一个跳跃的阶段过程，思考能力在某一水平上需要停留一个时期，上述5个思维水平之间存在着次序性。学习者需要拥有前一水平的各项概念与策略，才能有效进入下一水平的教学活动。学生在某一水平上要达到理解和掌握，就必须掌握前一水平上的大部分能力；反之，学生在某一水平上理解不深的概念，到了高一水平就可能理解清楚了。水平间的发展，不是靠年龄的增长或身体的成熟，而是靠教学来推动，学生可以通过若干教学阶段取得进步，但是不可绕过某一水平而向高

一水平发展。

范·希尔还指出每个水平都有独特的语言标志以及各自的对这次语言标志进行联系的系统。为了强调语言的重要性，范·希尔记录了很多因为语言障碍（不同水平之间语言无法沟通）教授课程中造成的教学失败——教师用的语言水平高于学生用的语言水平。

总而言之，范·希尔夫妇把学生的学习发展水平视为跟教学而不是年龄紧密相关，而且每个水平除了循序渐进外，深度与广度也随之增强，所以教师进行教学时，必须注意到学生的上课表现，以评估学生是处于哪个层次，再自行调整教学内容，以免学生因上课内容难懂而感到无聊和挫折。

四、评价建议与评价样例

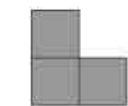
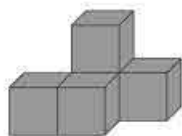
（一）评价建议

本单元知识与技能的评价应围绕以下几点：能根据从一个方向观察到的形状图用小正方体拼摆出相应的几何组合体，体会不确定性；根据从三个方向观察到的形状图用小正方体拼摆相应的几何组合体；进一步培养学生的空间想象力和推理能力，发展空间观念。

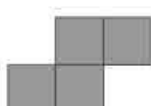
（二）评价样例

以下为笔试评价样例。

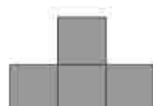
1. 右边的图形分别是哪个方向观察到的？



从（ ）面看



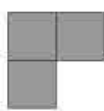
从（ ）面看



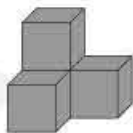
从（ ）面看

2. 哪个几何体符合要求？在对的括号里画“√”。

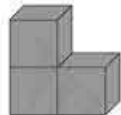
(1)



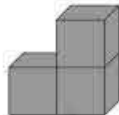
从上面看



()



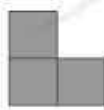
()



()



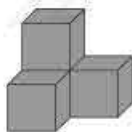
(2)



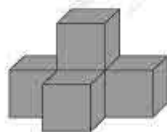
从左面看



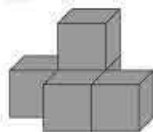
从正面看



()

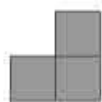


()

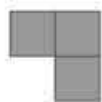


()

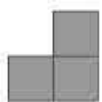
(3)



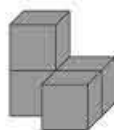
从正面看



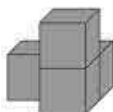
从上面看



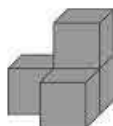
从左面看



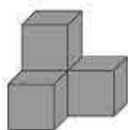
()



()

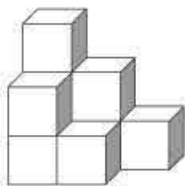


()

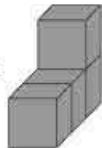


()

3. 把9个棱长是1厘米的小正方体拼摆在一起(如图)。如果从正面和后面看,所看到的图形面积之和是()平方厘米。



4. 如果从上面看到的和从上面看



时一样,用5个小正方体摆,一共有多少种不同的摆法?

同的摆法?

人教版®

第二单元 因数与倍数

一、教材说明和教学建议

(一) 教学目标

1. 理解因数与倍数的概念，能举例说明。
2. 通过自主探索，掌握2、3和5的倍数的特征，能准确判断2、3和5的倍数，促进数感的发展。
3. 了解质数（素数）与合数，在1~100的自然数中，能找出质数与合数，并能熟练判断20以内的数哪个是质数，哪个是合数。
4. 知道有关概念之间的联系和区别，在建立概念、运用概念的过程中，逐步发展数学的抽象能力与推理能力。
5. 了解奇数与偶数，能准确判断奇数与偶数，通过探索奇数、偶数相加的结果是奇数还是偶数（奇偶性），丰富解决问题的策略。

(二) 内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

本单元的主要学习内容包括：因数与倍数，2、5和3的倍数的特征，质数与合数。这些内容分为三节，各节内容的编排体系如下表。

标题		内容安排	
第1节	因数和倍数	例1	因数与倍数的概念
		例2	找出一个数的因数
		例3	找出一个数的倍数
第2节	2、5和3的倍数特征	例1	5的倍数的特征 2的倍数的特征，偶数与奇数
		例2	3的倍数的特征
第3节	质数和合数	质数和合数的概念	
		例1	制作100以内的质数表
		例2	解决问题：探索和的奇偶性

有关知识之间的内在联系如下页图。



本单元的内容是在学生已经学了一定的整数知识（包括整数的认识、整数的四则运算及其应用）的基础上，进一步认识整数的性质。本单元所涉及的因数、倍数、质数、合数等概念以及第四单元中的最大公因数、最小公倍数等内容，都是初等数论的基础知识。

数论是一个历史悠久的数学分支，它是研究整数性质的一门学问，以严格、简洁、抽象著称。数学一直被认为是“科学的皇后”，而数论更被誉为“数学的皇后”，可见数论在数学中的地位。

本单元的知识作为数论知识的初步，一直是小学数学教材中的重要内容。

一方面，学习分数，特别是学习约分、通分，需要以因数、倍数的概念为基础，进一步掌握公因数、最大公因数和公倍数、最小公倍数的概念，需要用到质数、合数的概念，需要掌握2、5和3的倍数的特征。因此，本单元的知识是学习数学不可或缺的基础。

另一方面，这部分内容的学习，不仅能丰富学生有关整数的知识，加深对整数与整数除法的认识，同时由于这些知识比较抽象，且概念间的联系非常紧密，所以也有助于发展学生的数学思维。

2. 教材编排特点。

(1) 坚持精简理论概念与分散难点的处理方式。

首先是精简了整除的概念。从数学的角度看，在数论中，起始概念之一就是整除。一般地，对于任意整数 a 、 b ，都存在整数 n 、 r ，使 $a=nb+r$ （其中 $r<b$ ），当 $r=0$ 时，我们就说 a 能被 b 整除（或 b 能整除 a ）， a 是 b 的倍数， b 是 a 的因数。可见，整除与倍数、因数，是同一数学事实的两种不同说法，它们是等价的。从学生角度看，他们在前面的学习中已经积累了大量的区分整除与有余数除法的知识经验，对整除的含义有比较清楚的认识，但对使用“谁能被谁整除”“谁能整除谁”的叙述方式却很不适应，容易说错。因此，不出现整除的概念，会使教师感到有些习惯说法要改口，对学生学习并不会产生实质性的影响。

其次是精简了分解质因数、互质数等概念。在以往的教材中，求最大公因数、最小公倍数唯一的固定方法就是用短除法分解质因数，因此，分解质因数的概念与短除法以及互质数的概念，一直是必学内容。考虑到学习求最大公因数、最小公倍数主要用于约分、通分，事实上，学生在约分、通分时，实际采用口算，几乎不用短除法。所以，允许学生采用多样的方法求最大公因数和最小公倍数之后，分解质因数就失去了其不可或缺的作用。为了减少这一单元的理论概念，把分解质因数等内容作为补充知识，安排在“你知道吗？”中进行介绍，显然是合理的。

最后是将公因数、最大公因数和公倍数、最小公倍数等内容移后，与约分、通分编排在一起。在以往的教材中，有关“数的整除”的概念集中在一个单元内学习，虽然有利于凸显相关概念之间紧密的逻辑关系，但也形成了同一单元概念过多、抽象程度过高的现象，学生在学习时经常出现概念混淆、理解困难的问题。实践表明，将其分开编排，能够分散难点，减少教与学的困难，而且也有利于突出知识的应用性。因为约分需要尽快找出分子、分母的公因数，通分需要尽快找出两个分数分母的公倍数，现在的编排，学了就用，便于巩固，有利于提高教学的有效性。

(2) 改进因数、倍数概念的呈现方式。

在数学中，上面给出的 $a=nb+r$ ($r<b$)，与 $a\div b=n\cdots r$ 的表示形式是等价的。但对于学生来说，采用乘法的表示形式，容易产生误解，以为因数、倍数是针对整数乘法来说的。比较而言，采用除法的表示形式，更便于他们感知因数与倍数的本质意义，领悟到这两个概念反映了整数除法中余数为 0 的情况，有利于避免误解。

(3) 放大探索空间，落实能力培养。

为了便于学生自行制作 100 以内的质数表，教材将 1~100 各数排列成 10×10 的方阵，俗称“百数表”，供学生操作。实践表明，百数表是一种不错的探究材料。以前教学 5 的倍数的特征时，也曾使用百数表。但在教学 2 和 3 的倍数的特征时，原来采用依次算出 2、3 的倍数的方式，让学生观察，同时还给出

$2=2\times 1$	$3\times 1=3$
$4=2\times 2$	$3\times 2=6$
$6=2\times 3$	$3\times 3=9$
$8=2\times 4$	$3\times 4=12$
$10=2\times 5$	$3\times 5=15$
.....

直截了当的提示，如：“把 3 的倍数各位上的数相加，你发现了什么？”虽说效果明显，但问题过于直白，不利于学生获得探究的体验。现在的教材，探究 2、5 和 3 的倍数的特征时，一概采用百数表，由学生自己圈数，自己生成观察材料，同时减少提示，以放大学生的探究空间。这就有利于学生获得更为丰富的数学探究活动经验。

确实，2、5 的倍数特征仅仅体现在个位数上，比较明显，容易理解，而 3 的倍数的特征，只看个位数来判定恰恰成了“陷阱”。怎样才能使学生想到转变思路，从只看个位数转向考察各位上的数相加的和？教材通过学生对话的插图，在思维的转折处设问，并针对改变观察角度提出问题，力求“提示”与“留白”恰到好处。

相应地，在练习中设计了一道探究题，让学生不再依赖提示，独立探索 6 的倍数的特征，从而进一步发展学生的数学探究活动经验，使数学能力的培养目标得以落实。

(4) 加强解决问题的教与学。

在本单元中，增加了一道例题，通过研究两数之和的奇偶性的纯数学问题，引导学生经历较为完整的问题解决过程，并渗透解决问题的策略。

(5) 改善抽象思维能力与数学应用意识的培养。

数论初步知识属于纯数学，比较适合培养学生的抽象思维能力。五年级的学生，其抽象思维也有了进一步的发展，因此，有意识地培养学生的抽象概括能力，既是必要的，又是可行的。

教材在引入因数与倍数的概念、2和5的倍数的特征等知识时，去掉了可有可无的实际情境，直接给出除法算法或百数表，让学生从数学的视角去观察、去思考，而不再是时时处处都依赖生活经验来帮助理解。

在适当利用本单元知识特有的抽象性，培养抽象思维能力的同时，教材的配套练习安排了一系列的实际问题，让学生应用所学数学知识解决现实世界中的问题。此外，还以“生活中的数学”专栏形式，启发学生利用有关的数学概念、原理和方法解释现实世界中的现象。

这些改进，既避免了抽象与应用集中在一节课中所生成的人为难点，又能使数学思维、数学应用能力的培养落到实处。

(三) 教学建议

1. 关注由具体到抽象、由特殊到一般的概括、归纳过程。

本单元中概念的建立，多需要经历由具体到一般的抽象概括过程。例如，因数与倍数的概念的建立，首先是观察一批除法算式，找出它们的异同，然后在分类的基础上，抽象概括出其中一类具有“商是整数而没有余数”的共同属性。又如，通过一些具体的例子，总结出任何一个数的倍数个数都是无限的等规律性的认识。这些过程，对于学生逐步形成抽象概括与归纳推理能力，都是非常有益的。

2. 加强对概念间相互关系的梳理，促进理解与记忆。

由于这部分内容较为抽象，有些概念如质数与合数，很难结合儿童生活的实例诠释其意义，因而学生理解起来有一定的难度。相应的教学对策之一，就是加强概念间相互关系的梳理，引导学生从本质上理解概念，避免死记硬背。

例如，因数和倍数是两个最基本的概念，理解了因数和倍数的含义，就容易理解一个数的最大因数是它本身，所以一个数的因数个数一定是有限的；一个数的最小倍数是它本身，乘1、乘2、乘3可以无限进行下去，所以一个数的倍数个数必然是无限的。

又如，偶数、奇数概念是由倍数概念引出的，质数、合数概念是由因数概念引出的。以是否是2的倍数为标准，可以将自然数分为偶数、奇数两类；以所含因数的个数为标准，可以将大于0的自然数分为1、质数、合数三类。这些认识，能够有效地帮助学生将所学概念串联起来，形成概念链，从而依靠理解来促进记忆。

3. 让学生经历探究、发现、总结的完整过程。

在本单元中，2、5、3的倍数特征，100以内的质数表，以及两数之和的奇偶性等，都是比较典型的适合小学生开展探究学习的课题。教学时，应放手让学生尝试，让他们经历从举例考察到分析综合，从猜想到验证，最后归纳总结的过程，从中积累数学活动的经验。

4. 处理好概念教学的阶段性与连续性的关系。

由于学生还没有学习负整数，因此，本单元的整数与自然数同义。整数与自然数都包括0，根据因数和倍数的定义，0 是任何非零自然数的倍数，任何非零自然数都是0 的因数。特别地，因为0 是2 的倍数，2 是0 的因数，所以0 是偶数。

但是，考虑到以后研究最大公因数和最小公倍数时，如果不排除0，很多问题无从讨论。例如，讨论0 和5 的最大公因数既没有实际意义，也没有数学意义。再如，如果把0 考虑在内，任意两个自然数的最小公倍数就是0，这样的研究没有任何价值。因此，为了避免不必要的麻烦，教材指出本单元所说的数指的是自然数（一般不包括0）。有了这一规定，教学时就不必处处强调“大于0”。在学习负数之前，学生说“整数”或“自然数”都是可以的。

当然，引进负整数之后，有些概念可以加以拓展。例如偶数，在小学局限在0，2，4，6，…的范围内，到了中学，则拓展为…，-6，-4，-2，0，2，4，6，…。

5. 建议用7 课时教学。

人教版®

(四) 具体内容的教材分析和教学建议

2 因数与倍数

1. 因数和倍数

1 在前面的学习中, 我们学过下面的算式,

$12 \div 2 = 6$	$8 \div 3 = 2 \cdots 2$	$30 \div 6 = 5$
$19 \div 7 = 2 \cdots 5$	$9 \div 5 = 1.8$	$26 \div 8 = 3.25$
$20 \div 10 = 2$	$21 \div 21 = 1$	$63 \div 9 = 7$

你能把这些算式分类吗?

我们分成了这样的两类。

第一类	$12 \div 2 = 6$ $20 \div 10 = 2$	第二类	$8 \div 3 = 2 \cdots 2$ $9 \div 5 = 1.8$
第二类	$30 \div 6 = 5$ $21 \div 21 = 1$	第三类	$19 \div 7 = 2 \cdots 5$ $26 \div 8 = 3.25$
第三类	$63 \div 9 = 7$		

在整数除法中, 如果商是整数而没有余数, 我们就说被除数是除数的**倍数**, 除数是被除数的**因数**。例如, $12 \div 2 = 6$, 我们就说 12 是 2 的倍数, 2 是 12 的因数, $12 \div 6 = 2$, 所以 12 是 6 的倍数, 6 是 12 的因数。

说一说第一类的每个算式中, 谁是谁的因数? 谁是谁的倍数?

因数与倍数是相互依存时。

注意: 为了方便, 在研究因数和倍数的时侯, 我们所说的数指的是自然数 (一般不包括 0)。

做一做

下面的 4 组数中, 谁是谁的因数? 谁是谁的倍数?

4 和 24

26 和 13

75 和 25

81 和 9

教学建议

(1) 让学生理解分类标准。

放手让学生给除法算式分类, 容易出现分三类 (即把第二类按是否有余数分成两类) 的现象。教师可以让学生讨论, 为什么商是小数没有余数、商是整数有余数这两种情况归为一类? 只要学生举例说明就可以, 如: $9 \div 5 = 1.8$ 也能写成 $9 \div 5 = 1 \cdots 4$ 。

如果学生基础较好, 也可以用字母表示分类的标准: $a \div b = c$ (a 、 b 、 c 是大于 0 的自然数)。进而用字母陈述概念: a 是 b 、 c 的倍数, b 、 c 是 a 的因数。

编写意图

(1) 例 1 教学因数与倍数的概念。教材首先给出 9 个除法算式, 让学生进行分类; 接着出示分成两类的一种结果, 分类的标准“商是整数而没有余数”(“没有余数”也可以说成“余数为 0”)。在此基础上, 由第一类中的整数除法, 引出因数与倍数的概念, 并举例说明。

(2) 例 1 的编排思路是: 由具体到抽象引出概念; 再由抽象回到具体, 举例说明概念。这样的思维转换过程有利于学生认知概念, 切实掌握概念。通过让学生说一说第一类中的每个算式, 谁是谁的因数, 谁是谁的倍数, 进一步体会“因数与倍数是互相依存的”。“做一做”的设计, 也有这一意图。因数与倍数的互相依存性, 是这对概念的一个重要内涵。

(3) 在例 1 的最后, 教材指出了本单元中数的研究范围是大于 0 的自然数。

(2) 引导学生明确因数与倍数条件的与依存性。

教学时, 应注意使学生明确: ①条件的条件 (前提), 被除数、除数和商都是大于 0 的自然数。②概念的依存性, 因数、倍数都不能单独存在。应及时纠正“2 是因数, 12 是倍数”的说法。至于“倍数”与“几倍”, “因数”与乘法各部分名称的区别, 可以等教学例 2、例 3 之后, 学生对因数与倍数有了较全面的认识, 再来辨析, 比较有利。

编写意图

(1) 例2教学找出一个数的所有因数。教材直接提出问题：“18的因数有哪几个？”引导学生利用因数的概念从小到大依次写出，然后再用集合图表示出一个数的全部因数，为后面用交集图表示两个数的公因数打下基础，并使学生初步体会一个数的因数个数是有限的。

(2) 例3教学一个数的倍数的求法。因为被除数相当于积，所以求2的倍数可将2和任意非零自然数相乘得到。学生在列乘法算式时就会发现这样的算式是列不完的，因此，2的倍数的个数是无限的。接着也用集合图表示出2的倍数，为后面学习用交集图表示两个数的公倍数奠定基础。

(3) 最后引导学生抽象概括出一个数的最小、最大因数和最小倍数分别是什么，总结出一个数的因数、倍数的个数的结论，在其中渗透从个别到全体、从特殊到一般的抽象归纳思想方法。

2 18的因数有哪几个?

$18=1 \times 18$
 $18=2 \times 9$
...

18的因数有 1, 2, _____, _____, _____

你是怎样找的?

也可以像右图这样用图表示。
30的因数有哪些? 36呢?

18的因数
1, 2, _____
_____, _____

3 2的倍数有哪些?

$2=1 \times 2$
 $2=2 \times 4$
 $2=3 \times 6$
...

2的倍数有 2, 4, 6, ...

你是怎样找到2的倍数的?

也可以像右图这样用图表示。
3的倍数有哪些? 5呢?
从上面找因数和倍数的过程中,你有什么发现?

一个数的最小因数是1, 最大因数是它本身。
一个数的最小倍数是它本身, 没有最大倍数。

一个数的因数的个数是有限的, 一个数的倍数的个数是无限的。

教学建议

(1) 依据概念找出一个数的因数、倍数。

教学例2, 应引导学生根据因数的概念去想: 固定被除数18, 改变除数, 看商是不是整数, 如果是, 则除数和商都是被除数的因数。若有学生用乘法思考, 从每个满足条件的乘法算式中找到18的一对因数, 也应给予肯定。要引导学生有序地思考, 从小到大或一对一对写出18的所有因数, 再把集合图填完整。类似地, 教学例3, 也应根据倍数的概念去思考。除了教材给出的方法, 还可以用除法, 即固定除数2, 改变被除数, 使商是整数。

(2) 抽象、概括一般的结论。

一个数的因数、倍数有无最小、最大值, 个数有什么规律, 可由学生自己总结, 也可先看课本填空, 再叙述。

(3) 联系已有知识, 辨析相关概念。

注意与前面学过的“因数”“倍”区分清楚。前面的“因数”是指乘法算式中相乘的数, 如, $3 \times 0.5 = 1.5$ 中3和0.5都是因数; “倍”是两个同类数量相除的商。如“1.5是0.3的5倍”, “5倍”表示1.5除以0.3的商。它们不局限于整数, 也可以是小数。本单元的“因数”“倍数”是数论中一对相互依存的概念, 不能单独存在, 且在整数范围中讨论。

练习二

1. 把中间符合条件的数填入相应的热气球里。



2. (1) 写出下面各数的因数。

10 17 28 32 48

(2) 写出下面各数的倍数(各写5个)。

4 7 10 6 9

3. 把是5的倍数的星星涂上黄色。



4. 15的因数有哪些? 15是哪些数的倍数?

5. 下面的说法正确吗? 正确的画“√”, 错误的画“×”。

- (1) 1是1, 2, 3, ...的因数。 ()
- (2) 8的倍数只有16, 24, 32, 40, 48。 ()
- (3) $36 \div 9 = 4$, 所以36是9的倍数。 ()
- (4) 5.7是3的倍数。 ()



编写意图

(1) 练习二围绕因数、倍数概念, 由基本到略有变化, 再到综合, 一共安排了8道习题。

(2) 前3题为基本练习, 题目的形式比较多样, 有利于诱发练习的兴趣。其中第1题还渗透了两个数的公因数, 能为后面学习两个数的公因数、最大公因数作好铺垫。

(3) 第4题要求回答15的因数、倍数, 有利于学生感悟两个概念的联系与区别。

(4) 第5题是判断练习, 其中第(1)小题针对因数概念, 后三小题都围绕着倍数的概念。每一小题都比较适合学生根据所学知识说明理由。

教学建议

(1) 让学生交流练习收获, 予以适当的总结。

例如, 第1题可让学生说说哪些是36和60共同的因数, 第4题可以总结出“一个数的最大因数与最小倍数都是这个数本身”。

又如, 第5题的第(1)小题, 可以总结出“1是任何非零自然数的因数”。

(2) 让学生说说作出判断的理由。

第5题可让学生交流画“√”“×”的理由。如: 第(1)小题, 因为1, 2, 3, ...除以1等于1, 2, 3, ..., 所以是对的; 第(2)

小题, 因为一个数的倍数有无数个, 所以是错的。也可以指出8的倍数还有8, 56, ...。学生可以根据自己的理解, 用自己的语言来说明, 只要意思正确就行。

编写意图

(1) 第6题要求回答1, 7, 10的因数各有几个, 通过练习能为后面学习质数、合数作准备。

(2) 第7题具有一定的综合性, 通过猜数游戏, 巩固因数和倍数的概念。前两小题, 涉及两个特例。第(3)小题先后给出四个限制条件, 通过思考能使学生认识到, 随着限制条件的增多, 符合条件的数越来越少。

(3) 第8题也是综合性问题, 答案是3, 6, 21, 42。

(4) 思考题给出两个例子, 引导学生通过不完全归纳, 得出结论: 如果两个数都是一个数的倍数, 那么这两个数的和也是这个数的倍数。该结论还可进一步推广: 如果 n 个数都是一个数的倍数, 那么 n 个数的和也是这个数的倍数。

(5) “你知道吗?”介绍了完全数的概念, 意在丰富学生的数论知识, 引起学生探索整数奥秘的兴趣。

6. 填空。

1的因数有()个, 7的因数有()个, 10的因数有()个。

7. 猜数游戏。



8. 一个数是42的因数, 同时也是3的倍数, 这个数可能是多少?

14, 21都是7的倍数, 14与21的和是7的倍数吗?
18, 27都是9的倍数, 18与27的和是9的倍数吗?
你有什么发现?



完全数

你知道吗?

6的因数有1, 2, 3, 6, 这几个因数的关系是: $1+2+3=6$ 。像6这样的数, 叫做完全数(也叫完美数)。
28也是完全数, 因为 $1+2+4+7=8$, 完全数非常稀少, 到2013年, 人们在无穷无尽的自然数中, 一共找出了48个完全数, 其中较小的有6, 28, 496, 8128等。

教学建议

(1) 让学生在独立思考的基础上讲清解题思路。

例如第7题的第(3)小题, 先找出42的全部因数1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 再从中找出7的倍数7, 14, 21, 42, 再留下2的倍数14和42, 其中只有42才是3的倍数, 所以, 符合条件的数只有42。

又如第8题, 可以从42的全部因数中找出3的倍数; 也可以从3的倍数(到42为止)中找出42的因数。

(2) 启发学生解释自己的发现。

思考题的结论比较明显, 其中的道理可从例子入手解释:

$$14=7 \times 2, 21=7 \times 3,$$

$$14+21=7 \times 2+7 \times 3=7 \times (2+3).$$

一般地, A 、 B 两数都是 C 的倍数, 就一定有 m 、 n 使 $A=mC$, $B=nC$, 因此

$$A+B=mC+nC=(m+n)C.$$

所以 $A+B$ 是 C 的倍数。

可以让抽象思维能力强的学生试着用字母表示来推演(证明)。

(3) 引导学生验证完全数。

可以先求出28、496的全部因数, 然后验证是否符合完全数的定义。

2、2、5、3 的倍数的特征

2、5 的倍数的特征

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(1) 上表中哪些数是5的倍数?把它们圈起来,你发现了什么?

(2) 上表中哪些数是2的倍数?把它们框起来,你发现了什么?



整数中,是2的倍数的数叫做**偶数**(0也是偶数),不是2的倍数的数叫做**奇数**($\neq 0$)。

做一做

下面哪些数是2的倍数?哪些数是5的倍数?哪些数既是2的倍数,又是5的倍数?

24 35 67 90 99 15 106
60 75 130 521 280 6018 8100

做完这道题,你发现了什么?

编写意图

(1) 例1教学2、5的倍数的特征。教材采用了百数表,让学生画圈、画框、观察、发现、总结。例如,将5的倍数圈起来,学生马上就能发现5的倍数都集中在两列上,特征也非常明显,一列个位都是5,一列个位都是0。类似地,将2的倍数框起来,规律同样一目了然。

为了便于学生总结自己的发现,教材以学生对话的形式,给出5、2倍数特征的不完整描述,让学生把特征填写完整。这是例1的学习重点。至于2和5共同的倍数的特征,可以留待完成“做一做”之后,再总结。

(2) 在总结了2的倍数的特征的基础上,教材引入了偶数、奇数的概念。

(3) “做一做”,让学生从14个数里找出2的倍数、5的倍数,并由小精灵提出问题:你发现了什么?意在启发学生总结既是2的倍数,又是5的倍数的数的特征。

教学建议

(1) 放手让学生自己探究、总结。

五年级的学生一般都能自主发现与陈述5、2的倍数的特征。对于那些已经知道了结论的学生,也应该要求他们通过圈数、框数,看看自己所知道的结论在百数表中有什么规律。

(2) 沟通数学术语与生活用语的联系。

由2的倍数引出偶数、奇数概念之后,应让学生说说,生活中通常是怎样称呼偶数、奇数的。教师可以说明,在中国文化里,偶有一双、一对的意思。还可以让学生说说日常生活

里偶数、奇数的应用。例如,打开数学课本,左边是偶数页,右边是奇数页。

(3) 交流“做一做”的发现。

先让学生独立完成“做一做”,可以把答案写在书上,也可以采用在2的倍数下面画线,把5的倍数圈出来等方式表示。然后检验并交流。

还可以请学生再看看例1中百数表的圈、框结果,说说2和5共同的倍数,都在表中的哪一列上。

这里,一般暂不出现“公倍数”的说法,可以等到教学第四单元时再引入。

编写意图

(1) 例2教学3的倍数的特征。教材仍采用百数表，让学生先圈数，再根据提示，观察、思考，回答问题，获得新的发现。

(2) 3的倍数的特征比较隐蔽，且容易受2和5倍数特征的观察定义、思维定式的影响。因此，教材第(2)条指导语，提出两个问题，启发学生排除只看个位的定式。然后通过第(3)条指导语，提示变换观察的角度。

(3) 两个女孩的对话，说出了探究过程中思维转换的关键内容。小精灵的提示，引导学生进一步验证规律。

(4) “做一做”先判断四个两位数是不是3的倍数，再练习怎样使三位数成为3的倍数。本题有较大拓展空间。如：添一张卡片，除了放在原来两张卡片的后面，还可以插入中间或放在前面（添上的卡片数字非0），所组成的三位数都是3的倍数。这有助于加深对“各位上数的和是3的倍数”的理解。

3的倍数的特征

2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

(1) 上表中哪些数是3的倍数？把它们圈起来。

(2) 斜着看，圈起来的前10个数，个位分别是哪些数字？判断一个数是不是3的倍数，只看个位行吗？

(3) 斜着看，你发现了什么？



一个数各位上的数的和是3的倍数，这个数就是3的倍数。

做一做

下面用数字卡片摆出的数中哪些是3的倍数？在每个数后面增加一张卡片，使这个三位数成为3的倍数。

2	4	5	8	4	7	9	6
---	---	---	---	---	---	---	---

教学建议

(1) 尽可能让学生自己发现规律。

例2的教学，应着力让学生在过程中获得“山穷水尽”与“柳暗花明”的探究体验，为此，不布置预习为宜。

教学时，不妨先请学生说说2、5的倍数的特征，并追问“判断一个数是不是2或5的倍数，只要看什么”，以诱发、强化认知冲突。然后把百数表印发给学生，将3的倍数圈起来。

完成后，提出例题指导语(2)中的两个问题，使学生明确，原来的经验失效了，必须

改变观察的角度，重新探索。然后让学生独立观察圈起来的数的分布，教师耐心等待。实在没人发现，再作提示“斜着看”。如果还是没人看出规律，再追加提示，如：“第二斜行，6，15，24，33，42，51，60，十位数依次少1，个位数依次加1，什么不变？”“发现了规律，继续观察，其他斜行呢？”

(2) 适当拓展“做一做”的练习内容。

完成“做一做”后可以继续提问，如：增加一张卡片还可以怎么放？这些不同的三位数都是3的倍数吗？为什么？等等。

练习三

1. 下列数中, 哪些是奇数? 哪些是偶数?

33 98 355 0 123 881
8089 1000 988 565 3678 672

2. 按要求填空。

- (1) 两个数位上的数一样, 并且是5的倍数。
 (2) 3 5 既是2的倍数, 又是5的倍数。
 (3) 既是2的倍数, 又是5的倍数的最小的三位数。

3. 圈出3的倍数。

92 75 36 206 65 3051 779 99999
111 49 165 5988 655 131 2222 7203



4. 在□里填一个数字, 使每个数都是3的倍数。 (各有几种填法?)

7 42 44 65 121

6. (1)

一五、一十、十五、二十……
这样数数, 数出来的数都是_____的倍数, 第12个数是_____。

(2)

100, 98, 96, 94, …, 8, 6, 4, 2. 这列数中, 每个数都是_____的倍数, 第15个数是_____。



11

编写意图

(1) 第1题通过找出奇数、偶数, 巩固2的倍数的特征。

(2) 第2题涉及2、5各自的倍数及共同倍数的特征。三小题都只有唯一答案。

(3) 第3题是3的倍数特征的巩固练习。16个数, 从两位数到五位数。

(4) 第4题是开放题, 答案有无数个。要找出一个偶数, 又是3的倍数, 可以先确定该数的个位上的数, 再根据3的倍数的特征来配上其他位的数。也可以采用相反的思考顺序, 或者用3乘不同的偶数。要找一个奇数, 同时又是5的倍数, 可用5乘不同的奇数, 或先确定个位必须是5, 其他数位上取任意数字, 只要首位非0。

(5) 第5题是用3的倍数的特征来解决问题, 要求找出所有答案。

(6) 第6题通过一五一十顺着数、两个两个倒着数, 先确定数列特征, 再求出指定位置上的数。

教学建议

(1) 培养学生有根有据的说理习惯。

运用2、5和3的倍数的特征解决问题, 依据比较明确, 也容易说清楚, 因此有利于培养学生的说理能力与习惯。交流时, 应有意识地引导学生有根有据地说出判断、选择的根据。如第5题, 根据3的倍数的特征, $\square 7$ 是3的倍数, 就要使 $\square + 7$ 的和是3的倍数, 可填2、5、8。

(2) 交流不同的思考方法, 开拓思路。

如第4题, 思考方法不一, 通过交流, 让学生相互启发, 感悟解决问题思路的多样性。

又如第6题, 可以依次写出第12、15个数, 也可以算出来, 即 5×12 , $100 - 2 \times 14$ 。还可以推算: 第10个5的倍数是50, 第11、12个依次是55, 60; $100 \sim 92$ 里有5个偶数, $90 \sim 82$ 、 $80 \sim 72$ 里也各有5个偶数, 所以第15个数是72。学生还可能还有其他思考方法, 教师应仔细倾听, 揣摩学生个性化的思路, 帮助他们说明白自己是怎样想的。

编写意图

(1) 第7题是一个运用倍数特征解决实际问题的练习。因为妈妈买了一些马蹄莲和郁金香，马蹄莲10元1枝，所以它的总价是整十数，郁金香5元1枝，所以它的总价是5的倍数，个位上是0或5，合起来的总价一定是几十元或几十元五元，因此，服务员找的钱数不对。

(2) 第8题是判断练习。其中第(3)小题渗透了将整数按奇偶性分类的思想。学生还没有学习负数，可以限制在大于0的整数范围内作出判断。以后推广到全体整数，“不是奇数就是偶数”的结论也是对的。

(3) 第9题是有关3的倍数的实际应用，需要把它抽象成相应的数学问题。

(4) 第10、11题是2、5和3的倍数特征的综合运用练习，按特定要求组成三位数。给出的要求逐渐增多，由易到难，具有一定的挑战性。其中第10题答案比较开放，第11题答案唯一。

7. 妈妈在电话买了一些马蹄莲和郁金香。



8. 下面的说法正确吗？说一说你的理由。

- (1) 个位上是3、6、9的数，都是3的倍数。
- (2) 个位上是1、3、5、7、9的数，都是奇数。
- (3) 在全部整数里，不是奇数就是偶数。

9.



10. 从下面四张数字卡片中取出三张，按要求组成三位数。

4	3	奇数	偶数
0	5	2的倍数	5的倍数
		3的倍数	既是2的倍数，又是3的倍数

11. (1) 既是2和5的倍数，又是3的倍数的最小两位数是()。
- (2) 既是2的倍数，又是3的倍数的最小三位数是()，最大三位数是()。

教学建议

(1) 提醒学生审题，识别无关信息。

如第7题，从图中可以看出妈妈买了哪两种花，进而发现“玫瑰3元/枝”与解题无关。

(2) 将实际问题转化为数学问题。

如第9题，应启发学生首先理解条件与问题：原有人数是多少，3人分成一组会怎样？问题是什么意思？进而把它抽象出来：22至少加上几是3的倍数？

(3) 培养学生有条有理的思考习惯。

第10、11题，解答时先考虑什么，满足哪个条件，再考虑什么，满足哪个条件，逻辑性比

较强，因此有利于培养学生有条有理地分析问题、解决问题的习惯。如第10题，可以先组成三位数（共18个）（见第40页①），再分别找出符合其他要求的数；也可以先作出满足倍数要求的选择，再组成三位数（见第40页②）。根据学生的具体情况，可以不求全，也可以比一比谁找出的多，通过交流，把答案补充完整。

又如第11题第(1)题，2和5的倍数个位只能是0，最小两位数又是3的倍数十位就是3。第(2)题先确定最小三位数是10□，再考虑2和3的倍数，□里填2；类似地，最大三位数是99□，考虑3的倍数，□里可填0，3，6，9，考虑2的倍数只能填6。

12. 找出4的倍数。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

(1) 4的倍数都是2的倍数吗?

(2) 只看个位, 能否判断出一个数是不是4的倍数? 应该怎样判断?



你知道吗?

为什么判断一个数是不是2或5的倍数, 只要看个位数? 为什么判断一个数是不是3的倍数, 要看各位上数的和?

$24 = 20 + ()$
 $2485 = 2480 + ()$

$24 = 2 \times 10 + 4 = 2 \times (9+1) + 4 = 2 \times 9 + (2) + (4)$
 $2485 = 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 8 \times 10 + 5$
 $= 2 \times (999+1) + 4 \times (99+1) + 8 \times (9+1) + 5$
 $= 2 \times 999 + 4 \times 99 + 8 \times 9 + () + () + () + ()$

把这两个数都是3的倍数, 剩下的部分正好是这个数各位上数的和, 所以——

编写意图

(1) 第12题是一个探究性练习。意图是让学生采用例题探究2、5和3的倍数的特征的方法, 通过操作、观察, 有所发现。为此, 提出两个问题, 前一问题涉及4的倍数与2的倍数的关系, 后一问题为选做题, 供学有余力的学生尝试探究4的倍数的特征, 即一个数的末两位数是4的倍数, 这个数就是4的倍数。

(2) “生活中的数学”介绍了偶数、奇数在日常生活中最常见的两种应用, 影剧院的座位号, 街道两边的门牌号, 以启发学生用数学的眼光观察世界, 培养数学的应用意识。

(3) “你知道吗?”采用举例说明的方式, 以练习二思考题为基础, 揭示了2、5和3的倍数的特征的算理, 以启发学生思考, 特别是启发那些善于动脑、喜欢寻根究底的学生, 通过阅读, 深入探究, 知其然, 知其所以然。

教学建议

(1) 让学生尝试探究。

第12题放手让学生自行探究是有基础的, 因为类似的操作、观察、思考过程, 学生在学习例1、例2时已经历了两次。

问题(1)和问题(2)的前一个问题, 学生都能正确回答, 而后一个问题依靠题目现有的1~50的数表是很难发现的。教师可以提示: 在表中每个数的百位添上“1”, 将1~50变成101~150, 看看原来4的倍数有没有发生变化? 将1~50变成201~250呢? 从而促使学生发现, 4的倍数与百位数无关。

(2) 适当说明奇数、偶数的实际应用。

这里除了让学生补充实例, 更重要的是启发学生理解: 为什么要分单双号? 只要启发学生联系生活经验即可, 如: 影院单号走哪个门? 双号呢? 他们能想到, 单双号具有“分流”、加快查找速度等作用。

(3) 联系已有发现, 促进理解。

理解“你知道吗?”的说明, 关键在于联系前面练习二思考题的结论。如, 因为整十数一定是2或5的倍数, 所以一个数是否是2或5的倍数取决于个位数。对学有余力的学生, 还可启发他们将这一推理加以推广, 得出判断4与25、8与125的倍数的方法。

编写意图

(1) 教材首先让学生找出 1~20 各数的全部因数, 然后按照每个数的因数的个数进行分类。在此基础上给出质数、合数的概念。同时指出 1 既不是质数, 也不是合数。至于这样规定的合理性(如: 便于分解质因数的唯一性等), 小学一般不作说明, 学生可以理解为 1 只有一个因数, 质数有两个因数, 合数有三个及更多个因数。

(2) 例 1 让学生运用质数的概念找出 100 以内的所有质数。教材通过学生的对话介绍了两种操作方法。其中依次画去每个质数本身之外的所有倍数的方法, 叫做“筛法”, 它是数论中有广泛应用的一个初等方法。

由于小学用到的质数比较少, 所以教材中只要求学生找出 100 以内的质数。这些质数不要求学生都背熟, 但是熟悉 20 以内的质数还是必要的。

教学建议

(1) 重视概念的形成过程。

教学时, 可以先复习因数的概念, 再让学生找出 1~20 各数的所有因数, 引导学生观察这些数的因数有什么不同, 可以怎样分类。在分类的基础上, 引出质数、合数的概念, 说明只有 1 和它本身两个因数的数叫质数, 有两个以上因数的数叫合数, 1 既不是质数, 也不是合数。为巩固概念, 教师可以出示几个数, 让学生判断是质数还是合数, 也可以由学生自己分别写出几个质数和几个合数。

(2) 让学生自主选择方法, 制作质数表。

3. 质数和合数

找出 1~20 各数的因数, 看看它们的因数的个数有什么规律。

有的数只有两个因数, 如 5 的因数是 1 和 5, 17 是质数。



有的数的因数不止两个——我们来给它们分分类吧!

只有一个因数的数	只有 1 和它本身两个因数的数	有两个以上因数的数

一个数, 如果只有 1 和它本身两个因数, 那么这样的数叫做质数(或素数), 如 2, 3, 5, 7 都是质数。

一个数, 如果除了 1 和它本身还有别的因数, 那么这样的数叫做合数, 如 4, 6, 15, 49 都是合数。

1 不是质数, 也不是合数。



1 找出 100 以内的质数, 做一个质数表。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

可以把每个数都画掉一下, 看看谁是质数。



先把 2 的倍数画去, 除了 2 以外, 画掉的这些数都不是质数, 3 的倍数也可以——



画到几的倍数就可以了?

教学例 1 时, 可先让学生明确任务: 一个不漏地找出 100 以内的质数。然后放手让学生自己去尝试, 或者通过讨论明确有哪几种方法, 再各自实践, 还可以让学生看书, 理解了课本介绍的两种方法, 再自主选用其一。学生一般都会选用“筛法”, 画完后, 还可以让学生体会一下画到几的倍数就可以了。

教师可以简要介绍“筛法”的由来, 学生称之为“排除法”也应予以肯定。

2

奇数与偶数的和是奇数还是偶数？奇数与奇数的和是奇数还是偶数？偶数与偶数的和呢？

阅读与理解

从题目中你知道了什么？

我提出的问题或疑问是——

能不能用我们学过的知识，像我们学过的加法一样探究。

奇数 + 偶数 = 奇数！
奇数 + 偶数 = 偶数！
奇数 + 奇数 = 奇数！
偶数 + 偶数 = 偶数！

交流与探索

我随便找几个奇数、偶数，加起来看一看。

奇数除以2余1，偶数除以2没有余数，奇数和偶数的和除以2没有余数，所以——

奇数：5, 7, 9, 11, ...
偶数：8, 12, 20, 24, ...

5+8=13, 7+9=16
5+7=12, 7+9=16
8+12=20, 12+24=36

奇数：□ □ □ □ □
偶数：□ □ □ □ □

所以，奇数 + 偶数 = 奇数，奇数 + 奇数 = _____，偶数 + 偶数 = _____。

回顾与反思

这个结论正确吗？

我可以再找一些数试一试。

5+4+39=48

所以，奇数 + 偶数 = 奇数。

还有其他方法吗？你觉得哪种方法好？

编写意图

(1) 例2是以探索两数之和的奇偶性为例，让学生在探究过程中获得数学活动的经验，丰富解决问题的策略。

(2) 教材根据奇数、偶数相加的三种情况，提出了三个问题。阅读与理解环节给出了三个问题的一种表征方式，即用算式表示。分析与解答环节提示了三种获取结论的方法，即举例、说理、图示。事实上，这三种方法结合使用，可以提高结论的可靠性，增强学生对结论的理解与确信感。

回顾与反思环节教材给出了用大数试一试的检验方法，并提出问题，请学生思考其他的验证方法。也就是启发学生联系加减法的关系想到：如果“奇数+偶数=奇数”是对的，那么一定有“奇数-奇数=偶数”“奇数-偶数=奇数”。这样既验证了和的奇偶性，又获得了差的奇偶性结论。作为教师必须清楚，举例验证本质上只是不完全归纳，不是证明。

在经历解决问题的过程中，不断丰富学生解决问题的策略，如利用算式表征问题理解题意，通过举例、说理获取结论等。

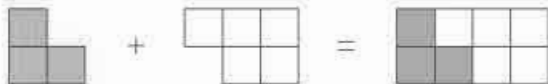
教学建议

(1) 明确探究的目标与方法。

“阅读与理解”之后，先让学生说说例2要我们探究什么？你打算怎样探究？然后再让学生各自独立探究。

(2) 交流探究的方法与结果。

一般学生都能通过举例发现结论，因此重要的是通过交流或自学课本，感知其他方法。教师还可以通过演示，数形结合，帮助学生确信结论的正确性。如，奇数+奇数=偶数：



让学生用自己的语言来解释，如“多一块与少一块合并正好组成一个长方形”“两个除以2都余1的数相加，和是2的倍数”。

抽象思维能力强的学生，可让他们尝试着用字母表示，如：用 $2n+1$ 、 $2m+1$ 表示两个奇数（ n, m 是自然数），则

$$\begin{aligned}(2n+1)+(2m+1) &= 2n+2m+2 \\ &= 2(n+m+1)\end{aligned}$$

因为 $(n+m+1)$ 是自然数，所以 $2(n+m+1)$ 一定是2的倍数。

也可以告诉学生，以后到了中学，这些规律你们自己就能证明。

编写意图

(1) 第1、2题都是针对概念的理解,启发学生从不同方面认识奇数、偶数与质数、合数这两对概念的内涵与外延、区别与联系。

第1题以判断题的形式,让学生通过辨析认识奇数与质数、偶数与合数、两个质数之和与偶数的交叉关系,记住1既不是质数,也不是合数。

第2题以分类填数的形式,让学生按照不同标准对自然数进行分类。

(2) 第3题包括三个小题,都是让学生根据条件求数,答案都唯一。如第1小题,要求所求的两个数满足三个条件:都是质数,和是10,积是21。答案是3和7。

(3) 第4、5题都是探究性练习,让学生尝试运用例题所采用的方法或其他方法,独立探究积的奇偶性,以及6的倍数的特征(实际上是2和3的倍数的特征的综合运用)。这对培养学生的探索精神与创新意识都有益处。

练习四

1. 下面的说法正确吗?说一说你的理由。

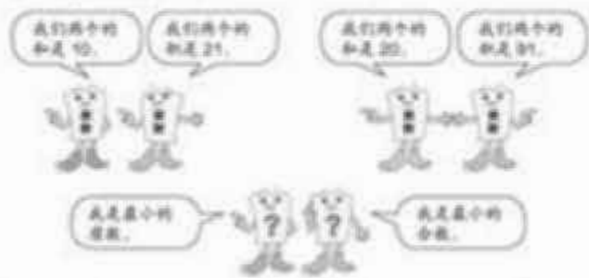
- (1) 所有的奇数都是质数。
- (2) 所有的偶数都是合数。
- (3) 在1, 2, 3, 4, 5, …中,除了质数以外都是合数。
- (4) 两个质数的和是偶数。

2. 将下面各数分别填入相应的圈里。

27 37 41 58 61 73 83 95
11 14 33 47 57 62 87 99

质数	合数	奇数	偶数
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

3. 你知道它们各是多少吗?



4. 奇数与奇数的积是奇数还是偶数? 奇数与偶数的积是奇数还是偶数? 偶数与偶数的积呢?

5. 探索6的倍数的特征,并记录你探索的过程和结果。

教学建议

(1) 一题多用,启发思考。

如第1题的前两小题,学生说明判断理由或举出反例之后,可以将题目反过来让学生判断:所有质数都是奇数,所有合数都是偶数。通过判断,进一步区分容易混淆的概念。

(2) 交流解决问题的思考过程。

如第3题第1小题,可以先写出和是10的两个数1和9、2和8……再找两个都是质数的3和7、5和5,最后判断两数的积,也可先找和是10的两个质数,再看它们的积,或先找积是21的两个质数,再看它们的和。

(3) 交流探究的方法、过程与体会。

探索两数之积的奇偶性,学生一般都用举例观察、验证的方法。

探索6的倍数的特征,方法比较多样。如:在百数表中圈出6的倍数,依次写出6的倍数,依次写出2的倍数再圈出6的倍数,依次写出3的倍数再圈出6的倍数,等等。方法不同,观察、发现的结果相同:6的倍数,既是偶数,又是3的倍数。

还可以让学生交流探究的体会。如:要有耐心,依次写出、圈出,观察、猜想,验证猜想等。

编写意图

(1) 第6题是一个实际问题。目的在于引导学生将和的奇偶性应用于新的现实情境。

(2) 第7题设计成一个游戏。通过游戏,使学生自然生成猜想:大于2的偶数,都能表示为两个质数的和。

(3) 在第7题的基础上,“你知道吗?”介绍了数学前沿研究的一个难题“哥德巴赫猜想”,以及我国数学家陈景润的研究成果。一方面是为了开拓学生的知识面,另一方面也能激发学生学习数学、研究数学的兴趣。

(4) 练习的最后,安排了本单元的学习小结。教材从奇数、偶数的广泛应用与2、3、5的倍数的特征两个角度给出提示,其他方面的学习小结,留给学生自由发挥。



30名学生要分成甲、乙两队。如果甲队人数为奇数,乙队人数为奇数还是偶数?如果甲队人数为偶数呢?

两人一队,一人由大于2的偶数,另一人找出和为此数的两个质数。

偶数 10

$3+7=10$

你知道吗?

哥德巴赫猜想

从上面的游戏我们看到: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=5+3$, $10=7+3$, $12=7+5$, $14=11+3$ ——那么,是不是所有大于2的偶数,都可以表示为两个质数的和呢?

这个问题是德国数学家哥德巴赫最先提出的,所以被称为哥德巴赫猜想。哥德巴赫猜想看似简单,要证明却非常困难,成为数学中一个著名的难题,被称为“数学皇冠上的明珠”。世界各国的数学家都想攻克这一难题,但至今还未解决。我国数学家陈景润在这一领域取得了举世瞩目的成就。

本单元结束了,你有什么收获?

我知道怎样判断一个数是不是2、3、5的倍数啦。

奇数、偶数在生活中有很多应用呢!

成长小档案

☆☆

17

教学建议

(1) 放手让学生自己将实际问题抽象成数学问题。

第6题,可以不加启发,一般学生都能自己把这个实际问题抽象成数学问题:两个数的和是偶数,其中一个数是奇数或偶数,另一个数是奇数还是偶数?答案也是比较明显的。

(2) 由数学游戏引出哥德巴赫猜想。

可以采用同桌两人合作的方式,进行第7题的游戏。然后让学生大胆提出猜想。告诉学生,你们发现的这一猜想,最初是由德国数学家哥德巴赫提出的,因此以他的名字命名。这

一小学生都能明白的猜想,很容易引起学生的兴趣,教师可以指出,它的研究难度,有数学家作了比喻:想用初等数学的方法证明哥德巴赫猜想,就如骑自行车上月球,是不可能实现的。因此,想要研究它,必须不断学习,掌握更多的数学知识。

(3) 引导学生总结、交流学习收获。

可以先让学生自由表达,教师再从概念、方法、学习过程等方面引导学生加以总结。还可以让学生说说,课本上两个同学的感受,你有什么样的体会。

①从四张数字卡片0、3、4、5中选三张，组成三位数。实际上是一个“四选三”的“组合”问题。

第一步，“四选三”，它相当于“四去一”，因此共4种选择：

去掉卡片0，选3、4和5；

去掉卡片3，选0、4和5；

去掉卡片4，选0、3和5；

去掉卡片5，选0、3和4。

第二步，

选3、4和5，可以组成6个三位数345，354，435，453，534，543；

选0、4和5，可以组成4个三位数405，450，504，540；

选0、3和5，可以组成4个三位数305，350，503，530；

选0、3和4，可以组成4个三位数304，340，403，430。

所以一共可以组成18个三位数。

也可以这样想：百位上不能是0，可以是3、4、5，不论放其中哪一张，剩下三张卡片都能放在十位上，因此百位、十位有 3×3 种组成，不论其中哪一种，还剩两张卡片都能放在个位上，所以一共可以组成 $3 \times 3 \times 2$ 个不同的三位数。

②组成的三位数是奇数：先考虑奇数，个位选3或5；再组成三位数，百位、十位数字从剩下三张卡片中选，“三选二”有3种选法。

个位选3，另两个数字可选0和5，0和4，4和5；

个位选5，另两个数字可选0和3，0和4，3和4。

所以奇数有503，403，453，543，305，405，345，435，共8个。

组成的三位数是偶数：先考虑偶数，个位选0或4；再组成三位数，百位、十位数字从剩下三张卡片中选，“三选二”有3种选法。

个位选0，另两个数字可选3和4，3和5，4和5；

个位选4，另两个数字可选0和3，0和5，3和5。

所以偶数有340，430，350，530，450，540，304，504，354，534共10个。

组成的三位数是2的倍数，即偶数。

组成的三位数是5的倍数：先考虑5的倍数，个位选0或5；再组成三位数，百位、十位数字从剩下三张卡片中选，“三选二”有3种选法。

个位选0，另两个数字可选3和4，3和5，4和5；

个位选5，另两个数字可选0和3，0和4，3和4。

所以5的倍数有340，430，350，530，450，540，305，405，345，435共10个。

组成的三位数是3的倍数：先考虑3的倍数，可选0、4和5或3、4和5。

所以3的倍数有405，450，504，540，345，354，435，453，534，543共10个。

组成的三位数既是2的倍数，又是3的倍数：

可以从2的倍数中选3的倍数，或从3的倍数中选2的倍数，有450，540，504，354，

534 共 5 个。

也可以先考虑 2 的倍数，个位选 0 或 4。再考虑 3 的倍数：

个位选 0，另两个数字可选 4 和 5；

个位选 4，另两个数字可选 0 和 5，3 和 5。结果同上。

还可以先考虑 3 的倍数，可选 0、4 和 5 或 3、4 和 5。在组成三位数时考虑 2 的倍数，即将 0 或 4 放在个位，结果同上。

二、教学设计或教学片段

课题 1：3 的倍数的特征

教学设计：徐文艳。

教学内容：教科书第 10 页及第 11 页的第 3、4 题。

教学目标：

1. 经历探索 3 的倍数的特征的过程，理解 3 的倍数的特征。
2. 能判断一个数是不是 3 的倍数。
3. 培养合情推理的能力，积累观察、猜想、归纳等思维活动的经验。

教学重点：探索 3 的倍数的特征。

教学难点：归纳举证 3 的倍数的特征。

教学准备：多媒体，百数表（学生每人一张或两人一张）。

教学过程：

（一）复习导入

1. 复习。

前面我们研究过 2 和 5 的倍数，那它们各有什么特征呢？我们是怎么研究的呢？

引导学生回忆知识和研究的方法，并据学生回答板书：找数、观察、猜想、验证、归纳。

教师：判断是不是 2 和 5 的倍数，只要看什么？（个位数）

2. 导入。

今天我们要研究 3 的倍数的特征（板书课题）。

（二）探索与猜想，验证与归纳

1. 找出 3 的倍数。

（1）拿出课前发给大家的百数表，依次圈出 3 的倍数。（可以独立完成；或者同桌合作完成，一人动笔，一人帮着找；也可以两人分工，左右各找一半）

（2）观察圈出的数，有什么发现？

（3）前后桌四人小组交流发现。

2. 全班交流、讨论。

(1) 出示圈好的百数表。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

(2) 只看个位数行吗? 为什么?

横着看, 圈起的前 10 个数, 个位上 1~9 和 0, 十个数字都有:

3, 6, 9,

12, 15, 18,

21, 24, 27,

30

(3) 只看个位数不行! 看什么呢? 横着看、竖着看, 看不出规律, 还可以怎么看? (斜着看)
备用问题:

①斜着看, 你发现了什么?

②先看第一斜行: 3, 12, 21, 30; 第二斜行: 6, 15, 24, 33, 42, 51, 60。你发现了什么?

③十位数依次加 1, 个位数依次少 1, 什么不变? (和不变, 第一斜行都是 3, 第二斜行都是 6)

④继续观察, 其他斜行呢? 说说你的发现。

(4) 四人小组交流:

①说说的你发现与猜想, 3 的倍数的特征是什么, 大家同意吗?

②根据猜想, 每人各想一个符合猜想的数, 检验是不是 3 的倍数 (可用计算器)。

3. 归纳特征。

(1) 全班交流: 3 的倍数的特征是什么? 你们验证了哪几个数?

(2) 有没有同学发现反例: 各位上数的和是 3 的倍数, 但是这个数却不是 3 的倍数?

(3) 归纳 3 的倍数的特征。

(三) 巩固练习, 内化新知

1. 课本练习三第 3 题。

由学生独立圈一圈；检验，并说判断方法。

2. 课本第 10 页“做一做”。

(1) “第一问”独立判断，全班检验，并说判断方法。

(2) “第二问”独立思考，有困难同桌先交流，再全班交流。

(3) 拓展：增加的一张卡片还可以怎么放，放在其他位置上得到的这些不同三位数，都是 3 的倍数吗？为什么？

3. 小组合作练习。

教师：用圆片在数位表上摆数，各小组分别用 2, 3, 4, …, 9 个圆片摆，拿到几个圆片的小组，摆出来的数一定都是 3 的倍数？拿到几个圆片的小组，摆出来的数一定都不是 3 的倍数？

例如用 6 个圆片，摆出 231：

百	十	个
●●	●●●	●

4. 课本练习三第 4 题。

(四) 回顾、质疑、拓展

1. 今天通过探究获得了什么新知识？采用了什么样的研究方法？有什么体会？

2. 对于 3 的倍数的特征，还有什么疑问吗？

如有学生提出为什么各个数位上的和是 3 的倍数，这个数就是 3 的倍数呢？教师可结合教科书第 13 页“你知道吗？”适当说明或让学生结合第 13 页先自己尝试理解，再适时引导。

3. 你能用今天所学的研究方法研究其他数的倍数的特征吗？（出示课后探究作业）

研究问题：9 的倍数有什么特征？

研究方法：找数、观察、猜想、验证、归纳。

研究工具：百数表、计算器等。

4. 布置其他作业（略）。

课题 2：两数之和的奇偶性

教学设计：沈明芳。

教学内容：教科书第 15 页例 2 及第 16 页第 4 题。

教学目标：

1. 通过探究，知道两数之和的奇偶性。

2. 能借助几何直观，认识两数之和奇偶性的必然性。

3. 培养探究能力，积累观察、猜想、归纳等思维活动的经验，丰富解决问题的策略。

教学重点：在探索两数之和奇偶性的过程中渗透解决问题的策略。

教学难点：认识两数之和奇偶性的必然性。

教学准备：多媒体课件或磁性正方形教具，两种颜色的小正方形各 10 个（可同桌两人合用一套）。

教学过程：

(一) 激趣导入

1. 复习概念，引入图示。

(1) 说说什么样的数是偶数、奇数？

(2) 偶数是2的倍数，也就是除以2余数是几？奇数呢？

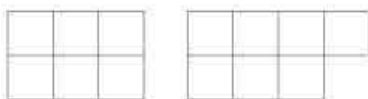
(3) 偶数可以用字母表示为 $2n$ (n 是自然数)，奇数呢？($2n+1$)

(4) 偶数、奇数在日常生活中又叫什么数？(双数、单数)

“双”是什么意思？(一对一对，成双成对)

(5) 用1个小正方形表示1，一个接一个摆成两行，偶数总能摆成一个什么图形？奇数呢？

例如6和7：



2. 游戏导入。

教师：我们一起来玩一个“快乐大转盘”的游戏。这个大转盘上有1~10，有奇数也有偶数。

(1) 游戏规则。

一个同学转，指针指着那个数，就加上这个数的本身。如果和是奇数，有大奖；如果和是偶数，就没有奖。

(2) 学生尝试，老师分两列(奇数+奇数、偶数+偶数)板书算式。

(3) 怎么还没人得到大奖啊？这是什么道理呢？有的同学已经有了猜想，和不可能是奇数，看来奇偶数加法运算中蕴含着规律，今天我们就一起来探寻“两数之和的奇偶性”(板书课题)。

(二) 探索与猜想，验证与归纳

1. 明确探究的问题。

刚才做游戏，一个数加上它本身，只有两种情况，偶数+偶数，奇数+奇数。要全面研究，还有什么情况？板书：

偶数+偶数= 奇数+奇数= 偶数+奇数=

追问：为什么“奇数+偶数”不用研究？(根据加法交换律，和相等)

2. 用自己想到的方法探究两数之和的奇偶性。

提示：可以用举例的方法得出结论，也可以用小正方形拼一拼、想一想，为什么是这个结论。可以独立完成，或者同桌合作。注意作好记录。

3. 全班交流、讨论。

(1) 请用举例方法的同学介绍。教师加以板书，如：

偶数+偶数= 奇数+奇数= 偶数+奇数=

$8+12=20$ $5+7=12$ $8+5=13$

$12+24=36$ $7+9=16$ $6+9=15$

.....

.....

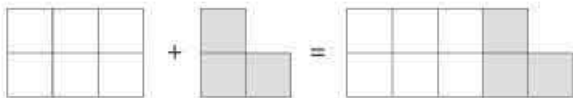
.....

教师：通过举例，得出什么结论？

(2) 请用小正方形拼摆的同学介绍。

学生在实物投影仪上介绍，教师在黑板上用磁性教具演示，或用课件演示。

例如，偶数+奇数的演示：



教师：通过拼摆，使我们确信结论是正确的。这种方法称作“数形结合”。

(3) 谁能用偶数、奇数除以2的余数来解释这些规律？（如果学生有困难，可以指导学生看书自学）

学生反馈，交流。

(4) 尝试用字母表示数说明。

如果用 $2n$ 、 $2m$ 表示两个偶数（ n 、 m 是自然数），它们的和会怎样？试试看。

$$2n+2m=2(n+m),$$

因为 $(n+m)$ 是自然数，所以 $2(n+m)$ 一定是2的倍数。

有兴趣的同学课后可以用字母表示数，试试怎样说明其他两种情况。

(5) 归纳结论。

将板书补充完整：

偶数+偶数=偶数 奇数+奇数=偶数 偶数+奇数=奇数

再问：有没有那个同学的举例不符合这些规律的？能不能举出反例？

(6) 现在你能解释“快乐大转盘”游戏，为什么不会出现大奖了吗？

(三) 巩固练习，内化新知

1. 探究两数之差的奇偶性。

(1) 独立尝试。

(2) 全班交流，归纳结论。

(3) 联系加减法的关系思考。（如：因为奇数+奇数=偶数，所以偶数-奇数=奇数）

(4) 这些规律需要背吗？忘记了怎么办？

2. 填空。

(1) 奇数+偶数=（ ） 奇数-偶数=（ ）

(2) 偶数+偶数+偶数=（ ） 奇数+奇数+奇数=（ ）

(3) 10个偶数相加的和是（ ），10个奇数相加的和是（ ）。

3. 小明爸爸、妈妈今年岁数的和是奇数，几年后小明爸爸、妈妈岁数的和是奇数还是偶数？（奇数。因为每过一年，两人的岁数和都增加2。）

(四) 回顾、小结

1. 今天通过探究获得了什么新知识？采用了什么样的研究方法？有什么体会？

2. 还想研究什么问题?

布置课后探究作业: 练习四第 4 题。

三、备课资料

1. 和、差的整除性^①

定理 1 如果两个数都是同一个正整数的倍数, 那么它们的和 (或差) 也是这个正整数的倍数。

如果 $b \mid a_1, b \mid a_2, (a_1 > a_2)$ 那么 $b \mid (a_1 \pm a_2)$ 。

证明: $\because b \mid a_1, b \mid a_2$, 必存在整数 q_1, q_2 , 使得 $a_1 = bq_1, a_2 = bq_2$ 。

因此 $a_1 + a_2 = bq_1 + bq_2 = b(q_1 + q_2)$ 。

且 $q_1 + q_2$ 也是一个整数。

$\therefore b \mid (a_1 + a_2)$ 。

同理可证 $b \mid (a_1 - a_2)$ 。

推论 如果若干个都是同一个正整数的倍数, 那么它们的和也是这个正整数的倍数。

如果 $b \mid a_1, b \mid a_2, \dots, b \mid a_n$,

那么 $b \mid (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ 。(证明从略)

定理 2 如果两个数中的一个数是一个正整数的倍数, 那么这两个数的和 (或差) 是这个正整数的倍数的充要条件是: 另一个数也是这个正整数的倍数。

如果两个数是 $a, b (a > b)$, 并且 $d \mid a$,

那么 $d \mid (a \pm b)$ 的充要条件是 $d \mid b$ 。

证明:

(1) 证明条件的充分性。就是要证明: 当 $d \mid a$ 时, 如果 $d \mid b$, 那么 $d \mid (a \pm b)$ 。

$\because d \mid a, d \mid b$,

由定理 1 可得 $d \mid (a \pm b)$ 。

(2) 证明条件的必要性。就是要证明: 当 $d \mid a$ 时, 如果 $d \mid (a \pm b)$, 那么 $d \mid b$; 或证明当 $d \mid a$ 时, 如果 $d \nmid b$, 那么 $d \nmid (a \pm b)$ 。

$\because d \mid a$, 且 $d \mid (a \pm b)$,

由定理 1 可得 $d \mid (a + b - a)$ 和 $d \mid [a - (a - b)]$ 。

$\therefore d \mid b$ 。

2. 2 或 5、4 或 25、3 或 9 的倍数的特征

如果具有某个条件的数, 都是正整数 b 的倍数, 反过来, b 的倍数都具有这个条件, 那么

^① 除“筛法”, 其他都摘自《基础数学》, 北京: 人民教育出版社 2012 年版。

这个条件就叫做 b 的倍数的特征。也就是说，这里的“特征”是一种充要条件。因此，掌握了这个特征，不必计算除法，就能确定一个数是 b 的倍数。

(1) 2 或 5 的倍数的特征。

2 或 5 的倍数的特征是：这个数的个位数是 2 或 5 的倍数。

证明：设整数 N 从个位起各位上的数字为 a_0, a_1, \dots, a_n ，那么

$$\begin{aligned} N &= a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= (a_n \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1) \cdot 10 + a_0 \end{aligned}$$

其中 $(a_n \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1) \cdot 10$ 是 2 的倍数，也是 5 的倍数，那么根据定理 2，如果 a_0 ，也就是 N 的末一位数是 2 或 5 的倍数， N 就是 2 或 5 的倍数。

(2) 4 或 25 的倍数的特征。

4 或 25 的倍数的特征是：这个数的末两位数是 4 或 25 的倍数。

证明：设整数 N 从个位起各位上的数字为 a_0, a_1, \dots, a_n ，那么

$$\begin{aligned} N &= a_n \cdot 10^n + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= (a_n \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2)10^2 + (a_1 \cdot 10 + a_0) \end{aligned}$$

其中 $(a_n \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2)10^2$ 是 4 的倍数，也是 25 的倍数，那么根据定理 2，如果 $(a_1 \cdot 10 + a_0)$ ，也就是 N 的末两位数是 4 或 25 的倍数， N 就是 4 或 25 的倍数。

(3) 3 或 9 的倍数的特征。

3 或 9 的倍数的特征是：这个数的各数位上的数的和是 3 或 9 的倍数。

证明：设整数 N 从个位起各位上的数字为 a_0, a_1, \dots, a_n ，那么

$$\begin{aligned} N &= a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= [a_n \cdot (10^n - 1) + \dots + a_1(10 - 1)] + (a_n + \dots + a_1 + a_0) \end{aligned}$$

$$\because 10^i - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{i \text{ 个 } 9}, \quad (i = n, n-1, \dots, 2, 1)$$

$$\therefore 10^i - 1 \text{ 是 } 3 \text{ 或 } 9 \text{ 的倍数。}$$

那么，根据定理 2，如果 $(a_n + \dots + a_1 + a_0)$ ，也就是 N 的各数位上的数字之和是 3 或 9 的倍数， N 就是 3 或 9 的倍数。

3. 质数的寻找

早在公元前 300 多年，古希腊数学家欧几里得就证明了质数有无数多个。

但是，由于数越大，发现质数就越困难，因此，目前人类已知的质数还是为数有限的。十七世纪法国费尔马 (Pierre de Fermat) 曾经猜测形如 $2^{2^n} + 1 (n \geq 0)$ 的数都是质数，其实这个猜测并不正确。例如，当 $n=5$ 时， $2^{2^5} + 1$ 就不是质数。但是费尔马的猜测却给了后人很大的启发，以后发现的大质数都与这个公式相近。1876 年，数学家卢卡斯发现了当时最大的质数 $2^{127} - 1$ ，是 37 位数，这个纪录保持了 75 年。直到 1951 年，由于电子计算机的出现，才发现了具有 79 个数位的更大质数 $180 \times (2^{127} - 1)^2 + 1$ ，此后，纪录不断被刷新。1979 年，美国劳伦斯·利莫费尔实验室的两位计算机专家发现的当时最大的质数是 $2^{44497} - 1$ ，这个数是

13395 位数。1994 年，英国的克雷研究公司使用超级计算机，发现了更大的质数 $2^{859433} - 1$ ，这个数是 258716 位数。

4. 筛法

筛法，是求不超过自然数 $n(n > 1)$ 的所有质数的一种方法。据说是古希腊的埃拉托斯特尼 (Eratosthenes, 约公元前 274~前 194 年) 发明的，又称埃拉托斯特尼筛子。

具体做法是：先把 n 个自然数按次序排列起来。1 不是质数，也不是合数，要画去。第二个数 2 是质数，留下来，而把 2 后面所有 2 的倍数都画去。2 后面第一个没画去的数是 3，把 3 留下，再把 3 后面所有 3 的倍数都画去。3 后面第一个没画去的数是 5，把 5 留下，再把 5 后面所有 5 的倍数都画去。这样一直做下去，就会把不超过 n 的全部合数都筛掉，留下的就是不超过 n 的全部质数。因为希腊人是把数写在涂蜡的板上，每画去一个数，就在上面记以小点，寻求质数的工作完毕后，这许多小点就像一个筛子，所以就把埃拉托斯特尼的方法叫做“埃拉托斯特尼筛”，简称“筛法”。(另一种解释是当时的数写在纸草上，每画去一个数，就把这个数挖去，寻求质数的工作完毕后，这许多小洞就像一个筛子。)

如图，就是用筛法找出的不超过 100 的所有质数。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

画去次序 第一次 \ 第二次 — 第三次 / 第四次 ○

5. 哥德巴赫猜想

200 多年前，德国数学家哥德巴赫 (Christian Goldbach) 提出一个命题：“凡大于 4 的偶数都可以表示成两个奇质数的和。”〔简称 $(1+1)$ ，即一个质数加一个质数的意思，如 $6=3+3$ ， $32=13+19$ ， $52=5+47$ ……〕但是，偶数的个数无限多，不可能把所有的偶数逐一列举出来加以验证。哥德巴赫想从理论上论证这个命题，但没有能够实现。1742 年，他请教了当时世界著名的大数学家欧拉，欧拉也没有能够证明。所以，哥德巴赫的这个发现只是个“猜想”，人们就称为“哥德巴赫猜想”。从此，这个未经论证的猜想就成为数论中的著名问题之一。两百多年来，无数的数学家企图用各种方法来论证“哥德巴赫猜想”。1920 年，挪威数学家布朗 (Brun) 迈出了有决定意义的一步。他证明了每一个充分大的偶数都可以表示为质因数都不超

过 9 个的两个数之和，简称(9+9)。1924 年，拉德马哈尔 (Rademacher) 证明了 (7+7)；1932 年，爱斯特尔曼 (Estermann) 证明了(6+6)；1938 年，布赫斯塔勃 (Бухштаб) 证明了 (5+5)，随后又证明了(4+4)；1957 年，苏联的维诺格拉多夫 (А. И. Виноградов) 证明了 (3+3)。哥德巴赫猜想的证明就是这样一步一步艰难地前进着。但是，这些证明结果都有一个共同的弱点，就是其中的两个数没有一个可以肯定为质数，而都是几个质数的积。1947 年，匈牙利数学家雷尼 (A. Rényi) 证明了每一个充分大的偶数都可以表示为一个质数与另一个不超过 R 个质因数的乘积的和，简称(1+ R)，这就开辟了证明哥德巴赫猜想的另一途径。但是，雷尼只证明了常数 R 是存在的，而等于多少却是未知的。到 1965 年，布赫斯塔勃、维诺格拉多夫和朋比利 (Bombieri) 等证明了(1+3)。

我国对“哥德巴赫猜想”问题的研究也有很长的历史。早在 20 世纪三十年代，华罗庚教授就开始了这项研究工作。新中国成立后，我国数学工作者华罗庚、王元、潘承洞、丁夏畦、尹文霖、陈景润等又推进了这一问题的研究，并取得了一定的成果。

1957 年，王元证明了(2+3)；1962 年，潘承洞证明了(1+5)；同年，王元和潘承洞又证明了(1+4)；1965 年，外国数学家证明了(1+3)，但是人们还是认为向(1+2)挺进是很困难的。1973 年，陈景润发表了一篇题为“大偶数表示为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和”的论文，简称(1+2)，把两百多年来悬而未决的“哥德巴赫猜想”的论证大大向前推进了一步，取得了世界领先地位，得到国内外数学家的高度评价，陈景润的发现也被誉为“陈景润定理”。

四、评价建议与评价样例

(一) 评价建议

本单元的学习内容主要是有关因数、倍数的概念，2、5 和 3 的倍数的特征。这些内容与本册后面将要学习的内容联系非常紧密。例如，不理解因数、倍数的含义，就不可能进一步理解公因数、最大公因数和公倍数、最小公倍数的含义，不掌握 2、5、3 的倍数的特征，就无法在约分、通分时运用这些特征。因此，为了发挥评价促进学习的增值作用，本单元的学习评价应重点关注所学概念的理解与倍数特征的掌握情况。

在以往的评价中，时常可见一些偏题。例如，有关 0 的概念判断：

- (1) 0 是任何非零自然数的倍数。 ()
- (2) 任何非零自然数都是 0 的因数。 ()
- (3) 0 是偶数。 ()

这些题目，尽管科学性没有问题，但既不适合用于练习，也不适合用于评价。如前所述，教材之所以从一开始就指出，本单元研究的内容一般不包括 0，是为了避免给后面的学习带来麻烦。既然做了这样的规定，就没有必要再纠缠于 0，人为地引起学生不必要的认知困惑。

(二) 评价样例

评价题的设计,可以参考课本练习中的题目样式,也可以略有变化。同时,还应注意设计问题情境,让学生应用所学知识解决实际问题或数学问题。下面提供部分评价样例。

1. 填空。

(1) 一个数的最小因数是(),最大因数是()。

(2) 12有()个不同的因数。

(3) 写出符合要求的最小三位数。

既是2的倍数,又是3的倍数:()

既是3的倍数,又是5的倍数:()

既是2和3的倍数,又是5的倍数:()

(4) 1~20各数中:有()个奇数,有()个偶数;有()个质数,有()个合数。

(5) 1~20各数中,既是奇数,又是合数的数是()和()。

2. 下面各题的四个答案中,只有一个是正确的,请将表示正确答案的字母填在括号里。

(1) 下面各组数中,()的第一个数是第二个数的倍数。

A. 16和6

B. 36和0.6

C. 6和36

D. 36和12

(2) 已知 $a \div b = c$ (a, b, c 都是大于0的自然数),那么下面各种说法,正确的是()。

A. a 是倍数

B. b 是因数

C. c 是因数

D. b, c 都是 a 的因数

(3) 下面各种说法,有()句是正确的。

①一个数的最小倍数是它本身。 ②一个数有无数个倍数。

③一个数的倍数大于他的因数。 ④一个数至少有两个因数。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

(4) $a+3$ 的和是奇数, a 一定是()。

A. 质数

B. 合数

C. 奇数

D. 偶数

3. 五年级有48名同学报名参加义务劳动。老师让他们自己分成人数相等的若干小组,要求组数大于2,小于10。可以分成几组?

4. 五(1)班6名同学去给小树苗浇水。小树苗不到30棵,他们发现每人浇水棵树相同。这批小树苗可能有多少棵?

5. 我们知道5有2个因数1和5,6有4个因数1,2,3,6。5和6的因数个数都是偶数。请你找出几个因数个数是奇数的数,你能发现什么?

第三单元 长方体和正方体

一、教材说明和教学建议

(一) 教学目标

1. 通过观察、操作，认识长方体和正方体的特征以及它们的展开图。
2. 通过实例，理解体积（包括容积）的含义，认识常用的度量单位（立方米、立方分米、立方厘米、升、毫升），建立 1 m^3 、 1 dm^3 、 1 cm^3 以及 1 L 、 1 mL 的表象，会利用单位间的进率进行简单的换算。
3. 探索并掌握长方体、正方体的体积和表面积的计算方法，并能解决一些简单的实际问题。
4. 探索某些实物体积的测量方法。

(二) 内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

学生在第一学段已经初步认识了一些简单的立体图形，能够识别出长方体、正方体、圆柱和球。本单元在此基础上系统教学长方体和正方体的有关知识。长方体和正方体是最基本的立体图形，通过学习长方体和正方体，可以使学生对周围的空间和空间中的物体形成初步的空间观念，是进一步学习其他立体图形的基础。另外，长方体和正方体体积的计算，也是形成体积的概念，掌握体积的计量单位和计算各种几何形体体积的基础。

本单元分三小节编排：长方体和正方体的认识，长方体和正方体的表面积，长方体和正方体的体积。在长方体和正方体的体积一节中，还介绍了容积的概念，并探索了某些实物体积的测量方法。具体编排结构如下（见下页）。

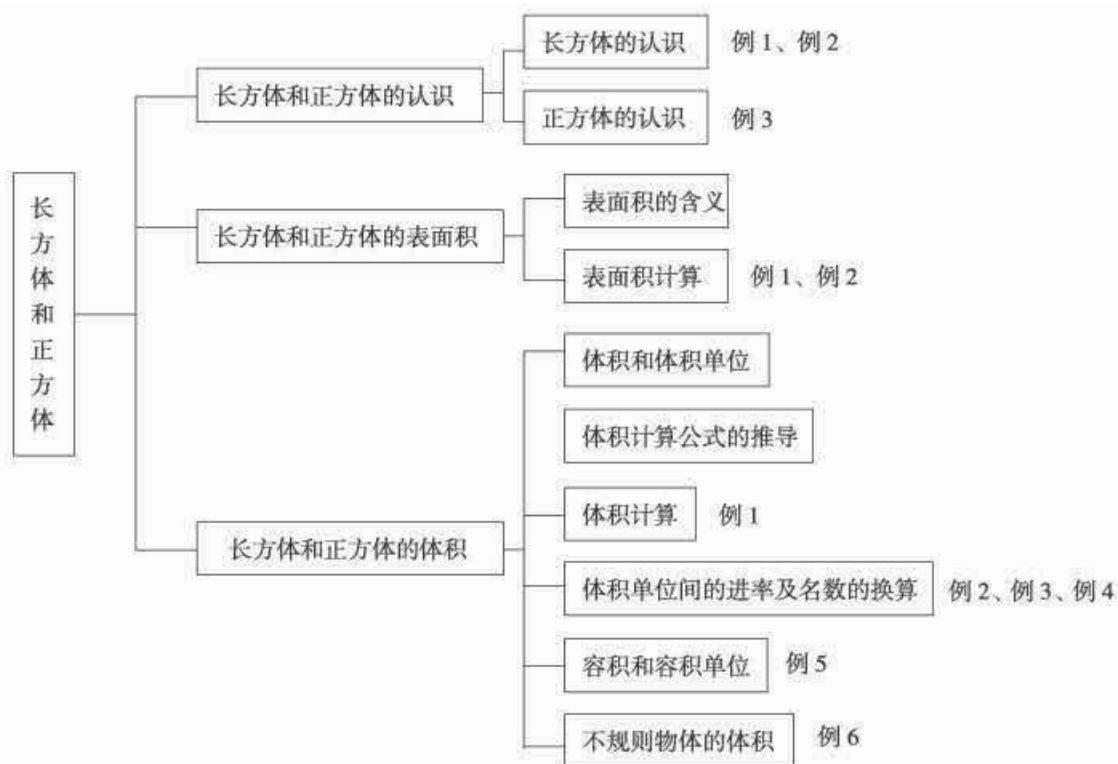
2. 教材编排特点。

(1) 注重与生活的紧密联系。

本单元非常重视与实际生活的联系，主要体现在以下几个方面。①图形的认识和概念的理解，结合学生熟悉的事物进行。如：长方体、正方体特征的认识，安排了让学生说出纸巾盒、魔方等实物的形状，指出其长、宽、高及棱长的练习；容积与容积单位的学习，则结合眼药水、果蔬汁、绿茶等帮助学生理解容积的含义并建立相应的容积单位的表象。②注重用所学的知识解决实际问题。本单元各部分知识的学习中，都注意学以致用。如在认识长方体、正方体时，设计了计算俱乐部四周要安多长的彩灯线、计算小卖部柜台需要多少米的角铁等练习；在学习表面积时，安排了大量根据具体情况计算物体表面积的练习。

(2) 重视对概念的理解。

事实上，基本概念的理解是掌握其他知识的基础。像表面积、体积的概念，就是学习长方



体、正方体的表面积和体积计算公式的核心和基础。并且，体积对学生来说是一个新概念，物体占有一定的空间对学生来说理解有一定的困难。为此，教材先通过学生熟悉的“乌鸦喝水”的故事，以形象、生动的方式，让学生初步感知物体占有空间。然后通过把石头放入有水的玻璃杯的实验，让学生进一步体验物体确实占有空间，为引出体积概念做充分的感知准备。在学习容积时，计算不规则物体的体积，让学生利用已建立的体积概念想到可以用排水法求得不规则物体的体积，加深对体积概念的认识。

(3) 加强动手操作、自主探索，让学生经历知识的形成过程。

本单元的概念、特征、计算方法等新知都是通过让学生动手操作、自主探索来学习的。如，体积单位，就是通过让学生回顾旧知、迁移类推引出来的。教材通过比较两个不容易看出大小的长方体的体积，让学生由比较物体的长度有统一的长度单位，由此引出体积单位。又如，长方体体积的计算方法，先让学生用 1 cm^3 的正方体拼摆出不同的长方体，通过对这些长方体相关数据的观察、分析和归纳，自己发现长方体体积与它的长、宽、高之间的内在联系，从而总结出长方体体积的计算公式。

(4) 重视空间观念的培养。

教材加强了空间观念培养的力，安排了一些将三维转换为二维、由立体图想象展开图、由立体图想象实物的练习。如：长方体的认识，安排了根据长方体判断给出的图形哪一个是长方体 6 个面中的一个的练习；认识表面积，设计了在展开图上找相对的面练习；体积教学中，安排了填出橡皮、影碟机、集装箱的体积单位、从生活中找出 1 m^3 、 1 dm^3 、 1 cm^3 的物

体等练习。这些练习，对于发展学生的空间观念都是十分有利的。

（三）教学建议

1. 整体入手，形成“立体图形”研究的基本思路。

长方体、正方体作为最基本的立体图形，是学生从二维空间转向三维空间学习的起始。教学时，可以通过长方体盒子的观察，得出什么是棱、什么是面，什么是顶点。在此基础上归纳出：一个立体图形可以从棱、顶点、面三个方面进行研究。由此，使学生形成关于立体图形研究的基本思路，今后可以迁移应用到其他立体图形的学习中。

2. 以概念理解为支撑点，探究计算公式，理解公式的意义。

本单元表面积、体积的概念，是学习长方体、正方体表面积、体积计算公式的基础。例如，表面积的计算方法，应着眼于对表面积概念的理解。长（正）方体的表面积指的是长（正）方体6个面的总面积。基于这样的前提，学生在自主探索表面积的计算方法时，可以把6个面相加，也可以根据长方体的特征，求出其中一组三个面的面积再乘2。从而引导学生理解“ $(ab+ah+bh)\times 2$ ”这一公式，不仅仅是乘法分配律的运用，还是图形特征的具体体现。

同样，体积计算公式的推导，也应着眼于体积概念的理解。求一个物体的体积，就是求这个物体中含有多少个体积单位。在此基础上，让学生用 1 cm^3 的正方体摆不同的长方体，通过观察长方形的体积与其长、宽、高的关系，推导出长方体的体积计算公式。并运用“每排的个数、排数、层数”来解释体积计算公式的含义，从而理解长方体的体积为什么是由“长 \times 宽 \times 高”，使学生知其然，并知其所以然。

3. 重视体积单位、容积单位表象的建立。

本单元体积单位、容积单位的认识，不仅要让学生理解单位的含义，更要关注实际表象的建立。既要让学生知道“棱长 1 cm 的正方体，体积是 1 cm^3 ”……也要让学生建立 1 cm^3 、 1 dm^3 、 1 m^3 、 1 L 、 1 mL 等单位的实际表象。同时，还应重视学生的活动体验。如，容积与容积单位的教学，可以通过将一瓶矿泉水倒在纸杯中，看看可以倒满几杯，估计几杯水大约是 1 L 等活动，体验 500 mL 、 200 mL 、 100 mL 、 1 L 的液体大约有多少，建立起容积观念。

4. 重视想象，将空间观念的培养目标贯穿始终。

本单元的学习，应以知识技能的学习为载体，将空间观念的培养贯穿始终。如，教学长方体的认识时，由教师提供的文字或图示信息，让学生根据信息想象相应的实物。如给出以下数据：“ $a=6\text{ cm}$ ， $b=6\text{ cm}$ ， $h=6\text{ cm}$ ”“ $a=20\text{ cm}$ ， $b=15\text{ cm}$ ， $h=1\text{ cm}$ ”“ $a=20\text{ cm}$ ， $b=15\text{ cm}$ ， $h=0.01\text{ mm}$ ”，引导学生想象：“可能是给出的哪个物体？这个长方体感觉怎样？”学生能进行数据与实物之间的转化，一定是基于他们在头脑中已经形成了关于形状、大小的清晰表象。

还可以设计如下的练习：

右图分别是一个长方体的正面和右面，这个长方体的底面积是（ ）平方厘米。这里没有直接给出长、宽、高，要求长方体的底面积，学生需要“由面想体”，



想象出长方体是怎样的形状，才能正确进行计算。

5. 注意着眼单元目标，整体把握教材。

教学时应整体把握教材，不只拘泥于一课时的知识技能目标，而是着眼整个单元。如，长方体、正方体的认识，可以为表面积的学习打下基础。表面积的计算，其难点是根据立体图，想象出每个面的大小。因此，在教学长方体、正方体的认识时，可以引导学生根据立体图形想象：长方体的正面长、宽各是多少？右面、下面的面积是多少？为表面积的学习积累感性认识。

长方体、正方体的体积、表面积计算教学，可以为圆柱的体积与表面积计算作适当的铺垫。如，将长方体、正方体体积公式沟通为“底面积 \times 高”，就为圆柱的体积计算作了很好的铺垫，还能广泛迁移于一般的柱体体积计算中。表面积的计算，除掌握基本公式之外，可以引导学生发现，也可用“侧面积+上下底面积”的方法来计算，而侧面积的计算，可以用“底面周长 \times 高”来计算，这样，也为后面学习圆柱的表面积计算作好了方法沟通的准备。

6. 建议用 12 课时教学。

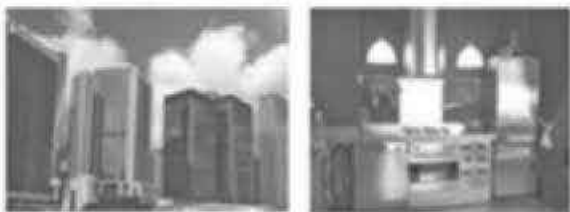
人教版®

（四）具体内容的教材分析和教学建议

3 长方体和正方体

1. 长方体和正方体的认识

我们周围许多物体的形状都是长方体或正方体（正方体也叫立方体）。



长方体



1 拿几个长方体的物品来观察，并将你的发现填在下页的表中。



编写意图

(1) 本小节主要教学认识长方体和正方体的特征。

(2) 主题图引导学生观察长方体、正方体形状的建筑物和生活用品，让学生感受到生活中很多物体的形状都是长方体和正方体的，为进一步研究长方体、正方体的特征作准备。

(3) 接下来，首先由实物图抽象出几何直观图，并介绍长方体的各部分名称：面、棱、顶点。“面”采用直观认识的方式，“棱”与“顶点”则分别用描述进行定义：棱是指面和面相交的线段；顶点是指棱和棱的交点。

(4) 例1重点研究长方体的特征。引导学生观察长方体物品，通过看一看、量一量、比一比、数一数等方式引导学生从面、棱、顶点三个角度去观察、分析，在学生观察、讨论、交流的基础上初步概括出长方体的特征。

教学建议

(1) 关注已有知识经验，突出重点。

学生在前面已经直观认识了长方体和正方体，能通过实物或模型辨认长方体和正方体，对它们的明显特征有一定的了解，如：正方体的6个面都是正方形；长方体有6个面，每个面都是长方形……在生活中也积累了大量关于长方体、正方体的直观经验。教学中，应激活经验，回顾特点，了解起点。同时引导学生进一步验证，概括长方体、正方体有关面、棱和顶点的特点。特别是，为了后面进一步的学习，将“棱”的研究作为教学重点。

(2) 设计有利于特征探索 and 空间观念培养的材料与活动。

让学生以小组为单位做一个长方体的盒子和一个长方体的框架。首先，为学生提供大小不同的长方形，长度不一的小棒若干，橡皮泥或其他接头若干个。接下来，让学生经历观察、操作、交流的活动过程。在操作前，先思考：“做成一个长方体，对面、棱、顶点这三方面有哪些要求？”“为什么选择这些材料？”在讨论的基础上再进行操作。

操作活动后，应选择正例、反例、一般的长方体（六个面是长方形）、特殊的长方体（有两个面是正方形）进行反馈。

编写意图

(1) 教材利用表格帮助学生梳理长方体的特征,包括面、棱长和顶点的特征。在此基础上,概括长方体的概念:长方体是由6个长方形围成的立体图形,并指出特殊情况有两个相对的面是正方形。进一步概括长方体相对的面完全相同,相对的棱长度相等。

(2) 例2重点研究“棱”的特征。通过用细木条和橡皮泥制作一个长方体框架的活动,让学生发现长方体棱的特征:12条棱一般可以分成3组,每组4条,长度相等;相交于同一个顶点的3条棱一般情况下长度不相等。由此引出长、宽、高的概念。

(3) “做一做”让学生用本书附页中的图样制作长方体模型,加深对长方体特征的认识。同时,第(3)题通过测量长方体的长、宽、高,为后面表面积和体积的学习作准备。第(4)题和前面学习的观察物体相呼应,从一个方向最多只能看到长方体的三个面。

- | | |
|------------------|-------------------|
| (1) 长方体有_____个面。 | (4) 长方体有_____条棱。 |
| (2) 每个面是什么形状的? | (5) 哪些棱长度相等? |
| (3) 哪些面是完全相同的? | (6) 长方体有_____个顶点。 |

通过以上的观察和讨论可以知道,长方体一般是由6个长方形(特殊情况有两个相对的面是正方形)围成的立体图形。在一个长方体中,相对的面完全相同,相对的棱长度相等。

2 用细木条和橡皮泥做一个长方体框架。



根据制作过程,回答下面的问题。

- (1) 长方体的12条棱可以分成几组?
- (2) 相交于同一顶点的3条棱长度相等吗?

相交于一个顶点的三条棱的长度分别叫做长方体的长、宽、高。



做一做

剪下本书附页中上页的图样,按图来做。

- (1) 把图样中完全相同的长方形涂上同样的颜色。
- (2) 用这个图样做一个长方体。
- (3) 量一量所制长方体的长、宽、高各是多少厘米。
- (4) 观察这个长方体,最多能看到几个面?

教学建议

(接上页)通过这样的活动,不仅有利于学生对长方体的面、棱、顶点的特征的探索与梳理,同时对学生空间观念的发展也是大有裨益的。

(3) 关注长方体面、棱、顶点之间关系的理解。

大多数学生会探究面、棱、顶点各自的特征,但对这几者的特征把握,往往是表面的,孤立的。教学时,可适当关注到这三者之间的联系。如:“面和面相交产生棱”“任何一个面的长和宽与相邻的面的一条边相等”“相交于

同一顶点的三条棱为长、宽、高,这三条棱的长度决定了长方体的大小”“长方体的棱发生变化时,面的大小也随之改变”,等等。此外,教师还可以提供长、宽、高三条棱已知的长方体,引导学生思考:“如果长方体的长变化,会引起面的变化,哪些面变了?哪些面没变?”“同样,宽变化会引起哪些面的变化,哪些面没变?”等。从而体会“棱的长短变化引起面的大小变化”。

这样的交流能帮助学生更好地理解长方体的特征,同时也能培养学生的空间观念。

正方体

3 拿一个正方体的物品来观察,并将小组同学的发现填在下表中。

- (1) 正方体的6个面_____。
(2) 正方体的12条棱_____。



通过观察可以知道,正方体是由6个完全相同的正方形围成的立体图形,所有的棱长度相等。

将下本书附页中下面的图样做一个正方体,再量出它的棱长是多少厘米。

正方体和长方体有哪些相同点?有哪些不同点?



长方体和正方体都有6个面,8个顶点——



正方体是特殊的长方体,所以——

正方体的棱长都相等,长方体相对的棱——

正方体是长、宽、高都相等的长方体,我们可以用右图来表示长方体和正方体的关系。



做一做

用棱长1cm的小正方体搭一搭。

- (1) 搭一个稍大一些的正方体,至少需要多少个小正方体?动手试一试。
(2) 用12个小正方体搭一个长方体,可以有几种不同的搭法?记录搭出的长方体的长、宽、高。
(3) 搭一个四个面都是正方形的长方体,你发现了什么?

教学建议

(1) 可将正方体与长方体进行整合教学。

根据“正方体是特殊的长方体”这一关系,可以将正方体融于长方体的教学中,引导学生观察长方体物品(包括正方体),抽象出长方体的特征。让学生体会正方体具有长方体的所有特征,然后进一步思考其特殊性,得出正方体“6个面相同、12条棱相等”的特征。随后,适时用集合图表示出两者的关系。如此,学生对于“正方体是特殊的长方体”有更深的体会。

(2) 重视讨论交流,巩固对特征的认识。

(1) 例3教学正方体的特征。教材编排同长方体的认识,先让学生观察正方体物品,概括出正方体的特征。并指出正方体是由6个完全相同的正方形围成的立体图形。

接下来,让学生用本书附页提供的图样制作正方体模型,加深对特征的认识。同时也为学习表面积作准备。

(2) 小精灵提示学生比较长方体与正方体的相同点和不同点,揭示它们之间的关系。

教材引导学生从面、棱、顶点来比较长方体和正方体,发现它们的异同点,并揭示出正方体可以看成是长、宽、高都相等的长方体。最后用集合图的形式帮助学生理解它们的关系。

(3) “做一做”第(1)题,进一步巩固正方体特征。第(2)题,为体积的学习积累相应经验,体会所搭成的长方体中小正方体的个数与长、宽、高有关。第(3)题加深对长方体、正方体特征及关系的认识。如果四个面都是正方形的长方体一定是正方体,培养学生的想象、推理能力。

“做一做”的教学,不要仅停留于操作层面。搭一搭之后,为了巩固特征,可进一步讨论与思考。如第(3)题,引导学生分以下几个层次思考:①如果两个面是正方形,其他的面有什么特点?(其余四个面形状大小必须完全相同,并且长或者宽一定与正方形边长相等。)②如果四个面是正方形,其余两个面有什么特点?(其余两个面也一定是正方形,搭成的一定是一个正方体。因为其余两个面的四条边相等,从而得出六个面都是正方形。)

编写意图

(1) 第1题主要巩固长方体“面”的特征。由“体”想“面”，一方面培养学生的空间观念，另一方面，为表面积的学习奠定基础。前两题顺向思考正面、右面的形状，第(3)题逆向思考哪些面长是24 cm、宽是12 cm。

(2) 第2题主要巩固长方体“棱”的特征。根据棱的特点，可得出“12条棱的长度=长×4+宽×4+高×4=(长+宽+高)×4”。

(3) 第3题讨论长方体“棱”的位置关系，引导学生发现“相对的棱不仅长度相等，而且平行”“相邻的棱互相垂直”“相交于一点的两条棱两两互相垂直”等。

(4) 第4题巩固正方体的概念与特征。第5题巩固长、宽、高概念，同时，重视动手能力的培养。

(5) 第6题是巩固长方体棱的特征的实际问题，要将“需要多长的彩灯线”这一问题转化为“求部分棱长的和”。以此巩固长方体的长、宽、高与各个面长、宽的关系。

练习五

- (1) 这个纸巾盒的正面是什么形状？长和宽各是多少？和它相同的面是哪个？

(2) 它的右面是什么形状？长和宽各是多少？和它相同的面是哪个？

(3) 哪几个面的长是24 cm，宽是12 cm？



- 一个长、宽、高分别为40 cm、30 cm、20 cm的小纸箱，在所有的棱上贴上一圈胶带，至少需要多长的胶带？



- (1) 和 a 平行的棱有几条？

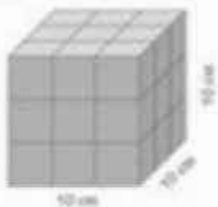
(2) 和 a 相交并垂直的棱有哪几条？

(3) 和 b 平行的棱有几条？

你发现什么？



- 这个魔方是什么形状的？它的棱长是多少？有几个面的形状完全相同？



- 从生活中找一个长方体或正方体的物品，量一量它的长、宽、高各是多少。



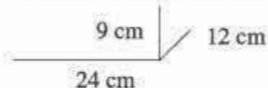
为迎接“五一”国际劳动节，工人叔叔要在工人俱乐部的四周装上彩灯（地面的四边不装）。已知工人俱乐部长90 m，宽55 m，高22 m。工人叔叔至少需要多长的彩灯线？

教学建议

- 适当进行变式练习。

根据教材习题，适当进行变式。如，第1题的教学，可继续进行以下讨论。①进一步思考，有哪几个面长是24 cm？有哪几个面宽是9 cm？②将长方体纸巾盒抽象成只有三条棱的示意图（如下图），计算立体图中指定面的面积。

- 下面长方体每个面的面积分别是多少？



- 关注思维过程。

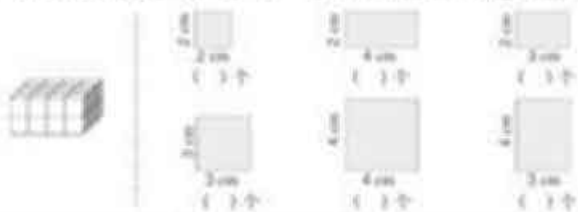
习题教学，不应仅满足于结论的得出，更应关注学生思维过程。如，第3题，要重视想象与推理。引导学生想象“和 a 平行的棱有几条，和 b 平行的棱有几条，分别是哪几条？”从而得出“相对的棱互相平行”的结论。由“和 a 垂直的棱有哪几条”，从而发现“相交于一个顶点的三条棱互相垂直”。

第6题，解决的方法是多样的。既可以用“各条棱相加”的方法，也可以用“棱长总和—地面四条棱”的方法。

7. 小亮打算做一个长2.2 m、宽40 cm、高80 cm的玻璃柜台。现在要在柜台各边都安上角铁，至少需要多少米的角铁？



8. 下面是用棱长1 cm的小正方体拼成的长方体。右面的图形哪一个是这个长方体6个面中的一个？用“√”标出来，并说明有几个这样的面。



9. 正方体的6个面分别写着A、C、D、E、F、I。与A、E、I相对的面分别是哪个面？



几何学和欧几里得

几何学是数学学科的一个重要分支，它源于土地测量等实际需要。

古希腊数学家欧几里得被称为“几何之父”，他的著作《原本》在数学发展史上有着深远的影响。该书从17世纪开始传入我国。



欧几里得

你知道吗？

编写意图

(1) 第7题是求长方体“棱长和”的实际问题。其中已知条件给出的长度单位是不同的，要化成相同的单位后再计算。

(2) 第8题与第1题类似，只是将实物图变为立体图形。让学生在“体”中找“面”，进一步发展空间观念，同时感受每个面与长、宽、高的关系，为表面积计算打基础。

(3) 第9题，旨在发展推理能力与空间观念。答案是：A—C，D—I，E—F。通过正方体的水平逆时针转动，可以观察到正方体的侧面是A、E、F、C，那么底面就是D，所以I和D是相对的面。同时，正方体水平转动两次，相对的两个面互换了位置，所以可以得出A和C是相对的面。同样，E和F是相对的面。如果学生无法直观判断，可以借助正方体实物对照书上的图转一转，进行判断。

(4) “你知道吗？”介绍了几何学的发展历史。教材提供了线索，如果学生有兴趣可查阅相关资料。

教学建议

(1) 从“由体想面”向“由面想体”拓展。

第1题、第8题都是根据“立体”想“平面”。可适当增加根据平面想立体的练习。如：利用第8题的素材，将右面6个长方形图分别编上序号，让学生想象：如果用①号边长是2 cm的正方形作为长方体的左面，用②号边长2 cm、宽4 cm的长方形作为长方体的底面，那么，这个长方体的正面面积是多少？如果用②号作长方体的正面，⑤号边长是4 cm的正方形作长方体的底面，这个长方体的右面长、宽分别是多少？通过这样的想象练习，帮助学

生更好地建立空间观念。

(2) 设计“根据信息进行想象”的活动。

由几何图形想象出实物的形状，是空间观念的表现之一。当学生认识了长方体、正方体，知道长、宽、高后，可设计如下练习：讲台上有很多实物，老师选择了其中一个并画出它的三条棱，长21 cm、宽15 cm、高1 cm。请你想象一下，老师画的是哪个物体？这个问题既有“形状”的想象，又有“大小”的估计，学生在猜测和验证中找到实物——数学书。这样的活动可同桌进行，一人描述、一人猜测，让学生在想象活动中发展空间观念。

编写意图

(1) 本小节首先教学长方体和正方体的展开图和表面积,例1教学长方体的表面积计算,例2教学正方体的表面积计算。

(2) 教材把长方体和正方体的展开图与表面积的概念教学相结合,引导学生动手操作,加强几何直观。教材先将长方体或正方体纸盒沿棱剪开,再展开。然后,在展开后的图形上,分别标上“上”“下”“前”“后”“左”“右”。这样,便于把展开后的每个面与展开前每个面的位置对应起来,更清楚地看出长方体相对的面的面积相等,每个面的长和宽与长方体的长、宽、高之间的关系,为继续学习长方体的表面积计算做好准备。在此基础上,概括出表面积的含义。

(3) “做一做”通过辨认正方体的展开图,培养学生的想象能力和空间观念。同时让学生知道,正方体的展开图不是唯一的。答案是前两个能围成正方体,最后一个不能。

2. 长方体和正方体的表面积

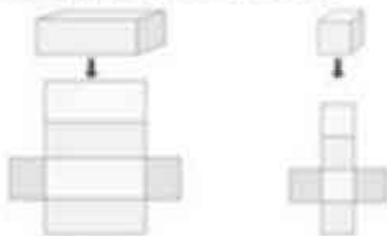
把一个长方体或正方体的纸盒展开是什么形状的呢?

请认真观察!

我展开了一个长方体的纸盒。

长方体展开后是这样的。

把长方体和正方体的各个面分别展开,如下图。



请在上面的展开图中,分别用“上”“下”“前”“后”“左”“右”标明各个面。

观察长方体展开图,回答下面的问题。

- (1) 哪些面的面积相等?
- (2) 每个面的长和宽与长方体的长、宽、高有什么关系?

做一做

观察后,哪些图形能围成正方体?在括号中画“√”。



教学建议

- (1) 建立“表面积”的一般意义。

学生在三年级已学过“面积和面积单位”,对于表面积的理解,五年级学生不会觉得陌生。所以教学时,可突破“先理解概念,后计算表面积”的一般程序。先让学生利用已有经验,自主解决长方体包装箱需要多少平方米硬纸板、长方体礼物需要多少平方分米包装纸等问题。学生计算出长方体6个面的面积之和后,引出表面积的概念,即“长方体6个面的总面积,就是它的表面积”。理解长方体、正方体的表面积后,教师可进一步拓宽表面积的概念,

任何几何体外表面的面积之和就是它的表面积,建立表面积的一般意义。

- (2) 重点研究正方体的展开图。

对于哪些图形能围成正方体,有的学生可能会感到十分困难。教学时,可引导学生在头脑中以某个正方形作底面进行折叠想象,还可以用正方体学具实际操作验证。

也可以引导学生讨论:正方体展开图一共有几种情况。通过操作、想象、讨论,发现,正方体展开图共有11种,大致可分为四类(见第81页)。在这个过程中,不是仅得出结论,应仍然以想象为基本活动,积累想象和推理的思维经验,发展空间观念。

长方体或正方体6个面的总面积,叫做它的**表面积**。
 日常生活和生产中,经常需要计算一些长方体或正方体的表面积。

1 做一个微波炉的包装箱,至少要用多少平方米的硬纸板?



这里要求的是这个长方体包装箱的表面积。

上、下每个面,长____,宽____,面积是____;
 前、后每个面,长____,宽____,面积是____;
 左、右每个面,长____,宽____,面积是____;
 表面积: _____

说一说,你是怎样计算的?

2 一个正方体墨水盒,棱长为6.5 cm,制作这个墨水盒至少需要多少平方米的硬纸板?



至少用多少平方厘米的硬纸板,就是要求什么?自己试一试!

做一做

花花家要做一个长0.75 m,宽0.5 m,高1.6 m的简易衣柜布罩(如图,没有底面),至少需要布料多少平方米?



34

编写意图

(1) 例1教学长方体的表面积计算。教材以制作微波炉包装箱需要的硬纸板为任务,引导学生根据表面积的意义,将实际问题转化为求6个面的总面积。这里突出根据长方体的长、宽、高来确定各个长方形面的长和宽。

(2) 为避免计算过于机械,教材没有总结长方体表面积的计算公式,学生可以用自己喜欢的方法进行计算。

(3) 在例1的基础上,例2启发学生根据正方体的特征,探索正方体表面积的计算方法。

(4) “做一做”是解决实际问题的练习。实际生活中,经常遇到不需要算出长方体6个面的总面积的情况。如,制作没有盖的鱼缸、粉刷房间的墙壁等。这就需要根据具体情况具体分析,明确应该计算哪几个面的面积,培养解决实际问题的能力。

教学建议

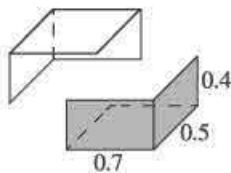
(1) 基于问题学习,主动探索方法。

“基于问题学习”,就是要把数学知识的学习与真实的问题情境联系起来,将知识学习、方法探究和解决问题三者统一。教学中可以分为三个阶段:提出问题——“包装箱至少需要多少平方米硬纸板?”学生在理解问题时,主动思考数学知识和解决问题之间的联系,构建“表面积”的意义。探索方法——如何求出6个面的面积之和。由于学生的思考角度不同,会选用不同的方法进行计算,通过交流、比较,理解各种算法。解决问题——联系实际,

灵活应用。呈现生活中不同类型的实际问题,让学生根据不同的情况,确定要算哪些面的面积。

(2) 沟通不同算法,赋予几何意义。

例1表面积的计算,方法一: $0.7 \times 0.5 \times 2 + 0.7 \times 0.4 \times 2 + 0.5 \times 0.4 \times 2$,方法二: $(0.7 \times 0.5 + 0.7 \times 0.4 + 0.5 \times 0.4) \times 2$ 。教学中,不仅从乘法分配律的角度沟通两种算法的联系,而且赋予了每种方法的几何意义。右图是对方法二的几何解释,进一步突出“对面相等”的特征。



编写意图

(1) 第1题、第2题是关于长方体、正方体展开图的巩固练习。第1题是在长方体展开图中找相对应的棱，第2题是在正方体展开图中找相对应的面。学生要在头脑中形成折或展的表象，且折的方法可以不同。

(2) 第3题是长方体表面积计算的基础题，计算长方体某个面的面积。使学生在解决问题的过程中，经历立体图、平面图之间的转换，培养空间观念。

(3) 第4题、第5题是关于长方体表面积计算的实际问题。第4题要求6个面的面积。第5题只需求长方体4个面的面积，即侧面积。

(4) 第6题是正方体表面积与棱的特征的实际应用。第(1)题求表面积，第(2)题求正方体的棱长和。

练习六

- 在展开图上找出相对的面，并标上上、下、前、后、左、右标出，再用 a 、 b 、 c 标出每条棱。
- 将这个展开图围成正方体后，哪两个面分别相对？



面一和____
面二和____
面三和____

3.



- 计算各长方体中正面的面积。
- 计算各长方体中右侧面的面积。
- 计算各长方体中上面的面积。

- 光学街口买了一个新的长方体铁皮邮箱，长50 cm，宽40 cm，高78 cm。做这个邮箱至少需要多少平方厘米的铁皮？

- 一个长方体的饼干盒，长10 cm，宽6 cm，高12 cm。如果围着它贴一圈商标纸（上、下面不贴），这张商标纸的面积至少有多少平方厘米？

6.

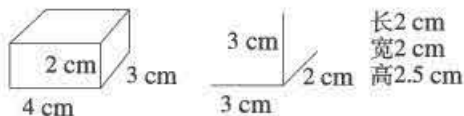


- 中队委员把一个棱长46 cm的正方体纸盒的各面都贴上红纸，将它作为给希望小学捐款“爱心箱”。
- 他们至少需要多少平方厘米的红纸？
 - 如果只在棱上贴粘胶带纸，一卷长4.5 m的胶布够用吗？

教学建议

(1) 增加抽象程度，增强想象要求。

根据学生的能力水平，基础较好的班级，教学第3题时，可以将教材提供的三个立体图，换成全图、半图、无图的形式，再提出“计算正面、右面、上面的面积”的要求。如：



随着图的抽象程度的提高，对学生想象能力的要求也逐渐加强。

(2) 淡化公式，倡导方法多样。

第5题的练习，为学生多样化的解决策略提供了空间。方法可以是多样的。方法一：四个面相加；方法二：两组面相加， $10 \times 12 \times 2 + 6 \times 12 \times 2$ ；方法三：侧面展开成长方形， $(10+6) \times 2 \times 12$ 。教学时，可借助图示，理解每一步分别表示哪个面的面积。方法三可借助实物展开图或多媒体课件，理解为什么展开后的长方形，“长”相当于长方体的“底面周长”，“宽”相当于“长方体的高”，从而体会“侧面积=底面周长 \times 高”，为今后与圆柱侧面积计算方法沟通作好准备。让学生在理解方法原理的基础上掌握表面积计算方法。

编写意图

(1) 第7题是巩固长方体、正方体表面积计算的练习,旨在加强基础练习,形成技能。

(2) 第8~12题,是解决长方体或正方体表面积的实际问题。需要根据实际情况,确定计算哪几个面的总面积。以此培养学生具体问题具体分析的能力。

(3) 第12题是计算组合图形的表面积问题。首先要使学生明确:计算组合图形的表面积,两个图形重叠部分的面积不能算在表面积之内。

(4) 第13题是表面积计算的拓展题。可以让学生分别计算出长方体和2个正方体的表面积,再比较它们的表面积,看有什么变化。通过比较,学生会了解到:截完后,增加了两个截面,每个面的面积都与左(或右)侧面的面积相同,因此增加的表面积就是 $4 \times 4 \times 2 = 32$ (cm^2)。这一结论,也允许空间观念比较强的学生通过想象获得。

7. 先判断给出的物体是正方体还是长方体,再计算表面积。

长	宽	高	表面积
15 cm	15 cm	10 cm	
12 m	12 m	12 m	
13 dm	12 dm	10 dm	

8. 一个玻璃鱼缸的形状是正方体,棱长3 dm。制作这个鱼缸时至少需要玻璃多少平方分米?(上面没有盖。)



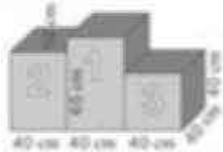
9. 一个正方体礼品盒,棱长12 dm。如果包装这个礼品盒的纸面是其表面积的1.5倍,至少要用多少平方分米的包装纸?



10. 一个新建的游泳池长50 m, 它是宽的2倍, 深2.5 m。现在要在游泳池的四壁和底面贴上瓷砖, 一共需要贴多少平方米的瓷砖?

11. 学校粉刷教室, 已知教室的长是8 m, 宽是6 m, 高是3 m, 门窗的面积是11.4 m^2 。如果每平方米需要花4元涂料费, 粉刷这个教室需要花多少钱?

12. 这个观察台是由3个长方体合并而成的, 它的前后两面涂上黄色油漆, 其他露出来的面涂红色油漆, 涂黄色油漆和红色油漆的面积各是多少?



13. 如何把这个长方体木块分成两个棱长为4 cm的正方体?



两个棱长为4 cm的正方体的总表面积与这个长方体的表面积相等吗?



教学建议

(1) 关注方法的比较与沟通。

第10题, 计算贴瓷砖的面积, 需要计算5个面的面积; 第11题, 需要先算教室里除地面以外5个面的面积。教学时, 可引导学生将这两题进行比较, 得出两种思路: 一种是总面积减去缺少的面; 另一种是侧面积加上另一个面。即: $(\text{长} \times \text{宽} + \text{长} \times \text{高} + \text{宽} \times \text{高}) \times 2 - \square$ 或 $\text{底面周长} \times \text{高} + \square$ 。通过交流, 形成解决这一类计算表面积的实际问题的基本思路与方法。

(2) 适度介绍表面积的计算方法。

第12题, 计算组合图形的表面积, 可以

有不同的方法。方法1(基本方法): 分别求出每个涂色面的面积再相加。方法2: 将“上面”“左面”“右面”展开, 转化成一个大长方形, 展开后的长方形长为“ $40 \times 3 + 65 \times 2$ ”, 宽为“40”。方法3: 从左面看的形状与从右面看的形状相同, 从上面看的形状与从下面看的形状相同。涂黄油漆的面积就是“从正面看的面积 $\times 2$ ”, 涂红油漆的面积就是“从左面看的面积 $\times 2 +$ 从上面看的面积”。因此涂色部分的表面积就是: $(\text{从上面看的面积} + \text{从正面看的面积} + \text{从左面看的面积}) \times 2$ 。学生用哪种方法均可。除了基本方法, 其他方法可以根据学生的情况适当介绍。

编写意图

(1) 本小节学习体积的意义,以及常用的体积单位。

体积的概念是学生后续学习长方体、正方体体积计算、体积单位的进率的基础。

(2) 体积概念的教学,教材分三个步骤进行:故事、实验、比较。首先,通过熟悉的“乌鸦喝水”的故事引入,让学生在讨论和交流中感悟到物体占有空间。接下来,通过实验,让学生观察:两个同样大的玻璃杯,先往一个杯子里倒满水,取一块鹅卵石放入另一个杯子,再把第一个杯子里的水倒进第二个杯子里。这时,第二个杯子装不下这些水了,这说明石头占有空间。最后,引导学生比较洗衣机、影碟机和手机所占空间的大小,说明不同的物体所占空间的大小不同,从而揭示出体积的概念。

(3) 比较两个长方体的体积大小,引出体积单位的学习。

3. 长方体和正方体的体积

体积和体积单位



实验观察:取两个同样大小的玻璃杯,先往一个杯子里倒满水,取一块鹅卵石放入另一个杯子,再把第一个杯子里的水倒进第二个杯子里,会出现什么情况?为什么?



下面的洗衣机、影碟机和手机,哪个所占的空间大?



物体所占空间的大小叫做物体的体积。

上面三个物体,哪个体积最大?哪个体积最小?

怎样比较下面两个长方体体积的大小呢?



教学建议

(1) 在活动体验中理解体积的意义。

教学时,可按教材“故事—实验—比较”的线索展开。首先在“乌鸦喝水”的故事和实验中初步体会石子占有一定的空间,其次在观察比较中体会物体所占的空间是有大小之别的,最后揭示体积概念。教学时,可将教材中的实验设计稍加调整。第一次实验,两个杯子原来都是半杯水,在1号杯中放入鹅卵石,比较水面高度,发现1号杯水面上升了,体会鹅卵石“占了空间”。第二次实验,在1号杯和2号杯中放入大小不同的鹅卵石,比较水面高

度,发现2号杯的水面上升的高度比1号杯高,体会大鹅卵石比小鹅卵石“所占的空间大”。

(2) 实物比较中揭示体积概念。

教学中,应为学生提供实物,引导学生比较所占空间的大小。如,提供电脑、手机、小石子或其他易于比较的长方体积木等。引导学生进行比较与描述,如“电脑所占的空间比手机所占的空间大”,顺势揭示体积的概念,并进一步明确电脑比手机的体积大,小石子比手机的体积小。

计量体积要用体积单位,常用的体积单位有立方厘米、立方分米和立方米,可以分别写成 cm^3 、 dm^3 和 m^3 。

(1) 棱长是1 cm的正方体,体积是 1 cm^3 。



一个手指尖的体积大约是 1 cm^3 。



(2) 棱长是1 dm的正方体,体积是 1 dm^3 。



粉笔盒的体积接近 1 dm^3 。



(3) 棱长是1 m的正方体,体积是 1 m^3 。

用2根1 m长的木条做成一个互成直角的架子,放在墙角,看看 1 m^3 有多大。



做一做

1. 说一说 1 cm 、 1 cm^2 、 1 cm^3 分别是用来计量什么量的单位,它们有什么不同。



2. 下面的图形是用棱长1 cm的小正方体摆成的,说出它们的体积各是多少。



(1) 体积单位的教学分三个层次:一是必要性;二是体积单位的定义;三是体积单位表象的建立。

(2) 教材首先让学生体会引入体积单位的必要性。上页呈现了两个不易看出大小的长方体,引导学生思考,怎样比较它们的体积大小。由长度单位和面积单位的学习经验进行类推,想到要比较体积也需要用统一的体积单位来测量。

(3) 体积单位的教学,教材除了介绍了 1 cm^3 、 1 dm^3 和 1 m^3 的概念,还十分重视对这些体积单位表象的建立。教材借助学生熟悉的事物如1个手指尖的体积大约是 1 cm^3 、粉笔盒的体积接近 1 dm^3 等,帮助学生建立体积单位的实际大小观念。

(4) “做一做”第1题帮助学生区别长度单位、面积单位和体积单位,形成概念体系。第2题,一是加深对体积单位理解,学会用体积单位表示物体的大小;二是为学习长方体和正方体的体积计算作好铺垫。

教学建议

(1) 在定义与直观实物的基础上,建立 1 cm^3 、 1 dm^3 、 1 m^3 的表象。

体积单位教学,关注两点:一是定义体积单位;二是形成实际大小观念。教学时,为使学生在头脑中建立起 1 cm^3 、 1 dm^3 、 1 m^3 大小的清晰表象,可以借助直观教具演示和模型观察,采用语言描述、举例等多种方式,帮助学生形成清晰的表象。通过举例,将“体积单位”与“实物大小”建立联系。

(2) 重视物体体积的描述与估计。

可以设计一些描述立体图形或实物体积的

练习,在描述中强化对体积意义的理解,同时巩固体积单位的运用。

如在“做一做”第2题的基础上,给出个数确定的立方体,如12个棱长1 cm的立方体,拼成各种立体图形,让学生思考,这些物体的形状各不相同,它们的体积一样吗?在这个过程中,让学生体会空间和长度、面积一样,也可以度量与量化。同时,体会到同样体积的物体,形状有可能不同。

编写意图

(1) 认识体积单位后,探究长方体、正方体的体积计算方法。体积计算公式的推导,是基于对体积概念的理解,通过数体积单位的小正方体来探索的。

教材由问题直接引出,让学生进行讨论交流。有前面的学习经验,学生自然想到把长方体切成大小相同的小正方体,数出有多少个小正方体,体积就是多少,即“数体积单位的个数”。但受客观条件的限制,有些物体是不能切割的,进一步猜想长方体的体积也应该有计算方法。由此调动学生实验、探究计算方法的兴趣。

(2) 教材以“用体积为 1 cm^3 的小正方体摆成不同的长方体”为任务展开活动。通过对摆法不同的长方体长、宽、高和小正方体的数量、体积等相关数据的分析,一方面帮助学生进一步理解长方体的体积就是长方体所含体积单位的数量多少。另一方面引导学生找出长方体中所含体积单位的数量与它的长、宽、高的关系,从而总结出长方体体积的计算公式。

怎样知道一个长方体的体积呢?



如果把它切成大小相同的小正方体就好了。

这不能先测量,再计算它的体积呢?

实验:用体积为 1 cm^3 的小正方体摆成不同的长方体,说一说你是怎么摆的。

(1) 把小组内摆法不同的长方体的相关数据填入下表。

长	宽	高	小正方体的数量	长方体的体积

(2) 观察上表,你发现了什么?



长方体所含体积单位的数量就是长方体的体积。

长方体的体积正好等于长 \times 宽 \times 高的积。

长方体的体积 = _____

教学建议

(1) 以体积意义为基础,感悟公式原理。

学习了体积与体积单位,学生已能通过数体积单位的个数来求长方体的体积了。因此,可让学生任意取几个 1 cm^3 的正方体,摆成长方体,并计算所需的正方体的个数,此时的计算并不是运用公式,而是基于对体积意义的理解,即“所含体积单位的数量”。在计算中,引导学生运用“每行的个数 \times 行数 \times 层数”得出长方体体积,并将其与长、宽、高建立联系,“每行的个数”即“长”,“行数”即“宽”,“层数”即“高”。从而理解长方体体积

用“长 \times 宽 \times 高”来计算的原理。

(2) 公式教学与空间观念培养同步进行。

计算公式的探究依然应该与空间观念发展同步进行。如,在探究长方体体积计算公式时,可引导学生根据所摆成的各类长方体的形状,在头脑中想象、分析这个图形的体积与长、宽、高的关系,即发现长、宽、高与每排个数、排数、层数之间的联系,在头脑中建立关于公式意义的正确表象。练习时,可以设计估计书本或其他物体的长、宽、高及体积等活动,以进一步巩固计算、发展空间观念。

还可引导学生与长方形面积计算公式的探索进行类比,理解体积公式的探索方法。

编写意图

(1) 教材注重公式的提炼、表达与运用。在理解公式的含义、总结出长方体体积的计算公式之后,教材引导学生将公式用字母表示出来。用字母 V 表示长方体体积,用字母 a 、 b 、 h 分别表示长方体的长、宽、高, $V=abh$ 。

(2) 正方体的体积公式,教材启发学生根据长方体和正方体的关系,利用推理的方法,自主探索推导得出。

在介绍用字母表示正方体的体积的计算公式时,教材介绍了“立方”的含义,说明三个相同的数连乘就是这个数的立方。

(3) 例 1 是体积公式的应用。根据已知条件,应用公式计算长方体、正方体的体积,以巩固方法。

如果用字母 V 表示长方体的体积,用 a 、 b 、 h 分别表示长方体的长、宽、高,那么长方体的体积计算公式可以写成:



$$V=abh$$



根据长方体和正方体的关系,想一想正方体的体积怎样计算。

如果用字母 V 表示正方体的体积,用 a 表示它的棱长,那么正方体的体积计算公式可以写成:



$$V=a \cdot a \cdot a$$

$a \cdot a \cdot a$ 也可以写作“ a^3 ”,读作“ a 的立方”,表示 3 个 a 相乘。



正方体的体积计算公式一般写成: $V=a^3$

1 计算下面图形的体积。



$$\begin{aligned} V &= abh \\ &= 7 \times 3 \times 4 \\ &= \underline{\quad\quad} \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= a^3 \\ &= 6^3 \\ &= 6 \times 6 \times 6 \\ &= \underline{\quad\quad} \text{ (dm}^3\text{)} \end{aligned}$$

教学建议

(1) 引导学生根据长方体、正方体的关系,推导正方体的体积公式。

正方体是特殊的长方体,也可以说正方体是长、宽、高相等的长方体。因为长方体的体积=长×宽×高,所以正方体的体积=棱长×棱长×棱长,这样推导既便于学生形成完善的认知结构,又能使学生认识到,一般意义下的公式和结论,对其中的特殊情况也是成立的,体会演绎推理的思想。当然,教学时也有必要引导学生根据“正方体的体积就是正方体所含体积单位的数量”这一角度,理解正方体

的体积为什么可以用“棱长×棱长×棱长”来计算。

(2) 设计变式与应用练习,及时巩固。

教学时,除了安排利用公式计算长、正方体体积的基本练习外,还可以设计“已知体积,求长、宽、高”等逆向变式问题,也可以安排一些解决实际问题的练习题,以加强公式应用的能力。

编写意图

(1) 这部分教学将长、正方体的体积公式统一为“底面积 \times 高”。

教材首先说明什么是底面积。然后,引导学生将长方体和正方体的体积公式,统一成“底面积 \times 高”,让学生理解长方体和正方体的体积公式之间的内在联系。同时,也为今后学习其他柱体体积计算公式作铺垫。

(2) “做一做”是长方体体积计算的实际问题。第1题,直接应用公式解决。第2题,是“长方体体积=底面积 \times 高”的灵活应用。这里需要帮助学生理解木料横截面的面积可以看作是“底面积”,木料的长可以看成“高”。

(3) “生活中的数学”介绍了机场行李托运的规格要求,旨在让学生感受长方体体积在生活中的应用,同时,增加一些生活常识。

长方体或正方体底面的面积叫做底面积。



$$\text{长方体的体积} = \text{长} \times \text{宽} \times \text{高}$$

底面积



$$\text{正方体的体积} = \text{棱长} \times \text{棱长} \times \text{棱长}$$

底面积

长方体和正方体的底面积怎样求呢?



所以,长方体和正方体的体积都可以这样来计算:

$$\text{长方体(或正方体)的体积} = \text{底面积} \times \text{高}$$

如果用字母 S 表示底面积,上面的公式可以写成:

$$V = Sh$$

做一做

1. 一块长方体肥皂的尺寸如下图,它的体积是多少?



2. 一根长方体木料,长5m,横截面的面积是0.06 m²,这根木料的体积是多少?



飞机的行李尺寸规定

生活中的数学



机场行李托运一般不超过此规格。

你知道其他交通工具关于行李尺寸的规定吗?



手提行李的三边之和一般不得超过115 cm。

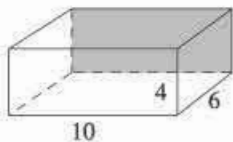
教学建议

- (1) 理解公式意义,完善公式。

教学长方体体积与正方体体积公式统一成“底面积 \times 高”的方法,可结合计算公式,利用直观图示帮助学生理解。如,先结合长方体图形,说明计算公式中的“长 \times 宽”就是它的底面积,则体积为“底面积 \times 高”;再结合正方体图形,说明计算公式中的“棱长 \times 棱长”就是它的底面积,而另一条棱长也可以看作是正方体的高。这样,可将长方体和正方体的体积公式统一成“底面积 \times 高”来计算,用字母表示就是 $V = Sh$ 。

- (2) 突破定式,理解本质。

学生对“底面积 \times 高”的理解,可能会拘泥于“下底面的面积 \times 高”。教学中,应引导学生打破这一定式,结合“做一做”第2题,帮助学生理解这一方法的本质。也就是:长方体或正方体某一个面的面积与这个面垂直的棱的长度相乘。如:长、宽、高分别为10、6、4的长方体,也可以看作底面积是40、高是6的长方体,如图,利用“底面积 \times 高”计算体积,既可以是 40×6 ,也可以是 24×10 或 60×4 。



练习七

1. 下面哪堆体积大? 为什么?



2. 想一想, 你在生活中见过的体积最大的物体是什么? 体积最小的物体是什么?

说一说再交流一下。



3. 下面各图都是用棱长为 1 cm 的小正方体摆成的, 哪个图形体积最大? 哪个体积最小? 在横线上标注出来。



4. 在横线上填上适当的体积单位。



橡皮的体积约是 10 _____



影碟机的体积约是 5 _____



集装箱的体积约是 40 _____

5. 说一说在生活中能找出哪些体积分别是 1 cm^3 、 1 dm^3 、 1 m^3 的物体。

6. 右图由 9 个棱长为 1 cm 的小正方体摆成, 怎样做能把它变成一个长方体? 新组成的长方体的体积是多少?



7. 算一算。

$$4^3 = \underline{\quad\quad\quad} \quad 4 \times 3 = \underline{\quad\quad\quad} \quad 4 + 4 + 4 = \underline{\quad\quad\quad}$$

$$8^3 = \underline{\quad\quad\quad} \quad 8 \times 2 = \underline{\quad\quad\quad} \quad 8 + 8 = \underline{\quad\quad\quad}$$

编写意图

(1) 第 1~3 题, 重点巩固体积概念。第 1 题, 从“物体所占空间的大小”这一意义出发, 将“每根钢管的体积”作为“体积单位”, 第一堆有 $(1+6) \times 6 \div 2 = 21$ (根) 钢管, 第二堆有 $3+8+12=23$ (根) 钢管, 所以第二堆的体积大。第 3 题同样基于体积概念, 用体积单位描述大小, 理解“每个图形含有多少个体积单位, 体积就是多少”。这些练习, 有利于学生对体积概念的理解。

(2) 第 4 题旨在加深对所学体积单位的认识。让学生根据建立的 1 cm^3 、 1 dm^3 、 1 m^3 表象, 选择合适的体积单位。

(3) 第 6 题是对体积意义的进一步巩固。如果个数不变, 新组成的长方体都是由 9 个棱长为 1 cm 的正方体组成的, 那么它的体积都是 9 cm^3 。所以有下面两种情况:



从而体会体积相同, 形状可以不同。

教学建议

(1) 加强体积概念的理解。

结合第 1 题和第 3 题, 引导学生进一步理解体积的意义。同时, 明确计量物体体积的大小可以用不同的计量单位, 可以是 1 cm^3 、 1 dm^3 和 1 m^3 的正方体, 也可以是大小相同的物体, 如第 1 题中的钢管。

(2) 重视观念建立与巩固。

第 4 题和第 5 题, 找出体积分别是 1 cm^3 、 1 dm^3 和 1 m^3 的物体和选择适当的体积单位, 这些练习都可以帮助学生加深对体积单位的认识, 建立正确的表象。

第 5 题可放在第 4 题之前练习, 在建立 1 cm^3 、 1 dm^3 和 1 m^3 的大小观念基础上, 确定橡皮、影碟机等物体的体积单位。

(3) 允许学生采用不同思路。

第 6 题, 题目并没有规定小正方体的个数不变, 如果学生增加或减少个数后变成长方体, 再求体积, 应加以肯定。因为这样仍符合练习的目的: 加深对长方体的认识、体积意义的理解。

编写意图

(1) 第8题是求长方体体积的实际应用。同时介绍生活常识：计算土、沙、石时常用体积单位“方”。学生只要知道 $1\text{方}=1\text{m}^3$ 即可，计算时注意统一单位。

(2) 第9题巩固正方体体积计算，并使学生了解到“我国古代夏朝就掌握了存储冰块的技术”。

(3) 第10题是用长方体体积计算公式来解决问题。平均分成4块可以有多种分法，但每种分法每个人分到的都是同样大的蛋糕，即 $2\times 2\times 0.6\div 4=0.6(\text{dm}^3)$ 。

(4) 第11题是“底面积 \times 高”方法的变式应用。横截面可以看成“底面积”，方木的长可以看作“高”。

(5) 第13题，估计与测量不仅巩固了体积与体积单位、长方体体积计算，同时又培养了学生的估计能力。

8. 建筑工地要挖一个长50 m、宽30 m、深50 cm的长方体土坑。一共要挖出多少方的土？



9. 一块棱长30 cm的正方体冰块，它的体积是多少立方厘米？



10. 妈妈送给玲玲的长方体形状的生日蛋糕长2 dm、宽2 dm、高0.6 dm，妈妈把它平均分成4块长方体形状的小蛋糕。想一想她是怎么分的，每个人分到多大的一块蛋糕。



11. 家具厂订购500根方木，每根方木横截面的面积是2.4 dm²，长是3 m。这些方木一共是多少方？



12. 填出下表中长方体或正方体的相关数据。

底面积	高	体积
32 cm ²		448 cm ³
40 cm ²	5 dm	
	9 m	729 m ³
54 cm ²	7 cm	

13. 估一估，量一量。

- (1) 估计一本数学书的体积是多少，再测量并计算。
- (2) 估计家里一个长方体家具或者一个房间的体积，再测量并计算。
- (3) 说一说上面两题你是如何估计的，怎样估计更准？

教学建议

(1) 解决问题中发展空间观念。

第10题，解决“平均分成4块，想一想是怎么分的”这一问题时，可以有多种分法。教学时，可引导学生想象：分得的每块蛋糕长、宽、高分别是多少，以培养学生的空间观念。

(2) 允许估计方法多样。

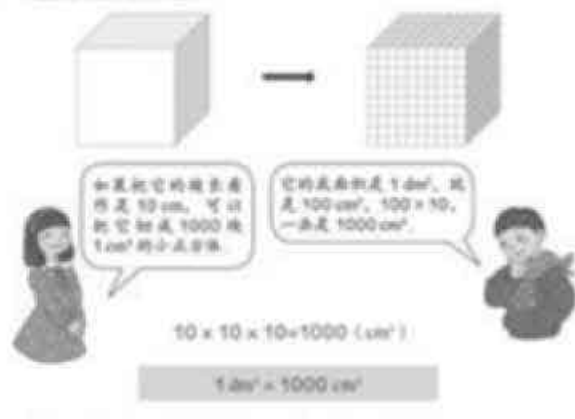
第13题的估测，应允许学生有不同的估计策略。如：以体积单位为标准估计；估计长方体的长、宽、高，然后用公式计算；以某一个已知物体的体积为标准估计；等等。

(3) 安排实践活动，注重活动反思。

第13题可以安排综合实践活动。教学时，要重视过程的展开，让学生真正经历估计、测量的活动过程，并在实践活动后安排反思环节，引导学生总结与比较：你是如何估计的？怎样估计更准？从而得出，如果估计较小物体的体积，用体积单位估计或先估计长、宽、高，再计算体积，两种方法均可。但如果估计较大物体的体积，如房间体积，则用先估计长、宽、高再计算的方法，更为合适。

体积单位间的进率

2 下面是一个棱长为1 dm的正方体, 体积是1 dm³。想一想, 它的体积是多少立方厘米呢?



按照上面的方法, 你能算出1 m³等于多少立方分米吗?

$$1 \text{ m}^3 = \text{ } \text{dm}^3$$

到这里为止, 我们已经学习了哪些计量单位? 请整理成表格。

这是整理好的表格。

	单位名称	相邻两个单位间的进率
长度	米、分米、厘米	
面积	平方米、平方分米、平方厘米	
体积	立方米、立方分米、立方厘米	

编写意图

(1) 例2教学体积单位间的进率。教材借助图示, 引导学生根据正方体体积的计算方法, 推导出进率。

(2) 首先教学 dm³ 和 cm³ 之间的进率, 教材呈现两种方法。一是, 把棱长1 dm看作棱长10 cm, 由正方体体积的计算公式算出体积是1000 cm³, 由此得出1 dm³ = 1000 cm³。二是, 用“底面积×高”的思路, 底面积1 dm² = 100 cm², 高10 cm, 100×10也得出1 dm³ = 1000 cm³。

接下来利用类推的思路让学生自主推导1 m³ = 1000 dm³。

(3) 最后, 小精灵引导学生将长度单位、面积单位和体积单位及其相邻单位间的进率整理成表格, 通过对比, 促进知识的系统化。

教学建议

(1) 借助直观、想象、计算, 完成进率推算。教学进率时, 可先复习常用的体积单位, 并用手势比画1 dm³和1 cm³的大小。然后出示棱长1 dm的正方体与棱长1 cm的正方体, 引导猜测: 1 dm³的正方体有多少个1 cm³? 让学生思考: 1 dm = 10 cm, 每行有10个, 每层有这样的10行, 一共有10层, 这样就有1000个, 所以, 1 dm³ = 1000 cm³。也可直接给出棱长1 dm与棱长10 cm的两个正方体, 分别让学生说出它们的体积。棱长1 dm, 体积是1 dm³; 棱长10 cm, 体积就是10×10×10 =

1000 cm³, 两个正方体体积相等, 所以, 1 dm³ = 1000 cm³。

(2) 加强长度、面积、体积单位之间的比较。

各种度量单位的比较, 应融于进率的探究过程中。教学时, 可从长度、面积单位间进率的回顾复习引入, 并引导猜测: 相邻两个体积单位之间的进率是多少呢? 在复习中感知, 在观察中猜想, 在课件演示和计算活动中进行验证。另外, 教学时应把课件演示、学具观察与动脑想象紧密结合, 帮助学生理解相邻两个体积单位间的进率。最后完善表格, 进行比较, 以加深对度量单位的认识。

编写意图

(1) 例3教学体积单位间的换算。第(1)题是把高级单位的名数换算成低级单位的名数；第(2)题是把低级单位的名数换算成高级单位的名数。体积单位名数的换算与以前学过的长度、面积单位名数的换算方法基本相同，只是体积相邻单位间的进率是1000。这也为以后计算实际问题时灵活处理体积单位作了准备。

(2) 例4是体积单位换算的实际应用。教材给出牛奶包装箱的真实情境，一方面，让学生理解包装箱上“ $50 \times 30 \times 40$ ”的意思；另一方面，利用公式计算体积，自觉将 60000 cm^3 进行单位变换，使单位的运用更为合理。

(3) “做一做”第1题是体积单位变换的基本练习。第2题是实际问题的解决，可先将长、宽、高的单位变换成“米”作单位，再计算出体积，最后求出用砖的块数。

- 3 (1) 3.8 m^3 是多少立方分米? (2) 2400 cm^3 是多少立方分米?
- 想: $1 \text{ m}^3 = \underline{\quad\quad} \text{ dm}^3$ 想: $\underline{\quad\quad} \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$
- $3.8 \text{ m}^3 = \underline{\quad\quad} \text{ dm}^3$ $2400 \text{ cm}^3 = \underline{\quad\quad} \text{ dm}^3$

想一想!

- 4 这个牛奶包装箱的体积是多少?

图上的尺寸一般是指这个长方体的长、宽、高。

$V = a \times b \times h$
 $= 50 \times 30 \times 40$
 $= 60000 (\text{cm}^3)$
 $60000 \text{ cm}^3 = \underline{\quad\quad} \text{ dm}^3 = \underline{\quad\quad} \text{ m}^3$

做一做

1. $3.5 \text{ dm}^3 = \underline{\quad\quad} \text{ cm}^3$ $700 \text{ dm}^3 = \underline{\quad\quad} \text{ m}^3$ $0.25 \text{ m}^3 = \underline{\quad\quad} \text{ cm}^3$
2. 筑路一运机 15 m、厚 24 cm、高 3 m 的运砖，如果每立方米用砖 525 块，一共要用砖多少块?

你知道吗?

人们很早就得出了长方体、圆柱等形体的体积计算公式，因为它们是一样的，存在等的变化形状，而且还有计算体积的需要。

我国古代数学名著《九章算术》中，集中而系统地给出了立体图形的体积计算公式。书中在求底面是正方形的长方体体积时，是这样说的：“方自乘，以高乘之即积尺。”就是说先用边长乘边长得面积，再乘高就得长方体的体积。

教学建议

- (1) 让学生感受单位换算的必要性。

结合具体情境，让学生感受单位的换算不是题目的规定与要求，而是有换算的必要。如，例4学生计算出牛奶包装箱的体积是 60000 cm^3 后，可引导思考：对计算的结果你觉得需要处理吗？学生自然会想到，需要将“ cm^3 ”这一单位变成较大的体积单位更合适。

也可将例4的情境修改为：一箱牛奶的包装箱上标注尺寸是“ $3.2 \text{ dm} \times 2.4 \text{ dm} \times 1.2 \text{ dm}$ ”，里面装着小包牛奶，长、宽、高分别是 6 cm 、 4 cm 、 12 cm 。这个箱子可以装多

少盒牛奶？这样，化聚的必要性更为凸显。

- (2) 允许换算策略多样。

在解决问题中，应允许学生采用不同的策略和方法。如例4，方法一：先将长、宽、高转化成以“ dm ”为单位，再求体积。方法二：先求出体积是多少“ cm^3 ”，再转化成以“ dm^3 ”为单位。

又如，前面求“这个箱子可以装多少盒牛奶”这一问题。方法一：分别求出包装箱的体积与小包牛奶的体积，然后统一单位，求出盒子数量。方法二：按实际情况，考虑“每排放几盒、放几排、放几层”来解决问题。这里应允许学生用自己喜欢的方法解决问题。


练习八

1. $1.02 \text{ m}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^3$ $960 \text{ dm}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^3$ $6270 \text{ cm}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^3$
 $36000 \text{ cm}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^3$ $8.63 \text{ m}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^3$ $23 \text{ dm}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

2. 一个长方体包装盒,从里面量长28 cm,宽20 cm,里面的体积为1176 dm^3 ,要装进用它包装一件长25 cm,宽16 cm,高18 cm的玻璃器皿,是否可以装得下?

想一想,为什么?



3.  公园小区为居民新安装了50个休息的凳子,凳面的长、宽、高分别是100 cm,45 cm,4.5 cm,凳腿的长、宽、高分别是45 cm,5 cm,35 cm,做这些凳子至少用了混凝土多少方?

4.  “六一”儿童节前,全市的小学生代表用棱长3 cm的正方体塑料拼搭积木在广场中央搭起了一面长6 m,高2.7 m,厚6 cm的奥运心愿墙,这面墙一共用了多少块积木?

5. 学校运来7.6 m^3 的沙子,铺在一个长5 m,宽38 dm的沙坑里,可以铺多厚?

6. 请你圈出每组数据中与其他数据不相等的那个数。

(1) 5.08 m^3 50800 cm^3 5080 dm^3 5080000 cm^3
 (2) 6039 dm^3 6.039 m^3 603900 cm^3 60.39 m^3
 (3) 1500 cm^3 1500 dm^3 15 m^3 150 dm^3

36

编写意图

(1) 练习八围绕体积计算及单位换算进行巩固与应用。第1题、第5题是基本练习。

(2) 第2题是体积计算及单位换算的实际应用问题。包装盒是否能够装得下玻璃器皿,关键要看包装盒的高,只要包装盒的高大于16 cm,就能够装得下。可利用公式计算出长方体包装盒的高,结果是21 cm,所以能够装得下。这里还涉及统一计量单位的问题。

(3) 第3题计算体积时,要注意凳腿是两条。在求出50个凳子的体积后,还要将立方厘米转换成立方米,然后利用“1方=1 m^3 ”算出共用混凝土多少方。

(4) 第4题,可以利用“长方体心愿墙的体积÷每个小正方体体积”这一数量关系解决,也可以用“沿长排几个×沿宽排几个×沿高排几个”求出积木的总块数。计算时注意计量单位的统一。

(5) 第5题是长方体体积公式的逆向问题。注意单位的统一。

教学建议

(1) 实际问题的解决要注意符合现实。

第2题,有的学生可能会先求出玻璃器皿的体积,然后与包装盒的体积比较,作出是否装得下的判断。教学中要注意引导学生思考:有些情况下,体积尽管够,但由于长、宽、高的尺寸不够,仍然装不下。可以将此题的数据进行调整,引发认知冲突来体会。另外,也会有学生认为包装箱的高要大于18 cm,同样应引导学生考虑物品放置的方向问题。

第4题,题中数据正好能摆满,因此可用“总体积÷每个积木体积”的思路解决。教学

时,可将心愿墙的长、宽、高的数据进行变化,使之不能正好摆满,从而引发思考:刚才的方法还能用吗?由此,引导学生体会解决问题要符合实际。

(2) 利用教材练习,巧妙变化,体会优化。

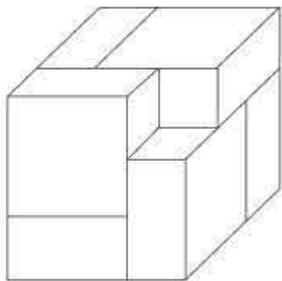
第4题,首先,可将数据变化成不能整除的,看怎样解决。还可以继续变化,将墙的高变化成与积木的高相同,即厚3 cm,此时可将“体”的问题,转化为“面”来解决。因为高相同,只要用“心愿墙底面积÷每个积木底面积”即可,从而体会转化的思想在解决问题中的作用。

编写意图

(1) 第7题是关于底面积、表面积、体积的实际问题。注意面积单位与体积单位的正确运用与换算。

(2) 第8题是关于棱长特征与体积计算的巩固练习。根据长方体和正方体棱长总和相等，可以计算出正方体的棱长，进而分别计算出体积进行比较，体会棱长和相等，但体积不一定相等。

(3) 第9题是一个实际问题。按照一般的方法：纸箱的体积÷茶盒的体积=装几盒，但在摆放时，还要考虑实际情况。根据计算： $30 \times 30 \times 30 \div (20 \times 20 \times 10) = 6.75$ (盒)，装6盒有余，但要想装下6盒却不容易，只有像下图这样，才能装下。



7. 一个长方体的无盖木水箱，长是6 m，宽是40 cm，高是1.5 m。这个水箱占地面积有多大？需要用多少平方米的玻璃？它的体积是多少？



8. 一个长方体和一个正方体的棱长总和相等，已知长方体的长、宽、高分别是6 dm、5 dm、4 dm，那么正方体的棱长是多少分米？它们的体积相等吗？



9. 工厂工人要把长、宽各为20 cm，高为10 cm的长方体茶盒装入棱长为30 cm的正方体纸箱，最多能装几盒？怎样才能装下？



教学建议

- (1) 注意审题习惯的培养。

练习时，要注意培养学生良好的审题习惯。如关注单位是否一致，换算时注意不能把进率混淆等。

同时，要关注学生的常见错误情况。可以增加这样的问题：一根长方体木料，长3.5 m，横截面的面积是 6 dm^2 。这根木料的体积是多少方？

学生常见错误一： $6 \times 3.5 = 21$ (方)；错误二： $6 \text{ dm}^2 = 0.006 \text{ m}^2$ ， $0.006 \times 3.5 = 0.021$ (方)。第一种是解答中单位没有统一，

第二种是单位换算时将体积单位与面积单位进率混淆。教学时可针对学生常见的错误加强练习。

- (2) 注重方法讨论，借助几何直观。

第9题对学生有一定的挑战。教学时，可以先让学生讨论解决这类问题的方法，引导思考：怎样的情况下，可以直接用“纸箱的体积÷茶盒的体积=装几盒”；怎样的情况下，要根据实际情况摆放。在讨论中，注意引导学生建立如何摆放的表象。针对想象有困难的学生，可用实物演示或课件直观帮助学生理解，从而突破难点。

容积和容积单位

箱子、油桶、仓库等所能容纳物体的体积，通常叫做它们的容积。
计量容积，一般就用体积单位。计量液体的体积，如水、油等，常用容积单位升和毫升，也可以写成 L 和 mL。

$$1 \text{ L} = 1000 \text{ mL}$$



小组活动：

- (1) 将一瓶矿泉水倒在纸杯中，看看可以倒满几杯。
- (2) 估计一下，一杯水大约有多少毫升，几杯水大约是 1 L。

1 瓶矿泉水是 550 mL。



1 L 水最多能倒 2 杯。

- (3) 说一说在哪些物品上标有毫升、升。



容积单位和体积单位有这样的关系。

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$
$$1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$$

长方体或正方体容器容积的计算方法，跟体积的计算方法相同，但要从容器的里面量长、宽、高。

- 5** 一种小汽车上的长方体油箱，从里面量长 5 dm，宽 4 dm，高 2 dm，这个油箱可以装汽油多少升？

$$5 \times 4 \times 2 = 40 (\text{dm}^3)$$
$$40 \text{ dm}^3 = \underline{\quad\quad} \text{ L}$$



编写意图

(1) 本小节教学容积的概念与常用的容积单位。主要包含：什么是容积；容积单位有哪些；容积单位的大小及关系；容积的计算。

(2) 教材首先直接给出容积的概念，并说明计量容积一般就用体积单位。然后引导学生观察生活中常见的药水瓶、饮料瓶，由此引出 L 和 mL 两个容积单位，说明计量液体的体积常用容积单位“升”和“毫升”，明确升和毫升的关系 $1 \text{ L} = 1000 \text{ mL}$ ，并初步认识度量液体体积的工具——量筒和量杯。

(3) 接下来设计小组活动，一方面让学生通过活动充分感知容积单位的实际意义与实际大小；另一方面通过活动，加深对升和毫升之间进率的理解。小精灵介绍了体积单位与容积单位之间的关系： $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ 、 $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$ 。

(4) 例 5 计算小汽车油箱的容积，容积的计算方法和体积一样，只是需要将体积单位与容积单位进行转换。

教学建议

- (1) 重视活动体验，关注实际观念的建立。

教学中，应重视活动体验。通过“将一瓶矿泉水倒入纸杯，看可以倒满几杯”“估计一纸杯大约有几毫升”“几杯水大约是 1 升”等活动，来体验 500 mL、200 mL、100 mL、1 L 的液体大约有多少。也可以将 1 mL、1 L 的液体倒入 1 dm^3 、 1 cm^3 的正方体容器中，得出容积单位与体积单位之间的关系，即 $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ 、 $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$ ，由此帮助学生建立 1 L、1 mL 的表象。

- (2) 应准备充分的学具、教具。

为保证活动充分展开，教学前，应作好充分的准备。教师自己或让学生准备一些物品以便观察与操作，如：10 mL 药水瓶、1 L 橙汁、200 mL 量杯、一次性纸杯等。

- (3) 把建立表象与得出进率整合教学。

建立容积单位的表象，可与容积单位之间的进率、容积单位与体积单位之间的进率结合起来。如：“将矿泉水（500 mL）倒在 1 L 的正方体容器中，几瓶可以倒满？”“将 1 L 水倒在纸杯中，可以倒几杯？你发现了什么？”通过活动，自然得出“1 升 = 1000 毫升”。通过 200 mL 的纸杯，5 杯倒满，进一步验证结论。活动中，又有利于实际容量多少的表象建立。

编写意图

(1) 例6教学不规则物体的体积。教材编排这一内容作为问题解决，意在突破传统意义上解决问题等同于应用题的认识，而是将解决问题视为把先前所获得的知识用于新的、不熟悉的情境的过程。

(2) 教材以求出橡皮泥、梨这两种物体的体积为例，引导学生经历解决问题的全过程。

求不规则物体的体积用到的基本策略有两个：一是像橡皮泥这样的不规则物体，可以通过体积变形转化为规则物体来计算体积；二是像梨这样不可变形的不规则物体，可以利用排水法来测量体积，其基本数量关系是“水的体积+物体的体积=总体积”，则“总体积-水的体积=物体的体积”。两种方法本质上都利用了转化的思想。

回顾与反思，一方面是对解决问题过程的反思，即我们是怎么解决这个问题。另一方面思考这些解决策略与方法是否对所有情况都适用，进一步明确解决这类问题的方法。

现实生活中还有很多像橡皮泥、梨、石块等形状不规则的物体，怎样求得它们的体积呢？

6 设法求出下面两种物体的体积。



阅读与理解

要解决什么问题？这些物体分别有什么特点？

分析与解答

可以把橡皮泥捏成规则的长方体或正方体形状。想一想……

不规则形状的物体怎么测量呢？

可以用排水法。

水面上升的那部分水的体积就是……



水的体积是 _____ cm^3 。

水和梨的体积是 _____ cm^3 。

梨的体积： $450 - 200 = 250 (\text{cm}^3)$

回顾与反思

用排水法求不规则物体的体积需要记录哪些数据？

答：_____

想一想，可以利用上面的方法测量乒乓球、冰块的体积吗？为什么？

教学建议

(1) 体会“转化”思想。

例6的学习重要的是体会转化、等积变形思想在解决问题中的应用。因此，教学中，要关注实验后的反思，引导思考：求不规则物体体积的不同方法的共同点是什么？让学生认识到不同方法本质上都是将不规则的转化为规则的，都是通过等积变形进行转化，转化的前提是体积不变。

(2) 倡导解决问题策略的多样化。

求不规则物体体积的方法是多样的，除教材提供的解决思路外，还可进一步拓展。如，

梨的体积，可用量杯测量。也可让学生思考：如果没有量杯，只有一个长方体的玻璃缸和一些水，你能测量出梨的体积吗？这时可以利用排水法，“升高部分水的体积=梨的体积”这一数量关系不变。本质上仍然是通过等积变形，将不规则物体的体积转化为规则物体的体积。

(3) 关注对解决问题过程与方法的反思。

“回顾反思”环节，要求学生思考：可以用上面的方法测量乒乓球、冰块的体积吗？为什么？意在让学生认识到方法的局限性，当条件发生变化时，排水法并不是对所有事物都适用。学生如果想到“排沙法”“测质量”等方法都是允许的，由此培养学生的创新精神。

练习九

1. 在横线上填上合适的容积单位。



一瓶矿泉水
50_____



一瓶色拉油
约5_____



“神舟五号”载人航天飞
船返回舱的容积为6_____



一瓶药片
100_____

2. $4L =$ _____ ml , $4800 ml =$ _____ L , $82 cm^3 =$ _____ ml ,
 $500 ml =$ _____ L , $35 dm^3 =$ _____ ml , $2.4 L =$ _____ ml ,
 $8.04 dm^3 =$ _____ $L =$ _____ ml , $785 ml =$ _____ $cm^3 =$ _____ dm^3

3. 一大桶矿泉水相当于_____瓶
1500 mL 的矿泉水。



18 L



1500 mL

4. 一种微波炉，产品说明书上标明：
炉腔内部尺寸400×225×300
(单位：mm)。这个微波炉的容
积是多少升？



5. 某海岛战士为解决岛上淡水缺乏问题，和当地渔民共同修建了一个长
22 m、宽10 m、深1.8 m的淡水蓄水池。这个蓄水池最多可蓄水多少
立方米？



编写意图

(1) 第1题巩固容积单位。在1 L、1 mL 容量大小观念的基础上，关注50 mL、100 mL、5 L 等常用容量的表象建立。载人航天飞船返回舱的容积是 $6 m^3$ 。通常液体的体积单位用L、mL，其他物体的容积单位也可以用体积单位。

(2) 第2~4题是巩固容积单位换算的练习。

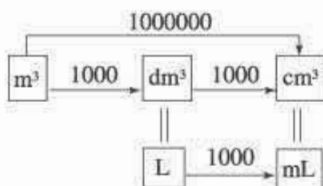
第3题可以将单位统一成“mL”来计算，也可以统一成“L”来计算。

第4题，先理解“ $400 \times 225 \times 300$ ”的意思，就是指微波炉长、宽、高的尺寸。重点关注：由于用“mm”作单位计算数值较大，一般情况下，先将400 mm、225 mm、300 mm 换算成“dm”，求出体积，再将“ dm^3 ”转化成L。同时，让学生认识到微波炉之所以用“mm”作单位，是制作尺寸精确性的需要，但总容量如果用 mm^3 作单位数值会很大。

教学建议

(1) 在练习中梳理，形成关系图式。

第2题的练习是基于对体积单位与容积单位之间关系的理解与应用。通过这些题目的练习，最后帮助学生梳理关系，形成清晰的关系图式。如：



(2) 注重方法的理解与优化。

第4题的教学，学生可能有两种方法。方法一：先按微波炉尺寸求出容积，再将“ mm^3 ”转化为“ dm^3 ”，最后转化为“L”。方法二：先将长、宽、高转化为“dm”求出容积，再将“ dm^3 ”转化为“L”。教学中注意让学生经历“ $1 dm^3 = 1000000 mm^3$ ”的过程。不相邻两个体积单位的转化是第一次出现，可让学生通过推理得出两者关系。同时还要重视两种方法的比较。通过比较，让学生体会到，先将较大单位的数转化为较小单位的数，再求体积，会使计算简单一些。从而体会方法二相对更合理些。

编写意图

(1) 第7题求珊瑚石的体积可以有不同的方法。方法一：总体积-水的体积=珊瑚石的体积。方法二：上升部分的水是一个小长方体，求小长方体的体积。

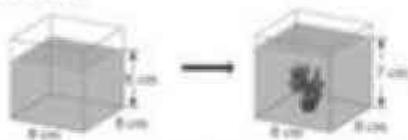
(2) 第8、9两题巩固用排水法求体积的基本数量关系。第8题用到“上升水的体积=假山石的体积”这一数量关系。第9题，用到“溢出的水的体积=两条石柱没入水池部分的体积”这一关系。

(3) 第10题通过计算体会，拼成的长方体与原来两个正方体比较，体积不变，表面积变小，减少2个正方形的面积。

(4) 第13题，意在培养学生的推理能力，体会等量代换思想。据图可知： $V_{大} + V_{小} = 12$ ， $V_{大} + 4V_{小} = 24$ ，因为 $V_{大} + 4V_{小} = V_{大} + V_{小} + 3V_{小}$ ，所以 $12 + 3V_{小} = 24$ 。那么 $V_{小} = 4$ ， $V_{大} = 12 - 4 = 8$ 。（ $V_{大}$ 、 $V_{小}$ 分别表示大球和小球的体积）

6. 某邮政运货车的车厢是长方体，从里面量长3 m，宽2.5 m，高2 m，它的容积是多少立方米？

7. 珊瑚石的体积是多少？



8. 爸爸在一个底面积为51 dm²的长方体鱼缸里放了一个假山石，水面上升了3 cm，这个假山石的体积有多大？



9. 在一个长8 m，宽5 m，高2 m的水池中注满水，然后把两条长3 m，宽4 m，高4 m的石柱竖着放入池中，水池溢出的水的体积是多少？

10. 把2块棱长为1.5 dm的正方体木块拼成一个长方体，这个长方体的体积、表面积分别是多少？如果用3块正方体拼的图形呢？

11. 右图是新藏吐鲁番的一种长方体土坯房，其中一侧的底面积是18.6 m²，高是2.1 m，它的容积是多少呢？



用若干块是这种的土坯中制作的。



12. 哈尔滨冰雪大世界每年用的冰大约能融化成6万立方米的水，它们相当于多少个长50 m，宽25 m，深1.2 m的水池的储水量？（用计算器计算。）

13. 求下图中大圆球的体积。



教学建议

(1) 重视基本数量关系的分析。

求不规则物体的体积教学，应重视基本数量关系的分析。即：“水的体积+物体的体积=总体积，总体积-水的体积=物体的体积”或“上升部分水的体积=物体的体积”。第7、8、9题均用到这两个基本数量关系。

以第7题为例，利用这两个数量关系，方法一： $8 \times 8 \times 7 - 8 \times 8 \times 6$ ；方法二： $8 \times 8 \times (7 - 6)$ 。第8题，则利用“上升部分水的体积=物体的体积”这一关系求假山石的体积。

(2) 加强表面积、体积的综合练习。

第10题的练习，应通过直观图示，引导学生将拼成的长方体与原来的2个正方体比较，思考：体积与表面积是否发生变化，有什么规律。从而发现：将若干个物体拼合，或将一个物体切分，体积不变，但表面积发生变化。拼合则表面积减少，切分则表面积增加。

有条件的話，也可将题目进行变式，转化为大小不同的正方体拼合，求表面积、体积分

别是多少。如图：，以进一步理解表面积、体积的意义，体验求表面积的不同方法。



(1) 整理和复习是对本单元的知识进行梳理与巩固。

第一部分，主要梳理以下内容：长方体、正方体的特征、关系；长方体、正方体的表面积；长方体、正方体的体积和容积。第(1)、(2)题，是特征的复习，主要从“面”“棱”“顶点”这三个角度进行，通过长方体、正方体的相同点、不同点的比较，揭示两者之间的关系。第(3)题，是表面积、体积、容积的回顾整理，不仅关注结论与公式，更关注公式推导的过程。

(2) 第二部分，主要复习不规则物体的体积计算方法。让学生在任务解决中回顾用“排水法”测量体积的方法。

(3) 思考题主要复习长方体的体积，发展空间想象能力。基于“长方体的体积就是指含有几个体积单位”这一意义，利用“长 \times 宽 \times 高”这一关系求出体积。

教学建议

(1) 注重知识回顾，更注重沟通联系。

复习整理时，不仅要注重长方体和正方体特征、相关计算等知识技能的回顾，更应关注知识间的联系。可以用分类的方式，让学生体会到，长方体、正方体具有以下共同点：“都是由6个面组成的”“侧面展开都是长方形或正方形”“侧面积的计算方法都是底面周长乘高”“体积都是底面积乘高”……

(2) 重视解决问题策略的学习。

结合第2题，帮助学生梳理策略，形成解决问题的基本思路。求物体的体积，分两种情

况：规则物体的体积与不规则物体的体积。规则的物体，测量有关数据，利用公式计算；不规则的物体，想办法转化为规则的，常用的方法是排水法。

(3) 可设计综合实践活动。

本单元的复习，还可以结合一些综合实践活动进行。例如：“长方体的包装问题”“长方体、正方体的拼与切”“测量绿豆的体积”等，通过设计开放性、操作性强的课题研究，促使学生经历观察、操作、描绘、想象、推理等学习活动，并进行一些规律探索。以此加强对长方体、正方体的表面积、体积意义的理解与计算技能的巩固，包括一些不规则物体的体积测量方法。

编写意图

(1) 练习十是在学生对本单元进行知识整理的基础上编排的, 综合性较强, 目的是提高综合运用知识的能力。

(2) 第1题将立体图转换为展开图, 意在发展学生的空间观念。为便于表述, 可以将立体图每个面标上“前面”“后面”“上面”“下面”“左面”“右面”, 请学生在展开图中标上相应的每个面。找对应面的过程, 其实就是描述如何展开的过程。

(3) 第2题有两个目的。一是避免概念混淆, 帮助学生分清表面积、体积的概念及相应的计算方法; 二是利用表格发现规律。即长方体的长、宽、高是原来的2倍, 表面积是原来的4倍, 体积是原来的8倍。

(4) 第3、4题是关于长方体容积、表面积计算的实际问题。其中第4题需重点讨论需要贴外饰面的面积是指哪几个面, 也就是上下两个长方体的侧面积之和, 结果为9000元。

练习十

1. 下面是同一个长方体的展开图, 说一说每个图是怎样展开的。



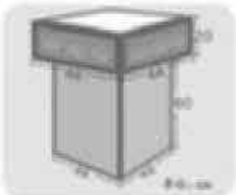
找一些正方体纸盒并剪开其展开, 你能展开成多少种不同的形状?

2. 长方体的长、宽、高都变为原来的2倍, 它的表面积和体积都发生了什么变化?

	长	宽	高	表面积	体积
1	2 cm	1 cm	3 cm	() cm^2	() cm^3
2	4 cm	2 cm	6 cm	() cm^2	() cm^3
3	8 cm	4 cm	12 cm	() cm^2	() cm^3



3. 一个长方体长8 m, 宽4.5 m, 深2 m, 这个集装箱的容积大约是多少?



4. 某古建筑景点定制了25个宫灯形的灯笼(如图), 灯笼外侧有一层饰面, 如果饰面每平方米180元, 这些灯笼的饰面一共要花多少钱?



教学建议

(1) 重视二维与三维的转换, 培养空间观念。

将立体图、展开图进行相互转化, 可以发展学生的空间观念, 也可以设计一些“由面想体”“由体想面”的任务。在这样的转换活动中, 不仅加强对长方体、正方体特征的认识, 同时, 对于空间观念的培养也是十分有利的。

(2) 以点带面, 复习内容“少”而“精”。

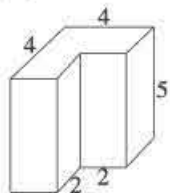
本单元内容, 知识点多、应用性强, 因此复习时, 大多教师会将所有知识进行回顾梳理, 并进行大量的表面积、体积、容积的变式

练习。而这样的复习模式会求全求难。建议复习时, 应突出重点, 练习设计, 则力求“精”, 即练习题具有知识沟通和思维发展的潜力。

(3) 适度拓展, 将长方体、正方体的知识适度迁移。

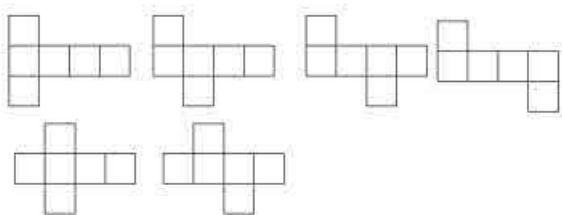
对学有余力的学生, 可以增加底面为三角形或底面为简单组合图形的柱体, 让学生描述特征, 计算表面积与体积。如下例:

①说说这个图形与长方体、正方体的共同点; ②计算这个图形的表面积与体积。通过这样的练习, 将本单元所学知识有效应用与迁移。

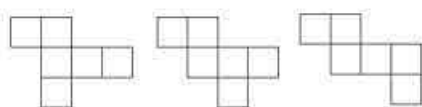


正方体展开图

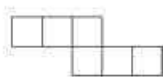
第一类：



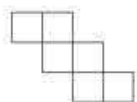
第二类：



第三类：



第四类：



人教版®

二、教学设计或教学片段

课题 1：长方体和正方体的认识

教学设计：赵海峰。

教学内容：教科书第 18~21 页的相关内容。

教学目标：

1. 通过观察、猜想、操作、想象、推理、探索等数学活动，自主探索长方体、正方体关于面、棱、顶点的特征，理解长方体的长、宽、高的含义。
2. 立足想象与操作，自主探索并发现长方体顶点、棱、面之间的关系，理解长方体和正方体的关系。
3. 在自主探索长方体和正方体特征的过程中，培养学生的空间观念和推理能力。

教学重点：把握特征，培养空间观念。

教学难点：空间观念的培养。

教、学具准备：课件、长方体模型、搭长方体的材料、练习纸等。

教学过程：

(一) 情境引入，激活经验，初步认识长方体、正方体

1. 激活原有经验。

课件出示信息：厨房里有电冰箱、食品柜（长方体）、米箱（长方体）、调料罐（四个正方体一组）、砧板（长方体）、包装箱（正方体）。

教师：这是一个厨房，我们一起来看看，都有哪些东西？这些物体都是什么形状的？

根据学生回答，利用课件，从实物中抽象出立体图形。

2. 整体入手，形成多维度研究“立体图形”的基本思路。

教师：我们已经在一、二年级时认识了长方体和正方体，关于长方体和正方体，你都知道哪些知识呢？

(1) “面”的讨论。

预设情况 1：长方体有 6 个面（板书），正方体也有 6 个面，正方体的 6 个面是正方形。

教师引导：长方体和正方体都是由六个面组成的，形状是长方形或者是正方形。

(2) “棱”的讨论。

预设情况 2：长方体有 12 条“边”。

教师引导：（出示长方体模型）上面与正面相交有一条边，这条边在数学上有个专用名称叫“棱”（板书）。

指定一条棱，让学生说说它是由哪两个面相交形成的。

让学生在学具上数一数长方体有几条棱，引导学生从无序到有序（按“相对的 4 条棱—

组”来数；按“从上到下”或“从左往右”来数)。

(3) “顶点”的讨论。

预设情况3：长方体有8个“角”。

教师引导：(继续利用长方体模型)这样3条棱相交于一个共同的端点，数学上叫“顶点”(板书)。

让学生在学具上数一数长方体有几个顶点，引导学生从无序到有序。

3. 小结：同学们非常棒，能从棱、顶点、面三个方面来进行研究，得出了“长方体有6个面，12条棱和8个顶点”的结论。

(二) 提供材料、动手实践，深入研究长方体、正方体“棱”“面”的特征

1. 从“棱”切入，精选材料，布置任务，引发想象。

教师：看来同学们对长方体和正方体已经有很多了解。如果现在给你们一个任务：用小棒搭一个长方体。需要几根小棒？为什么是12根？给你12根你一定能搭成吗？

出示：

小棒长度 (cm)	参考方案1	参考方案2	参考方案3	参考方案4
15 cm (红色)	4根	5根	8根	0根
10 cm (黄色)	4根	4根	0根	0根
8 cm (蓝色)	4根	3根	4根	12根

教师：请大家仔细观察，上面的四个方案，哪些一定能够搭成长方体，哪些一定不能，为什么？先在脑中搭一搭。

教师：同学们想好了吗？我们一起来试一试。

课件出示任务要求：

(1) 选择其中的一种方案，小组合作搭一个长方体。

(2) 进一步思考其他方案可不可以搭成，为什么？

(3) 思考在搭长方体的过程中自己的发现。

2. 小组操作，积累操作和推理经验，验证猜想。

活动：学生自主操作，尝试搭长方体。

3. 有序反馈交流，促进特征提炼整理。

(1) 反馈“方案2”：初步感知基本特征。

教师：这些方案都用了12根小棒，为什么唯独2号方案不可以搭成长方体？

学生1：2号方案8 cm的不够了，而15 cm的多了一根。

学生2：每种长度都应该是4根才够，否则搭不成。

小结：长方体有12条棱，分成3组，每组都是4根。

(2) 反馈“方案1”：巩固及丰富基本特征。

教师：(展示1号方案)在用这个方案搭成长方体的过程中，你们有哪些发现？

①预设情况1：每种长度都有4根。

教师引导学生指一指模型并板书：分成3组，每组4根。

②预设情况2：长度相等的这4根小棒，放在相对的位置。

教师板书：位置相对。

③预设情况3：每组长度相等的小棒，都是平行的。

教师利用长方体框架引导学生观察：a. 水平面相对的棱互相平行；b. 垂直面相对的棱互相平行；c. 侧面相对的棱互相平行（建议利用长方形纸比作面，帮助学生感受同一个平面）。

④预设情况4：每个顶点上有3条长度不等的棱。

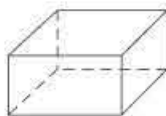
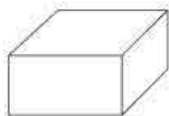
学生1：我发现这个插孔里是红、黄、蓝；这个插孔里也是红、黄、蓝。同一个插孔都有3根长度不等的小棒。

教师引导：也就是说，相交于一个顶点上有三条棱，这三条棱的长度分别叫做长方体的长、宽、高。（把长方体水平放置）一般情况下，底面较长的那条棱是长，较短的是宽，垂直的是高，你能来指一指这个长方体的长、宽、高吗？

(3) 抽象图中的长方体，得出“面”的特征。

①教师：如果我们将这个长方体画在书上（课件出示下左图），在这个长方体中找到了3条长、3条宽和3条高，还有1条长、宽、高藏在哪里呢？

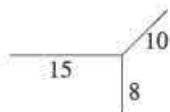
（学生通过想象，指出被遮挡的长、宽、高，课件辅助显示下右图）



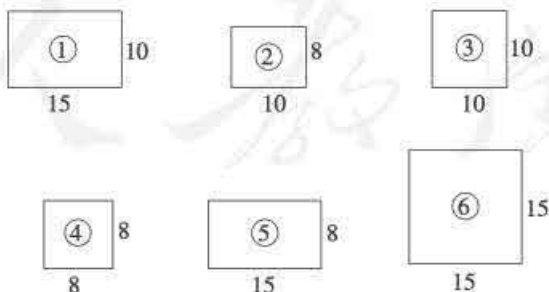
②教师：进一步思考，假如把其中1条棱隐藏，还能想象出它原来的样子吗？再隐去2条呢？请同学们思考：只要保留几条就能想象出原来的样子？

教师：怎样的3条？

课件依次隐去1条棱、2条棱、3条棱，显示右图：



③从这幅图中，你能否想象出这个长方体6个面的大小？在下面的图中选一选。



通过对6个面的选择，进一步验证长方体相对的两个面大小相等。

小结：“长方体相对的面大小相等”，利用这一发现，同学们只需要根据相交于一个顶点上的三条棱（长、宽、高），就能想象出长方体每一个面的大小。

(4) 反馈“方案3”“方案4”：拓展长方体类型，沟通一般与特殊之间的联系。

①教师（出示方案3）：这个长方体与用1号方案搭的长方体相比，有什么特别之处吗？

学生：方案1搭的长方体六个面都是长方形，方案3搭的长方体有两个面都是正方形。

教师：是的，这是方案1搭的长方体（课件出示图），我们可以将它怎样变化，得到方案3搭的长方体呢？（课件动态演示，将棱长10 cm 缩短为8 cm。）

②教师：再进一步思考，我们能不能继续把这个长方体变化成正方体，有什么办法吗？

（根据学生反馈，课件动态演示，将棱长15 cm 缩短为8 cm。）

③这么特殊的长方体（正方体），有哪些同学搭出来了？

师（展示用“方案4”所搭成的正方体）：正方体与长方体相比有什么相同，什么不同？

学生观察，交流长方体与正方体的相同点与不同点。

小结（出示集合图）：这个图什么意思？在以前的学习中有没有这样的图？（再出示长方形、正方形的集合图，体会两者关系。）



(三) 巩固与应用，发展空间观念

1. 练习1：立足空间想象，巩固并利用特征解决问题。（出示教材第21页第1题）

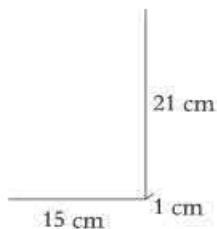
教师：这个纸盒的前面是什么形状？长和宽各是多少？和它大小相同的面是哪一个？

教师：它的右面是什么形状？长、宽各是多少？

教师：哪几个面的长是24厘米，宽是12厘米？

2. 练习2：由图示想实物，促进表象建立，渗透后续目标。

教师：老师这里有很多长方体和正方体物体，选择了一个物体并画出它的三条棱，请你想象并估计，这是什么物体？（课件出示右图）。



(1) 出示长、宽、高（21 cm、15 cm、1 cm）。

结论：数学书。

(2) 出示长、宽、高（6 cm、6 cm、6 cm）。

结论：正方体魔方。

(3) 出示长、宽、高（21 cm、15 cm、0.01 cm）。

结论：数学书的一页纸。

教师：纸虽然很薄，但也是长方体。

(四) 小结

教师：通过今天的学习，你有哪些收获？（略）

课题2：长方体和正方体的表面积

教学设计：陈春良。

教学内容：教科书第23~24页及练习六的相关内容。

教学目标：

1. 理解长方体和正方体的表面积的概念。
2. 能根据长方体和正方体的特征，自主探究出计算长方体和正方体表面积的方法。

3. 能解决有关表面积计算的实际问题。

4. 发展学生的空间观念，在探究过程中培养学生的比较、概括和推理等能力。

教学重点：探究表面积计算方法，应用表面积计算方法解决实际问题。

教学难点：应用表面积计算方法解决实际问题，培养空间想象能力。

教具准备：教学课件、一个橘子、一个普通的长方体盒子和有两个相对的面是正方形的长方体盒子、一个魔方。

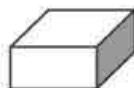
学具准备：剪刀、一个自制长方体纸盒（长8 cm、宽5 cm、高4 cm）。

教学过程：

（一）物体与图形的表面积

1. 认识表面积的含义。

教师：今天我们来学习长方体和正方体表面积的有关知识，什么是物体的表面积？你能借助这两样东西说一说吗？（出示课件）



学生1：把橘子剥开，把皮摊平，橘子皮的面积就是橘子的表面积。

学生2：纸盒剪开后展开的平面图形的面积就是纸盒的表面积。

学生3：纸盒的6个面面积相加的和就是纸盒的表面积。

教师：怎样计算这两个物体的表面积呢？

2. 揭示课题。

（1）橘子的表面积计算。

学生1：把橘子皮展开在边长是1 cm的格子图里就可以估算出面积。

学生2：把橘子皮展开，剪拼后测量并估算出面积。

教师：用学过的求不规则图形面积的方法来计算，很好。纸盒的表面积又该如何计算呢？

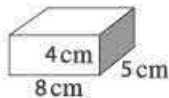
（2）出示课题：长方体和正方体的表面积。

学生：纸盒是长方体形状的，是规则物体，可以通过计算长方体各个面的面积来计算它的表面积。

教师：今天我们就来研究长方体和正方体的表面积的计算方法。

（二）长方体表面积计算方法的探究与理解

教师：同学们都准备了长方体纸盒（长8 cm、宽5 cm、高4 cm），现在我们来探究这个长方体表面积的计算方法。



1. 活动要求。

（1）独立思考，探究计算长方体纸盒表面积的方法。

（2）思考：长方体的表面积与什么有关？计算方法是什么？

2. 学生活动。

3. 活动反馈。

教师：现在请你来跟全班同学交流，长方体的表面积和什么有关？计算方法是怎样的？

①第一种情况：

学生1：长方体的表面积和每个面的面积有关系，所以把每个面的面积计算出来再相加算出总面积。算式是， $8 \times 4 + 8 \times 4 + 5 \times 4 + 5 \times 4 + 8 \times 5 + 8 \times 5 = 184$ (cm^2)。

教师：大家能明白吗？谁知道他算式中的每一步都是在算哪个面的面积？

学生2：两个 8×4 分别算的是前后两个面，两个 5×4 分别算的是左右两个面，两个 8×5 分别算的是上下两个面。

教师：谁来概括刚才这位同学的方法？

学生3：长 \times 高+长 \times 高+宽 \times 高+宽 \times 高+长 \times 宽+长 \times 宽=长方体表面积。

②第二种情况：

学生1：长方体的表面积和6个面的面积有关系，根据长方体面的特征，我把它们分三组，然后计算出表面积。算式是： $8 \times 4 \times 2 + 5 \times 4 \times 2 + 8 \times 5 \times 2 = 184$ (cm^2)。

教师：为什么？

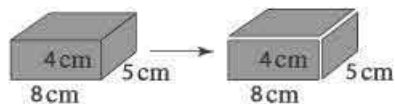
学生2：因为长方体相对的两个面的面积相等，所以可以一对一对的算。

教师：太棒了，这个方法请每个同学用文字概括出来，自己读一读，想一想分别算了哪两个面的面积。

学生：长 \times 高 $\times 2$ +宽 \times 高 $\times 2$ +长 \times 宽 $\times 2$ =长方体表面积。

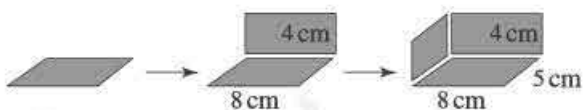
③第三种情况：

学生1：我也认为长方体的表面积和6个面的面积有关系，根据长方体面的特征，我把它们分两组。不同的三个面为一组。比如，正面、上面、右面为一组。



(教师根据学生回答，出示课件)

教师：出示课件。这样的三个面为一组，你能想象长方体的所有表面吗？



(学生想象长方体表面)

根据这些同学的想法，该如何计算这个长方体的表面积呢？

学生1：计算长方体表面积的计算式是： $(8 \times 4 + 5 \times 4 + 8 \times 5) \times 2 = 184$ (cm^2)。

教师：谁能结合图再解释这个算式？

学生： $8 \times 4 + 5 \times 4 + 8 \times 5$ 分别算出正面、右面、上面三个面积的和，“ $\times 2$ ”就是还有一组三个对应的面，分别是后面、左面、下面。

教师：请大家把这种计算方法用文字概括。

学生： $(\text{长} \times \text{高} + \text{宽} \times \text{高} + \text{长} \times \text{宽}) \times 2 = \text{长方体表面积}$ 。

4. 方法比较、小结。

教师：结合图形比较三种方法，你得出什么结论？

(1) 学生讨论。

(2) 交流。

学生1：第一种方法一个面一个面计算，比较麻烦，后面两种方法一组一组的算，比较简便。

学生2：长方体的表面积应该跟长方体的长、宽、高有关系。

教师：通过研究，可以发现长方体的表面积和它的面有关，其实就是跟它的长、宽、高有关系，我们要找准每个面的长和宽。

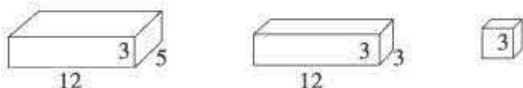
教师：非常好。其实我认为第一种方法是最基本的，也很重要，知道为什么吗？

学生：如果不是长方体，其他的立体图形表面积可能就需要一个面一个面进行计算了。

(三) 长方体、正方体表面积的计算

1. 计算立体图形的表面积。

课件出示。(单位：cm)



(1) 学生观察、比较，计算表面积。

(2) 反馈。

①两个相对的面是正方形的长方体表面积计算。

教师：比较前两个长方体表面积的计算方法。

学生1：两个长方体都可以用“(长×高+宽×高+长×宽)×2”的公式进行计算。算式分别是 $(12 \times 3 + 5 \times 3 + 12 \times 5) \times 2 = 222(\text{cm}^2)$ ， $(12 \times 3 + 3 \times 3 + 12 \times 3) \times 2 = 162(\text{cm}^2)$ 。

学生2：第二个长方形有两个相对的面是正方形，根据面的特征还可以更简便。算式是， $12 \times 3 \times 4 + 3 \times 3 \times 2 = 162(\text{cm}^2)$ 。

教师：谁能说说，“ $12 \times 3 \times 4$ ”表示什么意思？

学生：这个长方体的上、下、前、后四个面是大小一样的长方形，一个面的面积是 12×3 ，有这样的4个面，就是 $12 \times 3 \times 4$ 。

教师：能根据不同长方体面的特征选择方法来计算表面积，很棒！

②正方体表面积的计算。

教师：那么正方体的表面积又是怎么计算的呢？

学生1： $(3 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3) \times 2 = 54(\text{cm}^2)$ 。

学生2： $3 \times 3 \times 6 = 54(\text{cm}^2)$ 。

教师：哪位同学来评价他们不同的方法？

学生3：第一位同学把正方体看作是长方体，长=3，宽=3，高=3，然后按公式进行计算；第二位同学利用正方体的特征，6个面都是大小相同的正方形，所以只要 $3 \times 3 \times 6$ 就可以了。

教师：那么正方体的表面积计算公式可以怎样表示？

学生：正方体表面积=棱长×棱长×6，字母表示： $S=6a^2$ 。

2. 课堂小结。

教师：学到现在，你知道哪些关于长方体和正方体的表面积知识？

(四) 巩固练习

1. 基本练习。

(1) 出示课本第24页“做一做”、第26页第8题：

①亮亮家要给一个长0.75 m、宽0.5 m、高1.6 m的简易衣柜换布罩（没有底面）。至少需要用布多少平方米？

②一个玻璃鱼缸的形状是正方体，棱长3 dm。制作这个鱼缸时至少需要玻璃多少平方分米？（鱼缸的上面没有盖。）

(2) 学生尝试解答后反馈。

第①题：

学生1： $(0.75 \times 0.5 + 0.75 \times 1.6 + 0.5 \times 1.6) \times 2 = 4.75(\text{m}^2)$ 。

学生2： $0.75 \times 0.5 + (0.75 \times 1.6 + 0.5 \times 1.6) \times 2 = 4.375(\text{m}^2)$ 。

教师：哪个是对的？错的同学问题出在哪里？

学生3：第一种是错的，没有底面，也就是“长×宽”不能“×2”。

第②题：

学生1： $3 \times 3 \times 5 = 45(\text{dm}^2)$ 。

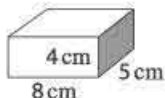
教师：有不同意见吗？为什么“×5”？

教师：通过刚才两道题的练习，对你有什么启发？

学生：解决实际问题时要根据实际情况进行灵活计算。

2. 拓展提高。

教师：（出示课件）如果把研究的这个长方体盒子的长减少2 cm，那么表面积减少多少？你能从多种角度思考吗？



(1) 学生思考解决问题。

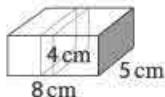
(2) 反馈。

学生1： $(8 \times 4 + 5 \times 4 + 8 \times 5) \times 2 - (6 \times 4 + 5 \times 4 + 6 \times 5) \times 2 = 36(\text{cm}^2)$ 。

学生2： $(2 \times 4 + 2 \times 5) \times 2 = 36(\text{cm}^2)$ 。

教师：你是怎么想的？

学生2（在图上画）：减少2 cm就是前面和后面各减少 $2 \times 4 \text{ cm}^2$ ，上面和下面各减少 $2 \times 5 \text{ cm}^2$ 。



教师：非常棒，我们也可以剪下来观察，其实就是一条环带。

学生3： $(4+5) \times 2 \times 2 = 36(\text{cm}^2)$ 。

教师：这又是怎么想的？

学生3：减少的表面积就是宽是2 cm的一圈，打开就是一个长方形。所以用一周的长度

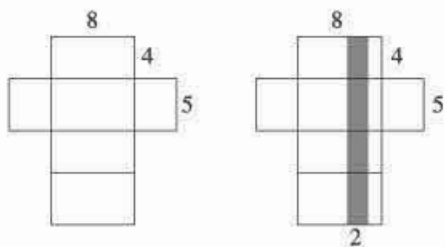
$(4+5) \times 2$ 再乘宽，也就是乘 2。

学生 4： $(4+5) \times 2 \times 2 = 36(\text{cm}^2)$ 这种方法也可以这样理解：

（剪开自己的长方体纸盒并展开）长方体的表面积就是展开的平面图形的面积。减少 2 cm 相当于减少了一个宽是 2 cm，长是 $(4+5) \times 2$ cm 的长方形。

教师：（出示课件展开图，如上右图）请这位同学再来指着屏幕上的展开图给大家解释。

（五）回顾小结（略）



三、备课资料

怎样提升培养空间观念的教学水平^①

小学阶段是人一生中空间观念发展的重要时期。在此阶段，怎样培养和发展学生的空间观念，是一个理论性和实践性都很强的课题，已有大量的相关论述与经验总结。这里本着“跨越断层，走出误区”的取向，择要表达一些个人见解。

1. 借鉴相关理论

长期以来，我们研究“教”远多于研究“学”，随着“教育以学生发展为本”的观念成为共识，情况开始好转，但心理学理论的应用仍处于教学研究的边缘。

例如，教学体积概念的展示课，从老鼠与大象比大小开始，多媒体课件的演示一个接一个，有等长的两根木棍比粗细、封面面积相等的两本书比厚薄，还有各种各样体积不变的变换实例（见图 1）：



图 1

学生自然是兴趣盎然。可是，所有这些辨析内容，让人联想起幼儿园大班的教学活动。小学五年级学生还需要吗？

^① 曹培英：跨越断层，走出误区：“数学课程标准”核心词的实践与解读之三——空间观念（下），载于《小学数学教师》2013年第5期。

皮亚杰关于儿童获得体积守恒观念的实验及其结论告诉我们，受过教育和未受过教育的儿童大约在相同的年龄出现各种守恒能力，实现体积守恒的年龄是11—12岁。检测的方式是：

把纸片假设为湖，上面的方形是小岛，询问儿童在这些不同面积的小岛中盖房子，要能住下相同的人，该如何建。以此考察儿童是否理解通过高度的增加来弥补面积的减少，从而达到体积守恒（房子一样多）。^①

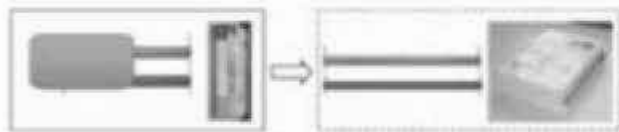
把测试题改编成如下表述：

在两块地上建房子，一块地200平方米，建了三层楼，另一块地100平方米，要建同样大小、同样多房间的楼，你有办法吗？

在教学体积概念之前，对36名五年级学生（2名10岁，5名12岁，其他皆为11岁）进行检测，所有学生几乎都毫无困难地作出了正确的回答。

可见，教学的起点，应该是在学生已经具有体积守恒观念的基础上，使他们理解“体积”的词义，建立“三维”观念。如：

下面两支铅笔的体积一样大吗？两本书呢？为什么？



.....

图2

2. 加强两种直观^②

理论和实践都能告诉我们，小学生形成、发展空间观念主要依靠“视”与“触”，亦即主要途径、手段是观察与操作，两项都属于直观教学范畴。

(1) 视觉直观

观察是一种有思维积极参与的感知活动。正是在这个意义上，人们常说观察是智力活动的门户。

小学生观察能力的发展与空间观念的发展，基本上是同步的。主要表现为：从感知强刺激成分到感知弱刺激成分；从认识单一要素到认识要素关系；从熟悉标准图形到熟悉变式图形。

笔者曾总结引导学生观察空间形式的基本教学策略：比较、辨析图形的异同；在运动变化中观察图形特征；在各种背景中识别基本图形。鉴于这些对策已为广大教师所熟知，因此本文不再展开。

(2) 动作直观

小学图形与几何教学中的动作直观主要有两类，即操作实验活动与画图。

先谈操作实验。

最常用的操作实验有图形的拼摆、折叠、划分、测量、割补以及制作模型等。目前，各套

^① 朱智贤主编：《儿童心理学史论丛》，北京，北京师范大学出版社，1982年版。

^② 曹培英：怎样培养、发展小学生的空间观念，载于《小学数学教育》2010年第5期。

教材都安排了很多这方面的内容，教师也积累了丰富的经验。

有必要指出：在整个小学阶段，触觉、运动觉与视觉的协同活动，始终是获得空间观念的有力支撑；即使到了高年级，当空间想象受阻时，提供操作材料动手实验，依然是行之有效的教学对策。试举一例。

有一道非常经典的几何题：

把一个表面涂色的大正方体木块，切割成 27 个同样大小的小正方体木块。三面、两面、一面涂色的小正方体木块各有多少个？表面无色的小正方体木块有多少个？

前一问的答案正好分别对应正方体有 8 个顶点（三个面的交点）、12 条棱（两个面相交的边）、6 个面，最后剩下

$$27 - 8 - 12 - 6 = 1 \text{ (个)}$$

包在中间，六面无色，即后一问的答案。

这道题的经典意义在于形体特征与空间观念的有机整合，在于基本概念与答案之间简洁、明了的对应。自然也有遗憾，那就是挑战性不够。空间观念强的学生凭空就能想象，空间观念弱的学生看图也能明白。如果仅仅加大难度，比如将切割成 27 个改为 1000 个，或者将正方体改成长方体，并且去掉“同样大小”等，则破坏了答案的简洁性，且空间想象的余地并不大。

采用突破思维定式的方式对上题加以改造：

一个表面涂色的长方体木块，长、宽、高都是整数厘米，把它切割成若干个棱长 1 厘米的小正方体木块。

①如果存在恰有五个面涂色的小正方体，那么这样的小正方体最多有几个？

②如果其中只有两个面涂色的小正方体恰有 4 个，那么大长方体的长、宽、高各是多少厘米？

此题曾让教师解答，参加培训的近 50 名教师只有 3 人全对。

给五年级学生思考，允许用小立方体学具摆一摆，他们一动手，就发现了最多只有 2 个小正方体恰有五个涂色的面（图 3）。部分学生还能说出理由：有五个涂色面的小正方体只有 1 个面与其他正方体重合，所以只能在长方体两头，而且长方体只能由一排小正方体组成。第②问也有不少学生找出了全部答案（图 4）。



图3

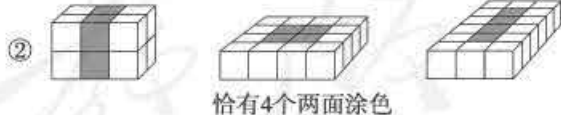


图4

显然，让学生多种感官协同活动，自己构造直观，有效地支撑了空间想象，有利于空间观念最近发展区的最大化。

.....

3. 重视两个“结合”^①

(1) 语言与形象结合

语言是通过教学促进学生空间观念发展仅次于直观的重要手段。

从图形的认识来看，小学生空间观念的年龄特征，决定了他们正处在由以依据表象为主的直观辨认水平，逐步向以依据特征为主的初级概念判断水平发展。这种发展的中介，就是用语言概括、描述形体特征。

从语言的介入来看，小学生空间观念的发展，主要表现为两个特点：一是从直观辨认图形到语言描述特征；二是从使用日常用语到使用几何语言。

例如，从身高、树高等生活中“高”的认识，到几何图形中“高”的认识；从平行四边形的高（平行线间的距离）、三角形的高（点到直线的距离）的认识，到圆柱的高（平行平面间的距离）、圆锥的高（点到平面的距离）的认识，离开了语言描述是难以完成的。

这里的重要概念“垂直”与“垂直线段”，在小学通常只给出二维平面上的界定，回避三维空间中的说明，至多是用“距离最近”“长度最短”等解释加以直观刻画，但语言描述仍然是不可或缺的。这里的表象倘若没有初步的、笼统的概念作支撑，就只剩空间知觉了。

可以说，小学生学习几何与形成空间观念的过程，在某种意义上也是掌握几何语言的过程。在此教学过程中，教师必须充分运用语言工具，通过引入几何语言同化、矫正日常用语，发挥其“调节”“内化”功能，这将大大促进小学生空间观念的形成与发展。

为此，首先应当重视适时抽象概括，并采用适当的语言，把图形及其位置关系的本质特征表达出来。这方面，教材上的用语都经过周密考虑，精心设计。对于教师来说，重要的是在课堂教学过程中，如何根据小学生的认知特点和具体内容的实际情况，作出适当选择，相机给予启发。

.....

(2) 数与形结合

数形结合在几何研究中的作用，数学家华罗庚有过非常精辟的论述“数让形更入微”。即便是小学的几何，无论是研究形体的形状、大小，还是研究它们的位置关系，都既需要定性描述，又离不开定量刻画。

例如，长方体的特征，决定了它们的一般形状，每一个长方体的具体形状、它的大小，还需要通过长、宽、高，用数量来刻画。

又如，平面上两条不重合直线的位置关系，要么相交，要么平行，这是定性分类。进一步的研究，就要通过度量，用到夹角的大小、平行线间的距离。如果两条直线相交，只要知道其中一个角是直角，就可以推出其他三个角都是直角，这些都是初步的定量研究。

可见，小学数学同样是“数让形更入微”。

在小学，尤其是在“求积”计算的教学过程中，数形结合还具有特殊的教学法意义。比较常用的策略如：将图形的特征与图形的计算相结合，通过图形、算式对照来讲清算法与算理，

^① 曹培英：怎样培养、发展小学生的空间观念，载于《小学数学教育》2010年第5期。

等等。这些策略在公式推导、问题解决的教学中，都有明显实效。

.....

四、评价建议与评价样例

(一) 评价建议

本单元知识能力的评价主要包括 (1) 掌握长方体、正方体的特征、关系，能正确应用；(2) 长(正)方体表面积的意义、计算方法及其应用；(3) 长(正)方体体积(容积)的意义、计算方法及其应用；(4) 常用体积单位、容积单位的意义及实际观念；(5) 不规则物体体积的计算方法。

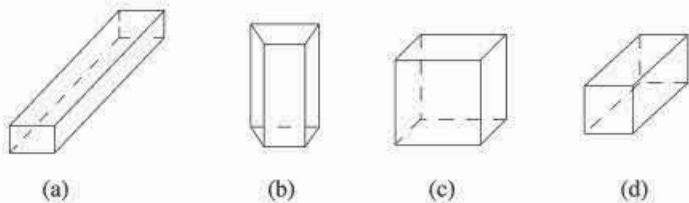
(二) 评价样例

以下为笔试评价样例，可以分项进行评价。第一部分为知识技能，主要对本单元的概念、特征、意义、公式等基础知识、基本技能进行评价；第二部分为综合应用，一是将本单元多个知识点进行综合应用，二是将知识置于新情境中进行问题解决。

第一部分 知识技能

1. 填空。

(1)



_____图是长方体，_____图是正方体。

(2) 在括号里填上适当的单位。

电冰箱的容积是 200 ()。

一块橡皮的体积约是 3 ()。

教室中黑板的面积大约是 4 ()。

一盒牛奶的体积是 250 ()。

(3) 在括号里填上合适的数。

$0.25 \text{ m}^3 = () \text{ dm}^3$

$600 \text{ mL} = () \text{ L} = () \text{ cm}^3$

$1.5 \text{ L} = () \text{ cm}^3$

$4.5 \text{ dm}^3 = () \text{ L} = () \text{ mL}$

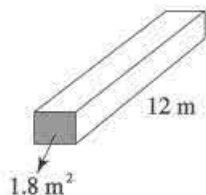
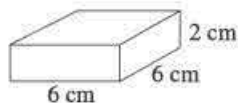
(4) 用铁丝焊接一个长方体框架，同一顶点上的三根铁丝长分别为 20 cm、15 cm 和 12 cm，则一共用了 () cm 铁丝。

(5) 长方体纸盒的长为 a cm，宽和高都是 b cm，用含有字母的式子表示这个纸盒的表面积是 () cm^2 。

(6) 一个正方体的表面积是 96 m^2 ，它每个面的面积是 () m^2 ，这个正方体的棱长总和是 () m，体积是 () m^3 。

2. (1) 计算长方体的表面积与体积。

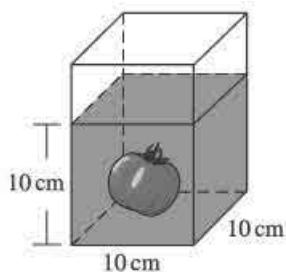
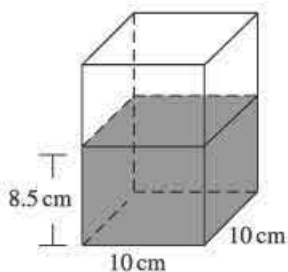
(2) 计算长方体的体积。



第二部分 综合应用

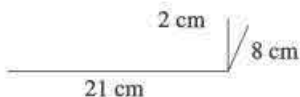
1. 填空。

(1) 西红柿的体积是 () cm^3 。



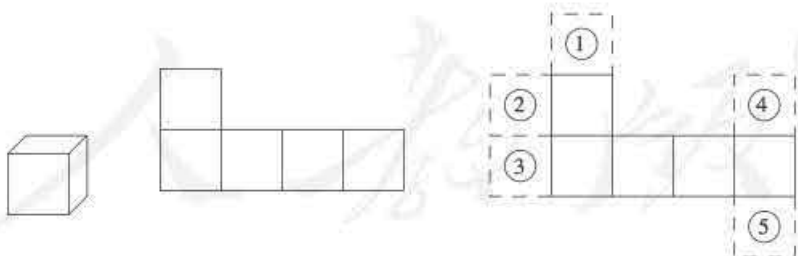
(说明：此题考查求不规则物体的体积计算方法。)

(2) 下面是一个长方体物品的长、宽、高，请你根据具体数据估计这可能是一个 ()。它的体积是 ()。



(说明：此题考查体积计算的同时，考查空间观念，能否由立体图想象出实物。)

(3) 左图是一个立方体，立方体展开有 6 个面，中间图给出了其中的 5 个面，请从右图 ①~⑤ 中选一个形成立方体展开图，这个面是 ()。

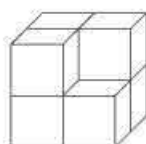
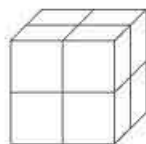


(说明：此题考查空间观念，能否由立体图转化为展开图。)

(4) 根据右图，填“>”“<”或“=”。

甲体积 () 乙体积；

甲表面积 () 乙表面积。



(甲)

(乙)

(说明：此题考查表面积与体积的概念理解。)

(5) 下面是老师为同学们准备的小棒（有剩余），用这些小棒搭成一个长方体，这个长方体的体积是（ ） cm^3 。

小棒长度	根数
9 cm 	3
7 cm 	8
4 cm 	5

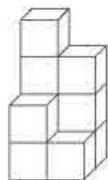
(说明：此题考查长方体棱的特征以及体积计算方法。)

(6) 右边两个立体图形都是由棱长为 1 cm 的正方体搭成。

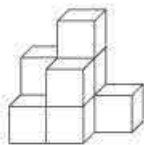
①号的表面积可以这样计算：

$$(4 + 7 + 6) \times 2 = 34 (\text{cm}^2)$$

从上面看 — 从正面看 — 从左面看



①

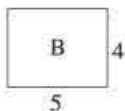
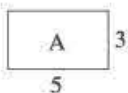


②

根据①号表面积的求法，②号表面积是（ ）。（要写出算式）

(说明：将方法学习融于评价中。给出求表面积的一种新方法，考查学生自学与应用的能力。)

(7) 有 A、B、C 三种规格的纸板（数量足够多），从中选六张做成一个长方体（长、宽、高都相等的除外），这个长方体的体积是（ ） cm^3 。

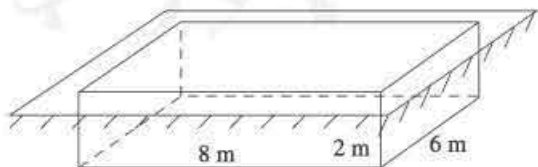


(单位：cm)

(说明：此题融“特征”“体积”及“空间观念”的考查于一体。选择合适的长方形作为长方体的面，需要基于“相对的面相等、相邻两个面公共棱相等”等特征理解，同时，借助于较好的空间想象能力，想象出长方体的形状大小求体积，则考查学生体积计算方法是否掌握。有两种答案。)

2. 解决问题。

(1) 挖一个长 8 m、宽 6 m、深 2 m 的蓄水池。



①这个蓄水池的占地面积是多少平方米？

②如果给这个蓄水池的四周和底部抹上水泥，抹水泥部分的面积是多少平方米？

③这个水池最多能蓄水多少吨？(1 m^3 的水重 1 吨)

(说明：每个实际问题对应于已经学习的哪个知识点，是学习的难点。此题考查将问题解

决与相应知识点建立联系的能力。)

(2) 一块长方体形状的玻璃的长是 1.2 m, 宽是 50 cm, 厚是 1 cm。已知每立方分米的玻璃质量为 2.5 kg, 这块玻璃的质量是多少千克?

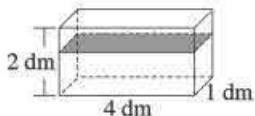
(说明: 将体积单位的换算融于问题解决中。)

(3) 一个长方体的底面是一个周长为 30 cm 的长方形, 高为 10 cm, 如果长和宽的厘米数都是合数, 那么这个长方体的体积是多少?

(说明: 关注知识的综合应用, 将本单元的内容与因数与倍数的知识进行综合应用。)

(4) 选做题。

一个密封的长方体容器(如图), 长 4 dm, 宽 1 dm, 高 2 dm, 里面水深 16 cm。现在把这个容器的左侧面放在桌面上。



①这时水深多少厘米?

②此时, 水与容器的接触的面积是多少平方厘米?

(说明: 首先, 此题为选做题, 供学有余力的学生选做。其次, 此题为问题解决策略多样化提供空间。可用“体积 \div 底面积”的一般思路, 也可根据两个底面大小关系解决, 左侧面是下底面的一半, 则高是原来的 2 倍。最后, 重视空间观念的考查。求水与容器的接触面积, 需要学生有较强的空间观念。)

人教版®

探索图形

一、教材说明和教学建议

(一) 教学目标

1. 加深对正方体特征的认识和理解。
2. 通过观察、列表、想象等方式探索、发现图形分类计数问题中的规律，体会化繁为简解决问题的策略，培养学生的空间想象力。
3. 体会分类、数形结合、归纳、推理、模型等数学思想。

(二) 内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

在认识长方体和正方体后，教材安排了“探索图形”的综合与实践活动。目的是让学生运用所学过的正方体的特征等知识，探索由小正方体拼成的大正方体中各种涂色小正方体的数量，发现其中蕴含的数量上的规律，以及每种涂色小正方体的位置特征，培养学生的空间想象力和推理能力，体会分类计数的思想。

活动内容分为四个层次。

第一个层次是提出要解决的问题。教材首先提出问题，用棱长 1 cm 的小正方体拼出棱长为 2 cm、3 cm、4 cm 的大正方体，然后把大正方体表面涂色。找出小正方体中三面、两面、一面涂色以及没有涂色的个数。

第二个层次是尝试解决，发现规律。学生尝试用列表的方式表示出问题，通过观察、想象和推理找出每种涂色情况的小正方体的块数。在尝试的过程中，逐步发现每种涂色情况的位置特征和规律。

第三个层次是应用规律解决问题。发现规律后，再利用规律找出棱长 5 cm 和 6 cm 的大正方体的涂色情况，加以验证，并进一步应用到更多的大正方体中。

第四个层次是拓展应用。完成以上任务后，教材进一步拓展，用小正方体摆出其他形状的组合体，利用前面积累的活动经验和方法进行问题解决的探究。

2. 教材编排特点。

注重动手实践与自主探索，促进学生空间观念的发展。

学生在具体的数学活动中，动脑、动手、动口，多种感官协调活动，这样的数学活动有利于学生在独立思考和小组合作交流中从多角度去感悟，体会分类计数、推理和数形结合的数学思想，丰富自己的思维活动经验。帮助学生从直观观察立体图形形象，头脑中建立表象，到最终能够根据直观立体图形进行推理想象，进而归纳出不同涂色面数的小正方体的数量规律，促进学生空间观念的发展，提高学生空间想象能力。

（三）教学建议

1. 全体参与活动，让每个学生体验成功的乐趣。

综合与实践活动大都是在学生喜闻乐见的游戏、操作等活动中再现知识，学生对这样的活动积极性很高，要达到使学生全体参与的目的，必须在活动中使每人都有活动的时间。在安排活动时，要注意放手让学生自主探索，可让学生先用小正方体摆一摆，看一看。采用分小组活动与全班集体活动相结合的形式，让每一个学生都有活动的空间和时间，使学生在数学实践活动中学会求知、学会合作、学会交流，在活动中品尝获得成功的乐趣。

2. 在探索规律的过程中，积累数学思维的活动经验。

探索图形分类计数问题中的规律，重在探索而不是规律的应用。学生通过探索图形涂色规律的活动，可深化对正方体特征的认识，不断拓宽获取数学知识的渠道，感受数学思考的魅力，激发探索规律的兴趣，从而产生对数学的好奇心和求知欲。在探索规律的过程中，教师要注意帮助学生积累由特殊到一般寻找规律的数学经验，找到探索规律的方法，找到探索规律过程中的深度体验。从而使学生会探索规律的方法，积累数学活动经验，感悟数学思想方法，充分彰显探索规律的教育价值。在活动中培养学生观察、分析、抽象和概括的数学思维能力。

3. 让学生亲身经历将实际问题抽象成数学模型并加以解释与运用的过程。

在探索图形涂色规律的活动中，要让学生初步体会建立数学模型的过程，即从具体到抽象，从特殊到一般，逐步揭示图形之间的内在联系，并用数学化的形式表示规律，从而把思维和推理提高到一个更高的层次。在逐渐深入的探讨过程中，要引导学生把握问题的共性，从而得到一般性的结论，鼓励学生用数学语言和模型正确地表达发现的规律。

4. 建议用1课时教学。

人教版®

(四) 具体内容的教材分析和教学建议

编写意图

探索由小正方体拼成大正方体的涂色规律, 经历解决图形分类计数问题的思考过程, 培养空间想象力和推理能力。分四个层次。

第一, 提出问题, 引导学生从简单图形入手, 进行探索, 体会化繁为简的思想。

第二, 引导学生用表格表示问题, 通过观察、想象和推理逐步找出①、②、③号正方体中每种涂色小正方体的数量, 在交流中体会、概括每种涂色小正方体蕴含的位置特征和数量规律。如: 三面涂色的小正方体一定是位于大正方体顶点的位置, 都是8个; 两面涂色的是位于每条棱上两个顶角之间的小正方体; 一面涂色的是每一面上除去外圈的小正方体; 没有涂色的就是隐藏在里面的小正方体。

第三, 完成④、⑤号正方体中的涂色问题, 对发现的规律加以验证, 并进一步应用到更大的⑥、⑦、⑧号正方体中。

第四, 呈现一组新的由小正方体按规律拼出的几何组合体, 让学生将上面解决问题的策略和经验迁移应用到新的问题中, 进一步探索图形的分类计数问题。

探索图形

用棱长1 cm的小正方体拼成如下的大正方体后, 把它们的表面分别涂上颜色。①、②、③中, 三面、两面、一面涂色以及没有涂色的小正方体各有多少块? 按这样的规律摆下去, 第④、⑤个正方体的结果会怎样呢?

①

②

③

把问题用列表的方式表示出来。

看看每层小正方体都在什么位置, 能否找到规律。

	三面涂色的块数	两面涂色的块数	一面涂色的块数	没有涂色的块数
①	8	0	0	0
②	8	12	6	1
③	8	24		
④				
⑤				

比有涂色的小正方体的数量?

观察上面, 你能发现什么?

(1) 你能继续写出第④、⑤个大正方体中4类小正方体的块数吗?
(2) 如果摆成下面的几何体, 你会数吗?

④

⑤

⑥

教学建议

(1) 体会化繁为简的策略, 积累解决问题的数学学习经验。

教材以探索图形分类计数为题材, 引导学生经历解决问题的思考过程。这种以几何图形呈现的问题, 便于动手操作, 可让学生先动手摆一摆, 通过直观观察建立表象, 为后面探索规律作铺垫。

为更好体会化繁为简的思想, 可先出示第⑧号图形, 引导学生认识到面对复杂问题, 可先从最简单的情况入手, 找出规律, 以简驭繁。这也是数学问题解决比较常用的策略之一。

(2) 培养空间想象力, 发展空间观念和推理能力。

在解决问题过程中, 学生从借助直观操作、观察立体图形, 建立表象, 到能够根据直观立体图形进行想象, 进而发现规律。循序渐进地促进学生空间观念的发展, 提高学生空间想象能力。有条件的话, 在学生交流规律后, 可引导学生推广到一般情况: 所有大正方体(由 n^3 个小正方体拼成)中, 三面涂色的小正方体都是8个; 两面涂色的小正方体为 $12(n-2)$ 个; 一面涂色的小正方体为 $6(n-2)^2$ 个; 没有涂色的小正方体为 $(n-2)^3$ 个。进一步培养学生的推理能力。

二、教学设计或教学片段

课题：探索图形

教学设计：景立新。

教学内容：教科书第 44 页内容。

教学目标：

1. 进一步认识和理解正方体特征。
2. 通过观察、列表、想象等活动经历“找规律”的全过程，获得“化繁为简”的解决问题的经验，培养学生的空间想象力，让学生体会分类、数形结合、归纳、推理、模型等数学思想。积累数学思维的活动经验。

3. 在相互交流中，学会倾听他人意见，及时自我修正、自我反思，增强学好数学的信心。

教学重点：学会从简单的情况找规律，解决复杂问题的化繁为简的思想方法。

教学难点：探索规律的归纳方法。

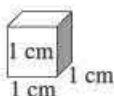
教学准备：小正方体学具和课件。

教学过程：

(一) 引发问题

1. 复习正方体的特征。

课件出示：

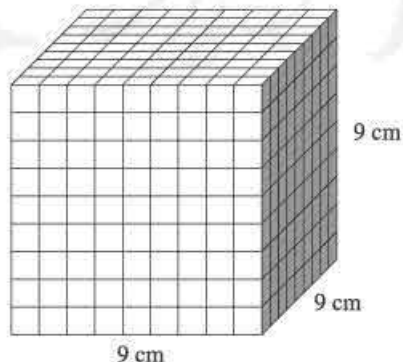


(1) 教师：请同学们看屏幕，这是什么图形？

(2) 教师：正方体有哪些特征？

2. 引出问题。

课件出示：



(1) 教师：如果用这样的棱长是 1 cm 的小正方体拼成一个大正方体，它是由多少个小正方体组成的？说说你的想法。

(2) 教师：如果把这个大正方体的表面涂上红色，需要涂几个面？（课件演示：把大正方体 6 个面涂上红色）

(3) 教师：请同学们想象一下，这些小正方体会有几个面被涂上红色？如果根据涂色的情况给这些小正方体分类，你想怎样分类？

（分为四类：三面涂色的，两面涂色的，一面涂色的和没有涂色的。）

(4) 教师：每一类小正方体分别有多少个呢？如果请你来数一数，你有什么感觉？

(5) 教师：这个图形太复杂了，我们数起来不方便。怎样才能解决这个问题，你们有什么好办法吗？

教师引导学生先研究简单的图形，发现规律之后，再利用规律去解决复杂的图形。

（设计意图：创设问题情境，大正方体中四类小正方体各有多少块？在解决这个问题的过程中，让学生充分地感受到用原有的经验和方法解决问题有困难，产生认知冲突，促使学生积极主动地思考解决问题的新方法，深刻体会化繁为简、探索规律解决问题的意义。同时对正方体特征的复习，为后面探索规律扫清知识上的障碍。）

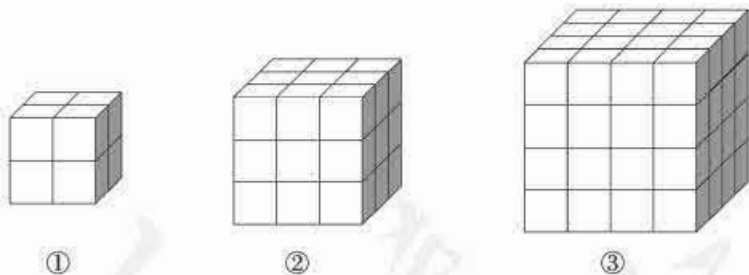
（二）探索规律

1. 发现规律。

(1) 教师：你认为什么样的图形比较简单，我们容易找到答案？

(2) 教师：下面，我们就先来研究这三个图形，看看有什么发现？

课件出示如下图形：



(3) 四人一组，小组合作研究。

出示活动建议。

①用小正方体学具摆出相应的图形。

②观察每类小正方体都在什么位置。

③把结果填写在记录表中。

④观察表中记录的数据，能否找到规律？

记录表如下。

	三面涂色的块数	两面涂色的块数	一面涂色的块数	没有涂色的块数
①				
②				
③				

(4) 汇报交流。

①各小组汇报时，配合课件演示，验证答案。

②教师适时提问：你们组是怎样算出没有涂色的块数的？（总块数－三面涂色的块数－二面涂色的块数－一面涂色的块数）

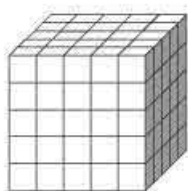
③学生初步发现规律：

	三面涂色的块数	二面涂色的块数	一面涂色的块数	没有涂色的块数
①	都是8个	0	0	0
②		$1 \times 12 = 12$	$1^2 \times 6 = 6$	$1^3 = 1$
③		$2 \times 12 = 24$	$2^2 \times 6 = 24$	$2^3 = 8$

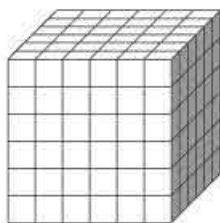
2. 验证猜想。

(1) 教师：按这样的规律摆下去，你能猜想一下第④个、第⑤个大正方体的结果吗？

课件出示：



④



⑤

学生猜想。

第④个大正方体：三面涂色8个；

二面涂色 $3 \times 12 = 36$ (个)；

一面涂色 $3^2 \times 6 = 54$ (个)；

没有涂色 $3^3 = 27$ (个)。

第⑤个大正方体：三面涂色8个；

二面涂色 $4 \times 12 = 48$ (个)；

一面涂色 $4^2 \times 6 = 96$ (个)；

没有涂色 $4^3 = 64$ (个)。

(2) 课件演示，验证学生的猜想。

3. 总结归纳。

教师：请同学们想一想，这些正方体中，每一类小正方体的块数为什么会有这样的规律呢？

师生共同归纳：

(1) 三面涂色的在正方体顶点的位置，因为正方体有 8 个顶点，所以都有 8 个；

(2) 二面涂色的在正方体棱上除去两端的位置，因为正方体有 12 条棱，所以有（每条棱上小正方体块数 - 2）× 12 个；

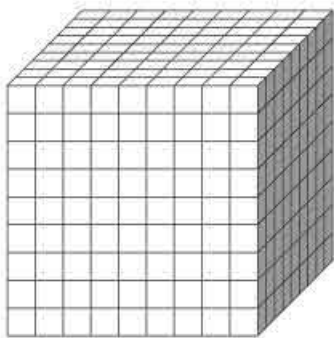
(3) 一面涂色的在正方体每个面除去周边一圈的位置，因为正方体有 6 个面，所以有（每条棱上小正方体块数 - 2）² × 6 个；

(4) 没有涂色的在正方体里面除去表面一层的位置，所以有（每条棱上小正方体块数 - 2）³ 个，或者，用总块数 - 三面涂色的块数 - 二面涂色的块数 - 一面涂色的块数。

4. 应用规律。

教师：现在能解决我们开始遇到的问题了吗？

课件出示：



三面涂色：8 个；

二面涂色： $(9-2) \times 12 = 84$ （个）；

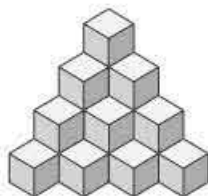
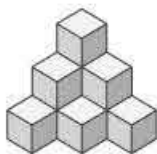
一面涂色： $(9-2)^2 \times 6 = 294$ （个）；

没有涂色： $(9-2)^3 = 343$ （个）或者 $9^3 - 8 - 84 - 294 = 343$ （个）。

（设计意图：引导学生经历发现规律—验证猜想—总结归纳—应用规律的过程，初步学会探索规律的方法，积累数学活动经验。）

（三）巩固迁移

课件出示。



1. 教师：如果请你数一数这样的几何体，你打算怎样做？

学生尝试用探索规律的方法解决：（学生边叙述，边配合课件演示）

第一层： 1 个

第二层：(1+2) 个

第三层：(1+2+3) 个

第四层：(1+2+3+4) 个

.....

第 1 个图形小正方体总数： $1+(1+2)=4$

第 2 个图形小正方体总数： $1+(1+2)+(1+2+3)=10$

第 3 个图形小正方体总数： $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)=20$

2. 教师：按这样的规律摆下去，第 5 个图形的结果是多少呢？

学生回答后，课件演示验证答案。

3. 教师：如果把这个几何体的表面涂上颜色，你能根据涂色的情况给这些小正方体分类吗？请同学们课后试一试。

（设计意图：在学生初步学会探索规律的方法的基础上，通过引导学生尝试用这种方法解决新的问题，进一步巩固和加深对解决问题的方法和策略的理解，培养实际应用意识。）

（四）课堂小结

教师：通过这节课的学习，你有什么收获？

小结：当我们遇到比较复杂的问题，解决起来有困难时，可以尝试先从简单的情况开始，看能否发现规律，再应用规律去解决复杂的问题，这是一种解决问题常用的思想方法。

三、评价建议与评价样例

（一）评价建议

本单元是数学实践活动课，主要目的是通过探索图形的活动，进一步加深对正方体特征的认识和理解。为学生积累丰富的数学活动经验，让学生体会分类、数形结合、归纳、推理、模型等数学思想，培养学生的空间想象力。

（二）评价样例

为方便教师评价，下面提供部分评价样例。

1. 有四个表面涂有红色的正方体，它们的棱长分别为 1 cm、3 cm、5 cm、7 cm，将这些正方体锯成棱长为 1 cm 的小正方体，得到的小正方体中至少有一面为红色的有多少个？

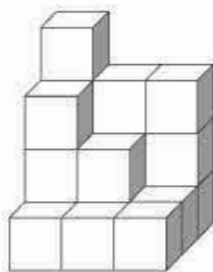
2. 一个表面涂满了红色的正方体，在它的每个面上都等距离地切两刀，切成了 27 个小正

方体。请问：

- (1) 三个面涂有红色的小正方体有多少个？
- (2) 两个面涂有红色的小正方体有多少个？
- (3) 一个面涂有红色的小正方体有多少个？
- (4) 六个面都没有涂红色的小正方体有多少个？



3. 把 19 个棱长 2 cm 的小正方体重叠起来，拼成为下图的几何体。求它的表面积。



人教版®

第四单元 分数的意义和性质

一、教材说明和教学建议

(一) 教学目标

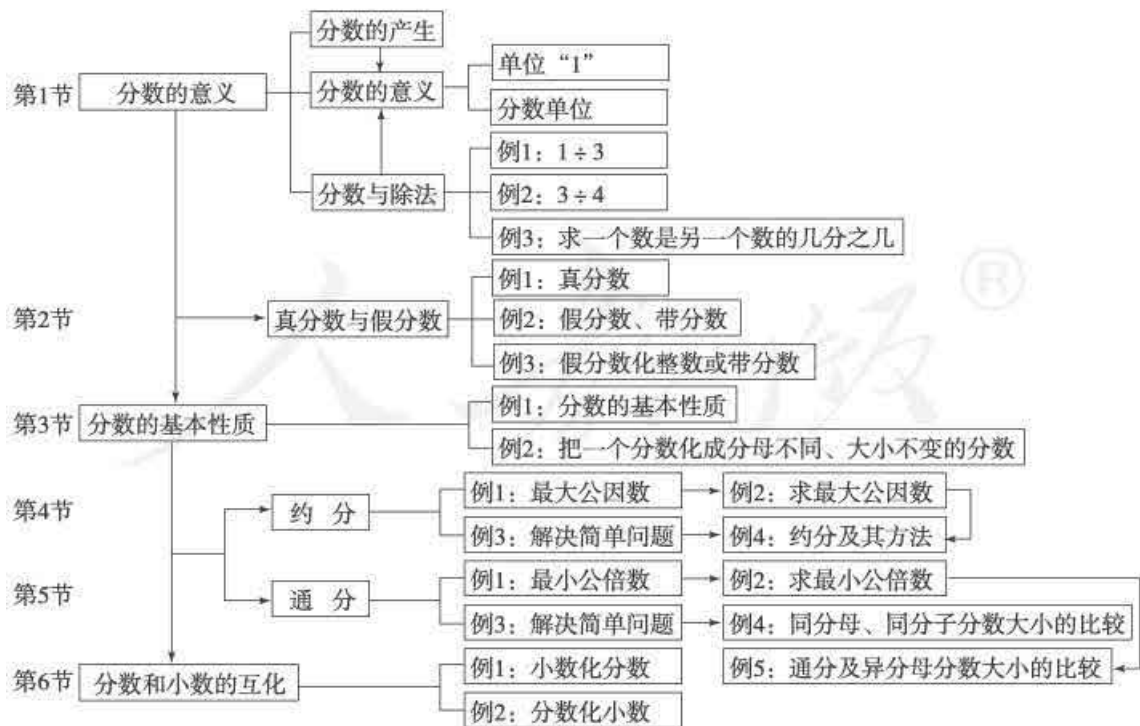
1. 知道分数是怎么产生的,理解分数的意义,明确分数与除法的关系。
2. 认识真分数和假分数,知道带分数是一部分假分数的另一种书写形式,能把假分数化成带分数或整数。
3. 理解和掌握分数的基本性质,会比较分数的大小。
4. 理解公因数与最大公因数、公倍数与最小公倍数,能找出两个数的最大公因数与最小公倍数,能比较熟练地进行约分和通分,并能应用所学知识解决简单的实际问题。
5. 会进行分数与小数的互化。

(二) 内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

本单元的主要内容有:分数的意义、真分数和假分数、分数的基本性质、约分、通分以及分数和小数的互化。

上述内容分为六节,各节的内容编排体系及内在联系如下表所示。



从上页的图表，不难看出六节教材的内容所具有的内在逻辑联系。

首先，第1节分数的意义和第3节分数的基本性质，是整个单元教学内容的主干，也是本单元教学的重点。第2节真分数和假分数是分数的意义的引申。第4节约分、第5节通分则是分数基本性质的运用。第6节沟通分数与小数在表现形式上的相互联系，得出了分数与小数的互化方法。整个单元的内容，大体上显现出由概念到性质，再到方法、技能的递进发展关系。

其次，在第1节里，分数的意义是学习的重点。这部分内容引入了两个新的概念，即单位“1”与分数单位。至于分数的产生、分数与除法的关系，则是从分数的现实来源和数学内部来源两方面帮助学生深化对分数的认识。

在第2节里，先通过两道例题，引入真分数、假分数、带分数三个概念，再通过例3，解决把假分数化成带分数或整数的问题。

在第3节里，先通过例1，得出分数基本性质，然后通过例2，在运用的过程中加以巩固。

在第4、5节里，先引入公因数与最大公因数，公倍数与最小公倍数的概念，再讨论求最大公因数、最小公倍数的方法，然后在此基础上，引入约分、通分的概念和方法。

显然，在第2、3、4、5节内部，同样显现出由概念到方法的逻辑关系。

2. 教材编写特点。

(1) 多角度呈现分数的来源。

在小学数学里，认识分数是学生数概念的一次重要扩展。教材从揭示产生分数的现实背景出发，帮助学生领会分数的含义，理解分数的概念。

从现实的角度来看，数是用来表示量的。5只兔、5个人等这些量的共同特征，可以用自然数5来表示。

现实世界中存在的量，除了上面列举的由一些单位量合成的，可以用自然数表示多少的量之外，还存在许多可以分割的，无法用自然数表示的量。例如，用一根作为单位长的木棒（米尺）去量一条线段 AB 的长，量了3次还有一段 PB 剩余。这时，运用自然数就只能粗略地说，这条线段长3米多一点。要更精确一些，就必须把度量单位等分成更小的单位，来度量余下的那条线段。比如把1米一分为四，则每等份叫做“四分之一”米，记作 $\frac{1}{4}$ 米。这就引入了形如 $\frac{1}{n}$ (n 为大于1的自然数) 的分数。假如使用度量单位 $\frac{1}{4}$ 米去量图中剩下的一条线段 PB ，量了3次恰巧量尽，那么 PB 的长就是“3个 $\frac{1}{4}$ 米”，记作 $\frac{3}{4}$ 米。这样就又引入了形如 $\frac{m}{n}$ (n 为大于1的自然数， m 为自然数) 的分数。历史上，分数正是为了比较精确地测量这类需要分割的量而引入的。



从数学的角度来看，分数的引入是为了解决在整数集合里除法不是总能实施的矛盾。比如， $2 \div 3$ 在整数范围内不能计算，引入分数就能记作 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ 。当然，这种抽象的表示方法

也有它的实际意义。例如，把2块饼平均分给3个人，每人分得 $\frac{2}{3}$ 块饼。

在本单元的第1节里，教材首先从历史的角度、从现实生活中等分量的需要出发，生动形象地呈现了分数的现实来源。

在引出分数概念之后，教材又通过分蛋糕、分月饼等实例，抽象出分数与除法的关系，使学生初步感悟：利用分数，可以解决整数除法除不尽的矛盾。从引入分数拓展数域范围的作用来看，实际上是从数学内部发展的角度，揭示了分数的来源。

这样，教材通过多角度呈现分数的来源，为学生提供了较为丰富的理解分数意义的教学素材。

(2) 把因数、倍数的有关知识与分数结合起来教学。

在小学数学中，因数、倍数有关知识的学习，主要是为学习分数服务的。但在以往的教材中，两者各自独立成章，概念多且抽象，不利于分散难点，也不利于认识的螺旋上升。学生不知道学了公因数、公倍数与最大公因数、最小公倍数有什么用，只能对一组组整数单纯地练习求它们的最大公因数或最小公倍数。

现在，把公因数、最大公因数的内容安排在约分之前教学；把公倍数、最小公倍数的内容在引进通分之前学习，从而将两部分知识紧密结合起来，学了就用，既能节省教学时间，减少单纯的枯燥练习，又有利于整除性知识的教学。

(3) 部分内容作了适当的精简处理或编排调整。

其一，分数大小比较，不在第1节中单列一段，而是充分利用前面学习分数初步认识时打下的基础，把有关内容与通分结合在一起学习。这样既简化了第1节的内容，也体现出通分的作用。

其二，增加了带分数的概念。虽然课程标准规定，分数运算中不含带分数，但考虑到把假分数化成带分数，容易看出这个假分数的大小在哪两个整数之间，以及便于比较两个分数的大小，从而有利于数感的形成。因此，教材增加了带分数的认识。

其三，最大公因数、最小公倍数先给出概念和求法，再应用到解决问题中。原来将解决问题与概念引入结合在一起，学生理解起来难度较大，所以，教材先给出最大公因数、最小公倍数概念，突出概念的本质，然后探索它们的求法，最后在解决问题的应用中体会它们的现实意义，加深对概念的理解。

(三) 教学建议

1. 关注学生已有的数学知识基础与学习经验。

在三年级上学期的学习中，学生已借助操作、直观的方式，初步认识了分数。在本学期，又学习了因数、倍数等概念，掌握了2、3、5的倍数的特征。这些，都是本单元学习的重要基础。教学时，应注意相关知识的复习，为学生全面理解分数的意义，掌握约分、通分的方法作好准备。

同时，这些知识在后面系统学习分数四则运算及其应用时都要用到。因此，学好本单元的

内容也是顺利掌握分数四则运算并学会应用分数知识解决一系列实际问题的必要基础。

2. 充分利用教材资源，用好直观手段。

本单元的特点之一就是概念较多，且比较抽象。而小学高年级学生的思维特点是他们的抽象逻辑思维在很大程度上还需要直观形象思维的支撑。因此，在引入新的数学概念时，适当加大思维的形象性，化抽象为具体、直观，对于顺利开展教学是十分必要的。所谓化抽象为具体，就是通过具体的现实情境，调动学生相关生活经验来帮助理解。所谓化抽象为直观，就是运用适当的图形、图示来说明数学概念的含义，这是小学数学最常用的，也是最主要的直观教学手段。

3. 及时抽象，在适当的水平上，建构数学的概念。

为了搞好本单元的教学，在加强直观教学的同时，还要重视及时抽象，不能听任学生的认知停留在直观水平上，妨碍学生对所学知识的理解和应用。例如：比较 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小。有学生回答，不一定谁大谁小，要看它们等分的那个圆哪个大，由此得出 $\frac{1}{3}$ 可能比 $\frac{1}{2}$ 大，也可能比 $\frac{1}{2}$ 小，还可能和 $\frac{1}{2}$ 相等。造成这种错误认识的主要原因，就在于过分依赖直观，而没有及时抽象到用分数的概念进行比较。因此，在充分展开直观教学，让学生获得足够的感性认识基础上，要不失时机地引导学生由实例、图示加以概括，建构概念。

4. 揭示知识之间的内在联系，在理解的基础上掌握数学方法。

在本单元中，约分与通分、假分数化为带分数或整数、分数与小数的互化的方法，都是必须掌握的。这些方法看似头绪较多，但归结为基础知识，就是揭示相关知识与方法的联系，就比较容易在理解的基础上掌握方法。以约分与通分为例，它们都是分数基本性质的应用。尽管约分时分子、分母同除以一个适当的数，通分时分子、分母同乘一个适当的数，但它们都是依据分数的基本性质，使分数的大小保持不变。因此，教学时不宜就方法论方法，而应凸显得出方法的过程，使学生明白操作方法背后的道理。这样就能在理解的基础上掌握方法，而不是依赖记忆进行机械的操作。

5. 建议用 19 课时教学。

人教版®

4 分数的意义和性质

1. 分数的意义

分数的产生



把桌上的东西平均分给两个同学。



每人平均分得 $\frac{1}{2}$ 块饼、 $\frac{1}{2}$ 块月饼。

在进行测量、分物或计算时，往往不能正好得到整数的结果，这时常用分数来表示。

编写意图

(1) 本节由分数的产生、分数的意义、分数与除法的关系三个层次的内容组成，帮助学生比较完整地建立分数的概念。

(2) “分数的产生”教材设计了两幅插图。前一幅插图，表现了古人度量物体长度时遇到的困惑。他们用一根打了结的绳子测量石头的长，每两个结之间的一段表示一个长度单位。测量发现这块石头长三段多一点。于是在旁记录的人提出疑问：剩下的不足一段怎么记？这个情境比较形象地揭示了在测量物体时由于得不到整数的结果，产生了把一个单位等分成若干份再量的需要。后一幅插图给出了两个小朋友分一个西红柿、一块月饼和一包饼干的情境。通过这两个实际问题，揭示了产生分数的现实需要：在进行测量或分物时，往往不能刚好得到整数的结果。有了分数，这些结果就能准确地表示出来。通过测量与分物的实例，引入分数，使学生感悟分数是适应客观需要而产生的，从而提高学习的积极性，促进对分数意义的理解，并受到历史唯物主义观点的教育。

教学建议

引导学生了解分数产生的背景和过程。

教学前一幅插图时，可让学生看图，说说图上画了什么，什么意思。教师再作必要的解释。如，绳子上打结的一段，表示长度的一个计量单位。还可以出示按图中那样打结的绳子，边演示、边说明测量的结果是3段多，以帮助学生理解图中“剩下的不足一段怎么记”的问题，然后让学生说说自己的想法。这里，重点是只要理解测量的结果往往不是整数，需要用分数来表示就行了，可以不展开。

教学后一幅插图时，可以先让学生看图，

说出两个同学遇到的问题，然后让学生说说可以怎样平均分，把分得的结果填在课本上，并交流。若将结果用小数表示，应予肯定。

小结时，可针对两个实例，指出分数是为了适应客观实际需要而产生的。还可以简单说明，分数产生得很早，最初人们只认识一些简单的分数，如一半、三分之一等。像现在这样完善的分数读写法和四则运算，是经过很长的时间才逐步形成的。教材为了描述分数产生原因的完整性，还提到了“计算时”的需要，可以留到学习分数与除法的关系时再讨论。

编写意图

(1) “分数的意义”通过举例说明 $\frac{1}{4}$ 的含义，它可以是一个物体四等份中的一份，也可以是一个整体四等份中的一份，引出分数概念的描述，并强调了单位“1”的含义。在此基础上，再给出分数单位的概念。

(2) 教材首先由小精灵提出问题，然后通过插图从两方面说明： $\frac{1}{4}$ 可以是一张正方形纸、一张圆形纸、一条线段的 $\frac{1}{4}$ ，也可以是一些物体，如一把香蕉（4根）、一盘面包（8个）的 $\frac{1}{4}$ 。

接着，教材概括出分数的意义和单位“1”。

(3) “做一做”中，一堆糖有12颗，提出一系列的问题，要求看图写出这堆糖的若干分之几。这一填空练习，既是对分数意义描述的具体化和巩固，又为分数单位提供了具体实例。

紧接着，教材说明什么是分数单位，并要求说出“做一做”中几个分数的分数单位加以巩固。

分数的意义

谁能举例说明 $\frac{1}{4}$ 的含义呢？



一个物体，一个计量单位或是一些物体等都可以看作一个整体，把这个整体平均分成若干份，这样的一份或几份都可以用分数来表示。
一个整体可以用自然数1来表示，我们通常把它叫做单位“1”。

做一做



- 平均分成2份，每份是这堆糖的 $\frac{1}{2}$ 。
- 平均分成3份，2份是这堆糖的 $\frac{2}{3}$ 。
- 平均分成4份，3份是这堆糖的 $\frac{3}{4}$ 。
- 平均分成6份，5份是这堆糖的 $\frac{5}{6}$ 。

把单位“1”平均分成若干份，表示其中一份的数叫分数单位。例如， $\frac{2}{3}$ 的分数单位是 $\frac{1}{3}$ 。

你能说出上面其他几个分数的分数单位吗？

教学建议

(1) 结合实例理解分数，归纳分数的意义。

可围绕问题，让学生举例说明 $\frac{1}{4}$ 的含义，再看课本的例子。也可先看课本的例子，再让学生举例。学生举例时，教师应适时归类引导，使所举的例子既有一个物体的 $\frac{1}{4}$ ，又有一些物体的 $\frac{1}{4}$ 。还可以让学生再举一些其他四分之几的例子。然后，引导学生将课本提供的和自己所举的例子加以概括。可以按课本的描述概括，也可以分三层意思概括：①把一个或一

些物体看作一个整体，用自然数1表示，叫做单位“1”；②把单位“1”平均分成若干份；③这样的一份或几份，用分数表示。

(2) 重视概念的形成过程。

单位“1”和分数单位是分数概念的重要组成部分。教学中，要注意由具体到抽象，由个别到一般，适当展开概念的形成过程，帮助学生自己获得感悟，构建概念的意义。如分数单位，先让学生阅读课本，复述分数单位的意义并联系上文举例说明，然后归纳：分数单位就是把单位“1”平均分成若干份，表示其中一份的数，也就是单位“1”的若干分之一。也就是说分数单位是由一个分数的分母决定的。

练 习 十 一

1. 把下面每个图形都看作单位“1”，用分数表示各图中涂色部分的大小。



编写意图

(1) 练习十一围绕分数意义的理解与分数的应用，由直观到抽象，共安排了 10 题。

(2) 前 4 题为看图写分数。第 1 题的单位“1”是一个物体（图形），第 2~4 题的单位“1”是一些物体。

(3) 第 4 题将按要求涂色与写分数结合在一起。

(4) 第 5 题是解决问题，三年级上册学习过如何解决这类问题。

一包饼干 3 人平均分，每人分 $\frac{1}{3}$ 包。因为这包饼干有 12 块，所以 $\frac{1}{3}$ 包是 4 块。这里只要求学生利用分数的意义和整数除法来解答。

教学建议

(1) 充分发挥直观图示对于理解分数抽象意义的促进作用。

检查时，可请基础较差的学生完整说出第 1~3 题的答案，以帮助他们凭借直观与出声的语言，加强理解。

讲评时可指出：第 1~4 题的图示内容各不相同，但都是把一个或一些物体看作单位“1”，平均分成几份，取一份或几份。

(2) 交流不同答案，培养发散思维。

第 4 题可采用先同桌互相检查，再全班交流不同答案的方式，使学生看到答案的多样。

(3) 指出“ $\frac{1}{3}$ 包”与“4块”的联系与区别。

第 5 题的讲评，可强调“ $\frac{1}{3}$ 包”与“4块”都表示每人分到的饼干数量，区别只是数量单位不同，以“包”为单位，每人分到 $\frac{1}{3}$ 包，以“块”为单位，每人分到 4 块。这个内容也为后面分数与除法的关系的学习作了铺垫。

编写意图

(1) 第6题涉及一些国情与世界地理知识,要求学生读出分数并说出各分数的具体含义,从而理解现实生活中分数的意义,看到分数的实际应用。其中老龄化社会也是后面统计单元学习所选用的素材。

(2) 第7题是关于分数单位的练习。一方面理解与巩固分数单位,另一方面为后面学习分数大小比较,以及分数的四则计算,奠定必要的知识基础。

(3) 第8题先用直线(数轴)上的点表示已知分数,再数形结合,继续巩固分数单位的概念。

(4) 第9题要求学生画图表示分数,从逆向思维的角度理解分数含义。

(5) 第10题要求列举生活中见到的分数,有利于培养学生的数学应用意识。

6. 读出下面的分数,说说它们的具体含义。



长江干流的 $\frac{2}{5}$ 的水体受到不同程度的污染。



死海表层的水中含盐量达到 $\frac{3}{10}$ 。



联合国传统标准,一个地区60岁以上老人达到总人口的 $\frac{1}{10}$,这个地区就称为进入老龄化社会,新标准是65岁以上老人占总人口的 $\frac{7}{100}$ 。

7. 读出下面的分数,并写出每一个分数的分数单位及有几个这样的分数单位。

分 数:	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{100}$
分 数 单 位:	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{100}$
分数单位的个数:	()个	()个	()个	()个	()个

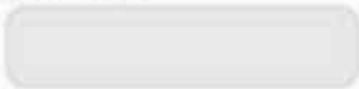
8. 用直线上的点表示下面各分数。



上面两条直线中,每条直线上的最小刻度用分数表示分别是多少?它们分别是哪些分数的分数单位?

9. 任选下面一个分数,在下面的方框中画图表示。

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$



10. 相同量说一说在生活中见过的分数,并说出它的单位“1”和分数单位。

教学建议

(1) 灵活运用练习形式,提高练习效率。

口头练习,如第6、10题,可采用先同桌互说,再全班交流的方式完成练习与讲评。

书面练习,如第7~9题,为提高效率,不妨让学生做在书上,然后同桌互相检查,进行批改与订正。有争论的,提出来由全班同学评判。

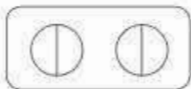
(2) 捕捉生成性资源,加深学生对分数意义的理解。

学生常常会有一些与众不同的想法。如第8题,认为 $\frac{1}{4}$ 也是 $\frac{1}{2}$ 的分数单位。准确地说,

是把 $\frac{1}{2}$ 看作 $\frac{2}{4}$,那么 $\frac{1}{4}$ 就是它的分数单位。又

如第9题,以一些物体作为单位“1”的答案更是五花八门,如把2个圆看作单位“1”,把每个圆2等分,其中的一份就表示 $\frac{1}{4}$,等等。

当出现诸如此类可以 $\frac{1}{4}$



作出正确解释的答案时,教师应当即作出判断,酌情选择,展示点评,以深化学生对于分数概念的理解,开拓思路,灵活应用。

分数与除法

1 把1个蛋糕平均分给3人,每人分得多少个?

想:求每人分得多少个,要用 $1 \div 3$ 得多少。



$$1 \div 3 = \frac{1}{3} \text{ (个)}$$

2 把3个月饼平均分给4人,每人分得多少个?

想:求每人分得多少个,要用 $3 \div 4$ 得多少。



$$3 \div 4 = \frac{3}{4} \text{ (个)}$$



编写意图

(1) 前面从部分与整体的关系揭示了分数的意义。这里从“分数与除法”可以表示两个整数相除(除数不为0)的商揭示分数另一方面的意义。以加深和扩展学生对分数意义的理解,同时为学习假分数以及把假分数化为整数或带分数作准备。

(2) 例1把一个蛋糕平均分成若干份,求每份是多少。学生可根据整数除法的含义,列出除法算式;再根据图示或分数的意义说出结果。将除法计算与分数联系起来。

(3) 例2把3个月饼平均分成若干份,求每份是多少。学生容易理解为什么用除法计算,但理解计算结果要困难一些,为此教材借助图示来帮助理解。

(4) 最后在两个实例的基础上概括出分数与除法的关系。教材先由小精灵提出问题,再总结出用分数表示整数除法的商时,要用除数作分母,被除数作分子。反过来,一个分数也可以看作是两数相除。这里教材让学生用字母表示分数与除法的关系,并特别强调分数的分母不能是0。

教学建议

(1) 多种方式呈现问题,导入教学。

教学例1时,可直接出示例题,也可以从商是整数的除法引入。如:把6个小蛋糕平分给3人,每人分得几个?让学生用除法计算,然后出示例题。这样比较容易类推出除法算式: $1 \div 3$ 。而后引导学生思考:求每人分得几个,要把蛋糕平均分成3份,而把“1”平均分成3份,表示这样一份的数,可以用分数 $\frac{1}{3}$ 来表示,所以 $1 \div 3 = \frac{1}{3}$ 。

(2) 引导思考,指导操作,加深理解。

教学例2时,同样可以先引导学生思考怎样列式,再引导学生思考 $3 \div 4$ 等于多少。可以让学生拿图实际分分看。学生可能有不同的分法(见第149页附1)。通过操作不仅加深学生对计算结果的理解,同时培养了解决实际问题的能力。教学中要注意让学生明确这里的单位“1”是一个月饼,而不是3个月饼。

(3) 层层递进,归纳总结。

可以放手让学生概括分数与除法的关系,也可以启发学生想:当整数除法得不到整数商时,可以用什么数表示?在表示整数除法的商时,用谁作分母,用谁作分子?总结出分数与除法的关系并用字母表示出来(见第149页附2)。

编写意图

(1) 例3教学解决“求一个数是另一个数的几分之几”的实际问题。一是让学生经历解决问题过程；二是利用分数意义以及分数与除法关系，来解决实际问题，加深对分数意义的理解。

(2) “阅读与理解”使学生认识到“求鹅的只数是鸭的几分之几”就是“求7只是10只的几分之几”。接着，借助图示引导学生分析解答“把10只看作一个整体，平均分成10份，每份是1只，7只就是这个整体的 $\frac{7}{10}$ ”。所以鹅的只

数是鸭的 $\frac{7}{10}$ 。根据分数与除法的关系，求7只是10只的几分之几，可以用除法计算。所以算式是 $7 \div 10$ 。求倍数关系是前面学过的内容，这里让学生自己解决。最后，回顾这两个问题，沟通它们之间的联系：求一个数是另一个数的几分之几或几倍都可以用除法解决。

(3) “做一做”的第1题，反映了分数与除法的关系的可逆性：两数相除，可以用分数表示；分数也可以看作两数相除。第2题，“金丝猴的数量是大象的几分之几”是对例3的巩固。

教学建议

(1) 经历解决问题过程，思考归纳算理。

教学时，应该让学生经历解决问题的全过程：先引导学生联系分数的意义，在阅读中理解求鹅的只数是鸭的几分之几，就是求7只是10只的几分之几，就要把鸭的只数看作一个整体，平均分成10份，每份1只，1只是整体的 $\frac{1}{10}$ ，7只就是整体的 $\frac{7}{10}$ 。然后引导学生根据分数与除法的关系想：一个分数，其中的分子相当于被除数，分母相当于除数，所以 $\frac{7}{10}$

3 小新家养鸭7只，养鸡10只，养鹅20只。鹅的只数是鸭的几分之几？鸡的只数是鸭的多少倍？

阅读与理解

“鹅的只数是鸭的几分之几”是什么意思？



就是求7只是10只的几分之几。

分析与解答

把10只看作一个整体，平均分成10份，每份1只，7只就是这个整体的 $\frac{7}{10}$ 。

根据分数与除法的关系，求7只是10只的几分之几，可以用 $7 \div 10$ 。



$$7 \div 10 = \frac{7}{10}$$

$20 \div 10 = 2$ ，鹅的只数是鸭的2倍。

根据分数与除法的关系，求7只是10只的几分之几，可以用 $7 \div 10$ 。

回顾与反思

上面两个问题有什么联系？



都是用除法算的。

你还能提出其他数学问题并解答吗？

做一做

1. 在下表的括号里填上适当的数。

$$7 \div 12 = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

$$\frac{5}{8} = (\quad) \div (\quad)$$

$$(\quad) \div 7 = \frac{4}{7}$$

2. 动物王国里有大象8头，金丝猴4只，金丝猴的数量是大象的几分之几？

50

就相当于 $7 \div 10$ ，这样，以后遇到求一个数是另一个数的几分之几的问题就可以直接用除法计算了。而求倍数的问题，是已经学过的知识。把二者联系起来，最后归纳得出，求一个数是另一个数的几分之几、一个数是另一个数的几倍的问题，都可以用除法解决。

(2) 通过对比，沟通知识之间的联系。

求一个数是另一个数的几分之几或者几倍本质上是一样的，都可以用除法来计算。通常，两个数相除，如果商是整数，则两个数的关系就用几倍来表示；如果商是小数，则用几分之几来表示。

练习十二

1. 这些葡萄干平均装在2个袋子里, 每袋重多少千克? 平均装在3个袋子里呢?

5种 1kg



2. 一个3m²的花坛, 种4种花, 每种花平均占地多少平方米? 种5种呢? (用分数表示。)

3. 用分数表示下面各式的商。

$$24 \div 25 =$$

$$16 \div 49 =$$

$$2 \div 9 =$$

$$11 \div 12 =$$

4. $9 \text{ cm} = \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ dm}$

$$30 \text{ cm} = \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ dm}$$

$$133 \text{ dm}^2 = \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ m}^2$$

$$79 \text{ dm} = \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ m}$$

$$56 \text{ cm}^2 = \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ dm}^2$$

$$53 \text{ mL} = \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ L}$$

$$23 \text{ 千克} = \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ 吨}$$

$$13 \text{ 秒} = \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ 分}$$

$$48 \text{ 公顷} = \frac{(\quad)}{(\quad)} \text{ 平方千米}$$



月球的质量是地球质量的几分之一?



这棵橡树树根部分的直径为5m, 一根树干的长度是它根直径的几分之一?

编写意图

(1) 第1、2两题都是可以用除法计算解决的实际问题, 但练习意图略有不同。第1题第一问 $1 \div 2$ 的商, 既可以用小数表示, 也可以用分数表示。第二问 $1 \div 3$ 的商, 则用分数表示比较简便。第2题商都能用小数表示, 但题目要求用分数表示, 旨在巩固除法与分数的关系。

两个题的四个答案都是“量”, 而不是数, 所以都必须带上单位名称。

(2) 第3题脱离现实情境, 直接用分数表示商。

(3) 第4题是把低级单位的名数改写成高级单位的名数。这里覆盖了长度、面积及其他所学量的若干常用单位, 有助于再现这些知识, 防止遗忘。其中出现了秒与分的进率, 有助于体现用分数表示商的优势。出于巩固新知识的需要, 本题一律要求用分数表示结果。

(4) 第5、6题都是“求一个数是另一个数的几分之几”的实际问题。两题的被除数都是1, 有利于学生感悟两个量之间的倍数关系。

教学建议

(1) 通过练习, 沟通新旧知识的联系。

如第1题, 1 kg 葡萄干平均装在2个、3个袋子里, 都可以用1除以2、除以3, 商都可以用小数表示, 也可以用分数表示。由于葡萄干的总数是“1”kg, 因此可以运用根据分数的意义, 直接写出结果, 也可以根据除法与分数的关系, 写出商。

又如第4题, 以前都是用低级单位的数除以进率, 当进率是10、100、1000时, 可以移动被除数的小数点得到商, 现在可以运用除法与分数的关系, 写出商。

(2) 通过练习, 体会用分数表示商的优越性。

如第3题, 不论能否除尽, 都可以直接用分数表示各题的商。教师应有意识地引导学生加以体会。

(3) 注意沟通“倍”与“几分之几”的关系。

如第5题, 由月球质量是地球的 $\frac{1}{81}$, 可启发学生反过来思考: 地球质量是月球的81倍。第6题也可酌情如此启发。它能帮助学生感悟倍数关系, 沟通“几倍”与“几分之几”的关系。

编写意图

(1) 第7、8题是应用除法与分数的关系解决实际问题的练习。

(2) 第9、10题是配合例3的巩固练习。解决这类问题的关键是要弄清谁是谁的几分之几。

(3) 第11题是巩固分数、分数单位等概念的综合练习，具有一定的开放性。

(4) 第12题以年、月、日等时间单位为载体，设计问题，启发学生理解具体情境中分数的实际含义，并练习用分数表示两个量之间的关系。其中月与年的两个问题是部分与整体的关系，休息日与工作日是两个相对独立的量之间的关系。

休息日一般指星期六、星期日两天。

7.



8. 小明用15分钟走了1 km路，平均每分钟走几分之几千米？

9. 世界读书日这一天，标价11元一本的《快乐数学》售价为9元一本。

- (1) 这本书的售价是标价的几分之几？
(2) 你还能提出其他数学问题并解答吗？



10. 五(1)班共有17幅书法作品参加学校的书法比赛，其中4幅作品从全校255幅参赛作品中脱颖而出获奖。

两小题中的单位“1”分别是什么？

- (1) 五(1)班获奖作品占全校参赛作品的几分之几？
(2) 五(1)班参赛作品占全校参赛作品的几分之几？



11. 分别选择一个分数，并在图中表示出来。



12. 填空。

- (1) $\frac{3}{2}$ 年有()个月， $\frac{3}{4}$ 年有()个月。
(2) 一年中，大月的月份占 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ 。
(3) 一个星期中，休息日占工作日的 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ 。

52

教学建议

(1) 允许学生有不同的解决问题的方法。

解答“求一个数是另一个数的几分之几”的问题，既可以直接根据分数的意义写出答案，也可以先根据除法的含义写出除法算式，再利用分数与除法的关系用分数表示出答案。无论学生用哪种方法，都应给予鼓励。

(2) 注意体现开放性。

第9题提出的问题，可以不局限于求一个数是另一个数的几分之几。如，买一本《快乐数学》节省几元？买5本呢？

第11题，在用图表示分数时，可能大多

数学生会把其中的一个基本图形作为1份，如左图，把1只小船看作1份，涂3只小船就表示 $\frac{3}{12}$ 。这时可以问学生有没有把几个作为1份的情况，如没有，可以引导学生想：把几个作为1份，整体被平均分成了几份？其中的几份用分数表示成几分之几。在思考中使学生加深对分数意义的理解。

2. 真分数和假分数

1 分别涂色表示下面各分数，并说一说把什么作为单位“1”。



比较每个分数中分子和分母的大小，再看看这些分数比1大还是比1小。分子比分母小的分数叫做真分数，真分数小于1。

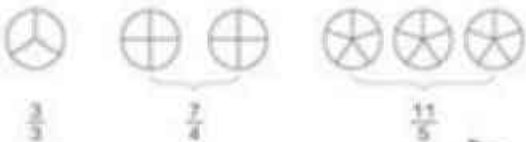
这些分数的分数单位分别是多少？它们各有几个相应的分数单位？



2 把一个圆作为单位“1”。

(1) 4个 $\frac{1}{3}$ 是几分之几？在右图中涂色表示。

(2) 分别涂色表示下面各分数，并比较每个分数中分子和分母的大小。



这些分数比1大还是比1小？



分子比分母大或分子和分母相等的分数叫做假分数，假分数大于1或等于1。

由涂色结果可以看出， $\frac{11}{5}$ 可以看作是向 $\frac{10}{5}$ （就是2）和 $\frac{1}{5}$ 合成的数，写作 $2\frac{1}{5}$ ，读作：二又五分之一。像 $2\frac{1}{5}$ 、 $1\frac{3}{4}$ ，一这样由整数和真分数合成的数叫做带分数。

从例题中可以看出，有些假分数的分子恰好是分母的倍数，它们实际上是整数；有些假分数的分子不是分母的倍数，这样的假分数可以写成带分数。

55

编写意图

(1) 本小节对分数进行分类，根据分数与1的大小比较可分为真分数和假分数（带分数是假分数的另一种书写形式）。通过学习真分数、假分数以及带分数，可以使学生比较全面地理解分数概念，也有利于培养学生关于分数的数感。

(2) 例1认识真分数。教材借助涂色帮助学生直观理解真分数的概念，先在图上涂色表示给出的一组分数，让学生观察这些分数的分数单位，比较每个图形所表示的分数单位、它的分子和分母的大小，再让学生想一想：这些分数比1大，还是比1小？在此基础上，概括出真分数的意义和特征。

(3) 例2先认识假分数。和例1的编排一样，教材依次呈现直观涂色、比较辨析、归纳抽象的过程。

接着，由涂色的直观图对假分数进行拆分，引出带分数的概念。并明确：假分数的分子是分母的倍数的，是整数；假分数的分子不是分母倍数的，是带分数。为后面学习假分数的转化作准备。

教学建议

借助直观，从表象到本质，建构概念。

教学例1时，先让学生涂色表示给出的分数，再说出每个分数的分数单位和含义，然后比较每个分数的分子与分母的大小，回答问题“这些分数比1大还是比1小？”并说明理由。在此基础上，引导学生概括出真分数的概念及其特征（都小于1）。

教学例2时，可以仿照例1的教学，在弄清分数单位的基础上，涂色表示出指定的分数，再观察、比较这些分数中比1大还是比1小，由此概括出假分数的概念及其特征（大于

1或等于1）。

这里要提醒学生注意，这些分数都是以一个圆作为单位“1”，这样就容易比较这些分数与1的大小关系，同时也为教学带分数和假分数化成整数或带分数作好准备。

教学中要充分利用教材提供的直观材料，来帮助学生理解概念的含义。除了例题用图形的等分，揭示真分数、假分数和带分数的意义，还可以利用下页“做一做”第1题，用直线（数轴）上的点，进一步揭示真分数、假分数的大小。这些直观材料都具有数形结合的特点，用好这些材料有利于从两个方面帮助学生建构概念的意义。

编写意图

例3 教学把假分数化成整数或带分数。

教材先以 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{8}{4}$ 为例，讨论怎样把假分数化成整数；又以 $\frac{7}{3}$ 、 $\frac{6}{5}$ 为例，讨论怎样把假分数化成带分数。转化的方法是根据分数与除法的关系用除法计算。如， $\frac{3}{3}=3\div3=1$ ， $\frac{8}{4}=8\div4=2$ 。教材利用图示并结合分数的意义说明算理。如 $\frac{8}{4}$ 表示 8 个 $\frac{1}{4}$ ，这样的 4 份是 1 个整圆， $8\div4=2$ 表示 8 份里面有 2 个 4 份，就是 2 个整圆，也就是 2。

最后，教师让学生总结把假分数化成整数或者带分数的方法，并通过“做一做”使这些知识得到初步的巩固。

“做一做”第 1 题，在直线（数轴）上找出分数对应的位置，借助直观可以帮助学生进一步体会真分数和假分数的本质特征（与 1 的大小关系）。

教学建议

注意方法与算理、概念结合，帮助学生理解算理，掌握方法。

假分数化整数或带分数的方法由分数与除法的关系导出，其算理可以根据分数的意义和假分数、带分数的概念来解释。教学时，可以将方法与算理、概念结合起来，帮助学生在理解的基础上掌握方法。

如 $\frac{7}{3}$ ，根据分数与除法的关系用 $7\div3$ 计算。结合图示和分数的意义，可以看出：3 份是 1 个整圆， $7\div3=2\cdots\cdots 1$ 表示 7 份里面有 2

有时根据题意，要把假分数化成整数或带分数。

3 (1) 把 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{8}{4}$ 化成整数。

根据分数与除法的关系， $\frac{3}{3}=3\div3=1$ 。

根据分数的意义，3个 $\frac{1}{3}$ 是 1。

$\frac{3}{3}=3\div3=1$

$\frac{8}{4}=8\div4=2$ 还可以怎么想？

(2) 把 $\frac{7}{3}$ 、 $\frac{6}{5}$ 化成带分数。

$\frac{7}{3}$ 是 2 个 (就是 2) 和 $\frac{1}{3}$ 合起来的数，等于 $2\frac{1}{3}$ 。

$7\div3=2\cdots\cdots 1$

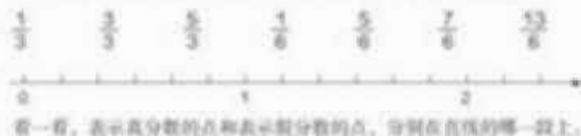
$\frac{7}{3}=(7\div3)=2\frac{1}{3}$

想一想： $\frac{6}{5}=\frac{\quad}{\quad}$

假分数是怎样化成整数或带分数的？

做一做

1. 下面的分数中哪些是真分数？哪些是假分数？在直线上表示出来。



2. 把下面的假分数化成带分数或整数。

$\frac{15}{2}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{21}{7}$ $\frac{50}{9}$ $\frac{43}{12}$ $\frac{62}{25}$ $\frac{30}{15}$

个 3 份余 1 份，2 个 3 份是 2 个整圆也就是 2，余 1 份就是 $\frac{1}{3}$ ，所以结果就是 $2\frac{1}{3}$ 。

在理解算理基础上，可引导学生小结假分数化成整数或带分数的一般方法及两种情况。用假分数的分子除以分母：①分子是分母倍数的，化成整数，商就是这个整数。②分子不是分母倍数的，化成带分数，商是带分数的整数部分，余数是分数部分的分子，分母不变。

练习十三

1. 把一个图形看作单位“1”，用分数表示出各图涂色部分的大小，再读一读。



2. 下面的说法对吗？为什么？

(1) 我吃了一个西瓜的 $\frac{5}{4}$ 。

(2) 爷爷把一块菜地的 $\frac{2}{3}$ 种了西红柿， $\frac{2}{5}$ 种了茄子， $\frac{1}{5}$ 种了辣椒。

(3) 一块巧克力，我吃了 $\frac{5}{6}$ ，表哥吃了 $\frac{1}{6}$ 。

3. (1) 3个人平均分，每人分 $\frac{1}{3}$ 杯，也就是_____杯。

(2) 2个人平均分，每人分_____杯。



4. 每天早、中、晚各1粒。

这瓶药能吃多少天？（用假分数表示出来。）



5. 在直线上面的□里填上适当的假分数，下面的□里填上适当的带分数。



编写意图

(1) 第1题看图写分数，这里把单位1都平均分成了几份，旨在清楚呈现涂色部分是几个分数单位，以便学生能够正确地用假分数表示出涂色部分。当然，学生也可以用带分数来表示。

(2) 第2题叙述了三个现实情境，让学生通过判断正误，凭借生活经验，理解表示部分与整体关系的分数，最大不超过1的实际意义。

(3) 第3题是有关假分数的实际问题，也涉及假分数化成整数或带分数。

(4) 第4题是带分数的实际应用问题。

(5) 第5题是根据直线（数轴）上点的位置，写出相对应的假分数、带分数。它与第54页“做一做”的第1题，根据数找出直线（数轴）上相对应的点，正好构成互逆的练习。这些练习对以后认识、运用数轴也有一定的帮助。

教学建议

(1) 启发学生初步感知假分数与带分数各自的特点。

第1题，可以启发学生数形结合，既看到带分数的合成，又感知它的特点，便于看出数的大小。如 $3\frac{5}{6}$ ，“比3个多，不到4个”。

如第3题的第(2)问，写成 $\frac{3}{2}$ 杯更简便，写成 $1\frac{1}{2}$ 杯更容易看出它的多少“一杯半”。

(2) 注意释疑解惑。

如第2题的第(1)小题，常有学生认为“吃了 $\frac{5}{4}$ 个西瓜”也可能是对的，并由此引发争论。教师可指出：这需要补充条件，如“妈妈买来2个同样大小的西瓜”，否则就不符合实际了。

(3) 利用数轴，说明真分数、假分数（带分数）的范围。

讲评第5题时可提问：这些数都在表示1的点的右面，说明什么？0与1之间的点表示什么分数？从而将点的位置与数的大小建立起联系，使学生进一步明确真分数、假分数（带分数）的范围。

编写意图

(1) 第6题与上一页第1题一样也是看图写分数，区别是这里的单位1没有全部平均分成几份，目的是提醒学生用带分数表示涂色部分，如果有学生用假分数表示也是可以的。

(2) 第7题是求一个数是另一个数的几分之几的练习。两小题答案的分子、分母互相颠倒，能为后面学习倒数积累一点感性认识。

(3) 第8题有关真分数、假分数概念的习题，要求写出所有答案，有助于培养学生思维的周密性。

(4) 第9题针对假分数、带分数概念的习题，让学生采用不同的方法比较数的大小。

前面第1、3题是借助几何直观与生活经验显现带分数容易感受出数的大小的特点，本题则通过大小比较，进一步凸显带分数的这一特点。

(5) 第10题既是真分数、假分数的识别练习，又是内涵丰富的找规律练习。

(6) “你知道吗？”介绍分解质因数的相关概念与方法。

6. 把一个物体看作单位“1”，用分数表示下面各图涂色部分的大小。



7. (1) 睡觉的时间是她的几分之几？
(2) 她的午饭时间是睡觉的几分之几？



8. (1) 写出分母是7的所有真分数。
(2) 写出分子是7的所有假分数。

9. 在○里填上“>”“<”或“=”。

$$\frac{7}{9} \bigcirc 1\frac{7}{9} \quad 3\frac{1}{25} \bigcirc \frac{75}{25} \quad \frac{48}{12} \bigcirc 4 \quad 8\frac{2}{9} \bigcirc \frac{74}{9}$$

你认为带分数和假分数哪个更容易看出数的大小？

10. 圈出下表中的真分数，哪些是假分数，把等于1的假分数涂上颜色。

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{5}$

“我发现……”



分解质因数

你知道吗？

每个合数都可以由几个质数相乘得到。例如： $4=2\times 2$ ， $15=3\times 5$ ， $30=2\times 3\times 5$ 。

$$\begin{array}{r} 30 \div 2 = 15 \\ 2 \quad 15 \\ \quad 3 \quad 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \mid 30 \\ 3 \quad 15 \\ \quad 5 \end{array}$$



这种方法叫做质因数法。

其中每个质数都是这个合数的因数，叫做这个合数的质因数。

教学建议

(1) 让学生经历有序写出所有答案的过程。

五年级学生已有一些有序思考的经验，因此第8题可以放手让学生独立完成。有遗漏或重复的，一经指出，一般也能自己发现问题，自行纠正。

(2) 让学生交流不同的比较方法。

解答第9题时，多数学生会受第1小题的启发，将假分数化成整数或带分数，当然也可以采用相反的方法，通过交流，不难形成共识。

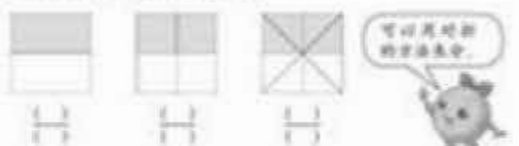
(3) 让学生分享各自的观察发现。

第10题可以不加提示，让学生独立尝试，然后交流、分享各自的发现。学生只要圈出等于1的假分数，就能发现它是真、假分数的“分界”。此外，还有不少规律，如：等于1的假分数，每下一行向右移1个；等于2的假分数，每下一行向右移2个……

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{2}$	……
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{3}$	……
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$	……
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{5}$	……

3. 分数的基本性质

1 拿出三张同样大小的正方形纸，按照下面把它们平均分，并涂上颜色，用分数表示出涂色部分的大小。



你发现了什么?

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$



你能举出几个这样的例子吗? 根据上面的例子, 可以得出什么规律?

分数的分子和分母同时乘或者除以相同的数(0除外), 分数的大小不变。

这叫做分数的基本性质。

根据分数与除法的关系, 以及整数除法中商不变的规律, 你能说明分数的基本性质吗?

你能把一个分数化成与它相等而分子、分母都比较小的分数吗?



2 把 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{10}{24}$ 化成分母是 12 而大小不变的分数。

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times \square}{3 \times 4} = \frac{\square}{12}$$

$$\frac{10}{24} = \frac{10 \div \square}{24 \div \square} = \frac{\square}{12}$$



编写意图

(1) 例 1 探索分数的基本性质。教材重点呈现了展开合情推理的全过程。首先, 借助动手操作和直观图示发现分数的相等关系, 接下来进一步观察相等的分数中分子和分母的变化规律, 引发猜想, 再举例加以验证, 最后概括总结出分数的基本性质。整个过程渗透了不完全归纳的思想, 培养学生合情推理的能力。

紧接着, 教材提示学生根据分数与除法的关系, 以及整数除法中商不变的规律, 自主完成分数的基本性质的演绎推理过程。两种推理相互印证, 加深学生对分数基本性质的理解。

(2) 例 2 是分数的基本性质的初步运用, 旨在帮助学生运用和掌握分数的基本性质。题目要求把 $\frac{2}{3}$

与 $\frac{10}{24}$ 化成分母是 12 而大小不变的分数, 这就需要将 $\frac{2}{3}$ 的分母、分子

同乘上 4, 而将 $\frac{10}{24}$ 的分母、分子同除以 2, 从而使分数的基本性质在一道题目里, 得到了比较全面的运用, 而且也能为后面学习约分、通分作好准备。

教学建议

(1) 加强直观操作活动, 经历探索的过程。

一方面, 借助折纸、涂色的操作活动, 帮助学生获得具体、真切的感知, 为探究分子、分母的变化规律, 提供认知基础。另一方面, 学生已经有了丰富的合情推理的经验, 应放手让学生自主探索, 经历猜测、验证、总结的不完全归纳过程。

(2) 通过类比, 进一步理解分数基本性质。

由于分数与除法的关系, 使得分数基本性质与商不变性质, 在内容、语言叙述上具有很大的 consistency。这对促进学习的正迁移非常有

利。教学时, 应注意利用知识之间的内在联系, 帮助学生验证、理解分数的基本性质。

(3) 培养学生循序渐进的问题解决方法。

教学例 2 时, 应注意把握三个要点: 一是引导学生认真审题, 明确题目的要求“化成分母是 12 而大小不变的分数”。二是引导学生理清解决问题的思路, 先考虑怎样使分母变为 12, 再考虑怎样变分子, 使分数的大小不变。

以 $\frac{2}{3}$ 为例, 先想分母 3 怎样才能变成 12, 再想分子 2 怎样变才能使分数的大小不变。让学生想清楚再填写。三是提醒学生正确应用分数的基本性质, 同乘或同除以 0 以外的相同数。

编写意图

(1) 第1~12题采用多种形式,从不同角度帮助学生在理解的基础上掌握分数的基本性质。

(2) 第1题旨在通过动手操作,利用几何直观,识别相等的分数。

(3) 第2题脱离直观,直接运用分数的基本性质识别相等分数。

(4) 第3题采用游戏形式,运用分数的基本性质说出相等分数。

(5) 第4题是实际问题,旨在运用分数基本性质说明两个小组的人数相等。一般学生都能想到两种比较方法。

(6) 第5题给出六个分数,构成三组相等的分数。学生应先用分数的基本性质来判断哪几个分数是相等的,再用直线上同一个点表示相等的分数。

(7) 第6题要求利用分数的基本性质写出相等分数的分子或分母。

(8) 第7题要求把五个异分母分数化成同分母分数。

练习十四

1. 按要求涂色,再比较它们的大小。



2. 下面每组中的两个分数是否相等?相等的在括号里画“√”,不相等的画“×”。

$$\frac{3}{5} \text{ 和 } \frac{6}{10} () \quad \frac{3}{18} \text{ 和 } \frac{1}{9} () \quad \frac{7}{12} \text{ 和 } \frac{21}{36} () \quad \frac{5}{15} \text{ 和 } \frac{1}{3} ()$$

3. 说出相等的分数。



4. 我们班 $\frac{2}{3}$ 的同学参加了舞蹈小组, $\frac{4}{6}$ 的同学参加了书法小组,哪个小组的人数多?

5. 下面哪些分数在直线上能用同一个点表示?把它们在直线上表示出来。



6. $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\frac{10}{15} = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{4} = \frac{5}{1}$ $\frac{12}{28} = \frac{1}{7}$

7. 把下面的分数化成分母是10而大小不变的分数。

$$\frac{3}{2} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{24}{35} \quad \frac{15}{50}$$

教学建议

(1) 给学生提供说出“发现”的机会。

如第3题,组织小组游戏之后,学生能够发现,等于 $\frac{2}{3}$ 的分数有无数个。教师应让学生说说,通过练习你发现了什么。

(2) 引导学生突破难点,完成练习。

如第5题,由于学生还没学习约分,要判断哪几个分数相等比较困难。可以引导学生先观察,推算出每个分数中分母与分子可以同时除以几,得到一个与原分数大小相等的分数,再找出相等的分数,如

$$\frac{6}{12} = \frac{6 \div 6}{12 \div 6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{10}{8} = \frac{10 \div 2}{8 \div 2} = \frac{5}{4} \dots\dots$$

(3) 让学生分享完成练习的经验。

组织学生交流自己是怎样完成的。如第7题,多数学生受第6题的启发,能自行掌握适当的书写方式,也能按一定的顺序思考(先写等号与分母10,再观察分母的变化,算出分子)等。练习后让学生分享经验可以促进逐步养成自觉反思、不断总结学习经验的习惯。

8. 涂色表示出与给定分数相等的分数。



9. 在下表的括号里填上适当的数。

$$\frac{3}{4} = \frac{(\quad)}{8} = \frac{9}{(\quad)} \quad \frac{7}{10} = \frac{14}{(\quad)} = \frac{(\quad)}{20} \quad \frac{62}{35} = \frac{(\quad)}{5} = \frac{12}{(\quad)}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{(\quad)}{18} = \frac{15}{(\quad)} \quad \frac{8}{24} = \frac{2}{(\quad)} = \frac{(\quad)}{3} \quad \frac{8}{(\quad)} = \frac{1}{6} = \frac{(\quad)}{54}$$

10.

这节课,我们(1)课
用了10分钟的时间。



我们(2)课
用的时间是整
节课的 $\frac{1}{4}$ 。

如果一节课40分钟,哪个题能用的时间长?

11.

“知识城堡”占 $\frac{1}{4}$ 版,
“生活乐园”占 $\frac{2}{8}$ 版。



“科学园地”占 $\frac{1}{12}$ 版,
“历史足迹”占 $\frac{1}{6}$ 版,
其余的 $\frac{1}{3}$ 版为“开心一刻”。

哪些栏目的版
面一样大?

12. 我国由56个民族组成,其中以汉族占全国人口的 $\frac{92}{100}$ 。

也可以说汉族占全国人
口的 $\frac{46}{50}$ 或 $\frac{23}{25}$ 。



他的说法正确吗?为什么?

13. 一个分数的分母不变,分子乘3,这个分数的大小有什么变化?如果分子不变,分母除以5呢?

编写意图

(1) 第8题要求先涂色,再写出相等的分数。

(2) 第9题采用连等的形式,将相等的分数由两个扩展到三个。

(3) 第10题既可以运用分数的基本性质,由 $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$,得出结论;也可以由40分钟的 $\frac{1}{4}$ 是10分钟,得出结论。

(4) 第11、12题都是分数基本性质的实际应用问题。同时,第11题还能学习异分母分数加减法作出铺垫,第12题则相当于百分数的一个实例。

(5) 第13题为选做题,是让学生在掌握了分数基本性质的基础上,进一步探究当分母(或分子)不变时,分子(或分母)的变化,会引起分数的大小发生怎样的变化。

教学建议

(1) 充分利用练习资源,通过说理,培养学生初步的演绎推理能力。

本练习的大多数习题,都可以通过说理,使学生得到演绎推理的初步训练。

以第11题为例,学生的说理如:根据分数的基本性质, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16}$,所以“知识城堡”“生活乐园”“科学园地”栏目的版面大小相等。这实际上已经是比较完整的演绎推理了。

(2) 启发学生画图验证结果。

如第11题,五个栏目的图示(如图):

通过画图,既验证了结果,又看到了五个栏目正好用完了整个版面。

知识城堡	科学园地
生活乐园	历史足迹
	开心一刻

(3) 鼓励学生合情推理。

第13题,可让学生自己尝试,体会怎样选择合适的数,以便于探究。如选用 $\frac{1}{10}$,根据题意得 $\frac{1 \times 3}{10} = \frac{3}{10}$, $\frac{1}{10 \div 5} = \frac{1}{2}$,把 $\frac{3}{10}$ 与 $\frac{1}{10}$ 比较,把 $\frac{1}{2}$ 化成 $\frac{5}{10}$ 与 $\frac{1}{10}$ 比较,分数的大小分别扩大到原来的3倍、5倍。再举例验证,结果相同。这种猜想,就是合情推理。

编写意图

(1) 例1教学公因数和最大公因数的概念。教材直接提出：“8和12公有的因数是哪几个？公有的最大因数是多少？”引导学生先分别找出8和12的因数，然后采用集合图，直观呈现8、12各自的因数，这样交集中就是公有的因数，从而引出公因数、最大公因数的概念，使抽象的概念能够具体感知、直观呈现，增强教学效果。

(2) 例2以18和27为例，教学求两个数的最大公因数。教材呈现了两种方法：一种是根据定义，先分别写出18和27各自的因数，从中找出公因数，再看哪个最大；另一种是先写出18的因数，然后从中圈出27的因数，再看哪个最大。接着，小精灵提出问题：“你还有其他方法吗？”提示学生可以有不同的方法。

最后，通过观察发现两个数的公因数和它们的最大公因数之间的关系，进一步明确公因数和最大公因数的概念。还可提示学生再找其他的数验证一下。

教学建议

(1) 从概念到表象，再从表象到新的概念，遵循认知规律教学。

教学例1前，先复习因数的概念，并让学生分别写出8与12的所有因数。然后，出示画在透明纸上的两个集合圈，再把它们往一起移动，使两个集合圈相交，并使公有的因数重合，使学生形象地看出相交部分就是8和12的公因数。也可以出示相交集合圈，让学生自己把8、12的因数填写在圈内适当的部分。在此基础上，引入公因数和最大公因数的概念。

(2) 鼓励学生独立思考解决问题，总结经

验，互相交流。

教学例2时，可以直接出示例题，让学生先独立思考，用自己的方法找出18和27的最大公因数。然后小组讨论，互相启发，再全班交流。除了教材介绍的两种方法之外，还有学生会想到：先写出27的因数，再看27的因数中哪些是18的因数，从中找出最大的。教师可以启发学生改进方法。比如：写出18的因数，1，2，3，6，9，18从大到小依次看18的因数是不是27的因数，18不是27的因数，9是27的因数，所以9是18和27的最大公因数。教学中注意引导学生不断总结经验，互相交流。

4. 约分

最大公因数

1 8和12公有的因数是哪几个？公有的最大因数是多少？

我是中的因数，也是12的因数。

8的因数：1, 2, 4, 8

12的因数：1, 2, 3, 4, 6, 12

8和12公有的因数是1, 2, 4。

还可以这样表示。

8的因数 12的因数

1, 2, 4是8和12公有的因数，叫做它们的公因数。其中，4是最大的公因数，叫做它们的最大公因数。

2 怎样求18和27的最大公因数？

18的因数：1, 2, 3, 6, 9, 18

27的因数：1, 3, 9, 27

它们的公因数：1, 3, 9

我是18的因数，也是27的因数。

18的因数：1, 2, 3, 6, 9, 18

你还有其他方法吗？和同学讨论一下。

试一试，两个数的公因数和它们的最大公因数之间有什么关系？

做一做

1. 把 16 和 24 的因数、公因数分别填在相应的位置，再圈出它们的最大公因数。



2.



3. 找出下列每组数的最大公因数。

4 和 8 12 和 36 1 和 7 8 和 9 12 和 35



做完后你发现了什么?

你知道吗?

利用分解质因数的方法, 可以比较简便地求出两个数的最大公因数。例如:

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

24 和 36 的最大公因数:

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$2 \mid \begin{array}{l} 24 \ 36 \\ \hline 12 \ 18 \end{array} \quad \text{— 公有质因数 2 除}$$

$$2 \mid \begin{array}{l} 12 \ 18 \\ \hline 6 \ 9 \end{array} \quad \text{— 公有质因数 2 除}$$

$$3 \mid \begin{array}{l} 6 \ 9 \\ \hline 2 \ 3 \end{array} \quad \text{— 公有质因数 3 除}$$

$$2 \ 3 \quad \text{— 得到两个数只有公因数 1 为止}$$

24 和 36 的最大公因数:

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$



为了简便, 通常用质因数的形式。

编写意图

(1) 第 1 题对应例 1 用集合圈, 让学生将 16、24 各自的因数和公有因数分别填入, 再圈出它们的最大公因数, 帮助学生进一步理解因数和公因数的联系与区别, 巩固公因数和最大公因数的概念。

(2) 第 2 题采用学生演示形式, 将 12、18 的因数分成各自特有的与公有的因数三部分, 也就是集合图中的三个部分, 通过活动帮助学生进一步巩固概念。

(3) 第 3 题先是让学生找出 5 组数的最大公因数, 通过观察和总结, 发现其中两类特殊的情况。一类是像 4 和 8、12 和 36 这样成倍数关系的两个数, 它们的最大公因数就是两个数中较小的那个数; 另一类是像 1 和 7、8 和 9、12 和 35 这样公因数只有 1 的两个数, 它们的最大公因数也是 1。

(4) “你知道吗?” 在前面介绍分解质因数的基础上, 让学生了解利用分解质因数求两个数的最大公因数的方法和短除法的简便形式。

教学建议

(1) 鼓励学生独立解题, 引导合作交流。

“做一做”的练习, 都可以让学生独立思考完成后进行交流。如, 第 2 题, 先让学生独立想一想、写一写, 厘清思路, 再说说哪几个数是 12 的因数, 哪几个数是 18 的因数, 哪几个数是 12 和 18 的公因数, 然后分出左边、右边和中间的数。也可以请 8 位同学拿着写有数的卡片到讲台上按要求站一站, 请大家看看他们站得是否符合要求。

(2) 帮助学生总结、归纳, 积累经验。

第 3 题学生独立完成后, 引导观察每组数

有什么特点, 再作交流。教师适时总结, 指出求两数最大公因数的两种特殊情况: ①当两数成倍数关系时, 较小的数就是它们的最大公因数; ②当两数只有公因数 1 时, 它们的最大公因数也是 1。让学生知道, 像这样能够直接看出最大公因数的, 就不用再从头去找公因数了, 积累求公因数的经验。

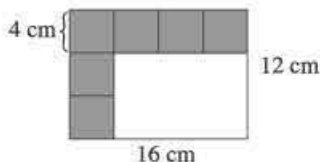
(3) 适时拓展学习内容。

“你知道吗?” 可供学生课外阅读, 也可作为课堂拓展学习的内容, 指导学生自学, 丰富求公因数的技能, 了解两个数所有公有质因数的积, 就是这两个数的最大公因数。

编写意图

例3是公因数、最大公因数在生活中的实际应用。教材通过创设用整块的正方形地砖铺满长方形地面的问题情境，应用公因数、最大公因数的概念求方砖的边长及其最大值。

教材同样呈现了解决问题的完整过程。首先，通过画图理解题意，特别是“整块”“正好铺满”的含义，也就是用正方形的地砖去铺，要用整数块完整的地砖正好铺满地面。接下来，通过分析找出解决问题的方法。结合实际情境，将实际问题转化为数学问题是解决问题的关键，通过分析，学生发现这样的地砖的边长必须“既是16的因数，又是12的因数”，后面自然就是利用公因数和最大公因数的概念解决问题了。最后，回顾与反思环节，让学生利用画图验证的策略来检验。当然，这里不用把所有的小正方形都画出来，只需如下图这样画出一行和一列就能进行判断了。



教学建议

培养学生分析问题、解决问题的能力。

教学中应引导学生经历应用知识解决问题的过程，培养学生解决问题的能力。首先阅读与理解题意，收集有关的信息，即在储藏室的长方形地面上铺正方形砖，要求既要铺满，又要都用整块的方砖。接着让学生分析解决问题的条件，是正方形地砖的边长同时符合长方形地面长和宽的要求，可以应用公因数和最大公因数的方法解决问题。进而针对储藏室的长和宽，分别找出16、12各自的因数、两者的公因数和最大公因数，地砖的边长可以是1 dm、

The illustration is divided into several panels. At the top, a boy stands in a room with a speech bubble: "这个储藏室长16 dm, 宽12 dm." To the right, a text box asks: "如果要用地砖是整分米数的正方形地砖把储藏室的地面铺满(使用的地砖必须都是整块), 可以选择边长是几分米的地砖? 边长最大是几分米?" Below this, a girl is shown thinking. The next panel shows a 16 dm by 12 dm rectangle with a 4 dm by 4 dm square tile, with text: "整块正方形地砖正好铺满". The following panel shows two boys talking, with a speech bubble: "要使所用的正方形地砖都是整块的, 地砖的边长必须是16的因数, 又是12的因数." Another speech bubble says: "只要找出16和12的公因数和最大公因数, 就知道选几号地砖了!" Below this, text lists: "16和12的公因数: 1, 2, 4, 8, 12, 16." and "12和16的公因数有1, 2, 4, 最大公因数是4. 所以, 可以选择边长是1 dm, 2 dm, 4 dm的地砖, 边长最大是4 dm." The final panel shows two boys looking at a large diagram, with a speech bubble: "选边长1 dm的地砖铺, 地上用了整块吗? 宽用上呢?" and another: "选边长4 dm和4 dm的呢? 可以再画来看看!" The answer is: "答:".

2 dm、4 dm, 最大是4 dm。最后, 可以让学生在纸上画一画, 互相验证交流, 使学生明确: 要使所用的正方形地砖都是整块的, 地砖的边长必须既是16的因数, 又是12的因数, 总结出解决此类问题的方法和策略。

当然, 除了教材提供的问题情境外, 教师可以根据学生的经验选取其他适合的素材。

练 习 十 五

1. 填空。

- (1) 10 和 15 的公因数有 _____
 (2) 14 和 49 的公因数有 _____

2. 找出下面每组数的最大公因数。

- 6 和 9 15 和 12 42 和 54 30 和 45 39 和 36
 5 和 9 34 和 17 16 和 48 15 和 16 13 和 78

3. 先用“√”画出第一列各个数的因数，再填空。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
8																			
16																			
20																			

- (1) 8 和 16 的公因数有 _____，最大公因数是 _____
 (2) 8 和 20 的公因数有 _____，最大公因数是 _____
 (3) 16 和 20 的公因数有 _____，最大公因数是 _____
 (4) 8、16 和 20 的公因数有 _____，最大公因数是 _____

4. 找出下列各分数中分子和分母的最大公因数，写在括号里。

- $\frac{7}{9}$ () $\frac{8}{36}$ () $\frac{18}{72}$ () $\frac{9}{15}$ () $\frac{21}{49}$ () $\frac{11}{66}$ ()

5. 有一张长方形纸，长 70 cm，宽 50 cm。如果要剪成若干同样大小的正方形而没有剩余，剪出的正方形的边长最大是几厘米？



6.  男、女生分别站成若干排，要使每排的人数相同，每排最多有多少人？这时男、女生分别有几排？

编写意图

(1) 第 1 题是写出两个数所有公因数的练习。两组数都只有两个公因数。

(2) 第 2 题是找出两个数最大公因数的练习。其中 5 和 9，15 和 16 的最大公因数是 1，还有三组数的最大公因数是较小的数，剩下五组是一般情况。

(3) 第 3 题采用列表的形式，方便学生先勾出 8、16、20 各自的所有因数，再分别找出每两个数、三个数的公因数、最大公因数。

(4) 第 4 题要求找出各分数分子、分母的最大公因数，为学习约分作准备。这是小学学习最大公因数最主要的用处。

(5) 第 5、6 题为最大公因数的实际应用问题。其中第 5 题的应用情况与例 3 类似；第 6 题对学生来说是最大公因数在新情境中的应用，需要通过分析，识别“每排相同人数”是男、女生人数的公因数。

教学建议

(1) 培养阅读与理解的好习惯。

应当让学生自己读题，理解题意，看清要求。个别学生有困难，可给予指点。如第 3 题，是依次勾出 8、16、20 的因数。又如第 6 题，读懂了，解答就不会感到困难。

(2) 交流找两数最大公因数的经验。

着重针对一般情况，选择典型例子，让学生说。如第 2 题的 30 和 45，比较合理的方法是，检验较小数 30 的因数是不是较大数 45 的因数，从大到小依次检查：30 不是 45 的因数，15 是 45 的因数，因此 15 一定是 30 和 45

的最大公因数。

(3) 帮助学生理解具体情境中最大公因数的含义。

如第 6 题，要使每排人数相同，所以每排人数是 48 和 36 的公因数；要求每排人数最多，所以是求 48 和 36 的最大公因数。可画示意图帮助学生理解。如，女生可站：

每排 18 人 ————— (18 不是 48 的因数)
 每排 12 人 ===== (12 是 48 的因数)

编写意图

(1) 第7题也是找两数最大公因数的练习,教材变换了形式,以避免学生厌倦。五组数,以一般情况为主。

(2) 第8题是找两数最大公因数的逆向问题,按要求写出最大公因数是1的两个数,渗透了构成互质数的几种情况,答案具有开放性。

(3) 第9题包括三个小题,教材设计成选择题,旨在通过选择正确答案,使学生看到两个数最大公因数的两种特殊情况与一般情况。

(4) 第10题用填表形式,先写出1~20各数与5的最大公因数,再观察发现规律:一个数与质数的最大公因数只有两种可能:当一个数是质数的倍数时,它们的最大公因数是质数本身,当一个数不是质数的倍数时,它们的最大公因数是1。

(5) 第11题是三个数最大公因数的实际应用,供学有余力的学生选做。

(6) “你知道吗?”在前面练习的基础上,水到渠成地介绍了互质数的概念。

7. 在相应的括号里写出相邻梯上两个数的最大公因数。



8. 按要求写出两个数,使它们的最大公因数是1。

(1) 两个数都是质数:

_____和_____

(2) 两个数都是合数:

_____和_____

(3) 一个质数、一个合数:

_____和_____

9. 选出正确答案的序号填在横线上。

(1) 9和16的最大公因数是_____。

A. 1 B. 3 C. 4 D. 9

(2) 36和48的最大公因数是_____。

A. 4 B. 6 C. 12 D. 36

(3) 甲数是乙数的倍数,甲、乙两数的最大公因数是_____。

A. 1 B. 甲数 C. 乙数 D. 甲、乙两数的积

10. 写出1, 2, 3, ..., 20各数与5的最大公因数,你发现什么规律?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
与5的 最大公因数																					

11. 试一试。



看把它的长或宽拆成多少小块,不能有机会,每块小梯最多是多少厘米?

12 cm

16 cm

44 cm

你知道吗?

公因数只有1的两个数,叫做互质数。例如,5和7是互质数,想一想,互质的两个数必定都是质数吗?请你举出两个合数互质的例子来。

教学建议

(1) 适时交流、小结求两数最大公因数的方法与各种情况。

第7题,沿阶梯往上各数从小到大排列,正好从下往上检验较小数的因数是不是上面较大数的因数。

第8题可着重小结,最大公因数是1的两个数,可能都是质数、都是合数,也可能一个质数、一个合数。

第9题可着重小结,求两数最大公因数的三种情况。

第10题则着重小结,一个数与质数的最

大公因数要么是1,要么是质数。

(2) 让学生自行探索怎样求三个数的最大公因数。

第11题的数学意义比较明显、直观。可放手让选做的学生独立尝试,然后交流怎样寻找最大公因数的方法,由两数推广到三数。

(3) 在阅读理解的基础上启发思辨。

“你知道吗?”可让学生自学。基础较好的班,可联系第8题思考:两数互质有哪些情况?因为1不是质数,也不是合数,所以互质的两个数,除了第8题揭示的三种情况外,还有一种情况,即1和其他数。

编写意图

(1) 例4 教学约分，根据分数的基本性质和找两个数的公因数的方法把一个分数化成大小不变、分子和分母较小的分数。在经历约分的过程后，引出约分和最简分数的概念。

教材直接提出数学问题，然后呈现了约分的一般方法，也就是用分子和分母的公因数（1除外）去除，将所给分数化简。通过想一想，引导学生思考约分的简便方法，也就是直接用最大公因数去除，这样能一次约到最简分数。在此基础上归纳出约分的概念，并介绍了一般的逐次约分和一次约分的简便书写形式。在经历约分的过程、学习约分的概念以及方法后，引入最简分数概念，并将最简分数作为约分的一般要求。

(2) “做一做”进一步巩固最简分数的概念和判断方法，以及进行约分的方法。第2题可以先约分后连线，先将所有不是最简分数的化成最简分数，这样就容易发现相等的分数了。

约分

4 把 $\frac{24}{30}$ 化成分子和分母都比较小且分数大小不变的分数。

可以用分子和分母的公因数（1除外）去除。

$$\frac{24}{30} = \frac{24 \div 2}{30 \div 2} = \frac{12}{15} \quad \frac{12}{15} = \frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$$

想一想，有没有更简便的方法？

$$\frac{24}{30} = \frac{24 \div 6}{30 \div 6} = \frac{4}{5}$$

像这样，把一个分数化成和它相等，但分子和分母都比较小的分数，叫做约分。

约分时可以这样写：

$$\frac{24}{30} = \frac{24 \div 6}{30 \div 6} = \frac{4}{5} \quad \text{或者} \quad \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

想一想，都是用分子、分母的哪个公因数去除的？

$\frac{4}{5}$ 的分子和分母只有公因数1，像这样的分数叫做最简分数。约分时，通常要约成最简分数。

做一做

1. 下列分数中哪些是最简分数？把不是最简分数的化成最简分数。

$$\frac{15}{16} \quad \frac{10}{21} \quad \frac{17}{30} \quad \frac{20}{45} \quad \frac{21}{91} \quad \frac{4}{18} \quad \frac{6}{11} \quad \frac{12}{48} \quad \frac{9}{15}$$

2. 把上下两行相等的两个分数用线连起来。

$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{9}$
$\frac{9}{21}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{25}$

教学建议

(1) 联系学生已有知识，导入新的学习。

教学前，可以给出一组分数，让学生先找出各自的因数和公因数，激活相关知识，为学习约分作好准备。

(2) 让学生做题目、提问题，交流经验。

出示例4后，可以先让学生看课本说一说化简 $\frac{24}{30}$ 的过程及其依据，再思考有没有更简便的方法？让学生把自己想到的方法填写在课本上，然后通过交流，使全体学生明确，如果一下能看出分子和分母的最大公因数，直接用

它们的最大公因数去除比较简便。

(3) 让学生独立练习，熟练技能。

“做一做”可以让学生独立完成，核对结果并交流各自所用的方法，巩固约分的方法，熟练约分的技能。

应允许学生用一般的方法进行约分，特别是刚开始，学生不能直接判断出两个数（分子和分母）的最大公因数时，可以从较小的公因数开始，逐步约到最简分数。学生经过一段时间的练习后，特别是能比较熟练地找出两个数的最大公因数后，自然会体会到直接约到最简分数的简洁性。

编写意图

(1) 第1题用直观图揭示了相等分数。

(2) 第2题是约分的辅助练习,即根据2、3、5的倍数的特征,判断分子、分母的公因数。本题所蕴含的规律,还有助于提高学生约分的能力。

(3) 第3题为约分过程的展开练习。

(4) 第4题是约分结果即最简分数的判断练习,可以起到巩固最简分数概念的作用。

(5) 第5题将求一个数是另一个数的几分之几与约分结合起来进行练习。

(6) 第6、7题是变换了形式的约分练习。两题的共同点是“多对一”,且都可以先约分,再连线或描点。

(7) 第8题是最大公因数的实际应用问题。重点是培养学生将实际问题转化为数学问题的能力。

练习十六

1. 蓝色部分和红色部分哪个多?为什么?



2. 观察下面每个分数的分子和分母,哪些有公因数2?哪些有公因数5?哪些有公因数3?

$$\frac{4}{8} \quad \frac{9}{12} \quad \frac{15}{20} \quad \frac{30}{45} \quad \frac{40}{60} \quad \frac{64}{96}$$

3. 把下面各分数化成最简分数。

$$\frac{15}{20} = \frac{15 \div (\quad)}{20 \div (\quad)} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

$$\frac{48}{60} = \frac{48 \div (\quad)}{60 \div (\quad)} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

4. 下面哪些分数没有化成最简分数?请把它们化成最简分数。

$$\frac{16}{24} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{28}{42} = \frac{14}{21}$$

$$\frac{15}{45} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{78}{87} = \frac{26}{29}$$

5. 兰兰拍了80张艺术照,其中有35张是兰兰喜欢的。请用最简分数表示兰兰喜欢的照片和不喜欢的照片分别占照片总数的几分之几。

6. 把桃子放在相应的篮子筐。



7. 下面哪些分数在直线上能用同一个点表示?把这些分数在直线上表示出来。



8. 将48本练习本和64支铅笔平分给若干名同学,如果练习本和铅笔都没有剩余,且保证分到练习本和铅笔的同学人数相同,最多能分给多少名同学?

教学建议

(1) 启发学生总结约分的经验。

如第2题,可以先按题目要求回答,再提问:哪些分数能用2和5、2和3、3和5来约分?你发现了什么?如能用2和3来约分的分数,可以直接用2乘3的积6来约分。这里不必总结两数公有的质因数与其他公因数的关系,以免增加学生的记忆负担。

(2) 利用课本,提高练习效率。

本页的练习,除口答题外,都可以书写在课本上,还可以采用同桌互相检查的方式核对答案与督促订正。

(3) 联系具体情境,理解公因数、最大公因数的实际意义。

如第8题,根据题意,将48本练习本、64支铅笔平分给相同的同学都没有剩余,说明同学人数是48和64的公因数,要使同学人数最多,所以是求48和64的最大公因数。

还可以让学生计算每人分得几本练习本,几支铅笔,从不同侧面促进对最大公因数的实际应用的理

9. 小明的生活非常有规律,下面是他上床睡觉和起床的时间。



他每天有几分之几的时间处于睡眠状态?



10. 先约分,再化成带分数。

$$\frac{15}{12}$$

$$\frac{20}{12}$$

$$\frac{77}{24}$$

$$\frac{70}{32}$$

$$\frac{90}{80}$$

$$\frac{150}{60}$$

11. 先约分,再比较各假分数的大小。

$$\frac{12}{16}$$
 和 $\frac{9}{12}$

$$\frac{4}{12}$$
 和 $\frac{5}{20}$

$$\frac{4}{14}$$
 和 $\frac{9}{21}$

$$\frac{70}{35}$$
 和 $\frac{90}{40}$

12.



(1) 以分米作单位,用分数分别表示长方形的长和宽。

(2) 长是宽的几分之几?宽是长的几分之几?

(3) 露出长方形面积的 $\frac{1}{2}$,你可以怎样涂?

13. 已知 $a=2 \times 3 \times 5$, $b=2 \times 3 \times 3 \times 5$,你能求出 a 与 b 的公因数和最大公因数吗?

14. 化简一个分数时,用2约了两次,用3约了一次,得 $\frac{3}{8}$,原来的分数是多少?

你知道吗?

我国古代的数学著作《九章算术》就介绍了“约分术”,“可半者半之,不可半者,则置分子、子之数,以少减多,更相减损,求其等也,以等数约之。”意思是说,如果分子、分母全是偶数,就先除以2;否则以较大的数减去较小的数,把所得的差与上一步中的减数比较,并仍以大数减小数,如此重复进行下去,当差与减数相等时,出现“等数”时,用这个等数约分,这种方法后人称为“更相减损术”。

编写意图

(1) 第9题是求一个数是另一个数的几分之几的实际问题,其中涉及经过时间的计算。

(2) 第10、11题都是约分的练习,其中第11题要求约分后比较分数的大小,旨在让学生体会,约分后能使分数简化,更容易看出它们的大小。

(3) 第12题以长方形为载体,提出三个有关分数概念的应用问题,具有一定的综合性。

(4) 第13题是选做题,旨在通过具体实例,启发学生利用分解后的质因数求两数的最大公因数。

(5) 第14题也是选做题,由已知的最简分数与约分过程,推算出约分前的分数,需要逆向思维。

(6) “你知道吗?”介绍了《九章算术》中的约分术。其中“更相减损”的方法适用于任何需要求最大公因数的场合。因篇幅限制,没有举例。

教学建议

(1) 适当交流、点评解答过程的书写。

第9题,多数学生会先求经过时间,如: $12-9+6$, $12+6-9$ 。若有学生用口算求经过时间,只写出最后一步算式 $9 \div 24$,也应允许。

又如第12题,若有学生不写除法算式,利用分数与除法的关系,直接写出分数并约分, $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$,也是可以的。

(2) 引导学生体会分解质因数的作用。

应让选做第13题的学生说说思考过程,

从中可以发现两个数的公因数、最大公因数都是两个数公有的质因数或公有质因数的积。

(3) 举例说明“更相减损法”。

这里“你知道吗?”的介绍比较抽象,介绍完后,可让学生通过举例,加以理解。如求42和28的最大公因数: $42-28=14$, $28-14=14$, 14是42和28的最大公因数。

编写意图

(1) 例1以4和6为例,在求两个数公有的倍数和公有的最小倍数的过程中引入公倍数和最小公倍数的概念。

教材直接给出基本方法:先分别写出4和6各自的倍数,再从中找出公有的倍数和公有的最小倍数。同时呈现了集合圈,用相交的部分表示两个数公有的倍数,其中最小的就是两个数公有的最小倍数。在此基础上,引入公倍数和最小公倍数的概念。让学生借助集合圈更好的理解公倍数和最小公倍数的概念。

接着,通过想一想“两个数有没有最大公倍数?”旨在与公因数进行比较和区分,使学生进一步加深对公倍数概念的理解。教学时,可将此问题与“两个数为什么有最大公因数?”对比起来进行理解。

(2)“做一做”进一步巩固概念的理解。

教学建议

(1) 发挥直观形象对概念理解的支撑。

前面学生认识公因数时,已经借助集合圈,直观感知和理解了公因数和最大公因数的概念。同样,这里的教学,也要充分发挥集合圈的直观作用,让学生看到4的倍数和6的倍数相交的部分就是4和6公共的倍数,由此引出公倍数和最小公倍数的概念。学生只有较好地理解了概念,才能更好地掌握求公倍数和最小公倍数的方法。

(2) 通过对比,加强概念的理解。

认识公倍数和最小公倍数后,学生容易将

它们和公因数、最大公因数弄混,这就需要引导学生对比它们的联系和区别。比如,两个数的公因数的个数是有限的,最小的公因数都是1。而两个数的公倍数的个数是无限的,只有最小公倍数,没有最大公倍数。

同时,学习找最小公倍数的方法后,还可以总结出:成倍数关系的两个数的最大公因数是较小的数,最小公倍数就是较大的数;只有公因数1的两数的最大公因数是1,最小公倍数是它们的乘积。

这样,从概念、方法与应用等方面,作出比较,促使学生分清有关知识的异同。

5. 通分

最小公倍数

1 4和6公有的倍数是哪些? 公有的最小倍数是多少?

4的倍数有: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ...

6的倍数有: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...

4和6公有的倍数有: 12, 24, 36, ...

其中公有的最小倍数是12。



还可以这样表示



12, 24, 36, ...是4和6公有的倍数,叫做它们的公倍数。其中,12是最小的公倍数,叫做它们的最小公倍数。

想一想:两个数有没有最大的公倍数?

做一做

把3和4的倍数,公倍数填在相交的位置,并圈出它们的最小公倍数。



编写意图

(1) 例2以6和8为例, 教学求两个数的公倍数及最小公倍数的方法。与求最大公因数编排类似, 教材同样呈现了学生常用的两种基本方法: 一种是先分别写出6和8各自的倍数, 再从中找出公倍数和最小公倍数; 另一种是先写出8的倍数, 再从小到大圈出6的倍数, 也就是两数的公倍数, 其中第一个圈出的就是它们的最小公倍数。接着, 提出问题: “你还有其他方法吗?” 通过相互交流、启发, 开拓思路, 体会方法多样化, 允许学生用自己的方法来解决。

最后, 引导学生观察两个数的公倍数和它们的最小公倍数之间的关系, 并举例说明、拓展验证, 加深对概念的理解。

(2) “做一做”巩固求找最小公倍数的方法。同时, 和找最大公因数一样, 通过练习, 发现求两个数的最小公倍数的两种特殊情况。

(3) “你知道吗?” 介绍利用分解质因数的方法, 求两个数的最小公倍数, 进一步了解用“短除法”求两个数的最小公倍数。

2 怎样求6和8的公倍数及最小公倍数?

有哪些的公倍数呢?



6的倍数: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...
8的倍数: 8, 16, 24, 32, 40, 48, ...

我在书的倍数中圈出6的倍数

6的倍数: 6, 12, 24, 32, 40, 48, ...



你还有其他方法吗? 和同学讨论一下, 我验一下, 两个数的公倍数和它们的最小公倍数之间有什么关系?

48 ÷ 24 = 2, 两个数的公倍数都是最小公倍数的倍数吧?



我们再找其他的数验证一下。

做一做

找出下列每组数的最小公倍数, 你发现了什么?

3和6 2和8 5和6 4和9 3和9 5和10

你知道吗?

我们也可以利用分解质因数的方法, 比较简便地求出两个数的最小公倍数。例如:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

60和42的最小公倍数:

$$2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 7 = 420$$

$$2 \mid \begin{array}{l} 60 \quad 42 \\ \hline 30 \quad 21 \end{array} \text{—用公有的质因数2除}$$

$$3 \mid \begin{array}{l} 30 \quad 21 \\ \hline 10 \quad 7 \end{array} \text{—用公有的质因数3除}$$

$$10 \quad 7 \text{—除到两个数只有公因数1为止}$$

60和42的最小公倍数:

$$2 \times 3 \times 10 \times 7 = 420$$

为了简便, 通常写成这样的形式。

教学建议

(1) 鼓励学生不断总结经验, 改进方法。

教学例2时, 可以直接出示例题, 让学生独立思考, 独立解题, 找出6和8的最小公倍数。然后互相交流, 互相启发, 看看还有没有其他方法。

(2) 注重回顾学习过程中的思考和评价。

在回顾6和8的最小公倍数求解过程和结果以后, 让学生观察、思考两个数的公倍数和它们的最小公倍数之间的关系, 开展同桌讨论, 互相启发, 举例验证。

(3) 提倡“做中看”, 积累经验。

“做一做”可以让学生独立完成, 观察每组数的特点, 交流总结求两数最小公倍数的两种特殊情况: ①当两数成倍数关系时, 较大的数就是它们的最小公倍数; ②当两数只有公因数1时, 这两个数的积就是它们的最小公倍数。积累经验: 对于可以直接看出最小公倍数的, 不再从头去找公倍数。

(4) 学生自学与教师指导相结合。

“你知道吗?” 可以让学生自学, 教师给予适当指点, 两个数公有质因数与各自特有质因数的积是这两个数的最小公倍数。

编写意图

例3是公倍数、最小公倍数在生活中的实际应用。和前面公因数的实际应用编排一致，教材延续前面的素材，创设了用长方形墙砖铺正方形的实际问题情境，用公倍数、最小公倍数的知识求正方形的边长及其最小值。

教材同样呈现解决问题的全过程。首先通过画图初步理解题意，感受铺出正方形的不确定性。接下来，找出解决问题的方法。也就是将实际问题转化为数学问题，即“正方形的边长必须既是3的倍数，又是2的倍数”。这样就可以利用公倍数和最小公倍数来解决。

最后，利用画图验证的策略来检验。并结合前面学习的经验，总结出解决这类问题的关键就是将实际问题转化为数学问题。

教学建议

(1) 沟通新旧知识之间的联系。

教学例3前，先复习倍数、公倍数和最小公倍数的概念，并让学生分别写出20以内3与2的所有倍数，找出它们的公倍数和最小公倍数。

(2) 经历解决问题的全过程，提高解决问题的能力。

教学中，应引导学生经历应用知识解决问题的过程，培养学生解决问题的能力。首先，阅读与理解题意，收集有关的信息，使学生理解题意：做什么，条件是什么，有哪些要求。其次，让学生综合信息，厘清思路，抓住问题

解决的关键。设想铺的正方形可能有很多，而满足要求的正方形受墙砖规格的限制，可以应用公倍数和最小公倍数的知识解决问题。然后，针对墙砖3和2的规格，分别找出3和2的公倍数和最小公倍数，就能知道所铺的正方形边长。最后，可以让学生在纸上画一画，互相验证交流，使学生明确：要使用长方形墙砖铺墙，正方形的边长必须既是3的倍数，又是2的倍数，总结出解决此类问题的方法和策略。

有了前面利用公因数解决问题的经验，这里可以放手让学生自主探索再交流。同样，教师也可以选择学生感兴趣并且符合实际的其他素材进行教学。

练习十七

1. 按照从小到大的顺序, 在 100 以内的数中找出 6 的倍数和 10 的倍数, 再找出它们的公倍数和最小公倍数。

2. 求下列每组数的最小公倍数。

8 和 10 6 和 15 6 和 9 4 和 15 1 和 7 4 和 10

3. 下面每组数的公倍数中有没有 36? 有没有 48? 有没有 84?

6 和 18 21 和 14 12 和 8 9 和 24

4. 下面的说法正确吗? 说一说你的理由。

(1) 两个数的最小公倍数一定比这两个数都大。

(2) 两个数的积一定是这两个数的公倍数。

5. 每只蝴蝶只落在自己数字的倍数的花朵上, 哪朵花上两只蝴蝶都会停留, 就把这朵花涂上紫色。



6. 月季每 4 天浇一次水, 君子兰每 6 天浇一次水。



李阿姨 5 月 1 日给月季和君子兰同时浇了水, 下一次再给这两种花同时浇水应是 5 月几日?

7. 唱歌可以分成 6 人一组, 也可以分成 9 人一组, 刚好分完。



如果这些学生的总人数在 40 人以内, 可能是多少人?

8. 写出每组分数的两个分母的最小公倍数。

$$\frac{1}{12} \text{ 和 } \frac{7}{6} ()$$

$$\frac{3}{8} \text{ 和 } \frac{2}{3} ()$$

$$\frac{7}{9} \text{ 和 } \frac{5}{6} ()$$

编写意图

(1) 第 1 题旨在通过依次枚举, 感知两个数各自的倍数、公倍数、最小公倍数之间的关系, 促进概念的理解。

(2) 第 2 题是求最小公倍数的基本练习。六组数中有两组数互质。

(3) 第 3 题是两个数公倍数的判断练习。其中 9 和 24 的公倍数中, 没有 36、48, 也没有 84。

(4) 第 4 题是判断练习, 两个结论一个错、一个对, 第 (1) 题旨在让学生理解两个数的最小公倍数与公倍数的特殊情况。

(5) 第 5 题是识别两数公倍数的练习。

(6) 第 6 题是求两数最小公倍数的应用问题。可借助日历表帮助学生理解题意, 下一次同时浇水应是 5 月 13 日。

(7) 第 7 题是两数公倍数的应用问题。

(8) 第 8 题练习求两个分母的最小公倍数, 为后面学习通分作准备。

教学建议

(1) 引导学生总结找公倍数的经验。

例 2 已经启发学生观察发现了两个数的公倍数与最小公倍数的关系。因此, 完成第 1 题时, 教师应有意识地观察, 哪些学生运用了这一规律, 让这些学生向同学介绍自己的经验。

(2) 让学生叙述结论成立与否的理由。

通常, 否定结论 (说法), 只要举出一个反例即可, 如第 4 题的第 (1) 小题。当然也可以一般地说明相反情况: 当两数成倍数关系时, 它们的最小公倍数就等于两数中的较大数。而肯定结论 (说法), 则要说明根据, 如

第 4 题的第 (2) 小题。因为甲、乙两数的积除以甲数等于乙数, 除以乙数等于甲数, 所以两数的积一定是两数的倍数。在小学, 也允许学生举例说明。

(3) 逐步提高学生分析问题的能力。

第 6 题, 为什么是求最小公倍数, 第 7 题为什么是求公倍数, 应启发学生根据题意, 尝试着说清楚。如第 6 题, 4 和 6 的公倍数是同时浇花的间隔天数, 因为是求“下一次同时浇花”, 所以取最小的间隔天数。又如第 7 题, 总人数是 6 和 9 的公倍数时, 就能分成 6 人、9 人一组, 正好分完。已知总人数在 40 以内, 所以是求 40 以内 6 和 9 的公倍数。

编写意图

(1) 第9题是带着练习前面学过的内容,判断两个数的公因数。

(2) 第10、11题是求最小公倍数的实际应用问题,而且都是求间隔时间(若干分钟)的最小公倍数。重点是理解题意,将实际问题转化为数学问题。如第10题,每几分钟发车即每过几分钟发车。所以第二次同时发车过的分钟数就是6和8的最小公倍数。此外,第11题的情境还留出了继续提出问题的空间,使学生得到发现问题、提出问题的锻炼。

(3) 第12题为选做题,要求学生找出最小公倍数是36的两个数。这是最小公倍数的逆向思考问题,同时也是开放性练习。答案很多,不要求学生个人找全所有答案。

(4) “生活中的数学”介绍了分数在日常生活、工作以及科学研究中的应用实例,以利于培养学生的数学应用意识。

9. 下面各组数有没有公因数2?有没有公因数3?有没有公因数5?

6和9 10和18 15和30 20和8



10. 这两路公共汽车同时发车后,过多少分钟两路车第二次同时发车?



11. (1) 如果他们,同时同时起跑,至少多少分钟后两人在起点再次相遇?此时他们,分别分别跑了多少圈?

(2) 你还能提出其他数学问题并解答吗?

12. 36可能是哪两个数的最小公倍数?你能找出几组?



72

教学建议

(1) 鼓励学生提出问题并解答。

第11题的第(2)小题应让学生独立思考,自己提出问题。一般学生都能想到还可以求爸爸和女孩、妈妈和女孩以及三人同时起跑,至少多少分钟再在起点相遇,此时分别跑了多少圈。如果有学生提出比较快慢等其他方面的问题,也应予以认可,但不作展开。

(2) 通过交流,补充、完善答案。

第12题可让选做的学生交流自己找到的答案,从中可以发现答案有两类。一类是两数成倍数关系的,即36和它的约数,如1和

36, 2和36, 3和36, 4和36等;另一类是两数不成倍数关系的,有4和9, 4和18, 9和12, 12和18四组。有条件的学生,还可以借助分解36的质因数来讨论。

(3) 鼓励学生发现生活中应用数学的实例。

让学生阅读“生活中的数学”,课后自行寻找生活中的有关例子,还可以酌情布置学生寻找生活中最大公因数、最小公倍数的应用实例。

通分

4 你知道地球上的陆地多还是海洋多吗?



陆地面积占地球总面积的 $\frac{3}{10}$ ，而海洋面积占地球总面积的 $\frac{7}{10}$ 。



$$\frac{3}{10} < \frac{7}{10}$$

如果把地球面积平均分成 10 份，陆地占了 3 份，海洋占了 7 份。



$\frac{3}{10}$ 是 3 个 $\frac{1}{10}$ ， $\frac{7}{10}$ 是 7 个 $\frac{1}{10}$ 。

再比较一下，

$$\frac{3}{13} < \frac{4}{13}$$

$$\frac{2}{7} < \frac{4}{7}$$

$$\frac{5}{9} < \frac{3}{9}$$

$$\frac{5}{68} < \frac{23}{68}$$

$$\frac{3}{8} < \frac{3}{11}$$

$$\frac{5}{6} < \frac{5}{8}$$

$$\frac{12}{17} < \frac{12}{19}$$

$$\frac{19}{94} < \frac{19}{73}$$

上、下两组分数中相比较的两个分数有什么共同特点?

分母相同的两个分数怎样比较大小? 分子相同的两个分数呢?



做一做

在 \bigcirc 中填上 “>” “<” 或 “=”。

$$\frac{3}{7} < \frac{3}{7}$$

$$\frac{7}{16} < \frac{11}{16}$$

$$\frac{4}{9} < \frac{4}{8}$$

$$\frac{15}{17} < \frac{15}{22}$$

73

编写意图

(1) 通分和约分一样，也是分数基本性质的应用，同时通分还是异分母分数加减法运算的基础。教材以分数的大小比较为线索，由特殊到一般的分数大小比较，引出通分的教学。

(2) 例 4 由地球上陆地多还是海洋多的现实问题，引出同分母分数大小的比较。学生前面已经有了初步的比较方法和经验，这里进一步结合分数意义加深理解和巩固。

接下来给出两组分数进行大小比较，一组是相同分母的分数，另一组则是分子相同的分数。要求学生在比较的基础上，观察发现规律，总结出同分母分数或同分子分数大小比较的一般方法。

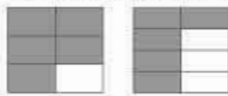
(3) “做一做”让学生分别练习分母相同和分子相同的分数的比较，巩固分数大小比较的方法。

教学建议

(1) 提出问题，引导复习，作好学习准备。教学前，可先复习一些相关知识。如：① $\frac{3}{10}$ 的分数单位是 ()，它有 () 个这样的分数单位；② $\frac{1}{8}$ 与 $\frac{1}{6}$ ，哪个大，为什么？通过复习、回忆、再现已有的相关知识，为学习例 4 作好准备。

(2) 问题导学，从过程与结果两方面总结。教学时，可先出示世界地图并提出问题，让学生看图观察、判断，然后给出条件并使学生明确，要比较陆地面积与海洋面积的大小，

只要比较这两个分数就行了。接下去，放手让学生自己说方法、说结果、说理由。最后，让学生比较并完成二行填空题。交流解题过程与结果时，重点放在比较同分子分数大小及其理由上。以 $\frac{5}{6}$ 与 $\frac{5}{8}$ 为例，可以由分数单位的大小推出：因为 $\frac{1}{6}$ 大于 $\frac{1}{8}$ ，所以 5 个 $\frac{1}{6}$ 大于 5 个 $\frac{1}{8}$ 。也可以画图说明（如下图）。在此基础上，归纳出：同分母分数相比，分子大的分数大；同分子分数相比，分母小的分数反而大。



编写意图

(1) 例5教学通分及其方法。

在例4的基础上，自然引出比较异分母分数的大小。例5以比较黄豆和蚕豆的蛋白质含量为载体，引出异分母分数 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{1}{4}$ 的大小比较，让学生初步体会通分的必要性。

这里运用迁移类推的思想，只要将两个分数转化为同分母分数就可以进行比较了，由此引出通分的概念，并探索通分的一般方法。事实上，通分只要保证两个分数的分母相同就可以，也就是可以以两个分母的任意一个公倍数作公分母，但为了简便，通常我们选取它们的最小公倍数进行通分。

(2) “做一做”安排了2道练习。第1道包括同分母分数、同分子分数、分母分子都不同的分数大小比较，进一步巩固方法。第2道通分练习，其中两组分数的分母为一般情况，一组分数的分母公因数只有1，还有一组分数的分母有倍数关系，目的是告诉学生，如果遇到这两种特殊情况，可以用简便的方法求分母的最小公倍数。

5 豆类食品含有较高的蛋白质，给身体有益于人身体健康。



黄豆和蚕豆哪个的蛋白质含量比较高？



$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20} \quad \frac{1}{4} = \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{5}{20}$$
$$\frac{2}{5} > \frac{1}{4}$$

像这样，把异分母分数分别化成和原来分数相等的同分母分数，叫做通分。

做一做

1. 在○中填上“>”“<”或“=”。

$$\frac{3}{15} \bigcirc \frac{7}{15} \quad \frac{5}{8} \bigcirc \frac{5}{8} \quad \frac{5}{3} \bigcirc \frac{3}{5} \quad \frac{4}{30} \bigcirc \frac{2}{15}$$

说一说，应该怎样比较分数的大小。

2. 把下面每组中的两个分数通分。

$$\frac{5}{6} \text{ 和 } \frac{7}{8} \quad \frac{3}{7} \text{ 和 } \frac{2}{9} \quad \frac{4}{9} \text{ 和 } \frac{7}{18} \quad \frac{3}{8} \text{ 和 } \frac{5}{9}$$

14

教学建议

(1) 在比较中激起学生的学习兴趣。

教学时，先从问题入手，让学生理解题意，提出问题“分子和分母都不相同的分数怎样比较？”接着分析 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{1}{4}$ 这两个分数的特点，抓住化不同为相同的思路，选择：化成同分子分数比较，或化成同分母分数比较，并说明理由。因为化成同分母分数，分数单位相同，便于加、减计算，所以重点学习化成同分母分数的方法。此时，引入公分母概念，然后让学生讨论：用什么数（两个分母的最小公倍数）作

公分母？怎样把异分母分数化成和原来分数相等的同分母分数？在交流的基础上，总结通分的意义、概念和方法。

(2) 逐步培养学生良好的审题习惯。

“做一做”可以让学生先观察，根据分母的特点选择合适的求最小公倍数的方法。这是一种良好的审题习惯，应注意逐步培养。

此外，注意适时引导学生沟通约分和通分的异同，以防止混淆。

练 习 十 八

1. 比较每组中两个分数的大小。

$$\frac{3}{8} \bigcirc \frac{1}{8} \quad \frac{11}{25} \bigcirc \frac{17}{25} \quad \frac{8}{7} \bigcirc \frac{8}{17} \quad \frac{12}{23} \bigcirc \frac{12}{19}$$

2. 比较每组中两个分数的大小。

$$\frac{8}{9} \bigcirc \frac{5}{6} \quad \frac{1}{3} \bigcirc \frac{3}{7} \quad \frac{2}{5} \bigcirc \frac{3}{10} \quad \frac{6}{8} \bigcirc \frac{7}{10}$$

你是怎样比较的? 和同学交流一下。

3. 把梨放进相应的篮子。



4. 张叔叔和李叔叔参加了工厂的技能比赛。张叔叔加工完了所有零件的 $\frac{4}{5}$ 时, 李叔叔加工完了所有零件的 $\frac{3}{5}$ 。在这段时间里, 谁的比赛成绩更好一些?



亚洲陆地面积约占地球总面积的 $\frac{1}{5}$ 。



非洲和南美洲的陆地面积分别约占地球总面积的 $\frac{1}{5}$ 和 $\frac{3}{25}$ 。

亚洲、非洲和南美洲这三个洲中, 哪个洲的陆地面积最大? 哪个最小?

5. 把下面每组中的两个分数通分。

$$(1) \frac{4}{5} = \frac{4 \times 1}{5 \times 1} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \times 1}{7 \times 1} = \frac{6}{7}$$

$$(2) \frac{8}{10} = \frac{8 \times 1}{10 \times 1} = \frac{8}{10}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 1}{4 \times 1} = \frac{3}{4}$$

编写意图

(1) 第1题是同分母或同分子分数比较大小, 因此都可以直接比较。

(2) 第2题是分子、分母都不同的分数比较大小, 需要先通分再比较大小, 或灵活采用其他方法来比较。

(3) 第3题是比较分数大小的变式练习, 将七个分数分成大于、小于 $\frac{1}{4}$ 两类。

(4) 第4题是比较两个分数大小的实际应用问题。

(5) 第5题是写出通分过程的练习, 教材设计成填空形式, 帮助学生掌握通分的方法, 也有利于提高练习效率。

(6) 第6题是比较三个分数大小的实际应用问题, 题材涉及三个洲的面积, 有利于开拓学生的知识面。可以先比较 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{5}$, 再比较 $\frac{1}{5}$ 与 $\frac{3}{25}$ 。

教学建议

(1) 引导学生自觉地灵活选用比较分数大小的合理方法。

通过交流, 明确分子、分母都不同的分数比较大小, 一般方法是通分, 有时也可根据分数的具体情况选用合理的方法。如第2题中的 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{3}{7}$, 第3题中的 $\frac{2}{7}$ 、 $\frac{2}{9}$ 与 $\frac{1}{4}$, 第6题的 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{5}$ 和 $\frac{3}{25}$, 都可转化为同分子分数来比较, 如 $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} < \frac{3}{7}$ 。更灵活的如, 因为 $1 - \frac{1}{9} >$

$1 - \frac{1}{6}$, 所以 $\frac{8}{9} > \frac{5}{6}$ (第2题); 因为 $\frac{1}{2}$ 是“一半”, $\frac{3}{5}$ 超过了一半, 所以 $\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$ (第4题)。

灵活选用合理的方法, 也有利于发展学生的数感, 重要的是“自觉”和“因人而异”。

(2) 提醒学生自觉检查, 核对答案。

如第3题, 数据多, 容易出错, 有必要检查, 如: 其中四个分数大于 $\frac{1}{4}$, 三个分数小于 $\frac{1}{4}$, 没有等于的 $\frac{1}{4}$, 正好七个分数。

编写意图

(1) 第7题是在调查统计中应用分数,通过比较三个分数的大小,作出购书决策。可以像第6题那样先比较两个分数,也可以三个分数一起通分(公分母是12,比较方便),或用其他方法比较。

(2) 第8题也是比较分数大小的练习,与前面各题有所不同的是,出现了真分数与假分数的大小比较。

(3) 第9题要求将六个分数按从大到小顺序排列,实际上是比较分数大小的综合练习。

(4) 第10题既是求两个数的最大公因数、最小公倍数的练习,又是启发学生观察发现规律的练习,有利于发展学生的合情推理。结论是两数的积等于它们最大公因数与最小公倍数的积。

(5) 第11题为选做题,需要综合应用分数基本性质和大小比较的知识,方法比较灵活,同时渗透了有理数的稠密性,即任意不相等的两数之间有无数个有理数。

7. 希望小学小小图书馆选购一批新书,班长小红决定先作一个民意调查,下面是小红的调查结果(每人只选一种)。

课外读物种类	科技类	童话类	历史类
喜欢的人数占全班人数的几分之几	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

小红应该怎样选购图书?

8. 在○里填上“>”“<”或“=”。

$\frac{2}{3} \bigcirc \frac{5}{6}$

$\frac{5}{12} \bigcirc \frac{5}{11}$

$\frac{14}{15} \bigcirc \frac{19}{20}$

$\frac{13}{16} \bigcirc \frac{3}{2}$

9. 把下面的分数按照从小到大的顺序排列起来。

$\frac{4}{5}$

$\frac{11}{12}$

$\frac{5}{6}$

$\frac{4}{3}$

$\frac{7}{10}$

$\frac{1}{2}$

10. 观察求填空。

	10和20	8和12	8和24	7和14
最大公因数				
最小公倍数				
最大公因数和最小公倍数的积				
两个数的积				

你发现了什么?

11. 你能写出一个比 $\frac{4}{5}$ 大又比 $\frac{5}{3}$ 小的分数吗?你是怎样找到这个分数的?你还能再找到两个这样的分数吗?

教学建议

(1) 启发学生积累数感。

如第7题, $\frac{7}{12}$ 大于一半, $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{4}$ 小于一半,只需比较这两个分子是1的分数。又如第8题,除了假分数大于真分数之外,还有两组分数,分子都比分母小1,由此可推出分母大的分数较大。如, $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}$,因为 $\frac{1}{3}>\frac{1}{6}$,所以 $1-\frac{1}{3}<1-\frac{1}{6}$,即 $\frac{2}{3}<\frac{5}{6}$ 。这些比较分数大小的经验都有助于发展数感。

(2) 让学生感受数学的奥秘。

如第11题,学生容易发现把 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{5}$ 化成同分母分数,如 $\frac{10}{60}$, $\frac{12}{60}$ 或 $\frac{20}{120}$, $\frac{24}{120}$,就能找到多个介于 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{5}$ 之间的分数。或者化成同分子分数,使分母的差大于1,如 $\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$, $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$,也能找到两个符合要求的分数。事实上只要把分母改写成5.1,5.2,5.3,...,根据分数基本性质, $\frac{1}{5.1}=\frac{10}{51}$ 就是一个符合要求的分数。由于5和6之间有无数个小数,可得猜想,两个不相等分数之间有无数个分数。

6. 分数和小数的互化

1 把一条3米长的绳子平均分成10段，每段长多少米？如果平均分成5段呢？

$$\begin{aligned} 3 \div 10 &= 0.3(\text{米}) & 3 \div 10 &= \frac{3}{10}(\text{米}) \\ 3 \div 5 &= 0.6(\text{米}) & 3 \div 5 &= \frac{3}{5}(\text{米}) \end{aligned}$$

所以， $0.3 = \frac{3}{10}$ ， $0.6 = \frac{3}{5}$ 。



怎样能较快地把小数化成分数？

小数表示的就是十分之几，百分之几，千分之几……的数，所以可以直接写成分母是10、100、1000……的分数，再化简。

$$0.3 = \frac{3}{10}$$

$$0.6 = \frac{6}{10} = \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5}$$

自己试一试。

$$0.07 = \frac{7}{100}$$

$$0.24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

$$0.123 = \frac{123}{1000}$$

把小数化成分数要注意什么？

2 把 $\frac{7}{10}$ 、 $\frac{39}{100}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{9}{40}$ 、 $\frac{2}{9}$ 、 $\frac{5}{14}$ 化成小数（除不尽的保留两位小数）。

$$\frac{7}{10} = 0.7$$

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0.75$$

$$\frac{2}{9} = 2 \div 9 = 0.22$$

$$\frac{39}{100} = 0.39$$

$$\frac{9}{40} = 9 \div 40 = 0.225$$

$$\frac{5}{14} = 5 \div 14 = 0.36$$

用分子除以分母除不尽时，要保留两位小数“四舍五入”法保留几位小数。

做一做

把 0.7 、 $\frac{9}{10}$ 、 0.25 、 $\frac{43}{100}$ 、 $\frac{7}{25}$ 、 $\frac{13}{47}$ 这6个数按从小到大的顺序排列起来。

编写意图

(1) 本小节教学分数与小数的互化的方法，沟通分数与小数的联系，加深对分数、小数意义的理解。

(2) 例1通过解决具体问题教学小数化分数。先根据除法的意义列出除法算式，再分别用小数和分数表示出计算结果，由此了解小数和相应的分数的关系。接下来，让学生思考如何较快地把小数化成分数。联系小数的意义，介绍小数直接转化成分数并化简的一般方法。最后，通过“试一试”，引导学生进行讨论和总结。

(3) 例2教学分数化小数的方法。教材直接提出问题，要求把分数化成小数。6个分数分为两类，一类分母是10、100、1000、…的分数可以直接化成小数；另一类分母不是10、100、1000、…，可以利用分数与除法的关系，用分子除以分母得出小数，除不尽时，根据需要按“四舍五入”法保留几位小数，有的还可以利用分数的基本性质，转化为分母是10、100、1000、…的分数，再化成小数。

(4) “做一做”要求把6个数按从小到大的顺序排列起来。6个数中，有分数，也有小数，先选择用分数或小数排序，再互化比较。

教学建议

沟通小数和分数的联系，理解并掌握互化的方法。

小数的意义是小数化分数的基础，而分数化小数，其依据是分数与除法的关系，分数的基本性质。因此，教学前，可适当回顾相关知识，关注分数和小数互化的原理，促进方法的理解和掌握。

比如，教学例1前，可先复习小数的意义，让学生理解小数实际上是分母为10、100、1000、…的分数的另一种书写形式。学生自然能总结出小数化分数的一般方法和注意

要点。

教学例2前，可复习分数的基本性质以及分数与除法的关系，引导学生针对不同情况采用不同解决方法。

教学中关注算理，让学生经历依据已有的基础知识导出方法的过程，能有效地促使学生在理解的基础上掌握算法。这样有利于减少互化时的差错，也有利于培养学生的数学学习能力。

编写意图

(1) 第1、2题旨在沟通小数与分数的联系，涉及一位小数与十分之几、两位小数与百分之几。通过练习，起到温故知新的作用。

(2) 第3题是分数与小数十化的练习。


(3) 第4题是求一个数是另一个数的几倍（几分之几）的应用问题。两个问题的答案渗透了倒数的概念。前一问题的答案用小数、分数表示均可。

(4) 第5题集中练习分数化小数。其中有三个分数不能化成有限小数，需要按要求保留两位小数。

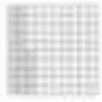
(5) 第6题采用在直线（数轴）上填写两种形式的数的方式，进行分数与小数的互化练习。

练习十九


1. 分别用小数和分数表示下面每个图中涂色部分的大小。



(1) $3 \times \frac{1}{10}$



(2) $3 \times \frac{1}{100}$





(3) $3 \times \frac{1}{8}$

2. (1) 0.8里面有8个()分之一，表示()分之()，化成分数是 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ 。
 (2) 0.05里面有5个()分之一，化成分数是 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ 。
 (3) 0.007里面有7个()分之一，化成分数是 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ 。
 (4) 0.36里面有36个()分之一，化成分数是 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ 。

3. 把小数和相等的分数用线连起来。


0.6	0.03	0.45	3.25	0.18
$\frac{12}{4}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{50}$

4.  20米/秒  31米/秒
 猎豹的速度是小汽车速度的多少倍？小汽车的速度是猎豹速度的几分之几？

5. 把下面的分数化成小数（除不尽的保留两位小数）。

$\frac{31}{100}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{23}{20}$
------------------	----------------	----------------	---------------	---------------	-----------------	-----------------

6. 在 \square 里填上适当的小数或分数。



教学建议

(1) 发挥合作学习的作用，提高练习有效性。

第1、2、3、6题，都可以写在课本上，采用同桌互相批改的方式检查，有争议的，提出来由全班同学评议，以便做到及时反馈、订正，当堂巩固。

(2) 引导学生交流分数与小数十化的经验。

最常用的互化经验是利用分数单位来推算。如：一般学生都熟悉 $\frac{1}{8}=0.125$ ，进而得：

$$\frac{3}{8}=0.125 \times 3=0.375,$$

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=0.125+0.5=0.625,$$

$$\frac{7}{8}=1-\frac{1}{8}=1-0.125=0.875,$$

等等。这样，在理解的基础上依靠推理与有意记忆，能有效避免死记硬背。

7. 在下表的括号里填上适当的数。

	用小数表示	用分数表示
40 cm	() m	() m
150 g	() kg	() kg
125 cm ²	() dm ²	() dm ²
3600 dm ²	() m ²	() m ²

8. 按从大到小的顺序排列下面各数。

$2\frac{4}{7}$ 2.35 $\frac{13}{6}$ $\frac{11}{16}$ 2.035

9.

李阿姨和王叔叔谁打字快?

10.

如果他们的行走速度相同, 谁家离学校近些?

你知道吗?

你知道什么样的最简分数能化成有限小数吗? 你想了解这个规律吗? 其实, 只要把分数的分母分解质因数, 就能知道一个分数能否化成有限小数。如果分母中除了2和5以外, 不含有其他质因数, 这个分数就能化成有限小数。例如, $\frac{7}{20}$ 的分母 $20=2\times 2\times 5$, 它就能化成有限小数。

如果分母中含有2和5以外的质因数, 这个分数就不能化成有限小数。例如, $\frac{7}{30}$ 的分母 $30=2\times 3\times 5$, 它就不能化成有限小数。想一想, 这是为什么!

编写意图

(1) 第7题采用列表形式, 将常用计量单位的换算与小数、分数的互化结合起来进行练习。本题中的量, 相邻单位间的进率分别是10、100、1000。

(2) 第8题要求将带分数、假分数和小数进行排序, 需要先转换数的形式, 以便于比较大小。

(3) 第9题是应用分数、小数大小比较的实际问题, 可以先统一数的形式, 再作比较。如把0.9化成 $\frac{9}{10}$, 或把 $\frac{5}{6}$ 化成0.8...都能比较出大小。如果学生算出李阿姨每分钟打54(0.9×60)个字, 再作比较, 也是可以的。

(4) 第10题也是比较大小的实际问题。特点是以分为单位的整数与以时为单位分数比较大小。

(5) “你知道吗?”介绍的规律实际上是判断一个最简分数能否化成有限小数的方法。这个规律具有充分性和必要性, 即分母只含质因数2或5的最简分数一定能化成有限小数, 反过来有限小数都能改写成分母只含质因数2或5的最简分数。

教学建议

(1) 根据数据特点选择适当的方法。

第8~10题的解答都归结为比较数的大小。一般来说当数据形式不一致时, 统一成分数或小数均可。若有分数不能化成有限小数, 只要根据需要取几位小数就足以区分大小。因此, 有必要通过不同方法的交流, 让学生体会怎样根据具体情况选用适当的方法。

第8题, 四个数大于2, 一个数小于2, 不用参与比较。需要比较的两个分数只要除到十分位就能比出大小: $2\frac{4}{7}=2.5\dots$, $\frac{13}{6}=2.1\dots$,

2.35, 2.035。第10题, 统一成以分为单位的整数($60\div 4$)比较简便。

(2) 指导阅读, 启发理解。

“你知道吗?”中提出的问题是难点, 可从有限小数都是十进分数入手予以启发, 即分母只含质因数2或5的最简分数一定可以转化为十进分数。如,

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5^3}{8 \times 5^3} = \frac{375}{1000}, \quad \frac{7}{25} = \frac{7 \times 2^2}{25 \times 2^2} = \frac{28}{100}$$

反过来, 含2、5以外的质因数, 如 $\frac{5}{12} =$

$\frac{5}{2^2 \times 3}$, 无论分子、分母同乘几都无法转化为十进分数。

编写意图

(1) 教材以小精灵的提示,以本单元两个重点内容分数的意义和分数的基本性质为主线,进行整理和复习,培养学生总结、归纳的学习能力,加深对所学知识的理解。


(2) 接下来结合具体问题回顾本单元所学的相关知识。

第1题复习分数单位、分数的分类、约分和通分、大小比较等知识,进一步沟通相关知识之间的联系与区别。

第2题应用公倍数和最小公倍数的知识解决简单实际问题,并进一步梳理知识、解决问题的方法,并在解决问题中进一步理解有关概念及其意义,提高问题解决的能力。


整理和复习

本单元主要学习了哪些知识?



先从教材后地学习的主要知识及写下来。

分数的意义
分数 < 真分数
分数 > 假分数
分数的基本性质
约分 通分



1. 填写下表,并完成后面的问题。

$\frac{3}{8}$ $\frac{18}{10}$ $\frac{13}{9}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{7}{7}$ $\frac{20}{25}$ $\frac{12}{10}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{3}{5}$


真分数	假分数

(1) 想一想, $\frac{3}{8}$ 和 $\frac{7}{9}$ 的分数单位相同吗?怎样把它们化成分数单位相同的分数?
(2) 为什么要对两个或两个分数进行通分?将上面的分数按从小到大的顺序排列起来。
(3) 为什么有时要对一个分数进行约分?将上面需要约分的分数约分。

2. 先解决问题,再说一说用到了本单元学习的哪些知识。

这块正方形布料,既可以做成边长是8cm的方巾,也可以做成边长是10cm的方巾,都没有剩余。

这块正方形布料的边长至少是多少厘米?



80

教学建议

(1) 加强整理和复习的有效性和针对性。

教学时,应引导学生用自己喜欢的表达方式整理本单元知识。让学生先自行整理,小组交流,再全班汇报展示,讨论评价,形成对本单元知识比较一致的认识。

在练习中加强对比,有意识地复习有关概念、概念之间的联系和区别。如,约分与通分,既有联系,又有区别。它们都是依据分数的基本性质,保持分数的大小不变。区别在于:约分可以只对一个分数进行,而通分至少要对两个分数进行;约分是将分子、分母同除

以一个不等于0的数,而通分则将分子、分母同乘一个不等于0的数;约分的结果是最简分数,通分的结果是同分母分数。

(2) 培养学生解决问题的能力。

解决问题的练习,应引导学生经历解决问题的全过程。特别是将实际问题转化为数学问题的能力,这是解决问题的关键。如,第2题就是要根据“边长8 cm和边长10 cm都没有剩余”以及正方形布料边长与方巾的关系,明确用最小公倍数的知识来解决,进一步巩固解决此类问题的方法和策略。

练习二十

1. 把一根2 m长的木条锯成同样长的4段, 每段是这根木条的 $\frac{1}{4}$, 每段长 $() \times () = () \text{ m}$ 。

2. 下面的说法正确吗? 正确的画“√”, 错误的画“×”。

- (1) 分数的分母越大, 它的分数单位就越小。 ()
 (2) 分数都比整数小。 ()
 (3) 假分数的分子都比分母小。 ()
 (4) 如果 b 是 a 的2倍($a \neq 0$), 那么 a, b 的最大公因数是 a , 最小公倍数是 b 。 ()
 (5) 分子和分母的公因数只有1的分数是最简分数。 ()

3. 你听过“冰山一角”的说法吗? 冰山露在水面上的只是小部分, 大部分隐藏在水面下。假设一座冰山的体积是1000 m^3 , 它露在水面上的体积是100 m^3 , 冰山露在水面上的体积占总体积的 $\frac{1}{10}$, 水面下的体积占总体积的 $\frac{9}{10}$ 。



4. 在下面的横线上填上适当的分数。

25 cm = $\frac{1}{4}$ m 26 dm² = $\frac{1}{100}$ m²
 600 g = $\frac{3}{5}$ kg 750 mL = $\frac{3}{4}$ L
 0.28 dm = $\frac{7}{25}$ dm 258 cm² = $\frac{258}{10000}$ dm²

5. 一班来了48人, 二班来了54人。
 如果把两个班的学生分别分成若干小组, 要使两个班每个小组的人数相同, 每组最多有多少人?

6. 在○里填上“>”“<”或“=”。

$\frac{5}{13} > \frac{8}{13}$ $\frac{5}{7} > \frac{5}{11}$ $\frac{4}{5} < \frac{7}{8}$ $\frac{2}{9} < \frac{1}{6}$

编写意图

(1) 第1题, 通过练习复习分数的有关概念, 主要是分数与分数单位的意义, 分数与除法的关系。

(2) 第2题采用判断题的形式, 从不同侧面启发学生理解分数的有关概念。涉及分数单位与分母的关系, 分数与整数的关系, 以及假分数、最大公因数、最小公倍数、最简分数等概念。

(3) 第3题以冰山两部分的体积为载体提出问题, 复习求一个数是另一个数的几分之几。两个答案的和等于1。

(4) 第4题是若干常用计量单位的换算练习, 要求把低级单位的名数, 换算成高级单位的名数。

(5) 第5题是通过求两个数最大公因数来解决实际问题。

(6) 第6题是比较分数大小的练习, 涉及同分母、同分子的特殊情况与分子、分母都不相同的一般情况。

教学建议

(1) 充分利用课本, 提高练习效率。

这里的6道题, 以填空形式为主, 都能在课本上, 以免不必要的抄写, 节省练习时间。

(2) 让学生陈述判断对错的理由。

第2题中有两小题的说法是错的, 可以让学生举出反例; 其他三题的说法是对的, 可以让学生说说理由, 或举例说明。

(3) 提醒学生自觉检查, 培养良好的解决问题的习惯。

第3、4题可提醒学生注意约分, 检查答

案是否是最简分数。

第5题, 还可联系 $\frac{48}{54}$ 约分过程, 请学生说说6和8、9在本题中的实际含义,

$$\frac{48}{54} = \frac{48 \div 6}{54 \div 6} = \frac{8}{9}$$

并进行检验: 每组最多6人, 一班分成8组, 二班分成9组; 8和9的最大公因数是1, 说明6是48和54的最大公因数。也就是借助约分的形式与最简分数的概念, 促进对最大公因数实际应用问题的理解。

编写意图

(1) 第7题提出了班级近视率与年级近视率的比较问题,由学生自己考虑怎样综合运用分数意义和分数大小比较的知识解决这一实际问题。

(2) 第8题是求两个间隔时间最小公倍数的实际应用问题。前面的练习中已有相近内容的习题。

(3) 第9题给出了三个数据,但只提出个数是另一个数的几分之几的问题,让学生提出其他问题并解答。

(4) 第10题为选做题,是两数最小公倍数的变式问题,所求数比两数最小公倍数多2,即至少带了14元。

(5) 第11题为选做题,与练习十八第12题类似。

(6) 本练习的最后,教材通过两个同学有关学习体会的对话,启发学生举一反三,总结本单元的学习收获。

7.



五(1)班同学戴近视镜的情况和五年级的总体情况相比怎么样?

8.

一辆喷壶由内向外结构,外面每10分钟喷一次,里面每6分钟喷一次,中午12:45同时喷过一次后,下次同时喷水是几时几分?



9.



文文的纸飞机飞了5m,小丽的飞了4m,兰兰的飞了3m,兰兰的纸飞机飞的距离是文文的几分之几?你还能提出其他数学问题并解答吗?

10.



我带的钱如果都买小包装的,正好买3元;如果都买大包装的,正好2元。

11. 可以怎样换?

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8}$$

$$\frac{4}{5} > \frac{1}{7} > \frac{7}{10}$$

李阿姨至少带了多少钱?

本学期结束了,你有什么收获?

数学知识之间都有联系,像分数的基本性质和商不变的规律——

对最小公倍数、最小公倍数的知识,可以解决一些实际问题。



这节课你

☆☆☆☆

82

教学建议

(1) 交流应用分数解决问题的经验。

第7题没有明确指示求谁占谁的几分之几,但因本单元解决这类问题的经历较多,所以多数学生能想到先写出五年级戴近视镜的人数占全年级总人数的几分之几,五一班戴近视镜的人数占全班人数的几分之几,再比较。交流时可让学生着重说说怎样比较,结论是什么。

(2) 启发学生将新问题转化为已经解决的问题。

第10题是学生首次遇到的新问题。可以启发学生改变条件,将“还剩2元”都改为

“钱正好用完”,就成了已经解决过的问题。由此推得,新问题是求比两数最小公倍数多2的数。

(3) 鼓励学生尝试不同的解题方法。

第11题学生已有同类问题的解题经验,这里可鼓励他们尝试不同的方法。如前面采用化成同分母分数方法的同学,不妨试试化成同分子分数的方法,以开拓学生的思路。

(4) 引导学生畅谈学习体会。

除了教材的提示外,还可引导学生从分数与除法运算的联系,分数与整数、小数形式上的转化,以及分数自身多种形式上的转化等方面,谈谈自己的认识和体会。

附 1

方法一，先把每个圆剪成 4 个 $\frac{1}{4}$ 块，再把 12 个 $\frac{1}{4}$ 块平均分给 4 人，得到每人 3 个 $\frac{1}{4}$ 块，然后把 3 个 $\frac{1}{4}$ 块拼在一起，得出结果，每人分到 $\frac{3}{4}$ 块。

方法二，按照课本上的方法，把 3 个圆摞在一起，平均分成 4 份，再把每份的 3 个 $\frac{1}{4}$ 块拼在一起，得到每人 $\frac{3}{4}$ 块。

方法三，先把 2 个圆摞在一起，平均分成 2 份，剪成 4 个 $\frac{1}{2}$ 块，再把 1 个圆平均分成 4 份，然后把 $\frac{1}{2}$ 块和 $\frac{1}{4}$ 块拼在一起，得出每人分到 $\frac{3}{4}$ 块。

方法四，操作与推理结合：1 块月饼平均分给 4 人，每人分得 $\frac{1}{4}$ 块，3 块月饼平均分给 4 人，每人分得 3 个 $\frac{1}{4}$ 块，是 $\frac{3}{4}$ 块。

附 2

(1) 有了分数，就可以解决整数除法有时得不到整数商的问题。

(2) 当用分数表示整数除法的商时，要用除数作分母，被除数作分子。反过来，一个分数也可以看作两个数相除，分数的分子相当于除法中的被除数，分母相当于除数，分数线相当于除号。

(3) 在整数除法中，除数不能是零。在分数中，分母也不能是零。因此，用字母表示时，要注明 b 不等于 0。

最后，还要指出，前面讲分数的意义时，把 $\frac{3}{4}$ 理解为把单位“1”平均分成 4 份，表示这样 3 份的数。学了分数与除法的关系， $\frac{3}{4}$ 也可以看作是把“3”平均分成 4 份，表示这样一份的数。

如果有学生提问：整数除法，当商是整数时，可不可以用分数表示？则回答是肯定的。事实上，任何一个整数除以非零整数，商都可以用分数表示。这一点，学了约分和假分数化成整数以后，就更清楚了。

二、教学设计或教学片段

课题 1: 分数的意义

教学内容: 教科书第 45、46 页内容。

教学目标:

1. 了解分数的产生, 理解分数的意义。
2. 理解单位“1”的含义, 认识分数单位, 能说明一个分数中有几个分数单位。
3. 在理解分数含义的过程中, 渗透比较、数形结合等数学思想方法, 培养学生的抽象概括能力。

教学重点: 理解分数的意义。

教学难点: 理解单位“1”, 认识分数单位。

教学准备:

学具: 圆片, 正方形和长方形纸片, 一板面包图片(分格的), 4 个面包图片, 一段绳子。

教具: 课件、彩色磁扣。

教学过程:

(一) 复习引入

教师(出示 $\frac{1}{4}$): 同学们, 你们认识这个数吗?

教师: 那你们会读这个数吗? 它的各个部分(分别手指分母、分子、分数线)分别叫什么名字?

教师: 很好, 这是我们以前学过的分数。今天我们继续学习分数的有关知识。

教师板书: 分数的意义。

(设计意图: 通过一个具体分数, 让学生回忆分数的初步认识, 为后面表示 $\frac{1}{4}$ 作好铺垫。)

(二) 探究、理解分数的意义

1. 操作探究。

教师: 老师给大家准备了一些圆片、正方形等学具, 你能用自己喜欢的方式, 表示出 $\frac{1}{4}$ 这个分数吗?

教师: 看来大家很有信心! 下面大家就通过折一折、画一画等方式, 表示出 $\frac{1}{4}$ 。

学生动手表示 $\frac{1}{4}$ 。

教师: 表示完的同学可以先和同桌互相说一说你所表示的 $\frac{1}{4}$ 。

2. 反馈交流。

教师：现在谁来说一说你是怎样表示 $\frac{1}{4}$ 的？

学生1（投影展示）：我把一个圆这样对折，再对折，这样就平均分成4份，涂出这样的一份就表示 $\frac{1}{4}$ 。

教师：哦！你是把一个圆片平均分成4份，再取其中的一份表示的 $\frac{1}{4}$ 。很好！还有谁想说一说？

学生2（投影展示）：我是把一个正方形这样对折，再对折，平均分成4份，其中这样的一份就表示 $\frac{1}{4}$ 。

教师：你也是把一个图形平均分成了4份，用其中的一份来表示 $\frac{1}{4}$ 的。不错！谁还有不同的表示方法？

学生3（投影展示）：我是把4个面包平均分成4份，其中的1份就是这些面包的 $\frac{1}{4}$ 。

教师：哦，你不是把一个图形，而是把一些面包平均分成了4份，用其中的一份来表示的 $\frac{1}{4}$ 。大家说可以吗？

教师：对！可以的，我们在三年级就见到过这种情况。还有同学是像这样表示的吗？

学生展示用绳子、面包表示 $\frac{1}{4}$ 的情况。

（设计意图：在三年级分数初步认识的基础上，让学生自由地表示 $\frac{1}{4}$ ，加深学生对 $\frac{1}{4}$ 的意义理解，使学生进一步明确：平均分整体，既可以是一个物体，也可以是一些物体，为概括分数的意义作好准备。）

3. 归纳小结，认识单位“1”。

教师：很好！（用课件在一个画面中分类呈现学生汇报过的几种情况）现在请大家仔细观察同学们的这些作品，它们有什么相同的地方？有什么不同的地方？先自己想一想，再和同桌说一说。

学生观察、比较，再组内互相交流。

教师：谁想说一说它们有什么相同的地方和不同的地方？

学生：相同的地方是我们都是平均分（板书：平均分）成4份，取其中的1份的。不同的地方是我们分的物体不同，分的物体的总体的数量也不同。

教师：你们把什么平均分成了4份？

学生：把一个图形或者一段绳子，还有一些面包。

教师：回答得非常好！在这里，我们是把一个物体或一些物体（手指课件）看作了一个整

体，把这个整体平均分成了4份，其中的一份就用 $\frac{1}{4}$ 来表示。这个整体我们可以用自然数1来表示，我们通常把它叫做单位“1”。

教师板书：整体 单位“1”。

教师：现在请同学们想一想，我们还可以把哪些东西看成单位“1”？和你的同桌说一说。

学生思考后同桌交流。

教师：谁来说一说？

学生1：可以把一箱水果看成单位“1”。

学生2：也可以把全班同学看成单位“1”。

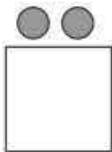
学生3：可以把1厘米看成单位“1”。

教师：对！一个计量单位1米、1厘米都可以看成单位“1”，比如，1毫米就是 $\frac{1}{10}$ 厘米。

(设计意图：促使借助观察、比较不同的表示 $\frac{1}{4}$ 的方法的异同，数形结合，使学生透过现象发现本质，引导学生总结 $\frac{1}{4}$ 的意义，认识单位“1”。)

4. 再次研究 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 。

教师：老师现在也有一幅表示 $\frac{1}{4}$ 的作品（展示下图）。



教师：露出来的部分是一个整体的 $\frac{1}{4}$ ，你能摆一摆，并说一说它的整体是怎样的吗？

学生动手摆、说。

教师：你是怎样摆的？谁来汇报一下？

学生：我又摆出了3组圆片，每组2个。这个整体是8个圆片。

教师：那你为什么这么摆？

学生：这里露出来的2个圆片是整体的 $\frac{1}{4}$ ，说明还有3份这样的圆片，我就摆出来3组，每组2个。

教师：这里的 $\frac{1}{4}$ 是把什么看成单位“1”了？

学生：这里的 $\frac{1}{4}$ 是把8个小圆片作为一个整体，看成单位“1”了。

教师：很好！那你摆出的部分应该用哪个分数来表示呢？

学生思考后汇报： $\frac{3}{4}$ （教师板书）。

教师：为什么用 $\frac{3}{4}$ 表示？

学生：因为这里是把整体平均分成了4份，我摆出的部分占了3份，所以用 $\frac{3}{4}$ 表示。

（设计意图：通过让学生摆出一个 $\frac{1}{4}$ 的整体、用 $\frac{3}{4}$ 表示自己摆出的圆片，加深学生对单位“1”的认识，巩固学生对分数意义的理解。）

5. 研究几分之几。

教师：很好！看来同学们都理解了 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 表示的含义了，下面就请同学们任意写一个分数，再和同桌说一说你写的这个分数表示的意思。

学生写分数后小组交流。

教师：哪个同学想和大家分享一下你写的分数？

学生1：我写的是 $\frac{5}{6}$ （教师板书）。把一个整体也就是单位“1”平均分成6份，这样的5份就是 $\frac{5}{6}$ 。

学生2：我写的是 $\frac{2}{3}$ （教师板书）。把一个整体也就是单位“1”平均分成3份，这样的2份就是 $\frac{2}{3}$ 。

（三）认识分数单位

教师：同学们介绍的都很好！下面请同学们翻开书第46页，请你完成“做一做”。

学生完成后在课件上汇报。

教师：这里把什么看成单位“1”了？

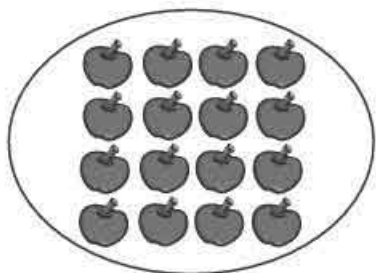
学生：把一堆糖看成了单位“1”。

教师（手指课件）：像这样，把单位“1”平均分成若干份，表示其中一份的数，我们把它叫做分数单位。（指板书上的 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{5}{6}$ 、 $\frac{2}{3}$ ）请你说一说黑板上这些分数的分数单位，并说说它们有几个这样的分数单位。

学生分别汇报。

（四）练习

1. 完成教科书第48页第6题。
2. 完成教科书第48页第7题。
3. 任选一个分数，在下图中涂色表示出来。



$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12}$$

学生完成后组织汇报。

教师：刚才我们都是把12个苹果看成一个整体也就是单位“1”进行平均分，分的份数不同，每一份的数量也不同，也就是分数单位不同。

（设计意图：通过不同层次的练习题，加深对分数意义及分数单位的理解。）

（五）分数的产生

教师：今天，我们学习了分数的意义，你们知道分数是怎样产生的吗？来听听小精灵的介绍吧！（课件依次演示教科书第45页图片中的内容。）

在学生看完之后，让学生说说从中了解到了什么。

教师（总结）：看来，分数是我们在生活中测量、分物时，或者在计算时得不到一个整数结果的情况下而产生的（课件呈现教科书第45页下方的文字），来源于生活或者数学中的客观需要，正是由于这些需要，我们以后还会继续认识其他数。

（设计意图：通过现实的事例，让学生感受分数是在整数不能满足人们需要的基础上，适应客观需要而产生的。）

课题2：约分

教学内容：教科书第65页例4及相关内容。

教学目标：

1. 进一步理解分数的基本性质，并能运用分数的基本性质约分。
2. 理解“约分”“最简分数”的含义，掌握约分的一般方法，学会约分的数学形式。
3. 在应用知识的过程中，体验数学的价值，渗透恒等变换思想，感受数学的简洁美。

教学重点：理解约分的含义，掌握约分的方法。

教学难点：用分子或分母的最大公因数约分，正确的书写格式。

教学准备：

教具：大圆片、1分钟计时课件。

学具：大圆片。

教学过程：

（一）情境引入

教师：同学们好！今天这节课我们继续学习分数的有关知识。

教师（出示图片）：大家都有1个这样的图片，下面，我想和同学们比一比，看看谁能在

1分钟之内涂出这个圆片的 $\frac{75}{100}$ 。(学生表示惊奇和困难)现在请大家准备好,我说开始这个计时器(出示课件)就开始计时。好,开始!

师生活动。

教师:有谁涂完了吗?

如果学生中没有涂出 $\frac{3}{4}$ 的,就直接展示教师涂出的 $\frac{3}{4}$ 。

教师:这符合涂出 $\frac{75}{100}$ 的要求吗?谁能说说你的理由?

只要学生说出运用分数的基本性质, $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ 即可。

教师:对,老师在这里运用了分数的基本性质,把 $\frac{75}{100}$ 化成了分子分母比较小而分数大小不变的分数。这叫做约分(板书课题)。今天我们就来学习约分的有关知识。

(设计意图:通过在1分钟内涂出圆片的 $\frac{75}{100}$ 的比赛,让学生进一步理解分数的基本性质,感受其应用价值以及约分的好处,激发学生学习的兴趣,同时揭示课题。)

(二) 探索新知

1. 探索约分的方法。

出示教材第65页例4:把 $\frac{24}{30}$ 化成分子和分母比较小且分数大小不变的分数。

教师:把 $\frac{24}{30}$ 化成分子和分母比较小且分数大小不变的分数就是让我们做什么?

学生:就是对 $\frac{24}{30}$ 进行约分。

教师:对。下面就请同学们试着对它进行约分。

学生尝试,教师巡视,并要求先做完的同学和同桌说一说自己是怎么进行约分的。

2. 反馈。

教师:谁想说一说你是怎么进行约分的?

预设有下列四种方法(根据学生汇报板书)。

$$(1) \frac{24}{30} = \frac{24 \div 2}{30 \div 2} = \frac{12}{15}$$

$$(2) \frac{24}{30} = \frac{24 \div 3}{30 \div 3} = \frac{8}{10}$$

$$(3) \frac{24}{30} = \frac{24 \div 2}{30 \div 2} = \frac{12}{15} = \frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$$

$$(4) \frac{24}{30} = \frac{24 \div 6}{30 \div 6} = \frac{4}{5}$$

汇报时,注意使学生明确:这里运用的是分数的基本性质;2、3、6是分子、分母的公因

数，其中6是最大公因数。

(设计意图：因为学生在学习分数的基本性质时，已经有了相关的经验，因此这里放手让学生自主探索、交流约分的方法，加深学生对约分的体验。)

3. 归纳总结。

教师：现在请同学们观察这些约分的方法，它们有什么共同的地方？有什么不同的地方？请同学们先和同桌说说你的想法。

学生在小组内交流。

教师：谁来说说你的想法？

学生：这四种方法都是用分子、分母除以它们的公因数。不同的地方是第一种方法和第二种方法中都可以再继续用分子、分母的公因数去除，第三种方法和第四种方法不能继续除以公因数了。

教师：你说得很好！（指黑板）给分数约分时，我们每次都是用分子、分母的公因数（1除外）去除，也可以直接用最大公因数去除。约分的结果，像 $\frac{4}{5}$ ，大家看看，还能继续用分子和分母的公因数继续约分吗？

学生：不能，因为它们的公因数只有1了。

教师：对，像这样（指 $\frac{4}{5}$ ），分子和分母只有公因数1的分数，叫做最简分数。约分时，我们通常要约成最简分数。下面就请大家写出几个这样的最简分数。

学生写出最简分数并汇报。

教师：很好！那再看看这几种约分的方法？你最喜欢哪种？

学生：更喜欢第四种。

教师：能说说为什么吗？

学生：因为第四种方法是直接用最大公因数去除的，约分的结果既是最简分数，又比第三种过程简单，一步就完成了。

教师：你说得真清晰！约分时，如果很快能看出分子和分母的最大公因数，用最大公因数约分，既能保证约分的结果是最简分数，又能一步完成约分。

(设计意图：教师放手让学生观察比较、思考分析同学们约分的四种方法，通过交流约分的一般方法：用分子、分母的公因数同时去除分子、分母，理解最简分数，明确约分的要求，同时感悟数学的简洁美。)

4. 介绍约分的书写格式。

教师用课件逐步呈现上面的第三种和第四种方法，如下。

$$\begin{array}{r} 4 \\ 12 \\ \hline 24 \\ 30 \\ \hline 15 \\ 5 \end{array} = \frac{4}{5} \quad \text{或} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 24 \\ \hline 30 \\ 5 \end{array} = \frac{4}{5}$$

(三) 巩固练习

1. 完成“做一做”第1题。
2. 完成教科书第66页第4题。
3. 完成教科书第66页第7题。

(四) 课堂总结

教师：同学们，今天我们学习了分数的约分，对于今天的学习，你有什么感受和大家分享？

教师：大家还有什么问题没弄明白吗？

课题3：公倍数与最小公倍数

教学设计：骆奇、李一鸣。

教学内容：教科书第68、69页相关内容。

教学目标：

1. 让学生充分经历公倍数与最小公倍数概念的产生过程，激发学习兴趣，积累活动经验，感受数学学习的乐趣。
2. 让学生初步掌握找两个数的最小公倍数的基本方法。

教学重点：在师生同玩“尾巴重新接回”游戏的探索奥秘活动中，让学生充分经历公倍数与最小公倍数概念的产生过程。

教学难点：引导学生发现尾巴重新接回的奥秘。

教学准备：课件、画有动物图画的正多边形。

教学过程：

(一) 激发欲望，经历活动，记录活动相关数据

1. 第一次猜想、验证。

(1) 猜想。

教师：今天，老师给大家带来了一个很好玩的游戏，想玩吗？

教师：（举起一个正六边形纸板）请看，这是一个正六边形。（举起一个正方形纸板）这个呢？

学生：正方形。

教师：也可以说是正四边形。背面有图案，谁能把它拼好？

教师随机请一个学生到黑板前将图片拼好。



教师：是什么？

学生：是猴子。

教师：是一只可爱的小猴子！接下来我们就用这两张图片来玩游戏。我把正六边形固定不动，让正四边形绕正六边形沿着一个方向转动。（教师转动正四边形图片即尾巴所在的图片一次）如果这样叫转动1次，那么（再次转动图片）这样呢？（学生：2次。）（第三次转动图片）这样呢？（学生：3次。）

教师：你们注意到没有，当正四边形开始转动的时候，猴子的尾巴——

学生：断开了！

教师：（将图片恢复成原状）我想请大家来猜一猜，从这个时候算起，转动几次，猴子的尾巴又能重新接回？

学生踊跃举手，猜6次、12次、18次、24次等。

教师：有同学猜6次、12次，有同学猜18次，还有同学猜24次，到底是几次？怎么才能知道？

学生：（脱口而出）转一下。

教师：行，我来转，你们大声数！

（2）验证。

教师转动图片，学生数数1，2，3，…数到第6次时，尾巴没有接回，学生愕然。

教师：接回了吗？继续转！

教师继续转，学生继续数，数到第12次时，尾巴重新接回。

教师：刚才谁猜对了？掌声送给他！

教师：我们把刚才的活动记下来。我们把大的正六边形记作图1，小的正四边形记作图2。刚才转到第几次重新接回？（教师板书。）

学生：12次。

教师：如果继续转，到第几次，尾巴还能重新接回？

学生：（齐）24次！

教师：24次，为什么是24次呢？

学生：因为24是12的倍数， $12 \times 2 = 24$ 。

教师： 12×2 ，同意吗？

其他学生纷纷表示同意。

教师：继续往下写？（学生略迟疑后答：36。）再继续？（学生迅速回答：48，60，72，…）还能写多少个？（学生：无数个。）

教师根据学生的回答板书次数：12，24，36，…

教师：这个游戏叫“尾巴重新接回”。（教师板书游戏名称）怎么样，好玩吗？

（设计意图：这真的是一个非常好玩的游戏，它深深地吸引住了每一个学生，气氛非常地活跃。猜对的学生并不多，但所有学生都有一种强烈的参与欲望，都想再猜一次。）

2. 第二次猜想、验证。

教师：如果再玩一次这个游戏，你们有没有信心猜对？

学生：有！

教师：这信心不错，来！请看屏幕。（出示画有动物的正八边形和正五边形）动物变了，更重要的是——图形也变了，几边形和几边形？



学生：八边形和五边形。

教师：转动几次，尾巴又能重新接回？

学生猜 40 次、60 次、80 次、120 次、160 次、200 次等。

教师：这么多啊！来看看谁猜对了？请看屏幕，我来转，你们数。

教师通过课件来转动尾巴，学生同步数数：1，2，3，4，5，……一直转了 40 次尾巴才重新接回。

教师：谁猜对了？掌声送给刚才猜对的同学！

教师在黑板上记录数据：40，80，120，……

（设计意图：顺应学生的强烈欲望，师生又玩了一次尾巴重新接回的游戏，这次猜对的学生稍多些。教师设计的这两次游戏不是简单的重复，从多边形的边数看，第一次选择的是 6 和 4，是不互质的，第二次选择的是 8 和 5，是互质的；从重新接回的次数看，先是 12 次，比较小，后是 40 次，比较大；从操作的形式看，第一次是教具手动，比较慢，第二次是课件演示，比较快。）

3. 学生亲历猜想、验证、记录过程。

教师：这么好玩的游戏，你们想不想自己来玩一玩？



教师：好，听清楚老师的要求。待会儿老师会给你们一些这样的图片（出示正五边形和正四边形、正八边形和正四边形的两组画有动物的图片），你们以小组为单位，也像刚才那样，先猜再转，最后将数据填在表格里。表格是这样的，能看懂吗？图片和表格就放在学具袋里，开始！

图 1 的边数	图 2 的边数	首次接回转动次数	二次接回转动次数	三次接回转动次数	……

各小组学生急切地开始玩这个游戏，小组成员有分工有合作，有序地进行猜测、操作、数数和记录。

活动一结束，教师迅速将表格收起来，将数据记录在黑板上。

6, 4: 12, 24, 36, ...

8, 5: 40, 80, 120, ...

8, 4: 8, 16, 24, ...

5, 4: 20, 40, 60, ...

教师：我刚才认真地看了同学们的记录，发现拿到相同图片的小组数据都是一样的。我已经把它写在黑板上了，没问题吧？

（设计意图：学生真的过了一把瘾，看了！猜了！又亲自动手玩了！第三次玩这个游戏是以小组的形式进行的，秩序井然，这主要是前面教师作了两次示范，并且教师对小组怎么玩作了比较细致的要求和说明。这两组多边形的边数，也是有意设计，一组是5和4，是互质关系；一组是8和4，是倍数关系。这样有利于学生从多种不同情况的接回次数中去发现和归纳奥秘。）

（二）观察数据，发现奥秘，引出公倍数和最小公倍数的概念

教师：刚才，我们总共玩了三次尾巴重新接回的游戏，得到了这样一些数据。（教师将数据整理到屏幕上）

教师：第一次，猜对的人不多；第二次，猜对的人多了起来；到第三次你们自己玩的时候，我发现很多同学一下子就猜对了。你们是不是发现——（有个别学生说：有诀窍。也有个别学生说：有规律。）诀窍？规律？奥秘？（教师重复学生说的关键词）那奥秘是什么呢？（教师补充板书“的奥秘”）尾巴重新接回的奥秘是什么呢？也就是说，这些重新接回的次数与什么有关？又是怎样的关系呢？

（设计意图：“尾巴重新接回的奥秘是什么呢？这些重新接回的次数与什么有关？又是怎样的关系呢？”这是一个学生急切地想解决的问题，也是本节课的核心问题！问题是数学的心脏，教学首先就是要选准问题，一节新授数学课选择一两个稍难的问题作为主要的研究对象，再通过不是一帆风顺的解决过程，让学生深刻地体验、感受和领悟数学思想方法。）

教师：有的同学已经有想法了。这样，先请大家在小组内说一说，再把你们小组的意见写在作业纸上，然后再请小组代表来汇报。

学生小组讨论，教师边巡视边参与学生的讨论。

（设计意图：这里没有使用即问即答的教学形式牵着学生走，而是采用小组合作学习的形式，给了学生充足的时间来思考和讨论。）

教师：刚才你们小组讨论非常积极，都有很多的发现，下面我们就请小组代表来汇报。我先请这个小组来！

学生1：我们小组发现：两个图形边数相乘就能得到一个重新接回的数据。

其他学生略有疑惑状。

教师：你能不能到这里来，结合黑板上的数据来说说你们的发现？这样，大家会听得更明白些。

学生1：比如说（第一组）4和6，它们相乘得24，而24在这里就是一个重新接回的数。（第二组）5和8相乘得40，40也出现在重新接回的数中。（第三组）4和8相乘得32……

学生一边说，教师一边将学生指定的数用彩色粉笔圈起来。

教师：这是他们小组的发现，你们对他们的发现有什么看法吗？（有两个学生缓缓举手）有同学有看法了，你说！

学生2：我觉得这样虽然可以找到一个重新接回的数，但是不能找全，而且不一定能保证找到的是第一个。

教师：你能不能像他那样也举个例子，举例来说明你的观点。

学生2：比如说当图1的边数是6、图2的边数是4时，它们相乘的积24是第二次重新接回的数！当图1的边数是8、图2的边数是4时，它们的积32是第四次重新接回的数了！

教师：哦！我听明白了，你们的意见是不是这样，虽然两个图形边数乘起来，能够得到其中一个重新接回的数，但是——

学生2：不能得全！而且有时候第一次重新接回的数也得不出来。

教师：你们听得明白吗？虽然乘起来能够得到其中的一些重新接回的数，但是还有一些数，它们并不是两个边数的乘积，也重新接回了。那你们对他们小组的发现怎么评价？

学生2：他们的发现是对的，但是不完整。

教师：是对的，但是不完整，（问汇报的学生1）你们能接受吗？

（设计意图：小组讨论后要选小组代表来汇报交流，选谁？这里先选一个典型错误的小组代表来汇报，可以更多地展示知识的形成过程，更多地照顾到学生。学生汇报时，教师一会儿帮台上汇报的代表，一会儿启发台下的学生，扮演了多种角色来掌控局面，到位不越位，学生之间的对话是刀光剑影，效果很好。）

教师：接下来你们小组也来汇报！

学生3：我们小组发现重新接回的次数既是图1边数的倍数，又是图2边数的倍数。

教师：你能不能也像刚才那位同学一样，结合黑板上的数据来说明？

学生3：比如说，12、24、36，都是尾巴重新接回的次数，12既是6的倍数又是4的倍数，24是6的倍数也是4的倍数，36是6的倍数也是4的倍数。

教师：其他组数据呢？

学生3：也是一样的，40是8的倍数也是5的倍数，80是8的倍数也是5的倍数，120是8的倍数也是5的倍数。

教师：其他两组数据也是一样吗？

学生3：是的。

教师：这是他们小组的发现，你们对他们的发现有什么看法？一点意见都没有？那好！我们鼓掌一致通过！

（设计意图：这个小组的代表一上来就把奥秘说出来了，教师没有即时评价，也没有让其他学生来评价，而是要他用举例的方式来作补充说明，这就是一种学法指导！指导学生在表达自己的观点的时候要尽量用举例的形式来佐证。）

教师：同学们，通过刚才大家的讨论和汇报，尾巴重新接回的次数与什么有关？是什么关系呢？

学生：既是图 1 边数的倍数，同时，也是图 2 边数的倍数，是它们共同的倍数、公共的倍数！

教师用投影显示：尾巴重新接回的次数→两个图形边数的公共倍数

教师：同学们，像这样的数，同时是两个数公共的倍数，在数学上有一个专有的名称，叫——

学生：（大部分学生）公倍数！

教师：说对了！就叫公倍数！

教师：那黑板上这么多的公倍数，你们觉得哪一个最重要？

学生：最小的那个。

教师：为什么？

学生 4：因为知道了最小的公倍数，就能找到其他的公倍数。

教师：怎么算？比如说，我已经找到了最小的公倍数了，其他的怎么算？第 2 个？

学生 4：就是第一个数的 2 倍。

教师：第 3 个？（学生：3 倍。）第 5 个？（学生：5 倍。）乘 5 就行了，对吧？第 100 个？（学生：100 倍。）第 10000 个？（学生：10000 倍。）

教师：（指着公倍数中最小的那些）像这样的数，在公倍数中是最小的，它们也有一个专有的名称——最小公倍数。

教师：尾巴重新接回的次数就是多边形边数的公倍数，第一次接回的次数就是边数的最小公倍数！（教师板书：公倍数 最小公倍数）

教师：原来尾巴重新接回的奥秘就是这个！

（设计意图：教师在第二位小组代表汇报的基础上，与全班学生把“他们”的发现又重复梳理了一遍，让所有的学生增多一次学习机会，这样处理好！重复啰唆是一种不良教学习惯，但用重复来突出教学重点和难点还是很有必要的。至此，师生费尽千辛万苦之力揭开了尾巴重新接回的奥秘，同时也就引入了公倍数和最小公倍数的两个概念。）

（三）不转图片，运用“奥秘”，尝试寻找两个数的最小公倍数

教师：那如果现在还让你们玩这个游戏，会猜吗？有把握吗？

教师：不能转动图片哦！

教师：比如说正八边形和正六边形，要知道六边形至少转动几次尾巴重新接回，其实就是求 8 和 6 的——

学生：最小公倍数！

教师：8 和 6 的最小公倍数，有同学已经想到了，多少？

学生：24！



教师：哦？这么快！有把握吗？你们能不能把自己的想法写下来？请拿出练习本，把你们找8和6的最小公倍数的过程写下来。

学生拿出练习本开始写，教师巡视。

（设计意图：还是尾巴重新接回的情境，好！引入公倍数是这个情境，找公倍数的时候还是这个情境，整节课就一个情境，把这个情境用足用够用好。“找出8和6的最小公倍数”是这节课的第二个问题，教师直接让学生自己去尝试寻找，又给了学生一个大的思维空间。）

教师：有的同学已经算出来了，有的同学还在计算。这样，我先请一个做得快的同学跟大家交流交流。

投影出示一学生的做法：

6：6 12 18 24 30

8：8 16 24 32 40

学生：我先找出6的倍数和8的倍数，再找它们共同的倍数24。

教师：哦，我明白了，他是先写出6的倍数，再写出8的倍数，再找出它们共同的倍数24。

教师：能明白吗？谢谢！为了让大家看得更清楚，我把他的想法在屏幕上再演示一遍。

教师用课件再一步一步地演示了学生的做法。

6的倍数：6，12，18，24，30，…

8的倍数：8，16，24，32，40，…

6和8的最小公倍数是24。

第一次重新接回的次数是24。

（设计意图：又是一次重复！学生代表汇报后教师又做了课件演示，这是学生第一次学习找两个数的最小公倍数，有必要！先学后教，教师还得要教！）

教师：刚才老师在下面看的时候，发现还有一种很特别的做法，老师在屏幕上展示，看看你们能不能看懂？静静地看，不说话。（教师演示）

6的倍数：6 12 18 24 30

8的倍数：× × × ✓

6和8的最小公倍数是24。

第一次重新接回的次数是24。

教师：谁能看懂？

学生：6不是8的倍数，12也不是8的倍数，18也不是8的倍数，24既是6的倍数也是8的倍数。

教师：能听明白吗？

学生：这种做法是找6的倍数来比较，看是不是8的倍数。我觉得因为我们要找的是8和6的公倍数，而8大一些，我们可以用8来试，这样找得更快一些。

教师：你的思维很快，我们先把他的做法弄清楚，再来看看你的做法。

教师：他的做法其实就是先依次将6的倍数写下来，看看它是不是同时也是8的倍数。6的第一个倍数6不是8的倍数，12不是8的倍数，18不是8的倍数，24是8的倍数。这样24就是8和6的最小公倍数。

教师：刚才他说的这种做法，老师这里也有一个演示，我们也来看看，看看是否跟他说的不一样。

屏幕上演示：

8的倍数：8 16 24 32

6的倍数：× × ✓

6和8的最小公倍数是24。

第一次重新接回的次数是24。

教师：而且他还提到，这样做可以更快一点。这几种做法，你们觉得怎样做比较好、比较快就可以怎样做。

（设计意图：教师用课件演示找最小公倍数的过程和方法，学生静静地看不说话，过后再让学生说说是怎么找到的，这种教学组织形式有新意！同一个问题，差不多的方法，教师变换不同的组织形式，能凝聚注意，提高效率。）

（四）正反举例，辨析特征，帮助学生理解公倍数的概念

教师：刚才，我们通过玩尾巴重新接回的游戏，认识了两个新的概念。它们是——

学生：公倍数和最小公倍数。

教师：刚才我们还试着找了两个数的最小公倍数。那么，你们能否说说什么样的数是两个数的公倍数？

学生：我觉得这样的数就是公倍数：同时能被两个数整除，就是这两个数的公倍数。

教师：能不能举个例子说明一下？

学生：比如说6和4的公倍数就是24，24能被4整除也能被6整除。

教师：你这样说可能大家会听得更明白：24是6的倍数，24也是4的倍数，24是6和4的公倍数。

教师：谁还再来举例？

学生：21是3的倍数，21也是7的倍数，21是3和7的公倍数。30是5的倍数，30也是6的倍数，30是5和6的公倍数。6是24的因数，8也是24的因数，所以24是6和8的公倍数。

教师：你们举了那么多的例子，我也来举个例子。

教师板书：6、9；18、24、36、48。

学生：（略加思考后）不对！24是6的倍数但不是9的倍数。48是6的倍数但不是9的倍数。

教师将24和48划去。

（设计意图：举例是理解概念的一种基本方法！学生举的都是肯定例证时，教师举了两个反例作为补充。）

(五) 提出新问题, 引发新思考, 在思考与回味中结束全课

教师: 看来同学们掌握得不错。那么关于公倍数和最小公倍数, 大家还有什么问题想问的吗?

学生 1: 我在想, 求两个数的公倍数有没有一个公式呢? 要不然的话, 如果是两个很大的数会怎么样? 累死了。

教师: 这个问题提得非常好!

学生 2: 公倍数不一定要用倍数找, 可不可以用因数找?

教师: 你们觉得呢? (学生: 可以。)

教师: 其实老师也有一个问题。大家有没有想过: 为什么重新接回的次数就正好是两个多边形边数的公倍数呢? 这个问题, 就请大家课后去思考、去讨论、去探究! 今天这节课就上到这里。下课!

(设计意图: 学生还真的有问题, 提问的胆量很大, 水平很高! 教学中就是要培养学生发现问题、提出问题的能力。)

课题 4: 分数和小数的互化

教学内容: 教科书第 77 页例 1、例 2 及相关内容。

教学目标:

1. 通过自主探究, 使学生理解并掌握分数和小数互化的方法。
2. 通过分类、比较, 掌握判断最简分数能否化成有限小数的方法, 并能正确进行判断。
3. 通过观察、比较、推理等活动, 培养学生观察、抽象概括的能力。

教学重点: 理解并掌握分数与小数互化的方法。

教学难点: 根据分数的特点选择合理的方法把分数化成小数。

教学过程:

(一) 问题引入

教师: 同学们, 这一段时间我们学习了分数的有关知识, 今天我们就分数的有关知识进行探究。

教师: 老师这里有一个问题 (课件呈现教科书第 77 页例 1 第一问), 看一看, 你们会解决吗?

(二) 小数化成分数

1. 解决问题并反馈。

教师: 很好, 下面请大家先尝试着解决这个问题。

学生独立尝试解决问题。

教师: 谁来说说你是怎么解决的?

预设: 解决方法一

$$3 \div 10 = 0.3 \text{ (m)}$$

解决方法二

$$3 \div 10 = \frac{3}{10} \text{ (m)}$$

教师：请同学观察这两种解决方法，想一想这里的 0.3 米和 $\frac{3}{10}$ 米是什么关系？为什么？
请把你的想法想办法表达出来，向你的同桌说明白。

学生思考并组内交流。

教师：谁来说一说 0.3 米和 $\frac{3}{10}$ 米是什么关系？你是怎么想的？

学生：这里的 0.3 米等于 $\frac{3}{10}$ 米。因为解决的是同一个问题，结果应该相等啊。

教师：看来，这里的结果虽然用的是分数和小数这两种不同的表达形式，但它们表示的都是每一段绳子的长度，所以是相等的。（板书：分数 小数）

2. 探索小数化成分数的方法。

(1) 一位小数化成分数。

教师：现在请大家想一想，怎样能较快地把 0.3 转化成分数呢？和你的同桌说一说你的想法。

讨论后组织汇报，使学生明确：一位小数表示的是十分之几，0.3 是一位小数，表示的就是十分之三，所以可以直接转化为分数 $\frac{3}{10}$ 。

教师：刚才我们把 3 米长的绳子平均分成了 10 段，如果平均分成 5 段，每段是多少米呢？（如果学生用小数表示，则请他们将小数转化成分数。）

教师：谁想说说你的结果？

学生汇报，重点使学生明确：0.6 是一位小数，表示十分之几，可以直接转化为分母是 10 的分数，有 6 个分数单位就在分子处写 6，再约分成最简分数 $\frac{3}{5}$ 。教师板书如下：

$$0.6 = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{3}{5}。$$

(2) 小数化成分数的一般方法。

教师：老师这里还有一些小数，请大家动手试一试，看看怎样能把它们较快地转化成分数。

$$0.07 = \frac{(\quad)}{(\quad)} \quad 0.24 = \frac{24}{(\quad)} = \frac{(\quad)}{(\quad)} \quad 0.123 = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

学生尝试后汇报思考过程，小结归纳小数化分数的一般方法：小数可以直接写成分母是 10, 100, 1000, … 的分数，能够约分的要约成最简分数。

（设计意图：从学生已有的知识背景出发，放手让学生就小数转化为分数进行自主尝试探究，从中发现知识间的相互联系，调动学生思维的积极性和主动性。）

(三) 分数化成小数（教学例 2）

教师：刚才我们知道了如何将小数转化成分数，有时还需要将分数转化为小数。

1. 探索将分数化成小数的方法。

教师呈现教科书第 77 页例 2，具体如下。

请从下面选择你喜欢的三个分数转化成小数（除不尽的保留两位小数）。

$$\frac{7}{10} \quad \frac{39}{100} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{9}{40} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{5}{14}$$

学生独立完成后组织反馈，教师有意识的分类呈现方法。

第一类： $\frac{7}{10}$ 和 $\frac{39}{100}$ 。有两种方法，一种是直接根据分母判断是几位小数，直接写出该数，一种是用除法计算，如 $\frac{39}{100}$ 表示百分之三十九，用小数表示 0.39； $\frac{39}{100}=39\div 100=0.39$ 。

第二类： $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{9}{40}$ 。有两种方法：一种是将该分数转化成分母是 10，100，1000，…的分数，再转化成小数，如 $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=0.75$ ， $\frac{9}{40}=\frac{225}{1000}=0.225$ ；另一种是利用分数与除法的关系转化成小数， $\frac{3}{4}=3\div 4=0.75$ ， $\frac{9}{40}=9\div 40=0.225$ 。

第三类： $\frac{2}{9}$ 和 $\frac{5}{14}$ 。分母无法转化为 10，100，1000，…的分数，要利用分数与除法的关系转化成小数，而且除不尽，要根据要求保留几位小数。

注意：汇报时，要注意通过追问使学生明确转化的依据是分数的基本性质、分数与除法的关系，同时明确，利用分数与除法的关系将分数转化为小数是更为一般的方法。

2. 归纳总结。

教师（指黑板）：通过刚才的学习，大家发现了将分数化成小数有哪些方法？

学生：分母是 10，100，1000，…的分数可以直接写成小数，分母有几个 0 就是几位小数。

教师：那分母不是 10，100，1000，…的分数要怎么转化成小数？

学生：分母不是 10，100，1000，…的分数，有些可以转化成分母是 10，100，1000，…的分数再写成小数，不能转化成分母是 10，100，1000，…的分数就直接用分子除以分母转化成小数，除不尽的要根据要求按“四舍五入”法保留几位小数。

教师：你们总结得很全面。通过大家的总结，你觉得哪种方法更具有一般性？

学生：利用分数与除法的关系，用分子除以分母转化成小数。

（四）练习

教师：刚才我们学习了分数与小数互化的方法，现在我想请同学们完成一些练习，看看大家是不是能灵活地进行分数和小数的互化。有信心吗？

1. 完成教科书第 78 页第 2 题。
2. 完成教科书第 77 页“做一做”。

注意在汇报中使学生明确：要根据需要灵活选择方法进行分数和小数的互化，以便于

比较。

3. 教师呈现如下题目： $\frac{7}{(\quad)}$ 的括号里填几，这个分数就可以转化成有限小数？

教师：请同学们先想一想再回答。谁来说一说可以填什么？

学生：我觉得可以填 10，100，1000，…，都可以直接改写小数。

教师：哦！你直接运用了我们将分数转化成小数的方法，填出了答案，很好！谁还想说一说？

学生：可以填 8、20、50。

教师：大家判断一下可以吗？

教师：那我在括号里填 14，可以吗？

学生 1：不可以，找不到一个数和 14 相乘得 100。

学生 2：可以填 14， $\frac{7}{14}$ 可以约分成 $\frac{1}{2}$ ，就能变成分母是 10 的分数了。

教师：对！看来判断一个分数能不能化成有限小数，还要先看它是不是最简分数。再看看它能不能化成分母是 10，100，1000，…的分数。其实，我还有一个好办法能很快判断一个分数能不能化成有限小数。大家可以出一个最简分数来考验考验我。

学生出最简分数，教师判断（如果时间充足，可出 8 个左右；时间不够，可出 4 个左右）。

教师：知道这是什么方法吗？请大家翻开书第 79 页，阅读完“你知道吗？”中的文字，你也能够做到的！

三、备课资料

（一）辗转相除法

怎样求两个正整数的最大公因数？当两个数较小时，比如 20 以内，只要口算就行了。当两个数不太大时，可以用分解质因数的方法来求。（见教科书第 61 页“你知道吗？”）过去的小学数学教材中，还介绍了一种“短除法”，它实际上是分解质因数的简便书写形式。当两个数较大，特别是当两个数所含质因数都较大时，分解质因数及其短除法就显得非常困难，这时可以采用辗转相除法。

辗转相除法也叫欧几里得算法。一般地，用辗转相除法求两个数的最大公因数的步骤如下：

先用较小的一个数除较大的一个数，得第一个余数；

再用第一个余数除较小的一个数，得第二个余数；

又用第二个余数除第一个余数，得第三个余数；

这样继续用后一个余数去除前一个余数，直到余数是 0 为止。这时，最后一个除数就是所求的最大公因数。

如果最后的除数是1，那么原来的两个数的最大公因数就是1。

例如，求6901和5459的最大公因数。

	6901	5459	1	第一次：用5459除6901，商1余1442；
	5459	4326		第二次：用1442除5459，商3余1133；
3	1442	1133	1	第三次：用1133除1442，商1余309；
	1133	927		第四次：用309除1133，商3余206；
3	309	206	1	第五次：用206除309，商1余103；
	206	206		第六次：用103除206，商2余0。
2	103	0		

5459和6901的最大公因数是103。

显然，如此辗转相除，再大的两个数也能不费思索地得到它们的最大公因数。

如果要求几个数的最大公因数，可以先求其中任意两个数的最大公因数，再求这个最大公因数与第三个数的最大公因数。这样依次求下去，直到最后一个数为止。最后得到的那个最大公因数，就是所有这几个数的最大公因数。

我国古代《九章算术》中介绍的“更相减损术”，又称为“约分术”，实际上是一种与辗转相除法相类似的方法，也可以用来求两个数的最大公因数。

(二) 利用最大公因数求最小公倍数

怎样求两个正整数的最小公倍数？当两个数较小时，比如20以内，完全可以口算。当两个数不太大时，可以用课本第69页“你知道吗？”中介绍的分解质因数的方法来求。或者用“短除法”，也就是分解质因数的简便书写形式来求。当两个数较大时，分解质因数十分困难，短除法也同样帮不上多大的忙，这时可以先用辗转相除法求出两个数的最大公因数，再根据两个数的最大公因数与最小公倍数的关系，求出它们的最小公倍数。

我们先来看一个例子：

$$\begin{array}{l}
 18 = 2 \times 3 \times 3 \\
 30 = 2 \times 3 \times 5 \\
 \begin{array}{ccc}
 \downarrow & \downarrow & \\
 18 \text{和} 30 \text{的最大公因数: } & 2 \times 3 & = 6 \\
 18 \text{和} 30 \text{的最小公倍数: } & 2 \times 3 \times 3 \times 5 & = 90 \\
 \begin{array}{ccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \text{公有的质因数} & & \text{30特有的质因数} \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{18特有的质因数}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

不难看出18和30的最大公因数与最小公倍数的积 $(2 \times 3) \times (2 \times 3 \times 3 \times 5)$ 正好包含了18和30的所有质因数，不多也不少。即

$$6 \times 90 = 18 \times 30$$

因此，两个数的最大公因数与最小公倍数的积等于这两个数的乘积。

这就是说，求两个数的最小公倍数，可以先求出两个数的最大公因数，再用这两个数的最大公因数去除这两个数的积，所得的商就是两个数的最小公倍数。

例如，求 6901 和 5459 的最小公倍数。

前面用辗转相除法求出 6901 和 5459 的最大公因数是 103，

6901 和 5459 的积是 37672559， $37672559 \div 103 = 365753$ ，

所以，6901 和 5459 的最小公倍数是 365753。

(三) 无限循环小数化成分数

无限循环小数与有限小数都是有理数。如果把整数看作分母是 1 的分数，则有理数都能写成分数形式。有限小数可以直接写成分数，我们的教材中已经解决了这个问题。

那么，怎样把无限循环小数化成分数呢？可以用无限递缩等比数列的求和公式来解决。

设有一无限递缩等比数列为： a_1, a_1q, a_1q^2, \dots (公比 $|q| < 1$)

则各项和

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

把循环小数写成无限递缩等比数列各项和的形式，如纯循环小数 $0.\dot{2}3\dot{2}3\dot{2}3\dots$ 可以写成：

$$0.\dot{2}3\dot{2}3\dot{2}3\dots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \dots$$

利用无限递缩等比数列的求和公式，得

$$0.\dot{2}3\dot{2}3\dot{2}3\dots = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{99}$$

又如混循环小数 $0.4\dot{7}77\dots$ 可以写成：

$$0.4\dot{7}77\dots = \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \dots$$

利用无限递缩等比数列的求和公式，得

$$0.4\dot{7}77\dots = \frac{4}{10} + \frac{\frac{7}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{7}{90} = \frac{4 \times 9 + 7}{9 \times 10} = \frac{4 \times (10 - 1) + 7}{9 \times 10} = \frac{47 - 4}{9 \times 10} = \frac{43}{90}$$

由上述例子，可以看出：

(1) 纯循环小数可以化成一个分数：分子是一个循环节的数所组成的数；分母各位数字都是 9，9 的个数同循环节的位数相同。

(2) 混循环小数可以化成一个分数：分子是小数点后面第一个数字到第一个循环节的末位数字所组成的数，减去不循环数字所组成的数所得的差；分母的头几位数字是 9，末几位数字是 0，9 的个数同循环节的位数相同，0 的个数和不循环部分的位数相同。

无限不循环小数实际上是无理数的一种表示形式，它不能写成分数。

(四) 对“分数”的多维多元理解^①

小学生真的理解分数吗？学生理解过程中的障碍是什么？是先认识 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{4}$ 还是 $\frac{3}{4}$ ？抑或先认识 $\frac{1}{3}$ ？到底什么是“分数”？学生真的理解分数四则计算的“算理”吗？

在小学教学研究中，分数的认识和运算是老师们比较喜欢选择的课题之一，这是因为“分数”是一个内涵丰富的数学概念，是人们比较早就认识了（次于自然数）的数（在古埃及保留下来的资料中有分数），在数学发展史中具有重要的地位。它又是一个核心概念，与小学数学中的其他概念有着紧密的联系，如下图所示。



一、多维多元的分数

分数的意义是多层次的，认识分数的模型也是多层次的。

(一) 作为“行为的分数”还是“定义的分数”

一对对的数字，例如 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{5}$ 等，或者短语“二分之一，五分之二”等并不是“分数”，它只是代表分数概念的符号或者语言。一般说来，学习分数不能直接从这些符号入手，而是从分数的“产生”入手。即理解分数首先是从“行为”（平均分物体）入手，而不是从“定义”（形如 $\frac{b}{a}$ ， $a \neq 0$ 的数）入手。只有学生经历并体验了把一个“整体”平均分为各个部分，所“关注”的部分与整体之间的关系可以用一个新的数来表示之后，才可以给出分数的“符号”表示，并建立“行为”与“符号”之间的一一对应关系。只有经历这样的过程，学生才能逐步理解分数的概念。即学生理解分数是从“行为”开始的，这是从“率”的角度来理解分数。

从“行为”的角度看，除了从“平均分”认识分数外，“测量”也是认识分数的重要途径。我们知道，自然数主要用于“数”个数，即数“离散的量”的个数。当测量“连续的量”（例如物体的“长度”）时，首先需要选定“度量单位”，“数”被测量物体中包含多少个“度量单位”。一般情况下，我们不能“数尽”，为了得到更准确的值，我们把原来的“度量单位”分割为更小的“度量单位”（一般情况下是平均分为“十等份”，以其中的一份作为新的度量单位），再以更小的度量单位来测量以得到更精确的结果。这时，就可以用“分数”来表示测量的结果（用不同的“单位”表示），只不过此时得到的“分数”不是一般的分数，而是特殊的“十进分数”即小数。这时，是从“量”的角度理解分数。度量产生的不是一般的分数，一般的分数产

^① 刘加霞主编：《小学数学课堂的有效教学》，北京：北京师范大学出版社，2008年版：42-49。

生于“解方程”或者是除法运算的结果。

(二) 借助于多种直观模型理解分数的含义

在小学阶段主要学习“行为的分数”，教材中往往以学生熟悉的日常事物与活动为模型，建立分数的概念。例如把一个月饼平均分为两份。其中的一份是 $\frac{1}{2}$ 个；把一张纸平均分为四份，其中的一份是 $\frac{1}{4}$ 。这仅仅是从“面积模型”的角度来理解分数，学生理解分数可以借助于多种“模型”。

1. 分数的面积模型：用面积的“部分—整体”表示分数

儿童最早接触分数概念及其术语可能与“空间”有关，而且更多的是“3—维”的，而不是“2—维”的，例如半杯牛奶、半个苹果……

儿童最早是通过“部分—整体”来认识分数，因此在教材中分数概念的引入是通过“平均分”某个“正方形”或者“圆”，取其中的一份或几份（涂上“阴影”）认识分数的，这些直观模型即为分数的“面积模型”。

对于“平均分”，儿童有丰富的经验。皮亚杰等的实验发现：一些学生能成功地把纸张或扁泥块通过“对折”进行“剪切”或“切割”。例如：

4~4岁半的儿童能把小的正规图形分成两半；

6~7岁的儿童能把小的正规图形分成三份；

7~9岁的儿童能把小的正规图形通过试错分成六份；

10岁的儿童能把小的正规图形较精确地分成六份，如先对半分，再分成三份。

儿童这些丰富的经验为他们认识分数的面积模型，或者从“部分—整体”的角度认识分数打下了坚实的基础。

对于分数的“面积模型”，在学习过程中学生经常遇到一些困难。例如：

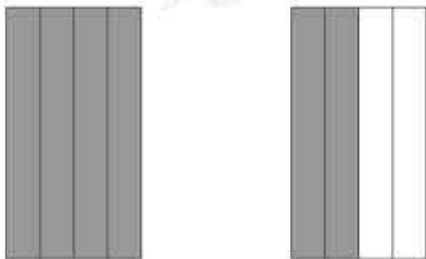
(1) 能否认识到图形“面积相等”的必要性，即“整体1”是否一样大；

(2) 是否习惯于由图形语言到符号语言表达的转换，学生初步学习分数时对分数的特有表示方法不能立即掌握，需要有熟悉、习惯的过程；

(3) 理解大于“整体1”的分数；

(4) 从表示多于一个“单位”的图形中确定谁作为“单位”。

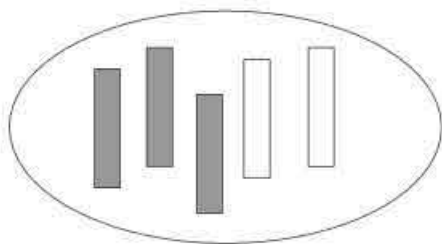
例如，对于下面图形，学生的回答是 $\frac{6}{8}$ ，而不是 $\frac{6}{4}$ 。



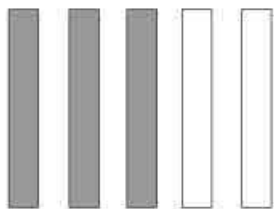
这时用“面积模型”认识分数就带来了困难。分数被理解为表示“单位面积”（关键是哪部分是“单位面积”）的子面积，被理解为“整数的部分”，这就为儿童理解假分数带来了困难。例如，学生常常把 $\frac{6}{4}$ 写成 $\frac{6}{8}$ 。

2. 分数的集合模型：用集合的“子集—全集”来表示分数

这也是“部分—整体”的一种形式，与分数的面积模型联系密切，甚至几乎没有区别。但学生在理解上难度更大，关键是“单位1”不再真正是“1个整体”了，而是把几个物体看作“1个整体”，作为一个“单位”，所取的“一份”也不是“一个”，可能是“几个”作为“一份”。例如，在下图中，“灰色长条”占全部“长条”的 $\frac{3}{5}$ 。分数的集合模型需要学生有更高程度的抽象能力，其核心是把“多个”看作“整体1”。



分数的集合模型的优点是有益于用比较抽象的数值形式表示“比”与“百分比”。这时我们把分数看作是“算子”，即把分数看作是一个“映射”。例如“灰色长条”与“白色长条”之比为 $3:2$ ，或者写为 $\frac{3}{2}$ 。



有研究者认为：学生对离散的集合的“部分—整体”的理解，不如对“面积”模型的理解，但随着学生年龄的增长，认知水平的提高，这种差别并不明显。

分数的集合模型的缺点仍然是容易对“假分数”（improper）产生误解，这与面积模型的问题完全一样：谁作为“整体1”，这既是认识分数的一个核心，同时也是一个难点。

J. Martin 总结出“整体1”可以分为以下六种情况^①（以 $\frac{1}{5}$ 为例）：

- (1) 1个物体，例如一个“圆形”，平均分为5份，取其中的1份；
- (2) 5个物体，例如“5块糖”，其中的“1块”占“5块”的 $\frac{1}{5}$ ；

^① J. L. Martin, 《教与学的新方法·数学》，北京师范大学出版社，2004年版，第218页。

- (3) 5个以上但是5的倍数，例如“15块糖”，平均分为5份，取其中的1份；
- (4) 比1个多但比5个少，例如，“2块巧克力”作为“整体”；
- (5) 比5个多但不能被5整除，例如，“7根香蕉”作为“整体”；
- (6) 一个单独物体的一部分的五分之一，例如，一米的四分之三的五分之一。

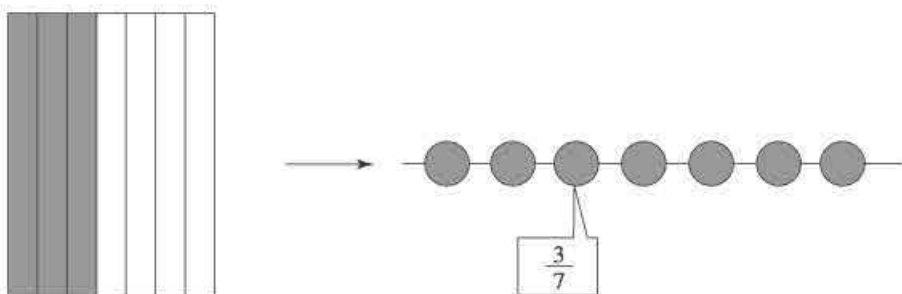
上述六种情况不可能让学生同时学习，但学生逐步地经历这些“情境”对学习分数是非常必要的，尤其是(1)(2)(3)这三种情境。(4)(5)两种情境对于学生进一步理解“分数”与“除法”的关系非常必要，情境(6)则是学生很好地理解分数乘分数的“模型”。

3. 分数的“数线模型”：数线上的点表示分数

分数的“数线模型”就是用“数线”上的点表示分数。它把分数化归为抽象的数，而不是具体的事物。对这个模型的理解需要学生更高水平的抽象能力，甚至有的初中学生对用“分数”表示点仍然感到困难。

分数的“数线模型”与分数的“面积模型”有着密切的联系：一个分数可以表示“单位面积”的“一部分”，也可表示“单位长度”的“一部分”。前者是2维的，后者是线性的，是1维的。

“数线模型”是“数轴”的前身，是数轴的“局部放大”和“特殊化”，是用“点”来刻画“分数”。



4. 分数与“除法”“比”的关系

对分数的另一种理解是把分数与除法联系起来： $\frac{3}{7}$ ，被解释为7个人平均分3个东西。分数是除法运算的结果，但事实上，小学生对此并不理解，其典型表现就是在解决实际问题或者解方程时，当结果为“分数”时，有很多学生认为“还没有计算完”，一直要把分数再化为小数为止。

分数与除法的互相转化有重要的应用：把分数化为小数或百分数。

当刻画两个量的数量关系时，我们经常用“比”。例如A与B的点数之比是3:5，也可以记作 $\frac{3}{5}$ ，其比值则是3除以5的结果即为 $\frac{3}{5}$ ，小学生更习惯于写作“0.6”。



根据上述分析可以看出，我们对分数的理解可以从多个角度，借助于多个直观模型，其抽象水平越来越高，因此在分数的教学设计时要注意：

1. 提供多样的模型：提供多种不同的“实物模型”，在“分割”中使儿童逐步体验分数的解释的多样性与表示法的多样性。

2. 把握抽象水平：精心设计，精心控制，逐步提升儿童在抽象的水平上理解分数。

分数的每一种解释都与某一特殊的认知结构有关，如果忽略了其中某一必要的认知结构，可能导致儿童缺乏关于分数某些方面的理解。有的儿童可能对于日常生活中分数的某些应用有很好的理解，但换一种情境就感到困难。例如，虽然他们能把3米长的木条等分成5段，并取其中三段，每段为60厘米。但他们却不理解： $3 \div 5 = 0.6$ 。

3. 学生对分数的抽象理解过早或过晚都不利于学生的发展。学生对分数的不同理解存在显著的个体差异，有些学生很早就能在抽象水平上理解分数，而另一些则需要等待很长的时间。

为此，一开始就要利用不同的实物模型，从平均分中帮助学生体验分数含义的多重性，体验分数含义的复杂性。

(三) 作为“定义的分数”

小学阶段所理解的主要是“行为的分数”，即借助于大量的“操作”活动，例如分一分、画一画等活动来理解分数的意义。作为“定义的分数”学生是否能够理解呢，在教学中如何运用？作为“定义的分数”就是将分数定义为“形如 $\frac{b}{a}$ ， $a \neq 0$ 的数，就叫分数”，不考虑其现实意义，只是从“形式”上给出描述，即分数是由一对“数对”决定的，有一个“数对”就有唯一一个分数和它对应。

在小学高年级，学生掌握了分数的现实意义后，“定义的分数”学生也可以理解。下面举一例子：构造“分数表”。

由于把“分数”看作一对“数对”，由此我们可以在直角坐标系内将所有的分数一一排列出来：以横轴上的自然数做“分母”，纵轴上的自然数做“分子”，就可以将所有的分数一一排列，形成“分数表”。

...
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$...
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$...
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$...

而这张“分数表”具有很多“优美”的特点：

任何一个分数都能在这张“表”中找到；

从左下方到右上方的主对角线上的数都是“1”；

这条对角线下方的都是“真分数”，上方的都是“假分数”，并且有“一一对应”关系，例如“ $\frac{3}{2}$ ”与“ $\frac{2}{3}$ ”，其位置也是“对称”地分布在这条“主对角线”的两侧；

.....

当学生“跳出”分数的现实意义（即跳出“行为的分数”），而从“形式”上来领略“分数”，不正好能进一步感受数学的神奇魅力吗？数学不也走了两条不同的发展道路（水平数学化与垂直数学化）吗？从两条道路上来理解数学、欣赏数学应该是数学教学的两种追求！

（五）让学生在知识联系中理解“假分数”

——“真分数和假分数”一课的思考与实践历程^①

一、学生的困惑

如果课前让学生判断：“ $\frac{5}{4}$ 是不是分数？”许多学生心存疑惑，甚至有学生认为 $\frac{5}{4}$ 不是分数，理由是：“平均分成了4份，怎么可能取出5份呢？”即使有部分学生认为是分数，当要求他们用自己的方式表示 $\frac{5}{4}$ 的意义时，理解的程度就各不相同。我们在众多学校试教过程中，收集了一些有代表性的作品（如图1、图2），一般分三种情况：第一种，大多数学生认为4份里取不出5份，就干脆什么也不画；第二种（如图1），画是画了，跳不出部总关系的框框，思路不清；第三种（如图2），思路清晰，但每个班只有极个别学生，甚至没有。能这样表示的学生，据访谈了解到，往往是利用教材或在课外辅导班进行了先前学习。



图1



图2

究其原因，学生从三年级初步认识分数到五年级再次认识分数的意义，所见到的分数基本上是分子比分母小的真分数。而且教材上一般都是这样给分数下定义：把单位“1”平均分成

^① 斯苗儿等：让学生在知识联系中理解“假分数”，载于《小学数学教育》2015年第3期（有删减）。

若干份，表示这样的一份或几份的数，叫做分数。所以，许多教师试图从分数意义的角度引导学生学习假分数，学生对假分数的含义难以理解，就算知道分子大于或等于分母的分数叫做假分数，但在许多学生心目中：分数表示的是部分与整体的关系，部分只能小于或等于整体，是不可能超过整体的。

二、教材的启示

“真分数和假分数”的教学是仅仅停留于观察比较分子和分母的大小，将分数分为真分数和假分数两类，还是需要把分数意义进行进一步拓展和延伸，让学生准确把握真分数和假分数的本质特征呢？答案无疑应该是后者。那么，为突破这一教学难点，教材提供了怎样的支持呢？

“真分数和假分数”是在学生学习了“分数的意义”“分数与除法的关系”的基础上进行教学的。原实验教材编排了两道结构相同的例题，即分别给出一组表示分数的图形，让学生观察、比较每个图形所表示的分数以及分子和分母的大小，再让学生想一想：“这些分数比1大，还是比1小？”在此基础上，分别概括出真分数和假分数的概念。在实际教学中，例1让学生填出 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{5}{6}$ ，没有任何问题。例2尽管教材没有让学生自己看图填分数，直接给出了几个分数，要求观察比较分子和分母的大小，给出分子等于或大于分母的分数叫假分数。但事实上学生由于先前经验的影响，已习惯于把几个圆看成一个整体作为单位“1”，许多学生认为应该是 $\frac{4}{4}$ 、 $\frac{7}{8}$ 、 $\frac{11}{15}$ ，很难理解成 $\frac{7}{4}$ 和 $\frac{11}{5}$ 。

也有其他的教材创设了“分饼”的情境活动，分成两个层次展开教学。第一个活动是“3张饼平均分给4个人”；第二个活动是“9张饼平均分给4个人”，可以引导学生1张1张分，也可以先分8张、再分1张，在此基础上揭示真分数、假分数的概念，再介绍带分数。

这也就为我们提供了一条线索，即抓住分数单位的叠加或许能为学生理解假分数提供支撑，但前提是总数量应该是未知。

三、改进思路

确定了教学的真实起点和难点，接下来要思考的问题便是：如何能找到合适的问题和材料让学生体验假分数的产生过程，有效理解假分数意义。

纵观各套教材的结构及数学知识的体系，平均分既是除法的基础，也是分数的基础。不同的是，除法意义的编排只涉及平均分的总数量大于等于份数（或每份数）的，分数意义的编排，不管总数量是多少，都看作单位“1”，只需要用分数表示结果，不要求列除法算式。如果我们整体着眼重组教材，把假分数的教学放在厘清“分数与除法”关系中，则既能突破本节课的难点，又能打通教材编排带来的缺憾，更能凸显概念的普适性和一般性。于是，我们将本节课的整体改进思路确定为：以“平均分”为抓手，沟通“分数与除法”，把“真分数与假分数”的概念与“分数与除法”内容进行整合，用除法算式表示平均分的过程，用分数表示平均分的结果，把分数单位作为生长点，在分数单位不断累加的过程中，让学生初步理解假分数，在“部总关系”基础上对分数的意义进行拓展，为以后分子大于100的百分数的学习打下基础。

四、研究与改进历程

最早的尝试应该追溯到2011年11月我省举行的优质课比赛，六个课题中就包括了“分数与除法”“真分数与假分数”，目的就是去看看这两个内容之间究竟有怎样的内在联系？是否可以整合到一起进行教学？从而帮助学生更好地理解“假分数”，突破教学难点。但这两个课题很少作为公开课进行研究和展示，选手们能参考的资料非常少，当时在众人眼里，这是两节难度系数极高的课。

庆幸的是，抽到这两个课题的四位教师及其所在的教研团队，经过短短一天的备课，在个别环节的设计和实践中为我们后续的研究打开了思路。

【优质课比赛：佐证整合的思路】

2011年11月，浙江省桐乡市，浙江省优质课比赛，执教者：杜纪东、韩海英。

温州市杜纪东老师执教的“分数与除法”和嘉兴市韩海英老师执教的“真分数与假分数”，颇有异曲同工之处，导入环节都紧紧抓住“平均分”打通了知识之间的关系。杜纪东老师在“运用与延伸”环节并不回避分子大于或等于分母的情况，为后面的假分数以及把假分数改写成整数、带分数作了很好的铺垫。

先看看杜纪东老师的导入和延伸片断，以及韩海英老师的导入片断。

杜纪东老师“分数与除法”导入片断：

教师：像这样的题目会列式计算吗？

课件出示：(1) 把8块月饼平均分给2个人，每人分得多少块月饼？

学生：(齐)会，简单， $8 \div 2 = 4$ (块)。

教师：确实很简单，这是你们二年级就学过的除法问题。

继续课件出示：

(2) 把4块月饼平均分给2个人，每人分得多少块月饼？

(3) 把2块月饼平均分给2个人，每人分得多少块月饼？

(4) 把1块月饼平均分给2个人，每人分得多少块月饼？

(5) 把1块月饼平均分给3个人，每人分得多少块月饼？

(6) 把1块月饼平均分给4个人，每人分得多少块月饼？

……

教师：看来 $1 \div 2$ 和 $\frac{1}{2}$ 都表示把1块月饼平均分成了2份，每一份是它的 $\frac{1}{2}$ ，也就是 $\frac{1}{2}$ 块月饼，因此 $1 \div 2 = \frac{1}{2}$ 。这么说分数与除法之间有着共同的地方，它们之间是否存在一定的关系呢？这节课我们就来研究分数与除法的关系。

杜纪东老师“分数与除法”延伸片断：

教师：同学们刚才的发现就是我们今天研究的分数与除法的关系。你们能用更简洁的方法来表示它们的关系吗？

学生：可以，用字母表示，可以用 $a \div b = \frac{a}{b}$ 。(教师板书)

教师：掌握了分数与除法的关系，可以帮助我们解决一些问题。

学生完成教材的基本练习。

教师：再看一组题，会填吗？

$$\frac{5}{8} = () \div ()$$

$$() \div 6 = \frac{()}{6}$$

$$\frac{6}{()} = 6 \div ()$$

教师： $() \div 6 = \frac{()}{6}$ 括号里可以填什么数？

学生：可以填 1， $1 \div 6 = \frac{1}{6}$ 。

教师：还有吗？

学生：可以填 2、3、4、5。

教师：同意吗？

学生：（齐）同意。

学生：还可以填 6。

教师：可以吗？（学生有点疑惑）

学生：可以的， $6 \div 6 = \frac{6}{6}$ ，也就是……我举个例子吧，就是把 6 块月饼平均分成 6 份，每人分得 6 个 $\frac{1}{6}$ 块月饼，就是 $\frac{6}{6}$ 块月饼。

教师：掌声鼓励，实际上 $\frac{6}{6}$ 块月饼就是 1 块月饼。

教师：还有不同的填法吗？

学生：可以填 7。

教师：可以吗？（此时，大多数学生在摇头）

学生：不可以，因为分数的分子比分母都要小的。

教师：是这样的吗？（此时大多数学生附和点头，教师目光继续注视学生，现场陷入一片沉静之中，片刻后有一学生举起手来）

学生：我觉得是可以的，老师你借我 7 个圆片。我把 7 块月饼平均分给 6 个人，1 个 1 个分，每人分得 7 个 $\frac{1}{6}$ 块月饼，就是 $\frac{7}{6}$ 块月饼，也就是比 1 块月饼还多 $\frac{1}{6}$ 块月饼。

此时学生与现场听课教师掌声雷动。

教师：太棒了！此时的掌声就是对你最好的表扬！那你们现在觉得括号里还可以填什么数？

学生：8、9、10……无数个。

教师：如果第一个括号填 12，你有什么发现？

学生 1： $12 \div 6 = \frac{12}{6}$ 。

学生 2：我发现 $\frac{12}{6}$ 就是 2，因为以前做 $12 \div 6$ 的时候，结果就等于 2，现在也可以等于 $\frac{12}{6}$ ，所以 $\frac{12}{6}$ 就等于 2。

教师：看最后一道题 $\frac{6}{()} = 6 \div ()$ ，括号里能填什么数呢？

学生 1：1、2、3、4……都可以。

学生 2：这个括号里可以填任何数。（大多数学生都赞同该生的意见，但有一两个学生举起手）

学生 3：我不同意，括号里不能填 0。

学生：为什么？

学生 3：因为我们以前知道除法中的除数是不能为 0 的，分母相当于除数，因此分数中的分母也不能为 0。

教师：那刚才我们得到的分数与除法的关系式 $a \div b = \frac{a}{b}$ 还需补上——

学生：（齐） b 不等于 0。（教师板书： $b \neq 0$ ）

韩海英老师“真分数与假分数”导入片断：

教师：同学们，我们对分数已经有一定的认识，今天继续学习分数。（板书：分数）

教师：请你写几个分数？

学生写分数，再反馈（学生说分数教师随时板书分数）。

学生 1： $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{5}$ 。

学生 2： $\frac{15}{12}$ 、 $\frac{16}{14}$ 。

学生 3： $\frac{2}{7}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{6}$ 。

教师：这些分数你知道它们表示的意义吗？ $\frac{2}{3}$ 是什么意思？

学生 1： $\frac{2}{3}$ 表示把 2 平均分成 3 份，就是 $\frac{2}{3}$ 。

学生 2： $\frac{1}{5}$ 表示把一个物体平均分成 5 份，取其中的一份，就是 $\frac{1}{5}$ 。

教师： $\frac{15}{12}$ 又是什么意思？

学生： $\frac{15}{12}$ 不行，把一个物体平均分成 12 份，最多取 12 份，没有办法取 15 份。

教师：你们大家都认为是吗？

学生：（齐）是。

教师： $\frac{16}{14}$ 呢？

学生：和 $\frac{15}{12}$ 是一样的。

教师：老师也写一个分数 $\frac{5}{4}$ （板书），和 $\frac{15}{12}$ 、 $\frac{16}{14}$ 的情况是不是一样的？我们先一起来做一个分苹果的游戏。

课件出示一个苹果的图片及问题“平均分给4个人，每人分得几个苹果？”

教师：能解决吗？心中有算式吗？

学生： $1 \div 4 = \frac{1}{4}$ （个）。（教师板书）

教师： $\frac{1}{4}$ 怎样理解？心中有图形吗？

学生：把一个苹果平均分成4份，取1份就是 $\frac{1}{4}$ 个，1个 $\frac{1}{4}$ 。（教师在黑板上出示 $\frac{1}{4}$ 圆片）

课件继续逐一出示苹果图片。一直到学生得出当分到第3个苹果时，每人得到3个 $\frac{1}{4}$ ，即 $\frac{3}{4}$ 个。

教师：（追问）这样，可以分到 $\frac{5}{4}$ 个苹果吗？

学生1：再分2个苹果，每人就分到 $\frac{5}{4}$ 个苹果了。

学生2：再分1个苹果，每人分到 $\frac{4}{4}$ 个，是4个 $\frac{1}{4}$ ，就是1个。之后再分1个，5个 $\frac{1}{4}$ ，就是 $\frac{5}{4}$ 。

学生3： $5 \div 4 = \frac{5}{4}$ （个）。

教师：心中有图形吗？

学生：5个 $\frac{1}{4}$ ，就是1个再加 $\frac{1}{4}$ 个。（教师黑板上出示 $\frac{5}{4}$ 圆片）

教师根据 $\frac{5}{4}$ 的圆片，对应写 $1\frac{1}{4}$ 。

教师： $\frac{5}{4}$ 还可以写成 $1\frac{1}{4}$ 的形式，读作一又四分之一。

教师：（追问）刚才你们说分到第7个苹果时是什么情况？

学生： $7 \div 4 = \frac{7}{4}$ （个），7个 $\frac{1}{4}$ ，1个多，2个不到。

教师：你们会继续往下分吗？今天我们不再分了。现在回过头来看 $\frac{5}{4}$ 有吗？ $\frac{15}{12}$ 、 $\frac{16}{14}$ 有吗？

学生1：有这样的分数，15个苹果平均分给12个人，每人分到 $\frac{15}{12}$ 个苹果。

学生2： $\frac{16}{14}$ 是16个苹果平均分给14个人，每人分到 $\frac{16}{14}$ 个苹果。

教师：这样的分数，你们能再写几个吗？能写完吗？

反馈交流（略）。

教师：像 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{2}{7}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{6}$ ……这样的分数叫真分数；像 $\frac{5}{4}$ 、 $\frac{15}{12}$ 、 $\frac{16}{14}$ ……这样的分数叫假分数。（板书：真分数、假分数）

从杜纪东老师的教学实践中不难看出，他巧妙地借助分月饼的活动，利用平均分很好地沟通了分数与除法；在延伸环节设计的 $() \div 6 = \frac{()}{6}$ 和 $\frac{6}{()} = 6 \div ()$ 两道习题，真分数和假分数概念的揭示已呼之欲出。尽管对 $\frac{7}{6}$ 是不是分数，一开始有学生有疑惑，但随着分月饼经验的激活，部分学生已能对 $\frac{7}{6}$ 作出很好的解释。在这节课中，杜老师只是碍于抽到的课题是“分数与除法”，还不舍得花很多的时间和精力让学生去搞清楚类似“3块月饼要平均分给4个人”的两种分法。又处在赛课的环境下，不敢过多涉及“真分数与假分数”的内容。但为我们把两个内容进行整合的设想作了很好的佐证。

韩海英老师的课完全可以紧跟着杜纪东老师的两道延伸题展开讨论。正如韩老师在反思中所说：通过对教材内容的分析以及本次教学实践，认为“分数与除法”“真分数和假分数”两课时内容可以整合成一课时进行教学，在教学“分数与除法的关系”时，把教材两个例题适当进行拓展（例1：把1块蛋糕平均分给3人，每人分得多少个？例2：把3块月饼平均分给4人，每人分得多少块？），增加：把4块月饼平均分给4个人，每人分得多少块？5块呢？6块呢？7块呢？……在观察分数与除法关系的同时，再观察比较分数分子与分母的大小，真分数和假分数的教学就水到渠成了。

【初次实践：确定方向和教学材料】

2012年6月，浙江省杭州市，浙江省小学数学疑难问题专题研训，执教者：余文法。

我们期待通过余文法老师的课堂体现整合的思路，并找到合适的材料，设计好能统揽整节课的问题。这样就选择了前面分饼的活动，数量是从最简单的1张开始，不告诉总数，通过1张1张地分，体现分数单位的叠加过程。由此展开的教学过程如下：

1. 出示：把□张圆饼，平均分给4个小朋友，每人分到多少张？

(1) 你们能解决吗？想一想用什么数量关系？

(2) 如果只有一张圆饼，平均分给4个小朋友，每人分到多少张？算式怎样列？（根据学

生回答列式： $1 \div 4$ ）结果是多少？

(3) 如果以圆纸片表示一张圆饼，每人分到多少张？

学生：把1张圆饼平均分成4份，每一份是它的 $\frac{1}{4}$ ，正好是 $\frac{1}{4}$ 张。

教师：这样的一份就是 $\frac{1}{4}$ 张。（板书：1份 $\frac{1}{4}$ 张）

(4) 课件操作，演示分的过程，突出分数单位。

教师逐一追问：如果再增加1张圆饼，变成2张圆饼，继续平均分给4个小朋友，这时每人共分到多少张？算式怎样列？结果是多少？你是怎样想的？

教师根据学生的回答再板书和课件演示，一直分到第4张饼。在此基础上回顾整个分饼的过程，再用课件作如下整体演示：

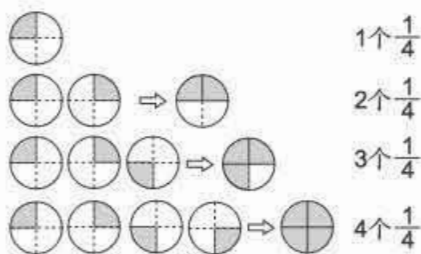


图3

2. 继续追问：如果再增加1张圆饼，变成5张圆饼，还是平均分给4个小朋友，这时每人分到多少张？算式怎样列？想一想分的过程，每人分到几张圆饼呢？

学生1：有5张圆饼，每张圆饼都各取一份，能取5个 $\frac{1}{4}$ ，合起来就是 $\frac{5}{4}$ 张。

学生2：首先，我们将5张圆饼分成4张圆饼和1张圆饼，4张圆饼的话就是 $\frac{4}{4}$ 张，1张圆饼是 $\frac{1}{4}$ 张，合起来就是 $\frac{5}{4}$ 张。

学生3：先把4张圆饼平均分给4个人，每人分到1张，再把第5张圆饼平均分给4个人，每人分到 $\frac{1}{4}$ 张，合起来就是1张多 $\frac{1}{4}$ 张。

教师：合起来有几个 $\frac{1}{4}$ 了？

学生4：第5张圆饼分给4个人，每人又分到 $\frac{1}{4}$ 张，合起来就有5个 $\frac{1}{4}$ 张，即 $\frac{5}{4}$ 张，其中 $\frac{4}{4}$ 相当于1张，还多了 $\frac{1}{4}$ 张。（教师板书：5个 $\frac{1}{4}$ ）

教师：如果我有6张、7张、8张、9张圆饼……也想平均分给4个小朋友，那么每人分别能分到几张圆饼？你能列出算式，并用分数表示分得的结果吗？

让学生独立在作业纸上写算式，并用分数表示出结果。根据学生回答形成以下板书：

$$6 \div 4 = \frac{6}{4} \text{ (张)}$$

$$7 \div 4 = \frac{7}{4} \text{ (张)}$$

$$8 \div 4 = \frac{8}{4} \text{ (张)}$$

$$9 \div 4 = \frac{9}{4} \text{ (张)}$$

……

接着，要求学生选择一种说一说是怎样得到结果的，有什么发现。

学生：我发现这种分法与我们以前学的有余数的除法有关，比如 $9 \div 4 = 2 \text{ (张)} \cdots \cdots 1 \text{ (张)}$ ，余下的 1 张平均分给 4 个人，每人正好可以用 $\frac{1}{4}$ 张表示。

3. 归纳概括，提炼分数与除法的关系。

教师：（追问）谁听懂他的想法了？是呀，以前 $9 \div 4$ 的结果我们可以用商几余几来表示，今天它的结果我们就可以用一个分数来表示。像这样的算式写得完吗？如果是 23 张圆饼，结果是多少？如果是 100 张圆饼呢？每人怎么会得到 $\frac{100}{4}$ 张圆饼？如果是 \square 张圆饼呢？如果有 a 张圆饼呢？

教师：每人怎么会得到 $\frac{a}{4}$ 张圆饼的？

学生 1：把 a 张圆饼每一张都平均分成 4 份，每张圆饼里各取 1 份， a 张圆饼取完就有 a 个 $\frac{1}{4}$ 张，合起来就是 $\frac{a}{4}$ 张了。

首先，引导学生观察黑板上的这些除法与分数，发现它们之间的关系。

板书：被除数 \div 除数 = $\frac{\text{被除数}}{\text{除数}}$ (除数 $\neq 0$)

接着，引导学生观察这些结果，让学生发现，从上到下观察：分母都是 4，分子一个比一个大 1。并指出：真分数和假分数。

从余文法老师的课堂可以看出，借助简单的分饼活动，很好地厘清了众多知识之间的脉络，沟通了分数与除法的关系。事实上，正如学生所说，“9 张饼平均分给 4 个人”，与二年级学习有余数除法的内容有关，只是分的结果表示方法不一样。尽管余老师问题的设计步子偏小，整个教学过程也显得有些拖沓，毕竟这样的尝试他是第一个吃螃蟹的人，达到了预期的目标。这就说明我们确立的改进方向和选择的材料都是可行的，只需要改进和研究课堂推进的细节。如：每一张饼的出现是否都需要操作？导入时如何把研究的目标和任务让学生更加明确？……这便成为后续研究的话题。

【再次实践：重拟课堂推进线索】

2013年9月，浙江省杭州市，浙江省新教研员研修班，执教者：马珏。

与前面余文法老师的课堂实践相比，马珏老师的课着重改进了两个地方，一是导入时抓住新旧知识的联系，引发认知冲突，让学生后续的学习有更明确的方向；二是淡化甚至放弃了每一张饼平均分的实物及课件的演示，更符合五年级学生的学习特点。具体过程如下：

1. 导入，展现认知冲突。

教师：同学们，我们已经学习了“分数的意义”， $\frac{1}{2}$ 表示什么呢？

学生：把单位“1”平均分成2份，表示其中的1份。

教师： $\frac{4}{4}$ 呢？

学生：把单位“1”平均分成4份，表示其中的4份。

教师：（板书： $\frac{5}{4}$ ）你们认为它是分数吗？

学生：不是分数，平均分成4份，怎么能取出5份？

学生：是分数，曾经看到过。

教师：看来有不同意见了。其实， $\frac{5}{4}$ 也是分数，那 $\frac{5}{4}$ 表示什么意思呢？请你拿出白纸，在纸上尝试着用图画一画 $\frac{5}{4}$ 表示的意思。

个别学生表现：感到有困难，无从下笔。

大部分学生表现：将单位“1”平均分成4份，取出4份后，还有1份再在其中继续分（如图4）。



图4

个别学生表现：将单位“1”平均分成4份，取出4份后，再画一个单位“1”，再取出其中的 $\frac{1}{4}$ （如图5）。



图5

教师：这样画对不对呢？等我们学了这节课后，你就知道了。

2. 借助分饼活动理解 $\frac{5}{4}$ 。

教师：那 $\frac{5}{4}$ 究竟表示什么意思呢？我们先来做一个分饼的活动。

教师：把（ ）张圆饼平均分给4个小朋友，每人分到几张？

教师：先分一张圆饼，每人分到几张？用算式怎么表示？

学生：每人分到 $\frac{1}{4}$ 张， $1 \div 4 = \frac{1}{4}$ （张）。

课件直接出示：

教师：2张圆饼呢？怎么想的？用算式还能怎么表示？

学生：每人分到 $\frac{2}{4}$ 张，2个 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{2}{4}$ ， $2 \div 4 = \frac{2}{4}$ （张）。

教师接着提问：那么3张圆饼呢？4张、5张、6张……9张圆饼呢？

依据学生的回答，课件依次出示（如图6），直到9张为止，让学生看到每多分1张饼，就多1个 $\frac{1}{4}$ 。



图6

图7的板书清晰地展现了整个教学过程。

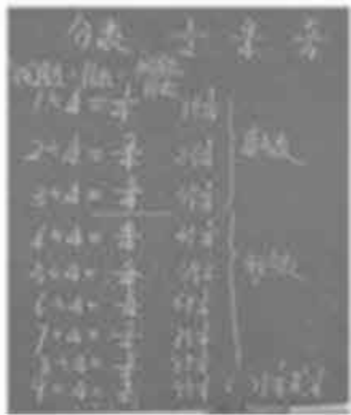


图7

课后，教研员们进行了热烈的交流，认为这节课的设计大气，不断暴露学生思维，构建了诊断处方型的课堂。浙江省特级教师叶柱老师对这节课概括了四个特点：一是从已有经验入手，摸准起点；二是将核心环节做强，扩充体验；三是将思维疑难放大，逐步突破；四是让知识体系凸显，提升张力。事实上，如果我们仔细研读马珏老师的课堂导入及展开过程，就不难发现，这节课把韩海英老师和余文法老师的优势进行了整合。借鉴了韩海英老师开门见山导入新课并引发认知冲突的方式，只是把学生举例改成了教师举例，学生解释。同时保留了余文法老师分饼的活动，环节更加紧凑和流畅。这就为张国良老师代表浙江省在全国第十一届深化小学数学教学改革观摩交流会中的展示打下了基础。

【第三次实践：初步成型，学生的疑惑铸就亮点】

2013年10月，湖北省武汉市，全国第十一届深化小学数学教学改革观摩交流会，执教

者：张国良。

张国良老师在武汉会议上所展示的课基本上延续了马珏老师的思路，只是对导入环节中学生对 $\frac{5}{4}$ 的各种理解，哪怕是错误的理解，教师有了更加包容的心态，做了更加细致的处理，在分饼的活动中更加强化了分数单位。不妨在这里呈现整节课完整的教学过程，便于与前期的研究进行比照。

1. 导入，引发认知冲突。

教师：同学们，我们已经学习了“分数的意义”， $\frac{1}{2}$ 表示什么呢？（板书： $\frac{1}{2}$ ）

学生：把单位“1”平均分成2份，表示其中的1份。

教师： $\frac{4}{4}$ 呢？（板书： $\frac{4}{4}$ ）

学生：把单位“1”平均分成4份，表示其中的4份。

教师：（板书： $\frac{5}{4}$ ）你们认为它是分数吗？（现场学生表现不一，有点头的，有摇头的）

教师：看来有些争议，我们先来举手表决，认为是的举手。（现场大部分学生举手，但有些学生举得比较犹豫，少量学生没有举手）

教师：我们先请认为不是的同学说说想法。

学生1：按照刚才的说法，它应该表示把单位“1”平均分成4份，表示其中的5份，总共只分了4份，不能表示5份。

学生2：如果它是分数，分子就比分母大了，分子是不能比分母大的。

学生3：他们讲得都不对，这个是分数，是一个假分数。

教师：这位同学很厉害，已经知道了假分数。老师告诉大家，它的确是一个假分数，就读作四分之五。那 $\frac{5}{4}$ 表示什么意思呢？请你试着在纸上用图画出 $\frac{5}{4}$ 表示的意思。

.....

教师：我们一起来看看下面几位同学怎么用图来表示 $\frac{5}{4}$ ？

教师逐一展示学生的典型作品，如图8。

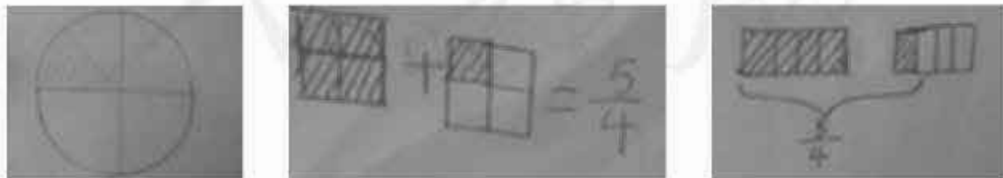


图8

2. 借助分饼活动，突破教学难点。

教师：这些图表示的究竟对不对呢？等我们学好这节课的内容后再来判断。下面我们先通

过一个分饼的活动来看看 $\frac{5}{4}$ 到底是怎么产生的。

出示：把□张圆饼平均分给4个小朋友，每人分到几张？

教师：有没有具体告诉我们分几张饼？（没有）那我们就从1张分起。

教师：把1张圆饼平均分给4个小朋友，每人分到几张？

学生： $\frac{1}{4}$ 张。把一张圆饼平均分给4个小朋友，就是要把这张圆饼平均分成4份，每人分得1个 $\frac{1}{4}$ ，就是 $\frac{1}{4}$ 张。（教师课件展示分饼过程和分的结果）

教师：用算式怎么表示？

学生： $1 \div 4 = \frac{1}{4}$ （张）。（教师板书）

教师：为什么用除法计算？

学生：因为是把一张圆饼平均分4份，求其中的1份是多少。

教师：分完一张，我们再分第二张，分完这第二张圆饼，每人一共分到多少张？

学生1： $\frac{2}{4}$ 张。分完第二张圆饼后，每个人一共分得2个 $\frac{1}{4}$ ，一共就是 $\frac{2}{4}$ 张。

学生2：算式是 $2 \div 4 = \frac{2}{4}$ （张）。

教师：如果是分3张，你能直接报出算式和结果吗？4张呢？5张呢？

学生依次回答分3、4、5张圆饼相应分得的结果和算式。

教师：（指着算式 $5 \div 4 = \frac{5}{4}$ ）分到5张圆饼的时候，谁出现了？

学生：（齐） $\frac{5}{4}$ 。

教师：如果饼的张数继续增加，你还会分吗？

引导学生分6、7、8、9张圆饼，依次板书算式和结果，形成如下整体板书：

$$1 \div 4 = \frac{1}{4}$$

$$2 \div 4 = \frac{2}{4}$$

$$3 \div 4 = \frac{3}{4}$$

.....

$$9 \div 4 = \frac{9}{4}$$

教师：请同学们从左往右观察这些算式，有什么发现？

学生：被除数就是分子，除数就是分母。

教师：原来分数与除法存在着一定的关系，这种关系我们可以用关系式表示——被除数÷

除数 = $\frac{\text{被除数}}{\text{除数}}$ 。(教师板书)

教师：请你们继续从上往下观察这些分数，又有什么发现呢？

学生1：分母不变，分子每次大1。

学生2：就是每次增加一个 $\frac{1}{4}$ 。

教师：其实就是 $\frac{1}{4}$ 这个分数单位在逐一增加。

引导学生一起发现： $\frac{1}{4}$ 就是1个 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{2}{4}$ 是在1个 $\frac{1}{4}$ 的基础上累加1个 $\frac{1}{4}$ 产生的。以此类推， $\frac{3}{4}$ 是在2个 $\frac{1}{4}$ 的基础上累加1个 $\frac{1}{4}$ 产生的， $\frac{4}{4}$ 是在3个 $\frac{1}{4}$ 的基础上累加1个 $\frac{1}{4}$ 产生的……

教师：现在你明白 $\frac{5}{4}$ 这个分数是怎么产生的了吗？

学生1：就是5个 $\frac{1}{4}$ 。

学生2：是5个 $\frac{1}{4}$ 累加产生的。

教师：还能继续累加吗？（能）累加到6个 $\frac{1}{4}$ 产生了——

学生：（齐） $\frac{6}{4}$ 。

教师：累加到几个 $\frac{1}{4}$ 时产生了 $\frac{9}{4}$ ？

学生：（齐）9个。

出示：（ ）个 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{（ ）}{4}$ 。

学生1：10个 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{10}{4}$ 。

学生2：999个 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{999}{4}$ 。

学生3： n 个 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{n}{4}$ 。

教师：如果继续累加上去，产生的分数会越来越——

学生：（齐）大。

3. 巩固和延伸：比较辨析，深化假分数意义的理解。

在接下来的教学中，引导学生先将黑板上的分数分类，让学生知道真分数和假分数的特征，并举例写几个假分数。在此基础上，继续通过识图辨析，深化学生对假分数意义的理解。

如：你能用分数表示下面各图的涂色部分吗？重点是呈现图9，引导学生讨论究竟该用 $\frac{5}{4}$ ，还

是 $\frac{5}{8}$ 表示。



图9

综观张国良老师的教学实践，我们可以看到：原来的课堂大多数只是从形式上把握真分数与假分数，要求学生记住分类的标准就可以了，试图绕开学生的疑惑点。而我们认为堵不如疏，所以就以“ $\frac{5}{4}$ ”为载体，整节课围绕“ $\frac{5}{4}$ 是不是分数”“ $\frac{5}{4}$ 表示什么意思”展开，充分暴露学生思维，展开针对性的教学。整个教学程序类似医生“先看病症，再查病因，斟酌处方，药到病除”的诊疗过程。这样“诊断处方型”的课堂，无疑让与会代表和专家眼前一亮，全国小数专委会学术委员会副主任、上海市特级教师曹培英老师在大会评课中进行了充分肯定，他说：小学数学的很多概念，从何引入，怎样建构，已经形成公认的教学对策。另辟蹊径，需要勇气与胆识。浙江省“真分数与假分数”一课突破了固有的教学模式，探索了新的教学路径。通常情况下，由等分引入……本节课，从除法导出：1~3张饼平分给4人，每人 $\frac{1}{4} \sim \frac{3}{4}$ 张，4、5张饼平分给4人，每人 $\frac{4}{4}$ 、 $\frac{5}{4}$ 张，较彻底暴露了学生的“前概念”与“相异构想”。“除法与分数的关系”与“真分数和假分数”概念得以整合；凸显了真分数的局限性与引进假分数的现实意义。

至此，从省赛课开始，到全国赛课展示，“真分数与假分数”的研究已初步定型。需要说明的是：浙江省近几年的教研活动内容（主题），每两年一个轮回，一年是赛课，一年是学科疑难问题专题研训活动。这样，我们的教研就有了一个系统的规划，一般赛课后的第二年教研活动，会选择当年优质课赛课中大家认为比较难上的课题继续研究，因为赛课要体现公平、公正，再有想法，也不能介入。所以在2012年6月中旬的疑难问题专题研训活动，就让承办活动的杭州市胜利小学（现在已更名为杭州市胜利实验学校）的余文法老师担当此任。因为课题是事先定好的，他没参加省优质课赛课活动，也从未想过将“分数与除法”和“真分数和假分数”两节课要整合成一节课。他的任务是让全省的教研员和部分骨干教师看到我们研究的视角，搭建课的整体框架；马珏老师的研究事实上是在余文法老师实践的基础上，再听了张国良老师试教后的一次改进；而张国良老师在全国展示以前，也观摩了马珏老师的课，是对马珏老师的课的再次改进。一路走来，这样一课多人研究、互相借鉴的方式，成了浙江省磨课的范式之一。

五、后续思考

1. 关于教学，应适当增加用分数表示两个量之间的关系的内容，扩展对分数意义的理解。分数既可以表示部分与整体的关系，也可以表示两个量之间的关系，后者是分数意义的拓

展。尽管我们的改进行动，始终以分数单位为生长点，借助分饼的过程，让学生清晰地建构起真分数和假分数都是“分数单位不断累加的结果”，但用分数还可以表示两个量比较的结果，并没有涉及。所以，如果我们继续改进教学，还应该让学生进一步拓展对分数意义的理解，引导他们从不同层面去进行解读。一种思路，在“分饼”活动结束后，可以追问学生： $\frac{5}{4}$ 还可以表示什么？根据学生举例，再安排一个“两个量比较”的情境，如：出示5个○和4个●，让学生进行比较，以○为标准，把5个○看成单位“1”，4个●相当于它的 $\frac{4}{5}$ ；也可以●为标准，把4个●看成单位“1”，5个○相当于它的 $\frac{5}{4}$ ，让学生感受到这里的 $\frac{5}{4}$ 是表示两个量之间的关系。当然，将所有的9个圆看成单位“1”，4个●相当于它的 $\frac{4}{9}$ ，5个○相当于它的 $\frac{5}{9}$ ，这是前面学习分数的意义就能想到的。另一种思路，可以更加开放，整节课是否可以就 $\frac{5}{4}$ 表示什么意义，让学生自己看书寻找资料加以研究，“分饼”活动可以看学生自己研究的情况，作为备用环节。

2. 关于教材，应尝试着改变原有的教材结构。

首先，要为学生理解分数的意义提供多角度的资源。在分数意义的基础上增加相应的素材，让学生体会分数能表示两个同类数量的关系，从而扩展对分数意义的理解。

其次，平均分、除法的含义、分数的认识以及分数与除法的关系等一些紧密相关的内容，需要做系统而细致的梳理。每一个内容该用什么素材？如何呈现？分别需要多少课时？学生学习会碰到怎样的困难？教师在实践中积累了哪些经验？需要加以研究。如“分数与除法”的内容，教材基本上沿袭了大纲教材，总是把“3张饼平均分给4个人”作为例题，目的是通过两种分法让学生理解1个 $\frac{3}{4}$ 等于3个 $\frac{1}{4}$ 。我们以为，这样的内容编排值得商榷。首先是3张饼叠在一起分，这一分法显得牵强，在生活中几乎不可能。况且，要说明1个 $\frac{3}{4}$ 等于3个 $\frac{1}{4}$ ，学生借助前面分数单位的概念，就能推出 $\frac{3}{4}$ 里面有3个 $\frac{1}{4}$ ；或者通过1张1张分，就能直观地看到，每分1张得到1个 $\frac{1}{4}$ ，3张就得到3个 $\frac{1}{4}$ ，就是 $\frac{3}{4}$ 。再说，像这样的问题，学生在后续的一个数乘分数的学习中很快就能掌握。所以，从我们这次对“真分数和假分数”一课的改进视角和实践效果来看，“分数与除法”与“真分数和假分数”的整合不仅必要而且可能。

四、评价建议与评价样例

(一) 评价建议

本单元的学习内容主要有分数的意义、真分数和假分数、分数的基本性质、约分、通分和分数与小数的互化六个方面。对本单元学习的评价可围绕如下五个方面进行：(1) 了解分数的产生，理解分数的意义，明确分数与除法的关系；(2) 认识真分数和假分数，知道带分数是一部分假分数的另一种书写形式，能把假分数化成带分数或整数；(3) 理解和掌握分数的基本性质，会比较分数的大小；(4) 理解公因数与最大公因数、公倍数与最小公倍数，能找出两个数的最大公因数与最小公倍数，能比较熟练地进行约分和通分，并应用所学知识解决简单的实际问题；(5) 会进行分数与小数的互化。

(二) 评价样例

为便于教学，下面提供一些评价样例，供参考。

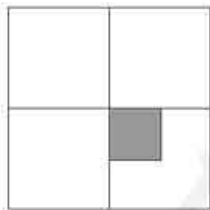
1. 填空。

(1) 分数单位是 $\frac{1}{7}$ 的最简真分数有 ()；分子是3的假分数有 ()，其中最大的是 ()，最小的是 ()。

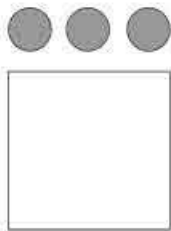
(2) 把一条6 m长的绳子平均分成8段，每段是全长的 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ ，每段长 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ m。

(3) $(\quad) \div (\quad) = \frac{(\quad)}{5} = 0.6 = \frac{9}{(\quad)} = (\quad) \div 35$ 。

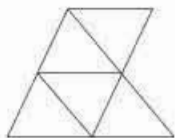
(4) 下图中阴影部分的面积占整个正方形的 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ 。



(5) 下图中露出的圆片是单位“1”的 $\frac{1}{6}$ ，被遮住的部分是 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ ，一共有 () 个圆片。

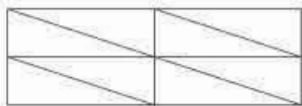


2. 涂一涂，填一填。



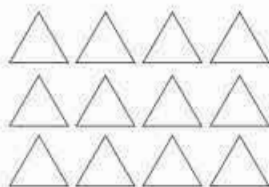
$$\frac{3}{5}$$

分数单位：()
有 () 个分数单位



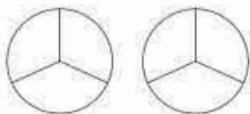
$$\frac{5}{8}$$

分数单位：()
有 () 个分数单位



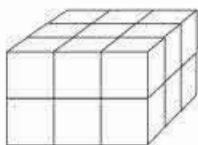
$$\frac{1}{4}$$

分数单位：()
有 () 个分数单位



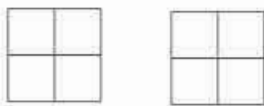
$$1\frac{1}{3}$$

分数单位：()
有 () 个分数单位



$$\frac{2}{3}$$

分数单位：()
有 () 个分数单位



$$\frac{5}{4}$$

分数单位：()
有 () 个分数单位

3. 在○里填上“>”“<”或“=”。

$$\frac{2}{5} \bigcirc \frac{2}{7}$$

$$\frac{4}{7} \bigcirc \frac{3}{7}$$

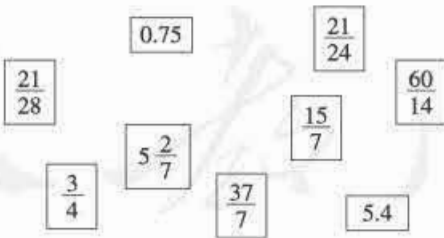
$$3\frac{1}{5} \bigcirc \frac{15}{4}$$

$$2\frac{4}{5} \bigcirc 2.8$$

$$\frac{4}{6} \bigcirc \frac{5}{9}$$

$$4 \bigcirc \frac{14}{3}$$

4. 将相等的数用线连起来。



5. 先找出下面每组分数中分母的最小公倍数，再通分。

$$\frac{2}{11} \text{ 和 } \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{12} \text{ 和 } \frac{14}{15}$$

$$\frac{7}{8}, \frac{5}{12} \text{ 和 } \frac{3}{16}$$

6. 算一算。



这些花的 $\frac{5}{6}$ 有多少盆？并在图中分一分、圈一圈。

7. 解决问题。

(1) 一张长方形木板长 28 m，宽 12 m。在无剩余的前提下，将它裁成大小相等且尽可能大的正方形，正方形的边长是多少？一共可以裁成多少个？

(2) 一个长方形的长和宽分别是 24 cm 和 9 cm，至少多少个这样的长方形才能拼成一个正方形？这个正方形的边长是多少？

人教版®

第五单元 图形的运动（三）

一、教材说明和教学建议

（一）教学目标

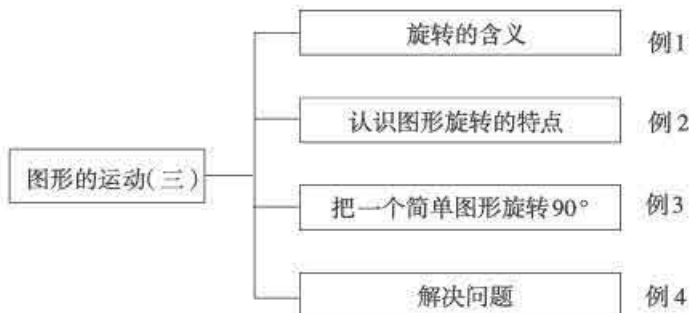
1. 进一步认识图形的旋转，探索图形旋转的特征和性质，能在方格纸上画出简单图形旋转 90° 后的图形。

2. 能从对称、平移和旋转的角度欣赏生活中的图案，并运用它们在方格纸上设计简单的图案，进一步感受图形变换带来的美感以及在实际中的应用。

（二）内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

前面的学习中，学生初步感知了生活中的对称、平移和旋转现象。本单元让学生进一步认识图形的旋转变换，学习在方格纸上画出一个简单图形旋转 90° 后的图形，发展空间观念。具体编排如下表。



“图形的旋转”属于图形与几何领域关于“图形的运动”的相关知识，《标准（2011）》对于该内容在义务教育阶段三个学段分别有不同的要求，如下表。

第一学段	第二学段	第三学段
结合实例，感受平移、旋转、轴对称现象。	通过观察、操作等，在方格纸上认识图形的平移与旋转，能在方格纸上按水平或垂直方向将简单图形平移，会在方格纸上将简单图形旋转 90° 。	通过具体实例认识平面图形关于旋转中心的旋转。探索它的基本性质：一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心距离相等，两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等。

本套教材关于图形的运动的具体编排分为以下三个层次。

图形的运动（一）：在二年级下册，初步感知生活中的对称、平移和旋转现象，初步认识轴对称图形。

图形的运动（二）：在四年级下册，进一步认识图形的轴对称，探索图形成轴对称的特征和性质，能在方格纸上将一个轴对称图形补充完整，会在方格纸上画出一个简单图形沿水平方向、竖直方向平移后的图形。

图形的运动（三）：在五年级下册，进一步认识图形的旋转，学习在方格纸上画出一个简单图形旋转 90° 后的图形，能从对称、平移和旋转的角度欣赏生活中的图案，并运用它们在方格纸上设计简单的图案，进一步增强空间观念。

显然，无论是第一学段还是第二学段，都不要求对三种变换做出一般化的描述，更不要求给出定义。从整体上看，整个小学阶段都只是初步认识图形的运动，上面这些具体目标可概括为：积累感性认识，形成初步表象，其外显的表现就是“能识别”“会画图”。离定性的认识、定量的研究还有一定距离。因此，学习的主要方式是结合实例，通过观察与动手操作，如折纸、画图等活动来进行。而且还规定了画图的行为条件“在方格纸上”，为学生提供了参照系，自然也是降低了学习的难度。

仔细分析不难看出，两个阶段的学习目标，呈现螺旋上升式的递进。第一学段从感知实际生活中的图形变换现象（包括对称、平移和旋转）开始，学习特殊方向的平移，以及直观地认识轴对称图形。第二学段对平移、旋转、轴对称要求略有提高，主要是探索图形成轴对称的特征和性质，能画出图形的轴对称图形和在方格纸上将图形旋转 90° ，并能运用所学知识设计图案和解决简单的问题。本单元学习内容起着承上启下的重要作用，既要关注新旧知识的联结，用原有知识推动新知识的学习，又要为中学的学习打下坚实基础。教学时要切实把握好“图形旋转”的具体目标及其要求的“度”。

2. 教材编排特点。

本单元的编排具有以下几个特点。

（1）注重联系生活实际，让学生在具体情境中认识图形的旋转。

教材的编排，注重联系生活实际，让学生在具体情境中进一步认识图形的旋转。如，让学生观察钟表指针和三角尺旋转的过程，认识它们是怎样按照顺时针或逆时针方向旋转的，明确旋转的含义，探索图形旋转的特征。再如，运用图形的平移和旋转将一组打乱的图形还原等。这些都是借助具体情境帮助学生更好地体会和探索图形的运动。

（2）通过实际操作和解决问题，帮助学生理解图形的旋转，增强空间观念。

教材设计了大量的操作活动，帮助学生理解图形的旋转，发展空间观念。不仅设计了看一看、画一画、摆一摆、拼一拼等操作活动，而且注意设计需要学生进行想象、猜测和推理的探究活动，培养学生的空间想象力和推理能力。如，解决问题的教学，利用七巧板拼出一个小鱼图案，既需要学生利用图形的运动动手操作，不断尝试，同时也需要根据图形的特点进行判断和推理。在此过程中增强学生的空间观念。

（三）教学建议

1. 注意让学生真正地、充分地进行活动和探究。

加强学生的操作活动，是提高图形运动教学成效的一条重要策略。首先，这一教学策略迎

合了小学生好动的年龄特征，把“好动”引导到数学学习上来，体现了“做中学”的课改理念。其次，它又切合了教学内容的特点，因为小学主要是从运动角度去认识图形的旋转。

2. 指导学生探索在方格纸上转摆、画旋转图形的方法。

在方格纸上画图，是一种特殊的操作活动，它在图形变换初步认识的教学过程中，具有不可或缺的作用。因为学会画图是学生必须达成的学习目标，同时它又是反映学生是否理解有关概念，掌握有关特征的表现形式与检测手段。

教学在方格纸上画旋转 90° 的图形时，可以先让学生用学具，比如三角形，放在方格纸上，按要求转一转，再画下来。然后讨论三角形上的两条边转动了哪里，由此逐步引出画图步骤。之所以先“转”再“画”，是由于动手旋转学具比画图容易。学生通过操作，看清楚了旋转后图形的位置，再来讨论怎样画，就比较容易找到画图的方法。

3. 恰当把握旋转性质的教学目标。

图形的变换，从概念到性质，再到应用，内容本身有很大的发展空间。因此，教师必须注意把握教学目标的適切性。前面，我们把这部分内容的学习目标，从可操作、可测量的角度概括为两个外显的学习行为“能识别”与“会画图”。这里“能识别”的范围，是指简单的轴对称图形和典型的、常见的平移、旋转现象；“会画图”的限制条件，一是利用方格纸，二是简单的图形，三是两个特殊方向上的平移和 90° 的旋转。控制在这样的范围内，一般学生经过努力都能达到要求。更具体地，教师在确定各课时的教学目标时，除了依据课程标准，从整体上把握教学目标的“度”之外，还应参照本单元的教学目标，准确把握教学重点，并从本班学生的实际情况出发，把教学目标定在学生的最近发展区内。否则，容易加重学生的学习负担，欲速而不达。

4. 注意知识的科学性。

这部分知识虽然不要求用精确的语言描述图形旋转的特征，但也要注意知识的科学性。在小学阶段，只要求学生能概括出“绕一个点旋转”“向什么方向旋转”“转动多少度”这几点就可以了。同时，也要避免学生在操作和画图时出现不规范的情况。

5. 建议用3课时教学。

人教版®

（四）具体内容的教材分析和教学建议

编写意图

（1）主题图联系生活实际，选取学生熟悉的实例作为研究旋转现象的素材，引出图形的旋转运动。感受数学的应用价值、文化价值和美学价值。

（2）例1借助钟面指针的运动，明确旋转的三要素：旋转中心、旋转方向与旋转角度。

对于图形的旋转不要求学生用精确的语言描述，只要要求学生能概括出“绕一个点旋转”“向什么方向旋转”“转动多少度”这几点就可以了。

（3）“做一做”根据道闸挡车杆的起落，进一步从旋转中心、方向和角度等方面巩固认识旋转变换。

5 图形的运动(三)



你还记得这是怎么回事吗？

例1

从“12”到“1”，指针绕点O按顺时针方向旋转了 30° ；
从“1”到“2”，指针绕点O按顺时针方向旋转了 60° ；
从“3”到“6”，指针绕点O按顺时针方向旋转了 90° ；
从“6”到“12”，指针绕点O按逆时针方向旋转了 180° 。

做一做



左侧有车通过，车杆要绕点O按顺时针方向旋转 90° ；
右侧有车通过，车杆要绕点O按逆时针方向旋转 90° 。

83

教学建议

（1）选取典型事例，让学生感知旋转现象。

本单元是从三要素的角度来认识旋转变换。根据学生的年龄特点，仍然需要借助生活实例来帮助学生认识。但生活中的一些旋转现象可能不够典型，容易淡化概念的本质，甚至可能产生歧义，对学生建立正确的表象产生干扰。因此，教学中注意选取生活中较为典型的例子，特别是注意选取旋转角度不是 360° 的道闸、秋千等，丰富学生的认知，让学生充分感知旋转现象。

（2）通过多种学习活动认识旋转，明确旋转的含义。

教学中要注意通过观察、想象、操作、描述等多种活动认识旋转变换。如，先让学生观察钟表的指针，独立思考如何准确地描述指针从“12”到“1”的旋转过程。然后再通过交流，使学生弄清顺时针旋转和逆时针旋转的含义，明确要想表述清楚指针的旋转，一定要说清“指针是绕哪个点旋转”“是向什么方向旋转”“转动了多少度”这几点。

再如，可以将操作与描述结合起来，让学生在钟表上，边拨指针边用三要素描述其运动过程，体会旋转的含义。

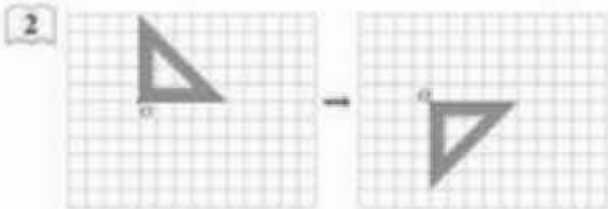
编写意图

(1) 例2借助三角尺在方格纸上的旋转, 让学生初步感知旋转的特征, 为例3的教学作好准备。

教材让学生观察图中旋转前后的三角尺位置变化, 明确图形旋转的特征: 旋转中心的位置不变, 过旋转中心的所有边旋转的方向相同, 旋转的角度也都相同。小精灵提示学生初步发现: 旋转后的三角形的形状、大小都没有发生变化, 只是位置变了。

(2) 例3教学在方格纸上画出简单图形旋转 90° 后的图形。

教材借助前面图形旋转的特征, 让学生交流讨论, 逐步引出画图的方法。只要找到三角形的另两个顶点的位置, 就能确定这个三角形。根据旋转的特点, 对应点到旋转中心的距离不变, 对应点到旋转中心的连线的夹角都是 90° , 确定出顶点的位置。具体的操作让学生自主完成。



如图, 将直角三角尺固定在方格纸上, 像这样在方格纸上每次按顺时针方向旋转 90° , 观察三角尺的位置是如何变化的。

我发现旋转时O点的位置不变。



三角尺的两条直角边各边都绕点O顺时针旋转了 90° 。

你有什么发现?



做一做

再另取一三角尺, 在方格纸上按逆时针方向像上面那样转一圈并说一说。

3 画出三角形AOB绕点O顺时针旋转 90° 后的图形。

绕点O旋转, 点O的位置始终不变, 只要找出点A和点B旋转后的位置——



先画点A', OA'垂直于OA, 点A'与点O的距离是点A与点O的距离——



做一做

你能在方格纸上画出三角形AOB绕点O逆时针旋转 90° 后的图形吗?

54

教学建议

(1) 注意通过例2为例3教学作好准备。

通过例2的教学, 不仅要让学生知道: 旋转前后的图形, 旋转中心的位置不变, 三角形的边都绕O点逆时针旋转了 90° 。还要让学生知道旋转后的三角形的形状、大小不变, 并且引导学生进一步观察发现, 每个顶点旋转前后到O点的距离都没变, 为例3教学画图作好铺垫。

(2) 指导学生探索在方格纸上画旋转图形的方法。

例3可以让学生小组合作完成。如果有困

难, 可以提示只要找到三角形AOB的几个顶点的对应点, 再连线就可以了。在确定对应点的位置的时候, 可以利用已经掌握的图形旋转的特征和性质。把图形的旋转分解为顶点与点O连线的旋转, 先把OA旋转 90° ; 再把OB旋转 90° , 连接AB便可。

还可以先让学生用学具, 比如三角形, 放在方格纸上, 按要求转一转, 再画下来。然后讨论三角形上的两条边转动了哪里, 由此逐步引出画图步骤。

编写意图

(1) 第1题呈现了几个通过旋转运动形成的图案, 让学生根据旋转变换的特征判断该图案分别是由哪个基本图形旋转而成的, 进一步培养学生的空间想象力和思维能力。

(2) 第2题呈现了挂钟的钟摆, 通过描述钟摆旋转的过程, 进一步明确旋转的含义, 认识旋转的要素。钟摆运动是钟摆围绕一个点进行的局部圆周运动, 而且一次摆动既包含了顺时针旋转, 又包含了逆时针旋转。

(3) 第3题利用连环画的形式, 呈现了风车连续旋转运动的过程, 深化对图形旋转的认识, 同时让学生感受数学的美, 体会图形旋转在现实生活中的应用。

(4) 第4题在方格纸上根据左图中的基本图形四边形 $ABCO$, 利用旋转设计出右图中的花朵图案。按要求记录图形旋转的过程, 进一步理解旋转的特点, 体会旋转所创造的美。

练习二十一

1. 下面的图案分别是由哪个图形旋转而成的?



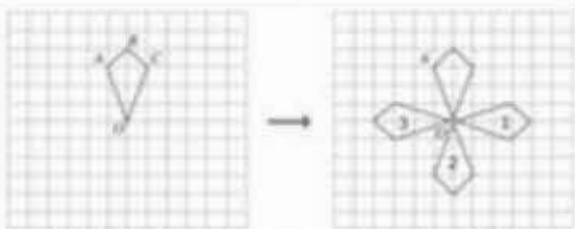
2.



3.



4.



(1) 图形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转 90° , 在右图中标出点 A 的对应点 A' 。
(2) 图形 $OABC$ 绕点 O () 时针旋转 () $^\circ$, 得到图 2。

教学建议

(1) 欣赏并体验旋转在现实生活中的广泛应用, 体会其丰富的文化价值。

学习图形的运动的一个重要目的是使学生能够运用数学的眼光看待现实世界, 能在生活中发现并欣赏旋转运动的应用, 并运用旋转运动的知识分析有关的现象, 进一步体会数学对人类的作用, 体会数学的文化价值。教学时, 要鼓励学生能够用数学语言描述物体的旋转过程, 初步体会图形旋转的基本要素。

(2) 注意知识的科学性。

这部分知识虽然不要求用精确的语言描述

图形旋转的特征, 但也要注意知识的科学性。在小学阶段, 只要求学生能概括出“绕一个点旋转”“向什么方向旋转”“转动多少度”这几点就可以了。同时, 还要避免学生在操作和画图时出现不规范的情况。

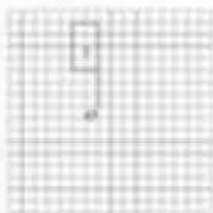
编写意图

(1) 第5题让学生根据不同要求在方格纸上画出将简单图形旋转 90° 后的图形,最后得出风车图案,增加趣味性。

(2) 第6题通过实验发现“旋转对称图形”的特点。这些图形绕它们的中心旋转一定的角度,还与原来图形重合。这里不必让学生了解“旋转对称图形”这个概念,只要学生能用自己的语言描述出图形的这一特征就可以了。

(3) “你知道吗?”介绍了图形的密铺(镶嵌)现象,利用图形的平移、对称和旋转设计镶嵌图案,进一步感受图形变换带来的美感以及在生活中的应用。

5. 按要求画图。

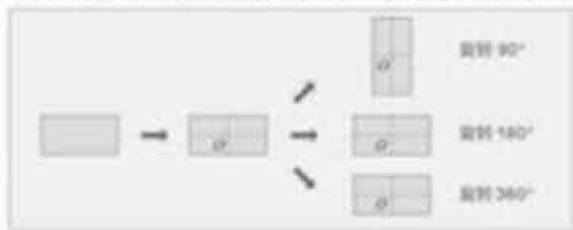


- (1) 把图1绕点O逆时针旋转 90° ,得到图2。
- (2) 把图1绕点O顺时针旋转 90° ,得到图3。
- (3) 把图2绕点O逆时针旋转 90° ,得到图4。
- (4) 把图1、图2、图3、图4都涂上红色,这个图形像什么?

这是上节课中所学风车的图形哦!



6. 如图,长方形的两条对称轴相交于点O,绕点O旋转长方形,你能发现什么?



按上面的方法试一试,你发现下面的图形有什么特点?



数学与艺术

你知道吗?

艺术家们利用几何学中的平移、对称和旋转,设计出了许多美丽的图案。



教学建议

(1) 将想象与操作有机结合,促进空间观念的形成。

第6题教学时,如果学生理解困难,可以先让学生画出每个图形的两条对称轴,确定出中心点O,再让学生想象这个图形在旋转过程中会出现什么现象,发现这些“旋转对称图形”的特点。也可以通过操作帮助学生直观地看到这些现象,教师可以事先为学生准备一张底卡(印有这些图形的硬纸卡)和这些图形卡片,让学生画或折出两条对称轴后确定这些图形的中心点O,再用大头针穿过图形卡片和底

卡上相应图形的中心点O,然后进行旋转。

(2) 抓住本质,加深理解。

如,第5题在探索图形旋转的画法时,引导学生探索如何抓住图形的关键点,把图形的旋转转化为线段的旋转及关键点的旋转。在画图的过程中体会旋转是将一个图形从一个位置变换到另一个位置,不改变图形的形状和大小。

“你知道吗?”可引导学生分析交流这些丰富多彩的镶嵌图案,不管是运用了什么变换,其本质都是把可镶嵌的基本几何图形进行分割后再经过图形变换拼组而成的镶嵌图形。

编写意图

(1) 例4以解决问题的形式,编排了用七巧板拼出一个小鱼图案的活动,让学生探索多个图形拼组的运动变化。

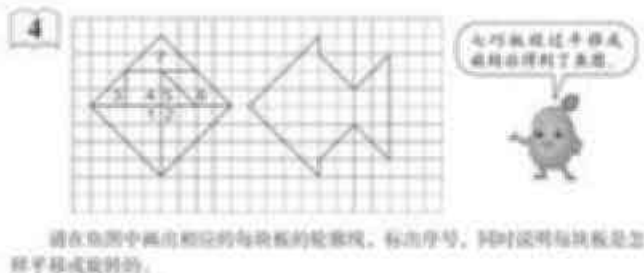
(2) 教材呈现了解决问题的全过程。

“阅读与理解”重在让学生明确要解决的数学问题:一是小鱼图案是如何由七巧板的图形拼组出来的,二是说明每块板是怎样平移或旋转得到小鱼图案的。

“分析与解答”通过对话展现了学生探索解决问题的不同方法。一种是先动手拼拼看,拼出后再看看七巧板是怎样平移和旋转到相应位置的;另一种是直接在小鱼图案上分解,把图案按七巧板的图形进行分解,找出拼组的方案再移动。基本思路都是要先完成小鱼图案的构成,再进行图形的运动。

“回顾与反思”引导学生交流解决问题的方法,体会答案的不唯一性,这里小鱼可以有不同的拼组方案。

(3) “做一做”将打乱的拼图经过平移或旋转还原成原图。培养学生空间想象力和解决问题的实践能力。



教学建议

(1) 经历解决问题的一般过程。

“阅读与理解”要让学生自己学会审题,理解图形问题的情境,获得数学信息,发现要解决的数学问题是什么。

“分析与解答”首先引导学生发现小鱼图只有一个外形的轮廓,要先判断每块板平移或旋转后的位置,也就是找出小鱼的构成方案。然后鼓励学生借助已有知识经验,自主探索解决问题的方案并解决之。当然,也可以放手让学生利用七巧板的学具动手操作,尝试找出解决问题的方法再汇报交流。

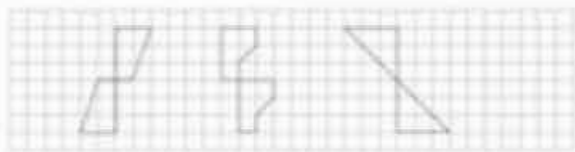
“回顾与反思”鼓励学生回顾解决问题的步骤和方法,用自己的语言总结并简单记录解决问题的方法。

(2) 通过练习积累解决问题的经验,培养推理能力。

“做一做”可以放手让学生尝试运用解决问题的三个步骤完成,将打乱的几幅拼图还原,并利用平移和旋转记录还原步骤。为便于交流,可将拼图标上序号。通过实际操作进一步理解平移和旋转,不仅能增加问题的趣味性,还可以让学生感悟图形运动是可以记录的,体验选取最佳方案的过程,培养学生的推理能力。

练习二十二

1. 观察下面三组图形, 你能发现什么?



(1) 怎样通过平移或旋转使每个图形变成一个正方形?

(2) 通过平移或旋转, 你还能把其他图形分别变成什么图形?

2. 利用图中的七巧板或图形, 通过平移或旋转拼成一个图案。

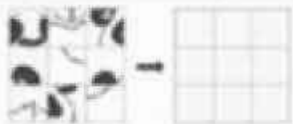


3. 请你用右图在方格纸中拼



出 , 并说一说

你的拼合过程。



本单元结束了,
你有什么收获?

成长小档案



我会画出一个图
形或旋转90°后的
图形了。

利用平移、对称和旋转, 可
以设计出许多美丽的图案呢。



编写意图

(1) 第1题在方格图上呈现了三组图形, 让学生观察发现每组中两个图形相同, 思考经过怎样的运动能拼成一个正方形, 再放手让学生进行开放性的操作活动。

(2) 第2题呈现的是利用七巧板或简单图形, 在方格纸上变换出各种图案, 进一步提高学生的想象力, 发展空间观念。

(3) 第3题呈现了被打乱的熊猫拼图, 还原并利用平移和旋转记录还原步骤, 通过实际操作进一步感知平移和旋转运动。

(4) “成长小档案”旨在帮助学生回顾整理本单元的知识内容和学习体会。一方面, 通过练习, 在学生操作、交流的基础上整理有关旋转的知识, 如描述旋转的特征, 把图形旋转 90° 的画法; 另一方面, 感受学习的价值, 体会所学图形运动在生活中的应用。

教学建议

(1) 加深对图形旋转特征和性质的认识。

练习中, 注意引导学生进一步体会图形旋转的特征。如, 教学第1题, 首先引导学生发现三组图形共同的特点, 是形状大小完全相同, 只是位置和方向不同。其次引导学生先想象该选择哪个图形, 怎样平移或旋转使每组不规则图形通过平移或旋转变成一个规则的正方形。最后逐一通过操作验证是否合理, 并尝试用数学语言描述图形运动的过程。在交流中加深学生对图形旋转的特征及性质的认识。第2题, 可指导学生制作一套七巧板, 熟悉每一块

七巧板的形状, 然后通过旋转、平移拼成各种图案。放手让学生设计, 再进行交流, 以深化对图形运动的理解。

(2) 灵活运用平移和旋转的组合进行图案设计。

灵活运用图形的运动设计图案是一个非常好的实践活动, 可进一步帮助学生理解平移和旋转的性质, 体会其应用价值, 领略图形世界的的神奇, 并充分发挥其个性和创造力。为了能打开学生的思路, 可以先观察现实生活中经过图形运动形成的图案, 以此启发学生设计自己的图案。

二、教学设计或教学片段

课题：图形的旋转

教学设计：汤柳。

教学内容：教科书第 83~84 页内容。

教学目标：

1. 进一步认识图形的旋转，明确含义，感悟特性及性质，会运用数学语言简单描述旋转运动的过程，能在方格纸上画出线段旋转 90° 后的图形。

2. 经历观察实例、操作想象、语言描述、绘制图形等活动，培养学生的推理能力，积累几何活动经验，发展空间观念。

3. 体验数学与生活的联系，学会用数学的眼光观察生活、思考生活，感受数学的美，体会数学的应用价值。

教学重点：通过多种学习活动沟通联系，理解旋转含义，感悟特性及性质。

教学难点：用数学语言描述物体的旋转过程及会在方格纸上画出线段旋转 90° 后的图形。

教学过程：

(一) 创设情境，以旧引新

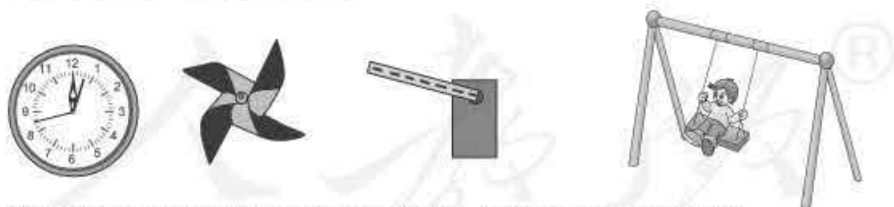
1. 呈现生活实例，引出研究问题。

教师：同学们，在二年级的时候大家已经初步认识过生活中的旋转现象，今天我们就进一步来学习图形的旋转。(板书课题。)

2. 学生举例。

教师：二年级我们初步学习了生活中的旋转现象，能举几个例子吗？

3. 对比风车和钟面，掌握旋转方向。



提问：这四个场景中你能发现有旋转运动吗？它们是怎么旋转的呢？

预设：(1) 钟面上的指针是顺时针旋转的，风车的叶片是逆时针旋转。(板书)

(2) 学生可能不认可道闸(秋千)有旋转现象。

(设计意图：通过课前调研，从学生的问题入手，选取学生熟悉的但又有争议的实例作为研究旋转现象的素材，特别是注意选取旋转角度不是 360° 的实例，如道闸、秋千等，丰富学生的认知，有意识地引导学生探讨。对于“道闸”和“秋千”学生有明显的争议，以此产生认知冲突，引发探究的欲望。顺时针和逆时针方向是学生第一次正式了解，教师以钟面指针和风

车为例，通过让学生观察对比，使学生感受到现实生活中物体旋转是有方向的，认识顺时针和逆时针方向。)

(二) 展开探索，认识旋转要素

1. 借助钟面，明确旋转三要素。

(1) 动态出示指针从“12”旋转到“1”、从“2”旋转到“6”。



甲



乙

提问：甲、乙两个钟面上的指针的旋转过程有什么不同？

板书：角度、起止位置。

甲、乙两个钟面上的指针的旋转过程有什么相同？

板书：方向、中心。

讨论：指针从“12”到“1”，该怎样用语言描述呢？

反馈：首先让几组学生反馈，然后学生互评，完善描述。

(2) 小结：通过描述钟面上指针的旋转过程，总结三要素：中心、方向、角度。

(3) 建立表象，加深理解。

提问：想象一下，指针如果从“6”到“9”，能想象出旋转过程吗？

板书：指针从“6”绕点O顺时针旋转 90° 到“9”。

指针从“6”绕点O逆时针旋转 270° 到“9”。



(4) 解释道闸与秋千的运动（借助钟摆理解）。

(设计意图：在观察的基础上，特别加入空白钟面和指针的教具，请学生先想象，再操作，使学生对旋转要素有了全面的认识。想象与操作有机结合，在操作过程中，鼓励学生能够用数学语言描述物体的旋转过程，初步体会图形旋转的基本要素。同时，借助自制教具——模仿钟摆运动，利用粉笔把钟摆运动的轨迹留下来，帮助学生直观地认识到秋千运动是围绕一个点进行局部圆周运动，而且在一次摆动中既包含了顺时针旋转，也包含了逆时针旋转。)

2. 动手操作，感悟旋转性质。

(1) 线段的旋转。

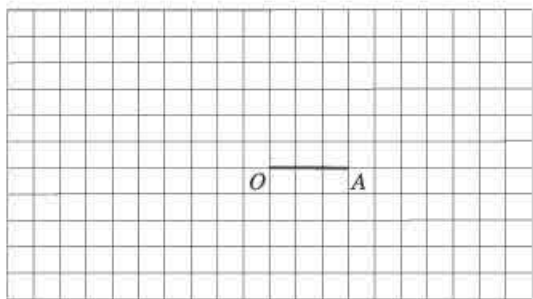
① 模拟操作。

预设：学生可能会选取线段上的端点作为旋转中心。

总结：看来旋转中心可以定在任意一个位置。

②画中理解。

画出线段 OA 绕点 O 逆时针旋转 90° 后的图形。



③辨析深化。

提问：谁愿意介绍一下自己是怎么画的？观察旋转前后的线段，什么变了？什么不变？

辨析：这里还有几份画得不太一样的，我们一起来看看，有什么问题？

（旋转中心错；旋转方向错；线段长度错）

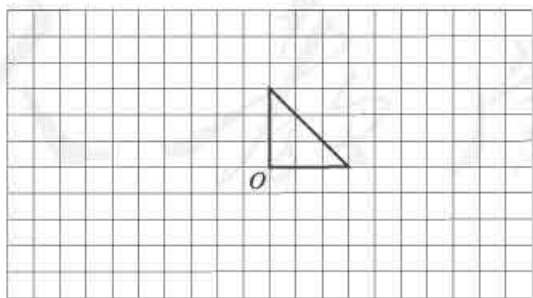
小结：看来在画图的时候一定要注意这三个要素。

（设计意图：线段的旋转是本节课的教学重点，这时已经由生活中的旋转现象上升到图形的旋转。在方格纸上画图，是一种特殊的操作活动，它在图形变换初步认识的教学过程中，具有不可或缺的作用。因为学会画图是学生必须达成的学习目标，同时它又是反映学生是否理解有关概念，掌握有关特征的表现形式与检测手段。这里教师设计在方格纸上画出线段旋转 90° 后的图形，让学生先模拟“转”再“画”，通过操作，看清楚旋转后图形位置，再讨论怎样画，由此可以比较容易找到画图方法。线段的旋转既承载了对旋转要素的深化理解的作用，又为后继续学习图形的旋转打下了坚实基础。）

(2) 三角形的旋转。

①动手操作，感受三角形旋转的过程。

将三角形绕点 O 顺时针方向旋转 90°



先想象旋转过程，再动手操作。

提问：如何确定三角形旋转后的位置？

预设：三角形的两条直角边每条边都绕点 O 顺时针旋转了 90° 。

②教师演示。

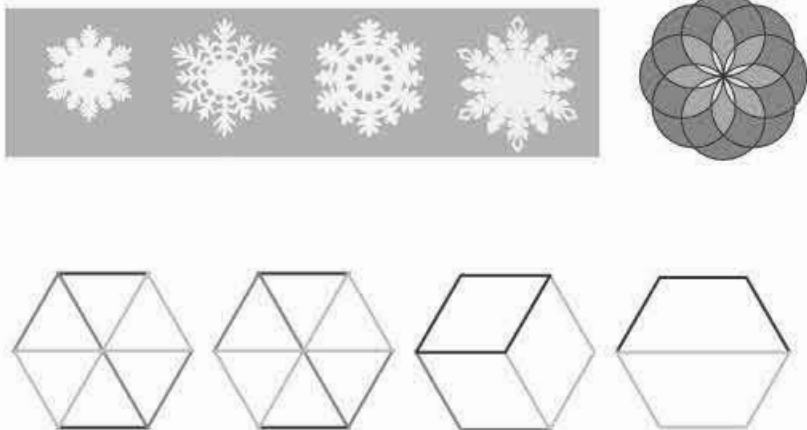
如果继续绕点 O 顺时针旋转 90° ，两次后会旋转成一个什么图案？

学生回答后，课件动态演示风车形成过程。

(设计意图：这里设计了在带有方格软木板上操作小三角形旋转 90° 的活动。首先，请学生想象三角形 AOB 绕点 O 逆时针旋转 90° 后到方格的什么位置。其次，利用三角形学具，在有方格的软木板上操作，对刚才的想象进行验证。最后再次展开想象，如果依次绕点 O 顺时针旋转 90° 三次，最终会旋转成一个什么图案。一方面为下节课学习例 3 作了知识与技能上的孕伏，另一方面将想象与操作结合，有效地激发学生的空间想象力。)

(三) 感受旋转的应用

1. 感受图形旋转产生的美丽图案。



2. 感受图形旋转的应用 (播放视频)。

(设计意图：学习图形的运动的一个重要目的是使学生能运用数学的眼光看待现实世界。在感受旋转的应用的阶段，教师借助信息技术，动态呈现一些基本图形旋转后形成的美丽图形、图案以及生活中的应用，鼓励学生从变换的角度去欣赏，感受其中蕴含的美，体会数学的应用价值。并注意鼓励学生从不同角度观察图形，识别不同的基本图形发生了怎样的变换之后，形成了一个漂亮的图形，体验图形旋转的美妙，同时也激发了学生的创造性思维，为后面利用图形变换自己设计、制作图案作了孕伏。)

三、备课资料

对图形变换概念的理解^①

对于图形变换这部分内容，整个义务教育阶段都不要从比较严格的几何变换定义出发来研究变换的性质，小学生通过操作活动直观感受到，平移就是沿着一定的方向移动了一定的距离；旋转就是绕一个点转动一定的角度，我觉得对于小学生就够了。但是作为老师，有必要较透彻地理解图形变换的有关概念。

1. 什么是变换？

变换是近代数学中的重要基本概念之一。所谓变换是指某个集合中符合一定要求的一种对应规律。就图形的变换来讲，是指如果一个平面图形的每一个点，都对应于该平面内某个新图形的一个点，并且新图形中的每一个点只对应于原图形中的一个点，这样的对应就叫做变换。因为几何图形都是点的集合，所以图形变换可以通过点的变换来实现。

在小学数学中主要引进了平移变换、旋转变换和轴对称变换，这三种变换都是全等变换。相似变换只是在第二学段中有所渗透，如学习比例尺时两个图形按比例放大或缩小，实际上就是一种相似变换。

能够保持图形的形状和大小不变的变换就是全等变换。在全等变换中，原图形任何两点之间的距离，都等于新图形中两对应点之间的距离，所以又称为保距变换。

能够保持图形的形状不变，而只改变图形大小的变换就是相似变换。在相似变换中，原图形中所有角的大小都保持不变，所以又称为保角变换。

全等变换有几种方式，其实可以直观地想一想，两个图形是完全一样的，要由这个图形运动得到那个图形，可以通过怎样的运动。首先可以是平移，平移到一定位置上，或者说对于三角形有一个顶点能够重合了，这时候无非有两种情况：一种情况是两个三角形的三个顶点的顺序是一致的，这时需要经过旋转两个图形就重合了；还有一种情况是顶点的顺序相反，这时需要经过反射（翻折）两个图形就重合了。上面的变换就是我们所说的平移、旋转变换和反射变换，它们是三种基本的全等变换。反射变换有的老师把它叫做轴对称变换，实际上一个图形经过反射变换后得到另一个图形，这两个图形是成轴对称的。

具体的什么叫平移，什么叫旋转，什么叫反射，我们不给出数学上严格的定义，而是直观地给予解释，并指出这些变换的基本要素。

2. 什么是平移变换？

如果原图形中任意一个点到新图形中相对应点的连线，方向相同，长度相等，这样的全等变换称为平移变换，简称平移。也就是说，平移的基本特征是，图形移动前后“每一点与它对

^① 曹培英：用图案激活思维。//《人民教育》编辑部编：小学数学创新性备课，北京：教育科学出版社，2007年版。

应点之间的连线互相平行（或者重合），并且相等”。显然，确定平移变换需要两个要素：一是方向，二是距离。

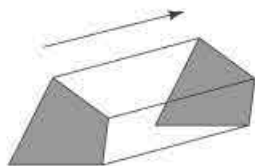


图 1

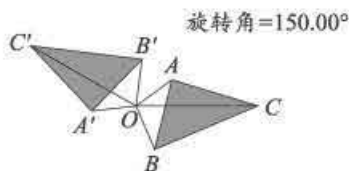


图 2

3. 什么是旋转变换？

如果新图形中的每个点都是由原图形中的一个点绕着一个固定点（叫做旋转中心）转动相等角度得到的，这样的全等变换称为旋转变换，简称旋转。也就是说，旋转的基本特征是，图形旋转前后“对应点到旋转中心的距离相等，并且各组对应点与旋转中心连线的夹角都等于旋转的角度”。显然，确定旋转变换需要两个要素：旋转中心、旋转角（有方向）。

4. 什么是轴对称变换？

如果连接新图形与原图形中每一组对应点的线段都和同一条直线垂直且被该直线平分，这样的全等变换称为轴对称变换，每组对应点互为对称点，垂直平分对称点所连线段的直线叫做对称轴。也就是说，轴对称的基本特征是，“连接任意一组对应点的线段都被对称轴垂直平分”。显然，确定轴对称变换的关键在于找到对称轴。

构成轴对称的图形可以是一个，通常就叫做轴对称图形（如图 3）；也可以是两个，通常叫做这两个图形关于某条直线对称（如图 4）。

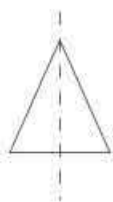


图 3

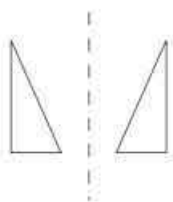


图 4

成轴对称的两个图形，任何一个都可以看作是由另一个图形经过轴对称变换后得到的。一个轴对称图形，也可以看作以它的一半为基础，经过轴对称变换而成的。

我们也可以用更通俗的语言，对轴对称图形做出直观的描述：将一个图形对折，如果折痕两边的图形完全重合，这个图形就叫做轴对称图形，折痕（所在直线）叫做对称轴。当然这种描述偏重于图形性质的刻画，运动变换观点的渗透就不那么突出了。

5. 平移变换、旋转变换与轴对称变换有什么联系？

前面，我们在描述三种全等变换时，特别强调它们各自的基本特征，以便于正确识别和区分。那么，这三种全等变换又有什么联系呢？

首先这三种变换都能保持图形的形状、大小不发生变化，这是它们最主要的共同点。其次，如果连续进行两次轴对称变换，在一般情况下：

(1) 当两条对称轴平行时，那么这两次轴对称变换的最后结果相当于一次平移变换，平移

的方向与对称轴垂直，平移的距离为两条对称轴之间距离的2倍。简略地说，两次翻折（对称轴互相平行）相当于一次平移。

(2) 当两条对称轴相交时，那么这两次轴对称变换的最后结果相当于一次旋转变换，旋转中心为对称轴交点，旋转角度为两条对称轴夹角的2倍。简略地说，两次翻折（对称轴相交）相当于一次旋转。

上面两条结论是针对图形的一般情况来说的。有些特殊的图形，也可能只经过一次轴对称变换，就能达到平移或旋转的效果。例如图5中“带烟囱的房子”。

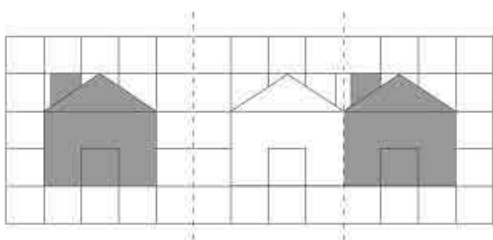


图5

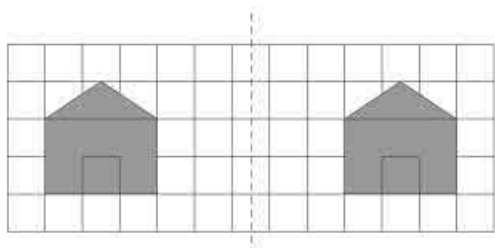


图6

经过两次轴对称变换（对称轴平行，且相距4格），相当于一次向右平移8格。图6中“没有烟囱的房子”只要经过一次轴对称变换就相当于平移了。

此外，上面两条结论反过来同样成立。即一次平移变换可以由两次轴对称变换（对称轴互相平行）代替；一次旋转变换，也可以由两次轴对称变换（对称轴相交）替换。它们的运动方式不同，但效果相同。

在小学数学教材中，有些图案可以用不同的变换来生成。例如图7的四叶图案，其中的每一片叶，既可以由相邻的那片叶经过轴对称变换得到，也可以由相邻的叶片旋转 90° 得到。

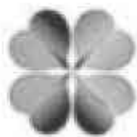


图7

认识三种全等变换之间的联系，也有助于我们理解在数学中，研究图形变换的关注点，主要在于变换前后图形的相对位置关系及其对应点的关系。

6. 关于摩天轮问题。

摩天轮在旋转，但上面的座舱及里面的人始终头朝上，脚朝下，是不是在平移呢？我们可以依据平移的基本特征，画出运动过程中任意两个位置上座舱上下部中点的连线（如图1），它们平行并且相等，所以是平移。

那么座舱及里面的人是否在旋转呢？依据旋转的基本特征，画出座舱下部中点与摩天轮旋转中心的连线（如图2），它们的长明显不相等。

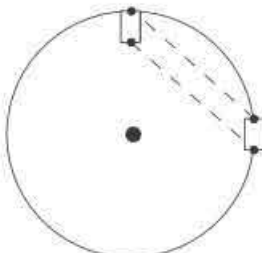


图8

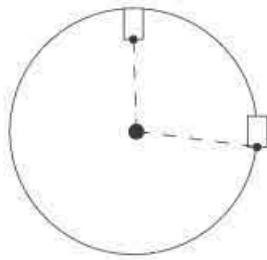


图9

明明摩天轮在旋转，而座舱与里面的人却不是旋转，是在平移，这是怎么回事呢？原来，摩天轮在带动座舱顺时针旋转的同时，地球的引力使得挂在吊钩上的座舱也在逆时针细微地转动，从而使座舱与里面的人始终保持向上的方向，并且座舱与人上的每个点都移动相同的距离。其实，数学中所说的旋转、平移，主要考察运动开始、终止状态下两个静止图形对应点之间的关系，它与物理学中研究物体“转动”“平动”的侧重点有所不同。


四、评价建议与评价样例

(一) 评价建议

本单元知识与技能的评价应围绕以下几点：认识图形的旋转，能在方格纸上画出简单图形旋转 90° 后的图形，会运用旋转运动设计图案。

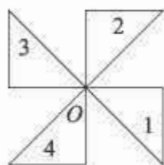
(二) 评价样例


1. 填空。

- (1)  () kg 物品可以使左图中秤盘上的指针沿顺时针方向旋转 90° 。

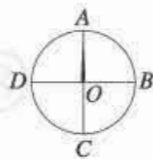
(2) 先观察右图，再填空。

- ① 右图是利用一个基本图形经过 () 变换得来的，在图中用阴影表示出这个基本图形。
 ② 图 1 绕点 O 顺时针旋转 90° 到达图 () 的位置；
 图 1 绕点 O 逆时针旋转 90° 到达图 () 的位置。



- ③ 右图是把  旋转了 () 次。

- (3) 指针从 A 绕点 O 顺时针旋转 () $^\circ$ 到 B ；
 指针从 A 绕点 O 逆时针旋转 () $^\circ$ 到 D 。

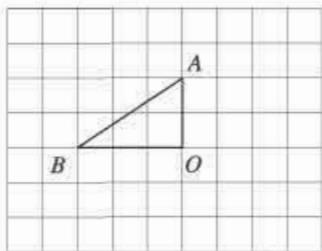


2. 选择正确答案的序号填在括号里。

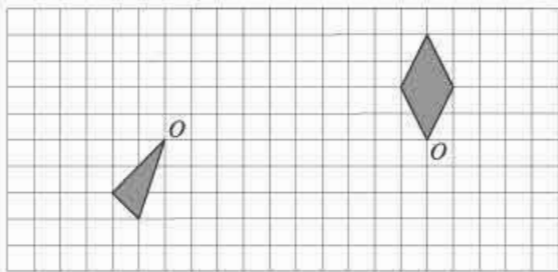
- (1) 把一个图形绕某点顺时针旋转 30° 后，所得的图形与原来的图形相比较 ()。
 ① 变大了 ② 大小不变 ③ 变小了 ④ 无法确定大小是否变化
- (2) 从中午 12 时到以下每个时刻止，钟表的时针按顺时针方向，分别旋转了多少度？
 到下午 1 时，旋转了 ()；到下午 3 时，旋转了 ()；
 到下午 6 时，旋转了 ()；到深夜 12 时，旋转了 ()。
 ① 360° ② 180° ③ 90° ④ 30°



3. 画出三角形 AOB 绕点 O 逆时针旋转 90° 后的图形。



4. 以点 O 为旋转中心，利用旋转变换设计图案。



人教版®

第六单元 分数的加法和减法

一、教材说明和教学建议

(一) 教学目标

1. 理解分数加、减法的含义和算理，掌握分数加、减法的计算方法，并能正确地计算出结果。
2. 理解整数加法运算定律对于分数加法仍然适用，并会运用这些运算定律进行一些分数加法的简便运算，进一步提高运算能力。
3. 能用分数加、减法解决简单的实际问题，体会数学知识的应用价值。

(二) 内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

分数的加法和减法是数学运算的重要基础知识之一，能否掌握分数加、减法的计算方法是评价学生是否拥有良好的运算能力，拥有良好的数感的一项重要指标。

本单元学习的内容有：同分母分数加、减法，异分母分数加、减法，分数加减混合运算以及整数加法的运算定律推广到分数。这些内容是在学生掌握了整、小数加、减法的意义及其计算方法，分数的意义和性质，以及三年级上册学习的简单的同分母分数加、减法的基础上进行教学的。具体编排结构如下：



这些内容是按数学学习的逻辑结构编排的。先学习同分母分数加、减法，理解相同单位的分数相加、减的算理，为异分母分数加、减法的学习，理解算理搭好阶梯；再学习异分母分数加、减法，使学生形成基本的分数加减运算能力；最后学习加减混合运算，并将整数加法运算

定律推广到分数,进一步理解运算定律,培养计算的灵活性。

2. 教材编排特点。

(1) 淡化意义,强化算理,注重算用结合。

本单元内容在编排上利用类推来理解分数加、减法的含义,淡化了分数加、减法意义的教学要求。教材指出:“结合上面的问题,再想想整数加、减法的含义,你能说出分数加、减法的含义吗?”引导学生借助整数加、减法的含义理解分数加、减法的含义。

(2) 在同一例题中同时展开分数加法和减法的教学。

无论是同分母分数加、减法,还是异分母分数加、减法,教材都只安排了一个例题。这样有利于对分数加、减法含义的理解,同时提高计算教学的有效性。

(3) 引导学生在探究中概括分数加、减法的计算方法。

根据分数加、减法的含义和分数的基本性质,概括出具有一般性的计算方法,既是计算教学的一个重要任务,也是数学自身发展的需要。教材引导学生在自主探究中逐步概括出分数加、减法的计算方法。如,第1节例题最后引导学生:“观察两个算式,你能发现什么共同点吗?”让学生在探究、交流中总结出同分母分数加、减法计算的一般方法。在第2节例题最后,让学生通过探究、讨论,概括出异分母分数加、减法计算的一般方法。又如,在第3节例1的教学中,教材提供了两种不同的算法后提问:“说说你是怎样计算的?你喜欢哪种方法?”让学生在比较中体会算法的多样性与合理性,学会合理、灵活地进行计算,培养计算能力。

(4) 增加解决问题的例题,培养学生解决实际问题的能力。

本单元结合生活实际安排了一个“喝牛奶”的实际问题,让学生经历解决问题的全过程,特别是灵活运用所学的已有知识来解决问题。教材重点突出借助几何直观解决问题的策略。在解决第二次喝了多少杯纯牛奶,也就是计算半杯纯牛奶的一半是多少杯的时候,由于学生还未学习分数乘法,不能直接计算 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ 得多少,所以教材利用画图的方式,借助几何直观,从分数的意义的角度来解决。这也为后面学习并理解分数乘法的意义打下良好的基础。

(三) 教学建议

1. 引导学生认识分数加、减法与整数加、减法的内在联系。

分数加、减法的含义与整数加、减法的含义是完全相同的。它们的计算方法从表面上看截然不同,但实质上有一个共同的特点,就是“相同单位的数才能相加、减”。从这个意义上讲,不论是整数还是分数的加、减法,都要统一成相同的单位后才能进行计算。当分数单位统一后,分数的加、减运算也就归结为整数的加、减了。如,第2节中的例1(1): $\frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} = \frac{6+5}{20} = (6+5) \text{个} \frac{1}{20}$ 。上述过程中,先将异分母分数转化为同分母分数,然后用整数加法的方法将分子相加,即相同单位的数相加,得出最后的和。

因此,教学中,教师应有意识地引导学生沟通分数加、减法与整数加、减法之间的联系,紧扣学生经验中“相同单位的数才能相加、减”的算理,逐步概括出分数加、减法的计算

方法。

2. 重视对算理的分析，在理解算理的基础上掌握算法。

抽象概括出分数加、减法的计算方法，是本单元教学的重点。要让学生掌握分数加、减法的计算方法，必须处理好算理与算法的关系。教学时，应通过观察、分析、说理、交流等活动，让学生经历用算理理解并发现算法的过程。使学生明白：计算同分母分数加、减法时，“分母不变”是因为分母相同，也就是分数单位相同，所以只用分子相加、减就可；计算异分母分数加、减法时，只要将异分母分数转化为同分母分数，也就是转化为相同的分数单位就可以了。这样，不但使学生明白算理是算法的灵魂，而且避免了机械的、单纯的记忆法则的弊端，达到在概括计算法则的过程中理解算理、掌握算法的目的。

为帮助学生更好地理解分数加、减法的算理，要重视数形结合。教学时，可以结合图示让学生理解分数加、减法的算理，即相同的分数单位相加、减。尤其是异分母分数加、减法，为什么要转化成同分母分数，更应通过数形结合，将分的份数不同（也就是分数单位不同）的图形，转化为份数相同的图形，帮助学生理解算理，掌握算法。

3. 建议用7课时教学。

人教版®

（四）具体内容的教材分析和教学建议

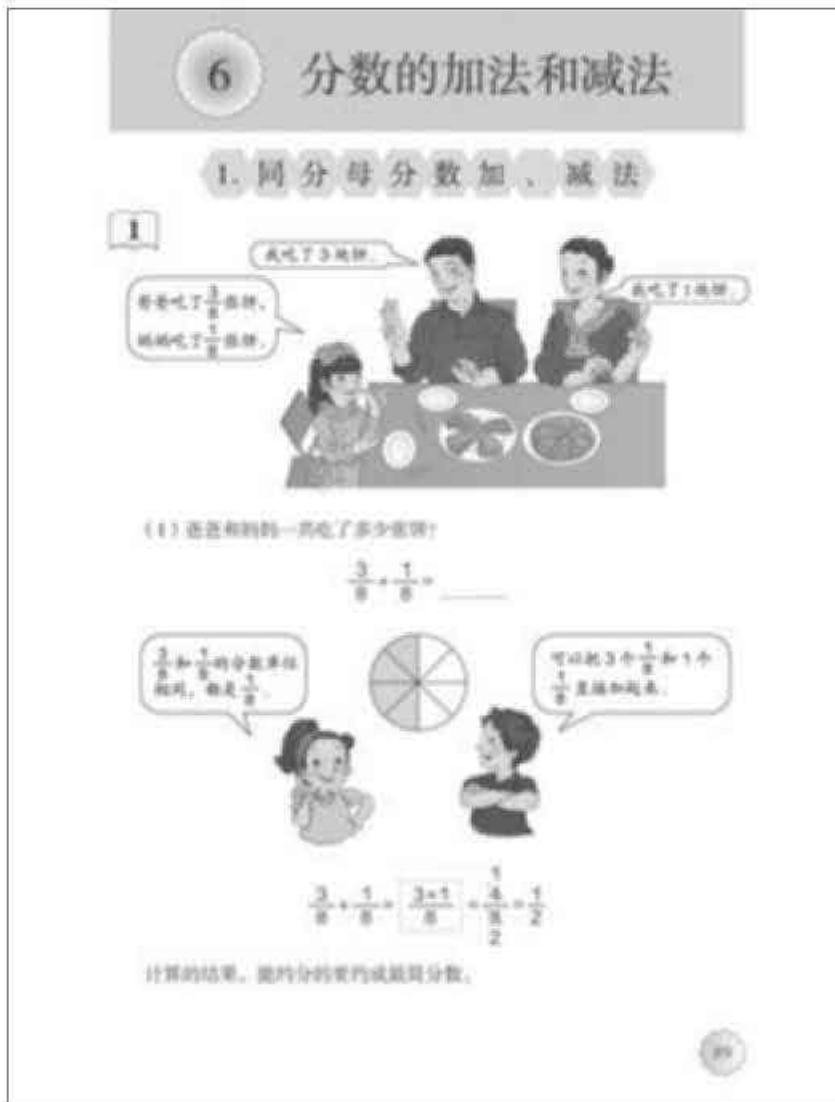
编写意图

（1）例1教学分数加、减法的含义，同分母分数加、减法的计算方法。

（2）教材选择学生熟悉的日常生活（分吃圆形大饼）为素材，引出两个问题，分别教学同分母分数加法和减法。

（3）第（1）题教学同分母分数加法。教材让学生结合直观图示（圆形图）理解同分母分数相加的算理：两个分数单位相同的分数可以直接相加。正如小男孩所说“可以把3个 $\frac{1}{8}$ 和1个 $\frac{1}{8}$ 直接加起来”，并写出计算过程。在此基础上，再给出规范书写过程，其中，虚线框中的一步计算熟练后可以省略。

结合直观图，使学生清楚地看到， $\frac{4}{8}$ 是 $\frac{1}{2}$ 。由此引出：“计算的结果，能约分的要约成最简分数。”



6 分数的加法和减法

1. 同分母分数加、减法

1

爸爸吃了 $\frac{3}{8}$ 张饼，妈妈吃了 $\frac{1}{8}$ 张饼。

妈妈吃了 $\frac{1}{8}$ 张饼。

爸爸和妈妈一共吃了多少张饼？

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$$

$\frac{3}{8}$ 和 $\frac{1}{8}$ 的分数单位相同，都是 $\frac{1}{8}$ 。

可以把3个 $\frac{1}{8}$ 和1个 $\frac{1}{8}$ 直接加起来。

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

计算的结果，能约分的要约成最简分数。

教学建议

（1）充分利用教材提供的生活素材。

教材提供的素材是学生日常生活中常见的事例，体现计算是因解决实际问题的需要而产生的。同时，圆形图示也便于学生动手操作和教师的直观演示，能更直观、浅显地帮助学生理解算理。教学时，应充分利用教材提供的这一素材，引导学生从生活情境入手，提出相应的数学问题，引入分数加法和减法的学习。当然，也可根据当地的实际，选择儿童易于接受的其他素材来组织学习活动。

（2）充分经历计算、说理的全过程。

学生已经会计算简单的同分母分数加、减法，这里重点要让学生结合分数的意义理解算理，进而总结一般算法。教学时，可放手让学生自主列式、尝试计算，注意结合直观图示引导学生从分数意义的角度来理解算理，也就是明确“分数单位相同的分数可以直接相加”。从而实现由原来借助感性经验上升到理解算理的理性认识的飞跃。

接下来再指导完成规范的书写过程，结合直观图让学生体会约分的合理性和简洁性，并明确今后计算的结果都要求化为最简分数。

(2) 爸爸比妈妈多吃了多少蛋糕?



结合上面的问题,再想想分数加、减法的意义,你能说出分数加、减法的含义吗?

观察两个算式,你能发现什么共同点吗?

请你概括同分母分数加、减法的计算方法。

同分母分数相加、减,分母不变。

只把分子相加、减。

做一做

1. 列式并计算。



2. 计算。

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = & \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = & \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = & 4 + \frac{1}{4} = \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = & \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = & \frac{7}{9} - \frac{2}{9} = & 1 - \frac{11}{30} = \end{array}$$

编写意图

(1) 第(2)题教学同分母分数减法。有了学习同分母分数加法的经验,这里直接提出“ $\frac{3}{8}$ 和 $\frac{1}{8}$ 可以直接相减吗”,让学生在理解算理的基础上,自主计算。引导学生说明算理和计算结果时,还可以借助直观图示帮助理解并加以验证。同样,计算的结果也要化为最简分数。

结合例题和整数加、减法的含义,让学生说出分数加、减法的含义。

(2) 最后,让学生通过合作交流,集中集体智慧,把两个算式的共同点找出来,然后用简洁的数学语言概括出同分母分数加、减法的计算法则。

(3) “做一做”第1题,配合直观图,进一步加深对同分母分数加、减法算理的理解。第2题,巩固同分母分数加、减法的计算方法。

教学建议

(1) 在自主探索中理解分数加、减法的含义,掌握计算方法。

有了同分母分数加法的计算经验,教学中可以放手让学生自主探索减法的计算方法。同样,关注学生对算理的理解,特别是从分数意义的角度明确“分数单位相同的分数可以直接相减”。有困难的可借助直观图,计算后也可以通过直观图示进行检验。

之后,结合对例题题意的理解和问题的解决,初步理解分数加、减法的含义。分数加法的含义与整数加法的含义相同,都是把两个或

两个以上的数合成一个数的运算。分数减法的含义,同样也是已知两个数的和与其中一个加数,求另一个加数的运算。

(2) 引导学生概括同分母分数加、减法的计算方法。

完成例1教学后,可以安排一组同分母分数加、减法的练习。在此基础上,组织学生分组观察、发现、讨论和交流同分母分数加、减法计算的共同点,然后归纳、概括出同分母分数加、减法的计算法则。注意引导学生用简练、准确的数学语言进行概括。

编写意图

(1) 第 1、2 题,是同分母分数加法和减法的巩固练习。

(2) 第 3 题,是同分母分数加、减法的变式练习,有利于沟通加减法之间的关系。

(3) 第 4 题,让学生把得数相等的算式填在相应的格子中。一方面培养口算能力;另一方面培养学生的数感。

(4) 第 5 题,是利用分数加、减法知识解决实际问题的练习。这里的单位“1”是全校的学生总人数,表中的分数表示各年级人数占全校总人数的几分之几。第(1)题可以用连减的方法,学生也可以用自己的方法。第(3)题鼓励学生自己发现并提出数学问题。

练习二十三

1. 计算。

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{12} \quad \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \quad \frac{7}{6} + \frac{7}{6} \quad \frac{9}{25} + \frac{6}{25}$$

$$\frac{2}{8} + \frac{3}{8} \quad \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \quad \frac{10}{33} + \frac{1}{33} \quad \frac{15}{18} + \frac{9}{18}$$

2. 计算。

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \quad \frac{14}{15} - \frac{4}{15} \quad \frac{9}{10} - \frac{7}{10} \quad \frac{11}{14} - \frac{5}{14}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{8} \quad \frac{7}{6} - \frac{1}{6} \quad \frac{17}{18} - \frac{5}{18} \quad \frac{19}{20} - \frac{7}{20}$$

3. 填空。

$$\frac{1}{13} + \frac{7}{13} = () \quad \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = () \quad \frac{7}{17} + \frac{8}{17} = ()$$

$$() - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \quad \frac{7}{5} + () = \frac{13}{5} \quad \frac{7}{5} - () = \frac{3}{5}$$

4. 通过口算把算式填在右边的方框里。

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \quad \frac{7}{8} - \frac{3}{8} \quad \frac{5}{16} + \frac{3}{16}$$

$$\frac{7}{12} + \frac{1}{12} \quad \frac{8}{9} - \frac{2}{9} \quad \frac{14}{15} - \frac{4}{15}$$

$$\frac{7}{18} + \frac{5}{18} \quad \frac{17}{12} - \frac{11}{12}$$


5. 新风小学各年级学生人数分布情况如下。

一	二	三	四	五	六
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	()

(1) 六年级学生人数占几分之几?
 (2) 一、二年级学生人数共占几分之几?
 (3) 你还能提出其他问题并解答吗?

教学建议

(1) 结合例题教学,有针对性地安排练习。

第 1、2 题分别是同分母分数加法和减法的专项练习,可以让学生独立完成,在汇报交流中应选取 2~3 题让学生说出计算过程。同时提醒学生注意,计算的结果是否化成最简分数。

(2) 注意沟通加减法的关系。

如,第 3 题,在讲评 $() - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

$\frac{7}{5} - () = \frac{3}{5}$ 时,可以让学生说一说是依据什么关系进行计算的。这样,不仅沟通分数加、减法之间的联系,而且也有利于培养学生的数感。

再如,第 5 题,可以放手让学生用自己喜欢的方法解决,如可以先把 5 个分数加起来得 $\frac{12}{15}$,再用 $1 - \frac{12}{15}$;或想 $\frac{12}{15} + () = 1$ 。也可以有其他方法,但要抓住时机,让学生体会加减法关系。

编写意图

(1) 第6、7题是同分母分数的连加、连减专项练习。

(2) 第8题,综合应用分数大小比较和同分母分数加、减法的知识来解决问题。

(3) 第9、10题是活动题,具有一定的开放性。第9题可以组成同分母分数加、减法算式,也可以组成同分母分数的连加、连减算式。第10题是有趣的接龙游戏,也有利于培养思维的灵活性,提高口算能力。

(4) 第11题是分数加、减法的实际应用。这里可借助直观帮助理解题意,达成问题的解决。

6. 计算。

$$\frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9}$$

$$\frac{6}{11} + \frac{3}{11} + \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{7}{10} + \frac{1}{10} - \frac{3}{10}$$

$$\frac{11}{6} - \frac{7}{6} - \frac{1}{6}$$

$$1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

7. 调查小学图书馆中各类图书情况如右图。

(1) 社会科学、自然科学和文艺类图书共占图书总量的几分之几?

(2) 其他图书占图书总量的几分之几?



8. 在○里填上“>”“<”或“=”。

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} \bigcirc \frac{9}{10} - \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} \bigcirc \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{3}{14} - \frac{6}{14} \bigcirc \frac{3}{20} + \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{12} + \frac{5}{12} \bigcirc \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$$

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \bigcirc \frac{4}{11} + \frac{7}{11}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \bigcirc 3 + \frac{1}{3}$$

9. 用分母相同的分数组成算式并计算。



10. 游戏接龙。



11. 有红、黄、蓝三条丝带,红丝带比黄丝带长 $\frac{7}{20}$ 米,蓝丝带比黄丝带短 $\frac{3}{20}$ 米,红丝带与蓝丝带相差多少米?

教学建议

(1) 同分母分数连加,引导学生用直接相加的方法计算。

如, $\frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9}$ 。展示学生的不同算法,

如先算 $\frac{1}{9} + \frac{5}{9} = \frac{6}{9}$,再算 $\frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$;或算

$\frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1+5+2}{9} = \frac{8}{9}$ 。通过对比让学生

体会哪种方法比较方便。

(2) 注意让学生展示多种解题思路。

如,第8题。解答“ $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} \bigcirc \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ ”

时,学生可能这样思考: $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8}$, $\frac{3}{4} -$

$\frac{1}{4} = \frac{2}{4}$,因为 $\frac{2}{8} < \frac{2}{4}$ (两个同分子分数比大

小,分母大的分数反而小),所以 $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} < \frac{3}{4} -$

$\frac{1}{4}$,这里并不要求约分后再比较。

第9题,提醒学生认真审题,先看清楚“有几组分母相同的分数?各有几个?”然后再组成不同的算式进行计算。同时注意结合分数与除法的关系理解分子为0的分数都等于0。

编写意图

(1) 本小节教学异分母分数加、减法。这也是本单元学习的重点。教材特别突出转化的思想,即利用通分将异分母转化为同分母来计算。

(2) 教材以生活垃圾分类为素材引出两个问题,分别教学异分母分数加、减法,并适时对学生进行保护环境的教育。

(3) 第(1)题教学异分母分数加法。小精灵的提示“你能用学过的知识解决吗?”实际上是给学生指明探索的方向:转化为学过的知识来解决。学生经过交流发现:分数分母不同,不能直接相加,利用通分转化为同分母就能相加了。从而明确异分母分数加法的计算方法。同时,教材呈现了直观图和对应的算式,帮助学生经历从直观到抽象的思维过程,进一步理解异分母分数加法的算理。接下来的计算过程就顺理成章了。

(4) “做一做”巩固异分母分数加法的计算方法,还可适当补充需要对结果进行约分的算式。

2. 异分母分数加、减法

1 人们在日常生活中产生的垃圾叫做生活垃圾。

(1) 纸屑和废金属等是垃圾回收的主要对象,它们在生活垃圾中共占几分之几?



你能用学过的知识解决吗?



$$\frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$\frac{3}{10}$ 和 $\frac{1}{4}$ 的分母不同,也就是分数单位不同,不能直接相加,怎么办?



我们可以把它们通分,转化成同分母分数再相加。

分母不同的分数,要先通分才能相加。



$$\frac{3}{10} + \frac{1}{4}$$



$$\frac{6}{20} + \frac{5}{20}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} = \frac{6+5}{20} = \frac{11}{20}$$

做一做

计算。

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{8}$$

教学建议

(1) 注重转化思想方法的培养。

异分母分数加、减法,重点是让学生经历将新知转化为旧知的过程。因此,教学中应注重转化思想的培养。让学生体会面对未知的问题,应考虑如何转化为已知的问题,即考虑将异分母分数加法转化为已知的同分母分数加法来计算。

(2) 利用直观图,帮助学生理解算理。

对于那些抽象思维水平不够的学生,借助直观图理解算理是必要的。特别是异分母分数为什么不能直接相加,仅凭“分数单位不同不

能相加”来说明还不够。利用直观图示,看出两个图形都变成由若干个大小一样的小扇形组成的图形来表示,就可以相加了。直观、明了,使学生既理解了算理,又掌握了将异分母分数转化为同分母分数的方法——通分。

同样,对于能抽象体会转化思想的学生,可以利用直观图进一步验证自己的想法,加深对算理的理解。

(2) 电脑写数还是食品写数多？它们分别占生活垃圾分类总量的几分之几？

$\frac{3}{10} > \frac{3}{20}$ ，所以电脑是 $\frac{3}{10}$ 。

$\frac{3}{10} - \frac{3}{20} = \frac{1}{10}$



大家讨论一下，异分母分数加、减法怎样计算呢？



异分母分数相加、减，先_____，然后按照同分母分数加、减法进行计算。

做一做

1. 先计算，然后在后两题进行验算。

$\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$

$\frac{5}{12} + \frac{1}{6}$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{24}$

$\frac{5}{12} - \frac{1}{4}$

$\frac{9}{10} - \frac{2}{5}$

$\frac{5}{7} - \frac{1}{7}$

分数加、减法的验算方法与整数加、减法的验算方法相同。



2.



妈妈用黄豆面和玉米面粉做饼，玉米面粉用了 $\frac{4}{5}$ kg，黄豆面用了 $\frac{3}{4}$ kg，用的玉米面粉比黄豆面多多少千克？玉米面和黄豆面一共用了多少千克？

编写意图

(1) 第(2)题，教学异分母分数的减法。教材借助学习异分母分数加法的经验，突出知识的迁移类推，让学生自主探索计算方法。

(2) 教材让学生在比较分数大小的基础上列出减法算式。接下来，教材不再给出直观图，而是让学生利用加法的经验，进一步抽象地理解异分母分数的减法也要先通分，转化为同分母分数再相减。同样，有必要的，也可以借助直观图帮助理解或者加以验证。

(3) 接下来，结合异分母分数加、减法问题的解决，教材让学生通过讨论、交流、总结、概括出异分母分数加、减法的计算法则。

(4) “做一做”第1题巩固异分母分数加、减法的计算方法，同时培养验算的意识。第2题应用分数加、减法解决实际问题。

教学建议

(1) 通过迁移、类推学习减法。

由于学生有了同分母分数加、减法和异分母分数加法的学习经验，教学时要注意引导学生通过迁移类推，自主探索异分母分数减法的计算方法。让学生通过交流加深认识到：分数单位相同才能相减，异分母分数要转化为同分母分数来计算，转化的方法是通分。使学生在理解算理的基础上掌握计算方法。

(2) 加强计算能力的培养。

异分母分数加、减法的教学，要加强计算能力的培养。一方面，安排相关练习活动后，

组织小组讨论、交流异分母分数加、减法的计算方法，并概括总结出异分母分数加、减法的计算法则。

另一方面，结合“做一做”的相关练习，根据加减法的相互关系，开展分数加、减法的验算。让学生感受到分数加、减法的验算与整数加、减法的验算方法相同。从而提高计算的准确性，培养学生的计算能力。

编写意图

(1) 第1题是异分母分数加、减法的巩固练习。

(2) 第2题是同分母、异分母分数加、减法的变式练习。需要逆向思考,要根据得数确定运算符号。

(3) 第3题是异分母分数加、减法的实际应用,提高学生解决实际问题的能力。学生可以分步计算,也可以列出连加算式进行计算。

(4) 第4题是异分母分数加、减法与解方程的综合练习,以此提高学生综合运用知识的能力。

(5) 第5题是异分母分数加、减法的判断练习。通过辨析,进一步明确异分母分数加、减法的计算方法。

(6) 第6题是通过计算探索规律的练习。这里的分数分母都是互质数,分子都是1。8道题中有7道是相邻的两个自然数,突出相邻两个自然数一定是互质数的规律。计算时,只需将分母相乘的积作分母,分母相加(减)的结果作分子,就可算出得数。通过练习拓展学生的计算技能。

教学建议

(1) 根据分数的特点灵活计算。

在计算异分母分数加、减法时,要引导学生认真审题。通过观察两个分母的特点,寻找它们的最小公倍数,这样既能提高通分的速度,又能提高计算的准确性。如第1题,两个分数的分母是互质数的就有5道,知道两数互质,利用前面学习的经验找最小公倍数就十分方便了。又如第3题,学生列出综合算式 $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{10}$ 时,可以分步计算,也可以一次通分

练习二十四

1. 计算。

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{6} =$$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{6}{7} - \frac{2}{3} =$$

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{9} =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{5}{7} - \frac{1}{5} =$$

2. 在○里填上适当的运算符号。

$$\frac{5}{8} \bigcirc \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{16}{24} \bigcirc \frac{10}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{10} \bigcirc \frac{2}{10} \bigcirc \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{9} \bigcirc \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{3} \bigcirc \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{2}{3} \bigcirc \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \bigcirc \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \bigcirc \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

3. 春天到了,农民伯伯给果树浇水。第一天上午浇了所有果树的 $\frac{1}{4}$,下午浇了 $\frac{3}{8}$,第二天上午浇了 $\frac{3}{16}$,一共浇了所有果树的几分之几?还有几分之几没浇?



4. 解下列方程。

$$x + \frac{3}{7} = \frac{3}{4}$$

$$x - \frac{5}{12} = \frac{2}{8}$$

$$x - \frac{5}{6} = 1$$

$$\frac{3}{5} + x = \frac{3}{5}$$

5. 下面的计算对吗?不对的在后面把式改正来。

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9} \quad ()$$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{7}{12} \quad ()$$

$$\frac{7}{10} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \quad ()$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{13}{14} \quad ()$$

6. 先计算,再想一想怎样算比较快。

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} =$$

直接计算。找最小公倍数时,可引导学生利用不同的方法(包括短除法)求最小公倍数。当然,这个不作统一要求。

(2) 重视思考过程的引导,提高分析、解决问题的能力。

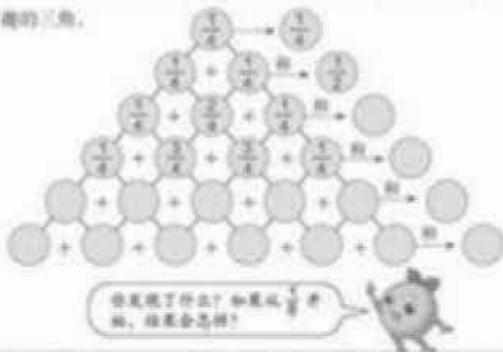
计算不仅要知其然,而且要知其所以然。如,第2题通过结果推出运算符号,可以先让学生尝试练习,再交流解题的基本思路:先将题中的三个分数转化为同分母分数,再观察等号两边分数之间的关系,从而确定是加法还是减法。再如,第4题练习时,要让学生说明是根据什么性质来解方程的,沟通所学知识之间的联系,提高学生解决问题的能力。

7. 妈妈买了一些毛线,给爸爸织毛衣用去了 $\frac{7}{10}$,给红红织手套用去了 $\frac{1}{20}$,你能提出什么数学问题并解答吗?

8. 我来做你来算。



9. 有趣的三角。



10. 调查班里同学出生月份的情况。

季度	人数	占总人数的几分之几
第一季度(1, 2, 3月)		
第二季度(4, 5, 6月)		
第三季度(7, 8, 9月)		
第四季度(10, 11, 12月)		

- 用条形统计图表示你调查的数据。
- 用分数解释你调查的结果。
- 你还能提出其他数学问题并解答吗?

编写意图

(1) 第7题是缺少问题的开放题,让学生自己提出问题并解答,培养发现问题、提出问题的能力。

(2) 第8题,是分数加、减运算的游戏活动,可由两人合作完成,也可小组或全班合作完成。此游戏活动主要是口算练习,因此,自制卡片中的分数不要超过本单元分数范围。

(3) 第9题是探索规律、激发兴趣的练习。这是根据我国南宋时期的数学家杨辉所描绘的一张数图表(“杨辉三角”)改编的。

(4) 第10题是一个实践活动。复习统计的基本方法,让学生在收集数据、整理、描述和分析数据的过程中进一步形成统计观念,形成用数据分析问题的意识。并为后面学习扇形统计图作准备。

教学建议

(1) 注重练习安排的层次性和开放性。

教材通过第7题开放性提问与问题的解答,第8题开放性的口算游戏,激发学生计算的兴趣,提高灵活解题能力。这类题目可以安排在基本练习之后,且要关注学生的参与面,设计好活动的层次与形式,通过不同类型的数学问题与活动,让不同层次的学生各显其能,增强学习的自信心。

(2) 以数学经典为导引,激发学习的兴趣。

如练习第9题时,先介绍“杨辉三角”,并让学生算一算表中每一横行各数的和(1,

2, 4, 8, 16, …),概括出这一串和有什么规律,然后将表

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5	1

中的“1”都换成“ $\frac{1}{4}$ ”,看看这个规律还存在吗,换成 $\frac{1}{8}$ 呢?以加深学生对规律的认识。

编写意图

(1) 分数加减混合运算是分数加减运算的发展,是解决现实中诸多问题的需要。教材安排两个例题进行教学。例1教学分数加减混合运算,分两个小题,第(1)题教学分数加减混合运算的顺序和计算方法。第(2)题教学带括号的分数加减混合计算,同时体现解决问题的不同思路。

(2) 第(1)题,教材根据问题引出 $\frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5}$ 的计算。直接提出“你会算吗”,让学生通过讨论明确运算顺序和整数加减法相同。这里的三个分数是异分母分数,怎样通分好呢?教材通过不同算法的对比,引导学生思考:“你喜欢哪种方法?”让学生在交流中体会根据数据特点选择合理算法的优势,逐步培养优化的思想方法。

(3) 第(2)题提出问题后,让学生自主列式计算,引出带括号的分数加减混合运算。

3. 分数加减混合运算

1

1. 森林部分比草地部分多占公园面积的几分之几?

地貌类型	占公园面积的几分之几
森林	$\frac{1}{2}$
灌木	$\frac{3}{10}$
草地	$\frac{1}{5}$

(1) 森林部分比草地部分多占公园面积的几分之几?

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

你会算吗?

这是分数加减混合运算,应该和整数加减混合运算一样,从左往右算就可以了。

这是异分母分数的加减混合运算,要先通分,再计算,怎样通分好呢?

小林的方法:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} &= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} \\ &= \frac{8}{10} - \frac{2}{10} \\ &= \frac{6}{10} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

小华的方法:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} &= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{6}{10} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

说一说你是怎样计算的,你喜欢哪种方法?

(2) 森林和灌木地储存水转化情况对比

地貌类型	储存为地下水	地表水	其他
森林	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
裸露地面	$\frac{1}{11}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{2}{5}$

根据地面储存的地下水占降水的几分之几?

请你列式计算并计算。

教学建议

(1) 关注理解题意的教学。

本例的两个问题,均以表格的方式呈现其数据。因此,让学生读懂表格的意思是本例教学的首要环节。特别是第(2)题的教学,可设计如下问题让学生思考:在这个问题中,把什么看作单位“1”?在学生理解题意的基础上再来列式解答。

(2) 重视对比方法的应用。

本例的两个问题,都应用了对比的方法,第(1)题,应让学生对比不同的算法,养成处处留意用简明、灵活的方法解决问题的习

惯。当然,如果3个分母直接通分有困难,也可以按从左到右的顺序分步计算。学生在对比中发现,解决同样的问题可以有不同的解题思路。第(2)题,应鼓励学生结合实际问题寻求解题的不同方法。

编写意图

(1) 教材呈现了两种不同的解决问题的方法：一种是连续减，另一种是带括号先加后减。通过对比，让学生体会解决问题的不同策略和方法，同时明确运算顺序：有括号的要先计算括号里面的。

在此基础上，引导学生自主归纳分数加减混合运算的运算顺序。

(2) 例2教学整数加法运算定律推广并应用到分数加法中。教材采用不完全归纳推理的方法，通过让学生计算、观察两组算式，发现每组算式之间的关系，从而得出整数加法的交换律、结合律对分数加法同样适用的结论。由于有了运算定律推广到小数计算的的经验，这里推广的过程可以让学生自主完成。同时，在运用运算定律的过程中让学生体会计算的简捷性。

$$\begin{aligned} 1 - \frac{11}{20} - \frac{2}{5} &= 1 - \frac{11}{20} - \frac{8}{20} \\ &= \frac{20}{20} - \frac{11}{20} - \frac{8}{20} \\ &= \frac{9}{20} - \frac{8}{20} \\ &= \frac{1}{20} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 1 - (\frac{11}{20} + \frac{2}{5}) &= 1 - (\frac{11}{20} + \frac{8}{20}) \\ &= 1 - \frac{19}{20} \\ &= \frac{20}{20} - \frac{19}{20} \\ &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

我们的方法有什么不一样呢？

我觉小括号了。



你能说一说分数加减混合运算的运算顺序吗？

2 下面每组算式的左右两边有什么样的关系？

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} \bigcirc \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \quad (\frac{2}{3} + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4} \bigcirc \frac{2}{3} + (\frac{1}{4} + \frac{3}{4})$$

整数加法的交换律、结合律对分数加法同样适用。利用运算定律可以使一些分数计算变得简便。

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{12} + \frac{7}{12} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7}$$

真简便。



做一做

1. 计算。

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \frac{7}{8} - \frac{5}{12} + \frac{1}{6} \quad \frac{3}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \quad \frac{9}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{5}{6} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \quad \frac{7}{8} - (\frac{5}{12} + \frac{1}{6}) \quad \frac{3}{2} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) \quad \frac{9}{4} - (\frac{1}{4} + \frac{1}{5})$$

2. 用简便方法计算下面各题。

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \quad \frac{9}{7} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{7}$$

教学建议

(1) 在复习加法运算定律的基础上引出学习内容。

教学例2时，可先让学生复习有关加法运算定律的知识。如，让学生用简便方法计算 $53+36+64+97$ ， $1.5+3.8+6.2$ ，从中引出加法运算定律，并用字母表示出来。让学生思考：“式中的字母表示的数的范围是什么？”学生回答后，揭示要学习的内容：当式中的字母表示分数时，这个定律还适用吗？

(2) 引导学生自主归纳加法运算定律的推广。

教学时，可以创设探究性的问题情境，如，让学生思考：“不计算，你就能说出在○里填什么关系符号吗？”当学生判定例2中两组算式的结果相等时，可让学生思考如下问题：①这两组算式各有什么特点？②这一特点与整数加法的什么运算定律相同（加法交换律、结合律）？之后在学生归纳的基础上推出：整数加法的交换律、结合律对分数加法同样适用。还可以让学生继续举例加以验证。

编写意图

(1) 例3是新增加的问题解决——“喝牛奶问题”。这一问题涉及分数比较抽象，常作为数学爱好者研究的智力题。教材安排这一问题，主要是渗透用几何直观解决问题的策略。

(2) 教材呈现了解决问题的一般步骤。

首先，在“阅读与理解”中，通过摘录相关信息，渗透阅读理解题意的办法。

接下来，在“分析与解答”中，展现学生分析、思考的过程。突出解决问题的关键：第二次喝了多少杯纯牛奶？由于学生还未学习分数乘法，无法用乘法来解决 $\frac{1}{2}$ 杯纯牛奶的一半是多少的问题，教材突出借助图示解决问题的策略，通过画图帮助学生直观理解，并结合分数的意义找到解决问题的方法。

最后，在“回顾与反思”中，引导学生通过检验、反思解决问题的关键和策略来进行回顾。

3 一杯纯牛奶，乐乐喝了半杯后，觉得有些凉，就兑满了热水。他又喝了半杯，就出去玩了，乐乐一共喝了多少杯纯牛奶？多少杯水？



阅读与理解

你知道了哪些信息？写在下面。

第一次：一杯纯牛奶，喝了_____杯。

第二次：兑满热水，又喝了_____杯。

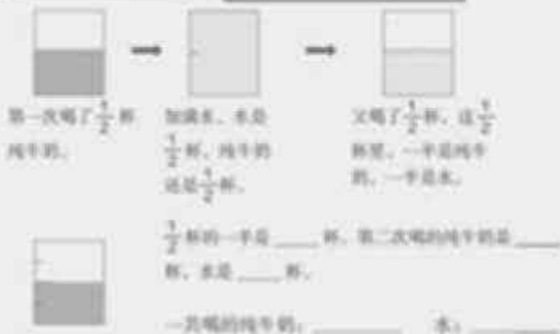
问题：一共喝了多少杯纯牛奶？

分析与解答

第一次喝了 $\frac{1}{2}$ 杯纯牛奶，第二次喝了多少杯纯牛奶呢？



再图试一试吧。



回顾与反思

可以怎样检验？解决这道题的关键是什么？关键步骤利用了什么知识？

教学建议

(1) 帮助学生积累阅读理解题意的办法。

随着年级的增高，要解决的问题涉及的数量关系越来越复杂，尤其是像例3这样涉及分数运算的问题。因此帮助学生理解题意，是解决问题的基础。教学时，可以采用摘录信息或画示意图等方式帮助学生理解。

(2) 结合图示引导学生分析数量关系。

解决这一问题，最关键的是要知道第二次喝了一杯奶的几分之几，也就是解决 $\frac{1}{2}$ 杯纯牛奶的一半是多少。可以结合直观图按照教材上的图示

进行分析，明确第二次喝了 $\frac{1}{4}$ 杯。喝的纯牛奶有：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ (杯)}; \text{ 喝的水有: } 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ (杯)}.$$

(3) 引导学生进行回顾与反思。

如通过检验进行反思，看两次喝的奶和最后剩下的奶合起来 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ 是不是1杯。再如，回顾解决本题的关键，以及解决这一关键问题的方法，使学生学习借助几何直观帮助分析数量关系，找出解决问题的思路和方法，同时也为后面理解分数乘法的意义和解决问题积累一定的方法和经验。

练习二十五

1. 计算。

$$\frac{4}{3} - (\frac{2}{5} + \frac{3}{10})$$

$$\frac{5}{7} + \frac{1}{4} - \frac{9}{14}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{9} + (\frac{3}{4} - \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{10} - \frac{3}{8} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5} - (\frac{2}{15} + \frac{1}{3})$$

2. 李明用一根 1m 长的铁丝围了一个三角形, 量得三角形的一边是 $\frac{1}{2}$ m, 另一边是 $\frac{3}{8}$ m, 第三边长多少米? 它是一个什么三角形?

3. 五一(1)班同学去革命老区参观, 共用去 10 小时, 其中路上用去的时间占 $\frac{1}{5}$, 吃午饭与休息时间共占 $\frac{3}{10}$, 剩下的是游览的时间, 游览的时间占几分之几?



4. 用分数表示自己每天各项活动所用的时间占一天的多少, 再提问并解答。



5. 在 \bigcirc 里填上合适的运算符号。

$$\frac{2}{3} \bigcirc \frac{3}{14} - \frac{3}{14} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{2} = (\frac{4}{7} \bigcirc \frac{3}{7})$$

6. 填数。



编写意图

(1) 第 1 题是分数加减混合运算的巩固练习。

(2) 第 2、3、4 题是利用分数加减混合运算解决实际问题的练习, 解决问题的方法都不是唯一的。

(3) 第 5、7 题直接运用运算定律来填空。第 5 题填运算符号, 第 7 题填分数。通过这两个练习, 使学生加深对加法运算定律的理解, 同时为应用运算定律进行简便计算作一定的准备。

(4) 第 6 题是分数加减混合运算的变式练习。

教学建议

把握练习设计意图, 抓住练习的重点。

练习中既有分数加减混合运算的巩固性练习, 也有利用分数加减混合运算解决实际问题的练习。练习时, 要各有侧重点。如第 1 题要注重运算顺序的点评; 第 2、3、4 题, 应鼓励学生用不同的方法解答, 同时注重数量关系的分析。如各题中的单位“1”是什么? 第 3 题中“10 小时”这一信息为什么不用? 以此培养学生分析问题、解决问题的能力。

编写意图

(1) 第8、9、10题是选做题，其解题思路见第229页附1。

(2) 第8题，通过4个有序算式，让学生自主观察、计算、猜想，归纳出一个数学模型： $\frac{1}{n} -$

$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ ($n \neq 0$)，然后应用模型计算4个有序算式的和，让学生经历探索、建模、应用的过程，培养合情推理能力。

(3) 第9题，是埃及分数的一个有趣性质“任何一个真分数都可以表示为有限个分母不同的埃及分数的和”的应用。让学生通过了解此题的结果“ $\frac{6}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ”就是埃及分数的有趣性质和在实际中的应用，激发探索数学知识的兴趣。

(4) 第10题利用一个封闭的填数图形，复习、巩固分数加、减法的计算。学生需要全面分析题中的信息，找到解题思路再行计算。

(5) 思考题结合七巧板进行分数意义的练习。难点是弄清楚图形3、6和7的面积大小。

7. 在括号里填上适当的数，使等式成立。

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)$$

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{12} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$* \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

用你的发现计算下面这道题。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$



8. 把6个同样大小的苹果平均分给8个孩子，可以怎样分？每个孩子分得这些苹果的几分之几？



9. 在右边的○里填上适当的数，使每个正方形四个角上的数加起来等于1。

右图是七巧板拼成的正方形，每个图形的面积占正方形的几分之几？图形3和4共占几分之几？图形3、4、5共占几分之几？



本单元结束了，你有什么收获？

这单元可以联系分母相同的分数或同分母的分数。

分数分母相
☆☆☆
☆☆☆

分数加、减法和整数加、减法一样，都是计算单位相同才能相加、减。



教学建议

(1) 适当拓展了解分数运算的一些史料。

结合学习内容适当补充一些数学史料，可以激发学生的探究欲，形成良好的探究习惯。如，可以介绍埃及分数——分子为1的分数，让学生体会埃及分数的有趣性质。如第8题，可以将结果进行拓展（下面 n 为不等于0的自然数）：

$$1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n}$$

使学生知道“1可以表示为项数很多的埃及分数的和”。

(2) 进行解题方法指导。

如第9题，可引导学生用学具操作，然后用分数加法算式表示操作的过程。先将4个苹果平均分给8人，每人分得 $\frac{1}{2}$ 个，再将剩下的2个平均分成8人，每人分得 $\frac{1}{4}$ 个。所以每个人分得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ （个）。再如，思考题为了帮助学生正确判断3、6和7的大小，可引导学生在正方形上加辅助线（见第229页），使学生明白，作辅助线是解决问题的有效途径之一。

附 1

第 8 题的解题思路如下:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} \\ & \text{[根据发现的规律: } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ (} n \neq 0 \text{)]} \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ &= 1 - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

第 10 题的解题思路如下:为了叙述的方便,将图中的“○”标上字母,如图 1。其解答思路如下: $e \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c$ 。当然,路径有多条,但关键是填出 e 、 b 两个空。通过这个练习,培养学生分析问题的能力。本题的答案如图 2。

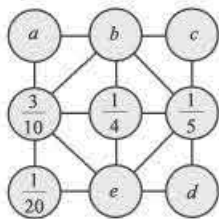


图 1

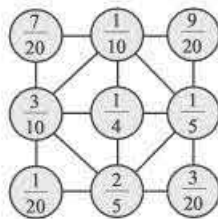


图 2

思考题:



本题的解题思路是:

图形	1	2	3	4	5	6	7
面积 (占正方形的几分之几)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

图形 7 和 4 共占: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$;

图形 3、4 和 5 共占: $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ 。

二、教学设计或教学片段

课题 1：异分母分数加、减法

教学设计：李胜捷。

教学内容：教科书第 93~94 页例 1 及“做一做”，练习二十四第 1~5 题。

教学目标：

1. 让学生经历异分母分数加、减法计算方法的探究过程，认识将新知转换成旧知是获得知识的重要途径。

2. 掌握异分母分数加、减法的计算方法，会正确地计算异分母分数加、减法。会对计算结果进行验算，并养成验算的良好习惯。

3. 通过对生活垃圾情况的调查、分析，唤起学生的环保意识。

教学准备：学习单（课前调查单）、多媒体课件。

教学过程：

（一）课前布置调查任务，收集相关信息

调查自己生活的社区（或村镇）的生活垃圾主要有哪些？选择自己家一天的生活垃圾，估一估每种垃圾大约占生活垃圾的几分之几？哪些垃圾可以作为有用资源回收？将调查结果整理在下表“我的调查”栏目中。

我的调查				
生活垃圾种类				
占生活垃圾的几分之几				
可回收的垃圾				
大家的调查				
生活垃圾种类				
占生活垃圾的几分之几				
可回收的垃圾				

（设计意图：通过小调查让学生提高环保意识，感受到数学与生活的紧密联系，增加学生学习数学的兴趣和积极性，为形成异分母分数加、减法的计算方法打好基础。）

（二）调查反馈，探究异分母分数的加法

1. 交流调查情况，并提出问题。

（1）将课前调查的情况进行交流，通过引导逐渐统一到教科书的数据上，并填入“大家的调查”中。

（2）教师呈现调查整理好的一份统计表。

种 类	纸 张	食品残渣	废金属等	危险垃圾
占生活垃圾的几分之几	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$
可回收的垃圾	纸张、废金属等			

(3) 根据这张表格中的数学信息你能提出哪些数学问题？(根据学生提出的问题选择需要的问题进行教学。)

纸张和废金属等是垃圾回收的主要对象，它们在生活垃圾中共占几分之几呢？

2. 列出算式，探究“ $\frac{3}{10} + \frac{1}{4}$ ”的算法。

(1) 学生尝试计算 $\frac{3}{10} + \frac{1}{4}$ ，并将学生中的几种不同算法列举在黑板上。

前面学习的都是同分母的分数加法，这里两个分数的分母不同，怎么计算呢？你能用学过的知识解决吗？让学生先独立思考，然后小组交流。

学生的算法可能有：

$$\text{预设 1: } \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{12}{40} + \frac{10}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

$$\text{预设 2: } \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} = \frac{11}{20}$$

$$\text{预设 3: } \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{10+4} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

(2) 交流获得。

让学生谈谈自己为什么这样算，请其他同学对上述不同的计算方法进行评议。

第一种算法正确，但不简便。将 $\frac{3}{10}$ 、 $\frac{1}{4}$ 通分时，没有找 10 和 4 的最小公倍数，而是找它们的公倍数，所以，计算时数据较大，结果还要约分。

第二种算法既正确又简便，先找 10 和 4 的最小公倍数，通分后再相加。

第三种算法不对，算理错了。两个分数的单位不同，一个是 $\frac{1}{10}$ ，一个是 $\frac{1}{4}$ ，单位不同的两个分数是不能直接相加的。

(设计意图：让异分母分数加、减法的计算问题从学生中来，并经历方法的自主探索过程，在交流中初步理解方法的合理性，从中渗透数感意识的培养。)

(3) 数形结合，理解算理。

为什么分母不同(分数单位不同)的分数不能直接相加、减呢？

教师用图加以说明，帮助学生理解为什么只有相同的分数单位才能相加、减。



(设计意图：异分母分数具有不同的分数单位，对小學生来说是比较难理解和掌握的，以数形结合的方式理解算理，呈现对应的图形，以图形来表达分数，以图形来进行运算，以图形来解释算理，从而使学生在直观形象中理解算理，发展思维。)

(4) 归纳异分母分数加法的计算方法。

教师用课件动态显示 $\frac{3}{10} + \frac{1}{4}$ 的过程，边演示边说明：由于 10 和 4 的最小公倍数是 20，所以把圆平均分成 20 份，这样， $\frac{3}{10}$ 就变成 $\frac{6}{20}$ ， $\frac{1}{4}$ 变成 $\frac{5}{20}$ ，所以 $\frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} = \frac{11}{20}$ 。

完成“做一做”，然后同桌之间说一说怎样计算两个分母不同的分数相加。

在学生归纳的基础上，教师引导用简明扼要的语言归纳异分母分数加法的计算法则。

(设计意图：让学生先用自己的语言说说异分母分数加法的计算方法，是知识点不断内化的过程，再通过提炼，让学生的认识在理解的基础上不断科学规范，最终达成知识构建，而不是机械的模拟算法。)

(三) 自主探索异分母分数减法 [例 1 第 (2) 题]

1. 出示问题 (2)，说一说，异分母分数减法可以怎样算？

2. 放手让学生利用加法的经验迁移类推，独立完成减法的计算。

请学生自己表达计算的过程，重点是转化的思想。在学生说算法的基础上，教师引导归纳：异分母分数相减，也是先通分再相减。

3. 继续试一试： $\frac{2}{3} - \frac{4}{9}$ ， $\frac{7}{10} - \frac{3}{5}$ 。完成后，集体讲评。

(设计意图：学生已经历异分母分数加法计算方法的形成过程，这里让学生通过自学独立思考并解决异分母分数减法的计算方法。学生在表达计算的过程中理解了算理、掌握了方法，并在这一过程中获得了学习经验的积累。)

(四) 形成异分母分数加、减法的计算法则

1. 通过上面的计算过程，你能归纳异分母分数加、减法的计算方法吗？

让学生先同桌交流，然后再全班交流。最后小结，异分母分数加、减法的计算法则是：异分母分数相加、减，先通分，然后按同分母分数加、减法的计算方法进行计算。

2. 完成教材第 94 页“做一做”第 1 题，先计算，然后任选两题进行验算。

在计算异分母分数加法算式时，可以怎样验算？

3. 说明分数加、减法的验算方法。

其实，分数加、减法的验算方法与整数加、减法的验算方法相同。

继续完成其他几题的验算。

(设计意图：在教学时，先让学生探索讨论得出异分母分数加法的算理，然后让学生运用

刚刚获得的算理迁移到异分母分数减法，并让学生用加减法的关系进行验算。)

(五) 巩固练习

1. 学生独立完成练习二十四第 1 题，完成后交流方法。
2. 填一填：在○里填上适当的运算符号。(练习二十四第 2 题)
3. 判断下列计算对吗？不对的在后面改正。(练习二十四第 5 题)
4. 教材第 94 页“做一做”第 2 题，学生独立解决。

(设计意图：在巩固练习中让学生计算、比较、判断，运用算理指导算法，在算法应用中深化算理的理解。)

(六) 作业布置

练习二十四第 4 题、第 6 题。

课题 2：解决问题

教学设计：余长艳、郑旭。

教学内容：教科书第 99 页例 3。

教学目标：

1. 经历解决问题的全过程，探索解决问题的途径、策略和方法。体会图示在理解问题、分析解决问题中的作用，学习用几何直观分析解决问题。
2. 感受数学知识与日常生活的联系，体会解决问题过程中的快乐。

教学准备：多媒体课件，一瓶矿泉水，三个透明的量杯，其中 1 杯装满牛奶。

教学过程：

(一) 情境引入

教师：同学们都喝过牛奶吧，瞧，乐乐也喜欢喝牛奶。

教师呈现乐乐喝牛奶的多媒体图片。

教师：乐乐在喝牛奶的时候遇到了一个数学问题，我们一起去研究一下吧！

出示问题：一杯纯牛奶，乐乐喝了半杯后，觉得有些凉，就兑满了热水。他又喝了半杯，就出去玩了。乐乐一共喝了多少杯纯牛奶？多少杯水？

(二) 探究新知

1. 收集信息，理解问题。

教师：同桌互相说一说，你知道了什么信息？要解决什么问题？

学生汇报整理：

第一次：一杯纯牛奶，喝了 $\frac{1}{2}$ 杯。

第二次：兑满热水，又喝了 $\frac{1}{2}$ 杯。

问题：一共喝了多少杯纯牛奶？一共喝了多少杯水？

(设计意图：让学生先用自己的语言说说题目的意思，通过阅读与理解，呈现对已知条件

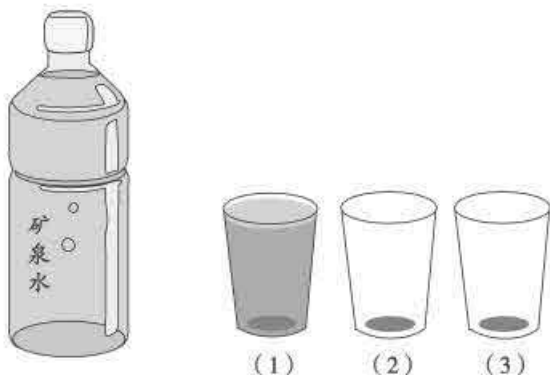
和问题进一步梳理和内化的过程。通过学生的表述，让学生感受解决问题的第一步是深入理解题目的意思，并在理解的基础上规范表达，将生活中的问题初步抽象成数学问题。）

2. 探索交流，分析与解答。

(1) 演一演。

教师：谁能将题目中的意思，用老师提供的教具来“演一演”。

（教师出示一瓶矿泉水，三个透明的量杯，其中1号杯装满牛奶，2、3号杯为空杯。）



一组学生上台演示，教师提示：为了研究的方便，我们把两次喝掉的分别放入2号和3号杯中。

第一步：将1号杯中的半杯纯牛奶倒入2号杯。

第二步：将1号杯注入水，注满为止。

教师适时提问：这时1号杯里装的是什么？

第三步：将1号杯中的半杯液体倒入3号杯。

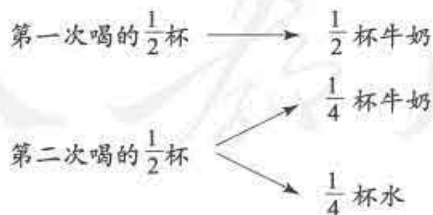
(2) 画一画。

教师：同学们，想一想，刚才这个过程你可以怎样记录下来？先独立操作，然后在四人小组内交流。

(3) 说一说。

下面谁能将自己的思考过程向大家来交流一下。

预设方法一：



学生解释方法，并询问其他同学是否同意，是否需要补充。

预设方法二：



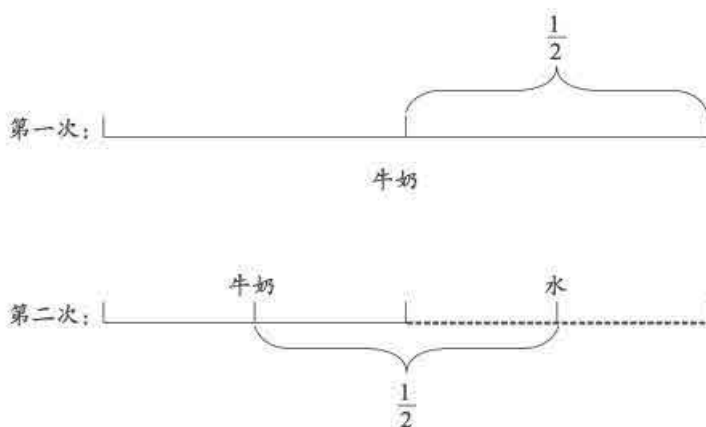
第一次喝了 $\frac{1}{2}$ 杯纯牛奶。

加满水，水是 $\frac{1}{2}$ 杯，
纯牛奶还是 $\frac{1}{2}$ 杯。

又喝了 $\frac{1}{2}$ 杯，这 $\frac{1}{2}$
杯里，一半是纯牛奶，
一半是水。

学生解释方法，并询问其他同学是否同意，是否需要补充。

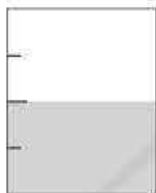
预设方法三：



学生解释方法，并询问其他同学是否同意，是否需要补充。

(4) 写一写。

教师：通过刚才的小组合作，全班交流，现在你知道乐乐一共喝了多少杯纯牛奶，多少杯水？请在练习纸上写一写。



$\frac{1}{2}$ 杯的一半是_____杯。第二次喝的纯牛奶是_____杯，
水是_____杯。

一共喝的纯牛奶：_____ 水：_____

(设计意图：放手让学生经历分析问题的过程，在组内交流中学生能够利用画图、语言表征等方式，明确数量关系。通过全班的交流，使学生感受到画图、文字标注的方式是分析解决问题的好帮手。)

3. 回顾与反思。

(1) 检验。

教师：我们做得对吗？可以怎样来检验呢？请在四人小组内讨论一下吧。

汇报：我用“喝掉的+剩下的是否等于原来的”来检验。

一共喝的：纯牛奶是 $\frac{3}{4}$ 杯，水是 $\frac{1}{4}$ 杯。

剩下的：纯牛奶是 $\frac{1}{4}$ 杯，水也是 $\frac{1}{4}$ 杯。

杯子中一共倒入的纯牛奶是 1 杯，水是 $\frac{1}{2}$ 杯。

因为，纯牛奶： $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ （杯） 水： $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ （杯）

所以，我认为这样解答是正确的，大家同意我的观点吗？

(2) 反思。

教师：回顾整道题目的解决过程，同学们想一想，解决这道题的关键是什么？

关键是第二次喝掉的纯牛奶是多少杯，通过画图、操作我们发现第二次喝掉的是 $\frac{1}{2}$ 杯的 $\frac{1}{2}$ ，也就是 $\frac{1}{4}$ 杯。

教师：那这个“ $\frac{1}{2}$ 杯的 $\frac{1}{2}$ ，也就是 $\frac{1}{4}$ 杯”，你们是怎样理解的，利用了什么知识？

(利用了分数的意义。)

(3) 小结。

通过刚才解决问题的过程，你还有什么疑问？你是采取了怎样的方法来思考的？

(三) 巩固练习

画一画，算一算。

李大伯有一条绳子，第一次用去了全长的 $\frac{1}{2}$ ，第二次用去了剩下的 $\frac{1}{3}$ ，这时剩下的绳子是原来长度的几分之几？

(四) 课堂总结

在今天这节课上，我们解决了生活中的一些问题。现在，请大家想一想，我们在解决问题时，是按照怎样的步骤进行的？在解决问题时要注意什么？你有什么好方法？

教师结合学生的回答，对解决问题的步骤、策略及检验的方法进行总结。

三、备课资料

分数加法和减法定义的合理性^①

1. 分数加法定义的合理性分析。

.....

定义 有两个分数，分别以其中一个分数的分母乘另一个分数的分子，把所得的两个积的和作分子，把两个分数的分母的积作分母，所得的分数叫做这两个分数的和，求两个分数的和的运算叫做分数的加法。就是：

设两个分数为 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ ，

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

其中 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 是加数， $\frac{ad + bc}{bd}$ 是它们的和。

我们来讨论分数加法定义的合理性，这个定义考虑到使整数运算定律也适合于分数。设

$$x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d},$$

如果整数运算定律适合于分数，于是 $bx = a$ ， $dy = c$ 。则有 $bdx = ad$ ， $bdy = bc$ 。

两式相加得

$$bdx + bdy = ad + bc$$

得

$$bd(x + y) = ad + bc$$

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd}$$

因此，这样规定分数加法的定义是合理的。

从分数加法的定义可以知道，两个分数的和，它的分母是确定的整数的积，它的分子是确定的整数积之和，所以和总是存在的并且是唯一的，因为，分数集合对于加法运算是封闭的。

分数加法定义也包含了运算法则，就是两个分数的分母的积作公分母，进行通分，然后用这个公分母作和的分母，用通分后两个分子的和作分子。但在实际计算时，如果两个分数的分母不是互质数，通常用两个分母的最小公倍数作公分母，进行通分，然后，同样用这个公分母作和的分母，用通分后两个分子的和作分子。这是因为：

如果两个分数是 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ ，且 $[b, d] = n$ ，设 $n = bq_1$ ， $n = dq_2$ ，（ q_1, q_2 是自然数）

那么

^① 人民教育出版社小学数学室编著：小学数学教材教法 第一册，北京：人民教育出版社，1994 年第 1 版：146-159。

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{aq_1}{bq_1} + \frac{cq_2}{dq_2} && \text{(分数的基本性质)} \\
&= \frac{aq_1}{n} + \frac{cq_2}{n} && \text{(所设)} \\
&= \frac{naq_1 + ncq_2}{n \cdot n} && \text{(分数加法的定义)} \\
&= \frac{n(aq_1 + cq_2)}{n \cdot n} && \text{(乘法分配律)} \\
&= \frac{aq_1 + cq_2}{n} && \text{(分数的基本性质)}
\end{aligned}$$

从上面可以看出 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 相加，通分后，是把 aq_1 个 $\frac{1}{n}$ 与 aq_2 个 $\frac{1}{n}$ 合并在一起，因此，分数加法的含义与整数加法相同。

2. 分数减法定义的合理性分析。

定义 已知两个分数 $\frac{a}{b}$ 、 $\frac{c}{d}$ ，求一个分数 $\frac{x}{y}$ ，使 $\frac{x}{y}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的和等于 $\frac{a}{b}$ ，这种运算叫做分数的减法，记作

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$$

其中 $\frac{a}{b}$ 是被减数， $\frac{c}{d}$ 是减数， $\frac{x}{y}$ 是 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的差。

由此看出，分数减法的定义和整数减法的定义是一样的。

从这个定义可以知道，分数减法是分数加法的逆运算。

分数减法运算，只是在被减数不小于减数的时候，才可以施行，并且运算结果是唯一的。就是：

两个分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ ，如果 $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ ，那么有差 $\frac{ad - cb}{bd}$ 存在，而且是唯一的。

证明：(1) 先证明差是存在的。

因为 b 、 d 是自然数，所以 bd 也是自然数。而 $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ ，于是 $ad \geq cb$ ， $ad - cb \geq 0$ ，又 a 、 c 是整数，所以存在 $ad - cb$ 这样一个整数。因此 $\frac{ad - cb}{bd}$ 是一个确定的分数。

$$\begin{aligned}
\text{又因为 } \frac{ad - cb}{bd} + \frac{c}{d} &= \frac{(ad - cb) \cdot d + c \cdot bd}{bd \cdot d} && \text{(分数加法的定义)} \\
&= \frac{[(ad - cb) + cb]d}{bd \cdot d} && \text{(整数乘法分配率)} \\
&= \frac{ad \cdot d}{bd \cdot d} && \text{(整数减法的性质)} \\
&= \frac{a}{b} && \text{(分数的基本性质)}
\end{aligned}$$

所以, $\frac{ad-cb}{bd}$ 是分数 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的差。

这就证明了, 在 $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ 的条件下, 它们的差是存在的。

(2) 再证明差的唯一性。

假设 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的差不唯一, 有 $\frac{x}{y}$ 、 $\frac{x'}{y'}$, 且 $\frac{x}{y} \neq \frac{x'}{y'}$ 。

根据分数减法定义, 就是 $\frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ 和 $\frac{x'}{y'} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ 。

于是 $\frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{x'}{y'} + \frac{c}{d}$,

则 $\frac{xd+cy}{yd} = \frac{x'd+cy'}{y'd}$ (分数加法定义)

$(xd+cy)y'd = (x'd+cy')yd$ (分数相等的定义)

$xdy'd + cyy'd = x'dyd + cy'y'd$

$xdy'd + cyy'd = x'dyd + cy'y'd$

$xy'dd = x'ydd$

$xy' = x'y$

$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$

这与假设 $\frac{x}{y} \neq \frac{x'}{y'}$ 矛盾, 因此, 不可能存在有两个不相等的差, 也就是说 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的差是唯一的。

从以上可以看出, 分数减法的法则, 用两个分数的分母的积作公分母, 进行通分, 然后用这个公分母作差的分子, 用通分后两个分数的分子的差作差的分子。但在实际计算时, 与分数加法同理, 一般用两个分数的分母的最小公倍数作公分母进行通分, 然后再相减。

四、评价建议与评价样例

(一) 评价建议

本单元应围绕: 学生是否理解分数加、减法的算理(相同单位的数才能相加、减), 是否掌握了分数加、减法的计算方法, 能否借助直观图解决问题等方面进行。

(二) 评价样例

在评价样例中既体现加减法运算的基本体系, 同时兼顾学生策略意识的培养, 以及在适度开放的问题情境中考验学生对知识的灵活运用能力。

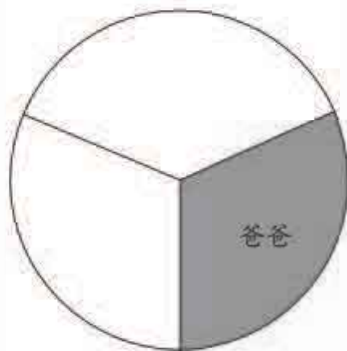
1. 想一想, 填一填。

(1) $\frac{5}{12}$ 的分数单位是 (), 它有 () 个这样的单位。

(2) $\frac{2}{7} + \frac{4}{7}$, 是 () 个 $\frac{1}{7}$ 与 () 个 () 相加, 和是 ()。

(3) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ 的分母 (), 需要先 (), 分母的最小公倍数是 (), 差的分母是 (), 分子是 ()。

(4) 有一张饼, 爸爸吃了这张饼的 $\frac{1}{3}$, 小明吃了剩下的 $\frac{1}{3}$, () 吃得多。



2. 辨一辨, 选一选。

(1) 在○里填上“>”“<”或“=”。

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{6} \bigcirc \frac{1}{5} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \bigcirc 1 - \frac{5}{6} \quad b + \frac{9}{17} \bigcirc b + \frac{7}{17} \quad a - \frac{18}{19} \bigcirc a - \frac{1}{19}$$

(2) a 和 b 是两个不等于 0 的自然数, 而且 $a > b$ 。

$$\frac{2}{a} + \frac{5}{a} \bigcirc \frac{2}{b} + \frac{5}{b}$$

3. 算一算, 验一验。

(1) 直接写出得数。

$$\frac{5}{9} + \frac{8}{9} =$$

$$\frac{1}{8} + \frac{7}{8} =$$

$$\frac{19}{24} - \frac{13}{24} =$$

$$\frac{19}{36} + \frac{5}{36} =$$

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} =$$

$$\frac{11}{8} - \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} =$$

$$\frac{12}{13} - \frac{3}{13} =$$

$$\frac{8}{9} + \frac{4}{11} + \frac{1}{9} =$$

$$1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{6} =$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} =$$

(2) 怎样简便就怎样算。

$$6.12 + \frac{3}{7} + 2.88 + \frac{4}{7}$$

$$\frac{29}{24} - (\frac{5}{24} - \frac{4}{9})$$

$$\frac{18}{11} - (\frac{7}{11} + \frac{3}{8})$$

$$\frac{7}{9} + \frac{3}{10} - \frac{2}{9} + \frac{17}{10}$$

4. 读一读，试一试。

(1) 一个长方形长是 $\frac{6}{5}$ 米，宽是 $\frac{2}{3}$ 米。它的周长是多少米？

(2) 拖拉机第一天耕一块地的 $\frac{1}{4}$ ，第二天比第一天多耕这块地的 $\frac{1}{10}$ 。还剩下这块地的几分之几没有耕？

(3) 修一条 1500 米长的路，第一周完成了全工程的 $\frac{1}{4}$ ，第二周完成了全工程的 $\frac{2}{5}$ ，再修全工程的几分之几就完成了全部任务？

(4) 两堆煤原来相差 15 吨，如果从多的一堆中运走 $\frac{1}{8}$ 吨，从少的一堆中运走 0.4 吨，这时两堆煤相差多少吨？

人教版®

打电话

一、教材说明和教学建议

（一）教学目标

1. 创设学生熟悉的“打电话”生活情境，指导学生用画图、列表格等方式，找到“打电话”的最优方案，经历有目的、有设计、有步骤、有合作的实践活动。
2. 进一步体验数学与生活的密切联系，经历针对具体问题提出设计思路、制订简单方案解决问题的过程，培养学生运用数学知识解决实际问题的能力。
3. 通过指导学生用画图、列表格等方式发现事物隐含的规律，体会数形结合、推理、优化、模型等数学思想，进一步培养学生的归纳推理和解决简单实际问题的能力。

（二）内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

《标准（2011）》指出：“综合与实践”内容设置的目的在于培养学生综合运用有关的知识与方法解决实际问题，培养学生的问题意识、应用意识和创新意识，积累学生的活动经验，提高学生解决现实问题的能力。实现这个目标的着力点之一就是要将生活中的数学与课堂上的数学相联系。“打电话”这一综合与实践活动采用了学生熟悉的生活中的素材：15人的合唱队在暑假期间接到一个紧急演出，老师要打电话尽快通知到每个队员，让学生帮助老师设计一个打电话的方案，并从中寻找最优的方案。这个活动可以让学生进一步体会数学与生活的密切联系以及优化思想在生活中的应用，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力。

本活动可分为以下三个部分。

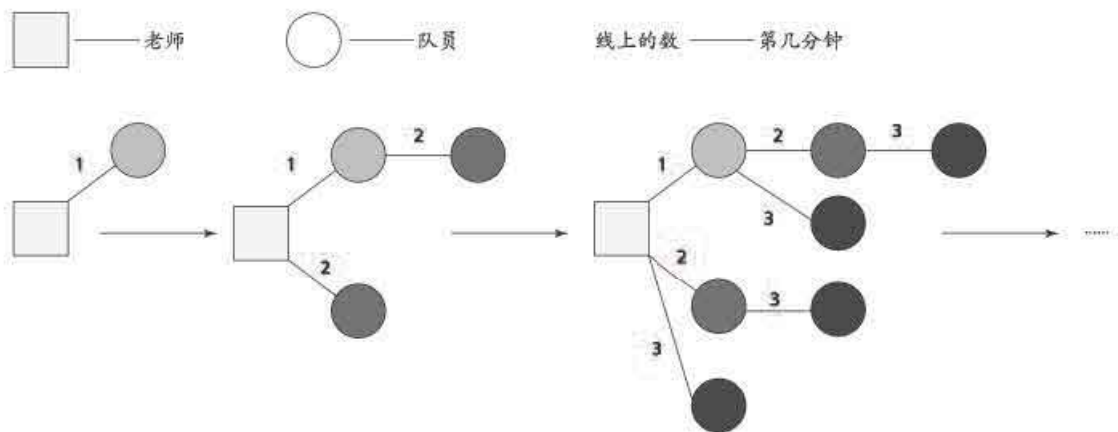
（1）合作交流，探讨最优方案。

四年级上册“数学广角——优化”中已经安排了有关优化思想的学习，通过沏茶、烙饼等日常生活中的简单事例，让学生尝试在解决问题的多种方案中寻找最优的方案，初步体会到“把同一时间内能做的事情综合起来统筹安排，就能节约时间”这一运筹思想。本册教材编排“打电话”综合与实践活动，也是让学生进一步体会优化思想在生活中的应用。教材创设了与学生生活实际紧密联系的情境——打电话，根据学生个体差异和思维水平，首先呈现了两种不同的方案：一种是最简单的方案，就是一个一个地通知，当然这种方案需要的时间最长，一共需要15分钟；另一种是分组通知的方法，这种方案比一个一个通知要省时间，如，平均分成3个组，通知完15人至少需要7分钟。这两种方案虽然没有达到题目“尽快”的要求，但这是学生认知规律的真实体现，从复杂到简单，从低效到高效，从基本到优化。

对于“是不是分的组越多用的时间越少”这个问题，可以让学生通过不同的分组方案来检

验。如果按(4, 4, 4, 3)分成4组, 需要6分钟; 如果平均分成5组, 每组3人, 则需要7分钟。通过数据的对比, 使学生明白并不是分的组越多所需的时间越少。为了便于理解, 教材用图示的方式直观地表示出每种方案, 也能帮助学生直观计算出所需的时间。

通过“想一想: 还有更快的方法吗”, 引导学生对比分析前面分组的方案, 唤醒学生已有的优化思想的知识基础和生活经验, 使学生体会到要想时间最少, 就需要每个接到通知的队员立即通知后面的队员, 每个人都不空闲, 照这样继续下去直到通知到全体队员为止, 这样所需的时间最少。在讨论的基础上, 鼓励学生用图示的方法进行记录和描述。教材直观地展示了这种方案(见下图), 按照时间的顺序, 用不同的颜色动态地显示了每分钟新接到通知的队员和总共通知的队员。这种方案就是用时最少的方案, 通过图示可以看出这个方案的用时是4分钟。



(2) 观察思考, 发现一般规律。

在学生找到最优设计方案后, 引导学生独立思考、小组交流。通过观察这个示意图, 让学生从中发现这种方案中隐含的规律。从图上学生就能清楚地看到每增加一分钟新接到通知的队员数正好是前面所有接到通知的队员和老师的总数, 也就是第 n 分钟新接到通知的队员数等于前 $(n-1)$ 分钟内接到通知的队员和老师的总数, 也可以说到第 n 分钟所有接到通知的队员和老师的总数是前 $(n-1)$ 分钟所有接到通知的队员和老师的总数的 2 倍。同时, 第 n 分钟所有接到通知的队员和老师的总数就是 2^n 。因而到第 n 分钟所有接到通知的队员和老师的总数就是一个等比数列, 通项公式为 $a_n = 2^n$, 到第 n 分钟所有接到通知的队员总数就是 $(2^n - 1)$ 人。当然这个公式不需要学生掌握, 学生只要能通过示意图发现上面的规律, 根据规律找出到第 n 分钟所有接到通知的队员总数就可以了, 进一步体会优化思想。

(3) 应用规律, 解决实际问题。

发现这个规律后, 可以让学生直接利用这个规律来解决前面提出的问题了。随着时间的增加, 所有接到通知的队员数分别为 1, 3, 7, 15, 31, ..., 因此要通知完 15 个队员, 只需要 4 分钟。此外, 教材还让学生根据这个规律算一算 5 分钟最多可以通知多少人, 以及如果一个合唱团有 50 人, 最少花多少时间就能通知到每个人。这些问题利用上面发现的规律都能轻松地解决。

接着引导学生回顾整个过程，对解决问题的方法作一个梳理。虽然找到了打电话的最优方案，但要想制订的方案在具体实施中切实可行，还必须要设计好打电话的顺序，也就是说每个队员要清楚他接到电话后，后面要怎样继续通知其他队员。因此，制订方案时还需要事先确定好一个打电话的流程示意图，让老师和每个队员都明确接到通知后，按照怎样的顺序通知后面的队员。只有严格按照事先制订好的方案执行，才能达到节省时间的目的。

2. 教材编排特点。

“打电话”的编排有下面几个特点。

(1) 密切联系实际，精心选择激发学生兴趣的、综合性强的活动素材。

生活实践中的数学无处不在，把实际生活中的“打电话”作为综合与实践活动的素材，具有以下特点。一是现实性，能和学生的生活经验、学习现实紧密关联，便于学生理解并易于开展实践活动；二是开放性，可以从多个角度采用多种方法开展研究，能充分展示学生之间的研究差异；三是实践性，能激发学生的探究欲望，使学生在有目的、有设计、有步骤、有合作的探索过程中积累数学活动经验。当然，除了教材提供的这个实际问题，教师也可以创设其他类似的情境，但要注意人数不要太多，因为数据过大，对学生尝试不同的方案会带来一定的困难。

(2) 突出实践活动，让学生充分经历问题解决的全过程。

“综合与实践”本质上是一种解决问题的活动，它“有别于学习具体知识的探索活动，更有别于课堂上教师的直接讲授。它是教师通过问题引领、学生全程参与、实践过程相对完整的学习活动”。因此，教师要引导学生广泛参与实践。这里的“广泛”，既是指“过程的充分”，也包括“形式的多样”，还应该包含“交流的充分”。

教材先让学生“提取这个实际问题的关键信息”，然后用“你打算怎样解决呢”引导学生讨论探究，再通过“想一想：还有更快的方法吗”启发学生思考，接着通过“你发现什么规律了吗”引导学生观察、归纳、总结，最后让学生应用规律探究“按上面的方式，5分钟最多可以通知多少人”。通过这样的编排，使全体学生全程参与研究与实践，让不同思维层次的学生在活动中得到应有的、不同的发展，真正做到了“过程的充分”“形式的多样”和“交流的充分”。

(3) 重视反思评价，在实践活动中积攒实践智慧。

“综合与实践”是实现“积累数学活动经验、培养学生应用意识和创新意识”的重要载体，但在强调“做”的过程中，还应重视实践活动过程中的思考以及反思评价，以帮助学生“逐步积累运用数学解决问题的经验”，提升实践智慧。教材在呈现教学内容和过程时，不只是关注最优方法的得出，还通过“回顾整个过程，你用到了哪些方法？”“你制订的方案在现实中可行吗？为使它切实可行，还需要做些什么？”，引导学生对解决问题全过程进行回顾，梳理提炼解决问题的策略，培养学生联系实际具体实施及解决实际问题的能力。

(三) 教学建议

1. 创设宽松、民主、自由的课堂环境，激发学生积极参与数学活动。

教材提供了学生熟悉的“打电话”生活场景，引导学生获取信息、提出问题。接下来，教师可以放手让学生分组设计方案并用适当的方式呈现出来，并创设一些竞争机制激励学生设计出最佳的方案，教师可以通过巡视了解学生不同的设计方案并适时地加以指导。如，在设计分组通知的方案时，如果平均分成3组，正好每组5人，这样分是不是最省时间呢？如果分成4组，15人该怎样分呢？除了教材呈现的两种方案外，学生还可能设计出其他的方案，有的可能分成4组，有的分成5组、6组，有的可能还设计了组内继续分组的方案等。对于学生不同的方案，只要合理，教师都应给予鼓励。在探索和发现规律时，有的可能用画图的方法，有的是用语言描述，还有的直接用序号或者用加法表示等，只要学生的描述和表示方法有道理，教师都应给予肯定，以保护学生学习和探索的积极性。

2. 鼓励多种形式表征思维过程，培养学生的符号意识及思维的有序性、全面性。

无论是简单的分组，还是最优方案，要让学生用自己喜欢的方式表示出来。教学时，教师要鼓励学生大胆地运用语言、符号、图示、算式等不同的方式来表征自己的思维过程。即使同一种表征方式，也可以有不同的表达形式，如图示法，除了教材呈现的方法，学生可以画出不同方式的示意图，可以让学生把每一分钟新接到通知的队员用不同的颜色或图形表示出来，也可以直接用序号来表示。把打电话的设计方案抽象成示意图，这是一个数学化的过程，有利于培养学生的符号意识，体会数学的简洁美。设计好之后，教师要组织学生进行展示和交流：你是怎样设计的？你的设计和其他同学有什么不同？你有什么要提醒大家的吗？帮助学生形成有序、全面思考问题的好习惯。

3. 要重视和组织好回顾、反思和总结。

教学中，教师要在每一个环节结束和整个活动完成时分别组织学生进行回顾与反思。在探讨方案环节，教师要引导学生回顾“是不是分的组越多用的时间越少”，激发学生思考“还有更快的方法吗”；在发现规律环节，教师要进一步引导学生观察发现的规律，可以适当地提示学生从人数的变化去观察，在学生观察、思考、讨论、交流的基础上引发思考：怎样用简单的方式将我们发现的规律清楚地表达出来？引导学生用表格的方式来表示发现的规律（如下表）；在应用规律环节，教师要引导学生回顾反思整个活动过程，明晰解决问题的步骤和方法，并将发现的规律和具体实施相结合，从而达到帮助学生积累活动经验、培养应用意识和创新意识的目的。

第 n 分钟	1	2	3	4	5	6	7	...
第 n 分钟新接到通知的队员数	1	2	4	8	16	32	64	...
到第 n 分钟所有接到通知的队员和老师的总数	2	4	8	16	32	64	128	...
到第 n 分钟所有接到通知的队员总数	1	3	7	15	31	63	127	...

4. 建议用1课时教学。

（四）具体内容的教材分析和教学建议

编写意图

教材安排了“打电话”的综合实践活动，以学生的有序探究呈现了实践活动的全过程，使学生感受到教学与实际生活的紧密联系。

首先，以文字描述呈现问题情境，并请学生提取这个实际问题的三个关键信息，有利于培养学生认真审题、发现问题和提取信息的习惯和能力。

接下来，以学生的探究交流为主线，分三步展开实践活动。

第一步，由小精灵的提问“你打算怎样解决呢”，引导学生有目的、有步骤地探讨最优方案。

这里分两个层次。第一个层次是充分展示学生“打电话”的方案“一个一个地通知”和“分组通知”，同时引出学生的思考“是不是分的组越多用的时间越少”，激发认知冲突，调动学生继续学习和探索的积极性。

第二个层次，教材编排了引领性的问题“还有更快的方法吗”，引导学生一步一步深入思考，让学生在多样的方法中寻找最优方法。



打电话

一个合唱队共有15人，暑假期间有一个紧急演出，老师需要尽快通知到每一个队员。如果用打电话的方式，每分钟通知1人，请帮老师设计一个打电话的方案。

请你提取这个实际问题的关键信息，写在下面。

要通知的人数：_____

通知的方式及用时：_____

对于通知的要求：_____

你打算怎样解决呢？

可以一个一个地通知。

这样太慢了——

分组通知会快些。

是不是分的组越多用的时间越少？

想一想，还有更快的方法吗？

每个队员接到通知后马上通知别人。

除了他（她）再通知其他人——

教学建议

（1）培养学生发现和提出问题的能力。

爱因斯坦曾说过：“提出一个问题往往比解决一个问题更为重要。”教学时，教师要引导学生不断思考，发现问题。如，开始时要引导学生根据问题情境提取关键信息，在收集和处理信息的过程中提出问题“该如何设计打电话方案呢”，在讨论“分组通知”时引导学生发现问题“是不是分的组越多用的时间越少”。

（2）唤醒学生已有的知识基础和生活经验。

学生对于优化思想并不是一片空白。生活

中学生已经积累了相关的经验，四年级上册也学习了“数学广角——优化”，这里的“每个人尽量不空闲”和“同一时间内能同时做的事情同时做”“锅尽量不要空着”本质上是相同的。教师可以在课前带领学生简单温习数学广角的知识，为学生的知识迁移作好铺垫。

（3）尊重学生的思维差异。

在活动过程中，由于个体的差异，并不是所有学生都有达到最优策略的能力。如，分组通知时，学生可能出现分3组、4组、5组等，即使分3组，也可能出现(5, 5, 5) (6, 5, 4) (7, 5, 3)等情况。教师要尊重学生的差异，保护他们参与的热情，保证每个人都全程参与。

编写意图

第二步，发现规律。这里也分为两个层次。

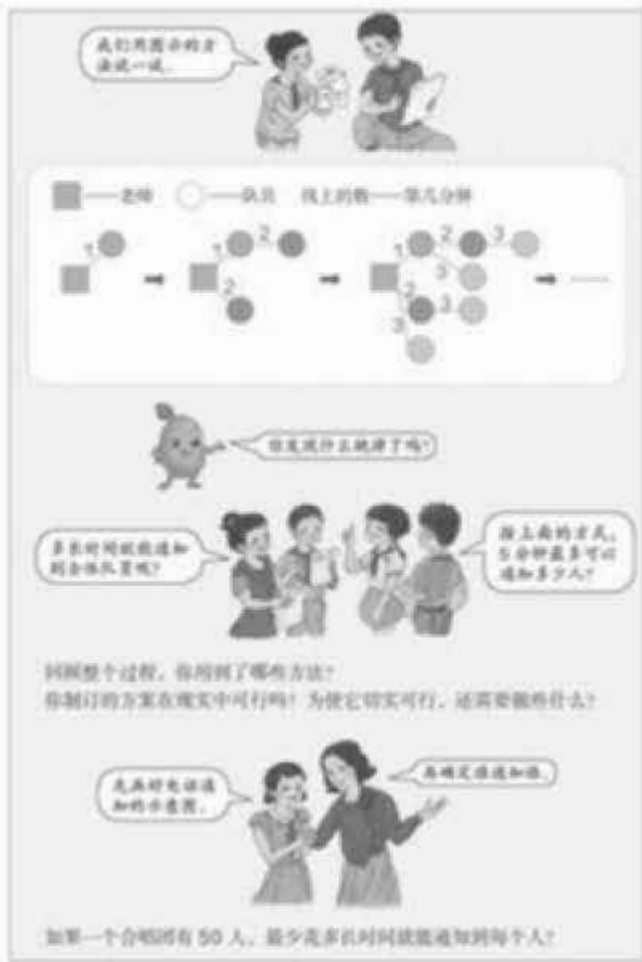
第一个层次，教材编排了两个学生的对话“我们用图示的方法试一试”，旨在充分展示学生多样化的思维过程，如语言叙述、图文并茂、画图等，并在比较交流中让学生体会到教材所呈现的数形结合方法的简洁性和科学性。

第二个层次，“你发现了什么规律”，目的是让学生在充分观察、思考、讨论、交流的基础上，发现每增加一分钟新接到通知的队员数正好是前面所有接到通知的队员和老师的总数。

第三步，应用规律。进一步讨论“多长时间就能通知到全体队员呢”和“按上面的方式，5分钟最多可以通知多少人”，主要目的是让学生从正向和逆向两方面深刻理解和巩固发现的规律。

“切实可行”不仅仅是要将规律与实际相结合，教师还要向学生说明这里说的都是理想情况，即每通知一人正好要用1分钟，不考虑其他特殊情况。

最后，进一步应用规律解决问题，培养学生的应用意识。



教学建议

(1) 抓住核心，引导学生发现规律。

尽快通知的核心是“每个接到通知的队员都不空闲”，规律的核心是“第 n 分钟新接到通知的队员数等于前 $(n-1)$ 分钟内接到通知的队员和老师的总数”。教学时，教师要抓住这两个核心，设计“每分钟新增的队员数有什么特点”“为什么要加上老师”“每分钟老师和队员的总数有什么特点”等问题，引领学生发现规律，并根据教学实际，借助表格（见第221页）帮助学生理解。至于学生的叙述语言，只要意思表达清楚，不需要太严格和规范。

(2) 促进学生数学能力的提升。

一是在发现规律的过程中，教师要通过观察、思考和交流，提高学生概括、提炼和总结的能力，培养学生的几何直观、推理思想和模型思想。

二是要引导学生将规律和方法内化为活动经验，并按照“模式”重复运用这种经验。这样，在反思提炼的基础上，解决“5分钟最多可以通知多少人”就更容易了。最后的问题“如果一个合唱团有50人”数据较大，图示法也不是很简便，更是要求学生在理解规律的基础上解决，促进学生思维在更高层次上发展。当然，学生用图示法解决，教师也要给予肯定。

二、教学设计或教学片段

课题：打电话

教学设计：罗雪莲、陈亮、李峰。

教学内容：教科书第102~103页的内容。

教学目标：

1. 从解决问题的多种方案中找到“打电话”的最优方案，发现事物隐含的规律。
2. 通过画图、表格等方式，自主探究、合作交流，培养学生归纳推理和应用数学知识解决实际问题的能力。让学生体会数形结合、推理、优化、模型等数学思想。
3. 使学生进一步体验数学与生活的密切联系以及优化思想在生活中的应用。

教学重难点：探究和理解“打电话”的最优方法。

教、学具准备：表格。

教学过程：

（一）温习旧知，谈话导入

教师：还记得我们前面学习的“数学广角——优化”的知识吗？怎样沏茶才能让客人尽快喝上茶？怎样烙饼才是最快的方法？谁来说说。

学生回顾已学知识。

教师：日常生活中，还有一些问题也是需要尽快完成的。例如，学校合唱队暑假接到一个紧急演出的任务，老师需要打电话尽快通知到每一个队员。电话大家都会打吧？

学生：会。

教师：但要尽快通知到每一个队员那就不仅仅是打电话的问题了，其中还需要用到我们的数学知识。这节课我们就来一起研究“打电话”的问题。（板书课题：打电话）

（设计意图：温习已学的有关优化的知识，为学生的知识迁移打好基础。接着开门见山，直入主题，让学生明白本课的学习内容，为下面的探究学习留出充足时间。）

（二）合作探究，学习新知

1. 分析题意。

教师：在这个实际问题中，你觉得有哪些关键的信息值得我们重视？

教师点名回答，引导学生提炼出“要通知的人数、通知的方式及用时、对于通知的要求”等关键信息。

2. 探索比较。

教师：要解决这个问题，你们能够想到什么办法？

（1）逐个通知。引导学生感受逐个通知太慢了。

（2）分组通知。教师和学生一起讨论研究分组通知的情况。

教师：如果分组通知，你会怎么分组？分组之后再怎样通知呢？通知完共需要多长时间？以小组为单位，讨论分组方法、方式，然后再画一画、算一算，看哪个小组完成得好。

小组活动过程中，教师巡视，并指导学生分别探究讨论打电话时平均分组和不平均分组的情况。

学生汇报，教师引导学生简要说明，出示示意图并板书部分分组方案。

①3组 (5, 5, 5)，需要7分钟。

②5组 (3, 3, 3, 3, 3)，需要7分钟。

③3组 (6, 5, 4)，需要6分钟。

④4组 (4, 4, 4, 3)，需要6分钟。

教师：这4种方案和逐个通知相比，有什么不同？为什么分组通知用的时间少？

教师：那是不是分的组越多用的时间越少？

通过讨论交流，使学生明白以下两点：一是逐个通知，只有老师一个人通知，队员都是闲着的，而分组通知时组长在帮忙通知，所以分组通知比逐个通知用时少；二是并不是组分得越多用时越少。

(3) 优化方案。

教师：想一想，还有更快的方法吗？怎样通知才能保证用时最少？

使学生明白只有接到通知的队员继续通知后面的队员，直到全部通知到为止，这样每个接到通知的队员包括老师都不空闲，才是最省时的方案。

(设计意图：从逐个通知到分组通知，再到相互转告的通知方法，让学生在列举和比较多种方案中亲历优化的过程。在比较、交流中，学生的思维活跃了，方法优化了。)

教师：像这样相互转告的方法需要多少时间呢？请同学们用图示的方法画一画。

(学生画图时教师巡视，予以指导)

学生展示、汇报、交流，师生一起对完成的示意图进行评价、整理和补充。

教师引导学生小结：刚才我们想到的这么多种方案，通过比较，你觉得哪种方案用时最少，为什么？

(设计意图：把主动权交给学生，让学生先独立思考，再展示、交流、汇报作品，教师适当引导，使学生经历最优方案的生成过程，培养学生的逻辑思维能力 and 语言表达能力。)

3. 发现规律。

教师：结合我们刚才的画图和计算，请同学们独立完成下面的表格。

第 n 分钟	1	2	3	4	5	6	7	...
第 n 分钟新接到通知的队员数								...
到第 n 分钟所有接到通知的队员和老师的总数								...
到第 n 分钟所有接到通知的队员总数								...

学生填写完表格后教师提问：通过填写表格，你有什么发现？

教师适时引导，让学生发现每增加一分钟新接到通知的队员数正好是前面所有接到通知队员和老师的总数。

（设计意图：用表格的形式，让学生通过观察、分析，克服思维的表面性，抓住事物的内在规律和本质特点，建立数学模型。）

4. 应用规律。

(1) 根据你发现的规律，按照这样的方法，5分钟最多可以通知多少人？

(2) 我们班有50名同学，还是用刚才的方法，最少在几分钟里就能通知完全班同学？

（有条件的话，教师可以请学生演示解决问题的过程。）

（设计意图：运用规律解决问题，巩固建模，进一步体会优化思想。）

（三）回顾过程，拓展延伸

教师：通过刚才的探究，我们知道短时间内可以通过相互打电话通知很多同学，提高通知效率。但要让这种通知方法真正行之有效，打电话之前还要做一些准备工作，你觉得还需要做哪些准备工作？

（通过讨论，使学生明白打电话前需要制订好电话通知的示意图，老师和每个接电话的学生都应明确知道按照什么顺序通知后面的同学。只有严格按照制订好的方案执行，才能达到节省时间、提高效率的目的。）

教师：阿凡提的故事爱听吗？老师这儿也有一个有关阿凡提的故事。有个贪财的巴依老爷，他爱欺压穷苦百姓，阿凡提知道了，找到巴依老爷，想和他做一个交易：阿凡提每天给巴依老爷40两银子，巴依老爷第一天给阿凡提1两银子，第二天给他2两银子，第三天给他4两银子，第四天给阿凡提8两银子……这样下去，相互给10天。巴依老爷听了，马上同意，请来证人，签字画押，即日实行。你觉得巴依老爷在这场交易中获利了吗？为什么？

学生思考，讨论交流，教师指导。

教师：在现实生活中，还有很多现象蕴含着我们今天打电话所发现的规律。比如我们常说的“一传十、十传百”的口头语，还有细胞分裂、浮萍生长等现象。希望你们能运用今天的知识去解决更多的实际问题。

（设计意图：贴近学生的生活经验，关注学生的亲身感受，让学生感受到生活中处处都有数学问题。同时，以身边的事例、故事的形式设计练习，激发学生的学习兴趣。）

（四）课堂小结，畅谈收获

教师：同学们，今天你们学到了什么新知识？

教师：还记得我们是怎样学习的吗？

教师：在打电话通知很多人的时候，怎样打电话最省时？为什么？

教师：今天的学习给你印象最深的是什么？你还有什么问题吗？

三、备课资料

几何倍增学

传说，印度的舍罕国王打算重赏国际象棋的发明人——大臣西萨·班·达依尔。这位聪明的大臣跪在国王面前说：“陛下，请你在这张棋盘的第1个小格内，赏给我一粒麦子，在第2个小格内给两粒，在第3个小格内给4粒，照这样下去，每一小格内都比前一小格加一倍。像这样把棋盘上所有64格的麦粒，都赏给您的仆人吧！”国王说：“你的要求不高，会如愿以偿的。”说着，他下令把一袋麦子拿到宝座前，计算麦粒的工作开始了……还没到第20小格，袋子已经空了，一袋又一袋的麦子被扛到国王面前。但是，麦粒数一格接一格地增长得那样迅速，很快看出，即使拿来全印度的粮食，国王也兑现不了他对国际象棋发明人许下的诺言。

国王究竟应给国际象棋发明人多少粒麦子呢？

$$1+2+4+8+\cdots+2^{63}=2^{64}-1=18446744073709551615 \text{ (粒)}$$

这就是被爱因斯坦称为“世界第八大奇迹”的几何倍增学的来历。几何倍增学用在商业上也可称为市场倍增学，用在数学上也就是几何级数的形式，笼统地说就是鸡生蛋，蛋孵鸡，鸡再生蛋，蛋再孵鸡。

比如，一份工作，假如有两种薪资报酬，如下。

A：一个月给你30万元，每天给你1万元。

B：按天发放，第一天给你一分钱，然后，后一天是前一天的2倍。

如果是你，是选择A，还是选择B？

选择B将会出现下面的结果：

第1天：0.01元

第2天：0.02元

第3天：0.04元

第4天：0.08元

第5天：0.16元

第6天：0.32元

第7天：0.64元

第8天：1.28元

第9天：2.56元

第10天：5.12元

……

第22天：20971.52元

第23天：41943.04元

第24天：83886.08元

第 25 天：167772.16 元
第 26 天：335544.32 元
第 27 天：671088.64 元
第 28 天：1342177.28 元
第 29 天：2684354.56 元
第 30 天：5368709.12 元
30 天合计：10737418.23 元
这个就是倍增的力量！

四、评价建议与评价样例

（一）评价建议

该综合与实践活动通过创设学生熟悉的“打电话”的生活情境，指导学生用画图、列表格等方式，找到“打电话”的最优方法，让学生经历针对具体问题提出设计思路、制订简单的方案解决问题的过程，培养学生运用数学知识解决实际问题的能力。因此，对本活动的评价主要围绕学生是否真正发现“打电话”中蕴含的规律及运用发现的规律解决生活中的实际问题来进行。

（二）评价样例

本课内容可以通过实践活动的形式进行评价。

以下为实践活动样例：

孙悟空在去西天取经的路上又遇到了妖精，它每次拔一根毫毛就能变成一个孙悟空，变出的孙悟空每次拔一根毫毛也能变成一个孙悟空，每次变化需要的时间是 2 秒钟。

- （1）如果要变化出 15 个孙悟空，最短需要多少时间？把你的想法画出来。
- （2）10 秒钟最多能变化出多少个孙悟空？
- （3）如果要变化出 60 个孙悟空，至少需要多少秒钟？

第七单元 折线统计图

一、教材说明和教学建议

(一) 教学目标

1. 认识单式折线统计图，了解其特点，能根据需要用折线统计图直观地表示数据。
2. 认识复式折线统计图及其特征，能根据需要选择折线统计图直观、有效地表示数据，并能对数据进行简单的分析和预测。
3. 结合统计知识的学习，进一步体会统计在生活中的意义和作用，提高数学学习的兴趣。

(二) 内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

前面学生已经掌握了收集、整理、描述、分析数据的基本方法，会用统计表（单式和复式）和条形统计图（单式和复式）来表示统计结果，并能根据统计图表解决简单的实际问题。在此基础上，本单元认识一种新的统计图——折线统计图（单式和复式），帮助学生了解单式折线统计图和复式折线统计图的特点和思想，根据折线的变化特点对数据进行简单的分析，更好地了解统计在现实生活中的意义和作用，有效建构数据分析观念。具体编排如下表。



2. 教材编写特点。

(1) 以已有的知识经验为基点，引导学生探究学习新知识。

前面学生已经认识了单式、复式条形统计图。因此，教材在编排本单元内容时，通过与先前统计知识的联系，学习单式、复式折线统计图。这样既有助于加深对前面所学知识的理解，也便于对新知识的领悟和掌握。

如折线统计图是在条形统计图的基础上引入的。条形统计图除了能直观地表示数据外，也可以反映出数据的变化情况，只是不如折线统计图直观、明显。但通过对比，可以加深对折线统计图特点的认识。因此，教材先用条形统计图表示出数据，再将这些数据用折线统计图表示出来，一方面沟通两者之间的联系，另一方面又凸显了折线统计图的特点。再如，复式折线统计图的编排沿用了复式条形统计图的思路。由两个单式折线统计图，引出复式折线统计图，让学生感受复式折线统计图较单式折线统计图的优势：可以同时看到两组数据的变化情况。

(2) 以丰富的生活素材为基础，在学习中学体现统计的价值。

本单元精心选取了富有现实意义的生活素材，让统计知识与生活紧密联系起来。如中国青

少年机器人大赛参赛队伍数量的变化、儿童身高的变化、近十年上海的出生人口数和死亡人口数的变化、农村居民年收入情况、某地月平均气温变化情况等。这样不仅扩大了学生处理信息的范围，加强了与生活的联系，同时使之充分认识体会到统计知识的作用。

(3) 经历统计的过程，培养学生发现问题、解决问题及进行合理推测的能力。

教材在让学生学习绘制统计图之后，一方面，根据统计图解决有关问题，为学生发现问题、提出问题及解决问题提供了较大的空间；另一方面，让学生感悟由于数据变化带来的启示，并能合理地进行推理与判断，提高数据分析能力。同时，教材还提供了大量的实践性调查与问题解决，如练习二十六中的第3、6、8、9题等，帮助学生积累数学活动经验。

(三) 教学建议

1. 加强新旧知识之间的衔接和对比。

教学本单元时，可充分利用学生已有的知识经验，以知识迁移的方式建立新旧知识之间的联系，通过与所学知识的对比，体会折线统计图的特征和适用范围。如教学单式折线统计图时，可以通过条形统计图导入，在对比中感悟折线统计图的特点；教学复式折线统计图时，可先用单式折线统计图分别表示两组数据，让学生体会到，单式折线统计图可以清楚地反映出一组数据的增减变化，但在对两组数据进行比较时就不方便了，由此引出复式折线统计图，从而使学生深切体会到折线统计图的特点和优势，加深对复式折线统计图的认识。

2. 重视统计学习的现实意义和核心思想。

统计与我们的生活是紧密相连的，折线统计图能更清楚地反映出数据的增减变化。教学时应充分利用其特点，让学生感悟体会这一特点，并从中引发思考，认识折线统计图反映的现实意义，学会根据数据的变化合理地进行预测，增强数据分析观念。

让学生经历简单的收集、整理、描述和分析数据的过程是学习统计知识的重要目标。这就要求教师应创造尽可能多的机会让学生亲自从事简单的统计活动，如调查同学们的视力情况、喜欢看的科普读物、所穿鞋子的号码、零花钱的使用情况等。教师要鼓励学生积极投入到各种活动中，留给他们足够的独立思考和自主探索的时间与空间，并在此基础上加强与同伴的合作与交流。

3. 注重对学生开展统计活动的过程性评价。

从事统计活动的过程中，教师应起到引领、指导的作用。例如，教师可以提出一些问题引发学生的讨论：你们准备如何收集数据？用什么方法展示数据？哪些数据经常出现？数据反映出什么趋势？从这些数据中能得到什么结论？从这些结论中能预测到什么？等等。而在自主探索的过程中，学生可能会用多种方法解决问题，如在统计活动中选择不同的调查对象，选择不同的收集数据的方法，用不同的统计图表来描绘数据等，教师要充分鼓励学生采取可行的个性化的解决问题的方式，以促进他们的发展。当然，我们要承认学生之间存在差异，在保证基本要求的前提下允许差异的存在，并尽量挖掘每一个学生的潜能，使学生在合作交流中互相促进、共同发展。

4. 建议用3课时教学。

（四）具体内容的教材分析和教学建议

7 折线统计图

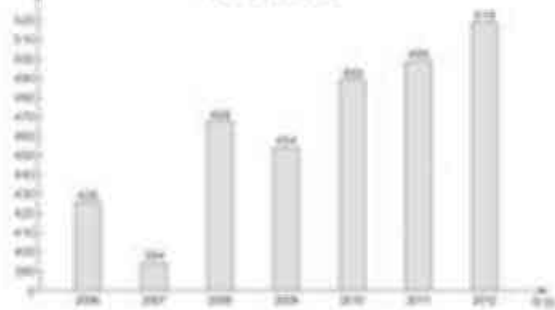
1



中国青少年机器人大赛参赛队伍统计表

年份	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
参赛队伍/支	426	394	468	454	499	499	519

中国青少年机器人大赛参赛队伍统计图
(2006—2012年)



104

编写意图

例1教学单式折线统计图。教材以中国青少年机器人大赛为题材，给出了最近7年此项大赛参赛队伍的数据，并用条形统计图呈现出来。

一方面，通过青少年机器人大赛激发学生参加科普活动的兴趣；另一方面，回顾条形统计图能直观看到数据的多少的特点，初步感悟数据的变化情况，为引出折线统计图提供途径。

教学建议

（1）把握素材选择的合理性。

统计来源于生活，折线统计图同样来自实际需要。教学时要选取富有现实意义的生活素材，让统计知识与生活紧密联系起来。同时，提供的素材要有利于学生理解数据的变化和体会折线统计图学习的价值。

例如，可结合教材所提供的机器人大赛的情境开展科普教育，同时，根据不同年份的数据变化，使学生感受到科技发展的趋势和影响力。教师也可以选择其他适合的素材，如当地一年中月平均气温变化、学校近十年入学人数

变化情况等能体现数据变化趋势的素材。

（2）加强新旧知识的对比和联系。

教学时，可根据参赛队伍数量的统计表，并结合对以前统计知识的回顾，绘制成条形统计图。通过观察、对比统计表和条形统计图，感悟各自的特点。同时，引导学生根据参赛队伍数量的增减变化情况，谈谈自己的感想，为自然引入折线统计图的学习埋下伏笔。

编写意图

(1) 教材在前面条形统计图的基础上,引出折线统计图,并通过下面的两个问题启发学生思考,在折线统计图与条形统计图的对比中了解两者各自的特点。

从数据的呈现方式上来说:条形统计图是用直条表示数据,折线统计图是根据数量的多少描出各点的位置,然后把各点用线段顺次连接起来。

从作用上来说:从条形统计图中可以直观地看出各种数量的多少;折线统计图不仅可以表示出数量的多少,而且还能清楚地表示出数量增减的变化情况。

(2) 结合折线统计图对数据进行分析,发现参赛队伍数量呈上升趋势,可以对今后的数据进行预测。从而进一步体会折线统计图的适用性和它的优势。

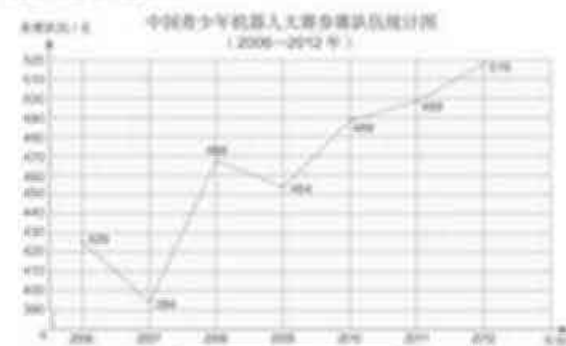
(3) “做一做”让学生通过绘制折线统计图,明确绘制的步骤。通过分析陈东和自己的身高统计图,进一步感受折线统计图能清楚看到数据的变化趋势的特点,并为后面学习复式折线统计图埋下伏笔。

教学建议

(1) 通过对比,体会折线统计图的特点。

教学时,让学生先观察条形统计图并思考:参赛队伍的数量有怎样的变化?学生可以从数据的大小或者条形图的高低感受数据的变化情况,教师适时引出并介绍新的折线统计图。接下来,对比观察两种不同的统计图,让学生进行充分的比较和交流,体会折线统计图的特点,它既可以反映数据的多少,更能反映数据的增减变化。最后,引导学生观察折线统计图,发现问题、提出问题并尝试解决问题。如让学生对今后的参赛队伍数量进行预测,体

统计图还可以这样做。



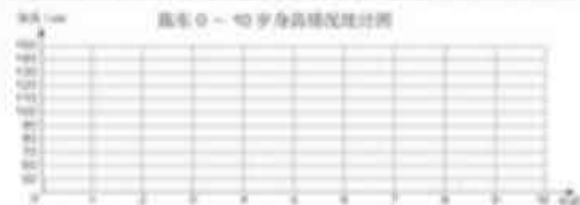
这种统计图叫折线统计图。

- (1) 你发现的折线统计图有什么特点?
- (2) 中国青少年机器人竞赛参赛队伍的数量有什么变化?你有什么感想?

做一做

妈妈记录了陈东0~10岁的身高,根据下表中的数据绘制折线统计图。

年龄	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身高/cm	50	74	85	93	101	108	115	120	130	135	141



- (1) 陈东哪一年长得最快?长了多少厘米?
- (2) 收集、整理你自己的身高数据,利用方格纸绘制折线统计图,说一说你发现了什么。

100

会统计的价值。

(2) 重视动手实践,增强数据分析观念。

“做一做”可以放手让学生自主探索,在描点、连线的过程中进一步体会折线统计图能更清晰地反映数据的增减变化的特点。结合下面的问题进行数据分析,还可以对“陈东5岁半时的身高”进行合理的推测。

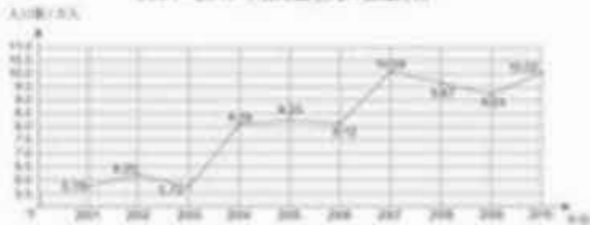
继续让学生收集、整理自己身高的数据,或者调查全国儿童的平均身高,绘制成折线统计图,对照陈东的身高进行数据分析,还可以对陈东或自己未来的身高作出预测。一方面感知统计的现实意义,加深对折线统计图的认识,另一方面也为复式折线统计图的学习作好铺垫。



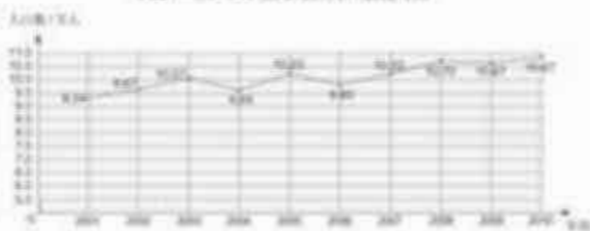
中国已进入老龄化社会,尤其是上海,早在20世纪70年代就进入了老龄化,出生人口数和死亡人口数是重要的影响因素——

下面是一个小组调查的2001—2010年上海的出生人口数和死亡人口数。

2001—2010年上海出生人口数统计图



2001—2010年上海死亡人口数统计图



这样看来,不太好
看,比较出生人口数
和死亡人口数的情
况啊!怎样比较方
便呢?



有复式条形统计
图,也有复式折
线图啊!

编写意图

(1) 例2教学复式折线统计图。编排思路和复式条形统计图相同。单式折线统计图可以清楚地反映一组数据的变化情况,但在对两组或两组以上的数据进行分析时就不方便了,由此自然引出复式折线统计图。

(2) 教材以老龄化社会为题材展开教学。先确定决定老龄化社会的影响因素:出生人口数和死亡人口数;再通过对某地的出生人口数和死亡人口数的抽样调查数据,绘制合适的统计图。

教材以上海市为例,用单式统计图分别呈现了2001—2010年上海出生人口数和死亡人口数,让学生在比较两组数据的过程中感受到单式折线统计图的局限性,从而产生用复式折线统计图表示数据的需要。

教学建议

(1) 让学生明确用统计解决问题的步骤。

首先,要让学生了解影响老龄化的因素是出生人口和死亡人口数,因此出生和死亡人口数是调查对象。其次,体会抽样调查的作用,教材选取了上海作为样本来研究。最后,根据研究需要选取适当的统计图表整理数据。这个过程只让学生了解即可,其中数据的收集并不一定需要学生真正去采集,教师可在课前准备好数据表格,让学生自行绘制单式统计图。

(2) 在依据单式折线统计图对比两组数据的过程中,感受引出复式统计图的必要性。

要反映老龄化社会,需要比较出生人口数和死亡人口数的变化情况。而用两个单式折线统计图进行两组人口数的对比不太方便,由此让学生感受到单式统计图的局限性,从而体会到引入复式折线统计图的必要性。

教学中,教师可以让学生充分发表意见,调动学生已有的复式条形统计图的学习经验,自主地迁移到折线统计图中来。

编写意图

(1) 引出复式折线统计图。

通过讨论，明确绘制复式统计图的注意事项：用不同颜色的折线表示两组不同的数据，用图例标明两条折线的含义。接下来将复式统计图补充完整。

(2) 感受复式折线统计图特点。

通过观察，比较复式统计图和单式统计图的不同点，从而体会复式统计图的特点：不仅能看出数量增减变化的情况，而且便于比较两组相关数据的差异和变化趋势。

接下来，借助复式折线统计图进行数据分析，从上海出生人口数和死亡人口数的变化趋势可以看到出生人口比死亡人口少，只是差距越来越小，进一步体会到复式折线统计图的特点。这里，教材介绍了“人口自然增长数”和“人口负增长”两个概念，从这两个维度体会人口变化的趋势。

最后，让学生结合全国的人口数据去发现规律（自然增长数逐渐减少），进一步感受我国人口变化的特点。结合上海和全国的数据，感受我国人口的变化趋势，体会统计的实际应用价值。

教学建议

(1) 经历复式折线统计图的绘制过程。

完成复式折线图的过程中，引导学生重点讨论：为什么要用不同的颜色区分两条折线（可介绍虚线、实线的方式）？图例的作用是什么？以明确绘制复式折线统计图应注意的问题。

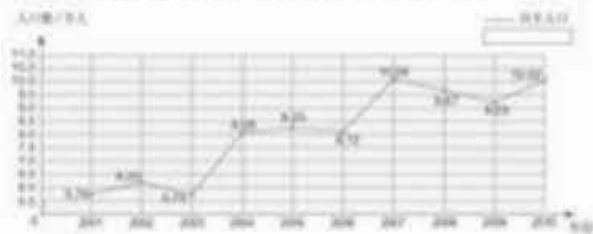
(2) 体会复式折线统计图的特点。

结合具体问题，如哪一年出生人口数相差最多？哪一年最少？哪段时间相差比较大？哪段时间相差比较小？对照单式和复式折线图进行回答，由此体会复式统计图便于直观比较两组数据变化的特点。

请在下面图中绘制复式折线统计图。



2001—2010年上海出生人口数和死亡人口数统计图



- (1) 观察复式折线统计图，你能说说上海出生人口数、死亡人口数的变化趋势吗？
- (2) 每年的出生人口数和死亡人口数之间存在什么关系？

出生人口数和死亡人口数之差是人口自然增长数。上海人口从1995年开始负增长。

- (3) 结合全国2001—2010年出生人口数和死亡人口数统计表，你能发现什么共同的规律吗？

年份	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
出生人口/万人	1728	1652	1604	1588	1621	1589	1589	1612	1619	1536
死亡人口/万人	821	823	827	835	851	895	916	938	942	953

(3) 充分解读信息，培养数据分析观念。

复式折线统计图既能反映各组数据的变化趋势，又隐含着各组数据之间的差异。因此在分析数据时，既要注意显性数据的分析，又要重视隐性数据的挖掘。如第(1)题通过观察两条折线，可以明显看到出生人口数、死亡人口数的变化趋势。第(2)题则能通过两组数据之差体会人口变化趋势。数据差的变化趋势比较隐蔽，需要通过观察、比较才能发现。第(3)题中两组数据的差，即全国人口自然增长数，呈逐渐减少的趋势，说明人口增长的速度减缓。可以让学生计算每年出生人口数和死亡人口数之差(887, 829, 777, ...)来体会。

练习二十六

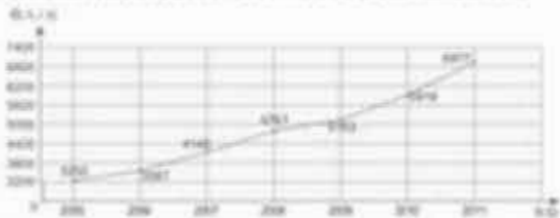
1. 某小学一至六年级喜欢看科普读物的学生人数如右表, 根据表中的数据, 制成折线统计图。

年级	一	二	三	四	五	六
人数	20	26	32	47	68	83



- (1) 四年级喜欢看科普读物的人数是多少?
 (2) 李明所在年级喜欢看科普读物的人数排第 2 位, 李明是哪个年级的?
 (3) 你还能提出什么数学问题?

2. 下面是我国农村村民 2005—2011 年年人均纯收入情况统计图。



- (1) 我国农村村民年人均纯收入呈现什么变化趋势?
 (2) 你还能提出什么数学问题?

3. 调查学校一至六年级学生近视的情况, 完成右面的统计表, 并在方格纸上绘制折线统计图。

年级	一	二	三	四	五	六
人数						

编写意图

第 1~3 题是配合例 1 的习题。

(1) 第 1 题, 巩固单式折线统计图的画法。教材给出了某小学一至六年级喜欢看科普读物的学生人数, 让学生尝试绘制折线统计图。在此基础上进行数据分析, 了解不同年级学生喜欢看科普读物的人数的变化情况。

(2) 第 2 题侧重于数据分析, 重点让学生通过观察数据的变化趋势, 感受我国农村生活的巨大变化, 强化统计的现实意义。

(3) 第 3 题是实践活动, 通过调查学校一至六年级学生近视人数的情况, 让学生掌握收集、记录、整理数据的方法, 并尝试用方格纸完成折线统计图, 经历统计的全过程。

教学建议

(1) 引导学生根据折线统计图的特点, 进行数据分析。

进行数据分析时, 要引导学生观察数据变化的情况, 说出反映的事实, 并尝试分析背后的原因。还可以让学生根据统计图表的数据充分地进行交流。如第 1 题看科普读物的学生随着年级升高人数越来越多, 第 2 题人均纯收入也是逐年增加的, 说明我国农村居民的生活水平在逐年提高。

(2) 让学生经历数据收集、整理和分析的全过程。

第 3 题, 在调查学校学生近视情况前, 要让学生先作好分工合作的准备。如小组人员的确定、分工、记录等。然后让学生在方格纸上尝试绘制折线统计图, 并对近视数据的变化情况进行分析, 还可以给同学和学校提出一些合理的建议。

编写意图

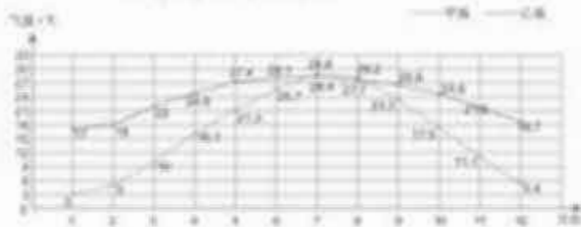
第4~6题是配合例2的习题。

(1) 第4题侧重于数据分析。通过数据分析让学生了解甲、乙两地的不同气候特点,进一步解决相应的实际问题,体会统计数据对解决问题的作用。如根据甲、乙两地月平均气温图可以确定树莓适合在甲地种植,因为甲地11月~次年3月的气温在 $3\sim 11.1^{\circ}\text{C}$ 。

(2) 第5题巩固复式折线统计图,并进行数据分析。通过比较男、女生平均身高的变化,发现男生总体比女生高,9~13岁身高差不多,14、15岁时,男生明显比女生高。通过让学生把自己身高与平均值比较,体会统计对生活的指导作用。

(3) 第6题也是一个实践活动。让学生在课余时间通过记录自己零用钱的收入与支出情况,掌握收集、整理数据的方法。并在用复式统计表、复式折线统计图表示数据后,与同学开展交流与分析,提出建议。从中培养统计意识,积累活动经验。

4. 甲、乙两地月平均气温统计图

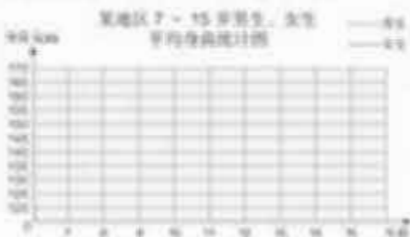


- (1) 观察统计图,你能判断一年气温变化的趋势吗?
- (2) 有一种树莓的生长期为5个月,最适宜的生长温度为 $7\sim 10^{\circ}\text{C}$,这种植物适合在哪个地方种植?
- (3) 小明住在乙地,他们一家要在“十一”黄金周去甲地旅游,你认为应该作哪些准备?

5. 下面是某地区7~15岁男生、女生平均身高统计表。

年龄	7	8	9	10	11	12	13	14	15
男生/cm	125	132	136	140	145	150	157	163	167
女生/cm	123	127	130	141	145	152	156	157	158

请你根据表中的数据,画出折线统计图。



- (1) 比较男生和女生的身高变化,你能得出什么结论?
- (2) 把你的身高与平均数作比较,你有什么想法?

6. 记录你自己零用钱的收入、支出情况,并将你的统计结果分别用统计表、折线统计图的方式呈现出来,从中你还能发现什么有价值的数学信息?你对自己有什么建议?

教学建议

(1) 重视数据分析观念的培养,感受统计的价值。

要结合复式折线统计图,进行数据分析,了解数据反映的信息,并结合具体情境解决实际问题。如,第5题通过复式折线统计图比较发现,某地区7~15岁的男、女生平均身高都在随着年龄的增加而增高,但13岁之后女生的身高增长趋于平缓,增长速度要比男生的速度慢。练习时,可以把自己的身高数据也绘制出来,感受数据变化的一致性。第4题除了观察气温的变化趋势外,还可以利用统计数据解

决有关植物种植和旅游的实际问题。

(2) 经历数据的收集与整理过程,积累活动经验。

教学第6题时,教师可以让学生将自己整理的有关零用钱使用情况向全班同学汇报、交流。通过自己的实践和交流活动,让学生感受统计的实际意义,培养统计意识。

编写意图

7. 小组讨论, 下面两组数据分别用条形统计图还是折线统计图表示更合适?

(1) 五年级学生“五一”度假方式统计如下。

度假方式	探亲访友	在家休息	旅游	其他
男生	5	6	8	5
女生	6	5	6	4

(2) 民主路小学学生“五一”参加旅游人数统计如下。

性别	星期	一	二	三	四	五	六
男生		3	4	7	6	8	10
女生		4	5	5	7	6	8

8. 在报纸、杂志或网络上找出一些折线统计图(包括复式图), 贴在下面。



(1) 说一说统计图表达的意思。

(2) 可以用其他形式的统计图表示这些数据吗? 为什么?

9. 小组合作调查一项我们感兴趣的事例, 用统计表、统计图将统计的结果呈现出来, 并说一说你能从数据中发现什么。



110

教学建议

(1) 根据问题情境和数据特点, 选择合适的统计图。

第7题, 可先让学生充分展开讨论。首先根据所呈现的数据, 确定选用复式统计图, 再分析选复式条形统计图还是折线统计图, 引导学生根据问题的背景选择出合适的统计图。第(1)题应选复式条形统计图, 第(2)题应选复式折线统计图。

(2) 用数学的眼光观察世界, 发现并解决生活中简单的统计问题。

第8题, 让学生寻找生活中的折线统计

(1) 第7题, 给出了不同背景的数据, 让学生选择适当的统计图表示, 进一步感受条形统计图与折线统计图的不同特点和适用范围。

(2) 第8题, 通过折线统计图的学习, 让学生寻找生活中的折线统计图, 做到学以致用, 学会用数学的眼光观察世界, 发现生活中的统计应用价值, 培养学习统计的兴趣。

(3) 第9题是一个开放的统计实践活动, 也可以作为小课题开展活动。让学生经历选题, 调研内容的设计, 数据的收集与整理, 数据的呈现方式, 数据的分析等研究过程, 积累教学活动的经验。

(4) 结合“成长小档案”的单元总结, 学生全面回顾自己的学习与收获。一方面, 是对折线统计图特征的巩固; 另一方面, 是对后面继续学习的展望。

图, 并在班级中交流介绍。第9题鼓励学生合作互助。可就感兴趣的事例开展调查, 收集数据、整理数据、制统计表、绘统计图, 并开展汇报交流活动; 也可以组织学生对各组的研究情况包括所绘制的折线统计图进行评价。让学生经历小课题研究的一般过程。

在单元复习环节, 不仅让学生梳理本单元所学的知识, 还应让学生说一说获得了哪些学习的方法和解决问题的方法。如迁移类推的应用, 根据不同问题情境和数据选择适当的统计图等。

二、教学设计或教学片段

课题：单式折线统计图

教学设计：徐蓓蕾。

教学内容：教科书第104~105页的内容。

教学目标：

1. 通过与条形统计图的比较，认识折线统计图及其特征。
2. 读懂单式折线统计图所反映的数据信息和变化规律，能对图中的信息进行简单的分析，能初步进行判断和预测。
3. 经历数据的整理、分析与表示的过程，能根据提供的数据，在方格图中有条理地绘制单式折线统计图。

教学过程：

(一) 创设情境，揭题导新

1. 谈话引入。

同学们了解机器人吗？听说过青少年机器人大赛吗？这里是2006—2012年中国青少年机器人大赛参赛队伍的统计情况。

年份	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
参赛队伍/支	426	394	468	454	489	499	519

根据这一统计表，你能获得哪些数学信息？

2. 复习条形统计图。

(1) 为了更清楚地呈现每年的数据情况，我们可以用已学的条形统计图来表示。(出示教材第104页统计图)

(2) 这是我们以前学过的条形统计图，它有什么优点？

(可以看出数量的多少，谁多谁少也一目了然。)

(3) 用你的手，我们一起来比画一下这七年参赛队伍数量的变化情况。

(4) 大家比画出来的线路是怎样的？老师用课件来画一画，请仔细观察屏幕。

3. 揭示课题。

见过这样的统计图吗？这就是我们今天要认识的“折线统计图”。(板书课题)

(设计意图：用手势呈现数量的变化情况，为折线统计图的形成与学习作好铺垫。)

(二) 观察分析，认识特征

1. 比较分析、观察两者的相同点。

请同学们仔细观察两幅统计图，找一找它们的相同点。

2. 深入讨论、认识折线统计图的特征。

(1) 条形统计图的数量是用什么来表示的？折线统计图的数量又是用什么来表示的？

(2) 讨论：折线统计图与条形统计图比较，有哪些优势？和小组同学一起交流、讨论。

3. 折线统计图上有什么？你从中获得了哪些数学信息？

4. 从折线的变化情况你又能发现些什么呢？

(折线统计图能表示数量增减的变化情况。)

5. 变化发展趋势的分析。

(1) 中国青少年机器人大赛参赛队伍的数量有什么变化？你有何感想？

(2) 尽管从折线的变化情况来看，2007年参赛队伍数量有些下降，但总体来说，从2006年到2012年，参赛队伍数是呈上升趋势的。现在请你预测一下，2013年参赛队伍数可能会是多少？你又是怎样想的？

折线统计图不仅能够通过点的高低看出数量的多少，还能通过线的起伏看出数量的增减变化，并从这些变化中发现数量的发展趋势。这就是折线统计图的优势。

(设计意图：通过与条形统计图的对比，引导学生发现折线统计图的特点，帮助学生自己去认识、读懂折线统计图，学生在对比、观察、分析、发现中认识折线统计图的特点，体会折线统计图的作用。)

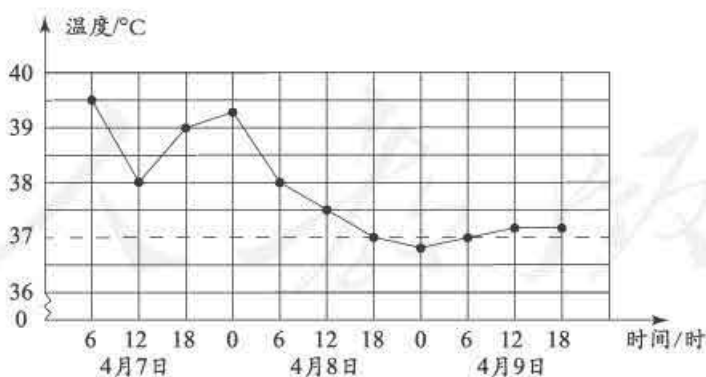
(三) 拓展延伸，强化认知

1. 联系实际生活体验折线统计图的应用价值。

生活中，你看到过这样的折线统计图吗？(学生举例)

2. 老师这里有一幅折线统计图，请你来当一当小小解说员，和同桌说一说从图中你读懂了什么。

小薇一次生病期间的体温记录折线统计图



(1) 你能从图中读懂什么？

(2) 这里的横虚线表示什么？

(3) 如果你是医生，看到这份体温报告你会说什么？怎么看出来的？

发展趋势是病人的体温在正常体温附近波动，病情逐渐好转。

(设计意图:感悟折线统计图在生活中的应用,并能读懂折线统计图,会对统计图中的数据变化情况进行分析。)

3. 对比感知,强化特征。

折线统计图很有用,能告诉我们很多的信息,是不是在哪儿都能用呢?下列两组数据选用什么统计图来刻画比较合适?

401班6位同学身高情况统计表

姓名	丁丁	小强	兰兰	小明	小涛	小月
身高/厘米	128	145	132	150	129	144

陈东0~10岁身高情况统计表

年龄/岁	0	2	4	6	8	10
身高/厘米	50	85	101	115	130	141

对于不同的个体,用条形统计图能清楚地看出每个个体数量的多少。

看来,有的数据需要用条形统计图来表示,有的数据则用折线统计图来表示比较好,关键要根据数据的特征和我们的需要来选择。

(设计意图:设计了“6位同学身高情况统计表”与“陈东0~10岁身高情况统计表”这组对比练习,使学生在讨论中明白:统计图更大程度上只存在合适与不合适之分,并不存在对错之分。)

(四) 动手绘制,阅读思考

1. 绘制折线统计图。

(1) 想象一下陈东0~10岁的身高情况画成折线统计图后大概是怎样的。

(2) 想一想,画折线统计图时,先画什么?再画什么?要注意些什么?

(3) 让学生在准备好的格子图上独立绘制,教师巡视,指导画法。

(4) 反馈交流,纠正问题。

2. 阅读思考:请你从画好的折线图中找一找、填一填。

(1) 陈东从()岁到()岁时长得最快,长了()厘米。

(2) 陈东身高115厘米时是()岁。

(3) 陈东3岁时的身高可能是()厘米。你是怎么想的?12岁时呢?

(4) 陈东会一直这样长下去吗?

利用折线统计图进行预测时,既要考虑图的趋势,也要考虑生活实际。要把数学和生活结合起来,学习数学才更有价值。

(五) 课堂总结, 回顾反思

我们一起来回顾一下今天的学习过程,你获得了哪些知识和方法?

(六) 布置作业

完成练习二十六第1~3题。

三、备课资料

中小学统计及其课程教学设计^①

——数学教育热点问题系列访谈之二

摘要：统计已经成为当今中小学数学课程的核心内容之一。统计学的研究基础是数据，依据数据进行分析和推断。统计教育价值的核心在于逐步养成尊重事实、通过数据来分析问题的习惯，培养理解和把握随机现象的能力。中小学统计课程设计、教学设计的主线应该是，体现从收集数据到统计推断的全过程，建立统计直观。

关键词：中小学统计；课程设计；教育价值；教学

当今中小学数学增加了统计学和概率论的内容，这些内容是一种“不确定性数学”内容，与传统的“确定性数学”内容有较大区别。这使得数学教育工作者以及在教学一线的广大教师普遍感到不适应。

统计的基本思想方法是什么？解决统计问题的基本途径是什么？中小学统计课程、教学中应当突出的重点是什么？中小学统计的教育价值是什么？带着这些迷茫和困惑，我们进行了较长时间的专题访谈和深入研讨。

访谈对象：史宁中教授（以下简称史教授）。

访谈形式：专题访谈，三人对话以及多人参加的讨论班式的访谈；辅以资料查询。

一、统计及其基本思想与方法

（一）什么是统计学

问：一般认为，“统计学”这个词源于拉丁语的“国情学”，原是国家管理人员感兴趣的事情。《大不列颠百科全书》对统计学下的定义是：“统计学是关于收集和分析数据的科学和艺术。”陈希孺院士认为：“统计学是有关收集和分析带有随机性误差的数据的科学和艺术。”史宁中教授，作为统计学家，您是如何认识统计学的？

▲ 史教授：我们先来简单地回顾统计学的历史是有益处的。正如拉丁语所说，统计原本就是收集和分析国家管理中需要的各种数据，比如国民收入、各种税收。为了直观，人们才发明了各种报表、直方图、扇形图等。可以看到，这种传统意义上的统计学现在仍然是非常重要的，这也是我们现在小学统计教学中的主要内容之一。后来到了14世纪左右，随着航海业在欧洲兴起，航海保险业开始出现。为了合理地确定保险金与赔偿金，需要了解不同季节、不同路线航海出现事故的可能性的的大小，需要收集相关的数据，根据数据进行分析和判断，这被称为是近代统计学的发端。到了19世纪末20世纪初，人们把数学、特别是概率论的有关知识引

^① 史宁中、孔凡哲、秦德生、杨述春：《中小学统计及其课程教学设计——数学教育热点问题系列访谈之二》，载于《课程·教材·教法》2005年第6期。

人到统计学，构建了统计学的基础。与古典统计学相比，虽然二者都是对于数据的收集和分析，但是却有本质的不同，因为后者进行分析的基础是“不确定性”，我们称之为“随机”。

到了现代，人们发现，对于大量数据的分析，采用随机的方法不仅方便而且准确。比如，对于国民收入，我们可以动用大量的人力来收集数据，但是谁都知道这样的数据不可能是准确的，远不如我们依据某种原则划分出地区和人群，然后抽样、加权求和准确。再比如，对于股票市场，一天交易之后，可以得到精确的交易总量，但是人们宁可用部分核心企业的股票交易量来反映股票的变化，这便是“恒生指数”“上证指数”等。特别是到了21世纪，银行、保险、电信，以及材料科学、基因组学等新兴学科的实验涉及大量数据，其分析更需要借助随机方法了。我想，大概就是因为这些原因，国家才决定在现在中小学数学的教学中加入统计学的内容。

因此，你们谈到的关于统计学的定义都是可以的。但是，要把握统计学的根本思想方法却是非常困难的。

问：那么，您认为统计学的基本思想方法是什么呢？

▲史教授：这是一个不容易回答的问题。对于统计学的掌握很大程度上依赖于“感悟”，需要较长时间的理解与实践。我们先来回顾一下中小学传统数学的教学内容。这些内容主要是对日常生活中见到的图形和数量的抽象，研究的问题是图形的变化与计算法则，研究的基础是定义和假设，研究的方法主要是归纳、递归、类比和演绎推理。

统计学则不同。如我上面谈到的，统计学是通过数据来进行分析和推断的。因此，统计研究的基础是数据。这些数据的特点是，对于每一个数据而言，都具有不确定性，我们需要抽取一定数量的数据，才可能从中获取信息。因此，统计学的研究依赖于对数的感悟，甚至是对一堆看似杂乱无章的数的感悟。通过对数据的归纳整理、分析判断，可以发现其中隐藏的规律。因为可以用各种方法对数据进行归纳整理、分析判断，所以，得到的结论也可能是不同的。而且，我们很难说哪一种方法是对的，哪一种方法是错的，我们只能说，能够更客观地反映实际背景的方法要更好一些。比如，我们希望知道某公司员工的收入情况，可以用平均数也可以用中位数，很难说哪个方法对、哪个方法错。事实上，如果收入比较均衡，用平均数要好一些；如果收入比较极端，用中位数要好一些。当然，最好的方法是对收入情况进行分类，但是分类的方法又有好坏之分。我们可以看到，统计学关心更多的是好与不好，而中小学传统数学关心更多的是对与错。

因此，统计学的基本思路是，根据所关心的问题寻求好的方法，对数据进行分析和判断，得到必要的信息去解释实际背景。

（二）统计学的研究对象

问：我们对于统计学有了一定的了解。从您的谈话中我们感觉到，统计学似乎是包罗万象的。那么，统计学到底研究什么呢？

▲史教授：是这样的，统计学的应用面非常广，凡是涉及数据分析的都可以成为统计学的研究领域。特别是到了近代，人们希望更加精细地了解实际背景，更多地借助数据分析，甚至人文科学也是如此，并且逐渐形成了专业的研究领域，比如计量经济学、计量社会学、计量

教育学、计量心理学等。这些研究领域分析方法的基础大体是统计学。统计学并不研究某一个领域的具体内容，在本质上只是研究数据分析的方法，这包括创造新的方法，也包括分析方法的好坏、分析方法的适用条件。

问：你能否结合中小学统计的内容谈得更具体一些？特别是，在统计教学过程中，应当把握的基本原则是什么呢？

▲ 史教授：可以。在统计研究中首先遇到的问题是如何获取“好”的数据。所谓“好”的数据是指那些能够更加客观地反映实际背景的数据，而要获取好的数据则要依赖于“好”的方法。根据数据的不同，方法主要分两大类，一是通过调查收集数据，二是通过实验制造数据。中小学统计教学中涉及的主要是前者，称为抽样调查（而后者通常被称为实验设计）。抽样调查又包含两个方面，一个是对已经存在的数据的收集，称之为抽样，比如市场的物价、学生的身高、企业的产值等；另一个是需要我们了解才能够获取的，称之为调查，比如美国总统的民意支持率、人们日常消费的主要项目、中小學生喜欢的歌手等。

根据问题的不同，所要采用的方法也可能不同，但是要建立两个基本原则。第一个基本原则是，采用能够获取“好”的数据的方法。为了获取好的数据，我们需要尽可能多地利用对于实际背景已有的先验知识。比如，希望知道学生的身高，先验知识是“年龄之间差别很大”。因此，最好是根据年龄段学生数的多少按比例抽取样本，我们称这种方法为“分层抽样”。可以看到，统计方法的直观想法是很明显的。如果对于实际背景一无所知，那么，一定要随意抽取样本，这便是“随机抽样”。比如，希望知道学生喜欢的歌手，因这些学生年龄之间差别可能不大，就可以采取“随机抽样”。当然，也可以用“分层抽样”，但是要麻烦得多。第二个基本原则是，采用简单的方法。能够基于上述两个原则的方法就是一个“好”方法。我们不要小看第二个原则，一个好的方法往往能够节省很多调查经费。这就是为什么咨询公司非常欢迎统计学家的原因。

问：刚才你提到了“样本”，许多教师对这个概念总是感到费解。

▲ 史教授：是的，这个概念很难把握。样本实质上就是数据，但是，统计学中涉及的数据往往是具有随机性的。还是回到“学生的身高”这个问题上来。在抽样之前，我们并不可能知道具体数据的大小，这些数据对于我们是随机的；为了讨论出一个好的方法，我们假想能够得到这些数据，并且假想这些数据的出现是依据某种规律的，这种规律就是数据出现的可能性的大小，我们称之为“概率”。比如，高年级学生出现大数据（高个子）的可能性要大于低年级学生，就是说，出现大数据的概率要大。但是，只有当抽样之后，我们才能得到真实的数据，才能进行实质的计算与分析。这样，我们所要研究的数据既具有随机性又具有真实性。为了方便起见，我们称这样的数据为样本。

问：根据你的阐述，统计学怎么有一些哲学式的思考呢？

▲ 史教授：你们理解到了根本。这是统计学与中小学传统数学的最大区别。传统数学可以根据假设和规定的原则进行计算或者推理，但是统计学往往要问你所采用的方法是不是有道理，是不是还有更为合理的方法。不过，传统数学是统计学不可缺少的工具。

.....

问：你能不能结合中小学统计课程、教学，谈得更具体一些？

▲ 史教授：可以。假如我们得到了数据，由于数据看起来是杂乱无章的，就需要进行必要的整理，整理的实质是对大量的数据进行“压缩”。根据问题的不同，压缩的方法也有所不同。比如，希望知道学生的平均身高，称之为“总体均值”。我们可以计算样本的平均数，然后用样本的平均数去估计总体均值。样本平均数就是对于数据的一种压缩方法。当然还可以用其他的方法，比如计算中位数，或者计算最大数和最小数的平均数。那么，哪一个方法要好一些呢？虽然我刚才谈了平均数和中位数的使用条件，但这仅仅是一种描述性的。对于数据压缩也有一个原则，就是不能失去我们所要研究问题的信息，满足这个条件的压缩后的值被称为“充分统计量”。这个原则的数学表达需要借助“条件概率”，涉及很深的数学。因此，统计学需要哲学的思考，也需要严格的数学推理。事实上，对于总体均值，上面的三个压缩后的量中只有样本平均数是充分统计量。直观地想，样本平均数以局部的特征估计总体的特征，可能要好一些。这是因为，虽然样本平均数依赖样本的选取也是随机的，但是我们可以想象，当我们反复取样本计算时，这些样本平均数应当在总体均值附近摆动。当然，我们还可以建立其他的准则来判别方法的好坏，只要这个准则是合理的。比如，我们可以验证，样本平均数是使“与所有数据差的平方的和达到最小”的数；样本中位数是使“与所有数据差的绝对值的和达到最小”的数。这两个准则都是有道理的。

因此，作为教师，在统计课程实施的过程中，不仅仅需要知道如何去计算，还需要知道之所以这样计算的道理。只有这样，在讲课的时候才可能心里更有底，才可能根据学生的反应随时调节教学策略。再比如统计图表，是为了更直观地表达数据，这也是数据整理的一种形式。根据我们所要研究问题的不同，表达方式也可以有所不同。

（三）统计学研究方法的本质

问：严士健先生认为，统计学的研究方法与传统数学的研究方法有一个本质上的不同：统计学的研究方法是基于归纳，而传统数学是基于演绎。

▲ 史教授：我想，这是从思辨的角度来考虑的。一般来说，推理分为演绎和归纳。上面已经谈到，传统数学在本质上研究的问题是确定性的，基础是定义和假设，遵循约定原则进行严格的计算或者推理，因此更多的是演绎；统计学在本质上研究的问题是随机的，是非确定性的，通过较多的数据进行推断，也就是通过许多的个别来推断一般，可以认为是一种归纳。但是，正如我在上面也谈到过的那样，在许多情况下，哲学思考后的数学表达也是严格依赖于演绎的。

二、中小学统计课程设计的核心问题

（一）统计与概率课程设计的总体构想

问：《标准》指《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》。在总体目标中提出，要使学生能够“经历提出问题、收集和处理数据、作出决策和预测的过程，掌握统计与概率的基础知识和基本技能，并能解决简单的问题；经历运用数据描述信息、作出推断的过程，发展统计观念”。在课程实施中，许多在教学一线的教师，甚至学科教学的专家都感到统计的内容安排不好把握，甚至对《标准》关于统计的设计提出了一些质疑。

作为统计学家，你认为如何设计中小学各学段的统计课程内容更合理呢？

▲ 史教授：对中小学统计课程内容的设计，我没有进行过专门的研究。我想，在讨论这个问题之前，首先要清楚的问题是，除了知识之外，统计学的教育功能是什么？或者说，统计学的教育价值是什么？

问：在中小学阶段，统计学的教育价值是什么呢？

▲ 史教授：我在上面都已经谈到了，现在再总结一下。主要有三点。首先，养成通过数据来分析问题的习惯。其实质是通过事实来分析问题，当遇到问题时，应当去调查研究，应当去收集数据，在此基础上进行的推断才可能客观地反映实际背景。其次，建立随机的概念。有些事情可能发生，有些事情可能不发生，这在日常生活中是大量存在的。即便如此，只要我们掌握的信息多了，也能够合理地推断实际背景。第三，学习如何去判断事情的主要因素。我已经谈到，统计学能够在一堆看似杂乱无章的数据中提炼信息、寻找规律，这就需要抓主要因素。比如我刚才谈到的股票市场的例子，核心企业就是主要因素。在统计学中，可能还有其他方面的教育价值，但在中小学阶段统计的教育价值主要就是这三点。

问：如何通过这三点来说明中小学统计内容的课程、教学设计呢？

▲ 史教授：教育价值，或者说教育功能是进行课程、教学设计的灵魂，是课程、教学设计的核心目标。如果中小学统计学课程、教学设计的核心目标是培养学生“通过数据来分析问题”，课程、教学设计的总体框架就应当是，体现从收集数据到分析推断的全过程，并以这个过程为主线，抓住要点，循序渐进。我们以小学统计为例，在第一学段（1~3 年级），可以侧重于统计直觉的培养。首先，应该对数有一定的理解和感悟，这主要是数的大小的比较，以及对于数的分类。后者对于学习现代数学和现代统计学都是重要的，但是过去我们很少接触。比如，我们可以让学生“建立一个原则，在这个原则下给全班同学分类”。显然分类方法是多种多样的，这个原则可以是男女、出生月份、家庭区域等。再比如，把全国各省的 GDP 统计数据提供给学生，让学生根据 GDP 的多少对各个省进行分类，并讲出分类的标准。其实，这里也涉及抓主要因素的问题，分类的标准就是抓主要因素。

其次，学习一些抽样的方法，最好针对身边的事情。比如，同学们的身高、脚的大小、睡觉的时间等。在这其中可以得到一些趣味性的结果。可以学习平均数，也可以学习统计表、直方图等。

最后，可以学习分层抽样，并且通过比较，领会分层抽样的好处。因为有了数据的分类的基础，学习分层抽样就比较自然了。

在第二学段（4~6 年级），可以有一些具有背景的理性的思考。比如，再进行学生身高的调查，然后与以前的数据比较，看身高的变化，其中可以得到许多有趣的学习：可以作直方图或折线图，然后比较；可以分类比较；可以通过斜率来分析变化率；甚至可以通过变化率来预测未来。除此之外，还要进行社会调查，比如市场物价调查，评估物价的上升还是低落，这里也涉及抓住主要因素的问题。

在这个阶段，可以渗透随机和概率的思想，分清楚有些事情可以直接判断可能性的大小，有些事情则需要调查估计可能性的大小。可以涉及加权平均。中位数和众数的学习一

定要结合具体的案例进行学习，并且与平均数比较，这是因为中位数和众数在日常生活中用得不多。

最好有一个案例能够贯穿小学统计教学的全过程，比如我刚才谈到的身高的调查分析，让学生积累调查记录，逐年比较，从而对统计的学习有一个整体的了解。

.....

四、评价建议与评价样例

(一) 评价建议

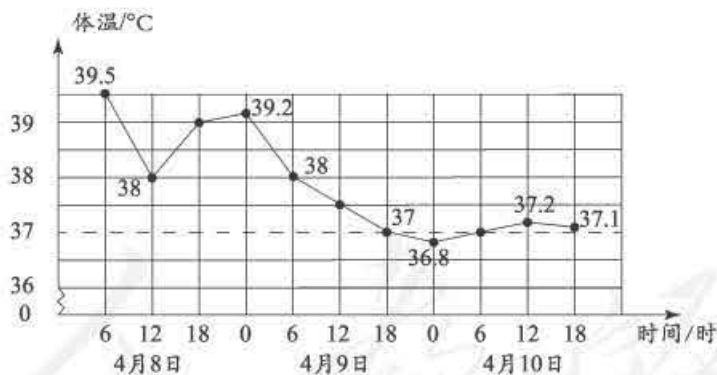
本单元的学习主要让学生在以往认识单、复式条形统计图的基础上，认识单、复式折线统计图，了解折线统计图的特点，能根据折线的起伏变化对数据进行简单分析和预测，体会复式折线统计图在多组数据比较中的优势。因此，评价内容关注以下几个方面：学生对折线统计图的特点、适用范围了解情况；学生对折线统计图的绘图与读图能力；学生的数据分析能力等。

(二) 评价样例

以填空的形式，考查学生基础知识掌握情况；通过画折线统计图，读取折线统计图中的信息，以及对数据的分析与预测，考查学生制图、读图及数据分析的能力。

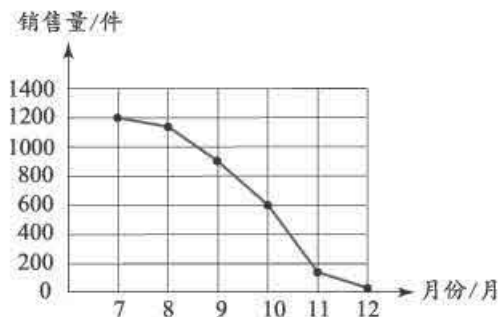
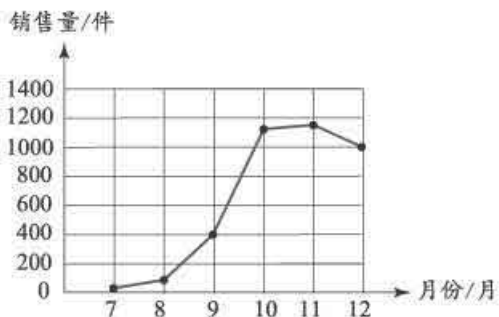
1. 根据统计图表回答问题。

一个病人住院期间体温变化情况统计图



- 这种统计图是_____统计图。
- 护士每_____小时给病人量一次体温。
- 这位病人的体温最高是_____，最低是_____。
- 图中虚线表示_____。
- 病人在4月9日12时的体温是_____。
- 从体温上看，这位病人的病情是在恶化还是在好转？为什么？

2. 下面是去年某商场服装柜台售货员分别根据毛衣和衬衣销售量制成的两幅折线统计图。



说一说:

(1) 你知道哪幅是毛衣销售量统计图, 哪幅是衬衣销售量统计图吗?

(2) 请你简单描述一下这半年中, 两种衣服销售量的变化情况。你认为这些变化的主要原因是什么?

(3) 如果你是销售经理, 在进货方面有什么考虑? 如果你是消费者, 又有什么打算?

3. 根据下面两个统计表回答问题。

(1) 妈妈记录了钟毅 0~10 岁的身高, 如下表。

年龄	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身高/cm	50	74	85	93	101	108	115	120	130	135	141

(2) 为了参加某次体育比赛, 体育老师量得学校运动队的 6 名同学的身高情况如下。

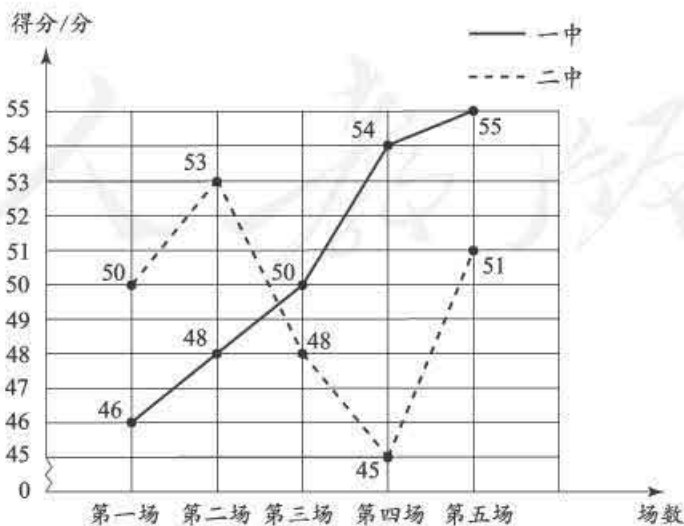
姓名	熠熠	彬彬	欢欢	盈盈	妮妮	行行
身高/cm	115	108	121	116	123	109

如果让你把上面的两组数据分别制成统计图, 第一组数据你选择制成 (), 第二组数据选择制成 () 比较合适。

A. 条形统计图

B. 折线统计图

4. 下面是某市第一中学和第二中学篮球队的五场比赛得分情况统计图, 请根据统计图回答问题。



(1) 两个学校的篮球队第一场比赛时成绩相差多少? 第五场呢?

(2) 两队成绩呈现什么变化趋势?

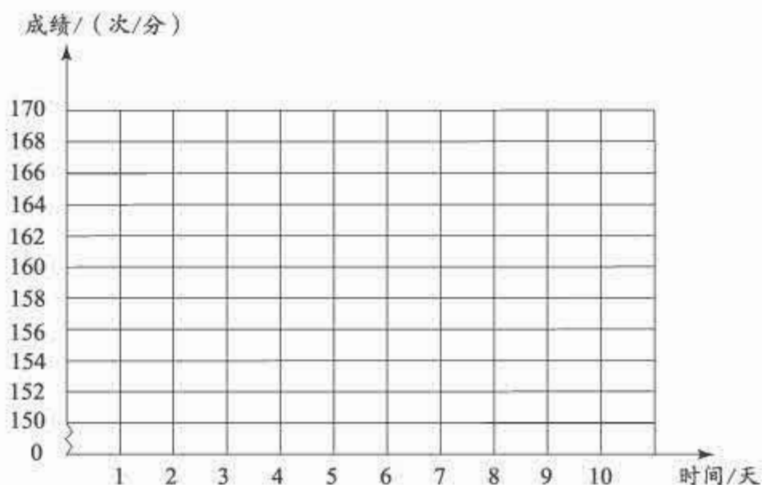
(3) 你能预测下一场两校的篮球队的比赛结果吗?

5. 李山和丁阳参加学校运动会一分钟跳绳比赛, 提前 10 天进行训练, 每天测试成绩如下表。(单位: 次)

姓名 \ 第几天	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
李山	152	155	158	160	157	159	162	165	165	167
丁阳	153	154	159	155	160	164	158	162	160	165

(1) 请你根据表中数据, 完成下面的统计图。

李山、丁阳一分钟跳绳情况统计图



(1) 李山和丁阳第一天的成绩相差多少? 第十天呢?

(2) 李山和丁阳跳绳的成绩呈现什么变化趋势? 谁的进步更大?

(3) 你能预测两个人的比赛成绩吗?

(4) 你还能发现其他数学问题并解答吗?

第八单元 数学广角——找次品

一、教材说明和教学建议

(一) 教学目标

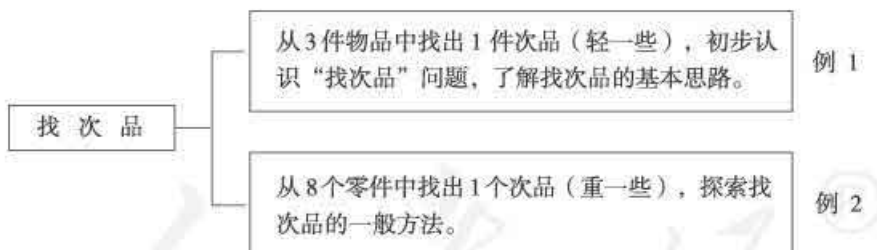
1. 通过比较、猜测、验证等活动，探索解决问题的策略，渗透优化思想，感受解决问题策略的多样性，培养观察、分析、推理的能力。
2. 学习用图形、符号等直观方式清晰、简明地表示数学思维的过程，培养逻辑思维的能力。
3. 通过解决实际生活中的简单问题，初步培养学生的应用意识和解决实际问题的能力。

(二) 内容安排及其特点

1. 教学内容和作用。

本单元以“找次品”这一探索性操作活动为载体，让学生通过观察、猜测、试验等方式探索解决问题的策略。同时，进一步理解随机事件（如2个零件中有1个较重的次品，只要把这2个零件放在天平两端，天平一定不平衡。如果3个零件中有1个较重的次品，任意取2个放在天平两端，天平可能平衡，也有可能不平衡），感受解决问题策略的多样性和优化思想，培养观察、分析、逻辑推理的能力，并学习如何用直观的方式清晰、简洁、有条理地表示逻辑推理过程。

本单元内容结构如下。



2. 教材编排特点。

(1) 安排一系列“找次品”活动，通过充分探究，概括、总结找次品的一般方法。

“找次品”问题是一类经典的数学问题，可以细分为许多类型，有的类型解决起来相当复杂。教材选择了比较简单的一类作为例题，即：有 n 个从外表看完全相同的零件，其中一个是次品，次品比合格品重（或轻）一些。假如用没有砝码的天平称，最少称几次就能保证找出这个次品？

对于这一问题，一般性的解决方法是“把这 n 个零件尽可能平均分成3份”。这是由天平的特点决定的，因为天平有两个托盘，所以次品的位置无外乎三个地方，即两个托盘上、天平外，天平称一次就能确定出次品在三个位置中的哪一个。而要使称量的次数最少，每次称量

后，就应把次品确定在更小的范围内。要做到这一点，就应使三个地方的零件个数尽量同样多。这样，不管次品在三个地方中的任何一个，问题都能转化成“从总数的三分之一（左右）里找次品”。例如，从9个零件中找次品，分成3份，有四种不同的分法：①（1，1，7），②（2，2，5），③（3，3，3），④（4，4，1）。很显然第三种分法中，称一次就可以将次品确定在最小的范围内。

教材不是直接将这一方法教给学生，而是通过一系列“找次品”活动，由简单到复杂，由特殊到一般，让学生在比较、猜想、验证的活动中逐步感悟、总结和提炼。例1先通过找3个物品中的1个次品，让学生初步认识“找次品”问题的含义，明确解决的基本方法。接下来，例2从8个、9个零件中找次品，从各种解决方案中寻找出规律，再将发现的规律应用到10个、11个零件中，由此归纳、概括出解决这类问题的最优方法。

为了让学生理解“尽可能地将待测物品平均分成3份”的合理性，教材特意将例2进行了改编：将原实验教材探索9个零件，改为先探讨8个，再研究9个零件。从8个零件中找次品，学生一般会很自然地想到平均分成2份（4，4），但会发现这不是称得最少的次数，分成3份（3，3，2）的方法才是称得最少的次数。而从9个中找次品，受天平平衡的暗示，学生会自然想到（4，4，1）和（3，3，3）的分法。通过对比，学生会感受到分成3份的情况中平均分的方法称的次数最少。如果不能平均分呢？回过头再去研究8个的最少次数，会发现尽可能的平均分可以使称的次数最少。最后将此规律应用于10个、11个零件加以验证。这样层层递进，逐渐感知理解称的次数最少的方法的特点。

（2）注重数学思维过程的表达，有意识地培养逻辑思维能力。

“找次品”问题中的天平并不是一架实物天平，而是一种抽象的数学化形式的天平。因为一旦拿一架实物天平进行实验，就不会出现“假如平衡……”“假如不平衡……”的情况，而只会出现其中一种，要么平衡，要么不平衡。在解决问题的过程中，实际上是用头脑中建立的天平表象，反复地进行“如果平衡，那么……”“如果不平衡，那么……”的逻辑推理的过程。那么如何清晰、有条理地将这一过程表示出来呢？最为直接的是口头表述。但当物品总量比较多时，步骤相应增加，很容易表述不清。当然也可以采用文字表述的方式，但由于前后步骤之间的层层套叠关系，表述起来也显得冗长且烦琐。而使用直观图或流程图，配以相应的文字说明，可以比较简洁而又清晰地表示出逻辑推理的整个过程，让人一目了然。因此教材从例题到习题，不断引导学生学习用符号、文字直观、简洁地表示思维过程，使学生在潜移默化中学会数学地表达，有意识地培养思维的条理性、逻辑性和准确性。

（三）教学建议

1. 重视小组合作与交流。

本单元内容的探究性比较强，可以采取小组讨论探究的方式教学。教学时，可先给学生充足的探究时间和空间，让他们充分地比较、观察、讨论，找到解决问题的多种策略。在探索中教师应提醒学生把所有的可能性都考虑进去。小组讨论后，教师可要求学生分组汇报结果，并在黑板（投影屏幕）上逐一展示，让学生感受到同一问题有多种解决方案，为后面寻求最优的

解决策略打下研究、分析的基础。

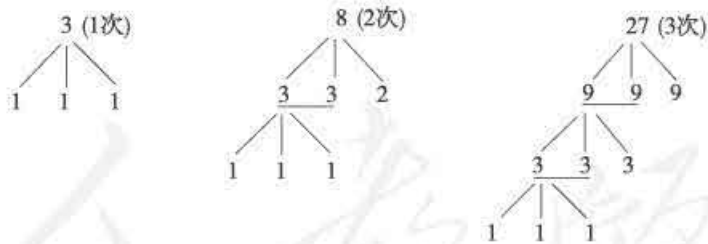
2. 让学生充分经历“比较—猜想—验证”的过程，寻找找次品的方法。

“找次品”的最优策略有两个要点：一是把待测物品分成3份；二是尽量平均分。这是本单元教学的重点也是难点。如何遵循学生的认知特点，引导学生突破这一难点呢？教学中可以按照教材的编排，通过有层次的、丰富的探究活动，让学生在自主探索中体会，逐步地进行归纳。如先通过例1，研究“3个”的情形，让学生感知基本的推理过程：如果天平平衡……如果天平不平衡……；再通过例2研究“8个”“9个”的情形，对比分析，寻找出规律，最后用“10个、11个”进行验证，概括出找次品的最优方法。也可以在教材提供的基本教学思路的前提下，进行一些调整。如，可以从2个开始，再重点探究3、8、9个的情形。通过解决“2个”的情形与“3个”形成次数的对比；为什么数量多了1个，而次数没有增加？让学生感受到找次品并不是都要称，可以通过推理将其找出，为“分组推理”的研究埋下伏笔。再如，将“8个”“9个”的情形结合起来研究，通过对比分析总结分组的优化方法：分三组，尽可能平均分，如不能平均分，让每组数量尽可能接近，且3份中有两份的数量相等。

3. 有意识地进行数学思维过程表达的教学。

逻辑推理是贯穿本节课始终的重要的思想方法。在“找次品”的过程中，为了使别人明白自己是怎么解决问题的，学生需要清晰、有条理地表示出逻辑推理的过程。而这点也正是本单元的重点和难点。虽然口头和文字表达可以说明思维过程，但如前所述，当零件总量增多，推理的步骤也相应增加，再用这种方式表述会冗长烦琐。因此，要有意识地引导学生尝试用画直观图、流程图，并配以文字说明的方式表示逻辑推理的过程，使学生逐步学会用数学化的方式表达思维过程。

当然，在表示思路时，可以是例题中的直观图，可以是流程图（如教科书第114页第5题），还可以是如下的树形直观图。不管学生使用哪种表示方式，最重要的是要把各种可能性都考虑到。



4. 建议用2课时教学。

（四）具体内容的教材分析和教学建议

编写意图

(1) 和实验教材比,例1将原来的5瓶钙片改为3瓶钙片,主要目的是让学生从最简单的问题入手,初步理解“找次品”的含义,明确找次品的基本思路。

(2) 教材先让学生讨论找次品的方法,通过交流聚焦到用天平来找次品的方法上来。

通过用天平直观演示,说明基本推理过程:如果天平平衡……如果天平不平衡……为后面探索“找次品”问题的策略提供依据。

(3) 为了便于沟通和交流,教材通过小精灵提出用适当的方式把找次品的过程清楚地表示出来的要求,引导学生用直观的方式记录找次品的思维过程,为后面利用形式化的天平进行推理作好铺垫。

这里,可以让学生初步体会:天平称一次,可以判断出次品在两个托盘上或者是天平外的那个。也就是说,通过推理,可以将次品确定在这三份中的一份中。这就为分三份提供了直观的经验,为后面的探索作准备。

教学建议

(1) 帮助学生理解找次品的含义。

“找次品”问题学生之前很少接触,没有相关的学习与生活经验。教学时,教师要引导学生认真读题,理解找次品的意思。了解“次品”“正品”的含义。

(2) 引导学生用直观方式清晰地表达出推理过程。

用天平找次品,并不是一定要通过天平称,而是利用天平平衡的原理通过逻辑推理确定出次品。因此,在用天平直观说明找次品的基本推理过程后,要引导学生用直观、简明的



方式,清晰地表示出推理过程,进一步厘清思路,为后面数量更多的找次品问题作好认知和方法上的准备。

在进行说理时,教师要引导学生用尽量规范的语言“假如平衡……,假如不平衡……”来表述,并理解这是两种情况。推导时,教师也要引导学生用格式大致统一的直观图或流程图辅以文字说明来记录和推导。这一点,对于学生后面的学习尤为重要。当然,教材上的直观图只是一个范例,学生也可以有自己的不同表示方法,只要合理,教师都应给予肯定。

2 8个零件里有1个是次品(次品重一些)。假如用天平称,至少称几次能保证找出次品?



将探索的情况填入下表。

每次称后剩下的个数	分成几份数	至少需要称的次数

(1) 表中哪种方法需要称的次数最少?

(2) 如果9个零件中有1个次品(次品重一些),至少称几次能保证找出次品? 是怎么称的?

(3) 你能发现什么? 用你发现的方法找出10个、11个零件中的1个次品(次品重一些),看看是不是保证找出次品的次数也是最少的。

做一做

有2瓶糖水,其中27瓶质量相同,另有1瓶是盐水,比其他的略重一些。至少称几次能保证找出这瓶盐水?

教学建议

(1) 帮助学生理解所要解决的问题。

“至少称几次能保证找出次品”是理解的难点。要帮助学生理解“至少”“能保证”的含义。使学生明确“能保证”就是指每一条“可能的路径”都要考虑到,不能停留在“运气好”的情况;“至少”就是指在保证一定能找出次品的各种方法中,称量次数最少的那种方案。

(2) 注意引导学生通过对比,感悟找次品方法的本质。

为什么“把待测物品尽可能平均分,称的

(1) 例2,教学找次品的一般方法。由8个零件开始探索,再用9个研究,发现称的次数最少的方法的特点;然后用10个、11个验证,最后总结出找次品的最优策略。

(2) 有了例1的基础,学生已经知道找次品的基本推理思路,这里教材在让学生理解了“至少称几次能保证找出次品”的含义后,直接提出“你们打算怎样表示找次品的过程”,让学生自己探索。

(3) 为引导学生探索,教材采取了下面一些措施:一是让学生将推理的过程用直观、简洁的方式表示出来,并给出“直观图”示例加以引导;二是让学生把不同的方案记录在表格中,以便进行分析、猜测;三是通过表格下面的问题,给出探究的线索:通过第(1)题,找出称的次数最少的方法,通过第(2)题并结合第(1)题,归纳出方法,最后用10个、11个验证,进一步明确找次品的最优方法。

(4) “做一做”进一步巩固和应用发现的最优方法解决找次品问题。

次数最少”,可以结合具体的找次品方案,让学生领会。如可以在“8个”中,通过对比(4,4)和(3,3,2),使学生体会到:后一种称一次就可以将次品确定在更小的范围内。也可以在“9个”中,通过对比(4,4,1)和(3,3,3),使学生不仅知其然,还知其所以然。

编写意图

练习二十七安排了6道练习题,其中5道是找次品的问题,1道是巩固前面知识的习题。

(1)第1题巩固找次品问题的方法,学习用直观图表示思路。题中显示的是每次天平两边各放1个物品称的方法,也可以让学生把自己的思路和方法表示出来。

(2)第2题,第(1)、(2)题让学生自己探究,发挥学生的主观能动性;第(3)题旨在让学生巩固用最优的方法“找次品”;第(4)题如果这时天平恰好平衡,称一次就可以找出来,但这种方法不能保证,从而让学生进一步体验随机思想,同时进一步理解“保证一定能够找出次品”的含义。

(3)第3题是一道年龄问题,问题的关键在于认识到爸爸与小明的年龄差不会随时间变化而改变,教学时可放手让学生列算式或列方程等多种方法解答本题。

(4)第4题是应用找次品的最优策略解决生活中的实际问题,是对例2的巩固练习,至少称3次可以保证找出这盒饼干。

教学建议

(1)尊重学生的个体差异。

在找次品的过程中,有的学生可能还要借助直观学具进行推理来找次品,有的学生已学会用直观图或流程图直接推理,还有的是用口头叙述,等等。只要学生的解答是合理的,都要予以肯定。

(2)加强“说过程”的训练。

例如,第1题学生用直观图“画”出来后,还要让学生“说”,在“说”中体会到要保证能找出次品每次都要考虑最糟糕的情况(天平平衡)。第2题让学生说出自己的称法,

练习二十七

1. 5瓶药片中有1瓶是次品(轻一些),完成下面找次品的过程。



2.



- (1)如果用天平称,你打算怎样称?你能表示出称的过程吗?
- (2)用你的方法称几次可以保证找出来?
- (3)你至少称几次就保证把它找出来吗?
- (4)如果天平两边各放4袋,称一次有可能称出来吗?

3.



你知道今年小明和爸爸各多少岁吗?

4. 有15盒饼干,其中的14盒质量相同,另有1盒少了几块,如果用天平称,至少称几次可以保证找出这盒饼干?

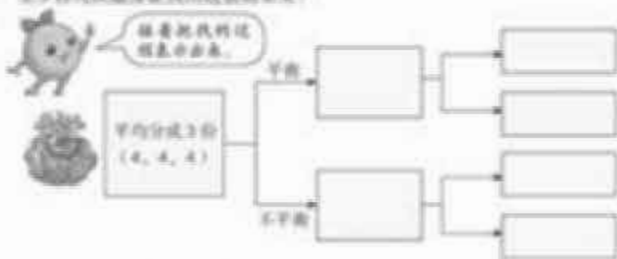


在“说”的过程中体会每次把待测物品尽量平均分成3份时所用的次数最少。

(3)运用已有的知识和经验。

在解决找次品的问题时,推理过程中学生可以直接利用前面已有的结论,初步感受化归思想方法在解决问题中的作用。如,第4题第一次把15平均分为(5, 5, 5),称一次后就转化为“从5个物品中找次品”的已学知识了,因此至少需要3次。这正如波利亚所说:在解题的每一个阶段,我们都把关于一个新的分量的知识加到已经得到的知识上去,在每一个阶段,我们又都要用已经得到的知识去得出更多的知识。

5. 1 箱糖果有 12 袋, 其中 11 袋重量相同, 另有 1 袋重量不足, 轻一些, 至少称几次能保证找出这袋糖果来?



6. 有 3 袋白糖, 其中 2 袋每袋 500 g, 另 1 袋不是 500 g, 但不知道比 500 g 重还是轻, 你能用天平找出来吗?

你知道吗?

用天平找次品时, 所测物品数目与至少需要测试的次数有以下关系。(只有一个次品, 已知次品比正品重或轻。)

要辨别的物品数目	保证能找出次品至少需要测的次数
2 ~ 3	1
4 ~ 9	2
10 ~ 27	3
28 ~ 81	4
82 ~ 243	5
……	……

(1) 要保证 5 次能测出次品, 待测物品可能是多少个?
(2) 从表中你能发现什么规律? 为什么?

本单元结束了, 你有什么收获?

☆☆☆☆
☆☆☆☆

从简单问题开始研究的方法真有用, 我们已经用过很多次啦!

编写意图

(1) 第 5 题通过让学生将推理过程补充完整, 学习用流程图来表达分析和解决找次品问题的过程, 从而培养学生的逻辑推理能力。在箭头上标注天平的状态, 方框中说明下一次称重的分组方案。本题答案是至少称 3 次。

(2) 第 6 题是另一种类型的“找次品”, 因为不知道次品比正品重还是轻, 所以分析推理的过程更加复杂, 有利于培养学生的逻辑思维能力。答案是至少称 2 次。

(3) “你知道吗?” 简要介绍了用天平找次品时, 在已知次品比正品重或轻的情况下, 所测物品数目与保证能找出次品需要测试的最少次数之间的关系。由该表可发现, 只要待测物品数量介于 $3^{n-1} + 1 \sim 3^n$ 之间, 则最多只需要测 n 次就保证能找出次品。由此, 要保证 6 次能测出次品, 待测物品可能是 244~729 个。

教学建议

(1) 进行适当的拓展。

如, 第 6 题可对学生进行分层要求。对全体学生而言, 只要能大致表述如下的推理过程即可: 第一次天平两边各放一袋, 若平衡则剩下的那袋就是次品, 再称一次就能判断次品是轻还是重; 若不平衡, 则这两袋中一定有一袋是次品, 可取下轻(或重)的那袋, 把剩下的那袋放上天平, 若天平平衡, 则轻(重)的是次品, 若天平不平衡, 则重(轻)的是次品。对学有余力的学生, 则可以此题为起点, 探索数量为 4, 5, … 时如何找出次品。

(2) 把握好教学要求和难度。

教学时, 教师可根据实际情况引导学生探究“你知道吗?” 中的两个问题, 通过观察“要辨别的物品数目”和“保证能找出次品需要测的最少次数”之间的关系, 进一步归纳总结一般性的规律, 并再次举例验证, 如, 待测物品为 700 个, 让学生体会数学的神奇。但在教学中, 教师要把握好两点: 一是学生在叙述时, 只要能正确表达意思即可, 不需要对语言的规范性进行严格要求; 二是这里最为重要的并不是让学生记住这样一个结论, 而是让学生经历这一结论的发现过程。

二、教学设计或教学片段

课题：找次品

教学设计：张爱红。

教学内容：教科书第 111 页例 1、第 112 页例 2 的内容。

教学重点、难点：借助实物操作、画图等活动理解并解决简单的“找次品”问题，在此基础上归纳出解决这类问题的最优分组策略，经历由多样化到优化的思维过程，寻找被测物品数量与保证找到次品至少需要称的次数之间的关系。

教具准备：天平、3 瓶钙片（其中一瓶少 3 片）。

教学过程：

（一）弄清问题题意，激发探究愿望

（演示课件并提出问题）今天这节课我们就从某公司招聘员工的一道题目开始。假定你就是应聘者，想不想接受一下智慧的挑战？问题是：

假定你有 81 个玻璃球，其中有 1 个球比其他球稍轻，如果只能利用没有砝码的天平来断定哪一个球轻，请问你最少要称几次才能保证找到较轻的那个球？

1. 初步尝试：给每位同学 1 分钟独立思考的时间。

2. 汇报交流。

学生汇报可能的次数是：1 次、4 次、6 次、40 次……

教师：请只用 1 次的同学说一说，你是怎样想的。

学生 1：在天平的两边各放 40 个玻璃球，如果天平右边下沉，就说明最轻的球在左边；但如果天平平衡的话，就说明多出来的那一个就是最轻的。（学生边说，教师边把他的思路记录下来）

学生 2（质疑）：我不同意他的想法。他说如果一边往下沉的话，就说明轻的球就在另一边。可这道题问的是称几次能保证找到那个轻的球，如果按他说的称 1 次只能说明那个轻球在那一堆球里，并不能确定是哪一个。

教师（小结）：看来，1 次虽少，但只是有可能，不能保证找到较轻的那个球。所以我们在思考这个问题时，不光要最少，还要以“保证能找到”为前提。

3. 揭示课题。

教师：如果以“保证能找到”为前提，在同学们这么多的答案中，哪一个次数是最少的呢？这节课我们就一起来研究这个问题。这个问题在数学中叫“找次品”问题。

教师板书课题。

（二）简化问题，经历问题解决基本过程

教师：对于从 81 个小球中找次品的问题，比较复杂，那么怎样开始我们的研究呢？

学生：可以从最少的试一试。

(学生如果没有想法,可以提示:能不能从小一些的数目着手研究,因为数目小比较好操作,便于发现一些方法。)

1. 2个。

教师:如果从最简单的人手研究,2个小球至少称几次?

学生:1次,把两个小球分别放在天平两边上,哪边轻就是哪个。

2. 3个。

教师:如果是3个呢?

学生猜测:2次?1次?(学生意见不统一。过一会儿有些学生又非常坚定地说“1次”。)

教师:老师这里有3瓶钙片,其中有一瓶少了3片。你觉得应该怎样称?

学生:先把其中的2瓶放在天平的两侧,如果左边下沉,就说明右边的是次品;如果右边下沉,就说明左边的是次品;如果天平平衡,则没称的是次品。(学生边说,教师边配合进行称量演示。)

教师带领学生进一步感受推理过程:虽然有3瓶,而天平只有两个托盘,但是只需要把其中的2瓶放在天平的两侧,可能平衡,也可能不平衡,如果平衡……如果不平衡……不论是否平衡,利用推理,只要称1次肯定能将那个次品找出来。

教师板书:

教师小结:看来2个和3个虽然数量不同,但是都只称1次就可以将次品找到。

(设计意图:“2个”与“3个”形成次数的对比:为什么数量多了1个,而次数没有增加?让学生在潜意识里感受到找次品并不是都要称,可以通过推理一一排除,为研究“分组规律”埋下伏笔。)

(三) 再次探究“关键数目”,初步感知、归纳规律

1. 探究8个小球的情况。

(1) 小组讨论,归纳分组规律。

教师:如果小球数是8个,需要称几次呢?

学生猜测:4次?3次?

教师:似乎不太容易很快得出结论,那么请同学们以小组为单位,共同讨论一下。

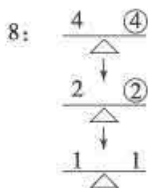
合作建议:可以借用棋子帮助思考,也可以像老师这样在纸上画一画。不论用什么样的方式,都要将思考过程简要记录下来。

学生分小组研究。

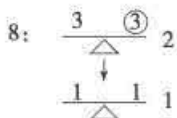
(2) 汇报交流。

教师:8个小球时你们各称了几次?

学生1(小组1):先将8个球放在天平的两侧,每边各4个。如果左边轻的话,将这4个再分成2组,每边2个,再找出较轻的那一组,将其再放到天平的两侧,每边放1个,至少需要称3次。



学生2 (小组2): 我们用了2次。天平两边先各放3个, 剩下2个。最好的情况, 天平平衡了, 将剩下的两个再称, 这样用2次; 如果不平衡, 就将轻的那一边的3个再称, 挑出其中的2个放到天平上, 另一个放一边, 如果平衡, 天平外的就是次品, 如果不平衡, 轻的小球就是次品。所以只需2次。(两个同学到黑板前, 一生写, 一生解释, 合作默契。)



教师: 有的小组称了2次, 是把8分成了几组? 每组分别是几个? 有的小组称了3次, 是把8分成了几组? 每组分别是几个?

(板书: 8: (3, 3, 2) 2次; (4, 4) 3次。)

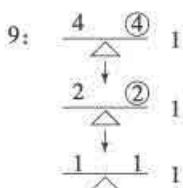
教师: 其他小组还有不同的方法吗? (如果有, 请小组代表汇报。)

教师: 经过大家的讨论, 看来最少的次数是2次。如果有9个小球呢?

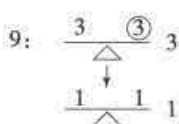
2. 探究9个小球的情况。

教师: 9个比8个多了1个, 怎样称用的次数最少呢? 小组讨论一下吧!

小组3汇报如下:



小组4汇报如下:



教师板书: 9: (4, 4, 1) 3次; (3, 3, 3) 2次。

3. 对比总结。

教师: 大家回过头来比较一下, 我们将8个小球分成(3, 3, 2)三组称2次, 可是把8个分成(4, 4)两组却称了3次, 多称了1次。多称的1次多在哪儿呢?

学生1: 小球数是2个和3个只用1次, 把8个分成(3, 3, 2)每组是3个或2个, 3个或2个都只需要称1次就能找出次品。

教师: 你们明白他的意思吗? 你们看, 称(3, 3)或(4, 4), 都只称一次就能确定次品在哪边。可接下来, 第一种是要在3个里找, 只需1次; 第二种要在4个里找, 要用2次, 所以会多1次。

教师: 那9分成(4, 4, 1)也比分成(3, 3, 3)多用1次, 多的1次在哪儿呢? (生答略)

教师: 大家最后称的次数不同, 原因是什么呢?

学生2：分组的组数不同，每组的数量也不同。

教师：那到底怎么分，才能既保证找到次品，又能使称的次数尽可能少呢？小组讨论一下！

学生3：我觉得应该分3组。因为天平有2个托盘，在天平两边各放1份，剩下的就是第3份。如果天平平衡，那么次品肯定在旁边的一份里；如果天平不平衡，那么次品肯定在轻的那份中。

学生4：我还认为他分的这3组，每一组的数目还要少，否则就会影响整体的次数。

学生5：也就是尽可能让每组的数目比较接近，这样每次称完，次品就被确定在更小的范围内了，称的次数也就少了。

教师小结：你们太了不起了！通过我们刚才的实验、讨论、交流，不仅解决了问题，而且发现了其中分组的秘密和规律。

教师板书：分3组，每组数量尽量接近。

(四) 运用策略，解决更复杂的问题，进一步发现“规律”

1. 研究10个小球。

教师：那么我们就应用分组的规律，再来一次实验。如果小球个数是10个，那么该分几组？怎么分？称几次？

学生1：应该分三组，分成两个3和一个4，称3次。

教师板书：10：(3, 3, 4) 3次

教师：如果是27个呢？

学生2：先分成三组，每组有9个。然后再按照前面9个小球的方法找就可以了！

教师：这位同学说得太好了！他还是先分成3组，然后用转化的思想把问题变成我们前面解决的9个小球的找次品问题了。

2. 分组研究更大数目。

教师：看来大家都掌握了分组规律，最开始的招聘问题81个小球大家能解决吗？接下来，我们以小组为单位进行竞赛，哪个小组有了结果，哪个小组就把结果直接写到黑板上。你能发现它和前面我们解决的27个、9个、3个有什么关系吗？

(小组研究之后，汇报结果)

学生1：我们组发现3、9、27它们之间依次有3倍关系。 $3 \times 3 = 9$ ， $9 \times 3 = 27$ ，下一个是81……

学生2：被测小球数目是几个3相乘就是称几次。比如，4个3相乘是81，81个小球只需称4次。

教师：你们很了不起，既解决了公司“招聘”问题，81个小球时，保证找到次品至少需要称4次，又发现了“被测物品数目与称的最少次数之间”神秘的规律。

教师：随着招聘问题的解决，今天的课也即将结束。回顾我们整节课的经历，从最初的招聘问题，回归到解决2、3的问题，再到研究8、9发现分组规律，直至研究了更大的像27、81这样的数，发现了被测物品数目与称的最少次数之间的一些关系。在这一路的探究过程中，

我们不断思考、不断实践、不断发现，是不是有点“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”的感觉！我想大家在收获知识的同时，一定收获了更多的智慧。最后有两句话与大家共勉（多媒体呈现）。

探究问题：学会化繁为简（转化）。

解决问题：要有优化意识（统筹）。

（设计意图：研究在 81 个零件中找次品，是为了和前面的引入呼应。这一环节，实际教学中，教师可以根据学生的具体情况灵活处理。既可以就此打住，让有兴趣的学生课后进行研究；也可以组织学生展开讨论，当然要考虑学生的接受能力。）

全课点评：教材虽然给我们提供了基本的教学思路：先研究在 3 个零件中找次品，再研究 8 个和 9 个中找次品的方法，然后延伸到 10 个、11 个零件，但是教学过程如何展开？从几个零件开始研究？研究不同个数的零件时，各自的教学意图是什么？要不要总结发现蕴含的规律？怎么总结？是否要求运用发现的规律解决零件个数更多的问题？这么多内容如何在 40 分钟内得到落实？是否所有的学生都能理解？可以说，本课的教学有很大的难度和挑战性。本节课内容完整，环节设置流畅，在以下几个方面值得我们借鉴：（1）精心选取数据，明确选择每一数据的意图，使学生初步感知保证最快找到次品的原理，还要初步感知“物品总数与最少次数之间的关系（规律）；（2）用符号记录问题解决的过程，将思维过程外显化，便于学生、教师之间的沟通交流，使不同层次的学生以这种符号语言为依托，为研究更为复杂的找次品问题提供了有效的交流保证；（3）体验“从简单问题入手”是问题解决的重要策略，让学生先陷入“一筹莫展”的境地，充分体验到直接解决这个问题几乎不可能，直观感受到这个问题太复杂，如此学生才有将复杂问题转化为简单问题的需求。

北京教育学院 刘加霞

三、备课资料

浅谈“找次品问题”中多维目标的落实^①

“找次品问题”是数学中一类经典的智力问题，吸引着众多数学爱好者孜孜不倦地寻求一般性的解决方法。“找次品问题”又细分为许多类型，有的类型解决起来相当复杂。人教版实验教材五年级下册的“数学广角”选择了比较简单的一类作为例题，即“ n 个从外表看完全相同的零件，已知其中一个是次品，次品比合格品重一些。现有一架标准天平，使用这架天平，最少用几次就一定能找出这个次品？”这里，“次品比合格品重一些”是已知的，若这一条件未知，解决起来繁难程度将大大增加。

对于这一问题，一般性的解决方法是把这 n 个零件尽可能平均分成 3 份，其中有 2 份是同

^① 丁国忠：浅谈“找次品问题”中多维目标的落实，载于《小学数学教师》2011 年第 1—2 期。

样多的（对于任何一个不小于3的自然数 n ，若 n 是3的倍数，如 $3m$ ，则可分为 m, m, m 。若比3的倍数多1，如 $3m+1$ ，则可分为 $m, m, m+1$ ，若比3的倍数多2，如 $3m+2$ ，则可分为 $m+1, m+1, m$ ）。把同样多的2份放在天平两端进行称量，最多存在两种可能性：天平平衡或天平不平衡。如果是第一种情况，则次品在天平外的那份中；如果是第二种情况，则次品在下沉的一端。不管是哪种可能性，接下来都是把包含次品的那一份零件按照上述方法再尽可能平均分成3份，然后一步一步依次往下称量……

具体到教材上的其中一个典型问题“9个零件中有一个次品（次品重一些），至少称几次就一定能找出这个次品”，用上述方法解决的过程如下。

第一步，把9个零件平均分成3份，数量分别是3个，3个，3个（为叙述方便，下文中记为【3, 3, 3】，表示分成3份，每份都是3个）。

第二步，在天平两端分别放上任意2份进行第一次称量（为叙述方便，下文中记为 $3 \nabla 3$ ，表示天平两端各有3个零件），存在两种可能性：平衡或不平衡。

1. 若平衡，则次品在天平外的3个中，再把它们分成【1, 1, 1】，进行第二次称量 $1 \nabla 1$ 。同样存在两种可能性：平衡或不平衡。

(1) 若平衡，则次品是天平外的那个。

(2) 若不平衡，则次品是下沉一端的那个。

2. 若不平衡，则次品在下沉一端的3个中，再把它们分成【1, 1, 1】，进行第二次称量 $1 \nabla 1$ 。同样存在两种可能性：平衡或不平衡。

(1) 若平衡，则次品是天平外的那个。

(2) 若不平衡，则次品是下沉一端的那个。

这样，不管每次称量的结果是哪种可能性，都只用2次称量就确保把次品找出来了。

以上过程虽然叙述起来比较烦琐，但如果把结论直接告诉学生，并把零件总数改成18个、20个、……让学生举一反三，强化训练，相信掌握起来也非难事。

但同时我们应该深入地思考一个问题：本节课的教学目标是什么？仅仅是让学生被动地接受一种被前人证明是最便捷的解法，然后通过反复操练，以解决所有同类问题吗？如果是这样的话，岂不又落入类似“应用题分类型、套公式”的教学误区了吗？

事实上，任何一个解决数学问题的过程都是一次极富挑战、极具魅力的数学探究之旅。在这一过程中，数学知识的获得、数学技能的提高、数学思想的熏陶、数学活动经验的建立都在以潜移默化的方式悄悄地发生。而我们的数学教学，就应该经常性地为 student 创造主动探究的平台，激发学生学习数学的兴趣，全方位地提高数学素养，而不是“培养”一批又一批的“做题机器”。

“找次品问题”就为落实“基本的数学知识、基本的数学技能、基本的数学思想、基本的数学活动经验”这一多维目标提供了很好的载体。在解决这一问题的过程中，学生可以进一步理解什么是随机事件，理解和掌握基本的逻辑推理和化归的思想方法。与此同时，如何清晰地表达数学思维的过程，如何理解解决问题策略的多样化和优化，如何运用比较—猜想—验证的策略发现数学结论，如何把复杂问题转化为简单问题，如何把具体问题推广为一般问题，都是

在解决问题过程中需要考虑的。这些蕴含在解决问题过程之中的隐性的“形成性能力”或许恰恰是过去数学教育中容易忽视的，教师在日常教学中能否重视这些能力的培养，直接决定了学生综合能力的高低。并且，这些能力的获得不仅局限于促进数学学习，甚至可以延伸至其他学科乃至未来学习、生活和工作的方方面面。

在设计本节课之前，首先要对本节课涉及的数学知识、数学思想方法进行整理，这样才能在教学设计时有的放矢。

一、明确所要解决的问题

解决问题的第一个步骤就是要使学生了解已知的信息是什么，问题是什么，并尝试根据这些信息寻求可行的解决方案。

1. 需要一架什么样的天平？

在这个问题中，首先涉及的数学概念是随机事件（必然事件和不可能事件是特殊的随机事件）。例如，2个零件中有1个较重的次品，只要把这2个零件放在天平两端，天平一定不平衡（换一种说法，也就是不可能平衡）。如果3个零件中有1个较重的次品，任意取2个放在天平两端，天平有可能是平衡的，也有可能是不平衡的。

由此，我们需要考虑一个问题：本节课上我们唯一能利用的工具应该是一架什么样的天平？

首先，它没有砝码，只能通过零件之间的称量进行比较。

第二，它只能以一种抽象的数学化的形式存在于头脑中，而不是一架实物天平，我们可以把它看成是一个天平的模型。因为一旦拿一架实物天平进行实验，就不会出现“假如平衡……”“假如不平衡……”的情况，而只会出现其中的一种，要么平衡，要么不平衡。正如我们都知道投掷一枚硬币，可能正面朝上，也可能反面朝上，但当我们实际做一次投掷时，结果只会是其中一种。

2. 什么叫“一定能找出次品”？

在进行第一次“虚拟”称量时，只要天平外还有多余零件，天平就存在平衡和不平衡两种可能性。在接下来的第二次、第三次……称量时，每种可能性下面又会继续衍生出不同的可能性。只有每一条“可能的路径”都最终把这个次品找出来，才叫“一定能找出次品”或“保证找到次品”。

3. 什么叫“至少称几次就一定能找出次品”？

在称量时，第一次在天平两端各放几个，第二次在天平两端各放几个……方法可以多种多样，代表了不同的解决方案，每一种方案都能确保把次品找出来。在这些方案中，能不能找到一种最优方案，使得称量的次数最少呢？这是学生在解决了“保证找到次品”以后面临的第二个问题。还是以9个零件的问题为例，第一次称量可以1┃1，也可以2┃2，也可以3┃3，还可以4┃4，接下来的每一次称量也可以根据个人爱好灵活选择。在众多方案中，哪种是称量次数最少的呢？这种方案中每次称量有什么特点呢？有没有普遍适用性呢？这就是本节课需要解决的问题。

二、理解并掌握逻辑推理的思想方法

前面已经讨论过，要解决“保证找出次品”的问题，方案多种多样，有的烦琐些，有的便捷些。无论哪种方案，都需要用到逻辑推理。逻辑推理是贯穿本节课始终的思想方法。

1. 本节课中逻辑推理的基本形式是什么？

众所周知，三段论是逻辑推理的基本形式，即用大前提、小前提共同推出结论。本节课所用到的逻辑推理就是三段论。具体到“找次品问题”，大前提就是“次品必定在天平两边或天平外”，由小前提“称量时天平平衡”可推出结论“次品在天平外”，由小前提“称量时天平不平衡”可推出结论“次品在下沉一端”。

在每次称量时，称量的结果有时“一定不平衡”，有时“有可能平衡，有可能不平衡”。判断的标准就是看称量时天平外有没有剩余零件，如果天平外没有剩余零件，就一定不平衡；反之，则存在两种可能性。每次称量时，学生都需要先判断称量的结果是什么，然后进行推理。这样，通过判断—推理—再判断—再推理……的过程，直到每一条“可能的路径”都把次品找出来。

2. 如何清晰地表示逻辑推理的过程？

为了使别人明白自己是怎么解决问题的，学生需要清晰地、有条理地表示出逻辑推理的过程。最为直接的是口头表述，但当零件总量比较多时，步骤相应增加，很容易表述不清，毕竟里面有太多的“如果平衡，那么……”“如果不平衡，那么……”了。也可以采用文字表述的方式（本文在前面“9个零件”的问题中采用的就是这种方式），但由于前后步骤之间的层层套叠关系，表述起来也显得冗长且烦琐。而使用直观图或流程图，配以相应的文字说明，可以比较简洁而又清晰地表示出逻辑推理的整个过程，让人一目了然。

不管学生使用哪种表示方式，最为重要的是要把各种可能性都考虑到。在实际教学中，学生最容易出现的问题是在某次称量以后，如果存在两种可能性，在接下来的推理过程中，只顾及其中一种可能性而忘了另一种可能性。

三、经历比较—猜想—验证的过程

如上所述，同样是解决9个零件的问题，可以有不同的方案。如何在众多方案中找到一种最优方案呢？这就需要学生对不同的方案进行比较，发现把这堆零件平均分成3份，并且在接下来的每次称量中也采用这一方式，所用的次数是最少的。

仅凭一个特例就说明这一猜想正确，显然太过武断，这就需要学生进一步验证。例如，可以让学生以不同的方案解决8个零件的问题（零件数量可以随意设定，如15个、27个，但最好不要取太小的数，因为当零件数量很少时，无法体现这种方案的优越性），看看猜想是否合理。

至于从理论上解释为什么这样的方案是最优方案，需要用到许多概率论知识，显然超出了小学生的接受能力。但教师可以用更通俗的方式试着解释：次品所在的位置无外乎天平左端、天平右端和天平外这三个地方，而要使称量的次数最少，就要使次品在这三个地方的机会尽量均等。这样，不管次品在三个地方中的任何一个，问题都转化成“从总数的三分之一（左右）里面继续找次品”。例如，要从9个零件中找出次品，第一次称量时，如果天平两端各放2个，

假如天平平衡，接下来就要从天平外的 5 个零件里找次品。如果两端各放 4 个，假如天平不平衡，接下来就要从下沉一端的 4 个零件里找次品。如果天平两端各放 3 个，不管天平平衡或不平衡，接下来都是从 3 个零件里找次品。很显然，从 3 个零件里找次品比从 4 个、5 个零件里找次品要相对容易一些。

四、利用化归，寻找模式

学生掌握了这种最优方案以后，就可以利用化归的方法解决零件数量更多的问题。例如，要从 100 个零件中找次品，第一步，把 100 分成【33, 33, 34】，经过第一次称量 33 与 33，若平衡，化归为从 34 个零件中找次品；若不平衡，化归为从 33 个零件中找次品。第二步，把 33 分成【11, 11, 11】，把 34 分成【11, 11, 12】。第三步，把 11 分成【4, 4, 3】，把 12 分成【4, 4, 4】。第四步，把 4 分成【1, 1, 2】，把 3 分成【1, 1, 1】。第五步，把 2 分成【1, 1】。这样，最少用 5 次称量就一定能把这个次品找出来。

在此基础上，可以进一步引导学生寻求找出次品需要称量的最少次数和零件总数之间关系的模式，即教科书第 114 页的表格。

要辨别的物品数目	保证能找出次品需要称量的最少次数
2~3	1
4~9 (即 3^2)	2
10~27 (即 3^3)	3
28~81 (即 3^4)	4
82~243 (即 3^5)	5
.....

可以让学生通过观察这一表格思考：为什么当零件数量从 3 到 9，再到 27……以“ $\times 3$ ”的速度递增时，保证找出次品的最少称量次数却只以“+1”的速度递增？还可以让学生反向思考：如果最少用 15 次就保证能从一堆零件里找出较重的那个次品，零件数量至多可以是多少个？由于 $3^{15} = 14348907$ ，可知零件至多可以是 14348907 个。通过数据之间的强烈反差，使学生惊叹于数学的神奇力量，从而进一步产生探索未知数学世界的兴趣。

基于以上分析，在对本节课进行教学设计时，可以把各个教学重点、难点分散在不同的教学环节，依次突破。需要注意的是，由于本节课的容量比较大，在 40 分钟内难以完成，因此，应根据实际情况灵活调整课时。

浅谈小学生数学思维能力的培养

——以“找次品问题”为例^①

数学学习除了掌握基本的数学知识和技能，更重要的是通过具体知识的学习，学会数学地思维。《数学课程标准（2011 年版）》明确提出“四基”，其中新增的基本思想和基本活动经

^① 熊华：浅谈小学生数学思维能力的培养，载于《小学数学教育》（2016 年第 5 期）。

验,本质上就是让学生学会数学地思维。下面以人教版《义务教育教科书·数学》五年级下册“数学广角”中“找次品问题”为例,就小学生数学思维能力的培养,从“找次品问题”中蕴含的数学思想方法、教材编排解读、教学设计分析三个方面进行简要的阐述。

(一) 蕴含的数学思想方法

“找次品问题”中最简单的模型是:有 n 个物品,其中有1个是次品,次品比正品重(或轻)一些,如果用没有砝码的天平称,至少称几次能保证找出这个次品?

这个问题的解决方案是:每一次称,都将待测物品尽可能地平均分成3份(a, a, b),其中 b 等于 a ,或者是 $a+1$,或者是 $a-1$,这样称所用的次数最少。例如,如果有8、9、10个零件,则分别分为8(3, 3, 2)、9(3, 3, 3)、10(3, 3, 4)。

“找次品问题”中蕴含丰富的数学思想方法,归纳起来主要有以下几种。

1. 抽象思想。

数学本质上研究的是抽象的东西,可以说抽象能力是学生数学思维的基础。在“找次品问题”中,抽象思想主要体现在两方面。一方面,这里虽然是要利用天平来找出次品,但天平实际上是一个抽象的符号,解决问题并不需要利用天平实际去称量,而是借助天平的原理进行推理,不断进行“如果天平平衡,则……如果天平不平衡,则……”这样的想象。另一方面,这里的物品也只是一个符号,我们只需关注物品的数量、次品与正品的轻重,至于是什么样的物品都没有关系。所以,在推理的过程中,可以借助抽象的符号、流程图等帮助我们进行分析、判断。

2. 化繁为简思想。

化繁为简思想也是数学学习最常用的思想方法之一。我们遇到一个新问题的时候,通常都是从简单的问题入手,包括数据变小、条件简化,在特例的研究中找到规律、找出方法,然后再将这个规律和方法推广应用到原来的问题中。例如,我们研究“鸡兔同笼问题”或“植树问题”时,就是先在数据较小的情形下找出一般规律或方法,同样,“找次品问题”也是先从2个、3个等小数据的情形下探究最优方案,找到规律后再推广应用到一般情况中。

3. 推理思想。

在解决“找次品问题”的每一种方案中,都需要用到推理思想。比如,解决3个物品的“找次品问题”时,方案3(1, 1, 1)在天平两边各放一个物品,如果天平平衡,则天平外的那个物品就是次品,如果天平不平衡,则次品就在天平两边的2个物品中。这里用到的就是最简单的选言推理思想。另外,在解决8个物品的“找次品问题”时,方案8(3, 3, 2)中,第一次称量时,次品可能在3个中,也可能在2个中,这时要用到假言推理,选择3个进行称重,因为要找到保证找出次品的最少次数,不能假定次品在数量少的那一份中。选定数量多的那一份,称同样的次数就能保证在数量少的那一份中找出次品,反之则不然。

4. 转化思想。

数学的学习都是将未知的问题转化为已知的问题,所以说转化思想是我们解决问题的法宝之一。虽然“找次品问题”并不是直接将问题转化为已经解决的问题,但是在寻找规律的过程中,需要不断应用前面的结论。例如,有27个物品,第一次分成(9, 9, 9)可以把次品确

定其中一个 9 份中，这时就可以利用前面的结论，9 个物品再用天平称 2 次就能找出次品。这样，只要转化为前面已经解决的数量，就能利用已有的结论，便于学生更好地探索最优方案，提高解决问题的效率。以此类推，我们可以进一步归纳出“找次品问题”的一般结论（如图 1）。

要辨别的物品数目	保证能找出次品需要测的次数
2~3	1
4~9	2
10~27	3
28~81	4
82~243	5
.....

图 1

5. 优化思想。

优化思想是“找次品问题”中最突出的思想。同样，优化思想也是数学学习中的重要思想，不仅可以解决“烙饼问题”“打电话问题”等实际生活中的数学问题，事实上，学生的数学学习本身就是一个不断优化的过程。解决“找次品问题”可以有不同的方案，学生通过探究，在不同方案的对比分析中找出最优方案。特别地，在寻找最优方案的过程中，初步体会“找次品问题”的优化本质“每一次称重都能将次品限制在最少的数量中”。结合前面学习“烙饼问题”的优化本质“每一次烙饼都用满锅的位置”，“打电话问题”的优化本质“每一分钟已经接到通知的人都不闲着”，这样，学生不断积累活动经验，丰富解决问题的优化策略，学会数学地思维。

（二）教材编排解读

“找次品问题”作为“数学广角”的内容编入实验教材，经过教学实践的检验，对学生学情和教师教学方式的研究，在《数学课程标准（2011 年版）》培养学生“四基”的目标下，我们对这部分内容的编排作了调整。

如图 2 是实验教材的编排。一方面，注重学生的操作和小组合作学习，两个例题都呈现出小组学生借助天平进行操作的合作学习情境。另一方面，体现探索的思维过程和分析方法，例 1 先让学生经历“找次品”的一般过程，例 2 则引导学生经历从具体到抽象、从特殊到一般的数学思考模式，从 9 个物品开始探索“找次品”的方案，通过对不同方案的对比，发现解决“找次品问题”的最优方案，并进一步加以验证和推广到更多物品数量的“找次品问题”中。

但在教学实践中，如果过于依赖动手操作的直观演示，并不利于学生进行抽象的推理，并且，这里的天平应该是作为天平原理的一个符号，让学生在头脑中进行操作和推理。此外，学生在探索最优方案的过程中，如果仅仅是从结论“保证能找出次品需要称的次数最少”来体会优化思想，也就是通过不同方案的对比，知道将物品平均分成 3 份，称的次数最少，而不理解为什么要这样分的话，以后遇到另一个优化问题，学生还是不知道如何去思考和解决。因此，为了让学生更好地体会“找次品问题”中优化思想的本质，借助符号进行抽象推理和数学表



图 2

达，新教材对这部分内容作了相应的调整。

与原实验教材相比，新教材的编排主要突出以下两点。

1. 经历“找次品问题”的优化过程，体会优化的本质。

知其然还要知其所以然，只有体会到优化思想的本质，学生才能真正领悟其中蕴含的思想方法。正如前面提到的，“找次品问题”优化的本质是每一次称重都要将次品限制在最小的范围内，解决“找次品问题”的一般方法是“把这 n 个物品尽可能平均分成 3 份”。这是由天平的特点决定的，因为天平有两个托盘，所以次品的位置无外乎三个地方，即两个托盘上、天平外，天平称一次就能确定出次品在三个位置中的哪一个。而要使称量的次数最少，每次称量后，就应把次品确定在更小的范围内。要做到这一点，就应使三个位置放的物品个数尽量同样多。

为了让学生理解“尽可能地将待测物品平均分成 3 份”的合理性，我们也特意对教材进行了改编。把例 1 由原来的 5 个物品，改为 3 个物品。让学生初步认识找次品问题的含义，明确找次品的基本方法。特别是让学生初步体会到：天平称一次，可以判断出次品在两个托盘或者天平外中的一个。也就是说，通过推理可以将次品确定在这 3 份中的 1 份中。这就为分 3 份提供了直观的经验，为后面的探索作准备。把例 2 由探索 9 个零件，改为先探讨 8 个零件，再研究 9 个零件。从 8 个零件中找次品，学生一般会很自然地想到平均分成 2 份 (4, 4)，但会发现这不是称的次数最少的，分成 3 份 (3, 3, 2) 才是称的次数最少的方法。而从 9 个零件中找次品，受天平平衡的暗示，学生会自然想到 (4, 4, 1) 和 (3, 3, 3) 的分法。通过对比，学生会感受到分成 3 份的情况中平均分的方法称的次数最少。如果不能平均分呢？回过头再去研究 8 个的最少次数，会发现尽可能地平均分可以使称的次数最少。最后将此规律应用到 10 个、11 个零件加以验证。这样层层递进，逐渐感知并理解称的次数最少的方法的特点，总结出找次品的最优策略：一是把待测物品分成 3 份；二是尽量平均分。

当然，教学可以在遵循教材提供的基本教学思路的前提下进行一些调整。例如，可以从 2

个开始，再重点探究 3 个、8 个、9 个的情形。也可以从 3 个开始，再以小组为单位分工合作研究 4~9 个的情形。通过讨论与交流，分析、总结出最优的方法。不管怎样，都要让学生体会到，借助天平的三个位置，每称一次就能将次品限制在 3 份中的 1 份中。

2. 突出数学思维过程的表达。

学会数学地表达也是学生数学思维能力发展的重要方面，而数学表达也能显现学生的数学思维过程，只有正确、有条理地表达自己的思考过程，学生才能真正理解、掌握解决问题的策略和方法，并能进一步加深认识和理解。

“找次品问题”中的天平并不是一架实物天平，而是一种抽象的数学化形式的天平。因为一旦拿一架实物天平进行实验，就不会出现“假如平衡……”“假如不平衡……”的情况，而只会出现其中一种，要么平衡，要么不平衡。在解决问题的过程中，实际上是用头脑中建立的天平表象，反复地进行“如果平衡，那么……”“如果不平衡，那么……”的逻辑推理过程。那么如何清晰地、有条理地将这一过程表示出来呢？最为直接的是口头表述。但当物品总量比较多时，步骤相应增加，很容易表述不清。当然也可以采用文字表述的方式，但由于前后步骤之间的层层套叠关系，表述起来也显得冗长且繁琐。而使用直观图或流程图，配以相应的文字说明，可以比较简洁而又清晰地表示出逻辑推理的整个过程，让人一目了然。

因此教材从例题到习题，不断引导学生学习用符号、文字来直观、简洁地表示思维过程，使学生在潜移默化中学会数学地表达，有意识地培养思维的条理性、逻辑性和准确性。例如，例 1 在呈现天平操作、直观演示的同时，适时体现数学抽象的思想。由“小精灵”引出用符号、图示结合文字表示出用天平找次品的过程。借助这个直观图，帮助学生更好地进行推理和交流。这个过程也为后面进一步探究解决“找次品问题”的最优方案打下基础，同时，这对于学生数学抽象思维的培养也是大有裨益的。接下来，例 2 就引导学生尝试用画直观图、流程图，并配以文字说明的方式表示逻辑推理的过程，使学生逐步学会用数学化的方式表达思维过程。

当然，在表达思维过程时，可以是教材中呈现的直观图，可以是流程图，还可以是树形直观图等。学生可以用自己所理解的图示将推理的抽象过程表示出来，并且借助这个图示清晰地表达出自己的思考过程。如图 3 是学生可能出现的图示。

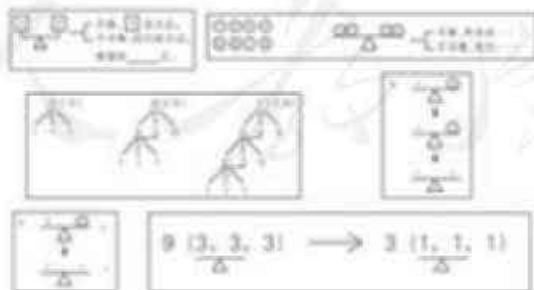


图 3

(三) 教学设计分析

以往的“找次品问题”教学中，教师将目光更多地集中在通过不同方案的对比找出最优方

案，甚至课堂上，有的教师通过自身数学思维的恰当运用，直接将结论告诉学生然后进行验证和应用，这样也就失去对学生进行数学思维能力培养的机会和意义。

我们知道，“找次品问题”的目标很多，既可以让学生经历操作、探究、验证、归纳的解决问题过程，也可以培养学生抽象、推理和优化的数学思维过程，如果一节课设置的目标过多，不仅教师不好把握，而且会造成学生学习负担的加重，不利于学生数学思维能力的培养。因此，我们应该把教学重点放在学生学习的难点和解决“找次品问题”的关键点上。具体来说，就是把握两点：一是抓住解决“找次品问题”的优化本质进行探究；二是借助直观图进行抽象推理和数学表达。帮助学生真正理解解决“找次品问题”最优方案的合理性，简洁明了地表达自己的思考过程，培养学生的数学思维能力。

下面给出一个教学设计供参考。

环节一：从2个、3个物品中找次品

1. 回顾前面解决“沏茶问题”和“打电话问题”中优化思想的本质。
2. 借助操作，从2个物品中找次品。
3. 借助操作，从3个物品中找次品，逐步抽象，初步学会用图示（过程图）表示思维过程。
4. 对比2个和3个，为什么都只用1次就能找出次品？

（设计意图：一是让学生初步经历解决“找次品问题”的过程，从2个、3个物品中找次品，学生初步经历判断推理的过程。二是从具体操作中，将天平抽象为以天平平衡原理作为判断和推理的方法，初步学会利用符号表达推理的过程，在操作的基础上利用符号（如教材所示图例）和文字，将推理过程用直观图的形式表示并表达出来。三是初步体会优化的本质，通过回顾让学生解决优化问题的关键，同时通过对比让学生初步理解利用天平称重进行判断，除了天平两个托盘的位置外，天平外的物品也可以进行推理判断。这就为后面探究平均分3份的最优方案作好铺垫。）

环节二：从8个、9个物品中找次品

1. 从8个物品中找次品，尝试用图示表达思考过程（理解“保证”的含义）。
2. 从9个物品中找次品，继续用图示表达思考过程（可进一步抽象，用图4表示）。



图4

3. 对比，发现找次品的最优方案，初步体会最优方案背后的道理。

（设计意图：一是理解“保证找出次品”的含义，也就是每一次都要考虑最不利的情况，如8(2, 2, 4)，称一次最不利的情况是次品在4个中，接下来要从4个中进行判断；而8(3, 3, 2)，称一次最不利的情况在3个中，接下来从3个中进行判断。二是通过从8个、9个物品中找次品，在不同的方案比较中发现最优方案：每次都应将物品尽可能平均地分成3份，所用次数最少。结合前面的初步体会，认识到“找次品”的最优方案就是每一次都能将次品所

在的数量限制在最小的范围内，用天平称一次可以推断次品在天平两个托盘和天平外这三个位置中的一个，根据最不利的原则，只有这3份的数量尽量相等，才能把次品限制在更小的数量中。三是注重思维过程的表达，借助直观图显现学生的思维过程，更好地进行推理和交流。而直观图的进一步抽象，也便于学生将发现的规律在更大数据的问题中加以验证和推广应用。）

环节三：验证、反思、推广（课后完成）

1. 在10个、11个、27个物品中找次品，验证发现的规律。
2. 思考：称4次，最多能从多少个物品中找到次品？
3. 将发现的规律进行归纳，自主总结完成前面图1的结论。

（设计意图：一是进一步借助抽象的直观图验证和应用发现的规律，进一步加深理解优化思想背后蕴含的本质，初步学会数学地思维。二是体会转化思想，大数据的情形经过平均分转化为小数据的情形后，就可以直接应用前面已有的结论。三是转换角度，从给定次数推断出能找出次品的最大物品数量，正反两方面的推理过程，有助于学生更好地理解“找次品问题”的最优方案。四是建立模型，通过对规律的归纳，形成解决“找次品问题”的一般模型和方法。）

当然，实际教学还需要结合学生的实际情况进行调整，不管如何，前面提到的两个关键点，体会优化的本质和结合直观图进行数学表达，一定要落实在课堂上，这样才能有效培养学生的数学思维能力，让学生学会数学地思考。

四、评价建议与评价样例

（一）评价建议

本单元的教学内容是“找次品”，它是义务教育阶段数学课程的四个课程内容之一“数与代数”领域中的“探索规律”的内容。通过本单元的学习，引导学生通过观察、猜测、试验、推理等活动探究“找次品”问题的解决策略，使学生感受解决问题策略的多样性，同时向学生进一步渗透优化的数学思想方法，培养观察、分析、推理的能力。所以，对本单元的评价应该围绕学生对优化策略的应用情况进行评价，突出以下两点。

1. 应用优化策略解决生活中的实际问题。
2. 用直观、简洁的方式表示解决问题的推理过程。

（二）评价样例

本单元的学习内容可以通过综合练习形式开展评价。

以下为综合练习样题。

1. 我会填空。

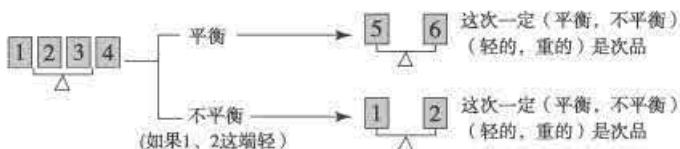
有6颗外表一模一样的玻璃珠子，其中有一颗玻璃珠子稍轻一些。下面是找次品的过程，请你圈出括号里的正确答案。

方法一：每次天平两边各放一颗玻璃珠子。



一共称（ ）次，可以保证找到次品。

方法二：每次天平两边各放 2 颗玻璃珠子。



一共称（ ）次，可以保证找到次品。

2. 我会解决问题。

(1) 在 9 颗螺丝钉中，混入了 1 颗不合格的螺丝钉（次品），它与合格螺丝钉的外形一模一样，只是质量略重一些。如果用天平称，最少称几次能保证找出这个次品？

(2) 在 27 个金币中，有一枚假金币，假金币除了质量轻一些外，其他无任何差别，如果用天平称，至少称多少次就能保证找出这枚假金币？

3. 我是小帮手。

一个古玩商店经理不小心将一枚假铜币混入了 10 枚真铜币中，这 10 枚真铜币外形、质量完全相同，假铜币外形与真铜币一样，只是质量不一样，但不知道比真铜币轻还是重。如果用天平称，至少称几次，就能保证帮助经理从 11 枚铜币中找出假铜币？你能用画图 and 文字写出你的称法吗？

人教版®

第九单元 总复习

一、教材说明和教学建议

(一) 教学目标

1. 通过总复习,使学生对本学期所学的图形的运动、因数与倍数、长方体和正方体、分数的意义和性质、分数的加法和减法、折线统计图 etc 知识进行梳理、归纳,得到进一步的理解和掌握。

2. 通过数学活动和综合练习,进一步培养学生发现问题、提出问题的能力,增强学生运用所学知识分析和解决简单实际问题的能力。

3. 通过总复习,使学生在经历知识整理的过程中进一步养成回顾与反思的良好学习习惯,进一步体验数学与生活的联系,体会分类、数形结合、归纳、推理、模型等数学思想,积累数学活动经验,全面达到本学期规定的教学目标。

(二) 内容安排及其特点

本单元包括三部分内容:一是成长小档案;二是数学活动;三是针对全册所学知识的综合练习(练习二十八)。

1. 成长小档案。

“成长小档案”是对本册所学内容的复习与整理,包括对数学知识的整理和对学习中最有收获的事情的回顾两个方面。

教材用4幅图展现了本册教材的主要学习内容:分数的意义和性质、分数的加法和减法、图形的运动、长方体和正方体、统计、因数与倍数。

(1) “分数的意义和性质、分数的加法和减法”的复习。

教材第1幅图呈现对本学期所学分数知识的整理。虽然只有一幅图,但却包含了分数的意义和性质、分数的加法和减法的内容。

分数是儿童对数概念认识的又一次扩展。本学期所学的“分数的意义和性质”,是在三年级上学期分数初步认识的基础上进一步深入学习,是学生系统学习分数的开始。内容包括:分数的意义、分数与除法的关系,真分数与假分数,分数的基本性质,最大公因数与约分,最小公倍数与通分,以及分数与小数的互化等。本学期所学的分数的加法和减法比三年级上学期学习的分数的简单计算内容更多、难度更大,不仅包括同分母分数的加、减法,还包括异分母分数的加、减法和分数加减混合运算。

分数单位是认识分数、进行分数加减法计算的基础。复习时,可让学生结合具体情境和生活实例理解单位“1”和分数单位。引导学生梳理分数的基本性质、约分、通分三者之间的关系,理解同分母分数加、减法和异分母分数加、减法的联系与区别,掌握分数加减混合运算。

另外，分数加减运算的简便算法在复习时也应加以强调。

(2) “图形的运动、长方体和正方体”的复习。

教材第2幅图呈现本册所学“图形与几何”部分的知识，主要包括两部分内容：图形的运动，长方体和正方体。

学生在第一学段已经对日常生活中的轴对称、平移、旋转现象有了直观的感知，本学期进一步深入学习图形的旋转。复习时，可让学生联系具体情境，借助钟表或风车的旋转，通过观察、操作，进一步理解旋转、顺时针旋转和逆时针旋转的含义，再通过看一看、画一画等操作活动，使学生明确，描述旋转时一定要说清“绕哪个点旋转”“向什么方向旋转”和“转动了多少度”，培养学生的空间想象力和思维能力，发展空间观念。

在长方体和正方体的复习中，借助长方体实物或模型，让学生通过看一看、摸一摸、比一比、想一想等活动，回顾长方体和正方体的面、棱、顶点和空间位置关系，进一步分清表面积和体积的概念，掌握长方体和正方体的表面积和体积公式，并能结合具体情境正确计算。此外，在解决实际问题中进一步探索不规则物体体积的测量方法。

(3) “统计”的复习。

教材第3幅图呈现全国2000—2003年耕地和林地面积的变化情况，引导学生对本册教材中“统计”的内容进行复习。

本册中“统计”主要学习折线统计图，教材将单式折线统计图和复式折线统计图集中编排。复习时，可先复习单式折线统计图，进而在与单式统计图的对照中，进一步了解复式折线统计图的优点，探索出复式折线统计图绘制的方法。此外，还可根据统计图提供的大量信息开放性地提出相关的数学问题，促进学生提出问题、解决问题能力的进一步提高。

(4) “因数与倍数”的复习。

教材第4幅图以一个男孩的话“我还了解了整数的一些性质，加深了对整数的认识”，引导学生对“因数与倍数”的内容进行复习。

这部分内容涉及的概念较多，有因数、倍数、奇数、偶数、质数和合数等，这些概念较为抽象而且容易混淆，巩固对这些概念的理解，明确它们之间的异同是复习的重点。教师可引导学生将这些紧密关联的概念系统整理，让他们在比较和区别中深入理解相关概念，并形成相应的知识网络。此外，2、3、5的倍数的特征是学生学习约分、通分等知识的前提和基础，复习时要引起充分的重视，力求学生切实理解和掌握。

对“学习中最有收获的事情是什么？”的回顾包含两方面的内容：一是学习内容上的收获；二是学习方法上的收获。《标准（2011）》指出：通过义务教育阶段的数学学习，使学生能体会数学知识之间的联系，了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和科学态度。这样的编排，使学生不但巩固了知识和技能，强化了过程与方法，也得到了情感、态度、价值观的熏陶。

2. 数学活动。

教材在总复习的第二部分安排了4个数学活动：活动1是对因数与倍数学习内容的巩固和提高；活动2是复习巩固观察物体的知识，同时综合运用长方体和正方体、分数的意义和性质

的学习内容；活动3是针对图形的变换的巩固和提高，同时运用本学期所学分数的相关知识解决问题；活动4是针对折线统计图的整理与回顾。

上述内容的编排体现了如下的特点。

(1) 注重让学生在动手实践和自主探索中经历知识的整理过程，积累数学活动经验。

活动1回顾“因数与倍数”单元最基本的概念，让学生写出来并进行举例说明，再尝试把有关的知识整理成一个图。这样的编排，有利于学生充分经历“因数与倍数”知识内容的整理过程，自主探索相关知识之间的联系与区别，加深学生对知识的理解与掌握。活动4让学生先观察两个折线统计图所表示的数据，再说一说折线统计图的特点以及绘制复式折线统计图时应注意什么，使学生在具体情境中进一步加深对折线统计图特征的理解，积累数学活动经验。

(2) 注重学生综合运用知识解决问题能力的培养。

一是，注重知识之间的综合。活动2在复习巩固观察物体的学习内容时，让学生求“①、②、③的体积分别是多少？①的体积是③的体积的几分之几？”，是综合运用长方体和正方体、分数的意义和性质的学习内容。活动3在复习巩固图形的变换时也综合了分数的意义和性质、分数的加法和减法知识。二是，注重知识与生活的综合。活动4在巩固复习折线统计图知识的同时，让学生思考“如果你是高考生或者商场经理，你能从统计图中得到哪些信息”，使学生感受到统计与生活的联系。

(3) 注重培养学生发现问题和提出问题的能力。

总复习中同样注重培养学生发现、提出问题的能力。活动1中小精灵的问话“这个图对你有帮助吗”，有利于学生从知识图中发现知识之间的联系，形成知识网络。活动2最后提出“你还能提出其他数学问题并解答吗”，引导学生发现问题和提出问题。活动3让学生“说一说，左图可以通过怎样的变换得到右图”，发展学生的空间观念。

3. 综合练习。

练习二十八是对全册教材所学内容的综合练习，目的是通过一定量的练习，使学生巩固本学期所学知识。练习的编排注意了形式的多样化，有利于促进学生体会和运用数学的思想和方法，在实践和操作中获得基本的数学活动经验，提高学生的数学能力。

(三) 教学建议

1. 针对本班学生的实际情况，制订恰当的复习计划。

教师在组织复习之前要了解本班学生对本学期知识的掌握情况，如概念的理解水平，计算的正确率，哪些知识已经掌握，哪些知识容易混淆，哪些知识出错比较多等，针对本班实际制订出有效的复习计划。同时，在复习时，教师要注意突出重点和难点，提高复习效率，尤其是要根据不同内容，选择不同的复习方式。如，对于因数与倍数、分数的意义和性质等内容，可以采用判断等练习形式加深学生对概念的理解；对于图形与几何部分可通过具体操作理解图形的特征和变换；对于长方体和正方体的表面积和体积、分数的加法和减法等，可以结合具体情境，适当提高训练量加以巩固。总之，复习既要达到帮助学习有困难的学生弥补知识缺漏的目的，又能满足发展水平较高学生进一步提高的需要。

2. 帮助学生通过梳理形成知识网络。

总复习是对一个学期所学知识的全面整理和巩固。复习时，教师要注意使学生在掌握各部分知识的基础上，加强相关知识内容之间的联系，帮助学生在梳理学习内容的过程中形成知识网络，使学生的知识结构更加系统和完整。这样，既有利于学生更好地理解 and 掌握已学的知识内容，也有利于培养学生良好的复习整理习惯。

如，复习因数与倍数时，既要巩固因数与倍数、质数与合数的概念，还可以联系最大公因数、最小公倍数等知识形成一个系统的知识网络（图1）。复习本学期所学有关分数的知识时，可引导学生将分数的意义和性质、分数的加法和减法的知识整合成一个系统的知识网络（图2）。知识网络可以采用下面的网络图形式，也可制成知识树或者其他的形式。

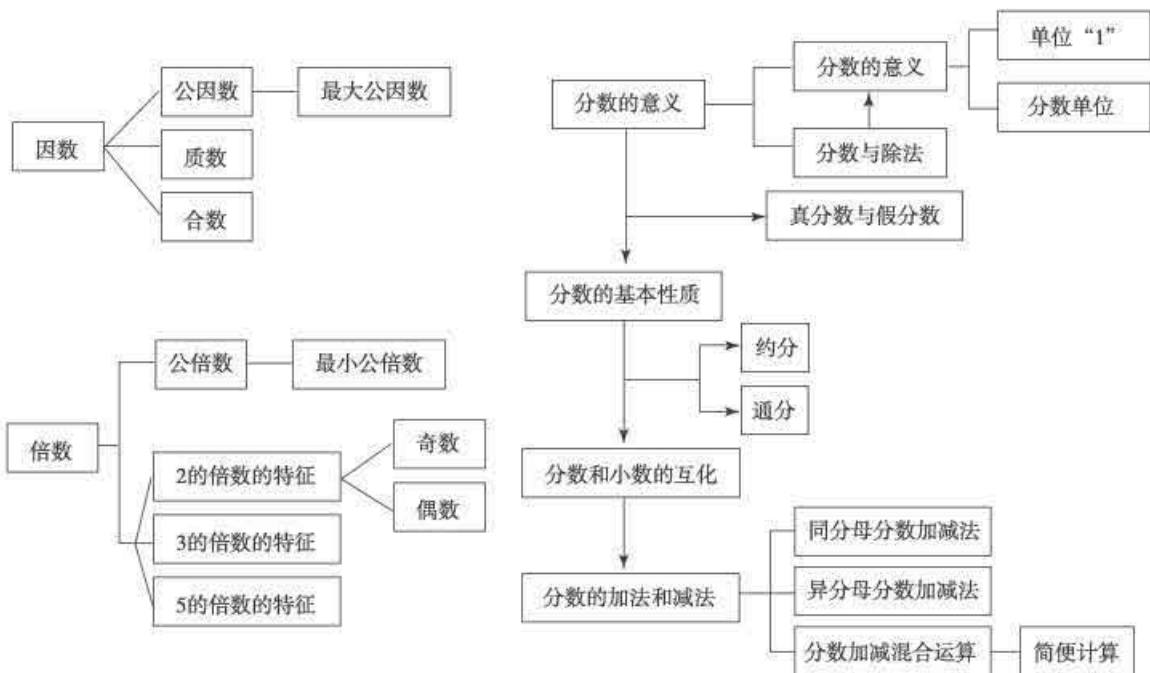


图1

图2

3. 建议用4课时教学。

（四）具体内容的教材分析和教学建议

编写意图

(1) 用建立“成长小档案”的形式，引导学生对本学期所学习的数学知识和最有收获的事情进行回顾。

(2) 教材以4幅图呈现了本学期的主要学习内容：分数的意义和性质、分数的加法和减法、图形的运动、长方体和正方体、统计、因数与倍数。分数的意义和性质的复习主要包括分数的意义、分数的基本性质、约分和通分、分数与小数的互化等。分数的加法和减法包括同分母分数加减法、异分母分数加减法和分数加减混合运算。图形的运动主要复习旋转的内容。长方体和正方体的复习包括长方体和正方体的认识、表面积和体积等。统计主要复习折线统计图相关知识。因数与倍数的复习包括因数与倍数的意义和2、5、3的倍数的特征，以及质数和合数等内容。

(3) 通过对“学习中最有收获的事情”的回顾，使学生不但从知识技能方面进行整理，也对学习方法、学习习惯等进行梳理，激发学习的兴趣。



教学建议

(1) 采用适合本班学生实际的形式组织复习。

复习时，教师可以根据本班学生的学习实际和复习习惯，分单元、按顺序进行复习，也可以引导学生按学习领域对知识进行回顾和梳理。既可以采用提问和回答的方式进行复习，也可以让学生用自己的方法整理本学期所学知识，并通过积极思考、合作交流和动手实践等方式加深对知识的理解和掌握。

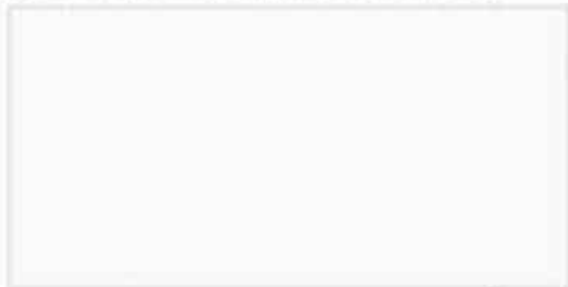
(2) 重视对学生学习方法、学习习惯和情感态度的培养。

如，在复习分数的加法和减法时，通过简便运算的整理和复习，让学生理解很多整数的知识可以拓展到分数里，感受到数学知识之间的紧密联系；在复习长方体和正方体等知识时，使学生感受到实验、操作等方法在数学中的作用；通过解决问题，使学生感受到数学在生活中的应用价值。

(3) “找次品”属于“数学广角”的内容，主要是让学生充分感受到数学与日常生活的密切联系，体会优化、推理、模型等数学思想方法，这部分内容不作具体要求，教师在复习时可根据实际情况具体把握。

1. (1) “因数与倍数”单元最基本的概念是什么? 请写在下面的方框中, 并举例说明。

(2) 你能从基本概念出发, 把有关联的知识整理成一个图吗?



2. 下面3个几何体都是由棱长1 cm的小正方体摆成的。



(1) 下面的图形是分别从上面看到的, 它们分别是是哪个几何体的上面看到的? 将序号写在括号中。



(2) ①、②、③的体积分别是多少? ①的体积是③的体积的几分之几?

(3) 如果要使①、②、③分别继续拼成一个大的正方体, 每个几何体至少还需要多少个小正方体?



(4) 你还能提出其他数学问题并解答吗?

(1) 第1题中第(1)题让学生回顾“因数与倍数”单元最基本的概念, 并要求学生举例说明, 有利于加深学生对基本概念的理解。第(2)题让学生从基本概念出发, 把有关联的知识整理成一个图, 有利于学生从整体上回顾和整理“因数与倍数”的学习内容, 再通过小精灵的问话“这个图对你有帮助吗”, 使学生感受基本概念之间的联系, 从而达到“温故而知新”的复习目的。

(2) 第2题以棱长1 cm的小正方体摆成的3个几何体为载体, 通过3个问题综合复习所学知识内容。其中第(1)题是让学生运用所学观察物体的知识进行正确判断; 第(2)题让学生分别计算3个几何体的体积以及“①的体积是③的体积的几分之几”, 渗透长方体和正方体、分数的意义和性质的学习内容; 第(3)题通过想象, 培养学生的空间观念; 第(4)题是一道开放题, 有利于培养学生发现问题和提出问题的能力。

教学建议

(1) 重视学生的实际观察和操作, 让学生充分经历知识的整理过程。

第1题是对“因数与倍数”基本概念的梳理, 教师在讲清要求后, 可放手让学生去回顾与整理。建议学生将方框分成左右两部分, 基本概念和举例写在左边, 知识图写在右边。知识图可以是框架图, 也可以是树形图, 还可以是学生自己整理的其他知识图。完成第2题时, 教师可提供相关学具, 让学生进行实际操作和观察。通过摆一摆, 看一看, 说一说, 画一画, 想一想等活动, 培养学生的空间想象能

力, 发展学生的空间观念。

(2) 多形式培养学生发现问题和提出问题的能力。

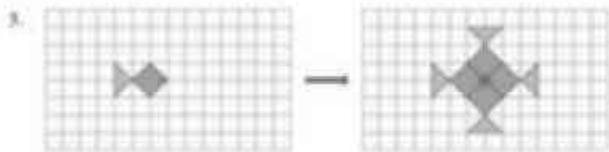
完成第1题后, 可让学生充分观察方框中的基本概念和整理成的知识图, 说一说“这个图对你有帮助吗”“你从图中发现了什么”。

完成第2题中第(4)题时, 可让学生结合前3问提出相关的数学问题, 如, 这3个几何体从前面看分别是什么形状的? 第①个几何体的表面积是多少? ①的体积是②的体积的几分之几? 也可让学生自己提出其他的问题, 从而培养学生发现问题和提出问题的能力。

编写意图

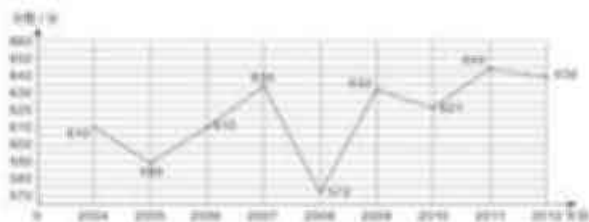
(1) 第3题共有2个问题。其中,第(1)题是通过让学生说一说“左图可以通过怎样的变换得到右图”,复习巩固旋转的相关知识内容,并让学生在欣赏图形中感受数学知识的奇妙。在描述时要让学生说清旋转时所绕的点、旋转的方向和角度。第(2)题通过3个问题渗透分数的意义和性质、分数的加法和减法的知识,同时让学生感受到不同数学知识之间的联系。

(2) 第4题以实际生活中的招生分数线和商品销售情况为背景,引导学生复习有关折线统计图的知识内容。第(1)题和第(2)题旨在让学生进一步了解折线统计图的特点以及复式折线统计图的优点,充分交流绘制复式折线统计图应该注意什么。第(3)题让学生根据统计图获得有用的信息,开放性地提出问题,促进他们提出问题、解决问题能力的进一步提高。

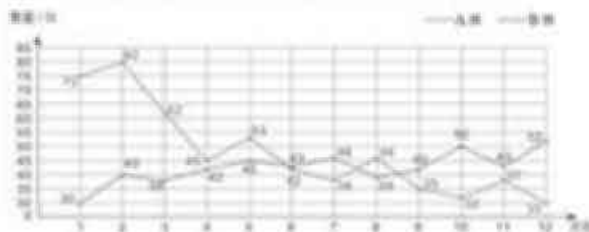


3. (1) 说一说左图可以通过怎样的变换得到右图。
(2) 右图中绿色部分占整个图形的几分之几? 红色部分占整个图形的几分之几? 红色部分比绿色部分多占整个图形的几分之几?

4. 2004—2012年某大学理工科在河北省的招生分数线统计图



某家电商场A、B两种品牌彩电2012年12月月销售量统计图



- (1) 观察这两个折线统计图所表示的数据,说一说折线统计图适合表示数据的什么情况。
(2) 说一说绘制复式折线统计图时应注意什么。
(3) 如果你是高考生或某商场经理,你能从统计图中得到哪些信息? 这些信息对你有什么帮助?

教学建议

(1) 注意对学生分层要求。

第3题中,可请学生说一说右图是如何通过左图变换而成的,对于有困难的学生,也可引导他们利用方格纸画一画,通过动手操作进一步认识轴对称和旋转。有的学生会利用左图旋转得到右图,也有学生可能是先得到左图的轴对称图形,然后将两个图形分别绕旋转点顺时针旋转 90° 得到右图,教师对正确的方法都应当予以肯定。还可以让学生仔细观察右图,画出右图的对称轴,帮助学生进一步巩固轴对称图形的知识。

(2) 引导学生感受数学的美以及数学与生活的联系。

完成第3题后,教师还可以让学生欣赏由对称和旋转变换成的其他图案,使学生感受到数学的美。第4题中第(2)题,教师可利用课件或挂图先呈现A品牌的销售折线,然后和学生一起完成B品牌的折线;第(3)题让学生充分发表观点,使学生能通过所获得的信息对事物的情况进行判断,对其发展进行推测,深刻感受统计的价值以及与生活的联系。如分数线在这9年的变化过程中,有升有降,尤其是2008年变化剧烈,但总体上呈上升趋势,并且越来越稳定。

练习二十八

1. 下面的数, 哪些是2的倍数? 哪些是3的倍数? 哪些是5的倍数? 哪些是质数? 哪些是合数? 哪些是奇数? 哪些是偶数? 说一说你是怎样判断的。

56 79 87 195 204 630 22 31 57 65 78 83

2. 下面的说法正确吗? 正确的画“√”, 错误的画“×”。

- (1) 所有的质数都是合数。 ()
 (2) 两个不同质数的公因数只有1。 ()
 (3) 一个数的因数一定比它的倍数小。 ()
 (4) 两个数的乘积一定是它们的公倍数。 ()
 (5) 最小的质数是1。 ()

3. 找出下面每组数的最大公因数和最小公倍数, 以其中一组为例, 说一说你是怎样找的。

4和5 6和16 15和20 10和8 3和9

4. 食品店有70多个松花蛋, 如果把它装进4个一样的篮子里, 正好装完; 如果把它装进6个一样的篮子里, 也正好装完, 你能求出有多少个松花蛋吗?



5. (1) 把4米长的绳子平均分成5段, 每段长_____米, 每段绳子是全长的_____。

- (2) 1985年第二次大熊猫调查结果显示, 全国共有1114只野生大熊猫, 2000年开始的第三次大熊猫调查, 最后确认我国共有1586只野生大熊猫, 其中1206只生活在四川。第二次调查到的野生大熊猫的数量是第三次调查数量的_____, 第二次调查中生活在四川的野生大熊猫占所有野生大熊猫数量的_____。



118

编写意图

(1) 练习二十八共安排了18道练习题, 使学生通过综合练习对本学期所学知识内容进行查漏补缺, 巩固提高。

(2) 第1~4题是关于“因数与倍数”的不同形式的综合练习题, 包括数的整除的基本概念(如因数、倍数、质数、合数等), 2、5、3的倍数的特征, 最大公因数和最小公倍数的求法等。

其中, 第1题和第2题旨在通过练习, 让学生明确区分相关概念, 在比较和判断中加深对这些概念的理解。第3题的5组数中, 既有互质的两个数, 也有互为因数倍数的两个数, 通过不同类型巩固求最大公因数和最小公倍数的方法。第4题旨在让学生利用公倍数的相关知识解决实际生活中的问题, 提高解决问题的能力。

(3) 第5题通过实例帮助学生弄清用分数表示具体的数量和占整体的几分之几的抽象量的不同, 以及用分数表示一个量与表示两个数(或量)的关系的不同, 进一步巩固分数的意义。

教学建议

(1) 关注学生对概念的理解和掌握。

这5题涉及的基本概念很多, 复习时, 教师一定要让学生在完成每一道题后说说“为什么”“你是怎么想的”“你是怎样判断的”“你是怎么找的”“还有其它方法吗”等, 以加深对概念的理解和掌握。如, 第2题在学生经过独立思考作出判断后, 教师还可以让学生说一说对或错的理由, 以加深理解。

(2) 鼓励学生用自己的方法解决问题。

如, 第3题, 在让学生说一说是怎么找的时候, 要尊重学生方法的多样性, 只要学生的方

法是合理的, 都要予以肯定。第4题, 实质是求4和6的公倍数, 学生可以先求4和6的公倍数, 可以是12, 24, 36, 48, 60, 72, …, 再根据题目中给出的信息, 松花蛋的数量是70多个, 由此可判断出是72个。

(3) 知识的拓展。

在练习第5题第(2)题时, 可适当给学生介绍有关我国国宝大熊猫的相关情况, 渗透热爱大自然、保护环境、保护国家珍稀动物的意识。

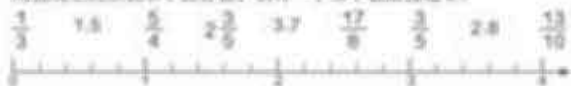
编写意图

(1) 第6~8题是关于分数的意义和性质的综合练习题。其中,第6题用数轴上的点表示数,使学生进一步理解分数与小数的联系,并通过估计培养学生的数感。第7题综合复习分数的基本性质、分数与除法、约分、通分以及分数大小的比较等知识,使学生进一步理解分数各知识之间的联系,培养综合运用知识解题的能力。第8题复习最简分数,进一步巩固学生对分数基本性质的理解。

(2) 第9题集中编排同分母分数和异分母分数的加减法以及分数加减混合运算,旨在帮助学生切实理解同分母分数加减法和异分母分数加减法的联系与区别,掌握分数加减混合运算。分数加减运算的简便算法在复习时也应加以强调。

(3) 第11~12题复习长方体和正方体的知识,将体积和表面积对应复习,旨在帮助学生在比较中厘清表面积和体积的概念。要求学生举例说明常用的体积和容积单位的大小,使学生更好地建立体积和容积单位的表象,深化对这些单位的认识,能正确地进行单位换算。

6. 用直线上的点表示下面各数,估计一下哪个数最接近2。



7. 先填空,再把各数按从小到大的顺序排列。

$$\frac{3}{7} = \frac{(\quad)}{21} \quad \frac{8}{12} = \frac{2}{(\quad)} \quad 5 \div 3 = \frac{(\quad)}{(\quad)} = 1 \frac{(\quad)}{(\quad)} \quad 2 = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

8. 下面哪些数是最简分数?把不是最简分数的化成最简分数,并说一说化简的依据。

$$\frac{6}{8} \quad \frac{28}{16} \quad \frac{10}{21} \quad \frac{30}{45} \quad \frac{12}{25} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{72}{6}$$

9. 计算下面各题。

$$\begin{array}{cccc} \frac{3}{10} + \frac{7}{10} & \frac{5}{8} - \frac{1}{8} & \frac{4}{7} - \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \\ \frac{7}{8} - \frac{3}{4} & \frac{2}{3} + \frac{7}{9} & 7 - \frac{5}{3} & 6 - (\frac{3}{4} - \frac{2}{9}) \end{array}$$

计算时应注意什么?



10. 中国煤炭资源的种类较多,其构成如右图。

- (1) 褐煤占煤炭总量的几分之几?
(2) 你还能提出其他数学问题并解答吗?



11. 填写下表。

名称	图形及条件	表面积	体积
长方体		$S =$	$V =$
正方体		$S =$	$V =$

12. (1) 举例说明 1 cm^3 、 1 dm^3 、 1 m^3 各有多大, 1 L 、 1 mL 的水大约有多少。

$$\begin{array}{ccc} (2) 1 \text{ mL} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ dm}^3 & 700 \text{ dm}^3 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ m}^3 & 81 \text{ cm}^3 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ mL} \\ 1 \text{ L} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ dm}^3 & 2.3 \text{ dm}^3 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^3 & 560 \text{ mL} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ L} \end{array}$$

教学建议

(1) 引导学生进行方法的整理和归纳。

如,第6题要让学生进一步归纳整理分数和小数的互化方法。第7题要让学生明确约分、通分虽然都是应用分数的基本性质,但在具体应用上有所不同:约分是分子和分母都除以相同的数(零除外),通分是分子和分母都乘相同的数(零除外)。复习分数的大小比较时也要有意识地让学生自己总结、归纳分数大小比较的方法。第9题可通过“计算时应注意什么”的问题,引导学生总结同分母分数和异分母分数加减法的计算方法,以及分数加减混

合运算中的简便算法。

完成第11题后,还可以请学生回答“关于长方体和正方体,你还知道些什么”,引导学生回顾长方体和正方体的特征、棱长和表面积等内容,并让学生举例进行说明和计算,加深对所学知识内容的理解和掌握。

(2) 加强验算。

复习“分数加法和减法”时,除了请学生归纳计算方法,弄清这些方法的联系和区别之外,还可请学生用掌握的验算方法对计算结果进行检验。

编写意图

(1) 第13、14两题是对长方体和正方体的综合练习。第13题通过用长方形铁皮做铁盒的实际问题,引导学生进一步巩固和区别有关面积、底面积、表面积、体积和容积的概念,培养学生分析和解决实际问题的能力。第14题实际上是正方体铁块的体积转化成了水的体积,体现转化的思想,可引导学生运用这一数学思想测量不规则物体的体积。

(2) 第15题是对观察物体的综合练习,通过摆一摆、想一想、猜一猜等活动,进一步培养学生的空间想象能力,发展其空间观念。

(3) 第16题是复习关于图形的旋转的学习内容。通过练习让学生进一步巩固旋转的特征,能画出简单图形旋转 90° 后的图形,此题具有一定的开放性。

(4) 第17题是对折线统计图的复习,使学生进一步了解复式折线统计图的优点,并能根据统计图提供的大量信息开放性地提出问题,促进学生提出问题、解决问题能力的进一步提高。

13. 一块长方形铁皮(如右图),从四个角各切掉一个边长为5 cm的正方形,然后做成盒子。这个盒子用了多少铁皮?它的容积有多少?



14. 一个长方体的玻璃缸,长8 dm,宽6 dm,高4 dm,水深2.5 dm。如果投入一块棱长为4 dm的正方体铁块(如右图),缸里的水深是多少?



15. 用4个摆一摆。

- (1) 如果从左侧看到的形状是,这4个小正方形可能是怎样摆放的?
(2) 请你再画出从另一个方向看到的形状,让同桌猜一猜4个是怎样摆放的。

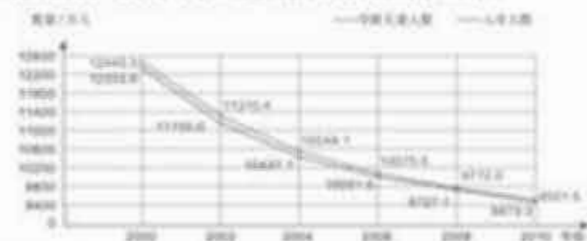


画出“风筝”旋转 90° 后的图形(只画出轮廓线)。

试一试你是怎样旋转并画出的。



17. 我国2000—2010年学龄儿童人数和入学人数统计图如下。



- (1) 哪年学龄儿童最多? 哪年最少?
(2) 哪年没上学的学龄儿童最多? 哪年最少?
(3) 你还能发现什么?

教学建议

(1) 加强直观化教学,促进学生对知识内容的理解和掌握。

第13题在解答时可以先让学生按照课本上的图剪一张纸折一折,看看怎样把它折成一个没有盖的长方体盒子,它的长、宽、高是多少,然后再想一想应该怎样计算它的容积。第14题可以通过实验让学生观察,从而理解溢出的水的体积可以用“水的体积+铁块的体积-长方体玻璃缸的容积”,也可以用“铁块的体积-玻璃缸余部分的容积”来计算。第16题可以让学生在方格纸上画一画,并让他

们交流介绍是怎样旋转并画出的。

(2) 引发学生的数学思考。

如,第13题可以激发学生思考:如果可以焊接,至少切掉几个边长为5 cm的正方形就可以做成一个盒子?第14题在审题时引导学生思考:缸里溢出的水就是正方体铁块的体积吗?为什么?第16题在学生完成后,引发学生思考:你还能绕其他的点旋转吗?怎样旋转?第17题在学生完成后引导学生思考:你能预测接下来的学龄儿童人数和入学人数情况吗?这个统计图对你有什么帮助?

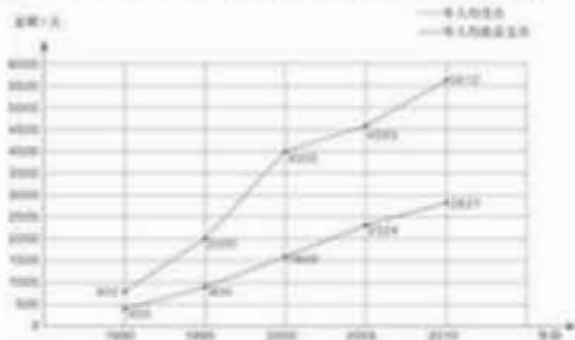
编写意图

(1) 第 18 题和第 17 题都属于生活中的复式折线统计图。通过练习,使学生进一步了解复式折线统计图的优点:不但可以看出每组数据变化的整体趋势,还能对两组数据的差异进行分析、比较。

(2) 思考题要用到排列组合、因数与倍数等知识,有利于巩固学生对奇数和偶数概念的理解和掌握,培养学生有序思考的数学能力,体会分类的思想。

(3) “生活中的数学”介绍了我国近年来耕地面积和粮食产量的现状,并用复式折线统计图呈现了我国 2000 年至 2003 年耕地面积和林地面积的变化情况,使学生感受到数学与生活的联系,渗透保护耕地、保护环境的思想教育。

18. 某地区 1990—2010 年人均支出和人均食品支出如下图所示。



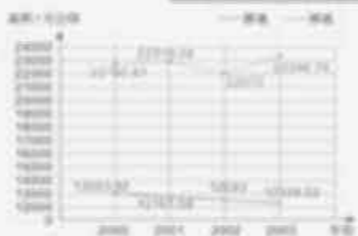
- (1) 每年人均食品支出占人均支出的几分之几?
(2) 比较这几个分数的大小,你能发现什么?

有数字卡片 1、2、3、4 各一张,每次取两张组成一个两位数,可以组成多少个偶数?



生活中的数学

近年来我国耕地面积不断减少,导致粮食减产,我国是人口大国,粮食问题很重要,我们必须树立保护耕地的意识。我国 2000—2003 年全国耕地面积和林地面积如右图。



教学建议

(1) 要注重培养学生的数据分析观念。

数据分析观念是新课程标准十大核心概念之一,要引起教师的高度重视。在完成第 18 题时,可引导学生从统计意义上去体会折线统计图在生活实际中的价值和作用。第(2)题可以让学生估一估,都大约是 $\frac{1}{2}$,而不必让学生通分去精确比较。在回答了(1)、(2)题之后,教师可请学生根据图上的信息预测 2015 年人均支出和人均食品支出的趋势,发展学生的数据分析观念。

(2) 引导学生有序思考。

思考题可以让学生独立思考解答,也可以用四张数字卡片实际摆一摆。在学生列举符合要求的数时,教师要引导他们进行有序的思考。对于能力较强的学生,还可以指导他们寻找解答这种题目的规律。根据题目要求,要摆的是两位的偶数,因此,根据偶数的概念,只能把 2 或 4 这两张卡片放在个位。当 2 放在个位上时,组成的两位数有 3 个:12、32、42;当 4 放在个位上时,组成的两位数有 3 个:14、24、34,所以一共可以组成 6 个偶数。

编写意图

(1) 教材通过自我评价表让学生对自己本学期数学学习的表现进行自我评价,引领学生关注自己在平日学习中的表现和学习状态,学会自我反思,正确评价自己。

(2) 评价表共 10 项,主要从学生的学习情感、学习兴趣、学习态度、学习习惯等方面进行评价。第 1、2 项是对学习兴趣的评价;第 3~9 项是对学习习惯和学习态度的评价;第 10 项主要是引导学生进行反思,反思知识内容和方法、情感态度、习惯兴趣上的不足,促进学生的自我完善。

(3) 附页上提供了长方体和正方体的展开图,主要是为学生的学习提供学习材料,教师可在教学长方体和正方体的认识、长方体和正方体的表面积时提醒学生使用。

同学们,这学期要结束了,给自己的表现画上小红花吧!

学习表现	🌸🌸🌸	🌸🌸	🌸
喜欢学习数学			
愿意参加数学活动			
上课专心听讲			
积极思考老师提出的问题			
主动举手发言			
勇敢发现数学问题			
愿意和同学讨论学习中的问题			
敢于把自己的想法讲给同学听			
认真完成作业			

你觉得自己还应该在哪哪些方面更努力些?

122

教学建议

(1) 教师要有自觉关注学生学习情感和学习习惯的意识。

《标准(2011)》指出:数学教学活动,特别是课堂教学应激发学生兴趣,调动学生积极性,引发学生的数学思考,鼓励学生的创造性思维;要注重培养学生良好的数学学习习惯,使学生掌握恰当的数学学习方法。因此,在平时的教学中,教师不仅要关注学生在知识学习上的状态,还要关注学生在情感态度和方法习惯上的表现,促进学生全面发展。

(2) 多种方式引领学生进行自我评价。

一是要引领学生多途径进行评价,既要有课内的学习评价,也要有课外的学习评价;二是引领学生进行多元评价,将老师、学生、家长的评价相结合;三是进行多形式评价,低年级可以画小红花,高年级可以引导学生画小红旗或者申请心愿卡等。

(3) 引领学生进行反思,培养学生反思的习惯。

教师可根据班级实际情况,结合平时的教学和每个学习单元的成长小档案,以数学日记、数学成长档案等形式引领学生对自己的学习进行反思,促进学生的自我评价和自我完善。

二、教学设计或教学片段

课题：整理与复习

——因数与倍数

教学设计：吴兴泉、黄河、汪琼妮。

教学内容：教科书第116页第1题及第118页第1~4题。

教学目的：

1. 理解和掌握因数与倍数的有关概念，明确概念之间的区别与联系。
2. 初步学会分类整理的方法，感受事物是相互联系的，体会从整体上认识数学的思想，掌握一定的学习方法。
3. 培养学生分析、判断、推理、概括的能力，养成合作学习和勇于探索的良好品质。

教学重点：明确概念之间的区别和联系。

教学难点：在整理中构建“因数和倍数”的知识网络。

教学过程：

(一) 提供材料，回忆概念

教师：(板书2、3、5、6、10这几个数)看到这几个数，你能想到这学期学过的哪方面的知识？

学生：因数和倍数。

教师：能举例具体说一说是什么是因数和倍数吗？

学生：2是6的因数，6是2的倍数；5是10的因数，10是5的倍数。

教师(贴出概念卡片：因数、倍数)：在“因数和倍数”这部分知识里，结合这几个数，你还能回忆起哪些重要的概念？

学生：奇数和偶数。

教师：什么是奇数？什么是偶数？请你举例说明。

学生：2、6、10是偶数，3、5是奇数。

教师：还有什么重要的概念？

学生1：质数和合数。2、3、5是质数，6、10是合数。

学生2：2、6、10是2的倍数，3、6是3的倍数，5、10是5的倍数。

学生3：3和6的最大公因数是3，最小公倍数是6。

……

教师随着学生的回答贴出概念卡片：奇数、偶数、质数、合数、2的倍数的特征、3的倍数的特征、5的倍数的特征、公因数、最大公因数、公倍数、最小公倍数。在引出每一个概念

后，都引导学生举例说明。

(设计意图：以一组简单并且特征明确的数为线索，让学生重现已有概念，不仅能抓住要领，而且能提高复习的效率，为接下来建构知识网络作好准备。)

(二) 沟通联系，形成网络

1. 引导整理。

教师：在我们刚才梳理的这些概念中，你认为最基本的概念是什么？

学生：因数和倍数。

教师：请说明理由。

学生：因为其他的概念都是以因数和倍数作为基础的。

教师：你能从“因数和倍数”这一基本概念出发，将“因数与倍数”的相关概念整理成一个图吗？请将图画在课本第 116 页第 1 题的方框中。

学生分小组进行讨论学习，课件呈现活动要求。

(1) 可以用集合图、连线、大括号、树形图、表格等形式整理出来，或者用自己喜欢的其他方式进行整理。

(2) 有条理，能够体现知识间的联系和区别。

(3) 说出这样整理的理由。

学生分组活动时，教师巡视，了解学生整理情况并及时给予指导。

(设计意图：将整理知识的主动权交给学生，让学生在合作中形成知识互补，在沟通知识联系的过程中进一步加深对知识的理解。)

2. 汇报交流。

教师：哪一个小组的同学愿意来介绍整理的情况？

请 2 到 3 个小组的同学上台展示汇报知识整理图，说明这样整理的理由，其他小组的同学进行质疑，提出改进意见。

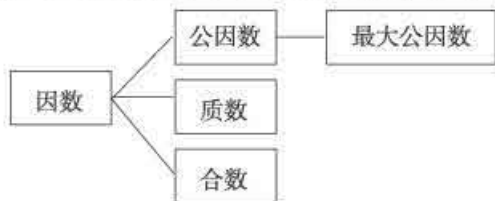
教师：通过刚才的交流，同学们对这幅知识整理图有了进一步的改进和完善。下面请各小组的同学看一看你们小组整理的知识图有没有需要改进的地方。请通过改进，使你们组的知识图也更加完善。

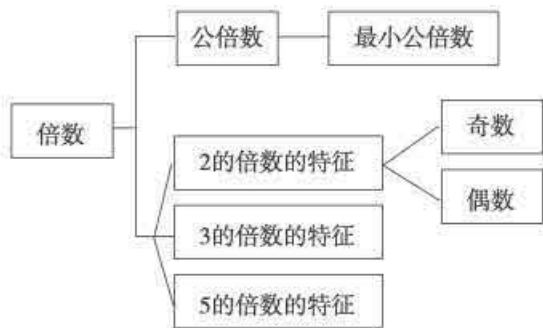
各小组对本组的知识整理图进行反思和修改。

(设计意图：让学生在共同交流的基础上进行改进，能够起到自我反思、自我修正的作用，使学生对知识的理解进一步加深，认识进一步升华。)

教师：现在哪个小组的同学愿意来展示一下经过修改之后的知识整理图？

第二次交流，小组汇报，全班评价，在共同讨论的基础上逐步完善，大致形成下图。





教师：你认为这幅图对你有帮助吗？

学生：有帮助，能一目了然地看出知识间的联系和区别。

教师：对于概念较多、又有密切联系的知识，可以像这样整理出知识的结构图。在以后的学习中，你们也可以运用这种方法来整理学过的知识。

（设计意图：通过不断的动态生成，学生的认识由模糊到清晰，最后的小结使学生体会到学习方法的重要性。）

（三）综合应用，提高能力

1. 及时巩固。

教师：现在请同学们翻开课本第 118 页，独立完成第 1 题、第 2 题。

学生独立做题，教师进行巡视和辅导。全班交流时要求学生说出方法或理由。

2. 游戏拓展。

教师：现在我们来做一个游戏——猜猜我是谁。请每一个同学用自己的学号，根据今天复习的内容编一个猜数谜语，让大家猜。看谁编得好，看谁猜得对。例如，我的学号是 2 的倍数，也是 3 的倍数，而且是一个一位数，猜猜我的学号是几？

教师：明白要求了吗？开始编吧。

学生独立编猜数谜语，全班交流，教师指导，师生共同评价。

（设计意图：游戏的设计具有开放、灵活、有趣的特点，体现了知识应用的综合性。）

（四）课堂小结，回顾反思

教师：回顾本节课，我们复习了哪些知识？

教师：还记得我们是怎样复习的吗？给你印象最深刻的是什么？

（设计意图：既要有知识技能的回顾与整理，也要有过程和方法的反思和梳理，还要有情感、态度和价值观的体验和渗透，促进学生三维目标的达成。）

三、评价建议与评价样例

(一) 评价建议

总复习的内容包括：一是“成长小档案”中的学习内容，包括分数的意义和性质、分数的加法和减法、图形的运动、长方体和正方体、折线统计图、因数与倍数；二是观察物体的内容。本学期的数学广角（找次品）主要是让学生体会数学思想和方法，总复习中没有单独安排相应内容的复习，教师可根据实际情况决定是否对该学习内容进行评价。

在对学生知识技能进行评价的同时，教师也可采用访谈、问卷、自我评价表等形式对学生进行情感态度和学习习惯的评价，以促进学生的全面发展。

(二) 评价样例

以下提供一些笔试评价样例，仅供参考。

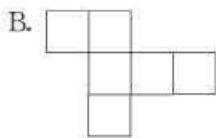
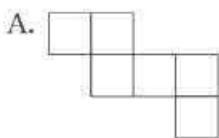
1. 在括号里填上不同的质数： $40 = () + () + () + ()$
2. 长方体中，相交于一个顶点的三条棱的长度分别是3分米、4分米、5分米，要用铁丝围一个这样的长方体框架，需要铁丝（ ）米。
3. 一根20米长的铁丝，平均分成8份，王叔叔用去了其中的第5份，李叔叔用去了其中的3份。王叔叔用去这根铁丝的 $(\frac{\quad}{\quad})$ ，李叔叔用去了（ ）米。
4. 六一儿童节，五（3）班老师给表演节目的同学分糖果，不管是每人分3颗还是每人分5颗，最后都还剩余1颗。糖果总数可能是（ ）颗。

A. 60

B. 61

C. 62

5. 下面的展开图中，不能折成正方体的是（ ）。



6. 计算下列各题，画横线的用简便方法计算。

$$\frac{1}{4} - \frac{9}{14}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$$

$$6 - (\frac{3}{4} - \frac{2}{5})$$

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{9}{7} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{7}$$

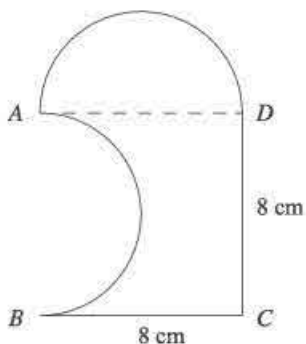
$$7 - \frac{5}{8} - \frac{11}{8}$$

7. 用你喜欢的方法求每组数的最大公因数和最小公倍数。

16 和 48

30 和 45

8. 圆的面积公式我们还没有学习, 你能用我们学过的知识求下面图形的面积吗? 先写出你的想法, 再计算这个图形的面积。

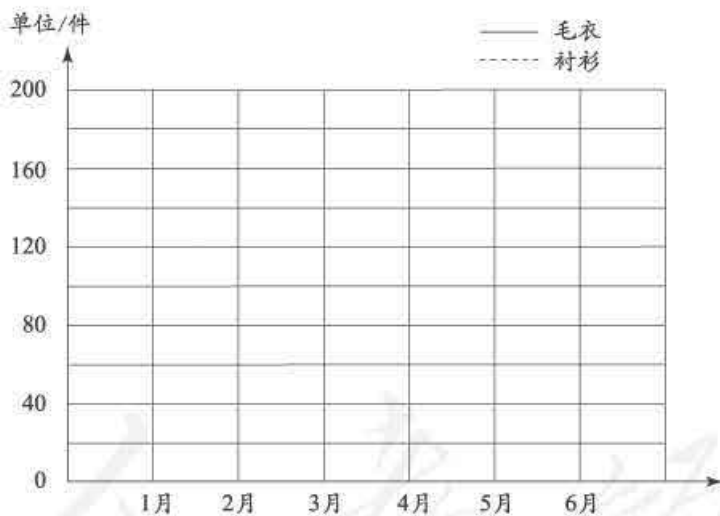


9. 下面是某服装超市 2014 年上半年毛衣和衬衫的销售情况。

月份	1月	2月	3月	4月	5月	6月
毛衣/件	190	170	60	60	40	20
衬衫/件	80	100	140	170	180	200

(1) 根据统计表, 完成下面的折线统计图。

某服装超市 2014 年上半年毛衣和衬衫销售情况统计图



(2) 表示毛衣销售情况的这组数据的平均数是 ()。

(3) 如果你是服装超市经理, 从上面统计图中能得到哪些信息? 它对你有什么帮助?

附录 1

教材教学内容编排结构表

	上册		下册	
	单元	内容	单元	内容
一年级	一	准备课	一	认识图形（平面）
	二	位置	二	20 以内的退位减法
	三	1~5 的认识和加减法	三	分类与整理
	四	认识图形（立体）	四	100 以内数的认识
	五	6~10 的认识和加减法	综合与实践	摆一摆，想一想
	六	11~20 各数的认识	五	认识人民币
	综合与实践	数学乐园	六	100 以内的加法和减法（口算）
	七	认识钟表	七	找规律
	八	20 以内的进位加法		
二年级	一	长度单位	一	数据收集整理
	二	100 以内的加法和减法（笔算）	二	表内除法（一）
	三	角的初步认识	三	图形的运动（一）
	四	表内乘法（一）	四	表内除法（二）
	五	观察物体（一）	五	混合运算
	六	表内乘法（二）	六	有余数的除法
	综合与实践	量一量，比一比	综合与实践	小小设计师
	七	认识时间	七	万以内数的认识
	八	数学广角（排列组合 1）	八	克和千克
		九	数学广角（逻辑推理）	
三年级	一	时、分、秒	一	位置与方向（一）
	二	万以内的加法和减法（一）	二	除数是一位数的除法
	三	测量	三	复式统计表
	四	万以内的加法和减法（二）	四	两位数乘两位数
	五	倍的认识	五	面积
	六	多位数乘一位数	六	年、月、日
	综合与实践	数字编码	综合与实践	制作活动日历
	七	长方形和正方形	七	小数的初步认识
	八	分数的初步认识	八	数学广角（排列组合 2）
九	数学广角（集合）	综合与实践	我们的校园	

(续表)

	上册		下册	
	单元	内容	单元	内容
四年级	一	大数的认识	一	四则运算
	综合与实践	1亿有多大	二	观察物体(二)
	二	公顷和平方千米	三	运算定律
	三	角的度量	四	小数的意义和性质
	四	三位数乘两位数	五	三角形
	五	平行四边形和梯形	六	小数的加法和减法
	六	除数是两位数的除法	七	图形的运动(二)
	七	条形统计图	八	平均数与条形统计图
	八	数学广角(优化)	综合与实践	营养午餐
五年级	一	小数乘法	九	数学广角(鸡兔同笼)
	二	位置	一	观察物体(三)
	三	小数除法	二	因数与倍数
	四	可能性	三	长方体和正方体
	综合与实践	掷一掷	综合与实践	探索图形
	五	简易方程	四	分数的意义和性质
	六	多边形的面积	五	图形的运动(三)
	七	数学广角(植树问题)	六	分数的加法和减法
			综合与实践	打电话
六年级	一	分数乘法	七	折线统计图
	二	位置与方向(二)	八	数学广角(找次品)
	三	分数除法	一	负数
	四	比	二	百分数(二)
	五	圆	综合与实践	生活与百分数
	综合与实践	确定起跑线	三	圆柱与圆锥
	六	百分数(一)	四	比例
	七	扇形统计图	综合与实践	自行车里的数学
	综合与实践	节约用水	五	数学广角(鸽巢问题)
八	数学广角(数与形)	六	整理和复习	

附录 2

人教版义务教育教科书配套教学资源简介

一、《同步解析与测评 数学（一~六年级）》

《同步解析与测评》丛书是人民教育出版社新近开发的、与人教版义务教育教科书相配套的教学辅导读物。这套丛书的编写人员由人教版教材的编写者、经验丰富的教研员和优秀的一线教师组成。特别是教材编写者直接参与了丛书的策划、组稿和编写，使丛书更好地体现了课程改革的理念和教材的编写意图。



1. 主要特点。

(1) 目的明确。体现新课程标准的理念和教材编写意图，突出年段特点，凸显各册训练重点，重视将基础知识转化为数学能力；注重导学、练习和检测，体现对教材的补充、延伸；注重培养学生的数学思想方法及发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力。

(2) 内容实用。重视数学基础知识和基本能力的训练，体现基础性；将解决问题的方法通过案例加以梳理、归纳，体现综合性；贴近学生的学习、生活实际，充分调动学生自主地学，愉快练习，体现趣味性；与教材教学进度相配合，实用、好用，可操作性强。

2. 编写体例。

每册以单元为基本结构，编排“案例解析”“同步练习”“单元测试卷”；每册还安排了“期中测试卷”和“期末测试卷”。

案例解析

对本单元中重要的解题方法进行解析，对重点、难点内容结合案例进行剖析，提供了必需的解题方法和技巧。

同步练习

以教科书的单元或大节为单位，与课堂教学同步训练。习题设置主要有以下几个方面的特点：(1) 体现对单元基础知识的系统训练，覆盖面广；(2) 突出习题的基础性、综合性、提高性，将每课时的练习分为三个层次“基础训练，我都会”“综合提高，我能行”“拓展探索，我真棒”；(3) 重视重点和难点知识、关键知识的训练；(4) 题目的情境尽可能源于学生的生活和现实社会生活；(5) 习题有一定的开放性和探索性。

测试卷

“单元测试卷”考查学生对本单元学习内容的掌握情况；“期中测试卷”和“期末测试卷”则侧重考查学生对学习内容整体的掌握情况，兼顾知识与能力，理解与应用，基础性与创新性。为便于使用，测试卷均印成活页，并提供参考答案。

二、《教学挂图》

这套教学挂图是根据《义务教育教科书 数学》各册教科书内容编制的，共12册。每册一般60页。主要内容包括每单元的主题图，部分例题的情境图，一些需要学生共同观察、讨论和交流的练习题、思考题和数学活动等的插图。教师可根据教学需要进行选用。

三、《新课程小学数学教具、学具》

《新课程小学数学教具、学具》是由人民教育出版社开发研制的，与《义务教育教科书 数学(一~六年级)》配套并且适用于所有地区广大学生的产品。学具有科学、创新、安全、环保等特点，体现了寓教于乐、培养兴趣、发展能力的课程改革精神。教具内容丰富，操作方便，利于教师根据教学内容选择使用，并通过教具直观展示相关的知识内容。与相应的学具配套使用，可以将教与学有机结合起来，激发学生学习的兴趣和积极性，是学生学习和教师教学的有利工具。

数学教具五年级（全学年）

教具（如右图）品种清单：立体图形（1套）、简易天平（1套）、钉子板（1个）、塑料插钉（30个）、彩线（2根）、平面图形面积公式推导材料（1套）、数学转盘（1个）、长方体棱长与表面积（1套）、分数的认识演示器（1套）、多用三角板（1个）。

数学学具五年级（下学期）

(1) 内容物（如下页左图）。





序号	学具名称	配备材料
1	观察物体	正方体 5 个（共用），方格纸 2
2	因数与倍数	百数表 3 张
3	长方体和正方体制作操作材料	长方体展开图 2 张，正方体展开图 1 张
4	厘米立方体	正方体 27 个
5	长方体和正方体棱长操作材料	三相插件 8 个，小棒 24 根
6	图形的运动	活动图片 1 张
7	分数的加法和减法操作材料	活动图片 1 张
8	统计	统计活动纸 3 张

(2) 数学学具五年级（下学期）清单（如上右表）。

四、小学数学教学参考多媒体资源

小学数学教学参考多媒体资源包括 2 张光盘，一张是 DVD，另一张是 CD-ROM。DVD 中提供了与每册教科书配套的 3 节示范课及专家点评，3 节示范课尽可能地选取不同教学领域的内容，体现《标准（2011）》的基本理念和教材的编写意图，供广大教师学习参考。

CD-ROM 光盘包含“数字课堂”和“备课资源”2 个大模块（如图 1）。“数字课堂”以“电子书”的形式呈现，其中链接了教师课堂教学中需要的教学课件、例题动画、交互练习等，提供了供教师课堂使用的小工具，以方便教师的课堂教学。“备课资源”则关注教师备课的需求，为满足教师个性化教学的需求，提供了更多的各类多媒体教学资源。



图 1

(1) 数字课堂（如图 2）：“数字课堂”以“电子书”的形式链接了教师课堂教学中需要的教学课件、例题动画、习题课件、参考答案、补充习题等教学资源。



图 2

教学课件：以新课时为单位，每个新课时配有一个 PPT 课件。

例题动画：以动画形式呈现教材例题内容。

习题课件：提供了教材中部分习题的交互练习和答案提示。

参考答案：提供了教材中星号题、思考题的参考答案和解题思路。

补充习题：提供了适量的补充习题和答案提示。

(2) 备课资源（如图 3）：“备课资源”按教材单元排列顺序把资源分为文本、动画、图片、视频四类。在完整地汇集了“数字课堂”中多媒体资源的基础上，还增加了一些教材外的图片和动画，目的是为教师提供更多的、可选择的补充拓展资源。除此之外，“备课资源”还提供了供教师教学参考的探究性学习案例，其中包括“活动建议方案”、方案中使用的资源以及“活动实践”课例视频，为教师开展“探究性教学”活动提供参考和帮助。

“备课资源”中的所有资源均可保存到本地磁盘，目的是帮助教师组织、设计个性化的教学方案，提高备课效率。

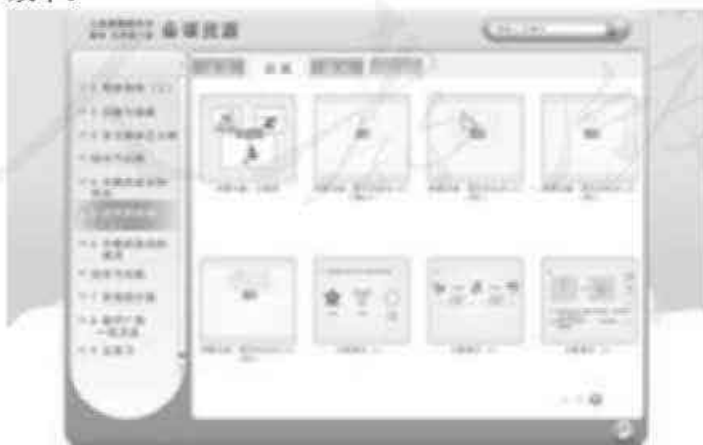


图 3

五、第三代“人教数字教材”（小学数学）

1. 产品定位

(1) 以《标准（2011）》为框架。

(2) 以人教版《义务教育教科书 数学》为蓝本。

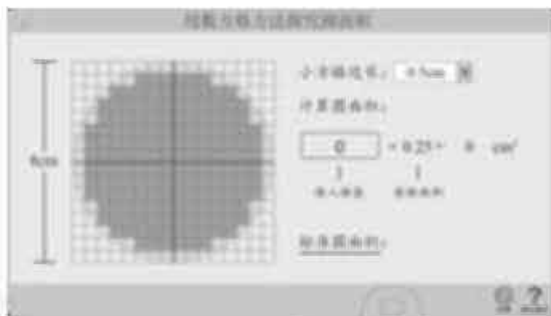
(3) 针对信息化环境中教与学的新需求，以提高教学和学习效果、发展学生核心素养为目标，利用互联网、数字媒体、大数据等技术手段，融教材、数字资源、学科工具、应用数据于一体。

2. 产品特点

(1) 通过提供成体系的、多样性的、生动直观的优质数字资源，丰富纸质教材的内容呈现形式，为教师的备课和授课提供丰富的教学素材，让教学更生动，让学习更有效。



(2) 通过提供优质的模拟动画，创设生动活泼的情境，激发学习兴趣；化抽象为直观、形象，化复杂为简单、易懂，充分体验数学知识的形成过程，有利于开展自主性和探究性学习。



(3) 通过多种不同形式对教材内容进行交互处理，实现作答后即时反馈，为学生提供自我反思与评价的机会，使学生获得良好的数学学习体验，增强学好数学的信心，形成良好的学习习惯。



(4) 为师生开展小学数学的教与学活动提供常用的数字化学科工具，如画图的尺规工具、探究的数字卡片工具、认识时间的钟表工具，以及小棒和计数器等计数工具，便于提升教师课堂教学效果，提高学生自主学习、探究的兴趣。



六、《口算小状元》

《标准(2011)》提出了使学生“获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验”的总目标，数学抽象、逻辑推理、运算能力都是总目标的重要组成部分，口算能力是运算能力的核心和基础。因此，熟练地进行口算是小学生必须掌握的基本技能之一。为了提高口算能力、抽象思维能力、推理能力，适当进行一定量的口算练习是必要的，为此，我们编写了这套《口算小状元》。



这套《口算小状元》具有以下特点。

(1) 紧扣教材，关注能力。与现行人教版小学数学教科书同步，每天一练。在提高口算能力的同时，注重数学抽象思维和推理能力训练。

(2) 内容丰富，形式活泼。设计“口算天天练”和“挑战自我”两大板块，“口算天天练”板块安排口算内容，针对口算方法加以重点练习；“挑战自我”板块紧密配合所学单元内容设计题目，加深对数学概念和思想方法的理解。根据小学生的年龄特点，为避免练习的枯燥，设计了各种活泼的练习形式。

(3) 纸数联动，拓展资源。通过“人教点读”APP（请扫描封底二维码）推送书中“挑战自我”题目答案和讲解微课。此学习应用是专为使用人教版教材的学生开发制作的，除本套书的内容外，还配有更丰富的学习资源，供大家选用。

(4) 编写队伍强大。本套丛书邀请优秀的一线教师和教研员进行编写，教材编写者直接参加了这套丛书的策划、组稿和审稿，使这套丛书更好地体现了课程改革的理念和人教版教材的编写意图。

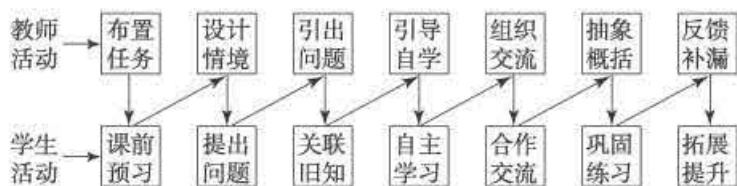
七、《小学数学读本 生本学材》

人民教育出版社小学数学编辑室联合大学教授、各省教研员、优秀教师研发了新时代《小学数学读本 生本学材》（以下简称《生本学材》）。《生本学材》以学生发展为本，重点体现对知识本质的理解、基于学生的认知起点、整体自主建构、重要的数学思想方法，使学生学会学习、学会思考，培养数学核



心素养，形成可持续发展的自学能力。《生本学材》分“学生版”和“教师版”两个版本，“教师版”在“学生版”的基础上，增加了内容丰富的拓展资源，便于教师教学使用。《生本学材》将于2019年秋季出版一年级，2020年将同时出版二、三年级，2021年再同时出版四~六年级。

《生本学材》的编写以新知识观、主体性教育理论、建构主义等学习理论为指导，以学生为主体，以知识为载体，以数学思想方法和核心素养为主线，以学生发展为本。提倡教师发挥主导作用，即教师是学习过程的组织者、引导者、合作者，应促进学生积极主动、生动活泼、可持续地发展，使得学生学会学习、学会思考。体现以培养自学能力为主的教学模式，主张教师与学生享有各自活动的时间和空间，教师的活动归教师，学生的活动归学生，教师既不越位，也不缺位。具体而言可采取以下全部环节或部分环节。



《生本学材》的体例及呈现方式将正确处理教与学的关系，恰当安排好教师和学生各自的活动；体现数学本质的重点目标清晰呈现而不是隐藏在内容中；有利于学生的自主关联与学习；情境的创设联系真生活、加强趣味性；有利于教师轻松教学。

1. 正文

(1) 单元及小节主题图根据需要设置，设计真实而有趣的情境、用生活语言和儿童喜欢的语言描述。

(2) 新课前的复习与关联。

每课时前面的复习与关联和新知识的顺序可灵活处理，可在课始，也可在课中。但是要体现启发性、独立思考性，而不是直接告诉学生。

(3) 每课时内容的小标题，体现学生和教师的活动内容。例如，设置想一想、说一说、理一理、练一练、做一做、试一试等不同层次的活动栏目，提醒教师哪些内容的学习时间和空间应交给学生。

(4) 设计留白板块，体现学生的自主思考和探究，而不是直接呈现解题方法和过程。从低年级到高年级留白越来越多，难点地方可以由机器人启发。

2. 每课时自我评价

设置每课时自我评价板块（每课时练习最后），反思每课时的收获、不足、疑问及想继续深入研究的问题。

3. 单元的复习与关联

(1) 启发学生自己写思维导图，并小组交流。

(2) 鼓励学生写本单元数学日记。

八、《几何画板与小学数学》

几何画板在中学数学教学中有着广泛的应用，它是以点、线、圆为基本元素，通过对这些

基本元素的变换、构造、测算、计算、动画、跟踪轨迹等，构造出其他较为复杂的图形，把较为抽象的代数关系和几何图形形象化，是数学教学中强有力的工具。但它在小学中还不够普及，大多数小学数学教师也都没有接触过几何画板，为了帮助大家了解几何画板的优势，提高编辑几何画板课件的能力，我们出版了这本《几何画板与小学数学》。

本书由原北京市丰台区教研员、特级教师朱滇生编著完成，以纸质图书加光盘的形式出版。朱老师结合实例具体讲解了几何画板的课件制作方法，所选的课件注意突出几何画板的优势：（1）通过动态演示使抽象的知识变得直观形象，加深对数学知识的理解；（2）呈现知识的发生发展过程，探索数学的规律，揭示知识之间的联系；（3）注重体现数形结合、变与不变、化归转化的数学思想。配套光盘配备了小学数学中可使用的近 300 个课件，以及 50 个课件制作讲解的微课，同时还录制了运用几何画板课件进行课堂教学的示范课。一方面帮助小学数学教师提高课件制作水平，掌握几何画板的使用；另一方面也可以直接利用配盘中提供的课件进行课堂教学，从而提升课堂教学质量。

我们希望借助几何画板课件，可以使枯燥乏味的数学变得生动、活泼，能激发学生学习的兴趣，还可以让学生经历操作、观察、分析、抽象、推理、建模等活动和思维过程，深刻理解并掌握数学知识、思想方法，使数学核心素养的培养落到实处。

九、《基础数学》

本书是小学教师之友系列丛书的第一辑，由我室组织编写，可供广大小学数学教师及师范院校的初等教育学院小学教育专业的学生参考使用。本书是以《标准（2011）》为依据，在原中师教材《小学数学教材教法》第一册的基础上修订而成。符合数学课程改革的基本理念，为教师打下数学课程标准规定内容的数学背景理论知识的专业基础。能够开阔教师视野，全面提高教师的数学素养。本书具有以下特点。

1. 基础性。

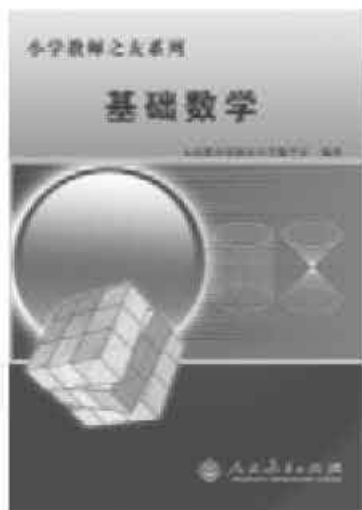
《标准（2011）》规定的内容及其背景理论知识是教师最基础的专业知识和数学素养，教师只有掌握了扎实的数学基础知识，才能在教学中更好地贯彻课程改革的新理念。

2. 时代性。

此次课程改革，小学数学的主体知识没有大的变化，但是也增加了一些知识，如图形变换、统计与概率等内容。另外，有些知识的传统说法需要改变。

3. 丰富性。

除了基础内容外，还适当地编写一些拓展的知识和资料，丰富教师的知识面。



十、《小学数学学业评价标准（实验稿）》

《小学数学学业评价标准（实验稿）》是“中小学生学习科学业评价标准的研究与开发：小学数学”课题的研究成果。书中呈现了该课题组研发的小学生数学学业评价标准、评价方法和样例。学业评价标准是对学生不同学段所应达到的学业成就（学习结果）的描述，阐明学生在经过一定时间的学习后应该知道什么、能够做什么（表现标准），以及通过什么方法（评价方法建议），获得哪些证据（学生活动或作业），来判断学生是否达到了课程标准的要求。学业评价标准是针对所有学生提出的合格标准，是学生经过努力可以达到的标准。“小学生数学学业评价标准”依据《标准（2011）》中的课程目标，详细描述了小学生不同学段的学习结果，提供了实施评价的方法建议和评价样例，以帮助教师采用合适的方法评价小学生是否达到了课程标准的要求。教师通过对本书内容的学习与实践，可用小学数学学业评价标准与义务教育数学课程标准共同指导教学与评价，以期提高日常对学生学业成绩评价的效度和信度，从而为教师和学生提供更为有效的反馈信息。



十一、《小学数学学习论》

《小学数学学习论》是一部系统阐述小学数学学习过程及其规律的学术著作，由重庆市教科院研究员、特级教师李光树主编。

全书共16章，其内容包括小学数学学习的涵义及其类型、特点及育人功能，小学数学学习的理论基础，小学生的数学认知方式和认知过程，小学数学学习的迁移，小学数学学习的障碍，小学数学学习的原则、策略及方式，数学知识、数学技能、数学思想、数学活动经验、数学问题解决、情感态度学习的心理过程及其规律，数学思维和数学能力发展，中小学数学学习衔接及小学数学学习评价研究。本书具有以下一些比较明显的特点。



一是理论的系统性。本书全面而系统地阐述了小学数学学习的原理，对小学数学学习研究和教学具有广泛的指导意义。

二是论述的深刻性。本书对小学生学习数学的心理过程及其规律进行了比较深刻的论述，对小学生的数学认知方式和认知过程，以及小学生学习数学知识、数学技能、数学思想、数学活动经验的心理过程均作了较为深刻的分析。

三是内容的新颖性。本书不仅关注了大家共同关心的小学数学学习理论的热点问题，而且还讨论了过去人们少有触及的一些新问题，如小学数学学习的育人功能、小学数学学习的主要障碍、数学活动经验和情感态度学习的心理过程、中小学数学学习衔接等问题。

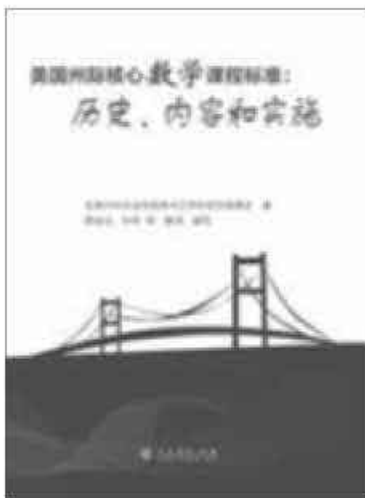
四是教学指导的可操作性。本书不仅深刻阐述了小学数学学习理论问题，更重要的是提出了如何将这些理论运用于小学数学学习指导，促进学生更加富有成效地学习，对老师的教学指导具有较强的针对性和操作性。

五是读者的广泛性。本书不仅适合小学数学学科教学研究人员和广大一线小学数学教师阅读，还可以作为高校数学教育方向的研究生和本科生的学习参考书，尤其适合小学数学骨干教师、教学名师等高端教师的培训。

十二、《美国州际核心数学课程标准：历史、内容和实施》

当前，美国数学教育正在进行新一轮的改革，全美40多个州正在采用最新的州际核心课程标准。人民教育出版社特别邀请蔡金法、孙伟等华裔学者将该标准翻译成中文，并介绍相关的背景和实施情况，形成了这本《美国州际核心数学课程标准：历史、内容和实施》。

本书分三部分。第一部分，介绍了州际核心标准的起源，以帮助读者在历史的背景中更好地解读标准。第二部分，翻译了美国州际核心数学课程标准（K—12 年级），包括基于标准设计的高中数学课程，以使读者对标准有更全面的了解。第三部分，重点介绍了该标准目前在美国的实施状况，包括课程、评估、教学和教师培训等方面的实施，以及对实施的研究。



这是一本极具经验价值和借鉴意义的图书，它可以帮助读者更好地了解美国目前的数学教育体系。比如，州际核心课程标准从幼儿园一直到高中，体现了标准的连续性和一致性，对于中小学衔接以及初高中衔接具有一定的指导作用。近几十年来，美国的数学教育始终重视问题解决，在标准中体现为八个实践标准贯穿始终。在经历了数次变革之后，美国数学教育对数学基础知识和基本概念也逐步重视起来，标准中体现在低年级更加强调数的意义和运算熟练。

相信这本书对了解美国数学教育现状，特别是课程改革方面的情况是大有裨益的，能为我国数学教育、课程改革和教学改革提供有益的参考。

购买上述配套教学资源，请与当地新华书店联系。也可与人教书苑联系，具体联系方式在人教网首页。

十三、“人教微研” APP

“人教微研”APP 是人民教育出版社为中小学教师和教研员着力打造的专业教学研修平台级应用。本应用集在线培训、精选课程、专业知识阅读、教学研修垂直社区为一体，围绕基础教育阶段国家统编教材、人教版新课标教材，提供精品课程内容，剖析新版教材，示范教学案例，指导教学盲点，组织教研活动，助力教师专业成长。为全国中小学教师和教研员创设以教材为核心的教研交流园地。

1. 聚焦知识点和教学重难点，配套精品微课资源。

围绕人教版小学数学（1~6 年级）新教材，为知识点和教学重难点提供配套精品微课资源。更有名家讲座、精品课例等诸多精彩内容，为您示范教学案例，指导教学盲点。

2. 专家名师引领，促进专业成长。

邀请全国名家名师，带领中小学教师和教研员开展网络教研活动，通过专家引领和名师工作坊的模式，促进教师的教学水平提升和专业成长。

3. 专属中小学生的学习交流社区。

会聚全国中小学教师和教研员，聚焦专业研讨与学习交流，打造全国最大的中小学教师和教研员网络交流园地。

4. 随时随地移动浏览，方便易用。

您只需用手机等移动设备（iOS 或 Android 系统）在应用市场搜索“人教微研”，即可下载安装“人教微研”APP，随时随地浏览使用。

人教微研®