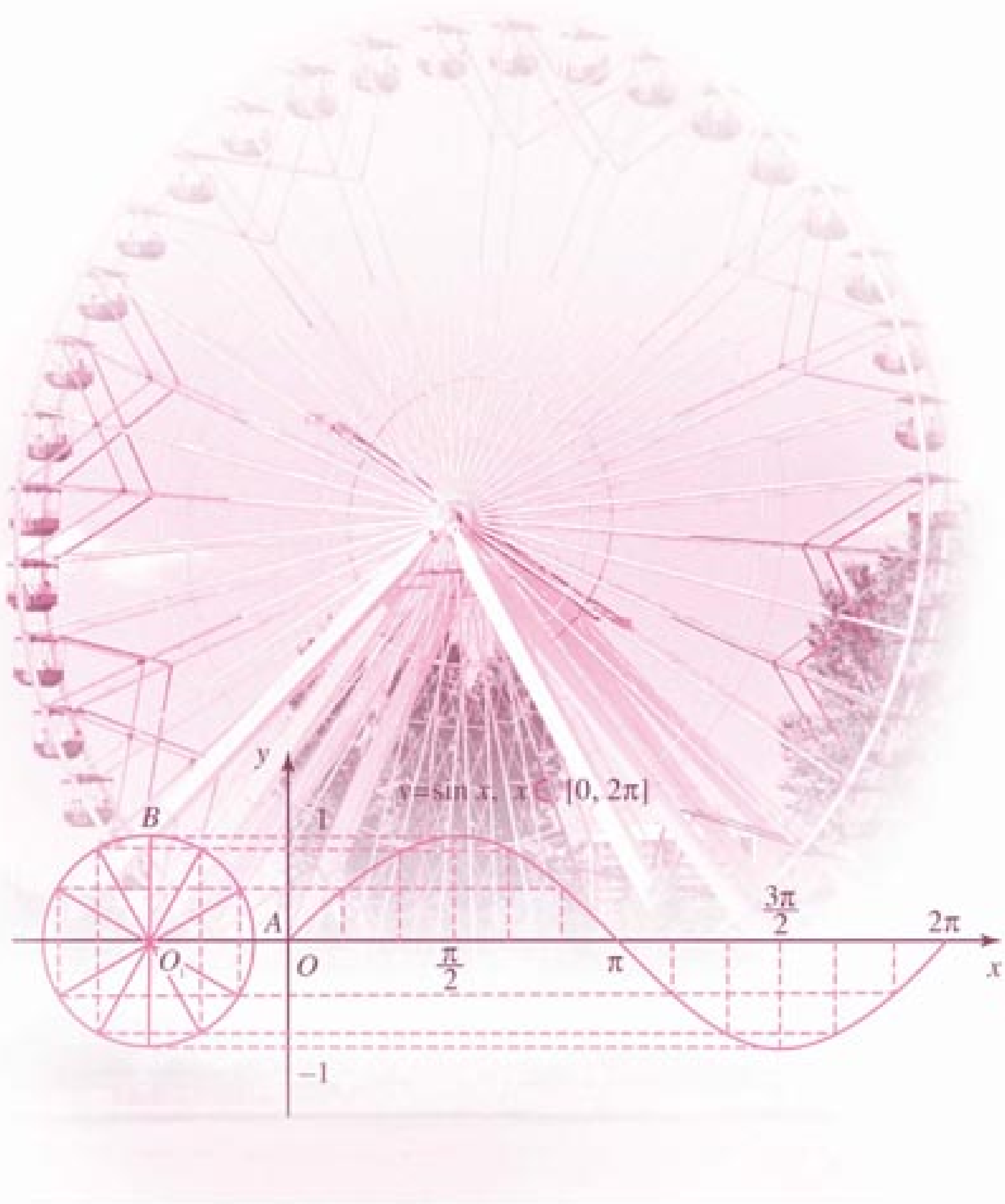
普通高中课程标准实验教科书

数学 4

必修

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

本册主编　　丁尔陞

编　　者　　段发善　丁尔陞　高存明　龙正武　郭　鸿

责任编辑　　龙正武

美术编辑　　张　蓓　王　喆

绘　　图　　王　鑫

封面设计　　林荣桓

普通高中课程标准实验教科书

数学　4

必修

B版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

出版

（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

网址：http://www.pep.com.cn

××××印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890毫米×1 240毫米　1/16　印张：10.5　字数：234 000

2007年4月第2版　　年　月第　次印刷

印数：00 001～000 000册

ISBN 978-7-107-17713-2 / G・10802(课)　定价：　元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

本册导引

同学们，欢迎你们进入本模块的学习！

同学们也许注意到，大到日月运行、四季更替，小至钟摆摆动、琴弦颤动，周而复始，都呈现一定的周期性．三角函数是描述周期现象的重要数学工具．三角函数具有优良性质，是基本的初等函数．在数学和其他领域中具有广泛的应用．在本模块中，我们将学习任意角的三角函数及其基本性质和应用，体会三角函数在解决具有周期变化规律问题中的作用．

同学们，你们知道向量吗？事实上，同学们在生活和学习中早已接触到向量．当你在操场上从甲地笔直跑到乙地，你的位置变化就是一个向量；当一架飞机从北京直飞上海，它的位移也是一个向量．同学们所熟悉的有向线段，图形的平移等等都是向量．可见向量处处存在，它们不仅有大小之分，也有方向之别．向量是近代数学中重要和基本的数学概念之一．向量最突出的特色是对它可以实施运算．它是沟通代数、几何和三角的一种有力工具，有着极其丰富的实际背景．我们将通过实例引入向量概念，理解平面向量及其运算的意义，学会用向量语言与方法表述和解决数学以及物理等学科中的一些问题，发展运算能力和解决问题的能力．

三角恒等变换在数学中有一定的作用，我们将用向量方法导出三角恒等变换的基本公式，由此出发进行简单的恒等变换导出其他公式．在这一部分，同学们将体会到向量与三角函数的紧密联系．

在本模块的学习中，应注意联系实际，注意知识的实际背景以及知识在实际中的应用．向量的概念是以力、速度和几何为背景引入的．反过来，向量又应用到物理和数学中去．物理中的单摆运动、波的传播、交流电等相关内容都要用三角函数来刻画它们的变化规律．

在三角函数的学习中，应注意单位圆的作用，它可以帮助我们直观地认识三角函数及其性质．三角函数的图象在物理以及解决实际问题中有着广泛的应用，在学习中应予重视．

在本模块中，还插入了一些数学探究和数学建模活动，鼓励同学们使用计算器和计算机，这些都有利于同学们提高应用数学知识和工具分析问题、解决问题的能力．

目　录

第一章 基本初等函数（II）

1.1 任意角的概念与弧度制

1.2 任意角的三角函数

1.3 三角函数的图象与性质

在日常生活中，只要我们用心去观察，又勤于思考，就会发现许多与数学有关的事情. 游乐园是人们爱去的地方，各种神奇的游戏器械吸引着人们去玩耍，那高大的观览车绕轴转动着，边缘上悬挂的座椅，带着游人在空中旋转，给游人带来乐趣！你想过吗？观览车在周而复始的转动中，就包含着许多数学问题. 用你学过的数学知识能回答下列问题吗？

1. 从你的座位开始转动的时刻到某个时刻，你的座位转了多少角度？这时你的座位离地面的高度是多少？

2. 你能用学过的数学知识描述观览车周而复始的运动吗？

为了回答这两个问题，你可能会想到用我们学过的锐角三角函数知识，可是你会发现只用锐角三角函数的知识是不够的. 要回答“座位”转过了多少角度，必须把角的概念加以推广. 为了研究观览车的转动，必须研究任意角的三角函数. 学完这一章你就能完整地回答这两个问题了.

这一章，我们要学习任意角的三角函数，把你带入三角函数的全新领域，那里有许多问题等待着你去探索、领悟、认知.

三角函数来源于测量，在现代科学中，三角函数已经成为研究自然界中周期变化现象的重要数学工具，它在力学、工程学以及无线电学中有着广泛的应用.

1.1 任意角的概念与弧度制

1.1.1 角的概念的推广

在小学和初中，我们把有公共端点的两条射线组成的图形叫做角，这个公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边. 同时我们还知道，角可以看成是一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形(图 1-1)，射线旋转时经过的平面部分为角的内部. 当时，不考虑旋转方向，不论从 OA 旋转到 OB 还是从 OB 旋转到 OA，它们旋转的绝对量都是一样的，而且旋转的绝对量不超过一个周角.

在实际生活中还会遇到角的旋转量超过一个周角的情况. 例如，父母让孩子独自乘坐观览车，而父母分别站在观览车的两侧，当观览车转动起来后，父亲看到的转动方向与母亲看到的转动方向是相反的，如果父亲看到的是顺时针转动，则母亲看到的就是逆时针转动，一圈又一圈地转动着. 这就是说，角度可以不限于 $0°$～$360°$的范围[1]，而且角度还应该考虑到方向. 为了描述这种现实状况，我们把角的概念加以推广.

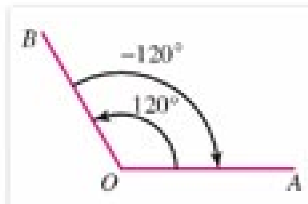
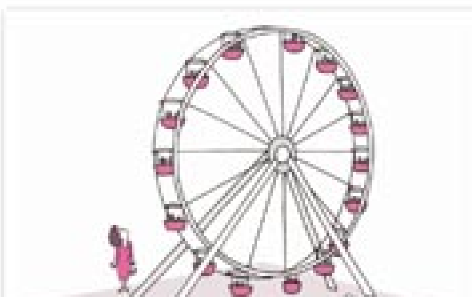


图 1-1

在平面内，一条射线绕它的端点旋转有两个相反的方向：顺时针方向和逆时针方向. 习惯上规定，按照逆时针方向旋转而成的角叫做**正角**；按照顺时针方向旋转而成的角叫做**负角**；当射线没有旋转时，我们也把它看成一个角，叫做**零角**. 当射线绕其端点按照逆时针方向或按照顺时针方向旋转时，旋转的绝对量可以是任意的. 在画图时，常用带箭头的弧来表示旋转的方向和旋转的绝对量. 旋转生成的角，又常叫做**转角**.



角的概念经过以上的推广以后，就应该包括正角、负角、零角，也就是可以形成任意大小的角.

[1] 本书中，角 α 在 $0°$～$360°$范围内是指 $0° \leqslant \alpha < 360°$.

在图 1-1 中，射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB 位置所成的角，记作$\angle AOB$，其中 OA 叫做$\angle AOB$ 的**始边**，OB 叫做$\angle AOB$ 的**终边**．以 OB 为始边，OA 为终边的角记作$\angle BOA$．由图 1-1 中带箭头的弧和所标数值知

$$\angle AOB=120°，\angle BOA=-120°.$$

在图 1-2 中，射线 OA 绕端点 O 旋转时，旋转的绝对量超过了周角，按照图中箭头所指的旋转方向和弧线所表示的周数，可知

$$\alpha=450°，\beta=-630°.$$

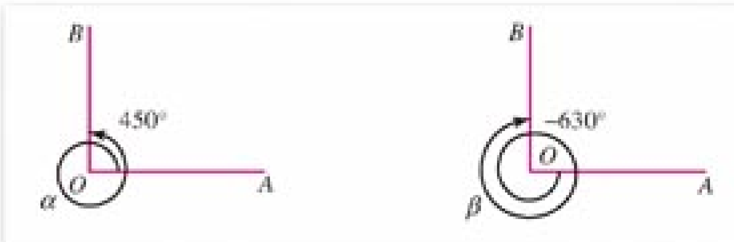


图 1-2

在图 1-3 中，射线 OA 绕端点 O 旋转 $90°$到射线 OB 位置，接着再旋转 $-30°$到 OC 位置，则

$$\begin{aligned}\angle AOC&=\angle AOB+\angle BOC\\&=90°+(-30°)=90°-30°=60°.\end{aligned}$$

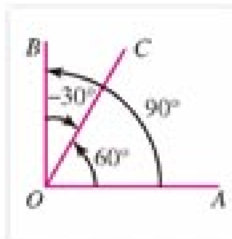


图 1-3

引入正角、负角的概念以后，角的减法运算可以转化为角的加法运算，即 $\alpha-\beta$ 可以化为

$$\alpha+(-\beta).$$

这就是说，**各角和的旋转量等于各角旋转量的和**．

例 1 射线 OA 绕端点 O 顺时针旋转 $80°$到 OB 位置，接着逆时针旋转 $250°$到OC位置，然后再顺时针旋转 $270°$到 OD 位置，求$\angle AOD$ 的大小．

解：由题意知

$$\angle AOB=-80°，\angle BOC=250°，\angle COD=-270°，$$

因此

$$\begin{aligned}\angle AOD&=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD\\&=-80°+250°-270°=-100°.\end{aligned}$$

请同学通过作图验证运算结果．

从图 1-4 可以看出，以 Ox 为始边旋转 $30°$，接着再旋转 $360°$，则得到 $390°$的转角与 $30°$转角的终边相同；如果以 Ox 为始边旋转 $30°$，接着旋转 $-360°$，则得到 $-330°$的转角也与 $30°$角的终边相同，即

$$390°=30°+360°,$$
$$-330°=30°+(-360°).$$

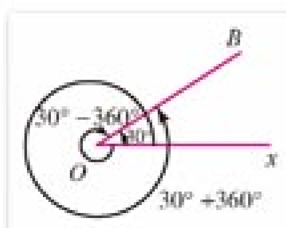


图 1-4

一般地，记

$$\beta=30°+k\cdot 360°，k\in \mathbf{Z}，$$

则无论其中的 k 取何整数，角 β 都与 $30°$ 角的终边相同，当 $k=0$ 时，β 角就是 $30°$ 角本身.

设 α 表示任意角，所有与 α 终边相同的角，包括 α 本身构成一个集合，这个集合可记为

$$S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

集合 S 的每一个元素都与 α 的终边相同，当 $k=0$ 时，对应元素为 α.

今后我们通常在平面直角坐标系中讨论角. 平面内任意一个角都可以通过移动，使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴正半轴重合. 这时，角的终边在第几象限，就把这个角叫做**第几象限的角**，如果终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限. 图 1-5(1)中的 $45°$，$-315°$，$405°$ 角都是第一象限的角. 图 1-5(2) 中的 $124°$ 角是第二象限的角，$210°$ 角是第三象限的角，$-45°$ 角是第四象限的角.

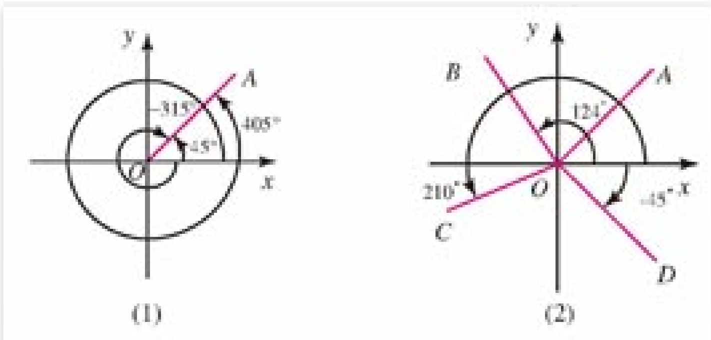


图 1-5

例 2 在 $0°\sim 360°$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判定它们是第几象限的角：

(1) $-150°$； (2) $650°$； (3) $-950°15'$.

解：(1) 因为 $-150°=-360°+210°$，所以在 $0°\sim 360°$ 范围内，与 $-150°$ 终边相同的角是 $210°$ 角，它是第三象限的角；

(2) 因为 $650°=360°+290°$，所以在 $0°\sim 360°$ 范围内，与 $650°$ 终边相同的角是 $290°$ 角，它是第四象限的角；

(3) 因为 $-950°15'=-3\times 360°+129°45'$，所以在 $0°\sim 360°$ 范围内，与 $-950°15'$ 终边相同的角是 $129°45'$，它是第二象限的角.

例 3 写出终边在 x 轴上的角的集合.

解：在 $0°\sim 360°$ 范围内，终边在 x 轴上的角有两个，即 $0°$ 和 $180°$，与这两个角终边相同的角组成的集合依次为

$$S_1=\{\beta \mid \beta=k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\},\ S_2=\{\beta \mid \beta=180°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

为简便起见，我们把集合 S_1 和 S_2 的表示方法作如下变化

$$S_1=\{\beta \mid \beta=2k\cdot 180°,\ k\in\mathbf{Z}\},$$
$$S_2=\{\beta \mid \beta=(2k+1)180°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

因为 $\{m \mid m=2k,\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{m \mid m=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}=\mathbf{Z}$，所以

$$S=S_1\cup S_2=\{\beta \mid \beta=m\cdot 180°,\ m\in\mathbf{Z}\},$$

即集合 S 是终边在 x 轴上的角的集合.

例 4 分别写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并把 S 中满足不等式 $-360°\leqslant\beta<720°$ 的元素 β 写出来：

(1) $60°$； (2) $-21°$； (3) $363°14'$.

解：(1) $S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360°+60°,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中满足 $-360°\leqslant\beta<720°$ 的元素是

$$(-1)\times360°+60°=-300°,$$
$$0\times360°+60°=60°,$$
$$1\times360°+60°=420°.$$

(2) $S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360°-21°,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中满足 $-360°\leqslant\beta<720°$ 的元素是

$$0\times360°-21°=-21°,$$
$$1\times360°-21°=339°,$$
$$2\times360°-21°=699°.$$

(3) $S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360°+363°14',\ k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中满足 $-360°\leqslant\beta<720°$ 的元素是

$$(-2)\times360°+363°14'=-356°46',$$
$$(-1)\times360°+363°14'=3°14',$$
$$0\times360°+363°14'=363°14'.$$

思考与讨论

1. 如果 α 是第一象限的角，那么 α 的取值范围可以表示为怎样的不等式？

2. 如果 α 分别是第一、第二、第三和第四象限的角，那么 $\frac{\alpha}{2}$ 分别是第几象限的角？

练习A

1. 在直角坐标系中，判断下列各语句的真、假：

(1) 第一象限的角一定是锐角； (2) 终边相同的角一定相等；

(3) 相等的角，终边一定相同； (4) 小于 $90°$ 的角一定是锐角；

(5) 象限角为钝角的终边在第二象限；

(6) 终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的象限角表示为 $k\cdot360°+60°$，$k\in\mathbf{Z}$.

2. 求和并作图表示：

(1) $30°+90°$； (2) $90°+(-60°)$；

(3) $60°-180°$； (4) $-60°+270°$.

3. 在直角坐标系中作下列各角：

(1) 855°；　　(2) -750°.

4. 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并说明它们是哪个象限的角：

(1) -45°；　　(2) 760°；　　(3) -480°.

5. 射线 OA 绕端点 O 逆时针旋转 270° 到达 OB 位置，由 OB 位置顺时针旋转一周到达 OC 位置，求 $\angle AOC$ 的大小.

6. 分别写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并把 S 中满足不等式 $-360^\circ \leqslant \alpha < 720^\circ$ 的元素 α 写出来：

(1) 100°；　　(2) -120°；　　(3) $-380^\circ 20'$.

练习B

1. 分别写出终边在 y 轴正半轴、y 轴负半轴和 y 轴上的角的集合.
2. 分别写出终边在直线 $y=x$ 上和终边在直线 $y=-x$ 上的角的集合.
3. 在直角坐标系中，集合 $S=\{\beta \mid \beta=k\cdot 90^\circ,\ k\in \mathbf{Z}\}$ 的元素所表示的角的终边在什么位置？
4. 写出终边在第二、第三、第四象限的角的集合.
5. 今天是星期一，那么从明天算起，第 $7k(k\in \mathbf{N}_+)$ 天是星期几？第 100 天是星期几？

1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算

以前我们是使用角度制来度量角的. 把圆周 360 等分，则其中 1 份所对的圆心角是 1 度，这种用度作单位来度量角的制度叫做**角度制**. 角度制规定 60 分等于 1 度，60 秒等于 1 分.

下面我们来介绍在数学和其他科学研究中另一种常用的度量角的制度——弧度制.

弧度制是根据圆心角、弧长和半径之间的某种关系而引入的.

角是由射线绕它的端点旋转而形成的，在旋转的过程中，射线上的任意一点（端点除外）必然形成一条圆弧，不同的点所形成的圆弧的长度是不同的，如 $\overset{\frown}{AB}$ 弧、$\overset{\frown}{A'B'}$ 弧……但都对应同一个圆心角 α，如图 1-6.

容易发现，在这些同心圆中，同一圆心角 α 所对的弧与它所在圆的半径的比值是一个

常数，即

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{r}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{r'}=\cdots=\text{定值}.$$

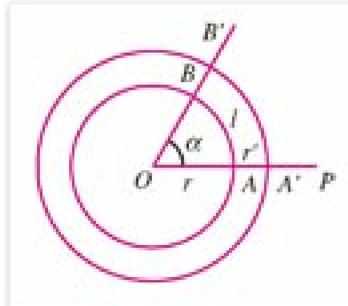


图 1-6

事实上，设 $\alpha=n^\circ$，$\overset{\frown}{AB}$弧长为 l，半径 $OA=r$，则

$$l=n\cdot\frac{2\pi r}{360},$$

$$\frac{l}{r}=n\cdot\frac{2\pi}{360}.$$

这个等式右端不包含半径，这表示弧长与半径的比值与半径无关，而只与 α 的大小有关．当 α 为定值时，这个比值也是定值．

这就启示我们，可以用圆的半径作单位去度量弧．

我们规定：长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做**1 弧度**的角．如图 1-7，$\overset{\frown}{AB}$的长等于半径 r，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角．弧度记作 rad．

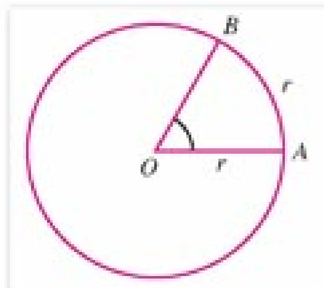


图 1-7

如前所述，这样规定出来的 1 弧度角的大小是完全确定的，与所用圆的大小无关．这种以弧度为单位来度量角的制度叫做**弧度制**．

在半径为 r 的圆中，弧长为 l 的弧所对圆心角为 α rad，则

$$\alpha=\frac{l}{r}.$$

这个公式有广泛的应用．

今后我们在用弧度制表示角的时候，弧度二字或 rad 可以略去不写，而只写这个角对应的弧度数．例如，$\angle\alpha=2$ 表示 α 是 2 rad 的角；$\sin\frac{\pi}{3}$表示$\frac{\pi}{3}$ rad 的角的正弦．

用角度制和弧度制度量角，零角既是 0°角，又是 0 rad 角，除此以外，同一个非零角的度数和弧度数是不同的．下面讨论角度与弧度的换算．

度量角为什么要引入弧度制?

因为半径为 r 的圆周长为 $2\pi r$，所以周角的弧度数是

$$\frac{2\pi r}{r}=2\pi,$$

于是

$$360^\circ=2\pi\ \text{rad},$$

因此

$$\boxed{180^\circ=\pi\ \text{rad}.}$$

从这个关系式出发，可以得到

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx0.017\ 45\ \text{rad},$$

$$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.30^{\circ}=57^{\circ}18'.$$

使用以上关系式就可以进行角度与弧度的换算.

由此容易得到，弧度制与角度制的换算公式.

设一个角的弧度数为 α，角度数为 n，则

$$\alpha\ \text{rad}=\left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^{\circ},$$

$$n^{\circ}=n\cdot\frac{\pi}{180}\ \text{rad}.$$

下面是一些特殊角的角度数与弧度数的对应表：

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	225°	270°	315°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π

角的概念推广以后，无论用角度制还是用弧度制，都能在角的集合与实数集 **R** 之间建立一种一一对应的关系：每一个角都有唯一的一个实数(角度数或弧度数)与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角和它对应. 在理解以上的对应关系时，应该注意角度制是 60 进位制，遇到 $35^{\circ}6'$这样的角，应该把它化为 10 进制的数值 35.1°. 但是弧度数不存在这个问题，因为弧度数是十进制的实数. 这是角度制与弧度制的一个重要区别.

弧度制和角度制的主要区别是什么？

这里，我们写出把角度值 n 换算为弧度值的一个“算法”：

(1) 给变量 n 和圆周率 π 的近似值赋值；

(2) 如果角度值 n 是以“度、分、秒”形式给出，先把 n 化为以“度”为单位的 10 进制表示；

(3) 计算$\frac{\pi}{180}$ (把 1°换算为弧度值)，得出的结果赋给变量 a；

(4) 计算 na，赋值给变量 α.

α 就是这个角的弧度值.

利用上面的步骤，我们可以把任意角的角度值换算为它的弧度值. 只要每步计算出准确值(按照要求的精确度)，最后总能算出结果. 这种算法虽然机械，但计算步骤清楚，便于检查. 更重要的是，它有利于我们编写程序，以便使用计算器或计算机进行计算. 同学们不妨用电子工作表中的公式功能，设计一个换算区域，你只要输入角度值，其他的步骤就可以让计算机替你代劳了.

例 1 (1) 把 $112^{\circ}30'$化成弧度(精确到 0.001)；

(2) 把 $112^{\circ}30'$化成弧度(用 π 表示).

解：(1) 按照上面写出的算法步骤，依次计算：

(Ⅰ) $n=112°30'$，$\pi=3.1416$；

(Ⅱ) $n=112\frac{30}{60}=112.5$；

(Ⅲ) $a=\frac{\pi}{180}\approx0.0175$；

(Ⅳ) $\alpha=na=1.96875$.

因此

$$\alpha\approx1.969 \text{ rad}.$$

(2) $112°30'=\left(\frac{225}{2}\right)^{\circ}=\frac{225}{2}\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{8}$.

例 2 把$\frac{8\pi}{5}$化成度.

解：$\frac{8\pi}{5}=\frac{8\pi}{5}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

$=\left(\frac{8\pi}{5}\times\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=288°$.

例 3 使用科学型计算器，把下列度数化为弧度数或把弧度数化为度数(精确到 0.000 1)：

(1) 67°，　168°，　−86°；

(2) 1.2，　5.2.

解：(1) $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ 2.

67 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{DRG}}$ 1 $\boxed{=}$ 1.1693370599 ≈1.169 3；

168 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{DRG}}$ 1 $\boxed{=}$ 2.932153143 ≈2.932 2；

−86 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{DRG}}$ 1 $\boxed{=}$−1.500983157≈−1.501 0.

(2) $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ 1.

1.2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{DRG}}$ 2=68.75493542°≈68.754 9°；

5.2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{DRG}}$ 2=297.9380535°≈297.938 1°.

例 4 如图 1-8，扇形 AOB 中，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角是 60°，半径为 50 米，求$\overset{\frown}{AB}$的长 l (精确到 0.1 米).

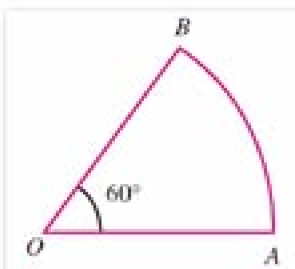


图 1-8

解：因为 $60°=\frac{\pi}{3}$，所以

$$l=\alpha\cdot r=\frac{\pi}{3}\times50\approx1.05\times50=52.5.$$

答：$\overset{\frown}{AB}$的长约为 52.5 米.

例 5 利用弧度制推导扇形面积公式

$$\boxed{S=\frac{1}{2}lr,}$$

其中 l 是扇形的弧长，r 是扇形的半径.

解：如图 1-9，因为圆心角为 1 rad 的扇形的面积为 $\frac{\pi r^2}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2$，而弧长为 l 的扇形的圆心角的大小为$\frac{l}{r}$ rad，所以它的面积

$$S=\frac{l}{r}\cdot\frac{r^2}{2}=\frac{1}{2}lr,$$

即 $S=\frac{1}{2}lr$.

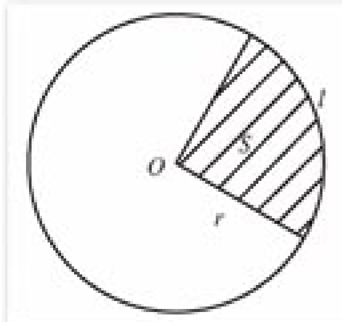


图 1-9

思考与讨论

请你把扇形面积公式与三角形面积公式进行类比，你会产生什么联想？

练习A

1. 在半径不同的同心圆中，同一个圆心角所对的圆弧长与相对应的半径的比值是否相等？为什么？
2. 使用换算公式，把下列各角的度数化为弧度数：

   (1) $-240°$；　(2) $-225°$；　(3) $12°$；

   (4) $1\,080°$；　(5) $22°30'$；　(6) $157.5°$.
3. 把下列各角的弧度数化为度数：

   (1) $\frac{\pi}{12}$；　(2) $\frac{5\pi}{3}$；　(3) $\frac{3\pi}{10}$；

   (4) $\frac{\pi}{8}$；　(5) $-\frac{3\pi}{2}$；　(6) $-\frac{5\pi}{6}$.
4. 使用计算器把下列各角度化为弧度，把弧度化为角度(精确到 0.000 1)：

   (1) 83°，138°，278°；　(2) 1.2，3.6，5.
5. 已知圆的半径为 0.5 m，分别求 2 rad，3 rad 圆心角所对的弧长.

练习B

1. 一条弦的长度等于半径，这条弦所对的圆心角是多少弧度?
2. 时间经过4 h，时针、分针各转了多少度? 各等于多少弧度?
3. 已知半径为120 mm的圆上，有一条弧长为144 mm，求此弧所对圆心角的弧度数与角度数.
4. (1) 已知扇形半径为R，圆心角为α rad，求证这个扇形的面积$S=\frac{1}{2}R^2\alpha$;

   (2) 在半径为5 cm的扇形中，圆心角为2 rad，求扇形的面积.
5. 把下列各角化为0到2π的角加上$2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式，并指出它们是哪个象限的角：

   (1) $\frac{23\pi}{6}$;　　(2) $-1\ 500°$;　　(3) $-\frac{18\pi}{7}$;　　(4) $672°3'$.
6. 写出由一个角的弧度数，计算这个角的度数的算法.

计算机上的练习

1. 用Scilab语言，按照本节写出的算法步骤，一步步地计算练习A中的第4题.
2. 用电子工作表的“公式”功能，设计由度换算为弧度或由弧度换算为度的计算区域，并验证练习A中的第4题的计算结果.

习题1-1 A

1. 在直角坐标系中，角α_1，α_2，α_3，α_4的终边分别通过点$P_1(1,2)$，$P_2(-2,1)$，$P_3(-4,-5)$，$P_4(5,-6)$，问角α_1，α_2，α_3，α_4分别是第几象限的角?
2. $\frac{19\pi}{6}$和$-\frac{25\pi}{6}$的角分别是第几象限的角? 并分别写出与它们终边相同的一切角.
3. 把下列各角的度数化为弧度数，并写成0到2π的角加上$2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式：

   (1) $-64°$;　　(2) $400°$;　　(3) $-722°30'$.
4. 航海罗盘将圆周32等分，把其中每一份所对圆心角的大小，分别用度和弧度表示出来.
5. 要在半径$OA=100$ cm的圆形板上，截取一块扇形板，使它的圆弧$\overset{\frown}{AB}$的长为112 cm，问截取的圆心角$\angle AOB$的度数是多少(精确到1°)?

习题 1-1 B

1. 用弧度制分别写出第一、二、三、四象限角的集合.

2. 已知 200° 的圆心角所对的弧长为 50 m，这个圆的半径是多少(精确到 0.1 m)?

3. 当时钟显示 3 时、6 时和 8 时的时候，把时针作为角的始边，写出分针与时针所成角的一般形式.

4. 某飞轮直径为 1.2 m，每分钟按照逆时针方向旋转 300 圈，求：

(1) 飞轮每分钟转过的弧度数；

(2) 轮周上的一点每秒钟经过的弧长.

5. 地球赤道的半径约为 6 370 km，问赤道上 1° 的弧长是多少(精确到 1 km)?

1.2 任意角的三角函数

1.2.1 三角函数的定义

1. 三角函数的定义

我们已经推广了角的概念，现在利用直角坐标系把锐角三角函数推广到任意角的三角函数.

如图 1-10 所示，以角 α 的顶点 O 为坐标原点，以角 α 的始边的方向作为 x 轴的正方向，建立直角坐标系 xOy，并且使$\angle xOy=90°$.

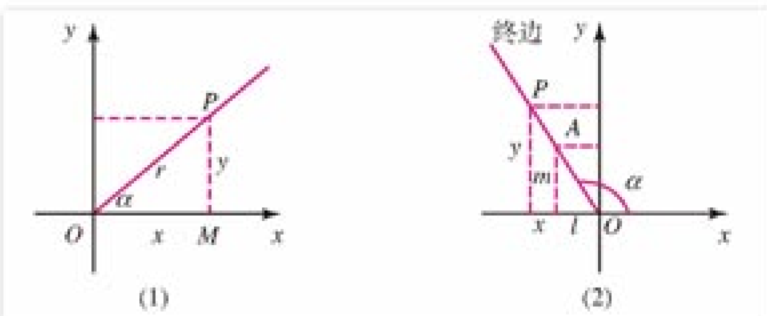


图 1-10

如图 1-10(1)，α 为锐角，记$\angle MOP=\alpha$，$P(x, y)$是 α 终边上不同于坐标原点的任意一点，$MP\perp Ox$ 于点 M，则

$$OM=x，MP=y，r=OP=\sqrt{x^2+y^2}>0，$$

根据锐角三角函数的定义知

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}，\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}，\quad \tan\alpha=\frac{y}{x}，\quad \cot\alpha=\frac{x}{y}.$$

下面我们来定义任意角的三角函数.

在任意角 α 的终边上取点 A（图 1-10(2)），使 $OA=1$，设点 A 的坐标为(l, m)，再任取一点 $P(x, y)$，设 $OP=r$（$r\neq0$），由相似三角形对应边成比例，得

$$\frac{|x|}{r}=|l|,\quad \frac{|y|}{r}=|m|,\quad \frac{|y|}{|x|}=\frac{|m|}{|l|}.$$

因为 A，P 在同一象限内，所以它们的坐标符号相同. 因此得

$$\frac{x}{r}=l,\quad \frac{y}{r}=m,\quad \frac{y}{x}=\frac{m}{l}.$$

不论点 P 在终边上的位置如何，它们都是定值，它们只依赖于 α 的大小，与点 P 在 α 终边上的位置无关. 即当点 P 在 α 的终边上变化时，这三个比值始终等于定值. 因此我们可定义

$\frac{x}{r}$ 叫做角 α 的**余弦**，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

$\frac{y}{r}$ 叫做角 α 的**正弦**，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

$\frac{y}{x}$ 叫做角 α 的**正切**，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

依照上述定义，对于每一个确定的角 α，都分别有唯一确定的余弦值、正弦值与之对应；当 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，它有唯一的正切值与之对应. 因此这三个对应法则都是以 α 为自变量的函数，分别叫做角 α 的**余弦函数、正弦函数**和**正切函数**.

由图 1-10(1)可以看出，当 α 为锐角时，上述所定义的三角函数与在直角三角形中所定义的三角函数是一致的.

有时我们还用到下面三个函数

角 α 的**正割**：$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{r}{x}$；

角 α 的**余割**：$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{r}{y}$；

角 α 的**余切**：$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{x}{y}$.

这就是说，$\sec\alpha$，$\csc\alpha$，$\cot\alpha$ 分别是 α 的余弦、正弦和正切的倒数.

由上述定义可知，当 α 的终边在 y 轴上，即 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$\tan\alpha$，$\sec\alpha$ 没有意义；当 α 的终边在 x 轴上，即 $\alpha=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$\cot\alpha$，$\csc\alpha$ 没有意义.

在本书中，将重点学习正弦函数、余弦函数和正切函数. 现将它们的定义域列表如下：

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\mathbf{R}$
$\tan\alpha$	$\left\{\alpha\,\middle\vert\,\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

例 1 已知角 α 的终边经过点 $P(2,-3)$，求 α 的六个三角函数值(图 1-11).

解：因为 $x=2$，$y=-3$，所以 $r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

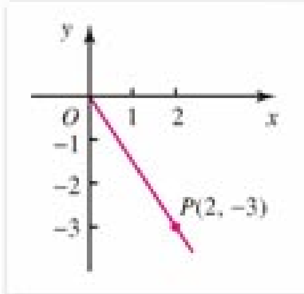


图 1-11

于是

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2},\qquad \cot\alpha=-\frac{2}{3},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{13}}{2},\qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

例 2 求下列各角的六个三角函数值：

(1) 0； (2) π； (3) $\frac{3\pi}{2}$.

解：(1) 因为当 $\alpha=0$ 时，$x=r$，$y=0$，所以

$$\sin 0=0,\qquad \cos 0=1,\qquad \tan 0=0,$$

$\csc 0$ 不存在， $\sec 0=1$， $\cot 0$ 不存在；

(2) 因为当 $\alpha=\pi$ 时，$x=-r$，$y=0$，所以

$$\sin\pi=0,\qquad \cos\pi=-1,\qquad \tan\pi=0,$$

$\cot\pi$ 不存在， $\sec\pi=-1$， $\csc\pi$ 不存在；

(3) 因为当 $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ 时，$x=0$，$y=-r$，所以

$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$， $\cos\frac{3\pi}{2}=0$， $\tan\frac{3\pi}{2}$ 不存在，

$\cot\frac{3\pi}{2}=0$， $\sec\frac{3\pi}{2}$ 不存在， $\csc\frac{3\pi}{2}=-1$.

2. 三角函数在各象限的符号

由三角函数的定义，以及各象限内点的坐标的符号，可以确定三角函数的符号.

$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，其中 $r>0$，于是 $\sin\alpha$ 的符号与 y 的符号相同. 因此，当 α 是第一、二象限的角时，$\sin\alpha>0$；当 α 是第三、四象限的角时，$\sin\alpha<0$.

$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，其中 $r>0$，于是 $\cos\alpha$ 的符号与 x 的符号相同. 因此，当 α 是第一、四象限的角时，$\cos\alpha>0$；当 α 是第二、三象限的角时，$\cos\alpha<0$.

$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，当 x 与 y 同号时，它们的比值为正，当 x 与 y 异号时，它们的比值为负. 因此，当 α 为第一、三象限的角时，$\tan\alpha>0$；当 α 为第二、四象限的角时，$\tan\alpha<0$.

以上结果如图 1-12 所示.

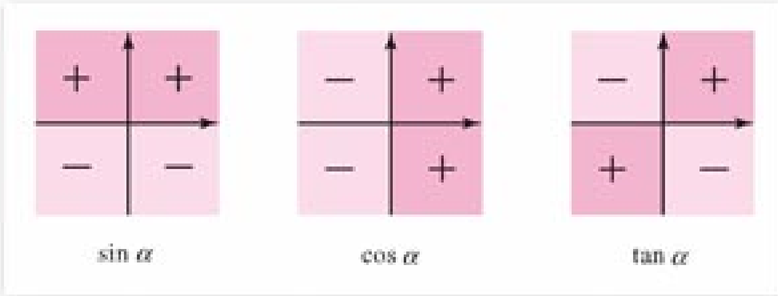


图 1-12

例 3 确定下列各三角函数值的符号：

(1) $\cos 260°$； (2) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$； (3) $\tan(-672°20')$； (4) $\tan\dfrac{10\pi}{3}$.

解：(1) 因为 $260°$ 是第三象限的角，所以 $\cos 260°<0$；

(2) 因为 $-\dfrac{\pi}{3}$ 是第四象限的角，所以 $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)<0$；

(3) 因为 $\tan(-672°20')=\tan(-2\times360°+47°40')$，而 $47°40'$ 是第一象限的角，所以 $\tan(-672°20')>0$；

(4) 因为 $\tan\dfrac{10\pi}{3}=\tan\left(2\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)$，而 $\dfrac{4\pi}{3}$ 是第三象限的角，所以 $\tan\dfrac{10\pi}{3}>0$.

例 4 设 $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$，确定 θ 是第几象限的角.

解：因为 $\sin\theta<0$，所以 θ 是第三或第四象限的角或终边在 y 轴负半轴上；
因为 $\tan\theta>0$，所以 θ 是第一或第三象限的角.
因此满足 $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$ 的 θ 是第三象限的角.

思考与讨论

想想看，本节如何把锐角三角函数推广为任意角的三角函数？

练习A

1. 填空：

(1) 已知角 α 终边经过点 $P\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则

$\cos\alpha=$________，$\sin\alpha=$________，$\tan\alpha=$________，
$\cot\alpha=$________，$\sec\alpha=$________，$\csc\alpha=$________；

(2) 已知角 β 终边经过点 $Q\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则

$\cos\beta=$________，$\sin\beta=$________，$\tan\beta=$________；

(3) 已知角 γ 终边经过点 $M(-3,\ -1)$，则

$\cos\gamma=$________，$\sin\gamma=$________，$\tan\gamma=$________.

2. 求$\frac{\pi}{2}$的各三角函数值.

3. 填表：

角 α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
α 的弧度数					
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

将填表结果核对准确以后加以记忆.

4. 确定下列各三角函数的符号：

(1) $\sin 156°$；　(2) $\cos\frac{16\pi}{5}$；　(3) $\cos(-80°)$；

(4) $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right)$；　(5) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$；　(6) $\tan 556°12'$.

练习B

1. 已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 α 的终边与以原点为圆心、以 2 为半径的圆的交点坐标.

2. 设 A 是三角形的一个内角，在 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 中，哪些有可能是负值？

3. 填空：

(1) 如果 $\sin\alpha>0$，且 $\cos\alpha<0$，则 α 是第____象限的角；

(2) 如果 $\tan\alpha>0$，且 $\cos\alpha<0$，则 α 是第____象限的角；

(3) 如果 $\sin\alpha<0$，且 $\tan\alpha<0$，则 α 是第____象限的角；

(4) 如果 $\cos\alpha>0$，且 $\sin\alpha<0$，则 α 是第____象限的角.

4. 根据下列条件，确定 θ 是第几象限的角：

(1) $\cos\theta$ 与 $\tan\theta$ 异号；　(2) $\cos\theta$ 与 $\tan\theta$ 同号；

(3) $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 异号；　(4) $\sin\theta$ 与 $\tan\theta$ 同号.

5. 已知角 α 的终边落在直线 $y=2x$ 上，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

探索与研究

在初中，我们已经会使用科学计算器求一个锐角的三角函数值，在科学计算器上，输入任一个角的弧度数或度数，按相应的三角函数键，立即就会显示这个角的三角函数的精确值或近似值. 不知同学们有没有想过，计算器是用什么样的算法，算出任意角的三角函数值的？有兴趣的同学不妨研究一下，除书中提到的一些特殊角外，自己能否求出一些角的三角函数的精确值或近似值？随着学习的不断深入，我们将不断地引导同学们思考这个问题.

1.2.2 单位圆与三角函数线

我们是否想过，观览车在转动过程中，座椅离地面的高度随着转动角度的变化而变化，二者之间有怎样的相依关系呢？

我们首先建立下面的坐标系：在观览车转轮圆面所在的平面内，以观览车转轮中心为原点，以水平线为 x 轴，以转轮半径为单位长建立直角坐标系（如图 1-13）. 设 P 点为转轮边缘上一点，它表示座椅的位置，记 $\angle xOP$ 为 α，则由正弦函数的定义可知

$$MP=\sin\alpha.$$

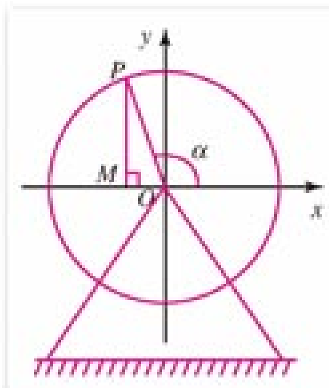


图 1-13

一般地，我们把半径为 1 的圆叫做**单位圆**(图 1-14). 设单位圆的圆心与坐标原点重合，则单位圆与 x 轴的交点分别为 $A(1,0)$，$A'(-1,0)$，而与 y 轴的交点分别为 $B(0,1)$，$B'(0,-1)$.

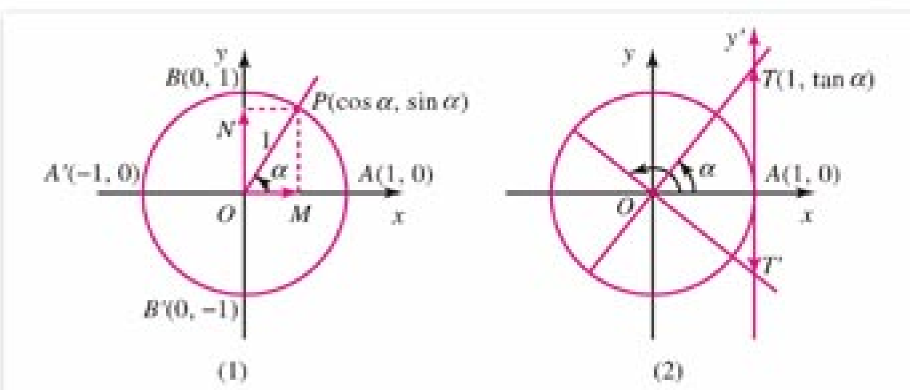


图 1-14

设角 α 的顶点在圆心 O，始边与 x 轴的正半轴重合，终边与单位圆相交于点 P(图 1-14(1))，过点 P 作 PM 垂直 x 轴于 M，作 PN 垂直 y 轴于点 N，则点 M，N 分别是点 P 在 x 轴、y 轴上的**正射影**(简称**射影**). 由三角函数的定义可知，点 P 的坐标为

$(\cos\alpha, \sin\alpha)$，即

$$P(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

其中 $\cos\alpha=OM$，$\sin\alpha=ON$.

这就是说，**角 α 的余弦和正弦分别等于角 α 终边与单位圆交点的横坐标和纵坐标.**

以 A 为原点建立 y' 轴与 y 轴同向，y' 轴与 α 的终边(或其反向延长线) 相交于点 T(或 T')(图1-14(2))，则

$$\tan\alpha=AT(\text{或 } AT').$$

我们把轴上向量$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$和$\overrightarrow{AT}$(或$\overrightarrow{AT'}$)分别叫做 α 的**余弦线**、**正弦线**和**正切线**.

关于座椅离地面高度的问题，在本章的习题中，留给同学们自己解决. 在这里应注意的是：在以单位长为半径的圆中，可以用一条线段来表示三角函数.

当角 α 的终边在 x 轴上时，点 P 与点 M 重合，点 T 与点 A 重合，此时，正弦线和正切线都变成了一点，它们的数量为零，而余弦线 $OM=1$ 或 -1.

当角 α 的终边在 y 轴上时，正弦线 $MP=1$ 或 -1，余弦线变成了一点，它表示的数量为零，正切线不存在.

例 分别作出$\frac{2\pi}{3}$和$-\frac{3\pi}{4}$的正弦线、余弦线和正切线.

解：在直角坐标系中作单位圆如图 1-15. 以 Ox 轴正方向为始边作$\frac{2\pi}{3}$的终边与单位圆交于 P 点，作 $PM\perp Ox$ 轴，垂足为 M，由单位圆与 Ox 正方向的交点 A 作 Ox 轴的垂线与 OP 的反向延长线交于 T 点，则

$$\sin\frac{2\pi}{3}=MP,\qquad \cos\frac{2\pi}{3}=OM,\qquad \tan\frac{2\pi}{3}=AT.$$

即$\frac{2\pi}{3}$的正弦线为$\overrightarrow{MP}$，余弦线为$\overrightarrow{OM}$，正切线为$\overrightarrow{AT}$.

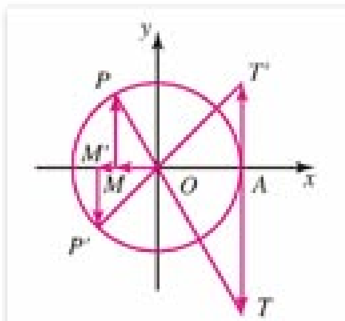


图 1-15

同理可作出$-\frac{3\pi}{4}$的正弦线、余弦线和正切线，如图 1-15 中，

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=M'P',\quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=OM',\quad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=AT'.$$

即$-\frac{3\pi}{4}$的正弦线为$\overrightarrow{M'P'}$，余弦线为$\overrightarrow{OM'}$，正切线为$\overrightarrow{AT'}$.

思考与讨论

角 $\alpha=x$ (rad)，且 $0<x<\frac{\pi}{2}$，于是 x，$\sin x$，$\tan x$ 都是实数. 请你给 x 一个具体的值，比较这三个实数的大小. 然后想一想，你得到的大小关系是否对区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的任意 x 都成立.

练习A

1. 分别作出下列各角的正弦线、余弦线和正切线：

   (1) $\frac{\pi}{3}$；　　(2) $\frac{5\pi}{6}$；

   (3) $-\frac{2\pi}{3}$；　　(4) $-\frac{13\pi}{6}$.

2. 以 5 cm 为单位长度作单位圆，分别作出 10°，20°，50°，220°，320°角的正弦线、余弦线和正切线，量出它们的长度，写出这些角的正弦值、余弦值和正切值的近似值，再使用科学计算器求这些角的正弦值、余弦值和正切值，并与之比较.

练习B

1. 设 α 是第一象限的角，作 α 的正弦线、余弦线和正切线，由图证明下列各等式：

   (1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；　　(2) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

   如果 α 是第二、三、四象限的角，以上等式仍然成立吗？

2. 设 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，角 α 的正弦线、余弦线和正切线的数量分别为 a，b 和 c，由图比较 a，b，c 的大小. 如果 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，那么 a，b，c 的大小关系又如何？

探索与研究

在直角坐标系中，以任意长为半径画单位圆，作出任意角 α 的正弦线、余弦线和正切线，然后想象 α 的终边绕原点转动时三角函数线的变化，写出 α 终边绕原点转动一周过程中，各三角函数值的增减情况.

1.2.3 同角三角函数的基本关系式

在单位圆中(图 1-16)，由三角函数的定义和勾股定理，可得

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\&\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\end{aligned}}$$

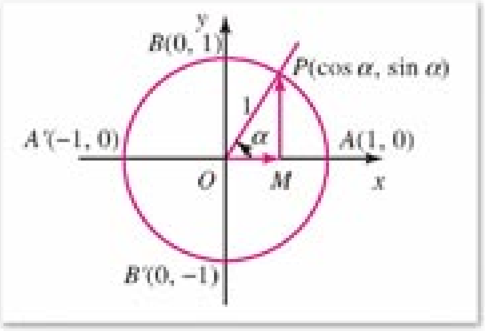


图 1-16

这两个关系式是三角函数两个最基本的关系式．当我们知道一个角的某一三角函数值时，利用这两个关系式和三角函数的定义，就可以求出这个角的其余三角函数值．此外，还可以用它们化简三角函数式和证明三角恒等式．

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限的角，求角 α 的余弦值和正切值．

解：由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

因为 α 是第二象限的角，$\cos\alpha<0$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

例 2 已知 $\tan\alpha=-\sqrt{5}$，且 α 是第二象限的角，求角 α 的正弦值和余弦值．

分析：我们把 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 看作两个未知数，这样只要列出两个关于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 独立的关系式，通过解关于这两个未知数的联立方程组，就可以求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

解：由题意和基本三角恒等式，列出方程组

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 & ①\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{5} & ②\end{cases}$$

由②得 $\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha$，代入①整理得

$$6\cos^2\alpha=1,$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{6}.$$

因为 α 是第二象限的角，所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{6}$，代入②式得

$$\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha=-\sqrt{5}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

例3 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$180°<\alpha<270°$，求 $\tan\alpha$ 的值.

解：依题意和基本三角恒等式，得到方程组

$$\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$$

消去 $\sin\alpha$，得

$$5\cos^2\alpha-\sqrt{5}\cos\alpha-2=0,$$

由方程解得

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}\quad 或\quad \cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

因为 $180°<\alpha<270°$，$\cos\alpha<0$，所以

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(把\ \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}舍去\right),$$

代入原方程组，得 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

于是

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2.$$

例4 化简 $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\tan\theta-1}$.

解：原式 $=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}}=\cos\theta.$

例5 化简 $\sqrt{1-\sin^2 80°}$.

解：原式 $=\sqrt{\cos^2 80°}=|\cos 80°|=\cos 80°$.

例6 求证：

(1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1$；

(2) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$；

(3) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

证明：(1) 原式左边 $=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$

$$=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)$$

$$=2\sin^2\alpha-1=右边.$$

因此

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1.$$

(2) 原式右边$=\tan^2\alpha(1-\cos^2\alpha)=\tan^2\alpha-\tan^2\alpha\cos^2\alpha$

$$=\tan^2\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\text{左边}.$$

因此

$$\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha.$$

(3) 证法 1：因为

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}=0,$$

所以

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

证法 2：因为

$$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha,$$

由原题可知 $1-\sin\alpha\neq0$，$\cos\alpha\neq0$.

所以

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

证法 3：由原题可知 $\cos\alpha\neq0$，因而 $\sin\alpha\neq-1$，即 $1+\sin\alpha\neq0$. 从而

$$\text{原式左边}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}$$

$$=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\text{右边},$$

因此

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

从例 6 可以看出：

证明一个三角恒等式，可以从它的任意一边开始，推出它等于另一边；也可以用作差法，证明等式两边之差等于零；还可以先证得另一个等式成立，并由此推出需要证明的等式成立.

练习A

1. 解下列各题：

（1）已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，且 α 为第一象限的角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$；

（2）已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 α 为第三象限的角，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$；

（3）已知 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，且 α 为第四象限的角，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$；

（4）已知 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，且 α 为第二象限的角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$.

2. 化简：

（1）$\cos\theta\cdot\tan\theta$；　　（2）$(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$.

3. 求证：

（1）$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；　　（2）$\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

4. 化简：

（1）$\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot\tan\alpha$；　　（2）$(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$.

练习B

1. 已知 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，求 θ 的其他各三角函数值.

2. 已知 $\tan\alpha=-4$，求下列各式的值：

（1）$\sin^2\alpha$；　　（2）$3\sin\alpha\cos\alpha$；

（3）$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$；　　（4）$\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$.

3. 化简：

（1）$\dfrac{2\cos^2\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$；　　（2）$\sin\alpha\cos\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)$.

4. 求证：

（1）$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin^2\alpha\cot\alpha$；

（2）$\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+\sec\alpha-1}{\tan\alpha-\sec\alpha+1}$.

5. 已知 $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}-\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=-1$，试判断 α 是第几象限的角.

1.2.4 诱导公式

在初中，我们已经会求锐角的三角函数值. 这一节我们将研究任意角三角函数值之间的某些关系，以及如何求任意角的三角函数值.

1. 角 α 与 $\alpha+k\cdot 2\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数间的关系

在直角坐标系中，α 与 $\alpha+k\cdot 2\pi$ 的终边相同，根据三角函数的定义，它们的三角函数值相等. 即

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+k\cdot 2\pi)&=\cos\alpha,\\ \sin(\alpha+k\cdot 2\pi)&=\sin\alpha,\\ \tan(\alpha+k\cdot 2\pi)&=\tan\alpha.\end{aligned}} \qquad (一)$$

利用上述公式(一)，我们可以把绝对值大于 2π 的任意角的三角函数问题转化为研究绝对值小于 2π 的角的三角函数问题.

例 1 求下列各三角函数值：

(1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}$； (2) $\cos\dfrac{19\pi}{3}$； (3) $\tan 405°$.

解：(1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+6\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；

(2) $\cos\dfrac{19\pi}{3}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+6\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\tan 405°=\tan(45°+360°)=\tan 45°=1$.

2. 角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数间的关系

如图 1-17 所示. 设单位圆与角 α 和角 $-\alpha$ 的终边的交点分别为 P 和 P'. 容易看出，点 P 和点 P' 关于 x 轴对称. 已知点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，则 P' 的坐标是 $(\cos\alpha, -\sin\alpha)$. 于是，得

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-\alpha)&=\cos\alpha,\\ \sin(-\alpha)&=-\sin\alpha,\\ \tan(-\alpha)&=-\tan\alpha.\end{aligned}} \qquad (二)$$

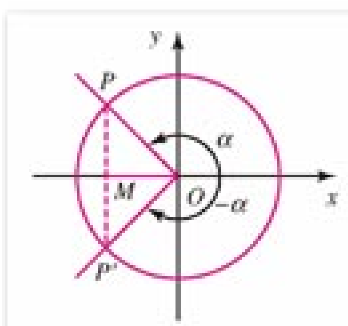


图 1-17

利用公式(二)，我们可以用正角的三角函数表示负角的三角函数.

例 2 求下列各三角函数值：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$；　　(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$；

(3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$；　　(4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

解：(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$；

(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$；

(4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=-\sin\frac{7\pi}{3}=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

练习A

1. 求下列各三角函数值：

(1) $\sin 3\pi$；　　(2) $\sin 18\pi$；

(3) $\cos 5\pi$；　　(4) $\cos 25\pi$；

(5) $\sin\frac{9\pi}{2}$；　　(6) $\sin\frac{13\pi}{3}$；

(7) $\cos\frac{47\pi}{2}$；　　(8) $\cos\frac{103\pi}{4}$；

(9) $\tan\frac{37\pi}{6}$；　　(10) $\tan\frac{17\pi}{4}$.

2. 求下列各三角函数值：

(1) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$；　　(2) $\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$；

(3) $\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$；　　(4) $\tan\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$.

3. 查表或用计算器，求下列各三角函数值：

(1) $\sin 380°21'$；　　(2) $\cos 420°10'$；

(3) $\tan(-34°)$；　　(4) $\tan(-373°13')$.

练习B

1. 求下列各三角函数值：

(1) $\sin 101\pi$；　　(2) $\cos 1\ 000\pi$；

(3) $\tan \frac{331\pi}{3}$；　　(4) $\tan \frac{6\ 131\pi}{6}$.

2. 计算：

(1) $\sin \frac{35\pi}{6}+\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$；

(2) $3\cos 365^\circ-4\cos 355^\circ+\tan 337^\circ$（精确到 0.01）.

3. 角 α 与 $\alpha+(2k+1)\pi$ ($k\in \mathbf{Z}$)的三角函数间的关系

设角 α 与 $\alpha+\pi$ 的终边与单位圆分别交于点 P 和 P'(图 1-18).

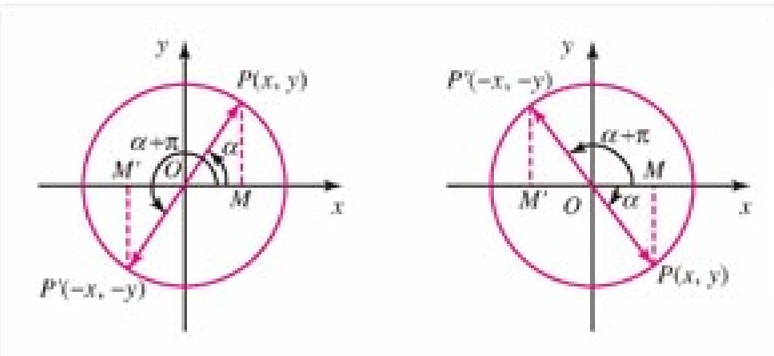


图 1-18

易知，$\alpha+\pi$与$\alpha-\pi$，$\alpha+3\pi$，$\alpha-3\pi$，…，$\alpha+(2k+1)\pi$ ($k\in \mathbf{Z}$)的终边相同，因此它们的三角函数值也相等. 由点 P 与点 P'关于原点对称，它们的对应坐标互为相反数，所以

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos[\alpha+(2k+1)\pi]=-\cos\alpha,\\&\sin[\alpha+(2k+1)\pi]=-\sin\alpha,\\&\tan[\alpha+(2k+1)\pi]=\tan\alpha.\end{aligned}}\qquad(三)$$

由公式(一)和(三)可以看出，角 α 与 α 加上 π 的偶数倍的所有三角函数值相等；角 α 与 α 加上 π 的奇数倍的余弦、正弦值互为相反数；角 α 与 α 加上 π 的整数倍的正切值相等. 即

$$\sin(\alpha+n\pi)=\begin{cases}-\sin\alpha, & 当\ n\ 为奇数\\ \sin\alpha, & 当\ n\ 为偶数\end{cases}$$

$$\cos(\alpha+n\pi)=\begin{cases}-\cos\alpha, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\\ \cos\alpha, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

$$\tan(\alpha+n\pi)=\tan\alpha,\ n\in\mathbf{Z}.$$

因为任意角都可化为 $\alpha+k\pi$ 的形式，并使 $|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以利用公式(一)(二)(三)，我们可以把任意角的三角函数求值问题转化为0至 $\frac{\pi}{2}$ 之间的角的三角函数求值问题.

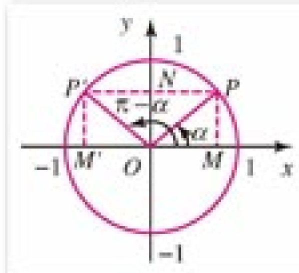


图 1-19

公式(一)(二)(三)都叫做**诱导公式**.

利用诱导公式可以求三角函数式的值或化简三角函数式.

如图 1-19，设角 α 与 $\pi-\alpha$ 和单位圆分别相交于点 P，P'. 由诱导公式(二)(三)或点 P，P' 关于 y 轴对称，可以得到角 α 与 $\pi-\alpha$ 之间的三角函数的关系

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

例如，

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 3 求下列各三角函数值：

(1) $\sin\frac{2\pi}{3}$；　　(2) $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$；

(3) $\tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$；　　(4) $\sin 930°$.

解：(1) $\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-3\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$；

(3) $\tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}-3\pi\right)$

$=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$；

(4) $\sin 930°=\sin(30°+5\times180°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$.

例 4 求下列各三角函数值：

(1) $\sin\left(-\frac{55\pi}{6}\right)$；　　(2) $\cos\frac{11\pi}{4}$；

（3）$\tan\left(-\dfrac{14\pi}{3}\right)$；　　　　（4）$\sin 870°$.

解：（1）$\sin\left(-\dfrac{55\pi}{6}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+9\pi\right)=-\left(-\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$；

（2）$\cos\dfrac{11\pi}{4}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}+3\pi\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}；$$

（3）$\tan\left(-\dfrac{14\pi}{3}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-5\pi\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$；

（4）$\sin 870°=\sin(-30°+5\times180°)$

$$=\sin(180°-30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}.$$

例 5　化简：

$$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\tan(\alpha+\pi)\tan(-\alpha-\pi)}{\cos(\pi-\alpha)\tan(3\pi-\alpha)}.$$

解：原式$=\dfrac{\sin(-\alpha)\tan\alpha\tan(-\alpha)}{-\cos\alpha\tan(-\alpha)}$

$$=\frac{-\sin\alpha\tan\alpha(-\tan\alpha)}{-\cos\alpha(-\tan\alpha)}$$

$$=\tan\alpha\tan\alpha=\tan^2\alpha.$$

练习A

1. 求下列各正弦函数值：

（1）$\sin\dfrac{5\pi}{4}$；　　　　（2）$\sin\dfrac{19\pi}{6}$；

（3）$\sin\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right)$；　　　　（4）$\sin(-210°)$.

2. 求下列各余弦函数值：

（1）$\cos\dfrac{31\pi}{6}$；　　　　（2）$\cos\dfrac{13\pi}{6}$；

（3）$\cos\left(-\dfrac{79\pi}{6}\right)$；　　　　（4）$\cos 135°$.

3. 求下列各正切函数值：

（1）$\tan\dfrac{14\pi}{3}$；　　　　（2）$\tan\dfrac{7\pi}{6}$；

（3）$\tan\dfrac{21\pi}{4}$；　　　　（4）$\tan(-675°)$.

练习B

1. 求下列各三角函数值：

(1) $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$；　(2) $\cos\left(-\frac{83\pi}{6}\right)$；　(3) $\tan\left(-\frac{35\pi}{3}\right)$；　(4) $\tan\left(-\frac{41\pi}{3}\right)$.

2. 化简：

(1) $\frac{\cos(\alpha-\pi)\tan(\alpha-2\pi)\tan(2\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}$；

(2) $\sin^2(-\alpha)-\tan(360°-\alpha)\tan(-\alpha)-\sin(180°-\alpha)\cos(360°-\alpha)\tan(180°+\alpha)$.

4. α 与 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 的三角函数间的关系

如图 1-20 所示，设 α 的终边与单位圆相交于点 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，点 P 关于直线 $y=x$ 的轴对称点 M 的坐标为$(\sin\alpha,\cos\alpha)$，点 M 关于 y 轴的对称点 N 的坐标为$(-\sin\alpha,\cos\alpha)$.

点 P 经过以上两次轴对称变换到达点 N，等同于点 P 沿单位圆旋转到 N，而且旋转角的大小为(图 1-20)

$$\angle PON=2(\angle AOM+\angle MOB)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

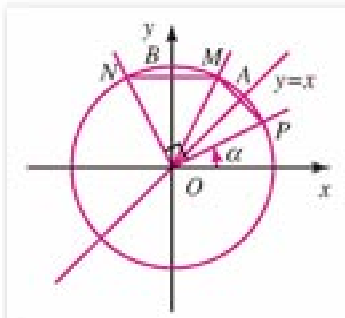


图 1-20

因此，点 N 的坐标又为

$$\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

所以

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha,\\&\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha.\end{aligned}}\qquad\text{(四)}$$

在公式(四)中，以 $-\alpha$ 替代 α，可得另一组公式

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha,\\&\sin\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha.\end{aligned}}$$

由三角函数之间的关系又可得

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\alpha,\ \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\tan\alpha;$$

$$\tan\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cot\alpha,\ \cot\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\tan\alpha.$$

我们知道，任意一个角都可表示为 $k\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha\left(其中|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$的形式. 这样由前面的公式就可以把任意角的三角函数求值问题转化为 0 到$\frac{\pi}{4}$之间角的三角函数求值问题.

例 6 求下列各三角函数值：

(1) $\sin 120^\circ$； (2) $\cos 135^\circ$；

(3) $\tan\frac{2\pi}{3}$； (4) $\cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$.

解：(1) $\sin 120^\circ=\sin(30^\circ+90^\circ)$

$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\cos 135^\circ=\cos(45^\circ+90^\circ)$

$=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(3) $\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$；

(4) $\cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}+4\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 7 将下列三角函数化为 0°到 45°之间角的三角函数：

(1) $\sin 68^\circ$； (2) $\cos 75^\circ$； (3) $\tan 126^\circ$.

解：(1) $\sin 68^\circ=\sin(-22^\circ+90^\circ)=\cos 22^\circ$；

(2) $\cos 75^\circ=\cos(-15^\circ+90^\circ)=\sin 15^\circ$；

(3) $\tan 126^\circ=\tan(36^\circ+90^\circ)=-\cot 36^\circ$.

例 8 化简：

$$\tan 10^\circ\tan 20^\circ\tan 30^\circ\tan 45^\circ\tan 60^\circ\tan 70^\circ\tan 80^\circ.$$

解：原式$=\tan 10^\circ\tan 20^\circ\tan 30^\circ\tan 45^\circ\cot 30^\circ\cot 20^\circ\cot 10^\circ$

$=(\tan 10^\circ\cot 10^\circ)(\tan 20^\circ\cot 20^\circ)(\tan 30^\circ\cot 30^\circ)\tan 45^\circ$

$=\tan 45^\circ$

$=1$.

练习A

1. 证明：

（1）$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$；　　（2）$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$.

2. 将下列三角函数化为 $0°$ 到 $45°$ 之间角的三角函数：

（1）$\sin 115°$；　　（2）$\cos 105°$；

（3）$\tan 110°$；　　（4）$\sin 85°$.

3. 将下列三角函数化为 0 到 $\dfrac{\pi}{4}$ 之间角的三角函数：

（1）$\cos\dfrac{\pi}{3}$；　　（2）$\sin\dfrac{3\pi}{5}$.

4. 化简：

（1）$\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)}\cdot\sin(\alpha-2\pi)\cdot\cos(2\pi-\alpha)$；

（2）$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

练习B

1. 求下列各三角函数值：

（1）$\sin(-1\,920°)$；　　（2）$\cos(-1\,560°)$；　　（3）$\tan\left(-\dfrac{17\pi}{6}\right)$.

2. 化简：$\tan 1°\tan 2°\cdots\tan 45°\tan 46°\cdots\tan 88°\tan 89°$.

习题1-2 A

1. 已知角 α 的终边在直线 $y=-2x$ 上，用三角函数的定义求 α 的六个三角函数值.

2. 计算：

（1）$5\sin\dfrac{\pi}{2}+2\cos 0-3\sin\dfrac{3\pi}{2}+10\cos\pi$；

（2）$7\cos 270°+12\sin 0°+2\tan 0°-8\cos 180°$；

（3）$\sin 360°-2\cos 90°+3\sin 180°-4\tan 180°+5\cos 360°$.

3. 计算：

(1) $\cos\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\tan^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}$；

(2) $\frac{(2\tan^2 30^\circ-1)\cos^2 30^\circ}{2\sin^2 45^\circ+1}$.

4. 用单位圆中的三角函数线证明：对于任意角 α，不等式

$$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant 1$$

总成立.

5. 试分别确定满足下列条件的角 α 所在的象限：

(1) $\sin\alpha\tan\alpha<0$； (2) $\sin\alpha\cos\alpha<0$.

6. 根据下列条件，求角 α 的其他三角函数值：

(1) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 α 是第四象限的角；

(2) $\tan\alpha=-3$，且 α 是第二象限的角；

(3) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，且 α 是第四象限的角；

(4) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，且 α 是第三象限的角.

7. (1) 若 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，化简：$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$；

(2) 若 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，化简：$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$；

(3) 化简：$\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha)+\cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$；

(4) 化简：$\cot\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

8. 证明下列恒等式：

(1) $(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha$；

(2) $(\tan^2\alpha-\sin^2\alpha)\cot^2\alpha=\sin^2\alpha$；

(3) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$；

(4) $\frac{1+\cot^2\alpha}{1-\cot^2\alpha}=\frac{1}{2\sin^2\alpha-1}$.

9. 化简：

(1) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)\sin(270^\circ-\alpha)\tan(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\tan(270^\circ+\alpha)\tan(360^\circ-\alpha)}$；

(2) $1+\sin(\alpha-2\pi)\cdot\sin(\pi+\alpha)-2\cos^2(-\alpha)$；

(3) $\frac{\sqrt{1-2\sin 100^\circ\cos 280^\circ}}{\cos 370^\circ-\sqrt{1-\cos^2 170^\circ}}$；

(4) $\frac{\cos(\alpha-\pi)\cdot\cot(5\pi-\alpha)}{\tan(2\pi-\alpha)\cdot\sin(-2\pi-\alpha)}$.

习题 1-2 B

1. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，求下列各式的值：

(1) $\sin\alpha\cos\alpha$；　　(2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$；

(3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$；　　(4) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$.

2. 已知：$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$，$\alpha\in(0,\pi)$.

求 $\tan\alpha$ 的值.

3. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$，且 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

4. 已知 $\dfrac{\sec\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}+\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}=-1$，试判断角 θ 所在的象限.

5. 利用单位圆中的正弦线、余弦线说明：

$$-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1;\qquad -1\leqslant\cos\alpha\leqslant1.$$

6. 利用计算器解下列各题(精确到 0.01)：

(1) 已知 $\cos\alpha=0.68$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$，$\cot\alpha$ 的值；

(2) 已知 $\tan\alpha=2.05$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\cot\alpha$ 的值.

7. 证明下列恒等式：

(1) $\tan\theta\cdot\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\cot\theta\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$；

(2) $\dfrac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}=\tan^2\alpha$；

(3) $\dfrac{1+\csc\alpha+\cot\alpha}{1+\csc\alpha-\cot\alpha}=\csc\alpha+\cot\alpha$.

8. 已知：$\sin(\pi-\alpha)=\log_8\dfrac{1}{4}$，且 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

求 $\cot(2\pi-\alpha)$ 的值.

9. 求 $\dfrac{\tan(-150^\circ)\cos(-210^\circ)\cos(-420^\circ)}{\cot(-600^\circ)\sin(-1\,050^\circ)}$ 的值.

10. 设 $\cos 460^\circ=t$，将 $\tan 260^\circ$ 表示为含 t 的式子.

计算机上的练习

1. 在计算机上作直角坐标系并在直角坐标系中作单位圆，作任意角 α 的终边关于 y 轴对称的射线，以此射线为终边的角记为 β，令 α 的终边绕原点转动，并使得上述对称关系保持不变：

(1) 探索β与α的数量关系；

(2) 探索β的正弦、余弦与α的正弦、余弦之间的联系.

2. 使上题中的角β的终边与角α的终边关于x轴或关于原点对称，探索上题各问题.

3. 作α和$\alpha+\frac{\pi}{2}$，让α变动，研究α与$\alpha+\frac{\pi}{2}$的正弦与余弦函数之间的关系.

1.3 三角函数的图象与性质

1.3.1 正弦函数的图象与性质

1. 正弦函数的图象

在研究三角函数的图象和性质时，我们通常采用弧度制来度量角，记为 x，表示自变量，用 y 表示函数值．于是，正弦函数表示为

$$y=\sin x,$$

由正弦函数的定义，函数 $y=\sin x$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

下面我们用单位圆中的正弦线，作出函数 $y=\sin x$ 的图象，并研究它的性质．

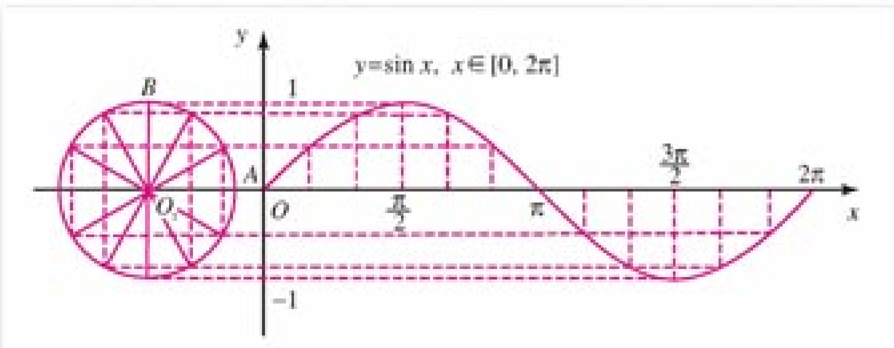


图 1-21

在直角坐标系的 x 轴上任取一点 O_1，以 O_1 为圆心作单位圆(图 1-21)，从这个圆与 x 轴的交点 A 起，把圆 O_1 分为 12 等份(等份越多，作出的图象越精确)．过圆上各分点分别作 x 轴的垂线，可以得到弧度为 0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，…，2π 的角的正弦线(例如 O_1B 对应于角 $\frac{\pi}{2}$ 的正弦线)．相应地，再把 x 轴上从 0 到 2π 这一段($2\pi\approx6.28$)分成 12 等份，每个分点分别对应于 $x=0$，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2\pi}{3}$，…，2π，分别过这些分点作这些弧度数对应的正弦线，再用光滑的曲线把这些正弦线的终点连接起来，就得到正弦函数

$$y=\sin x,\ x\in[0,\ 2\pi]$$

的图象．

因为 $\sin(x+k\cdot 2\pi)=\sin x$，$k\in\mathbf{Z}$，所以正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x\in[-2\pi, 0]$，$x\in[2\pi, 4\pi]$，$x\in[4\pi, 6\pi]$……时的图象与 $x\in[0, 2\pi]$ 的形状完全一样，只是位置不同. 因此我们把 $y=\sin x$ 在 $x\in[0, 2\pi]$ 的图象，沿 x 轴平移 $\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，…就可以得到 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象(图 1-22).

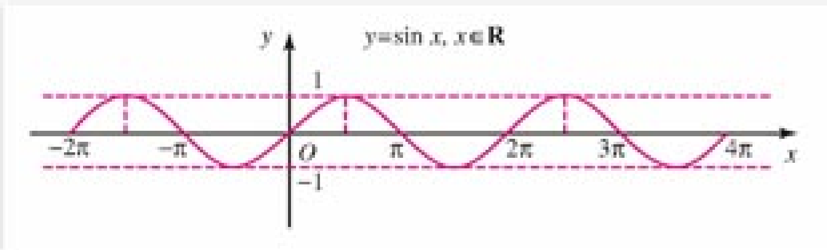


图 1-22

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象叫做**正弦曲线**.

由图 1-21，可以看出下面五点：

$$(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi,0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi,0),$$

在确定图象形状时起着关键的作用. 这五点描出后，正弦函数

$$y=\sin x, x\in[0, 2\pi]$$

的图象的形状就基本上确定了.

今后，我们作正弦函数的简图，一般都是先找出确定图象形状的关键的五个点，然后在描点作图时要注意到，被这五个点分隔的区间上函数变化情况，在 $x=0$，π，2π 附近函数增加或下降快一些，曲线“陡”一些，在 $x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$附近，函数变化慢一些，曲线变得“平缓”. 这种作图方法叫做**五点法**. 在精确度要求不高的情况下，我们常用“五点法”作 $y=\sin x$ 在$[0, 2\pi]$上的近似曲线.

例 1 用“五点法”作函数 $y=1+\sin x$，在$[0, 2\pi]$上的简图.

解：按五个关键点列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点作图（图 1-23）：

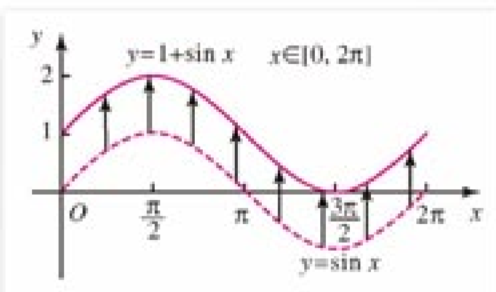


图 1-23

请同学们观察图 1-23，说明将函数 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象怎样变换就能得到函数 $y=1+\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图象.

练习A

1. 用五点法分别作下列函数在$[-2\pi, 2\pi]$上的图象：

 (1) $y=-\sin x$;　　(2) $y=\sin x-2$.

2. 把上一题所作的图象和 $y=\sin x$，$x\in[-2\pi, 2\pi]$的图象进行比较，说明这些图象与$y=\sin x$，$x\in[-2\pi, 2\pi]$的图象的位置关系.

练习B

1. 用五点法分别作下列函数在$[-2\pi, 2\pi]$上的图象：

 (1) $y=1-\sin x$;　　(2) $y=\sin(-x)$.

2. 指出上一题中各图象与 $y=\sin x$，$x\in[-2\pi, 2\pi]$的图象的位置关系.

计算机上的练习

使用 Scilab 或几何画板，作下列函数的图象，并研究它们之间的关系：

(1) $y=2\sin x$ 与 $y=2\sin x-2$;

(2) $y=|\sin x|$ 与 $y=\sin|x|$;

(3) $y=\sin x$ 与 $y=\sin(-x)$.

2. 正弦函数的性质

由上一小节正弦函数的作图过程以及正弦函数的定义，容易得出正弦函数$y=\sin x$还有以下重要性质：

(1) 值域：从正弦线可以看出，正弦线的长度小于或等于单位圆半径的长度；从正弦曲线可以看出，正弦曲线分布在两条平行线 $y=1$ 和$y=-1$之间，这都表明

$$|\sin x|\leqslant 1,$$

也就是说，正弦函数的值域是$[-1, 1]$.

> 想想看，你自己能发现正弦函数的哪些性质？

当且仅当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，正弦函数取得最大值1；当且仅当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，正弦函数取得最小值-1.

(2) 周期性：由诱导公式

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x\ (k\in\mathbf{Z})$$

可知，当自变量 x 的值每增加或减少 2π 的整数倍时，正弦函数的值重复出现. 在单位圆中，当角的终边绕原点转动回到原处时，正弦线的数量(长度和符号)不发生变化，以及正弦曲线连续不断无限延伸的形状都是这一性质的几何表示. 这种性质称为三角函数的周期性.

一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得定义域内的每一个 x 值，都满足

$$f(x+T)=f(x),$$

那么函数 $f(x)$ 就叫做**周期函数**，非零常数 T 叫做这个函数的**周期**.

根据这个定义，正弦函数 $y=\sin x$ 是一个周期函数，$2k\pi$($k\in\mathbf{Z}$，且 $k\neq0$)都是它的周期.

对于一个周期函数 $f(x)$，如果在它的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做它的**最小正周期**.

在 $2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$，且 $k\neq0$)中，最小的正数为 2π，因此正弦函数 $y=\sin x$ 有最小正周期 2π. 今后本书所涉及到的周期，如果不加特殊说明，均指最小正周期.

(3) 奇偶性：由诱导公式

$$\sin(-x)=-\sin x$$

可知，正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数，正弦曲线关于原点对称.

(4) 单调性：在正弦函数的一个周期中，如 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$，由正弦线或正弦曲线都可以看出，当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 由 -1 增加到 1；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 由 1 减小到 -1. 这种变化情况如下表所示：

x	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

由正弦函数的周期性可知：

正弦函数 $y=\sin x$ 在每一个闭区间

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z})$$

上，都从 -1 增大到 1，是增函数；在每一个闭区间

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z})$$

上，都从 1 减小到 -1，是减函数.

例 2 设 $\sin x=t-3$，$x\in\mathbf{R}$，求 t 的取值范围.

解：因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以

$$-1\leqslant t-3\leqslant1,$$

由此解得 $2\leqslant t\leqslant 4$.

例 3 求使下列函数取得最大值和最小值的 x 的取值范围，并说出最大值和最小值是什么：

(1) $y=\sin 2x$； (2) $y=\sin x+2$；

(3) $y=(\sin x-1)^2+2$.

解：(1) 当 $2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=\sin 2x$ 取得最大值，最大值是 1；

当 $2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=\sin 2x$ 取得最小值，最小值是 -1.

(2) 由于函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=\sin x+2$ 同时取得最大值或同时取得最小值，因此：

当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，函数 $y=\sin x+2$ 取得最大值，最大值为 3；

当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，函数 $y=\sin x+2$ 取得最小值，最小值为 1.

(3) 设 $t=\sin x$，则有 $y=(t-1)^2+2$，且 $t\in[-1, 1]$，于是问题就变成求闭区间上二次函数的最大值和最小值问题了.

在闭区间$[-1, 1]$上，当 $t=-1$ 时，$|t-1|$最大，函数

$$y=(t-1)^2+2$$

取得最大值$(-1-1)^2+2=6$.

由 $t=\sin x=-1$，得 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，这就是说，当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，函数 $y=(\sin x-1)^2+2$ 取得最大值 6.

在闭区间$[-1, 1]$上，当 $t=1$ 时，$|t-1|$最小，函数

$$y=(t-1)^2+2$$

取得最小值，最小值为 2.

由 $t=\sin x=1$，得 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，这就是说，当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，函数 $y=(\sin x-1)^2+2$ 取得最小值 2.

例 4 求下列函数的周期：

(1) $y=\sin 2x$； (2) $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

解：(1) 我们可以把 $2x$ 看作一个新的变量 u，即 $u=2x$. 函数$y=\sin u$的周期为 2π，这就是说，当 u 增加到且至少要增加到 $u+2\pi$ 时，函数 $y=\sin u$ 的值才重复取得，而

$$u+2\pi=2x+2\pi=2(x+\pi),$$

因此，当自变量 x 增加到且必须增加到 $x+\pi$ 时，函数 $y=\sin u$ 的值才重复取得.

> 请同学们自己动手推导：函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A\neq 0$，$\omega>0$，$x\in\mathbf{R}$）的周期为
>
> $$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

因此，函数 $y=\sin 2x$ 的周期为 π.

(2) 我们可以把$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}$看作一个新的变量 u，即

$$u=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}.$$

函数 $y=\sin u$ 的周期为 2π，这就是说，当 u 增加到且至少要增加到 $u+2\pi$ 时，函数 $y=\sin u$ 的值才重复取得，而

$$u+2\pi=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{1}{2}(x+4\pi)+\frac{\pi}{6}.$$

因此，当自变量 x 增加到且必须增加到 $x+4\pi$ 时，函数 $y=\sin u$ 的值才重复取得.

因此函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$的周期为$4\pi$.

一般地，函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)\text{（其中 }A\neq 0,\ \omega>0,\ x\in\mathbf{R}\text{）}$$

的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 下一节我们还将进一步研究这类函数的性质.

例 5　不通过求值，指出下列各式大于零还是小于零：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$；

(2) $\sin\left(-\frac{23}{5}\pi\right)-\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$.

解：(1) 因为　$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$，且函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，所以

$$\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right),$$

即 $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)>0$；

(2) $$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{23\pi}{5}\right)&=-\sin\frac{23\pi}{5}=-\sin\frac{3\pi}{5}\\&=-\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\sin\frac{2\pi}{5},\end{aligned}$$

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=-\sin\frac{17\pi}{4}=-\sin\frac{\pi}{4},$$

因为 $0<\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$，且 $y=\sin x$ 在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，所以

$$\sin\frac{\pi}{4}<\sin\frac{2\pi}{5}.$$

于是

$$-\sin\frac{\pi}{4}>-\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)>\sin\left(-\frac{23\pi}{5}\right),$$

即 $\sin\left(-\frac{23\pi}{5}\right)-\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)<0$.

练习A

1. 观察正弦曲线，写出满足下列条件的 x 的区间：

（1）$\sin x>0$；（2）$\sin x<0$.

2. 下列各等式能否成立？为什么？

（1）$2\sin x=3$；（2）$\sin^2 x=0.5$.

3. 求使下列函数取得最小值的自变量 x 的集合，并写出最小值：

（1）$y=-2\sin x$，$x\in\mathbf{R}$；（2）$y=-2+\sin\frac{x}{3}$，$x\in\mathbf{R}$.

4. 求下列函数的最大值和最小值，以及使函数取得最大值、最小值的自变量 x 的值：

（1）$y=\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2-2$；

（2）$y=-\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+\frac{5}{4}$.

5. 求下列函数的周期：

（1）$y=\sin 3x$，$x\in\mathbf{R}$；（2）$y=3\sin\frac{x}{4}$，$x\in\mathbf{R}$；（3）$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

练习B

1. 等式 $\sin(30^\circ+120^\circ)=\sin 30^\circ$ 是否成立？如果这个等式成立，那么能否说明 120° 是正弦函数 $y=\sin x$ 的周期？

2. 观察 $y=\sin x$ 的图象，回答下列问题：

（1）当 x 从 $-\frac{3\pi}{2}$ 变到 $-\pi$ 时，$\sin x$ 的值增加还是减少？是正的还是负的？

（2）对应于 $x=\frac{\pi}{6}$，$\sin x$ 有多少个值？

（3）对应于 $\sin x=\frac{1}{2}$，x 有多少个值？并写出 x 值.

观察单位圆中的正弦线，是否也能解答上面的三个问题？

3. 求下列函数的单调区间：

（1）$y=1-\sin x$，$x\in\mathbf{R}$；（2）$y=\sin 2x$，$x\in\mathbf{R}$；（3）$y=\sin\frac{x}{2}$，$x\in\mathbf{R}$.

4. 不通过求值，比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\sin 103°15'$与$\sin 164°30'$；

(2) $\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right)$与$\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)$.

用计算器求值验证你的结论.

5. 设$2\sin x=4-m$，$x\in\mathbf{R}$，求m的取值范围.

3. 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

我们继续考虑观览车问题.

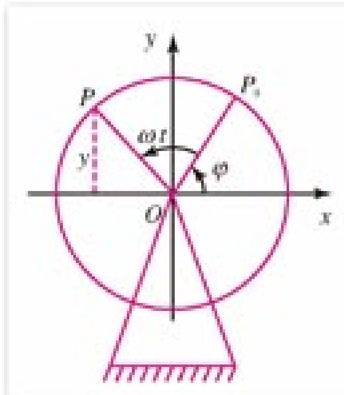


图 1-24

图 1-24 是大观览车的示意图. 设观览车转轮半径长为R，转动的角速度为ω rad/s. 点P_0表示座椅的初始位置. 此时$\angle xOP_0=\varphi$. 当转轮转动t秒后，点P_0到达点P位置，射线OP的转角为$\omega t+\varphi$，由正弦函数的定义，得点P的纵坐标y与时间t的函数关系为

$$y=R\sin(\omega t+\varphi).$$

在函数$y=R\sin(\omega t+\varphi)$中，点$P$旋转一周所需要的时间$T=\frac{2\pi}{\omega}$，叫做点$P$的转动**周期**.

在一秒内，点P旋转的周数$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，叫做转动的**频率**.

OP_0与x轴正方向的夹角φ叫做**初相**.

例如一动点以角速度4π rad/s 作匀速圆周运动，则

$$T=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}\text{ s},$$

$$f=\frac{1}{T}=2\text{ Hz}.$$

形如

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)\ (\text{其中 }A,\ \omega,\ \varphi\text{ 都是常数})$$

的函数，在物理、工程等学科的研究中经常遇到，这种类型的函数通常叫做**正弦型函数**. 下面我们来讨论这类函数的作图方法和有关性质.

例 6 在同一坐标系中作函数$y=2\sin x$及$y=\frac{1}{2}\sin x$的简图.

解：易知，函数$y=2\sin x$及$y=\frac{1}{2}\sin x$的周期$T=2\pi$. 作$x\in[0,2\pi]$时的函数的简图.

列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$2\sin x$	0	2	0	-2	0
$\frac{1}{2}\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

描点作图(图 1-25)：

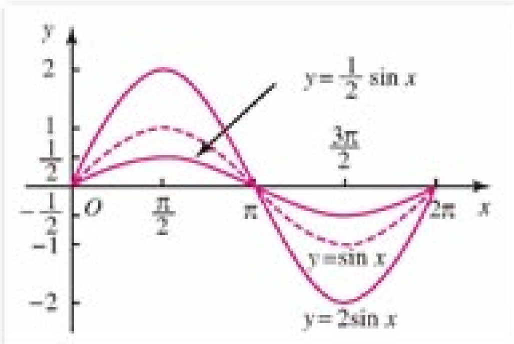


图 1-25

利用这类函数的周期性，我们可以把上面的简图向左、向右连续平移 2π，4π…就可以得出 $y=2\sin x$，$x\in\mathbf{R}$，及 $y=\frac{1}{2}\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的简图(图略).

从图 1-25 可以看出，函数 $y=2\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域是$[-2, 2]$，最大值是 2，最小值是-2；函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域是$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$，最大值是$\frac{1}{2}$，最小值是$-\frac{1}{2}$.

一般地，函数 $y=A\sin x$ 的值域是$[-|A|, |A|]$，最大值是$|A|$，最小值是$-|A|$. 由此可知，$|A|$的大小，反映曲线 $y=A\sin x$ 波动幅度的大小. 因此，$|A|$也称为**振幅**.

类似于用“五点法”作函数 $y=\sin x$ 的简图的方法，选出关键的五点，我们可以作出函数 $y=A\sin x$ 的简图.

例 7　在同一坐标系中作函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$和 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的简图.

解：这两个函数的周期都是 2π，先用“五点法”画出它们在一个周期上的简图.

列表：

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
$x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
$x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

描点作图(图 1-26)：

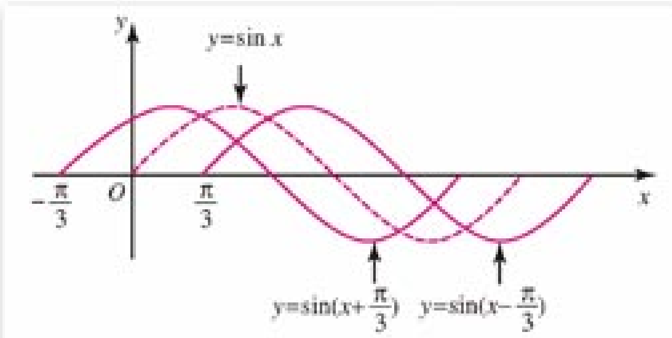


图 1-26

把函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$和 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$在区间$[0, 2\pi]$上的图象分别向左、右平移，每次平移 2π 个单位长度，则得它们在 **R** 上的图象(图略).

由图可以看出，将 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位可以得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位可以得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

一般地，把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点(当 $\varphi>0$ 时)向左或(当 $\varphi<0$ 时)向右平行移动$|\varphi|$个单位长度，就得到函数 $y=\sin(x+\varphi)$的图象.

例 8 在同一坐标系中作函数 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象.

解：函数 $y=\sin 2x$ 的周期为 π，函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的周期为 4π，分别用“五点法”作它们在一个周期上的图象. 列表：

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\frac{1}{2}x$	0	1	0	-1	0

描点作图(图 1-27). 利用这两个函数的周期性，把它们在一个周期上的简图分别向左、右扩展，从而得到它们的简图(图略).

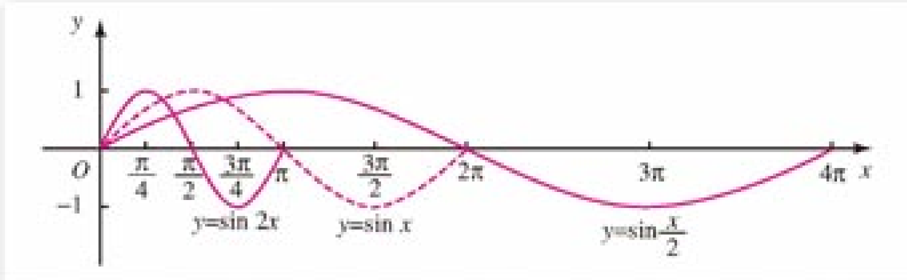


图 1-27

从图 1-27 可以看出，在函数

$$y=\sin 2x,\ x\in[0,2\pi]$$

的图象上，横坐标为$\frac{x_0}{2}$ ($x_0\in[0,2\pi]$)的点的纵坐标，同函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$上横坐标为 x_0 的点的纵坐标相等. 例如：

当 $x_0=\frac{\pi}{2}$时，

$$\sin\left(2\cdot\frac{x_0}{2}\right)=\sin x_0=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

因此，函数 $y=\sin 2x$ 的图象，可以看作是把 $y=\sin x$ 图象上所有的点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)而得到的.

类似地，函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象，可以看作是把 $y=\sin x$ 图象上所有的点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)而得到的.

一般地，函数 $y=\sin\omega x$ ($x\in\mathbf{R}$)(其中 $\omega>0$ 且 $\omega\neq1$)的图象，可以看作是把$y=\sin x$ ($x\in\mathbf{R}$)上所有的点的横坐标缩短(当 $\omega>1$ 时)或伸长(当 $0<\omega<1$ 时)到原来的$\frac{1}{\omega}$倍(纵坐标不变)而得到的.

函数 $y=\sin\omega x$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，这就是说，ω 值决定了函数的周期. ω 越大，在一定的区间内曲线波动的次数就越多，反之就越少.

例 9 作函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的简图.

解：函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，我们先用“五点法”作它在长度为一个周期上的图象.

令 $2x+\frac{\pi}{3}=0$，得 $x=-\frac{\pi}{6}$，把 $x=-\frac{\pi}{6}$作为第一个点的横坐标，依次递加一个周期的$\frac{1}{4}$，即$\frac{\pi}{4}$，就可以得到其余四个点的横坐标. 列表：

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	−3	0

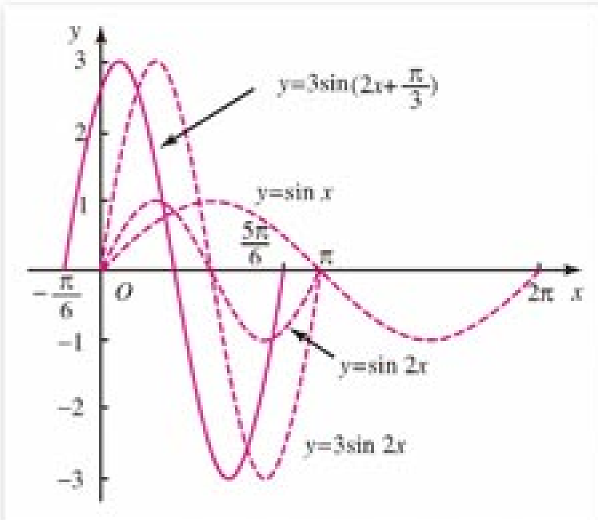


图 1-28

描点作图(图 1-28)．利用函数的周期为 π，我们可以把它在$\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$上的简图向左、右连续地平移，就可以得到这个函数的简图（图略）．

在图 1-28 中，我们还分别画出了函数 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$，$y=3\sin 2x$的图象，把它们与函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象比较，就可以看到这些图象之间的关系：

先把 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，得到 $y=\sin 2x$ 的图象，再把 $y=\sin 2x$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 3 倍(横坐标不变)，就得到 $y=3\sin 2x$ 的图象，最后把得到的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，我们就可以得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象．

思考与讨论

想一想，如何按照下列指定的顺序，将一个函数的图象变为下一个函数的图象：

$$y=\sin x \to y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \to y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \to y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

例 10 图 1-29 是一个按照正弦规律变化的交流电的图象．根据图象求出它的周期、频率和电流的最大值，并写出图象的函数解析式．

解：由图象看出，这个交流电的周期 $T=0.2$ s，由频率 f 与周期 T 的关系式，得频

率 $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.2}=5$ Hz，电流的最大值为 10 A.

由图可知，这个曲线的函数解析式是正弦型函数

$$i=A\sin(\omega t+\varphi),$$

其中 $A=10$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0.2}=10\pi$，再把点(0，10)的坐标代入函数式

$$i=10\sin(10\pi t+\varphi),$$

得 $\sin\varphi=1$，取 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，于是得到曲线的函数解析式为

$$i=10\sin\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right),\ t\in[0,+\infty).$$

根据诱导公式，函数式可化为

$$i=10\cos 10\pi t,\ t\in[0,+\infty).$$

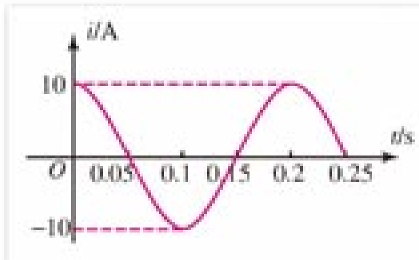


图 1-29

练习A

1. 用“五点法”作下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

(1) $y=2\sin\frac{1}{3}x$；　　(2) $y=4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$；

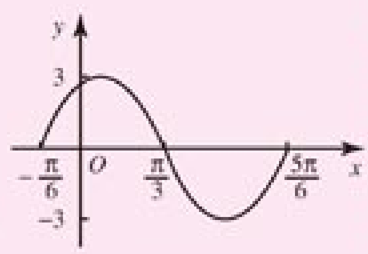
(3) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$；　　(4) $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. 说明由函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换就能得到下列函数的图象：

(1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$；

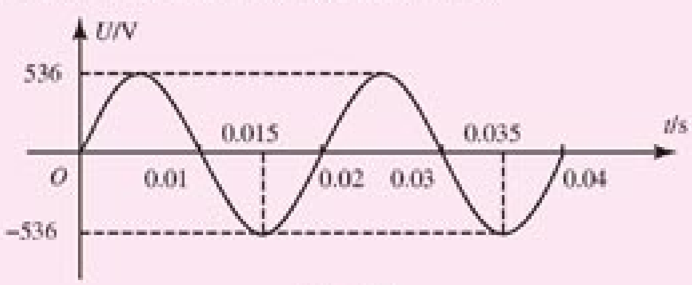
(3) $y=5\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$；　　(4) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

3. 右图是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ （其中 $A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的图象中的一段，试确定这个函数的解析式.



（第 3 题）

4. 一台发电机产生的交流电的电压 U 和时间 t 之间关系的图象如图所示. 由图象说出它的周期、频率和电压的最大值，并求出电压 U 和时间 t 之间的函数解析式.



（第 4 题）

练习B

1. 已知函数 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$ ($x\in\mathbf{R}$) 的图象为 C:

(1) 为了得到函数 $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$ ($x\in\mathbf{R}$) 的图象，只需把 C 上所有的点( );

(A) 向左平行移动$\frac{\pi}{5}$个单位　　(B) 向右平行移动$\frac{\pi}{5}$个单位

(C) 向左平行移动$\frac{2\pi}{5}$个单位　　(D) 向右平行移动$\frac{2\pi}{5}$个单位

(2) 为了得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ ($x\in\mathbf{R}$)的图象，只需把 C 上所有的点( ).

(A) 横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变

(B) 横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变

(C) 纵坐标伸长到原来的 2 倍，横坐标不变

(D) 纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，横坐标不变

2. 求使下列函数取得最大值、最小值的自变量 x 的集合，并写出最大值，最小值:

(1) $y=1-\frac{1}{2}\sin x$;　　(2) $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 把函数 $y=\sin 3x$ 的图象进行怎样的变换，就能得到下列函数的图象:

(1) $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$;　　(2) $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-2$;

(3) $y=-\sin x$;　　(4) $y=-\sin 3x$.

4. 如图，弹簧挂着的小球上下振动，时间 t(s)与小球相对于平衡位置(即静止时的位置)的高度 h(cm)之间的函数关系式是

$$h=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ t\in[0,+\infty).$$

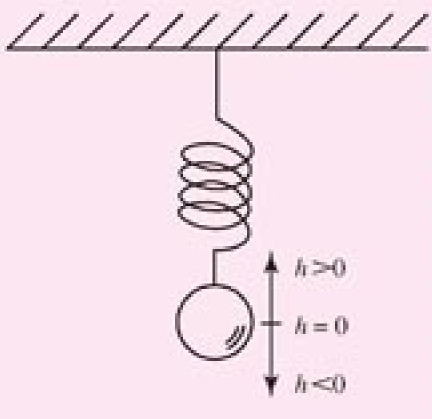
画出这个函数在长度为一个周期的闭区间上的简图，并回答下列问题:

(1) 小球开始振动(即 $t=0$)时的位置在哪里?

(2) 小球最高、最低点与平衡位置的距离分别是多少?

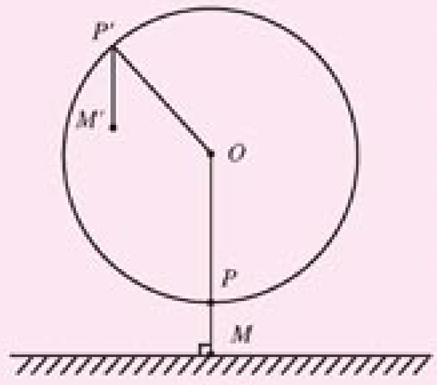
(3) 经过多少时间小球往复振动一次?

(4) 小球每 1 s 能往复振动多少次?



(第 4 题)

5. 图为大观览车主架示意图. 点 O 为轮轴中心，距地面高为 32 m（即 $OM=32$ m）. 巨轮半径为 30 m，点 P 为吊舱与轮的连接点，吊舱高 2 m（即 $PM=2$ m），巨轮每分钟转动 30°. 某游人从 M 点进入吊舱后，巨轮开始转动，求转动到 4 分钟时，该游人所乘吊舱的底部（即 M' 点）距地面的高度是多少？



（第 5 题）

计算机上的练习

按照下列各组数据，在同一坐标系中分别作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象：

(1) $A=1$，$\omega=1$，$\varphi=1$；　　(2) $A=2$，$\omega=1$，$\varphi=1$；

(3) $A=1$，$\omega=1$，$\varphi=2$；　　(4) $A=1$，$\omega=2$，$\varphi=1$.

观察图象，理解 A，ω，φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象变化的影响.

1.3.2 余弦函数、正切函数的图象与性质

1. 余弦函数的图象与性质

我们知道

$$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),\ x\in\mathbf{R},$$

由此可知，余弦函数 $y=\cos x$ 图象与正弦函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象相同.

于是把正弦曲线向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位就可以得到余弦函数的图象（图 1-30）. 余弦函数 $y=\cos x$ 的图象叫做**余弦曲线**.

由图 1-30 可以看出，余弦曲线上有五个点起关键作用，这五个点是

$$(0,\ 1),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 0\right),\ (\pi,\ -1),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right),\ (2\pi,\ 1).$$

我们可以利用这五个点画出余弦函数的简图.

由余弦函数的图象或单位圆中的余弦线，可以得到余弦函数一些重要性质：

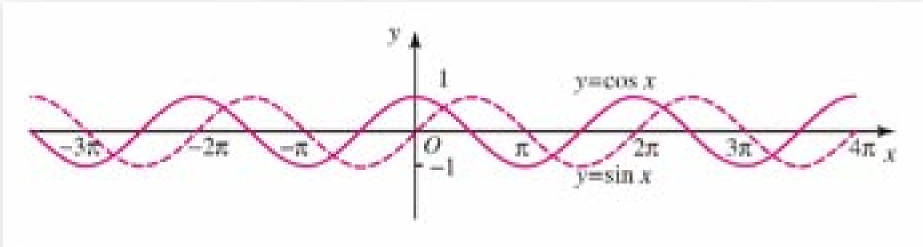


图 1-30

(1) 定义域：余弦函数的定义域是实数集 **R**.

(2) 值域：$[-1, 1]$，即 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$.

当且仅当自变量 $x=2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$时，余弦函数 $y=\cos x$ 取得最大值 1；当且仅当 $x=2k\pi+\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$时，余弦函数取得最小值 -1.

(3) 周期：2π.

(4) 奇偶性：由诱导公式

$$\cos(-x)=\cos x$$

可知，余弦函数是偶函数，它的图象关于 y 轴对称.

(5) 单调性：由单位圆中的余弦线和余弦曲线都可以看出，当 x 由 0 增大到 π 时，余弦函数的值由 1 逐渐减小到 -1；当 x 由 π 增大到 2π 时，余弦函数的值由 -1 逐渐增大到 1.

由函数的周期性可知：

余弦函数在每一个闭区间$[2k\pi, (2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$上都是减函数，它的值由 1 减小到 -1；在每一个闭区间$[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$上都是增函数，它的值由 -1 增大到 1.

以上这两类闭区间中的每一个区间都是余弦函数的单调区间.

例 1 求下列函数的最大值或最小值：

(1) $y=-3\cos x+1$； (2) $y=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-3$.

解：(1) 当 $\cos x$ 取最大值 1 时，$y=-3\cos x+1$ 取最小值 -2；当 $\cos x$ 取最小值 -1时，$y=-3\cos x+1$ 取最大值 4.

(2) 当 $\cos x=\frac{1}{2}$时，$y=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-3$ 取得最小值 -3；当 $\cos x=-1$ 时，$y=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-3$ 取得最大值 $-\frac{3}{4}$.

例 2 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\cos x+2$； (2) $y=\sin x\cos x$.

解：(1) 把函数 $y=\cos x+2$ 记为

$$f(x)=\cos x+2.$$

因为 $f(-x)=\cos(-x)+2=\cos x+2=f(x)$，对于 $x\in\mathbf{R}$ 该等式都成立，所以函数 $y=\cos x+2$ 是偶函数.

（2）把函数 $y=\sin x\cos x$ 记为

$$f(x)=\sin x\cos x.$$

因为 $f(-x)=\sin(-x)\cos(-x)=-\sin x\cos x=-f(x)$，对于 $x\in\mathbf{R}$ 这个等式都成立，所以函数 $y=\sin x\cos x$ 是奇函数.

例 3 求函数 $y=2\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的周期.

解：因为

$$\begin{aligned} y&=2\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\\ &=2\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

所以这个函数的周期为 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$.

一般地，函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R})$（其中 A，ω，φ 为常数，且 $A\neq0$，$\omega>0$）的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. 今后，可以使用这个公式直接求这类函数的周期.

练习A

1. 观察余弦曲线，写出满足下列条件的 x 值的区间：

（1）$\cos x>0$；　　（2）$\cos x<0$.

2. 下列等式能否成立？

（1）$2\cos x=3$；　　（2）$\cos^2 x=0.8$.

3. 画出函数 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的简图.

4. 求函数 $y=2-\cos\frac{x}{3}$ 的最大值和最小值，并分别写出使这个函数取得最大值和最小值的 x 的集合.

5. 求下列函数的周期：

（1）$y=\cos\frac{x}{3}$；　　（2）$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

练习B

1. 观察函数 $y=\cos x$ 的图象，回答下列问题：

(1) 当 x 由 $-\pi$ 变到 $-\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x$ 的值是增加还是减少？是正还是负？

(2) 当 x 是什么值时，$\cos x$ 的值为零？

(3) 当 x 是什么值时，$\cos x$ 取得最大值？取得最小值？

2. 求函数 $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调区间.

3. 利用函数的性质比较下列各组中两个三角函数值的大小，再用计算器求值验证：

(1) $\cos\frac{15\pi}{8}$ 与 $\cos\frac{14\pi}{9}$；　　(2) $\cos 515°$ 与 $\cos 530°$.

4. 下列各题中，每两个函数的图象有什么关系？

(1) $y=\frac{1}{3}\cos x$ 与 $y=\cos x$；　　(2) $y=\cos\frac{3}{5}x$ 与 $y=\cos x$；

(3) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 与 $y=\cos x$；　　(4) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y=\cos 2x$.

5. 函数 $y=\cos x$ 的图象经过怎样的变换能变成函数 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象？

2. 正切函数的图象与性质

由诱导公式

$$\tan(x+\pi)=\tan x,\ x\in\mathbf{R},\ 且\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z},$$

知道正切函数是周期函数，并且 π 是它的一个周期，又可以证明 π 是它的最小正周期.

用单位圆上的正切线可作正切函数 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的图象(图 1-31).

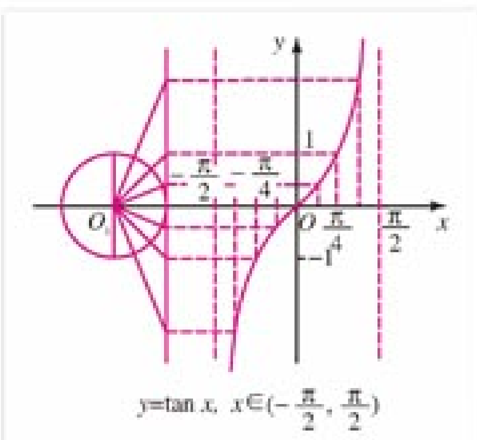


图 1-31

根据正切函数的周期性，我们可以把图象向左、向右连续平移，得出 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 的图象——**正切曲线**(图 1-32)，可以看出，正切曲线是由通过点$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ 0\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）且与 y 轴相互平行的直线隔开的无穷多支曲线所组成.

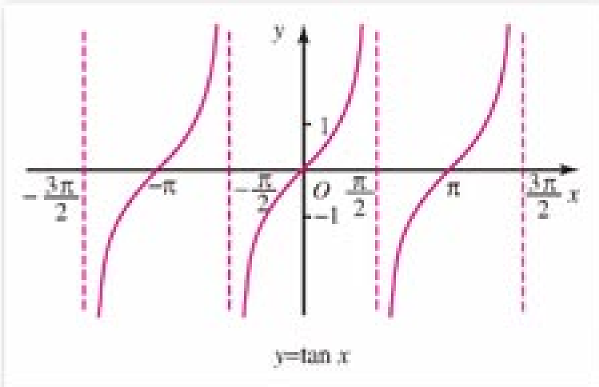


图 1-32

正切函数 $y=\tan x$ 有以下主要性质：

(1) **定义域**：

$$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

(2) **值域**：

从图 1-32 或正切线可以看出，在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内，当 x 小于$\frac{\pi}{2}$，并且无限接近$\frac{\pi}{2}$时，$\tan x$ 可无限地增大，且它的值可比指定的任何正数都大. 我们把这种情况，记作

$$\tan x\to+\infty.$$

读作"$\tan x$ 趋向于正无穷大"；当 x 大于$-\frac{\pi}{2}$，并且无限接近$-\frac{\pi}{2}$时，$\tan x$可无限地减小，且它的绝对值可比指定的任何正数都大，我们把这种情况，记作

$$\tan x\to-\infty.$$

读作"$\tan x$ 趋向于负无穷大". 这就是说，$\tan x$ 可以取任意实数值，没有最大值，也没有最小值.

因此，函数 $y=\tan x$ 的值域是实数集 $\mathbf{R}$.

(3) **周期性**：周期是 π.

(4) **奇偶性**：由 $\tan(-x)=-\tan x$，知正切函数是奇函数，它的图象关于原点成中心对称.

(5) **单调性**：正切函数在每一个开区间

$$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbf{Z}$$

内都是增函数.

思考与讨论

正切函数在整个定义域内都是增函数吗？

例 4 求函数 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域.

解：设 $t=x-\frac{\pi}{3}$，则函数 $y=\tan t$ 的定义域是

$$\left\{t \middle| t\in \mathbf{R}\text{ 且 } t\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in \mathbf{Z}\right\}.$$

由 $x-\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，得

$$x\neq k\pi+\frac{5\pi}{6}.$$

因此，函数 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域是

$$\left\{x \middle| x\in \mathbf{R}\text{ 且 } x\neq k\pi+\frac{5\pi}{6},\ k\in \mathbf{Z}\right\}.$$

例 5 求函数 $y=\tan 3x$ 的周期.

解：因为 $\tan(3x+\pi)=\tan 3x$，即

$$\tan 3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan 3x,$$

这说明自变量 x 至少要增加 $\frac{\pi}{3}$，函数的值才能重复取得，所以，函数 $y=\tan 3x$ 的周期为 $\frac{\pi}{3}$.

练习A

1. 观察正切曲线，写出满足下列条件的 x 值的范围：

   （1）$\tan x>0$；　（2）$\tan x=0$；　（3）$\tan x<0$.

2. 求函数 $y=\tan 3x$ 的定义域.

3. 求下列函数的周期：

   （1）$y=5\tan\frac{x}{2}$　$(x\neq(2k+1)\pi,\ k\in \mathbf{Z})$；

   （2）$y=\tan \omega x$　$\left(\omega>0,\ x\neq\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega},\ k\in \mathbf{Z}\right)$.

4. 不通过求值，比较下列各组中两个正切函数值的大小：

(1) $\tan 138°$与 $\tan 143°$；

(2) $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$与 $\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$.

5. 作下列函数的图象：

(1) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$； (2) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

练习B

1. 求函数 $y=-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$ 的定义域.

2. 下列函数是否具有奇偶性？为什么？

(1) $y=-\tan x$，$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$；

(2) $y=-|\tan x|$，$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

3. 根据正切函数的图象，写出使下列不等式成立的 x 值的集合：

(1) $1+\tan x\geqslant 0$； (2) $\tan x-\sqrt{3}\geqslant 0$.

4. 不通过求值，比较下列各组中两个正切函数值的大小：

(1) $\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)$与 $\tan\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$；

(2) $\tan 1\,519°$与 $\tan 1\,493°$.

5. 求函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 的周期.

6. 求函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{3\pi}{10}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 的单调区间.

1.3.3 已知三角函数值求角

我们已经知道，任意给定一个角，只要这个角的三角函数值存在，就可以求出这个三角函数值；反过来，已知一个三角函数值，也可以求出与它对应的角.

1. 已知正弦值，求角

例 1 (1) 已知 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，求 x；

(2) 已知 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $x\in[0,\ 2\pi]$，求 x 的取值集合；

(3) 已知 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $x\in\mathbf{R}$，求 x 的取值集合.

解：由 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 知 x 的正弦值是个正值，所以 x 是第一象限或第二象限的角，如图 1-33，由

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

可知：

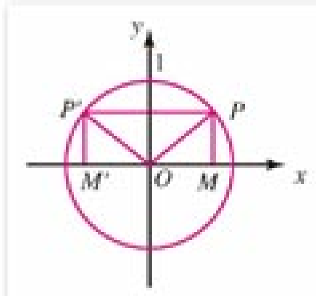


图 1-33

(1) 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上，$x=\frac{\pi}{4}$；

(2) 在 $[0,\ 2\pi]$ 上，$x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=\frac{3\pi}{4}$；

(3) 在 $\mathbf{R}$ 上符合条件的角是所有与 $\frac{\pi}{4}$ 终边相同的角和所有与 $\frac{3\pi}{4}$ 终边相同的角. 因此 x 的取值集合为

$$\left\{x\left|x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\ (k\in\mathbf{Z})\right.\right\}\cup\left\{x\left|x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ (k\in\mathbf{Z})\right.\right\}.$$

由例 1 可知，在函数 $y=\sin x$ 的非单调区间上，对于已知的一个正弦值，有多个角和它对应，如在 $[0,\ 2\pi]$ 上有两个角 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{3\pi}{4}$ 的正弦值都为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，在 $\mathbf{R}$ 上有无穷多个角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 但是，在 $y=\sin x$ 的单调区间上，只有一个角和已知正弦值对应，比如在单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上，只有 $\frac{\pi}{4}$ 的正弦值等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

一般地，对于正弦函数 $y=\sin x$，如果已知函数值 y ($y\in[-1,\ 1]$)，那么在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上有唯一的 x 值和它对应. 记为

$$x=\arcsin y^{❶}\quad \left(\text{其中}-1\leqslant y\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

即 $\arcsin y$ ($|y|\leqslant 1$) 表示 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上正弦等于 y 的那个角. 例如：

如果 $\sin x=\frac{1}{2}$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，则 $x=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$；

注

❶本书只要求同学们会用 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ 这三个符号表示角，对于这三个符号的其他知识不作全面探讨.

如果 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，则 $x=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$；

如果 $\sin x=0$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，则 $x=\arcsin 0=0$；

如果 $\sin x=0.345\ 8$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，在不要求求出具体的 x 值时，其中的 x 可记作 $\arcsin 0.345\ 8$，即

$$x=\arcsin 0.345\ 8.$$

2. 已知余弦值和正切值，求角

下面举例说明，如何用符号，由一个角的余弦值或正切值来表示这个角.

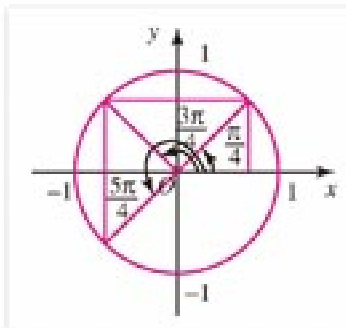


图 1-34

例 2 已知 $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $x\in[0,\ 2\pi)$，求 x 的取值集合.

解：因为余弦函数值是负值，所以 x 是第二或第三象限的角(图 1-34). 由

$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

可知，所求符合条件的第二象限的角 $x=\frac{3\pi}{4}$. 又由

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

可知，在区间 $[0,\ 2\pi)$ 内符合条件的第三象限的角

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}.$$

因此，所求角 x 的取值集合为 $\left\{\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right\}$.

由例 2 可以看到，函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\ 2\pi)$ 上，对 $y\in(-1,\ 1)$ 的任意一个值，有两个角 x 与之对应. 如果考察自变量 x 在整个定义域 $(-\infty,\ \infty)$ 上取值，那么对区间 $[-1,\ 1]$ 上的任意一个值 y，有无穷多个 x 值与之对应，如果我们限定 x 在区间 $[0,\ \pi]$ 内取值，那么对区间 $[-1,\ 1]$ 上的任意一个值 y，x 只有唯一值与之对应.

在区间 $[0,\ \pi]$ 上符合条件 $\cos x=y$（$-1\leqslant y\leqslant 1$）的角 x，记为

$$x=\arccos y.$$

例如，

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3},\quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

使用以上记号，例 2 方程的解集可以写成

$$\left\{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ 2\pi-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

例 3 已知 $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，求 x 的值.

解：因为正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上是增函数，所以正切值等于$-\frac{\sqrt{3}}{3}$的角 x 有且只有一个. 由

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

可知所求的角 $x=-\frac{\pi}{6}$（图 1-35）.

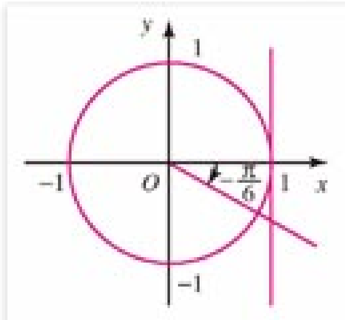


图 1-35

一般地，如果 $\tan x=y$（$y\in\mathbf{R}$），且 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，那么对每一个正切值 y，在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内，有且只有一个角 x，使 $\tan x=y$.

符合上述条件的角 x，记为

$$x=\arctan y,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

例如，

$$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6},\ \arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},\ \arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

练习A

1. 求适合下列条件的 x（其中 $x\in[0,\ 2\pi)$）：

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $\sin x=\frac{1}{2}$；

(3) $\sin x=-\frac{1}{2}$；　　(4) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 求适合下列条件的角 α（其中 $\alpha\in[0,\ 2\pi)$）（利用计算器）：

(1) $\sin\alpha=0.5736$；　　(2) $\sin\alpha=0.4226$；

(3) $\sin\alpha=0.9063$；　　(4) $\sin\alpha=-0.7181$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　(2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$；

(3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；　　(4) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 求下列各式中的 x $(-\pi\leqslant x<\pi)$：

(1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　(2) $\cos x=\frac{1}{2}$；

(3) $\tan x=3.415$；　　(4) $\tan x=1$.

5. 求下列各式的值：

(1) $\arcsin 1$；　　(2) $\arccos 1$；

(3) $\arcsin 0$；　　(4) $\arccos 0$；

(5) $\arctan 3.732$；　　(6) $\arctan(-5.671)$.

练习B

1. 求下列各式中的 x $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$：

(1) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　(2) $\cos x=-\frac{1}{2}$；

(3) $\tan x=-3.415$（精确到 0.01）；　　(4) $\tan x=-1$.

2. 用符号表示下列各式中的 x 的集合：

(1) $\sin x=0.346\,9$，$x\in[0, 2\pi)$；

(2) $\cos x=-0.857\,2$，$x\in[0, 2\pi)$；

(3) $\tan x=0.8$，$x\in[0, 2\pi)$.

3. 已知角 A 是 $\triangle ABC$ 的内角，分别求适合下列条件的角 A 的值：

(1) $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $\tan A=-\sqrt{3}$；　　(4) $\cot A=\sqrt{3}$.

习题1-3 A

1. 画出下列函数的简图：

(1) $y=1-\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$；

(2) $y=2\cos x+1$，$x\in[0, 2\pi]$；

(3) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，$x\in\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1+\sin x}$；　　(2) $y=\frac{1}{1-\cos x}$；　　(3) $y=\sqrt{\tan x}$.

3. 求下列函数的最大值和最小值，并求使函数取得这些值的 x 的集合：

（1）$y=-3\cos x$；（2）$y=\frac{1}{2}\sin x-1$；

（3）$y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$；（4）$y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3$.

4. 求下列函数的周期：

（1）$y=\sin\frac{3}{4}x$；（2）$y=\tan\frac{2x}{3}$；

（3）$y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$；（4）$y=3\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\pi\right)$.

5. 求下列函数的单调递增区间：

（1）$y=-\sin 2x$；（2）$y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$；

（3）$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$；（4）$y=\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$.

6. 判断下列函数中，哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数也不是偶函数？

（1）$y=-\sin 2x$；（2）$y=|\sin x|$；

（3）$y=3\cos x+1$；（4）$y=\tan x-1$.

7. 写出下列函数的振幅、周期和初相：

（1）$y=4\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)$；（2）$y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{7}\right)$.

8. 选择题：

（1）为了得到函数 $y=\cos\left(x+\frac{1}{3}\right)$（$x\in\mathbf{R}$）的图象，只需把余弦曲线上所有的点（　　）.

（A）向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度　（B）向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

（C）向左平移$\frac{1}{3}$个单位长度　（D）向右平移$\frac{1}{3}$个单位长度

（2）为了得到函数 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象，只需把函数 $y=\sin 3x$ 的图象上所有的点（　　）.

（A）向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度　（B）向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

（C）向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度　（D）向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

（3）函数 $y=4\sin x$，$x\in[-\pi,\pi]$ 的单调性是（　　）.

（A）在$[-\pi, 0]$上是增函数，在$[0, \pi]$上是减函数

（B）在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，在$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$上都是减函数

（C）在$[0, \pi]$上是增函数，在$[-\pi, 0]$上是减函数

(D) 在$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上是减函数

(4) 函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x \in \mathbf{R}$（　　）.

(A) 是奇函数　　(B) 是偶函数

(C) 既不是奇函数也不是偶函数　　(D) 既是奇函数又是偶函数

9. 求下列各式的值：

(1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；　　(2) $\arctan(-1)$；　　(3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

10. 用符号表示下列各式中的 x：

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{5}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\sin x=-\frac{1}{4}$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $\cos x=\frac{1}{3}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(4) $\cos x=\frac{3}{7}$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)$.

习题 1-3 B

1. 作出函数 $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$在一个周期内的图象.

2. 把函数 $y=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度，求所得图象的函数解析式.

3. 把函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象进行怎样的平移，就能得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-2$ 的图象？

4. 把函数 $y=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象进行怎样的变换，就能得到函数 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象？

5. 求下列函数的值域：

(1) $y=\sin x$，$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$；

(2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

6. 求下列函数的最大值和最小值，以及使函数取得这些值的自变量 x 的值：

(1) $y=\frac{1}{1+\cos^2 x}$；　　(2) $y=\frac{1}{5\sin^2 x+1}$；

(3) $y=2-(\sin x+1)^2$.

7. 作出函数 $y=|\sin x|$ 的图象，观察图象说出它的周期，并用周期函数的定义加以证明.

8. 选择题：

下列四个函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 上为减函数的是（　　）.

(A) $y=\cos x$　　(B) $y=2|\sin x|$　　(C) $y=\cos\frac{x}{2}$　　(D) $y=\tan x$

9. 电流 I 随时间 t 变化的关系式是

$$I=5\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right),\ t\in[0,\ +\infty);$$

(1) 求电流 I 变化的周期、频率、振幅及其初相；

(2) 当 $t=0$，$\frac{1}{600}$，$\frac{1}{150}$，$\frac{7}{600}$，$\frac{1}{60}$（单位：s）时，求电流 I.

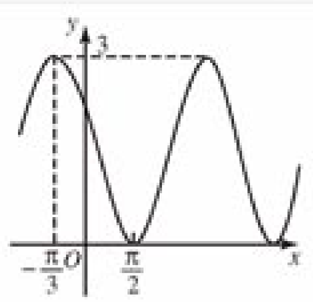
10. 一根长为 l cm 的线，一端固定，另一端悬挂一个小球，小球摆动时，离开平衡位置的位移 s(单位：cm)与时间 t(单位：s)的函数关系是

$$s=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{3}\right),\ t\in[0,\ +\infty);$$

(1) 求小球摆动的周期；

(2) 已知 $g\approx 980\ \text{cm/s}^2$，要使小球摆动的周期是 1 s，线的长度 l 应当是多少(精确到 0.1 cm，π 取 3.14)?

11. 某正弦型函数的图象如图所示，求与它对应的一个函数解析式.



(第 11 题)

12. 求下列各式的值：

(1) $\arctan\sqrt{3}$；　　(2) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$；

(3) $\arcsin(-1)$；　　(4) $\arccos(-1)$.

13. 求下列各式的值(用弧度表示)(利用计算器)：

(1) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$；　　(2) $\arcsin\frac{\pi}{6}$.

14. 求下列各式中的 x：

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{5}\ \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$；

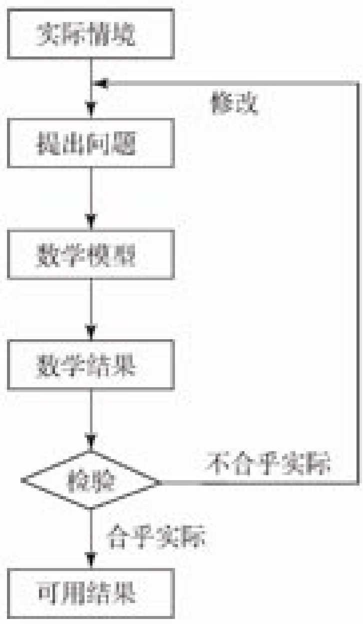
(2) $\sin x=-\frac{1}{4}\ \left(\pi<x<\frac{3\pi}{2}\right)$.

数学建模活动

数学建模是数学学习的一种新的方式，它为我们提供了自主学习的空间，把学到的知识应用于实践，使我们体验到数学在解决实际问题中的价值和作用，体验数学与日常生活和其他学科的联系，逐步提高创新意识和实践能力.

本章以大观览车作为导例，引入了正角、负角、一般角的概念，引入了单位圆中的三角函数线的概念，引入了正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$. 在练习题中提出了如何计算观览车吊舱离地面高度问题，以及如何用函数解析式来描述观览车轮上一点运动规律的问题，把观览车问题变成了一个数学问题. 这就是说，我们经历了一个数学建模的过程.

一般来说，数学建模过程可以用下面的框图表示：



下面的数学建模问题. 请同学们在老师指导下自己完成.

海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮. 一般早潮叫潮，晚潮叫汐. 在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近船坞；卸货后落潮时返回海洋. 下面是某港口在某季节每天的时间与水深关系表：

时刻	0:00	3:00	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00	21:00	24:00
水深/米	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0

(1) 选用一个三角函数来近似地描述这个港口的水深与时间的函数关系，给出整点时的水深的近似数值；

（2）一条货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 4 米，安全条例规定至少要有 1.5 米的安全间隙（船底与海底的距离），该船何时能进入港口？在港口能呆多久？

（3）某船的吃水深度为 4 米，安全间隙为 1.5 米，该船在 2:00 开始卸货，吃水深度以每小时 0.3 米的速度减小，那么该船在什么时间必须停止卸货，将船驶向较深的水域？

提示和要求：

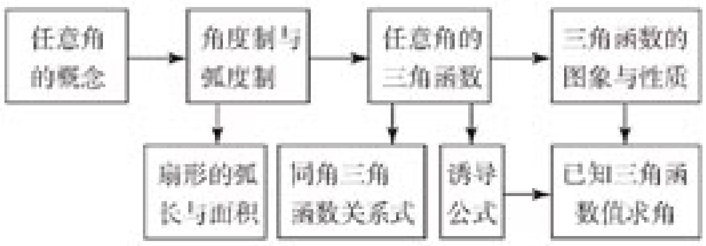
1. 提示：建立适当坐标系，把本题所给的每一对数据作为一个点的坐标，在坐标系中描出这些点，并用光滑曲线把这些点依次连接起来，观察所画曲线，选用适当函数解析式，设法求出解析式中各参数，并将各对已知数据代入你求得的解析式进行检验，如果等式不成立，则需修改解析式，如果等式成立，则该函数解析式就是本题的数学模型．你就可以利用这个数学模型解决本题的其他问题．

2. 要求：根据题目的要求写出数学建模报告．要求过程简明，理由充分，结论明确．

如果有条件，同学们可以深入实际，发现问题，提出问题，独立思考，分工合作，交流讨论，寻求帮助，探求合理的解决方案，写出数学建模小论文．

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 本章把角的概念在原有基础上进行了推广，这个推广主要体现在哪些方面？把角的概念推广以后，建立了象限角和终边相同的角这两个概念，它们之间有什么联系？
2. 弧度制是以什么原理为基础而建立的？建立弧度制以后，带来了哪些方便？角度制与弧度制换算的关键是什么？
3. 任意角三角函数的概念是由锐角三角函数概念推广而来的，这两个概念有什么区别？有什么联系？请你用最简单的文字来说明三角函数的本质.
4. 三角函数分别是两个数的比值，为什么能用单位圆中的有向线段来表示这些比值？
5. 同角三角函数之间有哪些关系式？这些关系式是怎么来的？怎样用含有一个三角函数的式子来表示同角的其他各三角函数？
6. 诱导公式包括哪些公式？推导这些公式，分别依据什么原理？请你总结求任意角三角函数值的一般步骤.
7. 请将正弦函数、余弦函数、正切函数的主要性质和图象填入下表：

函数	正弦函数	余弦函数	正切函数
定义域			
值域			
周期性			
奇偶性			
单调性			
图象			

8. 三角函数的定义域和值域具有怎样的对应关系？arcsin y，arccos y，arctan y 分别表示什么范围内的角？其中的 y 分别有什么取值的限制？

Ⅲ 巩固与提高

1. 若角 α 的终边落在直线 $y=-3x$ 上，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.
2. 求函数 $y=\sqrt{\cos(\sin x)}$的定义域.
3. 求函数 $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}+\dfrac{|\cos x|}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}+\dfrac{|\cot x|}{\cot x}$的值域.
4. 确定下列三角函数值的符号：

   (1) $\sin 4$；　(2) $\cos 5$；　(3) $\tan 8$；　(4) $\tan(-3)$.
5. 已知 $\sin x=2\cos x$，求角 x 的六个三角函数值.
6. 观察正弦曲线，写出 $\mathbf{R}$ 内使 $\sin x\geqslant\dfrac{1}{2}$成立的 x 的取值范围.
7. 化简 $\sqrt{1+2\sin(\pi-2)\cdot\cos(\pi-2)}$.

8. 已知 $\tan\alpha=3$，分别求下列各式的值：

（1）$\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$；　　（2）$\sin\alpha\cos\alpha$；

（3）$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；　　（4）$2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$.

9. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{1}{2}$，分别求下列各式的值：

（1）$\cos(2\pi-\alpha)$；　　（2）$\tan(\alpha-7\pi)$.

10. 计算：

（1）$\cos\dfrac{25\pi}{6}+\cos\dfrac{25\pi}{3}+\tan\left(-\dfrac{25\pi}{4}\right)$；

（2）$\sin 2+\cos 3+\tan 4$（可用计算器）.

11. 设 $\pi<x<2\pi$，填表：

x	$\frac{7\pi}{6}$				$\frac{7\pi}{4}$	
$\sin x$				$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		
$\cos x$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$			1			

12. 证明下列恒等式：

（1）$\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$；

（2）$\cos^2\alpha(2+\tan\alpha)(1+2\tan\alpha)=2+5\sin\alpha\cos\alpha$；

（3）$\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$；

（4）$\dfrac{\tan A-\tan B}{\cot B-\cot A}=\dfrac{\tan B}{\cot A}$.

13. 用计算器求下列三角函数值：

（1）$\sin 378^\circ21'$，$\cos 742^\circ30'$，$\tan 1\,111^\circ$；

（2）$\sin(-879^\circ)$，$\tan\left(-\dfrac{33\pi}{8}\right)$，$\cos\left(-\dfrac{13\pi}{10}\right)$；

（3）$\sin 3$，$\cos(\sin 2)$.

14. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=x^2+\cos x$，$x\in\mathbf{R}$；

（2）$y=|2\sin x|$，$x\in\mathbf{R}$；

（3）$y=\tan x^2$，$x\neq\pm\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}$（$k\in\mathbf{N}$）；

（4）$y=x^2\sin x$，$x\in\mathbf{R}$.

15. 用五点法画出下列函数在一个周期的闭区间上的简图：

（1）$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$；（2）$y=2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

16. 写出函数 $y=2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$的振幅、周期、初相，并说明如何由正弦曲线得出它的图象，求出它的最大值以及取最大值时的 x 值.

17. 将函数$y=\sin 2x$的图象经过怎样的变换，就能得到函数$y=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$的图象？

18. 求使下列函数为减函数的区间：

（1）$y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$；

（2）$y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

19. 求适合下列关系式的 x 的集合：

（1）$1+\sqrt{3}\tan x=0$，$x\in\mathbf{R}$；

（2）$3\tan x-1=0$，$x\in\mathbf{R}$（精确到 0.01）；

（3）$\cos(\pi-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in\mathbf{R}$；

（4）$2\sin^2 x=1$，$x\in\mathbf{R}$.

20. 根据下列条件，求$\triangle ABC$ 的内角 A：

（1）$\sin A=\frac{1}{2}$；（2）$\tan A=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21. 利用单位圆中的正弦线、余弦线或三角函数图象解下列各题：

（1）求适合不等式 $2\cos x+1\leqslant 0$ 的 x 的集合；

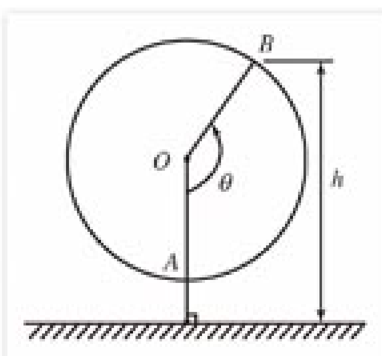
（2）求函数 $y=\sqrt{1-2\sin x}$的定义域.

22. 余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数，它的图象关于 y 轴对称，也就是说，y 轴是余弦曲线的对称轴. 除了 y 轴以外，余弦曲线还有其他的对称轴吗？如果有，那么对称轴的方程是什么？能不能说余弦曲线是中心对称图形？如果能，那么对称中心的坐标是什么？又函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象是不是轴对称图形？如果是，那么对称轴方程是什么？

23. 如图为一个观览车示意图. 该观览车圆半径为4.8 m，圆上最低点与地面距离为 0.8 m，60 秒转动一圈. 图中 OA 与地面垂直. 以 OA 为始边，逆时针转动 θ 角到 OB. 设 B 点与地面距离为 h：

（1）求 h 与 θ 的函数解析式；

（2）设从 OA 开始转动，经过 t 秒到达 OB，求 h 与 t 的函数解析式；



（第 23 题）

（3）填写下列表格：

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
h/m							

t/s	0	5	10	15	20	25	30
h/m							

Ⅳ 自测与评估

1. 写出集合

$$A=\left\{x\left|x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right.\right\}\text{与}B=\left\{x\left|x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$$

的关系.

2. 一个扇形的弧长与面积的数值都是5，求这个扇形中心角的度数.

3. 已知α为第二象限的角，化简：

$$\cos\alpha\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

4. 求证：

$$\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

5. 求使函数$y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbf{R}$为减函数的区间.

6. 求函数$y=2+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$的周期和最大值，以及使函数取得最大值的$x$的集合.

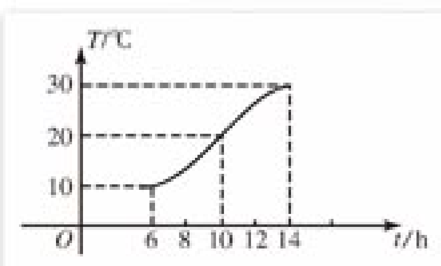
7. 如图所示，某地一天从6时至14时的温度变化曲线近似满足函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b,$$

其中$A>0$，且函数在6时与14时分别取得最小值(最低温度)和最大值(最高温度)：

（1）求这段时间的最大温差；

（2）写出这段曲线的函数解析式.



（第7题）

8. 已知函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$：

(1) 用五点法作该函数在长度为一个周期上的简图；

(2) 说明由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过怎样的变换，可以得到该函数的图象.

计算机上的练习

在计算机上作[巩固与提高]第 14 题中各函数的图象，并分析各函数中系数对其图象的影响.

数 学 文 化

阅读与欣赏

三角学的发展

航海、历法推算以及天文观测的需要，推动了三角学的发展．早期三角学总是与天文学密不可分，这样在1450年以前，三角学主要是球面三角，后来由于间接测量、测绘工作的需要而出现了平面三角．

15、16世纪德国人开始对三角学作出新的推进，他们从意大利获得了阿拉伯天文学著作中的三角学知识．游学意大利、后来定居维也纳的波伊尔巴赫(G. Peurbach，1423—1461)曾经把托勒密的《天文大成》译成拉丁文，并且编制了十分精确的正弦表．

在欧洲，第一部脱离天文学的三角学专著是波伊尔巴赫的学生雷格蒙塔努斯(J. Regiomontanus，1436—1476)的《论各种三角形》．雷格蒙塔努斯原名叫缪勒(J. Müller)，生于德国，曾经游历于意大利，他搜集、译注了托勒密的《天文大成》，还翻译过阿波罗尼奥斯、海伦、阿基米德等希腊数学家的著作．1464年他撰写了自己的著作《论各种三角形》，该书主要从纳西尔丁的著作中吸取养分，全书分五卷，前两卷论平面三角，后三卷论球面三角，给出了球面三角的正弦定理和关于边的余弦定理．雷格蒙塔努斯在其另一部著作《方位表》中，制定了多达5位的三角函数表，除正弦和余弦表外，还有正切表．在1450年以前，希腊、阿拉伯人著作中的三角方法很不严谨，雷格蒙塔努斯首次对三角学作出完整、独立的阐述，使其开始在欧洲广泛传播．

随后，维尔纳(J. Werner，1468—1528)著《论球面三角》(1514)，改进并发展了雷格蒙塔努斯的思想．不过此时的三角学存在一个最大的困难，就是缺少一批公式，使用仅知的几个公式，计算十分困难，这主要由于雷格蒙塔努斯只采用正弦和余弦函数，而且其函数值限定为正数所致．哥白尼的学生雷提库斯(G. J. Rhaeticus，1514—1576)将传统的弧与弦的关系，改进为角的三角函数关系，并采用了六个函数(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割)，而且还编制了间隔为10″的10位和15位正弦表．


韦达

三角学的进一步发展，是法国数学家韦达所做的平面三角与球面三角系统化工作．他在《标准数学》(1579)和《斜截面》(1615)这两本书中，把解平面直角三角形和斜三角形的公式汇集在一起，其中包括他自己得到的正切公式

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}.$$

他还给出了解球面直角三角形的方法和一套公式，以及帮助记忆这些公式的今天所谓的“纳皮尔法则”．这些球面三角公式大都是托勒密建立的，但也有韦达自己提出的公式，如

$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$($A$为钝角)，

$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$，

尤为重要的是韦达将这套三角恒等式表示成了代数形式，尽管他所用的并不是现代符号．

在16世纪，三角学已从天文学中分离出来，成为一个独立的数学分支．


风向
船的行驶方向
稳向板
帆

第二章 平面向量

2.1 向量的线性运算

2.2 向量的分解与向量的坐标运算

2.3 平面向量的数量积

2.4 向量的应用

在我们学习过的量中，很多量用一个实数(加上单位)就能确切地表达．例如，“房间的面积”，“一个储藏室的容积”，“一个人的身高”，“一个人的年龄”等等．但还有些量，仅仅用一个实数还不能确切地表达它们．例如，物体的位移、物体运动的速度、作用在物体上的力等．这些量除了要知道它们的大小外，还必须知道它们的方向，才能确切地描述它们．这些量，可能要用两个、三个甚至更多的实数才能确切地表达．在数学中对这些量进行研究，已经被抽象成叫做向量的数学模型．

你参加过拔河或划船比赛吗？你在逆风中骑过自行车吗？当你迷路时，你如何走向目的地？可以说，在日常生活中，你会经常碰到“向量”，你会发现向量是很有用的知识．向量除了在日常生活中应用外，在数学的各分支，例如三角、几何等中都有着重要的应用；向量也是研究运动学、力学、电学、宇航学、经济学等许多学科不可缺少的数学工具．近代“向量”的发展正在帮助科学家去正确地解释许多物理现象．

其实物理学家，很早就在自己的研究中使用向量概念，并早已发现这些量之间可以进行某种运算．数学家在物理学家使用向量的基础上，对“向量”又进行了深入的研究，使“向量”成为研究数学和其他科学的有力工具．这一章，我们将引导同学们从实例出发，一步一步地把这些既有大小又有方向的量，初步抽象为数学中的向量概念，并探究如何用数学语言确切地去描述这些“向量”，再探究向量的性质和应用．

2.1 向量的线性运算

2.1.1 向量的概念

在引言中我们已经指出，在自然界中，很多量都是既具有大小又具有方向的量．这一章我们要对这种量即向量进行深入细致的探讨．这一章，我们学习的向量为平面向量，即涉及的向量都在一个平面内．为了减少学习难度，我们从物理学中的“位移”概念出发，一步步地学习数学中较为抽象的向量概念．

1. 位移的概念

在物理学中，研究物体在平面内的位置和运动规律时，一般忽略它的大小，把它看作一个质点，用点表示它在平面内的位置．如图 2-1 所示，一个质点从点 A 运动到点 A'，这时点 A' 相对于点 A 的位置是

“北偏东 30°，3 个单位”．

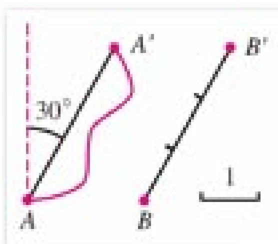


图 2-1

如果我们不考虑质点运动的路线，只考虑点 A' 相对点 A 的“方向”和“直线距离”，这时，我们就说质点在平面上作了一次位移，“直线距离”叫做位移距离．这就是说，位移被“方向”和“距离”唯一确定，位移只表示质点位置的变化，起、终点间位置关系，而与质点实际运动的路线无关．

从两个不同点出发的位移，只要方向相同，距离相等，我们都把它们看成相同的位移或相等的位移．一个质点从点 B 运动到点 B'（图 2-1），如果点 B' 相对于点 B 的位置也是“北偏东 30°，3 个单位”，这时我们说这个位移与点 A 到 A' 的位移相等．我们在上体育课时，老师下达口令“向前三步走”，全班同学都进行了同一个位移．

2. 向量的概念

在高中阶段，我们暂且把具有大小和方向的量称为**向量**．更具体些，我们先把一个向量理解为“一个位移”或表达“一点相对于另一点位置”的量．随着学习的深入，我们会不断地加深对向量概念的理解．

有些向量不仅有大小和方向，而且还有作用点．例如，力就是既有大小和方向，又有作用点的向量．有些量只有大小和方向，而无特定的位置．例如，位移、速度等．通常把后一类向量叫做**自由向量**．本章学习的主要是自由向量，以后我们说到向量，如无特别说明，指的都是自由向量．这就是说，本章所学的向量只有大小、方向两个要素．如果两个向量的大小、方向都相同，则说这两个向量相等．

现在让我们想想，如何直观地描述“向量”．

从点 A 位移到点 B，用线段 AB 的长度表示位移的距离，在点 B 处画上箭头表示位移的方向，这时我们说线段 AB 具有从 A 到 B 的方向．具有方向的线段，叫做**有向线段**．点 A 叫做有向线段的**始点**，点 B 叫做有向线段的**终点**．显然，有向线段就是向量的直观形象．有向线段的方向表示向量的方向，线段的长度表示位移的距离，位移的距离叫做向量的长度．

以 A 为始点，以 B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$（图 2-2）．应注意，始点一定要写在终点的前面．$\overrightarrow{AB}$的长度记作 $|\overrightarrow{AB}|$．

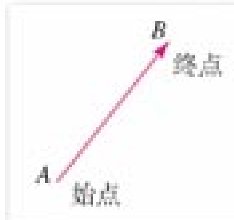


图 2-2

如果有向线段$\overrightarrow{AB}$表示一个向量，通常我们就说向量$\overrightarrow{AB}$．

向量除了用上面的符号表示外，通常在印刷时，用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$…表示向量，手写时，可写成带箭头的小写字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$…由于我们所研究的向量只含有大小和方向两个要素，用有向线段表示向量时，与它的始点的位置无关，即：

同向且等长的有向线段表示同一向量，或相等的向量．

在图 2-3 中，有向线段$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$…都表示同一向量 $\boldsymbol{a}$，这时可记作

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\cdots=\boldsymbol{a}.$$

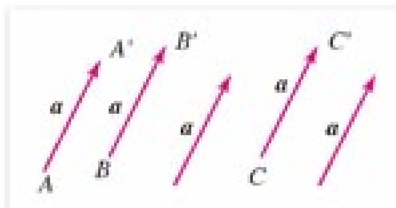


图 2-3

由以上分析，一个平面向量的直观形象是平面上“同向且等长的有向线段的集合”．

如果$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，那么$\overrightarrow{AB}$的长度表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，也叫做 $\boldsymbol{a}$ 的长(或模)，记作 $|\boldsymbol{a}|$．

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向且等长，即 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．

通过有向线段$\overrightarrow{AB}$的直线，叫做向量$\overrightarrow{AB}$的**基线**(图 2-4)．如果向量的基线互相平行或重合，则称这些**向量共线**或**平行**．这就是说，共线向量的方向相同或相反．向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$．

图 2-4

长度等于零的向量，叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$．零向量的方向不确定，在处理平行问题时，通常规定零向量与任意向量平行．

思考与讨论

在四边形 $ABDC$ 中，如果$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$(图 2-5)，那么四边形 $ABDC$ 是平行四边形吗？如果四边形$ABDC$是平行四边形，那么$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$吗？

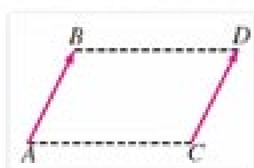


图 2-5

方向是大家非常熟知的概念，上面我们没有给它更多的描述．在一个平面内，方向"从西到东"，可以在该平面内任画一条"从左到右"的直线，再给出一个向东的指向来表示，从不同点画出具有同一方向的直线互相平行．由此可见，"方向"和"平行"有着深刻的内在联系．我们在用有向线段表示向量时，用箭头标出的方向，也就是以有向线段的始点为始点指向终点的射线方向．

例 如图 2-6 所示，设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，分别写出与 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 相等的向量．

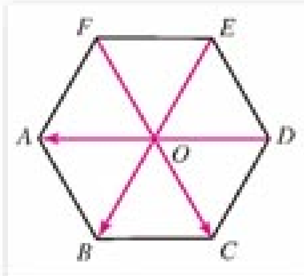


图 2-6

解：$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DO}$，

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EO}$，

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{FO}$．

3. 用向量表示点的位置

任给一定点 O 和向量 $\boldsymbol{a}$（图 2-7），过点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，则点 A 相对于点 O 的位置被向量 $\boldsymbol{a}$ 所唯一确定，这时向量 $\overrightarrow{OA}$，又常叫做点 A 相对于点 O 的**位置向量**．

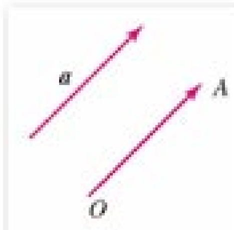


图 2-7

例如，在谈到天津相对于北京的位置时（图 2-8），我们说，"天津位于北京东偏南 50°，114 km"．如图 2-8，点 O 表示北京的位置，点 A 表示天津的位置，那么向量

$$\overrightarrow{OA}=\text{“东偏南 }50^\circ\text{，114 km”}$$

就表示了天津相对于北京的位置．

图 2-8

有了向量概念，我们就可以利用向量确定一点相对于另一点的位置．

练习A

1. 选择适当比例尺，用有向线段表示下列位移：

   （1）飞机向南飞行 50 km；

   （2）飞机向西飞行 50 km；

   （3）飞机向东北飞行 50 km．

   试问以上三个位移的长度是否相等？三个位移是否相等？

2. 如果两个向量不相等，且表示它们的有向线段的始点的位置相同，那么它们的终点的位置是否相同？如果表示相等向量的有向线段具有同一始点，那么它们的终点位置是否相同？

3. 在平面上任意确定一点O，点P在点O“东偏北60°，3 cm”处，点Q在点O“南偏西30°，3 cm”处，画出点P和点Q相对于点O的位置向量.

4. 选择适当的比例尺，用有向线段分别表示下列各向量：

(1) 在南偏西60°方向上，一个大小为50 N的拉力；

(2) 方向东南，8 km/h的风的速度；

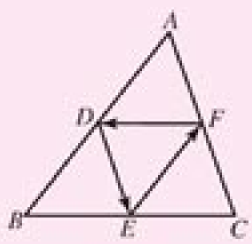
(3) 向量$\overrightarrow{OP}$：方向东南，大小为90个单位.

5. 任作一向量$\boldsymbol{a}$和$\triangle ABC$，三角形的每一个顶点位移向量$\boldsymbol{a}$分别到达A'，B'，C'的位置，作出$\triangle A'B'C'$.

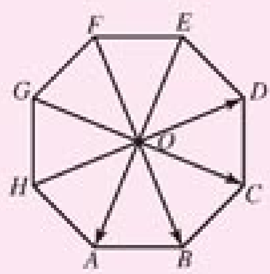
练习B

1. 一人从点A出发，向东走500米到达点B，接着向东偏北30°走300米到达点C，然后再向东北走100米到达点D. 选择适当的比例尺，用向量表示这个人的位移.

2. 已知D，E，F分别是$\triangle ABC$各边AB，BC，CA的中点，分别写出图中与$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FD}$相等的向量.



（第2题）



（第3题）

3. 设点O为正八边形$ABCDEFGH$的中心，分别写出与$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$相等的向量.

2.1.2 向量的加法

我们通过“位移”和“两点的相对位置”学习了向量概念. 现在要问，向量之间能否像数与式那样进行运算？如果可以进行某种运算，那么这些运算又将遵循什么样的运算法则？这一小节，我们要探索这些问题.

1. 向量加法的三角形法则

如果一个动点由点 A 位移到点 B，又由点 B 位移到点 C，那么一定存在一个从点 A 到点 C 的位移与两次连续位移的结果相同(图2-9)．这时我们就说，动点从 A 到 C 的位移是动点 A 到 B，再由 B 到 C 两次位移的和．

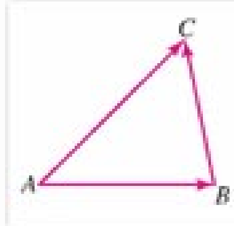


图 2-9

从位移求和，我们可以引出下述向量的加法法则：

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$(图 2-10(1))，在平面上任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，再作向量$\overrightarrow{AC}$，则向量$\overrightarrow{AC}$叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(或和向量)，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

上述求两个向量和的作图法则，叫做**向量求和的三角形法则**．图 2-10(2) 表示求两个平行向量和的特殊情况．

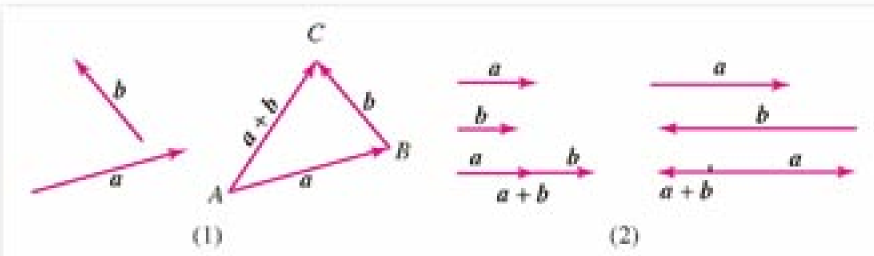


图 2-10

对于零向量与任一向量 $\boldsymbol{a}$ 的和有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

向量加法运算能否像整数、分数的加法运算那样具有交换律和结合律呢?

先看看，求两个向量和，两个向量相加的次序能否交换．

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$．如图 2-11，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$．如果 A，B，C 不共线，则

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

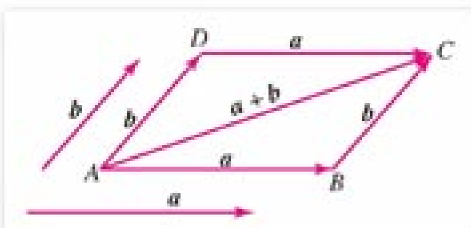


图 2-11

再看看 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 等于什么．

作$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，连接 D，C，如果我们能证明$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$，那么也就证明了加法交换律成立．

由作图可知，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形(为什么?)，这就证明了$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$，即加法交换律成立．

对于 A，B，C 共线的情况，请同学们自己验证．于是得到

$$\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.}$$

向量加法的交换律，在常识上是很显然的．你从点 A 出发先位移向量 $\boldsymbol{a}$，接着再位移向量 $\boldsymbol{b}$，与先位移向量 $\boldsymbol{b}$ 再位移向量 $\boldsymbol{a}$，一定会达到同一终点 C．这也就说明了向量加法交换律成立．

2. 向量求和的平行四边形法则

从上面我们探索向量加法交换律是否成立的过程中，我们可以得到两个不共线向量求和的另一法则．

已知两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$(图 2-11)，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 A，B，D 三点不共线，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则对角线上的向量

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这个法则叫做两个向量求和的**平行四边形法则**．

容易验证，向量加法也满足结合律，即

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).}$$

结合律的证明请同学们根据图 2-12 自己完成．

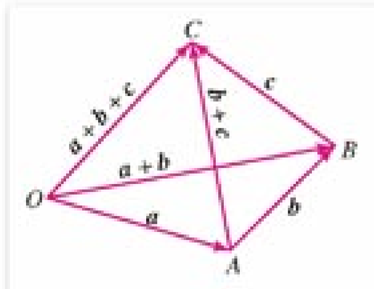


图 2-12

3. 向量求和的多边形法则

由两个向量加法的定义可知，两个向量的和仍是一个向量．这样我们就能把三个、四个或任意多个向量相加．现以四个向量为例说明如下(图 2-13)．

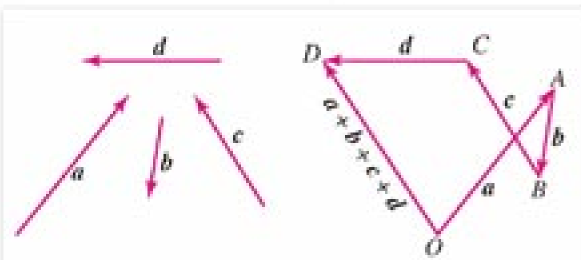


图 2-13

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$．在平面上任选一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{d}$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.\end{aligned}$$

已知 n 个向量，依次把这 n 个向量首尾相连，以第一个向量的始点为始点，第 n 个向量的终点为终点的向量叫做这 n 个向量的和向量．

这个法则叫做向量求和的**多边形法则**．

思考与讨论

在求作两个向量和时，你可能选择不同的始点求和，你有没有想过，选择不同的始点作出的向量和都相等吗？你可能认为，显然，作出的向量和都是相等的．当然，这里你的“显然”是对的．你能根据图 2-14 逻辑地证明这个结论吗？

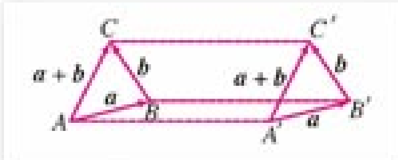


图 2-14

例 某人先位移向量 $\boldsymbol{a}$：“向东走 3 km”，接着再位移向量 $\boldsymbol{b}$：“向北走 3 km”，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

解：如图 2-15 所示，适当选取比例尺，作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=\text{“向东走 3 km”},$$

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}=\text{“向北走 3 km”},$$

则 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

因为 $\triangle OAB$ 为直角三角形，所以

$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}\ (\text{km}).$$

又因为 $\angle AOB=45°$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示向东北走 $3\sqrt{2}$ km.

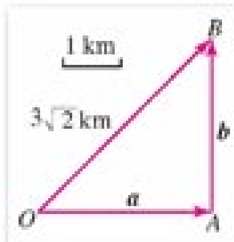
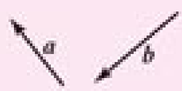


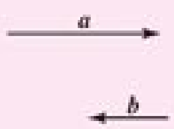
图 2-15

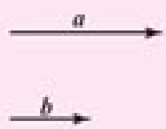
练习A

1. 已知下列各组向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$：

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

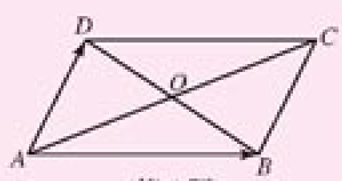
2. 如图，填空：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$______；

(2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=$______；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=$______；

(4) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=$______.



(第 2 题)

3. 一架飞机向北飞行 300 km，然后改变方向向西飞行 300 km，求飞机飞行的路程及两次位移的和.
4. 已知任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 是否正确？为什么？

练习B

1. 某人从点 A 向东位移 60 米到达点 B，又从点 B 向东偏北 30° 方向位移 50 米到达点 C，又从点 C 向北偏西 60° 方向位移 30 米到达点 D，选用适当的比例尺作图，求点 D 相对于点 A 的位置.
2. 求证在三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$.
3. 一轮渡向北以航速 20 km/h 航行，此时西风，风速 5 m/s，用作图法求轮渡的实际航行速度和方向（精确到度）.

2.1.3 向量的减法

在数的运算中，我们知道减法是加法的逆运算．与数的减法一样，向量减法同样作为向量加法的逆运算引入.

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$(图 2-16)，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，作$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则

$$\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}, \qquad ①$$

向量$\overrightarrow{BA}$叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记作$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}. \qquad ②$$

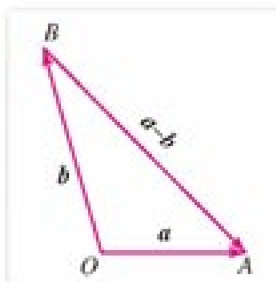


图 2-16

由此可见，**如果把两个向量的始点放在一起，则这两个向量的差是以减向量的终点为始点，被减向量的终点为终点的向量.**

由②式还可以推知，**一个向量$\overrightarrow{BA}$等于它的终点相对于点 O 的位置向量$\overrightarrow{OA}$减去它的始点相对于点 O 的位置向量$\overrightarrow{OB}$，或简记“终点向量减始点向量”.**

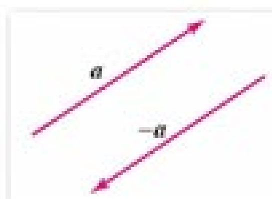


图 2-17

与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反且等长的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$（图 2-17）．显然

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}.$$

由①式两边同加$(-\boldsymbol{b})$，得

$$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

这就是说，**从一个向量减去另一个向量等于加上这个向量的相反向量**(图 2-18).

在上面等式的右边，省略加号，就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 这就是说，我们可像数的代数和那样，把减式看成和式.

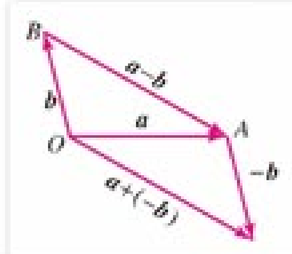


图 2-18

例 1 已知平行四边形 $ABCD$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别表示向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$(图 2-19).

解：连接 AC，DB，由求向量和的平行四边形法则，有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

依减法定义得

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

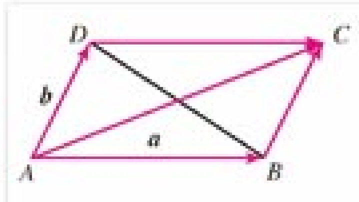


图 2-19

例 2 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$，求$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$(图 2-20).

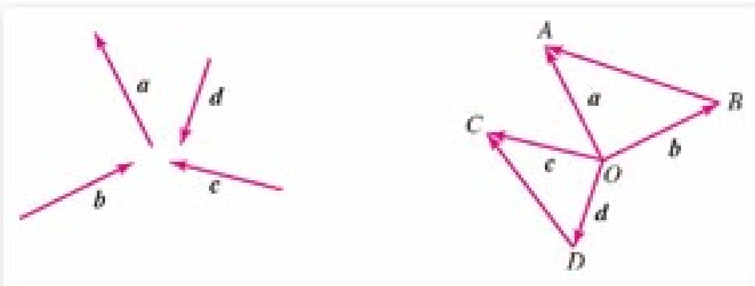


图 2-20

解：作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，作$\overrightarrow{BA}$，则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA};$$

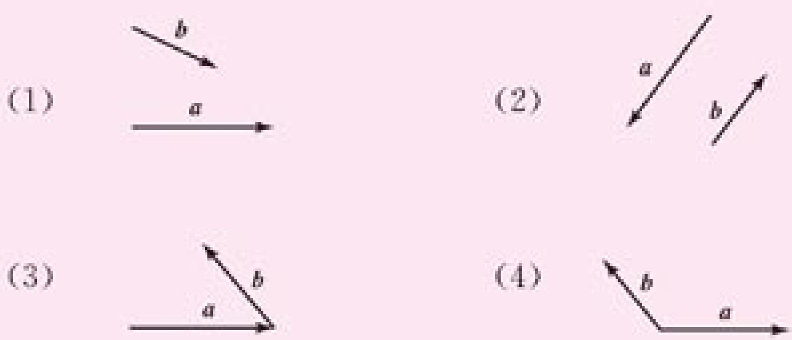
作 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，作$\overrightarrow{DC}$，则

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}.$$

练习A

1. 任作两个向量，并画出它们的相反向量.

2. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$：



3. 填空：

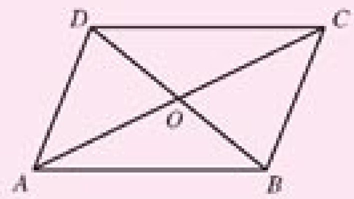
(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$______；

(2) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=$______；

(3) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=$______；

(4) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$______；

(5) $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=$______.



（第 3 题）

练习B

1. 作图验证：$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
2. 已知▱$ABCD$，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 表示：
   (1) $\overrightarrow{CD}$，　$\overrightarrow{CB}$；　　　　(2) $\overrightarrow{BD}$，　$\overrightarrow{CA}$.
3. 已知▱$ABCD$，它的顶点 A，B，C，D 相对于点 O 的位置向量分别记作 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，求证 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$.

探索与研究

在坐标纸上或用作图软件画两个向量，然后作它们的和，研究当两个向量的方向变化时，它们的和向量变化的情况．你从中能得到哪些结论？写出小论文谈谈你对向量和的认识，并与老师和同学交流．

2.1.4 数乘向量

同学们已经看到，平面几何中的全等与平行的问题，与向量加法及其运算律有着密切的联系．在几何中，一个重要问题是，研讨图形的“放大”、“缩小”和相似性质．我们是否也能用向量的某种运算去研究？答案是肯定的．我们知道数的乘法运算是从相同加数的加法运算引入的．这里，我们作类似的思考，引入向量的另一种运算：数乘向量．

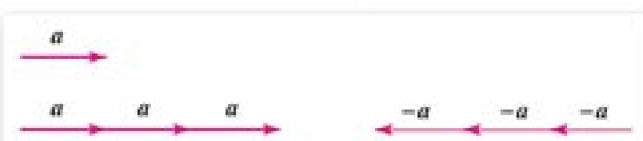


图 2-21

如图 2-21 所示，已知向量 $\boldsymbol{a}$，可作出：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$；

(2) $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$.

3 个 $\boldsymbol{a}$ 连加，记作 $3\boldsymbol{a}$；3 个 $(-\boldsymbol{a})$ 连加，记作 $-3\boldsymbol{a}$. 由图 2-21 我们可以看到，3 个 $\boldsymbol{a}$ 连加仍是一个向量，它的长等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；3 个 $(-\boldsymbol{a})$ 连加仍是一个向量，它的长等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

已知 $\overrightarrow{AB}$(图 2-22)，把线段 AB 三等分，分点为 P，Q，则

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BP}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

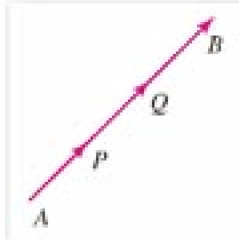


图 2-22

由上述分析，我们引出数乘向量的一般定义：

定义 实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，且 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的长 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

$$\lambda\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\text{的方向}\begin{cases}\text{当 }\lambda>0\text{ 时，与 }\boldsymbol{a}\text{ 同方向；}\\\text{当 }\lambda<0\text{ 时，与 }\boldsymbol{a}\text{ 反方向.}\end{cases}$$

当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$（图 2-23）.

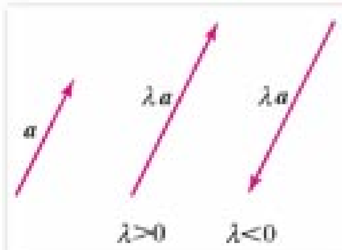


图 2-23

$\lambda\boldsymbol{a}$ 中的实数 λ，叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的系数. 数乘向量的几何意义就是把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向或 $\boldsymbol{a}$ 的反方向放大或缩小.

数乘向量运算满足下列运算律：

设 λ，μ 为实数，则

(1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；　　(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(分配律).

探索与研究

下面我们对分配律进行探究. 先看 λ 为整数时，分配律是否成立. 例如 $\lambda=3$，

$$\begin{aligned}3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &&\text{（数乘向量的定义）}\\&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}) &&\text{（加法交换律与结合律）}\\&=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}. &&\text{（数乘向量的定义）}\end{aligned}$$

类似地，对任意自然数 n 我们可以证明分配律成立，即

$$n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}.$$

当 λ 为有理数时，分配律是否成立呢？我们先取一个分数 $\frac{2}{3}$ 来验证一下：

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\frac{2}{3}\left(3\times\frac{\boldsymbol{a}}{3}+3\times\frac{\boldsymbol{b}}{3}\right) &&\text{（数乘向量的定义）}\\&=2\left(\frac{\boldsymbol{a}}{3}+\frac{\boldsymbol{b}}{3}\right) &&\text{（整数与数乘向量分配律）}\\&=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}. &&\text{（整数与数乘向量分配律）}\end{aligned}$$

上述证明的主要依据是整数分配律成立，证明的方法是把分数单位化小，把分数化为

整数，这样就可以运用整数分配律证明．这种思路不论在数学上和日常生活中都很有用．想想看，在你学过的数学或实际问题中，哪里用到了这种思考问题的方法．

有兴趣的同学，可以仿照上述证明的思路，证明对任意有理数 λ，数乘向量运算分配律成立．

至此，可能很多同学已完全相信，对任意实数分配律都成立．这种“相信”，在数学中，只不过是我们的一种推测，对分配律的证明并没有完成．当 λ 为无理数时，例如

$$\sqrt{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\sqrt{2}\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b}$$

是否真的正确？这件事并不简单．证明要用到“有理数逼近实数”的思考．深入的理性思考和寻求“结论”的逻辑证明是数学学科的主要特征．大家学习数学一定要养成“刨根问底”思考问题的习惯．

向量的加法、减法和数乘向量的综合运算，通常叫做向量的**线性运算**．

例 1 计算下列各式：

(1) $(-2)\times\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$； (2) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$．

解：(1) $(-2)\times\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=(-2\times\frac{1}{2})\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

(2) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$

$=(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a})+(2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$；

(3) $(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$

$=2\mu\boldsymbol{a}-2\lambda\boldsymbol{b}$．

例 2 设 $\boldsymbol{x}$ 是未知向量，解方程

$$5(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

解：原式可变形为

$$5\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

$$8\boldsymbol{x}=-5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{x}=-\frac{5}{8}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}.$$

例 3 如图 2-24 所示，已知 $\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{AB}$，说明向量 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OB'}$ 的关系．

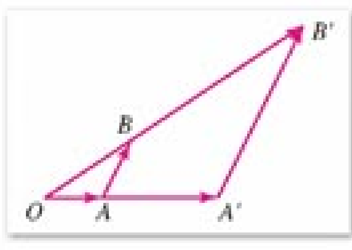


图 2-24

解：因为

$$\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'}$$
$$=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AB}$$

$$=3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})=3\,\overrightarrow{OB},$$

所以$\overrightarrow{OB'}$与$\overrightarrow{OB}$共线且同方向，长度是$\overrightarrow{OB}$的 3 倍.

思考与讨论

把例 3 中的数 3 改为任意实数 k，你是否还能解这个问题？回想一下初中学过的相似三角形的判定定理，例 3 的结论与判定定理有什么关系？

练习A

1. 在平面上任画一向量 $\boldsymbol{a}$，求作下列向量：

(1) $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}$，　$\overrightarrow{AB}=-2\boldsymbol{a}$；　　(2) $\overrightarrow{EF}=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$，　$\overrightarrow{GH}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$；

(3) $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+0.8\boldsymbol{a}-1.2\boldsymbol{a}$.

2. 化简下列各式：

(1) $4(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+5(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$；　　(2) $2(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-3(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$；

(3) $\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-\frac{1}{6}(5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$.

3. 求未知向量 $\boldsymbol{x}$：

(1) $\boldsymbol{x}+2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$；　　(2) $3\boldsymbol{a}+4(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$；

(3) $2\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

练习B

1. 在$\triangle ABC$中，设 D 为边 BC 的中点，求证：

(1) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$；　　(2) $3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\,\overrightarrow{AD}$.

2. 作图证明：$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}+\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}=\boldsymbol{a}$.

3. 已知：$\triangle ABC$，作向量$\overrightarrow{OA'}=3\,\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=3\,\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC'}=3\,\overrightarrow{OC}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2.1.5 向量共线的条件与轴上向量坐标运算

1. 向量共线的条件

在学习向量概念时，我们已给出向量共线的概念，即：

如果向量的基线互相平行或重合，则称这些向量共线或互相平行(图 2-25).

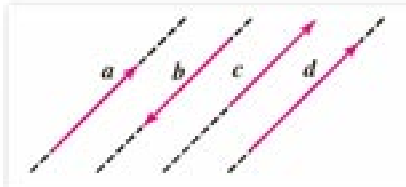


图 2-25

应注意，这里说向量平行，包含向量基线重合的情形，与两条直线平行的概念有点不同. 事实上，在高等数学中，重合直线是平行直线的特殊情形.

向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于向量 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

由于零向量的方向不定，在处理平行问题时，零向量与任何一个向量平行.

由向量平行和数乘向量的定义可以直接推知：

平行向量基本定理 如果 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则一定存在唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

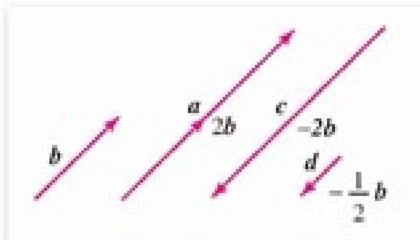


图 2-26

如图 2-26，如果 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；如果 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{b}$；

如果 $\boldsymbol{d}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}$ 的长度是 $\boldsymbol{b}$ 的长度的一半，并且方向相反，则 $\boldsymbol{d}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

给定一个非零向量 $\boldsymbol{a}$，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向且长度等于 1 的向量，叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量**. 如果 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量记作 $\boldsymbol{a}_0$(图 2-27)，由数乘向量的定义可知

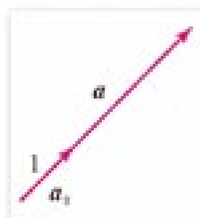


图 2-27

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0 \quad 或 \quad \boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

例 1 如图 2-28，MN 是 $\triangle ABC$ 的中位线，求证：

$$MN=\frac{1}{2}BC，且 MN/\!/BC.$$

证明： 因为 M，N 分别是 AB，AC 边上的中点，所以

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

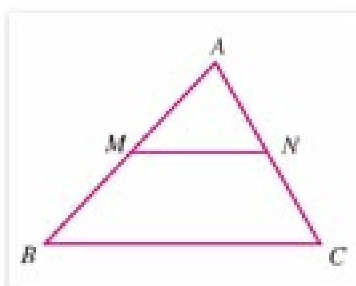


图 2-28

所以 $MN/\!/BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$.

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}$. 试问向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否平行？并求 $|\boldsymbol{a}|:|\boldsymbol{b}|$.

解：由 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}$ 得 $\boldsymbol{e}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，代入 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$ 得

$$\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}.$$

因此，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行且 $|\boldsymbol{a}|:|\boldsymbol{b}|=\frac{3}{2}$.

2. 轴上向量的坐标及其运算

规定了方向和长度单位的直线叫做**轴**(图 2-29).

图 2-29

已知轴 l. 取单位向量 $\boldsymbol{e}$，使 $\boldsymbol{e}$ 的方向与 l 同方向. 根据向量平行的条件，对轴上任意向量 $\boldsymbol{a}$，一定存在唯一实数 x，使

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}.$$

反过来，任意给定一个实数 x，我们总能作一个向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}$，使它的长度等于这个实数 x 的绝对值，方向与实数的符号一致.

给定单位向量 $\boldsymbol{e}$，能生成与它平行的所有向量的集合 $\{x\boldsymbol{e} \mid x\in\mathbf{R}\}$.

这里的单位向量 $\boldsymbol{e}$ 叫做轴 l 的**基向量**，x 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 l 上的**坐标(或数量)**. x 的绝对值等于 $\boldsymbol{a}$ 的长，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同方向时，x 是正数，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反方向时，x 是负数.

例如，$\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{e}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 在 l 上的坐标是 3，$\overrightarrow{CD}$ 在 l 上的坐标是 -2.

于是，在一条轴上，实数与这条轴上的向量建立起一一对应关系. 至此，我们就可用数值来表示向量. 这一点特别重要，我们在解析几何初步中已经指出，如果点的位置不能用数值来表示，要使用现代的计算机技术研究图形的性质是不可能的. 这里，我们奠定了向量的数量化基础，以后我们还要把平面向量、空间向量都数量化、代数化. 这样，我们就可以用计算器、计算机等现代计算技术进行向量运算了.

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{e}$，于是：

如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $x_1=x_2$；

反之，如果 $x_1=x_2$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

另外，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2)\boldsymbol{e}$.

这就是说，**轴上两个向量相等的条件是它们的坐标相等；轴上两个向量和的坐标等于两个向量的坐标的和.**

设 $\boldsymbol{e}$ 是轴 l 上的一个基向量(图 2-30)，$\overrightarrow{AB}$ 的坐标又常用 AB 表示，这时

$$\overrightarrow{AB}=AB\boldsymbol{e}.$$

显然 $\overrightarrow{BA}=BA\boldsymbol{e}$，$AB$ 与 BA 绝对值相同，符号相反，即

$$AB+BA=0.$$

设 $\boldsymbol{e}$ 是 l 上的一单位向量(图 2-30)，在 l 上任取三点 A，B，C，则

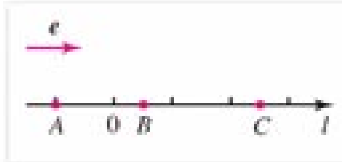


图 2-30

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$
$$AB\boldsymbol{e}+BC\boldsymbol{e}=AC\boldsymbol{e},$$
$$(AB+BC)\boldsymbol{e}=AC\boldsymbol{e}.$$

因为 $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$，所以

$$\boxed{AB+BC=AC.} \qquad ①$$

公式①在解析几何初步一章中已经得到，尽管形式非常简单，我们已经看到它是我们研讨解析几何、三角的基础. 这里我们应用向量计算精确方便地得到了这个公式.

下面，我们用向量的观点，重新认识一下我们在初中学过的数轴.

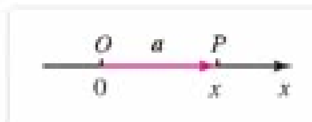


图 2-31

在轴 x 上选一定点 O 作为原点，就成为我们学过的数轴(图 2-31).

设 $\boldsymbol{e}$ 是轴 x 的基向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于 x 轴，以原点 O 为始点作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，则点 P 的位置被向量 $\boldsymbol{a}$ 所唯一确定，由平行向量基本定理知道，存在唯一的实数 x，使

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}.$$

数值 x 是点 P 的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴上的坐标，也就是点 P 在数轴 x 上的坐标；反之亦然.

如图 2-32，如果点 P 的坐标为 3，则点 P 的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标也为 3.

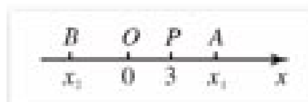


图 2-32

在数轴 x 上，已知点 A 的坐标为 x_1，点 B 的坐标为 x_2(图 2-32)，于是由公式①，得

$$\begin{aligned}AB&=AO+OB\\&=-OA+OB=x_2-x_1.\end{aligned}$$

即

$$\boxed{AB=x_2-x_1.} \qquad ②$$

这就是说，**轴上向量的坐标等于向量终点的坐标减去始点的坐标.**

根据公式②，又可以得到数轴上两点的距离公式

$$\boxed{|AB|=|x_2-x_1|.} \qquad ③$$

例 3 已知数轴上三点 A，B，C 的坐标分别是 4，-2，-6，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ 的坐标和长度(图 2-33).

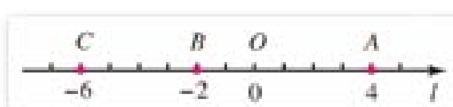


图 2-33

解：$AB=(-2)-4=-6$，　　$|\overrightarrow{AB}|=|-6|=6$；

$BC=-6-(-2)=-4$，　$|\overrightarrow{BC}|=|-4|=4$；

$CA=4-(-6)=10$，　$|\overrightarrow{CA}|=|10|=10$.

练习A

1. 把下列向量 $\boldsymbol{a}$ 表示为数乘向量 $\boldsymbol{b}$ 的形式.

(1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{e}$；　(2) $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=16\boldsymbol{e}$；

(3) $\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}$；　(4) $\boldsymbol{a}=\frac{3}{4}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}$.

2. 已知：在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

求证：$MN /\!/ BC$，并且 $MN=\frac{1}{3}BC$.

3. 在数轴上，已知 AB，BC，求 AC.

(1) $AB=3$，$BC=5$；　(2) $AB=5$，$BC=-7$；

(3) $AB=-8$，$BC=23$；　(4) $AB=-7$，$BC=-8$.

4. 已知数轴上三点 A，B，C 的坐标分别是-8，-2，5，求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$的坐标和长度.

练习B

1. A，B，C，D 是轴 l 上任意四点，求证：$AB+BC+CD+DA=0$.

2. 已知数轴上三点 A，B，C 的坐标分别是-5，-2，6，求 $|AB|$，$|BC|$，$|AC|$.

3. 已知数轴上两点 A，B 的坐标分别是 x_1，x_2，求证 AB 中点的坐标

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

习题2-1 A

1. 化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$；　(2) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}$.

2. 任画三对向量，分别求它们的和与差.

3. 化简下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$；　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$；

(3) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}$；　(4) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}$.

4. 化简：

(1) $2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；　(2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

5. 解关于 $\boldsymbol{x}$ 的方程：

(1) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$；　(2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{x})=3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$；

(3) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})$.

6. 根据下列各题中的条件，判断四边形 $ABCD$ 是哪种四边形.

(1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$；

(2) $\overrightarrow{AD}/\!/\overrightarrow{BC}$，并且$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不平行；

(3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，并且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$.

7. 已知：点 E，F，G，H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点.
求证：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

8. 已知数轴上 A，B 两点的坐标 x_1，x_2，求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的坐标和长度：

(1) $x_1=-8$，$x_2=3$；

(2) $x_1=3.8$，$x_2=-4.7$；

(3) $x_1=-20$，$x_2=-12.5$；

(4) $x_1=14$，$x_2=3$.

习题 2-1 B

1. 化简：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}$；　(2) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}$；

(3) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}$；　(4) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$.

2. 已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足条件 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，试问表示它们的有向线段是否一定能构成三角形？$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足什么条件才能构成三角形？

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 均不为 $\boldsymbol{0}$，并且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，把 $\boldsymbol{c}$ 表示为两个向量的和，使这两个向量分别平行于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$.

4. 已知 M，N 分别是任意两条线段 AB 和 CD 的中点，求证：

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

5. 已知数轴上 A，B 两点的坐标 x_1，x_2，根据下列各题中的已知条件，求点 A 的坐

标 x_1：

(1) $x_2=3$，$AB=5$；

(2) $x_2=-5$，$AB=4$；

(3) $x_2=4$，$BA=-3$；

(4) $x_2=-1$，$BA=-7$；

(5) $x_2=0$，$|AB|=2$；

(6) $x_2=-5$，$|AB|=2$.

2.2 向量的分解与向量的坐标运算

2.2.1 平面向量基本定理

如图 2-34，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不平行的向量，容易看出

$$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2,\quad \overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2,$$
$$\overrightarrow{EF}=4\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2,\quad \overrightarrow{GH}=-2\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2.$$

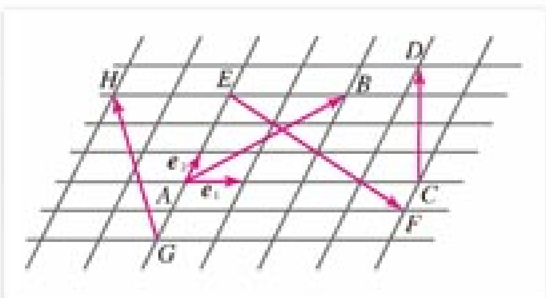


图 2-34

事实上，平面内任何向量都能用两个不平行的向量来表示.

平面向量基本定理　如果 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是一平面内的两个不平行的向量，那么该平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一的一对实数 a_1，a_2，使

$$\boxed{\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2.}$$

证明[1]：在平面内任取一点 O(图 2-35)，作$\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$.

由于 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不平行，可以进行如下作图：

过点 A 作 OE_2 的平行(或重合)直线，交直线 OE_1 于点 M，过点 A 作 OE_1 的平行(或重合)直线，交直线 OE_2 于点 N，于是依据平行向量基本定理，存在两个唯一的实数 a_1，a_2 分别有

$$\overrightarrow{OM}=a_1\boldsymbol{e}_1,\ \overrightarrow{ON}=a_2\boldsymbol{e}_2,$$

所以

注

❶ 选学

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2.$$

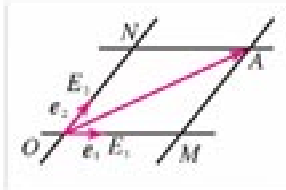


图 2-35

证明表示的唯一性：如果存在另一对实数 x，y 使

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2,$$

则 $a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，即

$$(x-a_1)\boldsymbol{e}_1+(y-a_2)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不平行，如果 $x-a_1$，$y-a_2$ 中有一个不等于 0，不妨设 $y-a_2\neq0$，则 $\boldsymbol{e}_2=-\dfrac{x-a_1}{y-a_2}\boldsymbol{e}_1$，由平行向量基本定理，得 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 平行. 这与假设矛盾，因此

$$x-a_1=0,\ y-a_2=0,$$

即 $x=a_1$，$y=a_2$.

我们把不共线向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底，记为$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$. $a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 关于基底$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$的分解式.

例 1 已知▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 M，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用基底$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$表示$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$(图 2-36).

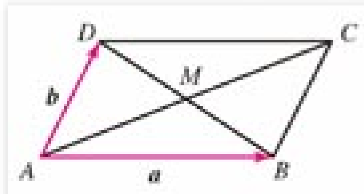


图 2-36

解：因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\\&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\\\overrightarrow{DB}&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

所以

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

例 2 已知 A，B 是直线 l 上任意两点，O 是 l 外一点(图2-37)，求证：对直线 l 上任意一点 P，存在实数 t，使$\overrightarrow{OP}$关于基底$\{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\}$ 的分解式为

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.} \qquad ①$$

并且，满足①式的点 P 一定在 l 上.

证明：设点 P 在直线 l 上，则由平行向量基本定理知，存在实数 t，使

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\\&=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

$$=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.$$

设点 P 满足等式 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，则 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，即 P 在 l 上.

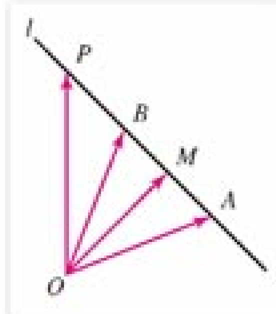


图 2-37

由例 2 所证可知，对直线 l 上任意一点 P，一定存在唯一的实数 t 满足向量等式①；反之，对每一个实数 t，在直线 l 上都有唯一的一个点 P 与之对应. 向量等式①叫做直线 l 的**向量参数方程式**，其中实数 t 叫做**参变数**，简称**参数**.

在①中，令 $t=\frac{1}{2}$，点 M 是 AB 的中点，则

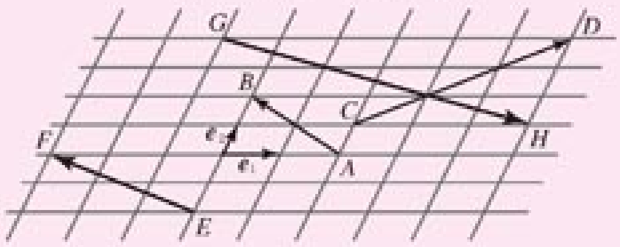
$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).}$$

这是线段 AB 的中点的向量表达式.

练习A

1. 如图，在基底 $\{e_1, e_2\}$ 下，分解下列向量：

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}.$$



（第 1 题）

2. 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 O，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，选择基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$，试写出下列向量在此基底下的分解式：

$$\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}.$$

3. 已知基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$，实数 x，y 满足向量等式：

$$3x\boldsymbol{a}+(10-y)\boldsymbol{b}=(4y+7)\boldsymbol{a}+2x\boldsymbol{b}.$$

求 x，y 的值.

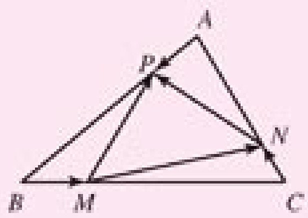
4. 在例 2 的公式①中，令 t 分别等于 2，-2，3，$\frac{1}{2}$，$-\frac{2}{3}$，作出相应点 P 在直线 l 上的位置.

5. 已知 O，A，B 三点不共线，试用向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 分别表示线段 AB 的三等分点 P，Q 相对于点 O 的位置向量.

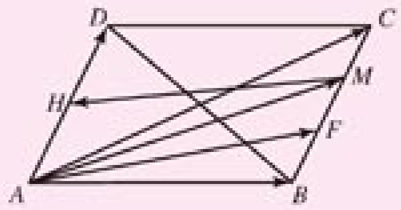
练习B

1. 在△ABC中，DE平行BC并分别与边AB，AC交于点D，E，如果$AD=\frac{1}{3}AB$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，选择基底{$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$}，试写出下列向量在此基底下的分解式：$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{EC}$.

2. 如图，已知M，N，P分别是△ABC三边BC，CA，AB上的点，且$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，如果$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，选择基底{$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$}，试写出下列向量在此基底下的分解式：$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NP}$.



（第2题）



（第3题）

3. 如图，已知▱ABCD，AH=HD，$BF=MC=\frac{1}{3}BC$，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，选择基底{$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$}，试写出下列向量在此基底下的分解式：$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{MH}$，$\overrightarrow{AF}$.

2.2.2 向量的正交分解与向量的直角坐标运算

1. 向量的直角坐标

如果两个向量的基线互相垂直，则称这两个向量**互相垂直**.

如果基底的两个基向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$互相垂直，则称这个基底为**正交基底**. 在正交基底下分解向量，叫做**正交分解**. 以后同学们会看到，在正交基底下进行向量分解，许多有关度量问题变得较为简单. 这一节我们讨论向量的正交分解及向量在直角坐标系中的坐标运算.

现在，让我们用向量的观点重新认识一下我们学过的直角坐标系.

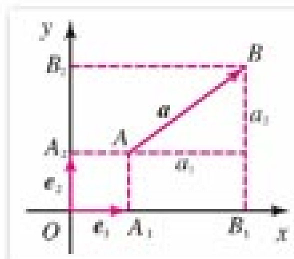


图 2-38

在直角坐标系xOy内(图2-38)，分别取与x轴和y轴方向相同的两个单位向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$. 这时，我们就在坐标平面内建立了一个正交基底{$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$}. $\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$分别是与x轴和y轴同方向的单位向量. 这个基底也叫做直角坐标系xOy的基底.

在坐标平面xOy内(图2-38)，任作一向量$\boldsymbol{a}$(用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示)，由平面向量基本定理可知，存在唯一的有序实数对$(a_1，a_2)$，使得

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2, \quad ①$$

(a_1, a_2)就是向量$\boldsymbol{a}$在基底$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$下的坐标．即

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2). \quad ②$$

其中a_1叫做向量$\boldsymbol{a}$在x轴上的坐标分量，a_2叫做$\boldsymbol{a}$在y轴上的坐标分量．分别过向量$\overrightarrow{AB}$的始点、终点作x轴和y轴的垂线，设垂足分别为A_1，B_1和A_2，B_2．坐标分量a_1为向量$\overrightarrow{A_1B_1}$在x轴上的坐标，坐标分量a_2为向量$\overrightarrow{A_2B_2}$在y轴上的坐标．显然

$$\boldsymbol{0}=(0, 0), \boldsymbol{e}_1=(1, 0), \boldsymbol{e}_2=(0, 1).$$

设向量$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{a}$的方向相对于$x$轴正向的转角为$\theta$，由三角函数的定义可知

$$a_1=|\boldsymbol{a}|\cos\theta, a_2=|\boldsymbol{a}|\sin\theta.$$

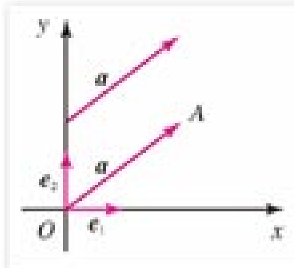


图 2-39

在直角坐标系中（图 2-39），一点A的位置被点A的位置向量$\overrightarrow{OA}$所唯一确定．设点A的坐标为(x, y)，容易看出

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=(x, y),$$

即点A的位置向量$\overrightarrow{OA}$的坐标(x, y)，也就是点A的坐标；反之，点A的坐标也是点A相对于坐标原点的位置向量$\overrightarrow{OA}$的坐标．

由上面的分析，符号(x, y)在直角坐标系中就有了双重意义，它既可以表示一个固定的点，又可以表示一个向量．为了加以区分，在叙述中，就常说点(x, y)，或向量(x, y)．

例 1 在直角坐标系xOy中，向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的方向和长度如图 2-40 所示．分别求它们的坐标．

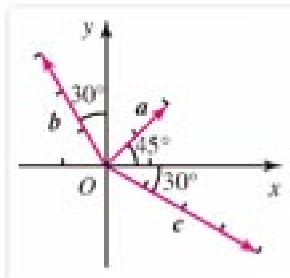


图 2-40

解：设$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，$\boldsymbol{c}=(c_1, c_2)$，则

$$a_1=|\boldsymbol{a}|\cos 45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},$$

$$a_2=|\boldsymbol{a}|\sin 45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2};$$

$$b_1=|\boldsymbol{b}|\cos 120°=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2},$$

$$b_2=|\boldsymbol{b}|\sin 120°=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$c_1=|\boldsymbol{c}|\cos(-30°)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3},$$

$$c_2=|\boldsymbol{c}|\sin(-30°)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.$$

因此$\boldsymbol{a}=(\sqrt{2}, \sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3}, -2)$．

2. 向量的直角坐标运算

设$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)+(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)\\&=(a_1+b_1)\boldsymbol{e}_1+(a_2+b_2)\boldsymbol{e}_2,\end{aligned}$$

即

$$\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2).}$$

用同样的方法可以证明

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2),\\&\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1,\ a_2)=(\lambda a_1,\ \lambda a_2).\end{aligned}}$$

这两个式子请同学们自证.

上述向量的坐标运算公式，也可以用语言分别表述为：

两个向量的和与差的坐标等于两个向量相应坐标的和与差；

数乘向量的积的坐标等于数乘以向量相应坐标的积.

例 2 已知 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，求向量$\overrightarrow{AB}$坐标(图2-41).

解：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,\ y_2)-(x_1,\ y_1)$
$\quad=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$.

例 2 所证结果用语言可以表述为：

一个向量的坐标等于向量终点的坐标减去始点的坐标.

例 3 在直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(x_1,\ y_1)$，点 $B(x_2,\ y_2)$，求线段 AB 中点的坐标.

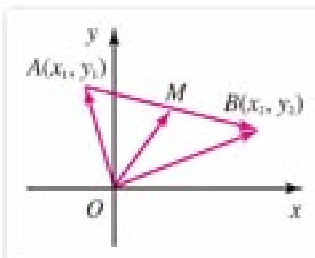


图 2-41

解：设点$M(x,\ y)$是线段 AB 的中点(图 2-41)，则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

上式换用向量的坐标，得

$$(x,\ y)=\frac{1}{2}[(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)],$$

即

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

例 3 得到的公式，叫做线段中点的坐标计算公式，简称**中点公式.**

例 4 在直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(3,\ 2)$，点 $B(-2,\ 4)$，求向量$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$的方向和长度(图 2-42).

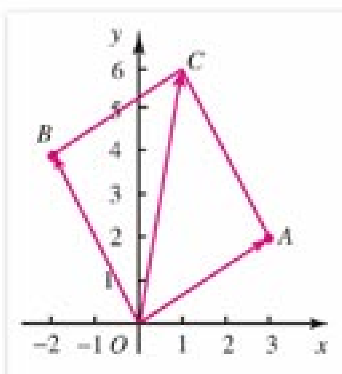


图 2-42

解：由已知可得$\overrightarrow{OA}=(3,\ 2)$，$\overrightarrow{OB}=(-2,\ 4)$.

设$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，则

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(3,\ 2)+(-2,\ 4)=(1,\ 6)$.

由两点的距离公式，得

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}.$$

设$\overrightarrow{OC}$的相对 x 轴正向的转角为 α，则

$$\tan\alpha=\frac{6}{1}=6,$$

得 $\alpha=\arctan 6$.

因此，向量$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$的方向偏离 x 轴正方向为 $\arctan 6$，长度等于$\sqrt{37}$.

例 5　已知$\square ABCD$ 的三个顶点 $A(-2,1)$，$B(-1,3)$，$C(3,4)$，求顶点 D 的坐标(图 2-43).

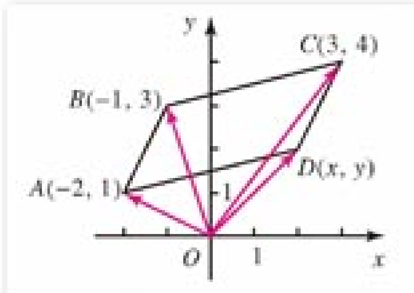


图 2-43

解：因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\\&=(-2,1)+(3,4)-(-1,3)\\&=(2,2),\end{aligned}$$

所以点 D 的坐标是$(2,2)$.

例 6　已知 $A(-2,1)$，$B(1,3)$，求线段 AB 中点 M 和三等分点 P，Q 的坐标(图 2-44).

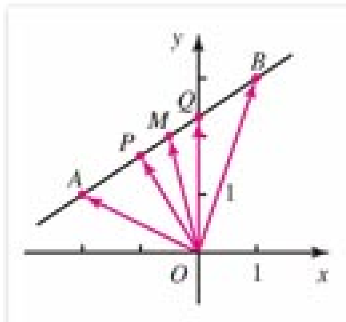


图 2-44

解：因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(1,3)-(-2,1)=(3,2),\end{aligned}$$

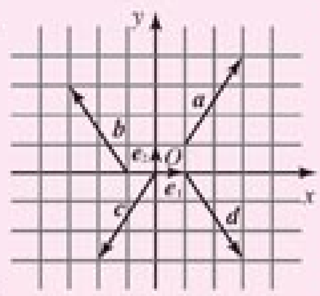
所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\\&=\frac{1}{2}[(-2,1)+(1,3)]\\&=\left(-\frac{1}{2},2\right);\\\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\&=(-2,1)+\frac{1}{3}(3,2)\\&=\left(-1,\frac{5}{3}\right);\\\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\&=(-2,1)+\frac{2}{3}(3,2)\\&=\left(0,\frac{7}{3}\right).\end{aligned}$$

因此 $M\left(-\frac{1}{2},2\right)$，$P\left(-1,\frac{5}{3}\right)$，$Q\left(0,\frac{7}{3}\right)$.

练习A

1. 如图所示，$\{e_1, e_2\}$为正交基底，分别写出图中向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$的分解式，并分别求出它们的直角坐标.



(第1题)

2. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的坐标，求$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$：

   (1) $\boldsymbol{a}=(-2, 4)$，　　$\boldsymbol{b}=(5, 2)$；

   (2) $\boldsymbol{a}=(4, 3)$，　　$\boldsymbol{b}=(-3, 8)$.

3. 已知A，B两点的坐标，求$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的坐标以及它们的长度和方向：

   (1) $A(3, 5)$，$B(6, 9)$；　　(2) $A(-3, 4)$，$B(6, 3)$；

   (3) $A(0, 3)$，$B(0, 5)$；　　(4) $A(-3, 6)$，$B(-8, -7)$.

4. 求线段AB中点的坐标：

   (1) $A(3, 4)$，$B(-3, 2)$；

   (2) $A(-8, -3)$，$B(5, -3)$.

5. 求下列各点关于坐标原点的对称点：

   $A(2, 3)$，　$B(-3, 5)$，　$C(-2, -4)$，　$D(3, -5)$.

练习B

1. 已知▱$ABCD$的三个顶点$A(-1, -2)$，$B(3, 1)$，$C(0, 2)$，求顶点D的坐标.

2. 已知点$A(1, 4)$，$B(3, 2)$，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$，求点$P$的坐标.

3. 已知点$A(-2, 5)$，$B(4, 2)$，点P在$\overrightarrow{AB}$上，且$AP:PB=1:2$，求点P的坐标.

4. 已知$A(-3, -2)$，$B(3, 4)$，求线段AB的中点和三等分点的坐标.

2.2.3 用平面向量坐标表示向量共线条件

观察图2-45，$\boldsymbol{a}=(1, 2)$，$\boldsymbol{b}=(2, 4)$，这两个向量的坐标成比例，试问这两个向量平行吗？向量$\boldsymbol{c}$与向量$\boldsymbol{a}$平行，它们的坐标之间有些什么关系？

我们知道，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则存在唯一实数 λ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；反之，如果存在一个实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

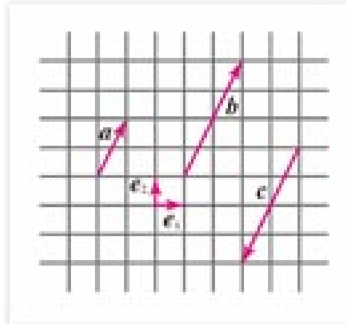


图 2-45

选择基底$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$，如果 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$，则条件$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$可化为

$$(a_1,\ a_2)=\lambda(b_1,\ b_2)=(\lambda b_1,\ \lambda b_2),$$

即

$$a_1=\lambda b_1, \qquad ①$$
$$a_2=\lambda b_2. \qquad ②$$

①②两式的两边分别乘以 b_2，b_1，得

$$a_1b_2=\lambda b_1b_2, \qquad ③$$
$$a_2b_1=\lambda b_2b_1. \qquad ④$$

③－④得

$$a_1b_2-a_2b_1=0. \qquad ⑤$$

⑤式就是两个向量平行的条件.

⑤式成立，可判断两个向量平行；反之两个向量平行，它们的坐标满足⑤式. ⑤式表示的条件，是在假设 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 的条件下推出的. 事实上，如果在讨论平行问题时，规定零向量可以与任一向量平行，在⑤式中可以去掉 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 的假设.

如果向量 $\boldsymbol{b}$ 不平行于坐标轴，即 $b_1\neq0$，$b_2\neq0$，⑤式可以化为

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}. \qquad ⑥$$

⑥式用语言可以表述为：

两个向量平行的条件是，相应坐标成比例.

例 1 已知$\overrightarrow{AB}=(2,\ 5)$和向量 $\boldsymbol{a}=(1,\ y)$，并且向量$\overrightarrow{AB}/\!/\boldsymbol{a}$. 求 $\boldsymbol{a}$ 的纵坐标 y.

解：因为$\overrightarrow{AB}/\!/\boldsymbol{a}$，所以

$$1\times5-2\times y=0,$$

解此方程得 $y=\dfrac{5}{2}$.

例 2 在直角坐标系 xOy 内，已知 $A(-2,\ -3)$，$B(0,\ 1)$，$C(2,\ 5)$，求证 A，B，C 三点共线.

证明：由已知条件，得

$$\overrightarrow{AB}=(0,\ 1)-(-2,\ -3)=(2,\ 4),$$
$$\overrightarrow{AC}=(2,\ 5)-(-2,\ -3)=(4,\ 8).$$

因为 $2\times8-4\times4=0$，所以

$$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}.$$

因此 A，B，C 三点共线.

练习A

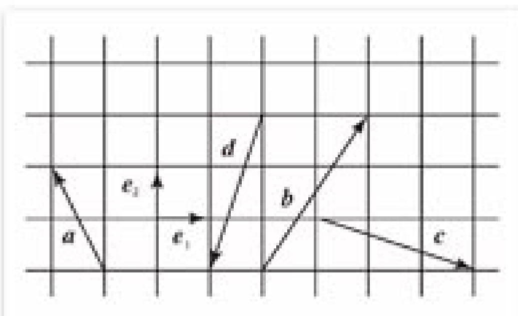
1. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,\ -4)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ y)$，并且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 y.
2. 已知 $A(-1,\ -3)$，$B(0,\ -1)$，$C(1,\ 1)$，求证 A，B，C 三点共线.
3. 已知点 $A(0,\ 1)$，$B(1,\ 0)$，$C(1,\ 2)$，$D(2,\ 1)$，求证 $AB/\!/CD$.

练习B

1. 已知点 $A(-1,\ 1)$，$B(0,\ -2)$，$C(3,\ 0)$，$D(2,\ 3)$，求证四边形 $ABCD$ 是平行四边形.
2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 2)$和点 $A(0,\ -3)$，直线 l 通过点 A，且平行于向量 $\boldsymbol{a}$.
求证：若动点 $P(x,\ y)$在 l 上，则它的坐标 x，y 满足方程
$$2x-y-3=0.$$

习题2-2 A

1. 如图，用向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$.



（第1题）

2. 计算下列各式：

(1) $(-1,\ 3)+(2,\ -2)+(5,\ 8)$；　　(2) $(4,\ -7)-(3,\ 5)-(2,\ 4)$；

(3) $2(1,\ 5)+3(-1,\ -2)-7(0,\ -3)$；　　(4) $\frac{1}{2}(-2,\ -4)-\frac{1}{3}(3,\ -6)$.

3. 已知点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$，求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，并验证$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$.
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 3)$，实数 x，y 满足等式 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=(3,\ 4)$，求 x，y.
5. 已知点 $A(-2,\ 3)$，$B(3,\ 5)$，分别求点 A，B 关于点 $M(1,\ 1)$的中心对称点 A'，

B'的坐标，并说明$\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$.

6. 已知点$A(-1,1)$，$B(-4,5)$及$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，求点$C$，$D$，$E$的坐标.

习题 2-2 B

1. 已知$\boldsymbol{a}=(3,-5)$，$\boldsymbol{b}=(9,11)$，$\boldsymbol{c}=(8,13)$. 求：

(1) $-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}$；　　(2) $15\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 已知$\boldsymbol{a}=(6,-4)$，$\boldsymbol{b}=(3,-8)$，并且$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=(-3,5)$，求$x$，$y$.

3. 已知点$A(5,1)$，$B(1,3)$及$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，求$\overrightarrow{A_1B_1}$的坐标和长度.

4. 已知点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，分别求A，B关于点$M(x_0,y_0)$的中心对称点A'，B'的坐标.

5. 已知点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x,y)$，且$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ $(\lambda\neq-1)$，求证

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

2.3 平面向量的数量积

2.3.1 向量数量积的物理背景与定义

1. 力做功的计算

如图 2-46 所示，一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于一个物体，使该物体位移 $\boldsymbol{s}$，如何计算这个力所做的功？由于图示的力 $\boldsymbol{F}$ 的方向与位移方向有一个夹角 θ，真正使物体前进的力是 $\boldsymbol{F}$ 在物体位移方向上的分力，这个分力的数量与物体位移距离的乘积才是力 $\boldsymbol{F}$ 做的功. 即力 $\boldsymbol{F}$ 使物体位移 $\boldsymbol{s}$ 所做的功 W 可以用

$$W=|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{F}|\cos\theta$$

计算.

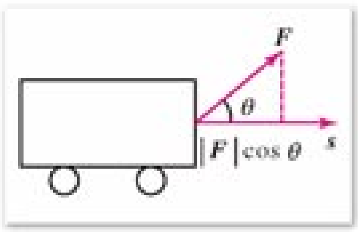


图 2-46

其中 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ 就是 $\boldsymbol{F}$ 在物体位移方向上的分量的数量，也就是力 $\boldsymbol{F}$ 在物体位移方向上正射影的数量.

以计算力做功为背景，我们引入向量的数量积运算.

力做功的计算，涉及到两个向量夹角和向量在轴上射影的概念. 下面对这两个概念给予较精确的阐述.

2. 两个向量的夹角

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$(图 2-47)，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 称作向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，并规定

$$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi,$$

在这个规定下，两个向量的夹角被唯一确定了，并且有

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle.$$

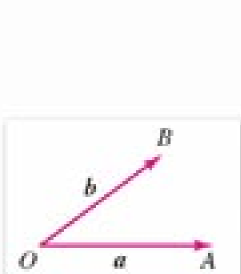


图 2-47

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$ 时，我们说向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

在讨论垂直问题时，规定零向量与任意向量垂直.

3. 向量在轴上的正射影

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和轴 l（图 2-48）．作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，过点 O，A 分别作轴 l 的垂线，垂足分别为 O_1，A_1，则向量 $\overrightarrow{O_1A_1}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上的**正射影**（简称**射影**），该射影在轴 l 上的坐标，称作 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上的**数量**或在轴 l 的方向上的**数量**．

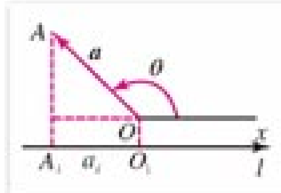


图 2-48

$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上正射影的坐标记作 a_l，向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向与轴 l 的正向所成的角为 θ，则由三角函数中的余弦定义有

$$a_l=|\boldsymbol{a}|\cos\theta.$$

例 1 已知轴 l（图 2-49）：

（1）向量 $|\overrightarrow{OA}|=5$，$\langle\overrightarrow{OA}, l\rangle=60°$，求 $\overrightarrow{OA}$ 在 l 上的正射影的数量 OA_1；

（2）向量 $|\overrightarrow{OB}|=5$，$\langle\overrightarrow{OB}, l\rangle=120°$，求 $\overrightarrow{OB}$ 在 l 上的正射影的数量 OB_1．

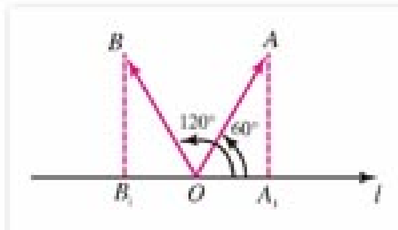


图 2-49

解：（1）$OA_1=5\cos 60°=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$；

（2）$OB_1=5\cos 120°=5(-\cos 60°)=5\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$=-\frac{5}{2}.$$

4. 向量的数量积（内积）定义

定义 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（或**内积**），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle.$$

由上述定义可知，两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积是一个实数，可以等于正数、负数、零（图 2-50）．

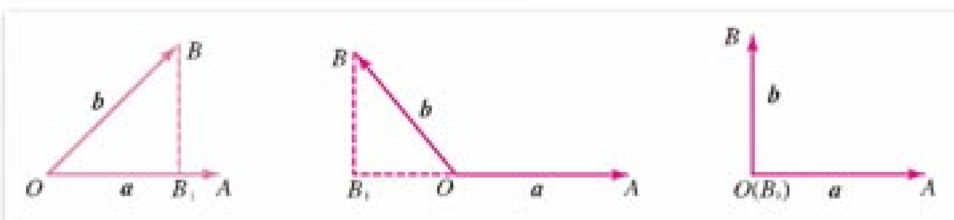


图 2-50

根据向量内积的定义，可以得到两个向量内积有如下重要性质：

（1）如果 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}\rangle;$$

（2）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，即$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

(4) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\neq 0)$；

(5) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

以上性质的证明留给同学作为练习.

例 2 已知$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解：
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\\&=5\times4\times\cos 120^\circ\\&=-10.\end{aligned}$$

练习A

1. 已知$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1) $|\boldsymbol{a}|=8$，　$|\boldsymbol{b}|=4$，　$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$；

(2) $|\boldsymbol{a}|=7$，　$|\boldsymbol{b}|=12$，　$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$；

(3) $|\boldsymbol{a}|=4$，　$|\boldsymbol{b}|=2$，　$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$；

(4) $|\boldsymbol{a}|=4$，　$|\boldsymbol{b}|=1$，　$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$.

2. 已知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，求$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$，　$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=10$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$，　$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=16$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-25$，　$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=25$；

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\sqrt{3}$，　$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=12$.

练习B

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$方向上的正射影的数量分别为：

(1) 6；　(2) -6；　(3) 8；　(4) -8.

求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

2. 在直角坐标系xOy内，已知向量$\overrightarrow{AB}$与x轴和y轴的正向的夹角分别为120°和30°，求$\overrightarrow{AB}$在x轴、y轴上正射影的数量.

2.3.2 向量数量积的运算律

从数学的角度考虑，我们希望向量的数量积运算，也能像数量乘法那样满足某些运算律，这样数量积运算才更有意义．现在我们探索一下，看看它会有哪些运算律．

首先看看它有没有交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

由向量数量积的定义，可以直接推出交换律成立．

另外，容易验证数乘以向量的数量积，可以与任意一个向量交换结合，即对任意实数 λ，有

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}).$$

在数量乘法中，最重要的运算律，要算分配律了．向量的数量积是否具有分配律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}?$$

直观上，不太容易看出它是否成立．让我们从向量数量积的几何意义出发，看看分配律是否成立．

我们知道，一个向量与一个轴上单位向量的数量积等于这个向量在轴上正投影的数量．如果分配律中的向量 $\boldsymbol{c}$ 换成它的单位向量 $\boldsymbol{c}_0$，则分配律变为

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}_0. \qquad ①$$

证明分配律就变为证明：两个向量和在一个方向上的正投影的数量等于各个向量在这个方向上的投影的数量和．

为此，我们画出①式两边的几何图形(图 2-51)，看看能否推出①式两边相等．

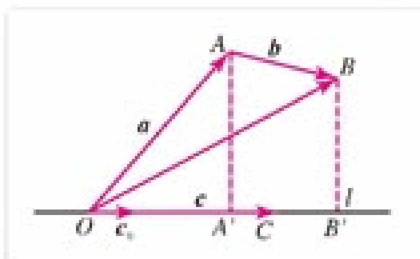


图 2-51

作轴 l 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的单位向量 $\boldsymbol{c}_0$ 平行．

作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

设点 O，A，B 在轴 l 上的射影为 O，A'，B'，根据向量的数量积的定义有

$$OA'=\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_0,$$
$$A'B'=\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}_0,$$
$$OB'=\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{c}_0=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}_0,$$

但对轴上任意三点 O，A'，B'，都有

$$OB'=OA'+A'B',$$

即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}_0,$$

这就证明了①式成立．

①式两边同乘以 $|\boldsymbol{c}|$，得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

至此，我们完成了分配律的探索与证明．

例 1 求证：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2)$.

证明 (1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$；

(3) 由(1)中的等式解出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即得所要证明的等式.

例 2 求证菱形的两条对角线互相垂直.

已知：$ABCD$ 是菱形，AC 和 BD 是它的两条对角线(图 2-52).

求证：$AC\perp BD$.

证明 因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，所以

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2.$$

因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，所以

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0.$$

因此 $AC\perp BD$.

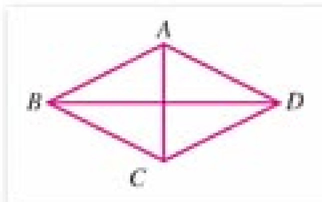


图 2-52

练习A

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$，求$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.
2. 已知$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=8$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120°$，求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.
3. 在$\triangle ABC$ 中，已知$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=5$，$\angle ABC=60°$，求$|\overrightarrow{AC}|$.
4. 用向量内积运算，证明勾股定理.

练习B

1. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $AB=8$，$BC=7$，$\angle ABC=150°$，求 AC 的长.
2. 用内积运算，证明长方形的两条对角线相等.

2.3.3 向量数量积的坐标运算与度量公式

1. 向量内积的坐标运算

建立正交基底$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. 已知$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)\\&=a_1b_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+a_1b_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+a_2b_1\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1+a_2b_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

因为$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1=0$，所以我们得到数量积的坐标表达式

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2.}$$

2. 用向量的坐标表示两个向量垂直的条件

如果$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；反之，如果$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

上述两个向量垂直的条件，换用两向量的数量积坐标表示，即为：

如果$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$a_1b_1+a_2b_2=0$；如果$a_1b_1+a_2b_2=0$，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 因此

$$\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0.}$$

当$b_1b_2\neq0$时，条件$a_1b_1+a_2b_2=0$，可以写成$\dfrac{a_1}{-b_2}=\dfrac{a_2}{b_1}=k$.

这就是说，如果$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则向量$(a_1, a_2)$与$(-b_2, b_1)$平行，上式中的$k$是比例系数. 于是得到：

对任意实数k，向量$k(-b_2, b_1)$与向量(b_1, b_2)垂直.

例如，向量$(3, 4)$与向量$(-4, 3)$，$(-8, 6)$，$(12, -9)$…垂直.

思考与讨论

在直角坐标系xOy中，任作一单位向量$\overrightarrow{OA}$旋转90°到向量$\overrightarrow{OB}$的位置，这两个向量的坐标之间有什么关系？你能用上述垂直的条件，证明下面的诱导公式吗？

$$\cos(\alpha+90^\circ)=-\sin\alpha,\quad \sin(\alpha+90^\circ)=\cos\alpha.$$

反过来，你能用这两个诱导公式，证明上述两个向量垂直的坐标条件吗？把两向量垂直的坐标条件可视化. 有条件的同学可用“几何画板”、“Scilab”等数学软件进行可视化研究.

3. 向量的长度、距离和夹角公式

如图 2-53，已知$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，则

$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)\cdot(a_1, a_2)=a_1^2+a_2^2.$$

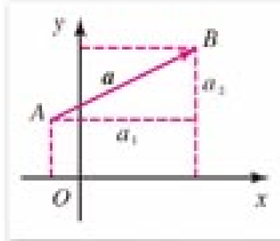


图 2-53

因此

$$\boxed{|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.} \qquad ①$$

这就是根据向量的坐标求向量长度的计算公式.

这个公式用语言可以表述为：

向量的长度等于它的坐标平方和的算术平方根.

如果 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1),$$

从而

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.} \qquad ②$$

$\overrightarrow{AB}$的长就是 A，B 两点之间的距离，因此②式也就是求两点的距离公式. 这与我们在解析几何初步中得到的两点距离公式完全一样.

由向量数量积的坐标表达式和向量长度计算公式，以及向量数量积的定义，就可以直接推得求两个向量夹角余弦的坐标表达式

$$\boxed{\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.}$$

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=(3, -1)$，$\boldsymbol{b}=(1, -2)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

解：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3, -1)\cdot(1, -2)=3+2=5$；

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{(3, -1)\cdot(3, -1)}=\sqrt{10}$；

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{(1, -2)\cdot(1, -2)}=\sqrt{5}$；

因为 $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}.$$

例 2 已知点 $A(1, 2)$，$B(2, 3)$，$C(-2, 5)$，求证$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

证明：因为

$$\overrightarrow{AB}=(2, 3)-(1, 2)=(1, 1),$$
$$\overrightarrow{AC}=(-2, 5)-(1, 2)=(-3, 3),$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1, 1)\cdot(-3, 3)=0,$$

所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

例 3 已知点 $A(1, 2)$，$B(3, 4)$，$C(5, 0)$，求$\angle BAC$ 的正弦值.

解：因为

$$\overrightarrow{AB}=(3-1, 4-2)=(2, 2),$$

$$\overrightarrow{AC}=(5-1,\ 0-2)=(4,\ -2),$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8},$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20},$$

所以

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|}=\frac{(2,\ 2)\cdot(4,\ -2)}{\sqrt{8}\times\sqrt{20}}=\frac{4}{4\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

因此

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

例 4 已知点 $A(a,\ b)$ 与点 $A'(b,\ a)$，求证直线 $y=x$ 是线段 AA' 垂直平分线（图 2-54）.

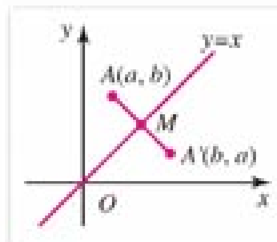


图 2-54

证明： 设线段 AA' 的中点为 $M(x,\ y)$，则依据中点公式，有

$$x=\frac{a+b}{2},\qquad y=\frac{b+a}{2}.$$

由此得 $x=y$，点 M 在直线 $y=x$ 上. 在直线 $y=x$ 上，任取一点 P，则可设 $P(x,\ x)$，于是 $\overrightarrow{OP}=(x,\ x)$.

又因为 $\overrightarrow{AA'}=(b-a,\ a-b)$，所以

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AA'}=x(b-a)+x(a-b)=0.$$

所以 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AA'}$.

因此，直线 $y=x$ 是线段 AA' 的垂直平分线.

练习A

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 和 $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$：
   (1) $\boldsymbol{a}=(4,\ 5)$，$\boldsymbol{b}=(-4,\ 3)$；
   (2) $\boldsymbol{a}=(3,\ 5)$，$\boldsymbol{b}=(-5,\ 3)$；
   (3) $\boldsymbol{a}=(8,\ 5)$，$\boldsymbol{b}=(-7,\ -8)$；
   (4) $\boldsymbol{a}=(-11,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ 9)$.
2. 已知 $A(1,\ 2)$，$B(-5,\ 8)$，$C(-2,\ -1)$，求证 $AB\perp AC$.
3. 已知 $A(1,\ 1)$，$B(-3,\ 4)$，$C(0,\ 8)$，试求 $\triangle ABC$ 的三个内角.

练习B

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,5)$，求 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的正射影数量.
2. 写出与下列向量垂直的单位向量：

   (1) $\boldsymbol{a}=(3,4)$；　　(2) $\boldsymbol{b}=(-1,1)$；

   (3) $\boldsymbol{c}=(-3,-4)$；　　(4) $\boldsymbol{d}=(12,-5)$.
3. 已知点 $A(3,3)$，有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点 O 旋转角 $\frac{\pi}{2}$ 到 $\overrightarrow{OB}$ 位置，求点 B 的坐标.
4. 已知点 $A(1,1)$，$B(5,3)$，有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 $\overrightarrow{AC}$ 的位置，求点 C 的坐标.
5. 已知坐标原点是正方形 $ABCD$ 的中心，顶点 $A(2,2)$. 求其他三个顶点的坐标.

习题2-3 A

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，$\angle BAC=120^\circ$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的正射影的数量是 3，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
3. 已知 $|\boldsymbol{b}|=5$，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的正射影的数量是 -3，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，求：

   (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

   (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　　(4) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.
5. 已知 $A(-10,3)$，$B(-2,3)$，$C(0,-1)$，求 $\triangle ABC$ 的三个内角(精确到分).
6. 已知 $A(7,5)$，$B(2,3)$，$C(6,-7)$，求证 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

习题2-3 B

1. 下面各对向量是否垂直？

   (1) $\boldsymbol{a}=(-3,2)$，　　$\boldsymbol{b}=(4,6)$；

   (2) $\boldsymbol{a}=(7,1)$，　　$\boldsymbol{b}=(-2,14)$；

   (3) $\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，　　$\boldsymbol{b}=\left(2,-\frac{2}{3}\right)$；

   (4) $\boldsymbol{a}=(3,5)$，　　$\boldsymbol{b}=(5,3)$.
2. 已知：$\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\boldsymbol{b}=(-y,x)$，$\boldsymbol{c}=(y,-x)$.

   求证：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的余弦：

(1) $\boldsymbol{a}=(3,4)$， $\boldsymbol{b}=(-2,5)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(-2,-3)$， $\boldsymbol{b}=(1,2)$.

4. 已知 $A(6,3)$，$B(9,3)$，$C(3,3+3\sqrt{3})$，求 $\angle BAC$.

5. 已知 $\triangle PQR$，点 $P(-1,2)$，$Q(-2,-3)$，$R(1,1)$，求边 QR 上的高.

6. 已知正方形 $ABCD$，点 $A(-2,3)$，$C(1,1)$，求顶点 D 的坐标.

2.4 向量的应用

2.4.1 向量在几何中的应用

1. 向量在平面几何中的应用

在学习向量及其运算时，我们已经看到向量加法运算和全等、平行，数乘向量和相似，距离、夹角和向量的数量积之间的密切联系. 这里，我们再举几个例子，体会一下向量在平面几何解题中的应用.

例 1 如图 2-55，已知平行四边形 $ABCD$ 中，E，F 在对角线 BD 上，并且 $BE=FD$，求证 $AECF$ 是平行四边形.

证明： 由已知可设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}=\boldsymbol{b}$，则

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，所以

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC},$$

即边 AE，FC 平行且相等.

因此，$AECF$ 是平行四边形.

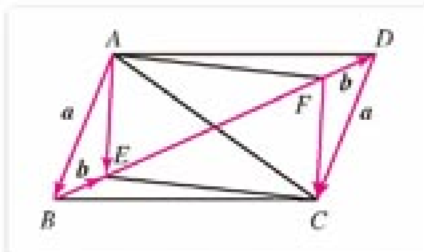


图 2-55

思考与讨论

在初中学习平面几何时，大家可能已经证明过这道题，那时的证明，要用到平行四边形的性质和三角形全等的判定定理. 这里用向量证明，仅仅用到向量加法运算及交换律. 利用向量的运算证明一些几何题，比平面几何的“从图形的一个性质推出另一性质”简单多了. 对数学感兴趣的同学，不妨多想想，看看你有些什么体会.

例 2　求证：平行四边形对角线互相平分.

在初中时，这个定理用三角形全等判定定理和平行线的性质证明过．这里，我们用向量运算的方法再证一次．虽然证明过程看上去并不简单，但证明过程给我们提供了用向量证明几何问题的一般方法.

证明：如图 2-56，已知▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 M，设$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BD}$，则

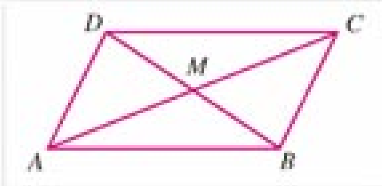


图 2-56

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AD},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\&=\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AB}+y(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\\&=(1-y)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

于是，我们得到$\overrightarrow{AM}$关于基底$\{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\}$的两个分解式．因为分解是唯一的，所以

$$\begin{cases}x=1-y\\x=y\end{cases}$$

解此方程组，得 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$．所以点 M 是 AC 和 BD 的中点，即对角线 AC 和 BD 在交点 M 处互相平分.

从例 2 的证明可以看到，证明方法与代数学中的解应用题方法（设未知数，列方程）基本一致．这里，也是先设未知数，由题中给出的条件，列出向量表达式，再选基底向量，列出同一向量的两个分解式，由向量分解的唯一性转化为方程组求解.

例 3　已知正方形 $ABCD$(图 2-57)，P 为对角线 AC 上任意一点，$PE\perp AB$ 于点 E，$PF\perp BC$ 于点 F，连接 DP，EF．求证$DP\perp EF$.

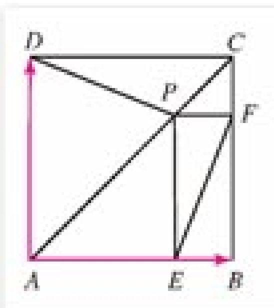


图 2-57

证明：选择正交基底$\{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\}$，在这个基底下，有

$$\overrightarrow{AB}=(1,\ 0),\ \overrightarrow{AD}=(0,\ 1),$$

由已知，可设$\overrightarrow{AP}=(a,\ a)$，得

$$\overrightarrow{EB}=(1-a,\ 0),\quad \overrightarrow{BF}=(0,\ a),$$

$$\overrightarrow{EF}=(1-a,\ a),\quad \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}=(a,\ a-1).$$

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{EF}&=(1-a,\ a)\cdot(a,\ a-1)\\&=(1-a)a+a(a-1)=0,\end{aligned}$$

所以$\overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{EF}$，因此 $DP\perp EF$.

2. 向量在解析几何中的应用

我们已用向量分解的观点重新认识了直角坐标系．下面举例说明向量在解析几何中的应用．

例 4 求通过点 $A(-1, 2)$，且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(3, 2)$ 的直线方程（图 2-58）．

解：过点 A 且平行于向量的直线是唯一确定的，把这条直线记为 l．在 l 上任取一点 $P(x, y)$，则

$$\overrightarrow{AP}\parallel \boldsymbol{a}.$$

由向量共线的坐标表示，可得：

$$\frac{x-(-1)}{3}=\frac{y-2}{2}.$$

整理，得 $2x-3y+8=0$．

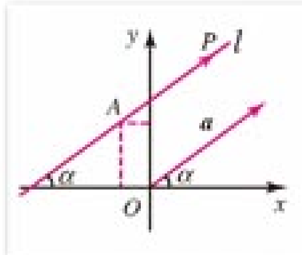


图 2-58

反过来，以这个方程的解 (x, y) 为坐标的点也一定在直线 l 上，所以这个方程就是所求的直线方程．

在解析几何初步中，我们用一条直线的倾斜角或斜率确定直线的方向．现在看一看直线的倾斜角、斜率与平行于这条直线的向量之间的关系．

设直线 l 的倾斜角为 α（图 2-58），斜率为 k，$A(x_1, y_1)\in l$，$P(x, y)\in l$，向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$ 平行于 l，由直线斜率和正切函数的定义，可得

$$\boxed{k=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{a_2}{a_1}=\tan\alpha.}$$

如果知道直线的斜率 $k=\frac{a_2}{a_1}$，则向量 (a_1, a_2) 一定与该直线平行．

如果表示向量的基线与一条直线垂直，则称这个向量垂直该直线．这个向量称为这条直线的法向量．

例 5 已知直线 l：$Ax+By+C=0$，$\boldsymbol{n}=(A, B)$．求证向量 $\boldsymbol{n}\perp l$（图 2-59）．

证明：设 (x_0, y_0) 为直线 l 的方程的一个解，则

$$Ax_0+By_0+C=0. \qquad ①$$

对 l 的方程和①式两边作差，整理，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

由向量垂直的条件，得向量 $\boldsymbol{n}=(A, B)$ 与向量 $(x-x_0, y-y_0)$ 垂直．由于动点 (x, y) 的集合就是直线 l，所以 $\boldsymbol{n}\perp l$．

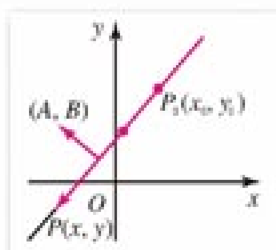


图 2-59

例 5 所证结论，使我们得到直线一般方程 $Ax+By+C=0$ 中，变量 x，y 的系数构成向量 (A, B) 的几何解释．即向量 (A, B) 与直线 l 垂直，向量 $(-B, A)$ 与 l 平行．这样，直线间的位置关系，即平行、垂直、夹角，就可转化为向量问题来处理．

例 6 求通过 $A(2, 1)$，且与直线 l：$4x-3y+9=0$ 平行的直线方程（图 2-60）．

解：因为向量$(4,-3)$与直线l垂直，所以向量$\boldsymbol{n}=(4,-3)$与所求的直线垂直.

设$P(x,y)$为一动点，则$\overrightarrow{AP}=(x-2,y-1)$. 点$P$在所求直线上，当且仅当

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0.$$

转化为坐标表示，即

$$4(x-2)+(-3)(y-1)=0.$$

整理，得$4x-3y-5=0$.

这就是所求的直线方程.

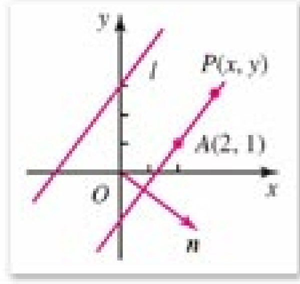


图 2-60

探索与研究

1. 利用向量与向量平行、垂直的条件，再次研究两条直线l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$平行和垂直的条件，以及如何求出两条直线夹角θ的余弦.

结论：

$$l_1 /\!/ l_2\text{（或重合）}\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0.$$
$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$$
$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

2. 用向量的数量积运算的几何意义推导点到直线的距离公式.

已知直线l：$Ax+By+C=0$和定点$P(x_0,y_0)$，而且$M(x,y)\in l$，$\boldsymbol{n}_0$为与l垂直的单位向量，则

$$d(P,l)=|\overrightarrow{MP}\cdot\boldsymbol{n}_0|.$$

练习A

用向量方法求解下面的练习.

1. 求证梯形的中位线长等于两底长的和的一半.

2. 已知等腰$\triangle ABC$，$AB=AC$，点M为边BC的中点，求证$AM\perp BC$.

3. 求经过点P且平行于向量$\boldsymbol{a}$的直线方程及直线的倾斜角（精确到分）：

(1) $P(3,-5)$，$\boldsymbol{a}=(1,2)$；　(2) $P(0,3)$，$\boldsymbol{a}=(3,-4)$；

(3) $P(-2,1)$，$\boldsymbol{a}=(-2,3)$；　(4) $P(-2,0)$，$\boldsymbol{a}=(0,3)$.

4. 求直线AB的方程及直线的倾斜角（精确到分）：

(1) $A(-3,2)$，$B(4,-7)$；　(2) $A(3,0)$，$B(0,5)$.

练习B

1. 求证三角形的三条中线相交于一点，且交点分每条中线为2∶1两段.
2. 求过点$P(1,\ -1)$，且与向量$\boldsymbol{n}=(4,\ -3)$垂直的直线方程.
3. 由下列条件写出直线的一般式方程，并画出图形：

(1) 过点$(2,\ -3)$，平行于向量$\boldsymbol{v}=(-3,\ 4)$；

(2) 斜率是$-\frac{1}{4}$，过点$(1,\ 4)$；

(3) 过点$(3,\ 2)$，垂直于向量$\boldsymbol{n}=(3,\ -4)$；

(4) 过点$(2,\ 3)$，平行于x轴.

2.4.2 向量在物理中的应用

1. 力向量

力向量与前面学过的自由向量有些不同，它不仅包括大小、方向两个要素，而且还有作用点. 大小和方向相同的两个力，如果作用点不同，那么它们是不相等的. 但力是具有大小和方向的量，在不考虑作用点的情况下，可利用向量运算法则进行计算. 例如，求作用于同一点的两个力的合力，可用向量求和的平行四边形法则(图2-61).

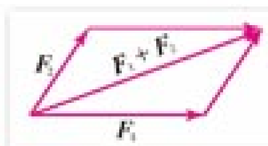


图2-61

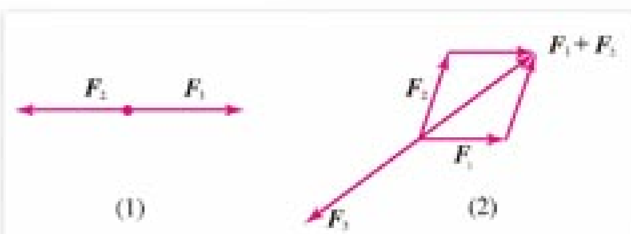


图2-62

同一平面上，作用于同一点的两个力$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$或三个力$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$处于平衡状态(图2-62)，可分别用等式来表示

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}.$$

例1 如图2-63所示，求两个力$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$的合力$\boldsymbol{F}$的大小（精确到0.1 N）和方向(精确到分).

解：设$\boldsymbol{F}_1=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{F}_2=(b_1,\ b_2)$，则

$a_1=300\cos 30^\circ\approx 259.81$,

$a_2=300\sin 30^\circ\approx 150.00$,

$b_1=-200\cos 45^\circ\approx -141.42$,

$b_2=200\sin 45^\circ\approx 141.42$,

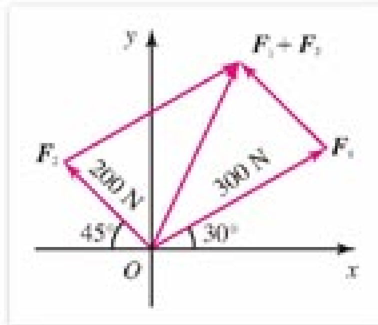


图 2-63

所以

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{F}_1=(259.81,\ 150.00),\\&\boldsymbol{F}_2=(-141.42,\ 141.42),\\&\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=(259.81,\ 150.00)+(-141.42,\ 141.42)\\&\quad=(118.39,\ 291.42),\\&|\boldsymbol{F}|=\sqrt{118.39^2+291.42^2}\approx 314.6.\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴的正向夹角为 θ，则

$$\tan\theta=\frac{291.42}{118.39}\approx 2.4615.$$

因为由 $\boldsymbol{F}$ 的坐标知 θ 是第一象限的角，所以

$$\theta\approx 67^\circ 53'.$$

答：两个力的合力是 314.6 N，与 x 轴的正方向的夹角为 $67^\circ 53'$，与 y 轴的夹角为 $22^\circ 7'$.

2. 速度向量

一质点在运动中每一时刻都有一个速度向量．例如，“东北风 30 m/s” 可用图 2-64 中的有向线段表示.

图 2-64

例 2 河水从东向西流，流速为 2 m/s，一轮船以 2 m/s 垂直于水流方向向北横渡，求轮船实际航行的方向和航速（精确到 0.1 m/s）（图2-65）.

解：设 $\boldsymbol{a}=$ “向西方向，2 m/s”，$\boldsymbol{b}=$ “向北方向，2 m/s”，则

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|&=\sqrt{2^2+2^2}\\&=2\sqrt{2}\\&\approx 2.8(\text{m/s}).\end{aligned}$$

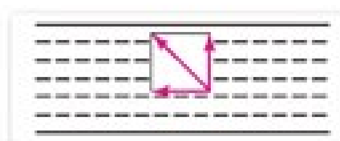


图 2-65

由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，可得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向为西北方向.

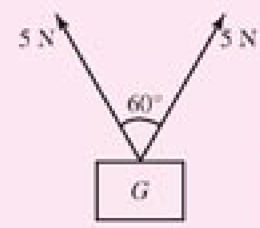
答：轮船实际航行速度为“向西北方向，2.8 m/s”.

以上我们仅以力、速度向量为例，说明向量的应用，其实向量在电学、力学、工程和机械等各学科中都有着十分广泛的应用.

练习A

1. 某飞机在无风时的航速是 320 km/h. 现在飞机向东北（北偏东 45°）飞行，而风速是向北 80 km/h，求这架飞机实际的航行方向和航速.
2. 由坐标原点引$\overrightarrow{OF_1}=(3, 1)$，$\overrightarrow{OF_2}=(-4, 5)$分别表示两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，如果力 $\boldsymbol{F}_3$ 满足 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{F}_3$ 的大小.
3. 在平面内同时作用于一点的三个大小相等的力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$，彼此所成的角是 120°，作图验证 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$.
4. 已知向量$\overrightarrow{OF_1}=(2, 2)$，$\overrightarrow{OF_2}=(-2, 3)$分别表示两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，求 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 的大小.

练习B



（第1题）

1. 如图，两条绳提一个物体，每条绳用力 5 N，这时两条绳的夹角为 60°，求物体的重量 G.
2. 河水自西向东流速为 3 m/s，轮船向西北方向航速为 5 m/s，求轮船实际航行方向和航速.
3. 一人迎着西北风，骑车以 8 km/h 的速度向北行驶，这时西北风（风向东南）的风速是20 km/h，如果风停了，这个人用力不变，问他的骑车速度应是多少？

习题2-4 A

1. 已知▱$ABCD$，M 是 BC 的中点，DM 交 AC 于点 E，求 $AE:AC$.
2. 已知两直线 l_1：$3x+4y-3=0$，l_2：$5x-y+3=0$，求这两条直线所成锐角的余弦.
3. 在直角坐标系中，已知正方形 $ABCD$ 的顶点 $A(-2, 1)$，$B(0, 2)$，求顶点 C，D 的坐标.
4. 已知 $ABCDEF$ 是正六边形. 求向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{AF}$所表示的力的合力.

习题2-4 B

1. 已知 M 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 的中点，L 分对角线 AC 的比为$AL:LC=3:1$，求证$\angle MLD$ 为直角.

2. 在直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(5, 0)$，$B(4, 3)$，且 $AD \perp OB$ 于点 D，求点 D 的坐标.（提示：设 $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OB}$.）

3. 在直角坐标系 xOy 中，已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-2, 11)$，$B(-4, -5)$，$C(6, 0)$，AD 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高，求点 D 的坐标和高.

4. 如果 M 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边的中点，求证：

$$|AB|^2+|AC|^2=2|AM|^2+2|BM|^2.$$

本章小结

Ⅰ 知识结构

Ⅱ 思考与交流

1. 你认为为什么要引入向量？你在生活中遇到过哪些向量的实例？你对向量的概念如何理解？
2. 向量的加法、减法和乘法等线性运算各是怎样规定的？规定的含义是什么？如何理解？这样规定的运算满足哪些运算律？你能比较熟练地进行这些运算吗？
3. 向量的数量积(内积)运算是怎样规定的？规定的含义是什么？如何理解？内积运算满

足哪些运算律？你能比较熟练地进行内积运算吗？

4. 怎样把任意一个非零向量作正交分解，并分解为两个不平行向量的线性组合？怎样建立向量的坐标表示？

5. 如何用向量坐标表示向量的运算？你能比较熟练地进行向量的坐标运算吗？

6. 如何用向量的坐标运算导出两向量平行、垂直的条件、向量长度公式(两点距离公式)、夹角公式等？

7. 用向量运算作工具解决你在数学、物理或实际中遇到的一些问题，和同学们交流.

Ⅲ 巩固与提高

1. 填空：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$______；

(2) 已知$\square ABCD$，则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$______，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$______；

(3) 如果$\boldsymbol{a}=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的关系是______；

(4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BA}=$______；

(5) $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_1}=$______；

(6) 已知$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，则点$M$是线段$AB$的____；

(7) 已知$\overrightarrow{OM}=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，则$\overrightarrow{AM}=$____$\overrightarrow{AB}$；

(8) 已知$A(3,\ -5)$，$B(1,\ -7)$，则线段AB的中点的坐标是______；

(9) 已知$A(5,\ -4)$，$B(-1,\ 4)$，则$|\overrightarrow{AB}|=$____；

(10) 已知$A(2,\ 1)$，$B(-3,\ -2)$，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，则点$M$的坐标是_____.

2. 如果$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$分别满足下列各式，试问$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$之间有什么关系？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$；　　(4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；　　(6) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

3. 已知O是正五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$的中心，求证：

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=\mathbf{0}.$$

4. 已知$\triangle ABC$，点O为$\triangle ABC$的重心(三条中线的交点)，求证：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}.$$

5. 在$\triangle ABC$中，引中线AD，BE，CF，求证：

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}.$$

6. 给定一个基底$\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$且$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=12\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，如果$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，求$x$，$y$.

7. 已知 $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$，$|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=1$，$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，计算：
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})+1.$$
8. 已知向量 $\boldsymbol{r}$ 的模和它相对于 x 轴正方向的转角 θ，求向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标：
(1) $|\boldsymbol{r}|=16$，$\theta=60°$；　(2) $|\boldsymbol{r}|=26$，$\theta=45°$；
(3) $|\boldsymbol{r}|=80$，$\theta=120°$；　(4) $|\boldsymbol{r}|=200$，$\theta=65°$.
9. 已知 $A(-1,1)$，$B(3,2)$，$D(0,5)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，$AC$ 与 BD 相交于点 M，求点 C，点 M 的坐标.
10. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(3,4)$，点 A 的坐标为 $(1,2)$，求点 B 的坐标.
11. 已知平行四边形 $ABCD$ 的三顶点 A，B，C 的坐标分别为 $A(-1,-3)$，$B(3,1)$，$C(5,2)$，求第四顶点 D 和它的中心的坐标.
12. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-4,5)$，分别求 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{b}_0$.
13. 用向量法证明：对角线相等的平行四边形是长方形.
14. 用向量法证明：平行四边形两条对角线长度的平方和等于平行四边形四边长度的平方和.
15. 某人由点 O 出发向西走 2 km，再向西偏北 30°走 3 km，再向北偏东 45°走 4 km，再向北走 5 km 到达 M 地，求 M 地相对于 O 地的位置向量(距离和方向).
16. 设点 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心，O 是平面上任意一点，求证：
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$
17. 在正八边形 $A_1A_2A_3\cdots A_8$ 中，设 $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1A_8}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示：
$$\overrightarrow{A_2A_3},\ \overrightarrow{A_2A_4},\ \overrightarrow{A_4A_5},\ \overrightarrow{A_5A_6},\ \overrightarrow{A_6A_7},\ \overrightarrow{A_7A_8}.$$
18. 求下面方程组中的向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$：
$$\begin{cases}5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$$
19. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$：
(1) 求向量 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的坐标；　(2) 求 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 的长度；
(3) 求 x 的值使 $x\boldsymbol{a}+(3-x)\boldsymbol{b}$ 与 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 为平行向量.
20. 已知 $A(2,1)$，$B(-2,3)$，如果点 P 和点 M 分别满足 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PM}=-3\overrightarrow{AB}$，求点 P 和点 M 的坐标.
21. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,5)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2)$. 求 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上正射影的坐标.
22. 已知两点 A，B 的坐标为 $(5,0)$，$(0,5)$，直线 OP 垂直于直线 AB 于点 P，求点 P 的坐标.

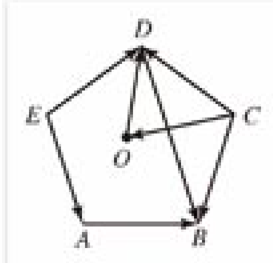
Ⅳ 自测与评估

1. 已知 E，F 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB，AC 上的点，且 $EF/\!/BC$，$AE=\frac{1}{3}AB$. 如果 $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{CF}$.

2. 设 O 是正五边形 $ABCDE$ 内任意一点，求证：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}=2(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ED}).$$



（第 2 题）

3. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不平行的向量，分别求满足下列各条件的实数 m，n 的值：
   (1) $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(m-1)\boldsymbol{a}+(2-n)\boldsymbol{b}$；
   (2) 向量 $(m^2-n)\boldsymbol{a}+(2n^2+n)\boldsymbol{b}$ 以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为基底的分解式为 $2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,0)$，求：
   (1) $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；
   (3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　(4) $\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$；
   (5) $\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle$；　　(6) $\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle$.
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(8,6)$，$\boldsymbol{c}=(2,k)$，其中 k 为常数，如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别与 $\boldsymbol{c}$ 所成的角相等，求 k 的值.

数学文化

阅读与欣赏

向量概念的推广与应用

学习了平面向量，我们知道在平面上建立了坐标系后，坐标平面上的任一向量，都可以用一个有序实数对(a_1, a_2)表示．以后我们还将学习空间向量．空间向量可用一个三元有序实数组(a_1, a_2, a_3)来表示．平面向量、空间向量我们都称之为**几何向量**．

在实际问题中，往往会遇到一些量，需要用更多的实数来表示．比如：

期末进行了五门考试，每个学生的考试成绩情况可用顺序排列的五科成绩来表示．

在汽车生产线上，如果对装配好的汽车进行制动距离、最高车速、每千米油耗量、滑行距离、噪声、废气排放量等六项指标的测试，那么每辆新车质量可用六元有序实数组表示．

n元有序实数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，被称为n**维向量**，它是几何向量的推广．所有n维向量的全体构成的集合，称作n**维向量空间**，它的一个元素可看成n维向量空间的一点．

设$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n), \lambda\in\mathbf{R},$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

n维空间中，点$A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$与$B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$的距离

$$d_{A,B}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}.$$

利用向量的运算可解决许多实际问题．

为研究某种商品的销售量是否随季节的变化而出现规律性的变化，采集了5年该种商品每月销售量的数据．每年该商品的销售量可用12个月的销售量所形成的12维向量表示．不妨设五年的销售向量分别为

$$\boldsymbol{a}_1=(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1\,12});$$

$$\boldsymbol{a}_2=(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2\,12});$$

$$\boldsymbol{a}_3=(a_{31}, a_{32}, \cdots, a_{3\,12});$$

$$\boldsymbol{a}_4=(a_{41}, a_{42}, \cdots, a_{4\,12});$$

$$\boldsymbol{a}_5=(a_{51}, a_{52}, \cdots, a_{5\,12}).$$

计算这5年的月平均销售向量

$$\frac{1}{5}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5),$$

观察这一向量的12个分量，就可看出这5年月平均销售量是否与季节的变化有关．

上面是一个应用向量线性运算的例子．下面我们再来看用“距离”概念解决实际问题的例子．

某企业要为一万名职工制作工作服，测量每人身高、胸围、腰围三个指标．每个人的身材用三维向量表示，并把它看作三维空间中的一个点．现准备制作五种型号的服装，需要测量每种型号的服装制作多少套．用数学语言来描述，就是如何将一万个点分成五类．一种常用的分类方法是依据“距离”来分类．五种标准型号为五个点，用两点距离的计算公式，计算每个人的身材点与五个标准点的距离，与哪个标准点的距离最近就归哪一类．最后，计算出属于每一类的点数，就是这一类服装所需要的套数（实际计算中应将数据标准化）．如今是计算机的世界，上述计算不再令人生畏，向计算机输入数据，计算机能在很短时间内完成计算任务．

如果同学们留意的话，会发现有关向量应用的例子比比皆是．

从以上两个例子可以看出，有序实数组构成的向量，比几何向量的应用更加广泛．在日常生活和科学研究中，有许多量都可由实数组构成的向量来表示，并可用向量理论研究这些量的性质．


y
O
x
I_1
I_2

第三章 三角恒等变换

3.1 和角公式

3.2 倍角公式和半角公式

3.3 三角函数的积化和差与和差化积

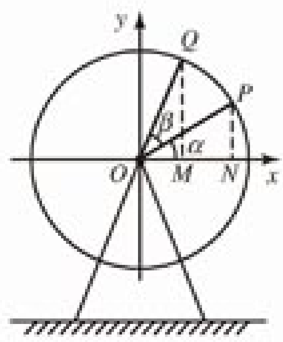
我们已经学过诱导公式，如

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha,\qquad \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha,$$
$$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha,\qquad \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha.$$

可以这样来认识以上公式：把角 α 的终边转动 $\frac{\pi}{2}$，则所得角 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 的正弦、余弦分别等于 $\cos\alpha$ 和 $-\sin\alpha$. 把角 α 的终边转动 π，则所得角 $\alpha+\pi$ 的正弦、余弦分别等于 $-\sin\alpha$ 和 $-\cos\alpha$.

由此使我们想到一个一般性的问题：如果把角 α 的终边转动 β(度或弧度)，那么所得角 $\alpha+\beta$ 的正弦、余弦如何用 α 或 β 的正弦、余弦来表示？

让我们再来考察观览车问题.



右图是观览车的示意图. 我们考察观览车转轮上的两个座椅 P，Q 的转动. 设转轮静止时，OP 平行于地面. 现在的问题是，当座椅 P 转动角 α 后，如果知道座椅 P 到地面的距离，如何计算座椅 Q 到地面的距离？

以转轮的中心 O 为坐标原点建立直角坐标系 xOy，不妨设观览车的转轮半径为单位长. 由于转轮中心 O 到地面的距离为定值，则上述问题就可转化为如下的数学问题：

已知单位圆上两点 P，Q，记 $\angle xOP=\alpha$，$\angle POQ=\beta$，则点 P 的纵坐标为 $\sin\alpha$，点 Q 的纵坐标为 $\sin(\alpha+\beta)$.

由问题的已知条件，容易求出 $\sin\alpha$，$\cos\beta$. 现在要问，能否由 α，β 的正弦和余弦值求出 $\sin(\alpha+\beta)$？

事实上，我们在研究三角函数的变形或计算时，经常提出这样的问题：能否用 α，β 的三角函数去表示 $\alpha\pm\beta$ 的三角函数？为了解决这类问题，本章首先用向量方法推证 $\alpha-\beta$ 的余弦与 α，β 的正弦、余弦的关系式，进而研究 $\alpha\pm\beta$ 的正弦、正切公式. 在此基础上推证倍角公式、半角公式以及积化和差、和差化积公式. 这些公式是进行三角恒等变换的基础，有着广泛的应用.

3.1 和角公式

3.1.1 两角和与差的余弦

在这一节我们来研究，如果知道了 α，β 的三角函数，如何计算 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 的三角函数.

让我们来证明关系式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

这两个公式分别记作 $C_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha-\beta}$.

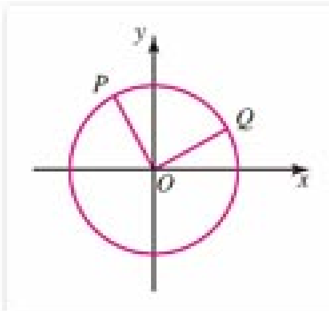


图 3-1

证明： 以坐标原点为中心作单位圆(图 3-1)，以 Ox 为始边作角 α 与 β，它们终边分别与单位圆相交于点 P，Q，则

$$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ Q(\cos\beta,\ \sin\beta),\ |\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=1.$$

因此存在 $k\in\mathbf{Z}$，使得 $\alpha-\beta=\langle\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ}\rangle+2k\pi$ 或 $\alpha-\beta=-\langle\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ}\rangle+2k\pi$ 成立.

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}&=(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\sin\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\\\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}&=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle\\&=\cos(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

于是

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

例 1 求 $\cos 105^\circ$ 及 $\cos 15^\circ$ 的值.

解： $\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$;

$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

例 2 已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

解：因为 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

因此

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)&=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\\&=\frac{3-4\sqrt{3}}{10};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)&=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\\&=-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.\end{aligned}$$

例 3 利用公式 $C_{\alpha+\beta}$ 证明：

$$\cos[\alpha+(2k+1)\pi]=-\cos\alpha.$$

证明：$\cos[\alpha+(2k+1)\pi]$

$=\cos\alpha\cos[(2k+1)\pi]-\sin\alpha\sin[(2k+1)\pi]$

$=-\cos\alpha$.

练习A

1. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 成立吗？为什么？

2. 求下列各式的值：

(1) $\cos 75^\circ$；　(2) $\cos(-165^\circ)$；　(3) $\cos\dfrac{7\pi}{12}$；　(4) $\cos\left(-\dfrac{61\pi}{12}\right)$.

3. 利用公式 $C_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha-\beta}$ 证明：

(1) $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$；　(2) $\cos\left(-\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$.

练习B

1. 求下列各式的值：

(1) $\cos 80^\circ\cos 20^\circ+\sin 80^\circ\sin 20^\circ$；　(2) $\cos 20^\circ\cos 25^\circ-\sin 20^\circ\sin 25^\circ$；

(3) $\cos 22.5^\circ\cos 22.5^\circ-\sin 22.5^\circ\sin 22.5^\circ$.

2. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$，而且 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

4. 化简：

(1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)$；　(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$.

5. 设 α 为锐角，求证：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$；　(2) $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$.

探索与研究

如图 3-2，在单位圆上任取两点 P，Q，设向量$\overrightarrow{OP}$的转角为 α，$\overrightarrow{OP}$到$\overrightarrow{OQ}$的转角为 β，分别以$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$作单位基底再作两条数轴. 请在坐标系 xOy 中，找出表示 $\cos(\alpha+\beta)$，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$ 的有向线段，并探索它们之间的关系.

以上研究还可结合课件“和角公式的几何意义”进行探索.

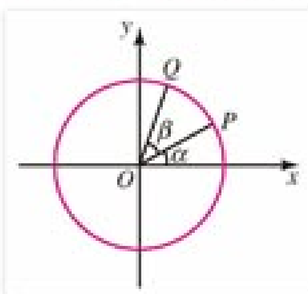


图 3-2

3.1.2 两角和与差的正弦

求证：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \quad (S_{\alpha+\beta})$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \quad (S_{\alpha-\beta})$$

证明：
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left[-(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\right]\\&=\cos\left[\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\beta\right]\\&=\cos\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta+\sin\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin[\alpha+(-\beta)]\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

例 1 求 $\sin 75^\circ$，$\sin 15^\circ$的值.

解：
$$\begin{aligned}\sin 75^\circ&=\sin(45^\circ+30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sin 15^\circ&=\sin(45^\circ-30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

例 2 已知向量$\overrightarrow{OP}=(3，4)$，逆时针旋转 45°到$\overrightarrow{OP'}$的位置. 求点 $P'(x'，y')$ 的坐标(图 3-3).

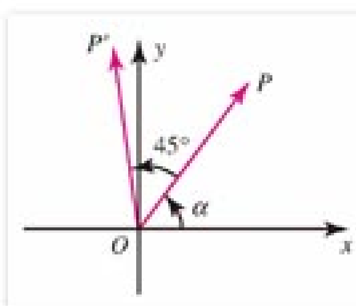


图 3-3

解：设$\angle xOP=\alpha$.

因为$|OP|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以

$$\cos\alpha=\frac{3}{5}，\sin\alpha=\frac{4}{5}.$$

又因为

$$
\begin{aligned}
x' &= 5\cos(\alpha+45^\circ)\\
&= 5(\cos\alpha\cos 45^\circ-\sin\alpha\sin 45^\circ)\\
&= 5\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2},\\
y' &= 5\sin(\alpha+45^\circ)\\
&= 5(\sin\alpha\cos 45^\circ+\cos\alpha\sin 45^\circ)\\
&= 5\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \frac{7\sqrt{2}}{2},
\end{aligned}
$$

所以 $P'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 3 已知点 $P(x,\ y)$，与原点的距离保持不变，逆时针旋转 θ 角到点 $P'(x',\ y')$（图 3-4）. 求证：

$$
\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta\\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}
$$

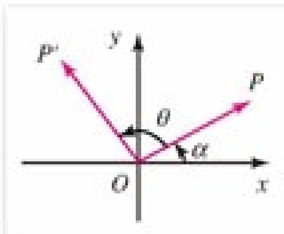


图 3-4

证明：设 $\angle xOP=\alpha$，$|OP|=r$，则

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\qquad \sin\alpha=\frac{y}{r}.$$

从而

$$
\begin{aligned}
x' &= r\cos(\alpha+\theta)\\
&= r(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)\\
&= x\cos\theta-y\sin\theta,\\
y' &= r\sin(\alpha+\theta)\\
&= r(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)\\
&= x\sin\theta+y\cos\theta,
\end{aligned}
$$

即 $\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta\\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$

例 4 求函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值、最小值和周期，其中 a，b 是不同时为零的实数.

解：考察以 $(a,\ b)$ 为坐标的点 $P(a,\ b)$（图 3-5），设以 OP 为终边的一个角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

于是

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),$$

其中 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

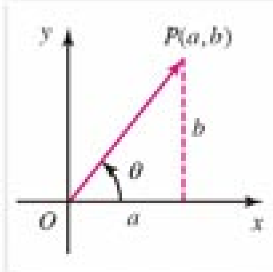


图 3-5

所以函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值是 $\sqrt{a^2+b^2}$，最小值是 $-\sqrt{a^2+b^2}$，周期是 2π.

例 5 已知三个电流瞬时值的函数式分别是

$$I_1=\sqrt{2}\sin\omega t,\ I_2=2\sin(\omega t-45^\circ),\ I_3=4\sin(\omega t+45^\circ).$$

求它们合成后的电流瞬时值的函数式，并指出这个函数的振幅和初相（精确到 1 分）.

解：$I=I_1+I_2+I_3$

$$=\sqrt{2}\sin\omega t+2\sin(\omega t-45^\circ)+4\sin(\omega t+45^\circ)$$

$$=\sqrt{2}\sin\omega t+2(\sin\omega t\cos 45^\circ-\cos\omega t\sin 45^\circ)+4(\sin\omega t\cos 45^\circ+\cos\omega t\sin 45^\circ)$$

$$=4\sqrt{2}\sin\omega t+\sqrt{2}\cos\omega t$$

$$=\sqrt{34}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\omega t+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos\omega t\right)$$

$$=\sqrt{34}(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)$$

$$=\sqrt{34}\sin(\omega t+\theta),$$

其中 $\theta=\arctan\frac{1}{4}\approx 14^\circ 2'$.

所以 $I=\sqrt{34}\sin(\omega t+14^\circ 2')$. 振幅为 $\sqrt{34}$，初相为 $14^\circ 2'$.

由例 5 可知：几个振幅和初相不同，但频率相同的正弦波之和，总是等于另一个具有相同频率的正弦波，同时可求得这个正弦波的振幅和初相.

练习A

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 成立吗？为什么？

2. 求下列各式的值：

（1）$\sin 105^\circ$；　（2）$\sin 165^\circ$；　（3）$\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$；

(4) $\sin 13^\circ\cos 17^\circ+\cos 13^\circ\sin 17^\circ$;

(5) $\sin 70^\circ\cos 25^\circ-\sin 25^\circ\cos 70^\circ$.

3. 化简：

(1) $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$;

(2) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$.

4. 已知 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

5. 求函数 $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ 的最大值和最小值，并画出它的图象.

练习B

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，且 α，β 都是第二象限的角，求 $\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$.

2. 已知向量$\overrightarrow{OP}=(4,\ 3)$，绕原点旋转 60°，120°，-60°到$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$的位置. 求点 P_1，P_2，P_3 的坐标.

3. 求下列函数的最大值、最小值，并分别画出它们的图象.

(1) $f(x)=\cos x+\sin x$;

(2) $f(x)=\cos x-\sin x$;

(3) $f(x)=5\cos x+12\sin x$;

(4) $f(x)=4\cos 5x+5\sin 5x$.

4. 已知二个电流瞬时值函数式分别是

$$I_1=12\sin(\omega t-30^\circ),\ I_2=10\sin(\omega t+30^\circ),$$

求合成后的电流 $I=I_1+I_2$ 的三角函数式.

计算机上的练习

在同一坐标系中，分别作例 5 中的函数 $I_1(t)$，$I_2(t)$，$I_3(t)$和 $I(t)$的图象(令 $\omega=2$)，并验证题中所得到的结论.

3.1.3 两角和与差的正切

我们知道，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

把后面一个分式的分子、分母分别除以 $\cos\alpha\cos\beta$（$\cos\alpha\cos\beta\neq0$），得

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.}\qquad(T_{\alpha+\beta})$$

把公式中的 β 换为 $-\beta$，得

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.}\qquad(T_{\alpha-\beta})$$

在两角和与差的正切公式中，α 和 β 的取值应使分母不为零.

例 求下列各式的精确值.

（1）$\tan 75^\circ$；　　（2）$\dfrac{\tan 17^\circ+\tan 43^\circ}{1-\tan 17^\circ\tan 43^\circ}$.

解：（1）
$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3};$$

（2）$\dfrac{\tan 17^\circ+\tan 43^\circ}{1-\tan 17^\circ\tan 43^\circ}=\tan(17^\circ+43^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

练习A

1. 求下列各式的值：

（1）$\tan 15^\circ$；　　（2）$\tan 105^\circ$；

（3）$\dfrac{\tan 12^\circ+\tan 33^\circ}{1-\tan 12^\circ\tan 33^\circ}$；　　（4）$\dfrac{\tan\frac{5\pi}{12}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{\pi}{6}}$.

2. 已知 $\tan x=2$，$\tan y=\frac{1}{5}$，求 $\tan(x+y)$，$\tan(x-y)$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}$；　　(2) $\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}$.

练习B

1. 求证：

(1) $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$；　　(2) $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$.

2. 已知 $\tan\alpha=\frac{2}{5}$，$\tan\beta=\frac{3}{7}$，求 $\tan(\alpha+\beta)$.

3. 已知 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$，$\tan\beta=\frac{3}{5}$，求 $\tan(\alpha-\beta)$.

习题3-1 A

1. 在$\triangle ABC$中，已知 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{12}{13}$，求 $\cos C$ 的值.

2. 化简：

(1) $\sin(30^\circ+\alpha)-\sin(30^\circ-\alpha)$；

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$；

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$；

(4) $\cos(27^\circ+\alpha)\cos(33^\circ-\alpha)-\sin(27^\circ+\alpha)\sin(33^\circ-\alpha)$；

(5) $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)+\cos(\alpha-15^\circ)\sin(\alpha+15^\circ)$.

3. 计算：

(1) $\sin 35^\circ\cos 25^\circ+\sin 55^\circ\cos 65^\circ$；

(2) $\cos 28^\circ\cos 73^\circ+\cos 62^\circ\cos 17^\circ$.

4. 已知 $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$，且 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值.

5. 化简：(1) $\frac{\tan 53^\circ-\cot 67^\circ}{1+\tan 53^\circ\tan 23^\circ}$；　　(2) $\frac{1+\cot 75^\circ}{1-\tan 15^\circ}$.

习题 3-1 B

1. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

2. 已知向量$\overrightarrow{OP}=(a, b)$，绕原点 O 旋转$\frac{\pi}{2}$和$-\frac{\pi}{2}$到$\overrightarrow{OP_1}$和$\overrightarrow{OP_2}$：

(1) 求点 $P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$的坐标；

(2) 如果(a, b)分别为$(2, 1)$，$(-3, 1)$，求点 P_1 和 P_2 的坐标.

3. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

(1) $y=\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$；

(2) $y=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+12\cos(2x+31\pi)$.

4. 证明下列恒等式：

(1) $\tan(45^\circ+\theta)=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$；

(2) $\tan(x+y)\tan(x-y)=\frac{\tan^2x-\tan^2y}{1-\tan^2x\tan^2y}$；

(3) $\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$.

5. 已知 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，$\tan\varphi=\frac{1}{3}$，且 θ，φ 均为锐角，求 $\theta+\varphi$ 的度数.

6. 求证：$\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ=1$.

7. 已知 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$，且 α，β 都是锐角，求证：$\alpha+\beta=135^\circ$.

3.2 倍角公式和半角公式

3.2.1 倍角公式

在公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$中，令 $\alpha=\beta$，就可得出相应的二倍角的三角函数公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (S_{2\alpha})$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=2\cos^2\alpha-1\\&=1-2\sin^2\alpha,\end{aligned} \qquad (C_{2\alpha})$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \qquad (T_{2\alpha})$$

上面三个公式，称作**倍角公式**.

有了二倍角的三角函数公式，就可以用单角的三角函数表达二倍角的三角函数.

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$的值.

解：因为 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13},$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{120}{169},$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{12}{13}\right)^2-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{119}{169},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{120}{169}\div\frac{119}{169}=-\frac{120}{119}.$$

例 2 证明恒等式：

$$\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{2\cos 2\theta+2\sin^2\theta+\cos\theta}=\tan\theta.$$

证明：左边$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2\sin^2\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}$

$=\tan\theta=$右边.

练习A

1. 求下列各式的值：

(1) $2\sin 67°30'\cos 67°30'$；　　(2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$；

(3) $2\cos^2\dfrac{\pi}{12}-1$；　　(4) $1-2\sin^2 75°$；

(5) $\dfrac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$；　　(6) $\sin 15°\cos 15°$.

2. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$，且 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，求 $\tan 2\alpha$，$\cot 2\alpha$ 的值.

4. 求函数 $y=\cos^2 x-\sin^2 x$ 的最小正周期、最大值和最小值.

练习B

1. 化简：

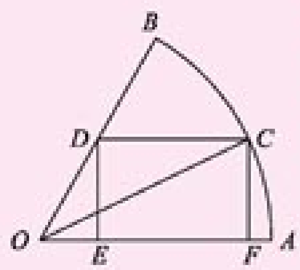
(1) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$；　　(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$；

(3) $\cos^4\varphi-\sin^4\varphi$；　　(4) $\dfrac{1}{1-\tan\theta}-\dfrac{1}{1+\tan\theta}$.

2. 已知 $\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$，且 $(\alpha-\beta)\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$(\alpha+\beta)\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，求 $\cos 2\alpha$.（提示：$2\alpha=(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)$.）

3. 求 $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$ 的值.（提示：乘以并除以 $2\sin 20°$）.

4. 圆心角为 $60°$ 的扇形 AOB 的半径为 1，C 是 AB 弧上一点，作矩形 $CDEF$，如图，当 C 点在什么位置时，这个矩形的面积最大？这时的 $\angle AOC$ 等于多少度？



（第 4 题）

3.2.2 半角的正弦、余弦和正切

由二倍角公式，可得

$$\cos\alpha=\cos\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right)=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

即

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha;$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha.$$

所以

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\qquad (C_{\frac{\alpha}{2}})$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.\qquad (S_{\frac{\alpha}{2}})$$

把两式的两边分别相除，得

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.\qquad (T_{\frac{\alpha}{2}})$$

上面三个公式，称作半角公式.

在半角公式中，根号前的正负号，由角$\frac{\alpha}{2}$所在象限确定.

例 1 求 $\sin 15°$，$\cos 15°$，$\tan 15°$值.

解：因为 15°是第一象限的角，所以

$$\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 15°=\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\tan 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}}=2-\sqrt{3}.$$

例 2 求证：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

证明：$\tan\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$；

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

例 3 求 $\cos\frac{\pi}{8}$的值.

解：因为$\frac{\pi}{8}$是第一象限的角，所以

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

练习A

1. 求下列函数的精确值：

   （1）$\sin 22°30'$；　　（2）$\cos 67°30'$；

   （3）$\cos\frac{13\pi}{12}$；　　（4）$\cot\frac{5\pi}{8}$.

2. 已知 $\cos 2\alpha=-0.5$，并且 $45°<\alpha<90°$，求 $\cos\alpha$，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

3. 等腰三角形的顶角的余弦等于$\frac{7}{20}$，求这个三角形一个底角的正弦和余弦.

练习B

1. 已知 $\sin\theta=0.64$，并且 θ 在第二象限，求 $\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$，$\tan\frac{\theta}{2}$的值.

2. 求下列函数的周期：

   （1）$y=\cos^2\frac{x}{2}$；　　（2）$y=2\sin^2 x$.

3. 求证下列恒等式：

   （1）$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$；　　（2）$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

习题 3-2 A

1. 已知 $\sin\theta=0.28$，并且 $90^\circ<\theta<180^\circ$，求 $\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$的值.

2. 用 $\tan\alpha$ 表示 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

3. 证明下列恒等式：

   (1) $2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$；

   (2) $\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}=\cos x$；

   (3) $1+2\cos^2\theta-\cos 2\theta=2$；

   (4) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$；

   (5) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

4. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

   (1) $y=1+\cos x-\sin x$；　　(2) $y=(\sin x-\cos x)^2$.

5. 化简：$\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)$.

习题 3-2 B

1. 已知等腰三角形的一个底角的正弦等于$\dfrac{5}{13}$，求这个三角形顶角的正弦、余弦和正切.

2. 已知等腰三角形的顶角的余弦等于$\dfrac{7}{25}$，求它的底角的正弦、余弦和正切.

3. 证明下列恒等式：

   (1) $\dfrac{1+\sin 2\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\sin\varphi+\cos\varphi$；

   (2) $\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$；

   (3) $\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$；

   (4) $4\sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}=2\sin\theta+\sin 2\theta$；

   (5) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$；

   (6) $\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)=2\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

4. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

   (1) $y=\sin x\cos x$；　　(2) $y=\sqrt{3}\cos^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

探索与研究

不查表、不使用计算器，你能否自己编制一张0°到45°的正弦函数值表？

在同一坐标系中，作$-\pi$到π区间上的一段正弦曲线$y=\sin x$，再作直线$y=x$. 我们比较在$x=0$附近两个函数的函数值，它们相差很小. 事实上我们通过查表可检验这个推断是正确的. 这就使我们产生一个想法，如果求很小角的正弦值，又对精确度的要求不太高，那么我们就可用自变量x的值代替正弦函数值. 例如

$$\sin\frac{\pi}{360}\approx 0.008\ 726\ 535,$$

$$\frac{\pi}{360}\approx 0.008\ 726\ 646.$$

这两个值，小数点后6位都是相同的，我们用0.008 726 6代替$\sin\frac{\pi}{360}$误差是很小的.

因为$\frac{\pi}{360}=0.5°$，所以$\sin 0.5°\approx 0.008\ 726\ 535$.

如果我们取$\sin 0.5°=0.008\ 726\ 6$作计算的初始值，你能否由正弦的和角公式一步步地算出

$$\sin 1°,\ \sin 1.5°,\ \sin 2°,\ \sin 2.5°,\ \sin 3°,\ \cdots,\ \sin 45°?$$

根据以上思路，写出求0°到45°（间隔为0.5°）正弦值的一个算法，并设法在计算机上实现你的算法.

你现在学到的三角知识已使你能够编制一个足够精确的三角函数表.

3.3 三角函数的积化和差与和差化积

在求解三角函数的有关问题中，有时需要把三角函数的积化为和或者差，有时又需要把和或者差化成积的形式.

考察公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

请同学自己导出下面的积化和差的公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)];$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].$$

从上面这四个公式，又可以得出

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$

设 $\alpha+\beta=x$，$\alpha-\beta=y$，则 $\alpha=\frac{x+y}{2}$，$\beta=\frac{x-y}{2}$.

这样，上面得出的四个式子可以写成

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

利用这四个公式和其他三角函数关系式，我们可把某些三角函数的和或差化成积的形式.

探索与研究

用向量运算证明和差化积公式.

如图 3-6 所示，作单位圆，并任作两个向量

$$\overrightarrow{OP}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha),$$
$$\overrightarrow{OQ}=(\cos\beta,\ \sin\beta).$$

取$\overset{\frown}{PQ}$的中点M，则

$$M\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

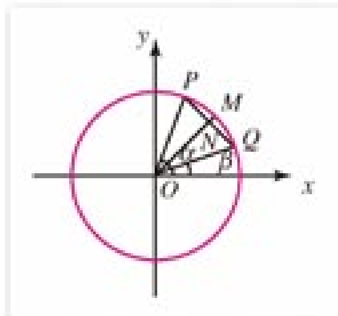


图 3-6

连接 PQ，OM，设它们相交于点 N，则点 N 为线段 PQ 的中点且$ON\perp PQ$.

$\angle xOM$ 和$\angle QOM$ 分别为

$$\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

探索三个向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{OQ}$之间的关系，并用两种形式表达点 N 的坐标，以此导出和差化积公式

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

例 1 把 $\cos 3\theta+\cos\theta$ 化成积的形式.

解：$\cos 3\theta+\cos\theta=2\cos\frac{3\theta+\theta}{2}\cos\frac{3\theta-\theta}{2}$

$=2\cos 2\theta\cos\theta.$

例 2 已知 $A+B+C=180°$，求证：

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

解：因为 $A+B+C=180°$，所以

$$C=180°-(A+B),$$
$$\frac{C}{2}=90°-\frac{A+B}{2}.$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\sin A+\sin B+\sin C\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{-B}{2}\\
&=2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\\
&=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.
\end{aligned}
$$

练习A

1. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\sin 54°+\sin 22°$；　(2) $\sin 5x-\sin 3x$；

(3) $\cos 40°+\cos 52°$；　(4) $\cos 40°-\cos 52°$.

2. 把下列各积化成和差的形式：

(1) $2\sin 64°\cos 10°$；　(2) $\sin 84°\cos 132°$；

(3) $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}$；　(4) $\sin 2\sin 1.2$.

3. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\tan\alpha+\tan\beta$；　(2) $\sin\alpha+\tan\alpha$.

练习B

1. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\frac{1}{2}-\cos x$；　(2) $1+\sin 2x$.

2. 求证下列各恒等式：

(1) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\cot\dfrac{\beta-\alpha}{2}$；

(2) $\dfrac{\sin x-\sin y}{\sin(x+y)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(x-y)}{\sin\frac{1}{2}(x+y)}$.

3. 设 A，B，C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，求证：

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

习题 3-3 A

1. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\cos 3x+\cos 2x$；　　(2) $1+\sin\theta+\cos\theta$.

2. 求证下列恒等式：

(1) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$；　　(2) $\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=\tan^2\dfrac{x}{2}$.

3. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\sin\alpha-\sin\beta$；　　(2) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$；

(3) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$.

4. 求证：$\dfrac{\cos 2x+\cos 2y}{1+\cos 2(x+y)}=\dfrac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$.

习题 3-3 B

1. 求下列各式的值：

(1) $\dfrac{\sin 20^\circ-\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}$；　　(2) $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\sin 80^\circ$.

2. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$；　　(2) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

3. 不查表、不使用计算工具，求下列各式的值：

(1) $\sin 105^\circ\cos 75^\circ$；　　(2) $2\cos 37.5^\circ\cos 22.5^\circ$；

(3) $2\cos\dfrac{9\pi}{13}\cos\dfrac{\pi}{13}+\cos\dfrac{5\pi}{13}+\cos\dfrac{3\pi}{13}$；

(4) $\cos^2 73^\circ+\cos^2 47^\circ+\cos 73^\circ\cos 47^\circ$.

4. 如果 $A+B+C=\pi$，求证：

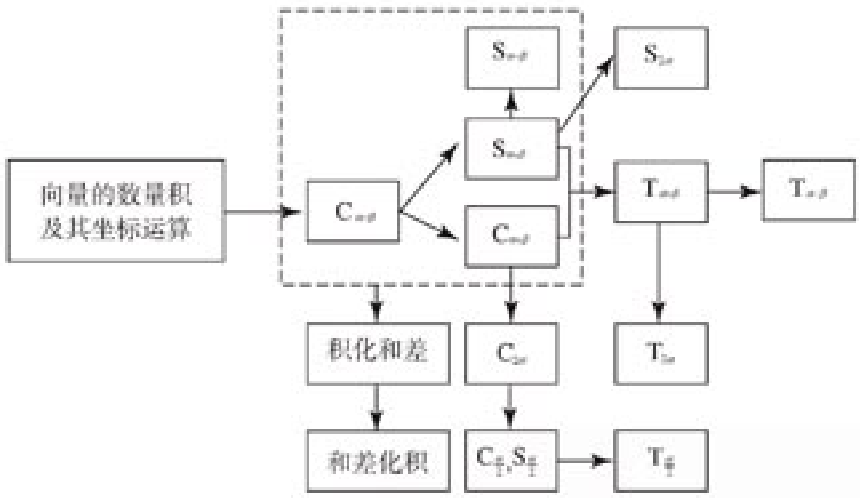
$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

探索与研究

$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 是否都可用 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 来表示？如果能，请写出表达式.

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

本章公式较多，学好本章的关键，首先在于搞清楚各公式之间的内在联系，也就是要很好地理解上面的知识结构图. 为此，还需思考下列各问题：

1. 两角差的余弦公式 $C_{\alpha-\beta}$，是推导本章其他各公式的出发点，这个公式是用什么方法证明的？

2. 本章公式可以概括为四类：和角公式，倍角公式，半角公式，和积互化公式，试用简练语言回答：

(1) 怎样由 $C_{\alpha-\beta}$ 推导出其他和角公式？

(2) 怎样由和角公式推导出倍角公式？

(3) 从什么公式出发来推导半角公式？

(4) 从哪些公式出发来推导积化和差公式？又怎样由积化和差公式推导和差化积公式？

3. 利用本章各公式来进行三角式的恒等变形过程中，离不开第一章所学的同角三角函数关系、诱导公式，以及三角函数性质等基础知识. 它们同属于三角学这个整体. 学完本章以后，应回顾一下第一章的知识结构，以使自己对三角学有一个整体的把握.

Ⅲ 巩固与提高

1. 如果 α，β 都是锐角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

2. (1) 已知 $A+B=\frac{\pi}{4}$，求证：$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$；

(2) 如果 A，B 都是锐角，且 $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$，求证：$A+B=\frac{\pi}{4}$.

3. 如果 A，B，C 都是锐角，且 $\tan A=0.5$，$\tan B=0.2$，$\tan C=0.125$，求证：

$$A+B+C=\frac{\pi}{4}.$$

4. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，求 $\sin 2\theta$ 的值.

5. 求证下列各恒等式：

(1) $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$；

(2) $\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)=\tan x$；

(3) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

6. 求证：$\tan 20°+\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°=\sqrt{3}$.

7. 在斜△ABC 中，求证：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

8. 求下列函数的周期和最大值、最小值：

(1) $y=1+\sin^2 x$；　　(2) $y=2\sin x-3\cos x$；

(3) $y=\cos^2 x-\cos^4 x$；　　(4) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$.

9. 求下列各式的值：

(1) $\sin 15°\sin 30°\sin 75°$；

(2) $\sin 20°\cos 70°+\sin 10°\sin 50°$；

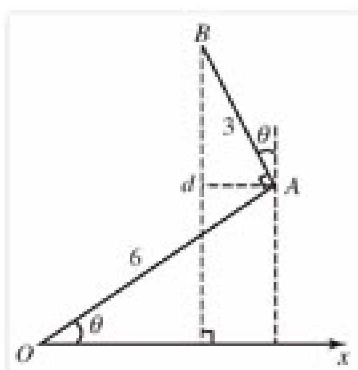
(3) $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$；

(4) $\frac{\sin 7°+\cos 15°\sin 8°}{\cos 7°-\sin 15°\sin 8°}$.

10. 求 $\tan 20°+4\sin 20°$ 的值.

11. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$，求 $\tan(\alpha-2\beta)$.

12. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=3$，求 $\sin 2\theta-2\cos^2\theta$.



(第13题)

13. 已知：$OA=6$，$AB=3$，$AB\perp AO$，OA 与 Ox 夹角为 θ. 求：

(1) 当 θ 变动时，B 点到 Ox 的距离 d 的表达式；

（2）把 d 的表达式写成 $r\sin(\theta+\alpha)$ 的形式；

（3）θ 为何值时，d 的值最大？最大值是多少？

IV 自测与评估

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，且 α，β 均为锐角，求 $\cos\beta$.

2. 已知 $\sin x+\sin y=0.4$，$\cos x+\cos y=1.2$，求 $\cos(x-y)$.

3. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-\frac{1}{7}$，且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，求 $2\alpha-\beta$ 的值.

4. 求 $\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$ 的值.

5. 已知三个电流瞬时值函数式分别是

$$I_1=22\sin\omega t,\ I_2=22\sin(\omega t-120°),\ I_3=22\sin(\omega t+120°).$$

求证 $I=I_1+I_2+I_3=0$.

数学文化 阅读与欣赏

和角公式与旋转对称

如图 3-7，考察正三角形 ABC，点 O 是它的中心，则

$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ.$$

如果$\triangle ABC$绕点 O 旋转 120°，即 $A\to B\to C\to A$，则$\triangle ABC$与自身重合，这时我们说正三角形是关于 120°角的旋转对称图形.

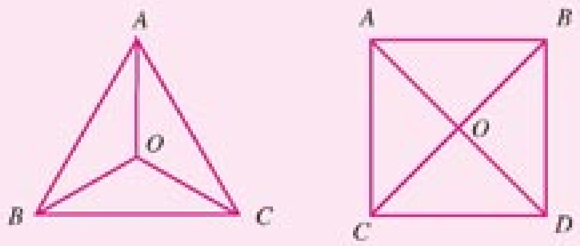


图 3-7

一般地，如果一个平面图形绕定点旋转 θ 角，仍与自身重合，则这个图形叫做 θ **角旋转对称图形**. 例如任一个正方形都是 90°角的旋转对称图形.

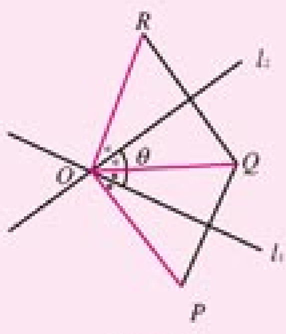


图 3-8

定理：设直线 l_1，l_2 相交于点 O，$\langle l_1, l_2\rangle=\theta$，则关于 l_1，l_2 连续作轴对称变换，等效于绕点 O 作 2θ 角的一个旋转变换.

如图 3-8 所示，P，Q 关于 l_1 对称，Q，R 关于 l_2 对称. 容易看出$\angle POR=2\theta$.

这个定理表明，**任意旋转变换都可以分解为两个轴对称变换的乘积**.

在第一章证明$\frac{\pi}{2}+\alpha$的诱导公式时，我们就应用了上述轴对称与旋转对称的性质. 如图 3-9 所示.

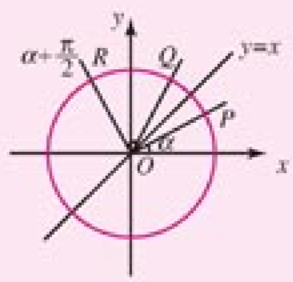


图 3-9

α 终边作$\frac{\pi}{2}$旋转到达 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 等于两次轴对称变换的复合：作轴 $y=x$ 的对称变换，再作关于 y 轴的对称变换.

设 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$，则

$$R(-\sin\alpha, \cos\alpha),$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha.$$

这样，如果我们知道平面上任意一点 P 的坐标(a, b)，点 P 绕原点 O 转$\frac{\pi}{2}$角后到达点 R，设点 R 的坐标为(x, y)，则由上述关系我们可证

$$x=-b,$$

$$y=a.$$

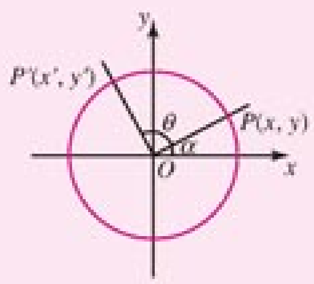


图 3-10

在本章，我们又用向量的数量积证明了和角公式．作为和角公式的应用，我们证明了点的旋转公式（如图 3-10）：

如果点 $P(x,y)$ 与原点的距离保持不变绕原点旋转 θ 角到 $P'(x',y')$，则

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$$

这样，我们就可用数学方法研究平面图形旋转的性质．

由本文的分析，我们可看到旋转对称、和角公式、点的旋转公式与向量的内积存在着深刻的联系．

附 录

部分中英文词汇对照表

三角函数	trigonometric function
始边	initial side
终边	terminal side
正角	positive angle
负角	negative angle
零角	zero angle
象限角	quadrant angle
弧度	radian
弧度制	radian measure
角度制	degree measure
正弦	sine
余弦	cosine
正切	tangent
余切	cotangent
正割	secant
余割	cosecant
正射影	orthographic projection
诱导公式	induction formula
正弦曲线	sine curve
余弦曲线	cosine curve
正切曲线	tangent curve
最大值	maximum
最小值	minimum
周期	period
最小正周期	minimal positive period
周期函数	periodic function
振幅	amplitude of vibration
频率	frequency
初相	initial phase

有向线段	directed line segment
向量	vector
零向量	zero vector
平行向量	parallel vectors
相等向量	equal vectors
共线向量	collinear vectors
数乘向量	multiplication of vector by scalar
基底	base
基向量	base vectors
平移	translation
参数	parameter
数量积	inner product

后 记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持．在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志．

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授．从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了"课标"中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查．

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文．我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断的完善．现在所取得的成果，是实验研究组全体成员、编者，实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶．

各实验区参加教材审读、研讨及修改的主要成员有：

韩际清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颀、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勤、王宗武、黄武昌．

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒风杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳．

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意．

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的学校领导和师生们．

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力．

我们的联系方式如下：

电话：010-58758523　010-58758532

电子邮件：longzw@pep. com. cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学教材实验研究组