普通高中课程标准实验教科书

数学 5

必修

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

本册主编　　万庆炎

编　　者　　王人伟　邵光砚　丁尔陞
　　　　　　魏榕彬　刘长明　龙正武

责任编辑　　龙正武

美术编辑　　张　蓓　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数学　5

必修

B版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

出版发行

（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

网址：http://www.pep.com.cn

××××印刷厂印装　　全国新华书店经销

*

开本：890毫米×1 240毫米　1/16　印张：7　字数：156 000

2007年4月第2版　　年　月第　次印刷

印数：00 001～000 000册

ISBN 978-7-107-18585-4
G・11675（课）　定价：　　元

本册导引

同学们：

本书是高中数学必修课程的最后一册．在这一册，你们将学习关于“解三角形”“数列”和“不等式”的知识．

在小学同学们认识了三角形，在初中同学们进一步研究了三角形的全等、相似、解直角三角形等内容，对于三角形的研究，始终是围绕着组成它的元素——边和角展开的．在解三角形这一章，我们将进一步探索任意三角形中边和角之间的关系，得到任意三角形中普遍存在的两个结论——正弦定理和余弦定理，从而更好地解决涉及三角形度量的问题．应用这些知识和方法，就能较容易地解决一类与测量和几何计算有关的实际问题．

关于数列，其实同学们早已和它们打过交道．你们一定还记得，数学 1 中那则关于杰米和韦伯的有趣故事．根据他们两人所订的合同，你不费什么力气就能算出杰米和韦伯每天要付给对方多少钱．从合同生效的那一天开始，一个月中，杰米每天付给韦伯的钱数就构成一个数列，而韦伯每天付给杰米的钱数也是一个数列．在数列这一章，我们将重点研究等差数列和等比数列．从本质上讲，数列是一类特殊的函数，它是函数知识的延伸．在本章中，我们将通过研究它们的特殊性质，归纳出等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和公式．这些特殊性质为我们提供了一种数学模型，应用它们可以很方便地解决诸如教育或购房贷款、放射性物质的衰变、人口与国民经济增长等生产、生活中的问题．

在不等式这一章，我们将重访不等式．首先从现实世界和日常生活中存在的大量不等关系中，归纳得出不等式的基本性质，然后研究均值不等式和一元二次不等式及其解法，通过图象把一元二次不等式与相应的函数、方程联系起来，使之形成一个相对完整的知识体系．而一元二次不等式的解法与信息技术的应用相结合，将让我们再次看到算法思想的广泛应用．在本章中，同学们还将运用数形结合的思想，判定二元一次不等式(组)表示的平面区域，进而学会解一些简单的二元线性规划问题．

通过本册书的学习，相信同学们对数学与现实生活密切联系的认识将得到进一步加深，应用数学知识解决实际问题的能力也将得到进一步提高．

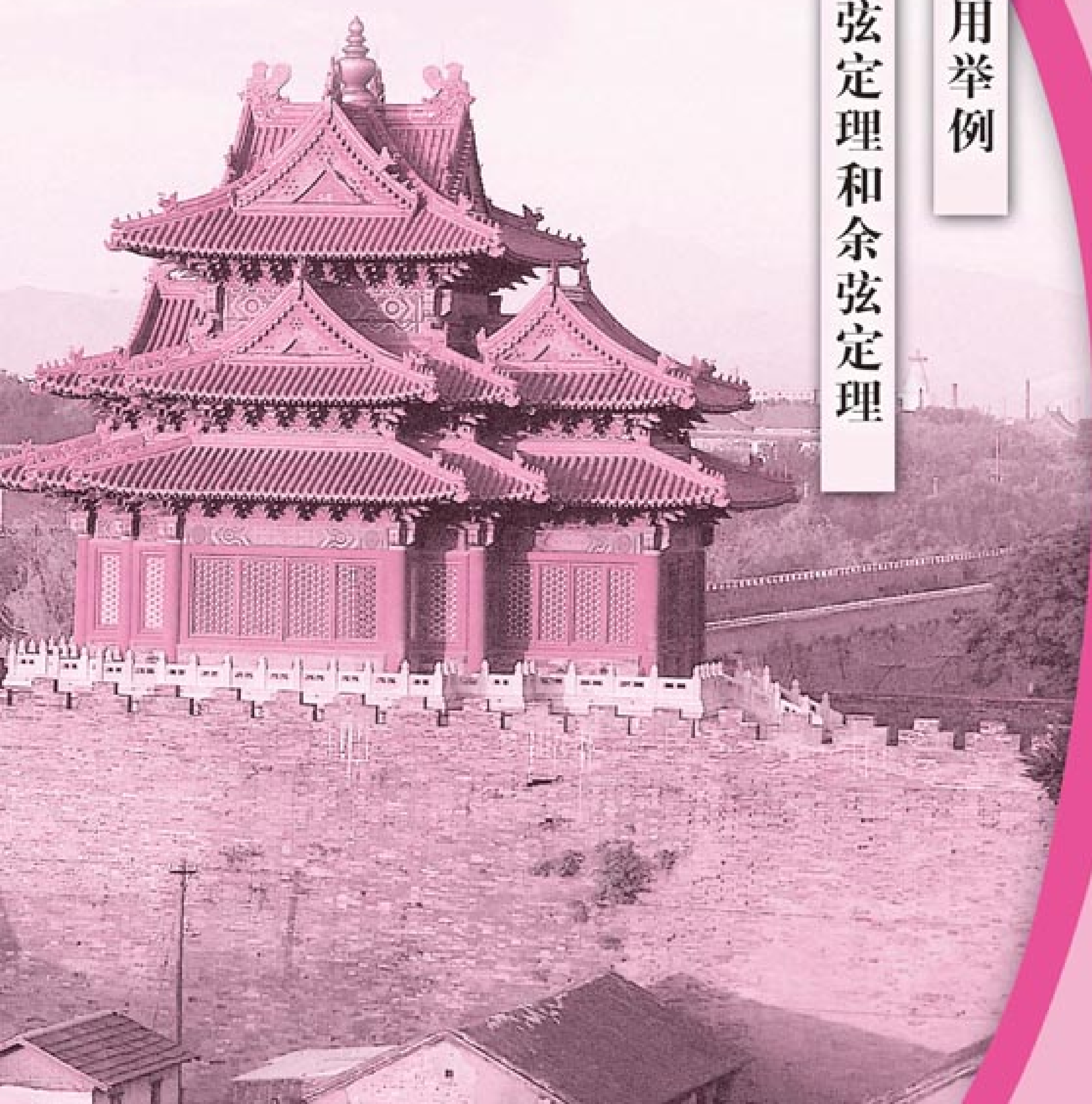
目　录


A
B'
B
D'
D
C'
C
α
β
γ

第一章 解三角形

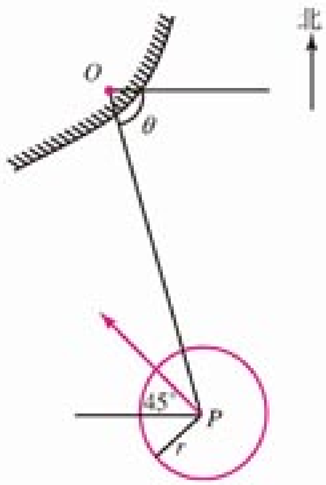
1.1 正弦定理和余弦定理

1.2 应用举例



问题 1：一艘轮船按照北偏西 30° 的方向以每小时 28 海里的速度航行．一个灯塔 M 原来在轮船的北偏东 10° 的方向，经过 40 分钟后，测得灯塔在轮船的北偏东 70° 的方向．求灯塔和轮船原来的距离．

问题 2：某海滨城市附近的海面上有一台风．据监测，目前台风中心位于城市 O 的南偏东 $90^\circ-\theta$ $\left(\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)$ 方向 300 km 的海面 P 处（如图），并以 20 km/h 的速度向北偏西 45° 方向移动．台风侵袭的范围为圆形区域，当时的半径为 60 km，并以10 km/h的速度不断增大．几小时后该城市开始受到台风的侵袭？



与上面两个问题相类似的还有下列问题：怎样测出底部不可到达的建筑物的高度？在海上航行时怎样测出船的航向和航速？怎样测出两个岛屿之间的距离？……这些问题的解决都需要用到三角形中边角关系的有关知识．

在本章中，我们将学习正弦定理和余弦定理，并应用它们解三角形，进而借助所学的三角形边角关系的知识解决一些类似于上述问题的实际问题．

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

在初中，我们学习过直角三角形中的边角关系．同学们是否想过这样一个问题：在任意一个三角形中，角与它所对的边之间在数量上有什么关系？下面，我们首先研究特殊情况．

> 可结合课件“正弦定理猜想与验证”学习正弦定理．

在 Rt$\triangle ABC$ 中(如图 1-1)，有

$$\frac{a}{c}=\sin A,\ \frac{b}{c}=\sin B,$$

因此

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c.$$

又因为 $\sin C=1$，所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

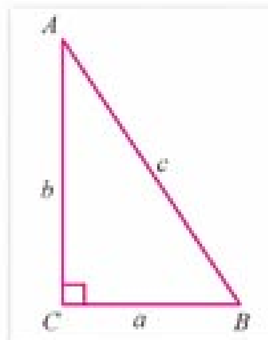


图 1-1

对于一般三角形，以上结论是否仍然成立？

在本书中，$\triangle ABC$ 中的三个内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，分别用 a，b，c 表示．

先看锐角$\triangle ABC$（如图 1-2(1)）．

作 $CD\perp AB$ 于点 D，有

$$\frac{CD}{b}=\sin A，即 CD=b\sin A;$$

$$\frac{CD}{a}=\sin B，即 CD=a\sin B.$$

因此 $b\sin A=a\sin B$，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

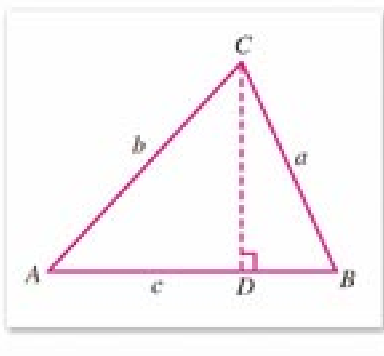


图 1-2(1)

同理可证$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，因此

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

再看钝角△ABC（如图1-2(2)）.

作$CD\perp AB$，交AB的延长线于点D，则

$$\frac{CD}{b}=\sin A，即\ CD=b\sin A；$$

$$\frac{CD}{a}=\sin(180^\circ-B)=\sin B，即\ CD=a\sin B，$$

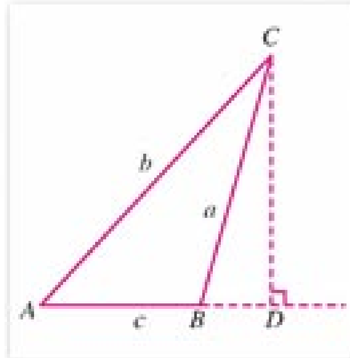


图1-2(2)

因此$b\sin A=a\sin B$，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

同理可证$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，因此

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

于是，我们得到下面的定理：

正弦定理　**在一个三角形中，各边的长和它所对角的正弦的比相等．**即

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.}$$

例1　已知△ABC，根据下列条件，求相应的三角形中其他边和角的大小（保留根号或精确到0.1）：

（1）$\angle A=60^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$a=10$；

（2）$a=3$，$b=4$，$\angle A=30^\circ$；

（3）$b=3\sqrt{6}$，$c=6$，$\angle B=120^\circ$.

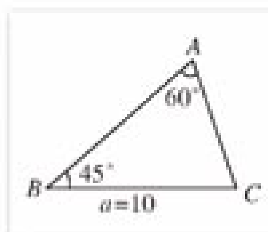


图1-3(1)

解：（1）因为$\angle C=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$，所以由正弦定理，得

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{10\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{10\sqrt{6}}{3}\approx 8.2，$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}\approx 11.2$$（如图1-3(1)所示）.

（2）由正弦定理，得

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\sin 30^\circ}{3}=\frac{2}{3}，$$

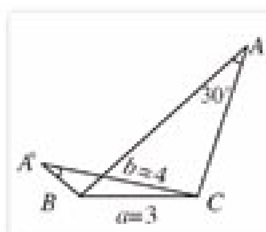


图1-3(2)

因此$\angle B\approx 41.8^\circ$或$\angle B\approx 138.2^\circ$（如图1-3(2)所示）.

当$\angle B\approx 41.8^\circ$时，

$$\angle C\approx 180^\circ-30^\circ-41.8^\circ=108.2^\circ，$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{3\sin 108.2^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 5.7；$$

当$\angle B\approx 138.2^\circ$时，

$\angle C \approx 180^\circ - 30^\circ - 138.2^\circ = 11.8^\circ$,

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{3\sin 11.8^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 1.2 \text{（如图 1-3(2)所示）}.$$

(3) 由正弦定理，得

$$\sin C = \frac{c\sin B}{b} = \frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此$\angle C = 45^\circ$或$\angle C = 135^\circ$.

因为$\angle B = 120^\circ$，所以$\angle C < 60^\circ$.

因此$\angle C = 45^\circ$，$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 15^\circ$.

再由正弦定理，得

$$a = \frac{b\sin A}{\sin B} = \frac{3\sqrt{6}\sin 15^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 2.2 \text{（如图 1-3(3)所示）}.$$

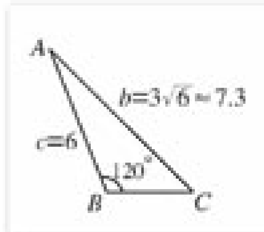


图 1-3(3)

一般地，我们把三角形的三个角和它的对边分别叫做三角形的元素．已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做**解三角形**.

例 2 如图 1-4，在$\triangle ABC$中，$\angle A$的角平分线AD与边BC相交于点D，求证：$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

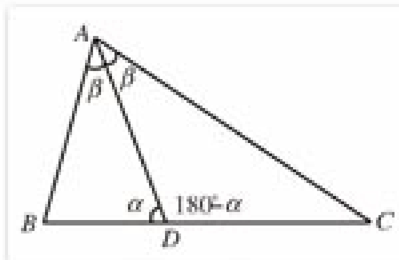


图 1-4

证明：如图 1-4，在$\triangle ABD$和$\triangle CAD$中，由正弦定理，得

$$\frac{BD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha}, \quad ①$$

$$\frac{DC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{AC}{\sin\alpha}. \quad ②$$

①÷②，得$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

练习A

1. 已知$\triangle ABC$，根据下列条件，解三角形（保留根号或精确到 0.1）：

(1) $\angle A = 60^\circ$，$\angle B = 30^\circ$，$a = 3$； (2) $\angle A = 45^\circ$，$\angle B = 75^\circ$，$b = 8$；

(3) $a = 3$，$b = \sqrt{3}$，$\angle A = 60^\circ$； (4) $a = 3$，$b = 2$，$\angle B = 45^\circ$；

(5) $b = 4$，$c = 4.8$，$\angle C = 75^\circ$.

2. 求证：在$\triangle ABC$中，$\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{a+b}{c}$.

$\left(\text{提示：令}\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k\right)$

练习B

1. 在$\triangle ABC$中，已知$a=3$，$b=4$，$\angle A=30°$，求$\angle C$（精确到$0.1°$）.
2. 在$\triangle ABC$中，$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，求证：$\triangle ABC$是直角三角形.
3. 在$\triangle ABC$中，若$a\cos A=b\cos B$，试判断这个三角形的形状.

探索与研究

在正弦定理中，设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$. 请研究常数$k$与$\triangle ABC$外接圆的半径$R$的关系.（提示：先考察直角三角形）

1.1.2 余弦定理

如果已知一个三角形的两边及其夹角，则这个三角形完全确定．能否用正弦定理求解这个三角形呢？由于在这个三角形中找不出一条边及其对角都是已知的，因此无法直接应用正弦定理．为了解这类三角形，必须寻求其他途径.

可结合课件“余弦定理猜想与验证”学习余弦定理.

在$\triangle ABC$中，已知边a，b，及$\angle C$（为了方便起见，假设$\angle C$为最大的角），求边c的长.

如果$\angle C=90°$，那么可以用勾股定理求c的长；

如果$\angle C\neq 90°$，那么是否仍可以用勾股定理来解呢？

很自然的想法是构造直角三角形，以便于应用勾股定理进行计算.

当$\angle C$为锐角时(图 1-5(1))，高AD把$\triangle ABC$分成两个直角三角形ADB和ADC；当$\angle C$为钝角时(图 1-5(2))，作高AD，则构造了两个直角三角形ADB和ADC，算出c的关键是先算出AD和BD(或DC).

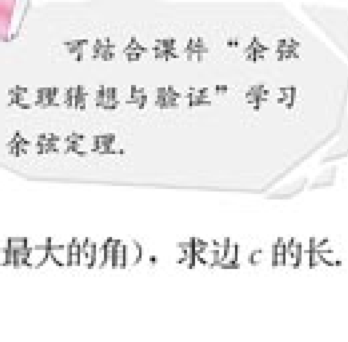


图 1-5(1)

考察向量$\overrightarrow{AC}$在向量$\overrightarrow{BC}$方向上的正射影数量：当$\angle C$分别为锐角和钝角时，得到的两个数量符号相反；当$\angle C$为直角时，其向量$\overrightarrow{AC}$在直角边上的正射影的数量为零．因此，不论$\angle C$是锐角、钝角还是直角，都有

$$AD=b\sin C,\ BD=a-b\cos C.$$

在 Rt△ADB 中，运用勾股定理，得

$$\begin{aligned}c^2&=AD^2+BD^2=b^2\sin^2 C+(a-b\cos C)^2\\&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}$$

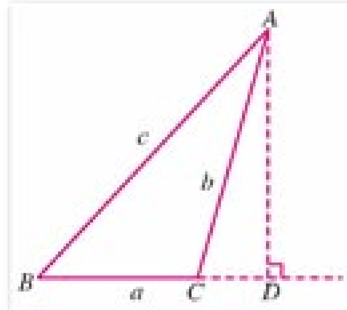


图 1-5(2)

同理可得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

于是，我们得到三角形中边角关系的又一重要定理：

余弦定理　**三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍**，即

$$\boxed{\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C,\\b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B,\\a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A.\end{aligned}}$$

显然，余弦定理表述了任意一个三角形中三边长与三个内角余弦之间的数量关系.

在一个三角形中，如果知道两边及其夹角的值，由余弦定理就可以求出第三边.

从以上公式中解出 $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$，则可以得到余弦定理的另一种形式：

$$\boxed{\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\\\cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\\\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.\end{aligned}}$$

在△ABC 中，令 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，你能通过计算 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 证明余弦定理吗？

应用以上结果，由三角形的三边长，可以求出三角形的三个内角.

例 1　如图 1-6，在△ABC 中，已知 $a=5$，$b=4$，$\angle C=120°$，求 c.

解：由余弦定理，得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 120°,$$

因此 $c=\sqrt{5^2+4^2-2\times5\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{61}$.

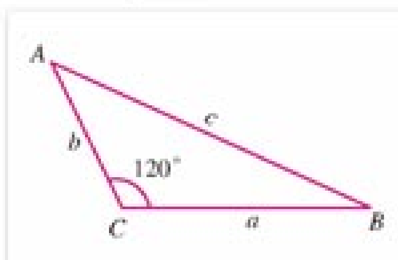


图 1-6

例 2　如图 1-7，在△ABC 中，已知 $a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{19}$，求此三角形各个角的大小及其面积（精确到 0.1）.

解：由余弦定理，得

$$\begin{aligned}\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{19})^2}{2\times3\times2}\\&=\frac{9+4-19}{12}=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此 $\angle C=120°$.

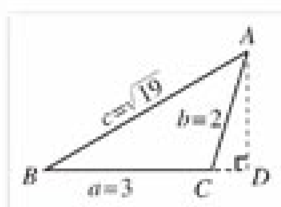


图 1-7

再由正弦定理，得

$$\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{19}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}\approx 0.596\ 0,$$

因此$\angle A\approx 36.6^\circ$，或$\angle A\approx 143.4^\circ$（不合题意，舍去）.

因此$\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C\approx 23.4^\circ$.

设 BC 边上的高为 AD，则

$$AD=c\sin B=\sqrt{19}\sin 23.4^\circ\approx 1.73.$$

所以$\triangle ABC$ 的面积$=\frac{1}{2}\times 3\times 1.73\approx 2.6$.

例 3 如图 1-8，$\triangle ABC$ 的顶点为$A(6,5)$，$B(-2,8)$和$C(4,1)$，求$\angle A$（精确到 0.1°）.

解：根据两点间距离公式，得

$$AB=\sqrt{[6-(-2)]^2+(5-8)^2}=\sqrt{73},$$

$$BC=\sqrt{(-2-4)^2+(8-1)^2}=\sqrt{85},$$

$$AC=\sqrt{(6-4)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}.$$

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{2}{\sqrt{365}}\approx 0.104\ 7,$$

因此$\angle A\approx 84.0^\circ$.

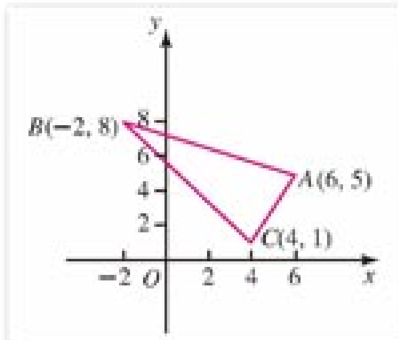


图 1-8

练习 A

1. 已知$\triangle ABC$，求证：

(1) 若 $a^2+b^2=c^2$，则$\angle C$ 为直角；

(2) 若 $a^2+b^2>c^2$，则$\angle C$ 为锐角；

(3) 若 $a^2+b^2<c^2$，则$\angle C$ 为钝角.

2. 已知$\triangle ABC$ 的三个角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边分别为 a，b，c，根据下列条件，分别解三角形（保留根号或精确到 0.01）：

(1) $a=10$，$b=5$，$\angle C=60^\circ$； (2) $a=6$，$b=4$，$c=6$；

(3) $a=3\sqrt{6}$，$c=6$，$\angle B=45^\circ$.

3. 已知 $a:b:c=3:4:5$，试判断三角形的形状.

4. 已知三点 $A(1,3)$，$B(-2,2)$，$C(0,-3)$，求$\triangle ABC$ 的各内角的大小.

练习B

1. 已知$\triangle ABC$的顶点为$A(2, 2)$，$B(6, 0)$和$C(0, 0)$，判断$\triangle ABC$的形状.
2. 求证：在$\triangle ABC$中，
$$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C).$$
3. 用余弦定理证明：平行四边形两条对角线的平方和等于它们各边的平方和.

习题1-1 A

1. 根据下列条件解$\triangle ABC$：
(1) $\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$a=3$；　(2) $\angle A=45°$，$\angle B=15°$，$b=2$；
(3) $a=1$，$b=\sqrt{3}$，$\angle A=30°$；　(4) $b=2.5$，$c=3$，$\angle B=70°$.
2. 根据下列条件解$\triangle ABC$（精确到0.1）：
(1) $a=2.7$，$b=3.7$，$\angle C=82°18'$；
(2) $b=12.9$，$c=15.4$，$\angle A=42.3°$；
(3) $a=1$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{2}$；
(4) $a=2$，$b=2.5$，$c=3$.
3. 已知▱$ABCD$的对角线$AC=57$ cm，它与两条邻边AB和AD的夹角分别是27°和35°，求AB和AD的长（精确到1 cm）.
4. 根据下列条件解$\triangle ABC$（精确到0.1）：
(1) $a=4$，$b=4$，$c=3$；
(2) $a=2$，$b=4$，$\angle C=45°$；
(3) $a=3$，$b=2$，AB边上的中线长为2.
5. (1) 已知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，求$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$；
(2) 已知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=2$，求$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$（精确到0.1）.
6. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle A:\angle B=1:2$，$a:b=1:\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的三个内角.
7. 用正弦定理证明：如果在$\triangle ABC$中，$\angle A$的外角平分线AD与边BC的延长线相交于点D，则$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

习题 1－1 B

1. 已知△ABC 的三个角∠A，∠B，∠C 所对边分别为 a，b，c，分别根据下列条件，求∠C，c，∠B（精确到 0.1）：

   (1) $a=4$，$b=5$，∠$A=60°$；　　(2) $a=4$，$b=3$，∠$A=45°$；

   (3) $a=4$，$b=2$，∠$A=30°$；　　(4) $a=4$，$b=2$，∠$A=75°$.

2. 已知△ABC 的顶点为 $A(1,1)$，$B(m+4,m-4)$，$C(0,0)$，$\cos C=-\frac{3}{5}$，求常数 m 的值.

3. 已知△ABC 的顶点为 $A(2,0)$，$B(-1,4)$和 $C(5,1)$，求此三角形的三个内角（精确到 0.1）.

4. 已知△ABC 中，$AB=4\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$，AD 为 BC 边上的中线，且∠$BAD=30°$，求 BC 的长.

5. 已知△ABC 的顶点为 $A(3,4)$，$B(8,6)$，$C(2,k)$，其中 k 为常数. 如果∠A=∠B，求 k 的值.

6. 已知四点 $A(-1,3)$，$B(1,1)$，$C(4,4)$，$D(3,5)$：

   (1) 求证四边形 $ABCD$ 是直角梯形；

   (2) 求∠DAB 和∠CAB 的大小（精确到 0.1）.

7. 已知三角形的三边满足条件$\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}=1$，求∠A.

8. 在△ABC 中，已知 $\sin A=2\sin B\cos C$，试分别利用正、余弦定理与和角公式两种方法证明△ABC 是等腰三角形.

9. 已知三角形的两边和为 4，其夹角为 60°，求满足已知条件的三角形的最小周长.

10. 设△ABC 的面积为 S，求证：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $2p=a+b+c$.

探索与研究

平行四边形与三角形面积的计算公式

如图 1-9 所示，在直角坐标系 xOy 中，已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$. 以线段 OA，OB 为邻边作平行四边形 $OACB$. 我们常说，这个平行四边形是由向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$所张成的平行四边形. 现在研究的课题是：如何计算出$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$所张成的平行四边形的面积？

设$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\theta$，$\square OACB$的边$OA$上的高为$h$，我们可以从$\square OACB$的面积

$$S=|\boldsymbol{a}|h, \qquad ①$$

推出

$$S=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta. \qquad ②$$

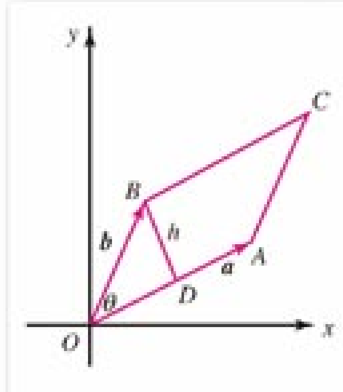


图 1-9

在平面向量一章，由向量的坐标可以算出向量的长度和夹角的余弦或正弦，代入②，就可以得到由向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所张成的平行四边形的面积公式

$$S=\left|a_1b_2-a_2b_1\right|. \qquad ③$$

也可以用直线方程知识，算出点B到直线OA的距离h和OA的长度，代入①，同样可以得到上面的公式.

请同学们利用上面的提示，求证公式③.

由平行四边形面积公式，很容易得到三角形的面积公式（图 1-10）

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta;$$

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|.$$

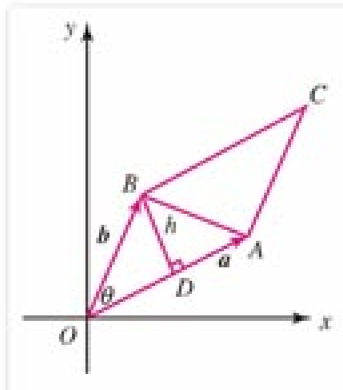


图 1-10

利用上述知识，完成以下练习：

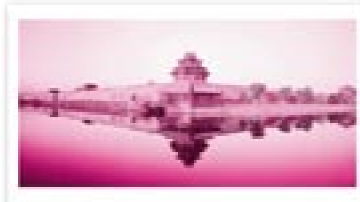
1. 已知$\boldsymbol{a}=(3, 2)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 5)$. 求由$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所张成的平行四边形的面积.

2. 已知$A(-2, 1)$，$B(3, -2)$，$C(2, 5)$. 求$\triangle ABC$的面积.

3. 已知$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$. 求$\triangle ABC$的面积.

1.2 应用举例

问题 1　怎样测量一个底部不能到达的建筑物的高度？



如图，在北京故宫的四个角上各矗立着一座角楼，如何通过测量，求得角楼的高度？

分析：如图 1-11，设线段 AB 表示角楼的高．在宫墙外护城河畔的马路边，选位置 C 对角楼进行测量．设 CC' 为测量仪器的高，过点 C' 的水平面与 AB 相交于点 B'．这时由测点 C' 可测得点 A 的仰角 α 的大小．在 $\triangle AB'C'$ 中，三条边的长度都无法测出，因而 AB' 的长无法求得．如果移动测量仪 CC' 至 DD'（测量仪高度不变），想想看，我们能测得哪些数据，使问题得以解决？事实上，如图 1-12 所示，在点 B'，C'，D' 构成的三角形中，可以测出 $\angle\beta$ 和 $\angle\gamma$ 的大小，又可测得 CD 的长．这样，我们就可根据正弦定理求出边 $B'C'$ 的长，从而求出 AB' 的长，使问题得到解决．

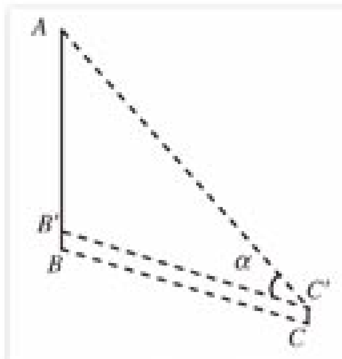


图 1-11

某校学生用自制的仪器，测得

$$\alpha=20°,\ \beta=99°,\ \gamma=45°,\ CD=60\ \text{m}.$$

测量仪器的高为 1.5 m，试求出故宫角楼的高度（精确到 0.1 m）．

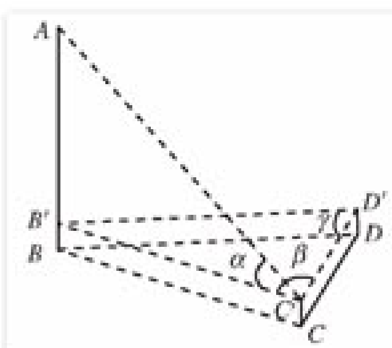


图 1-12

解：在 $\triangle B'C'D'$ 中，由正弦定理，得

$$\frac{B'C'}{\sin\gamma}=\frac{C'D'}{\sin B'},$$

因此 $B'C'=\dfrac{C'D'\sin\gamma}{\sin(180°-\beta-\gamma)}=\dfrac{60\times\sin 45°}{\sin 36°}\approx 72.17.$

在 $\triangle AB'C'$ 中，

$$AB'=B'C'\tan\alpha=72.17\times\tan 20°\approx 26.3\ (\text{m}),$$

因此 $AB=AB'+B'B=26.3+1.5=27.8\ (\text{m})$，

答：故宫角楼的高约为 27.8 m❶．

注

❶ 故宫角楼从地面到楼顶的精确高度为 27.50 m.

问题 2　怎样测量地面上两个不能到达的地方之间的距离？

设 A，B 是两个海岛，如何测量它们之间的距离？

分析：如图 1-13，A，B 分别是两个海岛上接近海面的两处标志性设施. 与问题 1 类似，如果只选择一个测点 C，那么在 $\triangle ABC$ 中只能测得 $\angle ACB$ 的大小，问题不能得到解决. 因此需要再选择一个测点 D，构造一个能测出其一条边长的 $\triangle BCD$. 要求出 AB，还应先求出 AC 和 BC，为此应先解 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$.

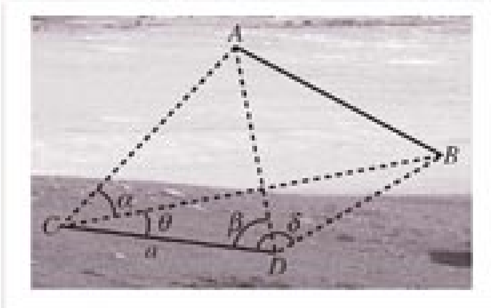


图 1-13

解：如图 1-13，在海边适当选取两个测点 C，D，使 A，B，C，D 在一个平面内. 测得

$$CD=a,\ \angle ACB=\alpha,\ \angle ADC=\beta,\ \angle BCD=\theta,\ \angle BDC=\delta.$$

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理，得

$$\frac{BC}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin(180^\circ-\theta-\delta)},$$

即 $BC=\dfrac{a\sin\delta}{\sin(\theta+\delta)}$.

在 $\triangle ACD$ 中，$\angle A=180^\circ-(\alpha+\beta+\theta)$. 由正弦定理，得

$$AC=\frac{a\sin\beta}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta-\theta)}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta+\theta)}.$$

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得

$$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos\alpha,$$

把 BC，AC 代入上式即可求出 AB.

问题 3 如图 1-14，墙上有一个三角形灯架 OAB，灯所受重力为 10 N，且 OA，OB 都是细杆，只受沿杆方向的力，试求杆 OA，OB 所受的力（精确到 0.1）.

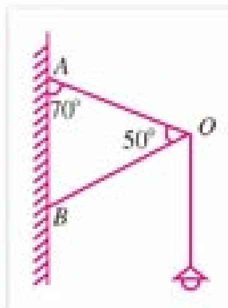


图 1-14

分析：点 O 处受到三个力的作用：灯线向下的拉力（记为 $\boldsymbol{F}$），O 到 A 方向的拉力（记为 $\boldsymbol{F}_1$），从 B 到 O 方向的支持力（记为 $\boldsymbol{F}_2$），这三个力是平衡的，即

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0}.$$

解：如图 1-15，作 $\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{F}$，将 $\boldsymbol{F}$ 沿 A 到 O，O 到 B 的两个方向进行分解，即作 $\square OCED$，则

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CE}=-\boldsymbol{F}_1,\ \overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{F}_2.$$

由题设条件可知，

$$|\overrightarrow{OE}|=10,\ \angle OCE=50^\circ,\ \angle OEC=70^\circ,$$

所以 $\angle COE=180^\circ-50^\circ-70^\circ=60^\circ$.

在 $\triangle OCE$ 中，由正弦定理，得

$$\frac{|\boldsymbol{F}|}{\sin 50^\circ}=\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{\sin 60^\circ},\ \frac{|\boldsymbol{F}|}{\sin 50^\circ}=\frac{|\boldsymbol{F}_2|}{\sin 70^\circ},$$

因此

$$|\boldsymbol{F}_1|=\frac{10\sin 60^\circ}{\sin 50^\circ}\approx 11.3,$$

$$|\boldsymbol{F}_2|=\frac{10\sin 70^\circ}{\sin 50^\circ}\approx 12.3.$$

答：灯杆 AO 所受拉力为 11.3 N，灯杆 OB 所受压力为 12.3 N.

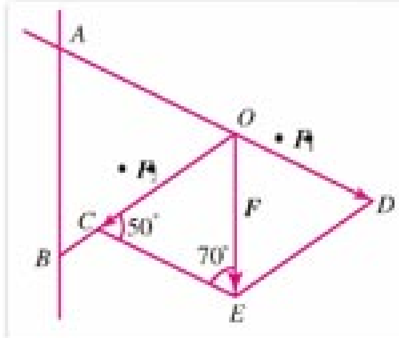


图 1-15

问题 4　如图 1-16，在海滨某城市附近海面有一台风. 据监测，台风中心位于城市 A 的南偏东 30°方向、距城市 300 km的海面 P 处，并以 20 km/h 的速度向北偏西 45°方向移动. 如果台风侵袭的范围为圆形区域，半径为120 km. 几小时后该城市开始受到台风的侵袭（精确到 0.1 h）?

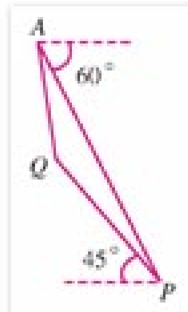


图 1-16

解：如图 1-16 所示. 设台风的中心 x 小时到达位置 Q 时，开始侵袭该城市. 在△AQP 中，依题意，得

$AQ=120$ km，$AP=300$ km，$PQ=20x$，

$\angle P=60^\circ-45^\circ=15^\circ$，$\angle A=180^\circ-15^\circ-\angle Q=165^\circ-\angle Q$.

由正弦定理，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{300}{\sin Q}=\dfrac{120}{\sin 15^\circ} & ① \\[2ex] \dfrac{20x}{\sin A}=\dfrac{120}{\sin 15^\circ} & ②\end{cases}$$

由①得

$$\sin Q=\frac{300\sin 15^\circ}{120}\approx 0.6470,$$

所以$\angle Q\approx 40.3^\circ$(不合题意，舍去)，$\angle Q\approx 139.7^\circ$.

因此$\angle A\approx 180^\circ-15^\circ-139.7^\circ=25.3^\circ$，代入②得

$$20x=\frac{120\sin 25.3^\circ}{\sin 15^\circ}\approx 198.1,$$

所以

$$x=\frac{198.1}{20}\approx 9.9(\text{h}).$$

答：大约 9.9 小时后，该城市开始受到台风的侵袭.

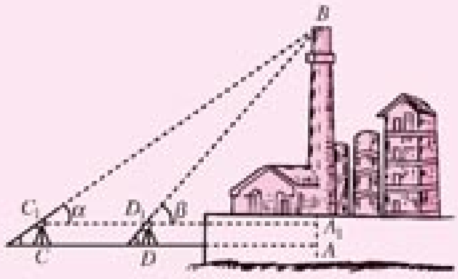
?

$\angle AQP\approx 40.3^\circ$有什么实际意义?

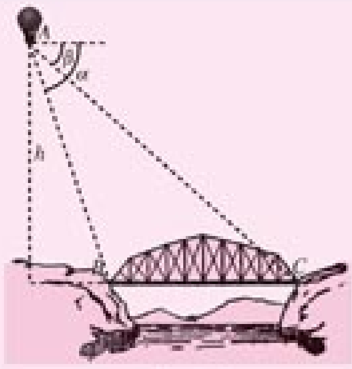
如果台风移动的方向及速度不变，那么该城市受台风侵袭的时间有多长?

练习A

1. 如图所示，C，D 两地在同一水平线上，且与烟囱的中轴线 AB 在一个平面内. 在 C，D 两处测得烟囱顶部的仰角分别是 $\alpha=35^\circ12'$，$\beta=49^\circ28'$. 如果 C，D 间的距离是 11.12 m，测角仪高 1.52 m，求烟囱的高（精确到 0.01 m）.



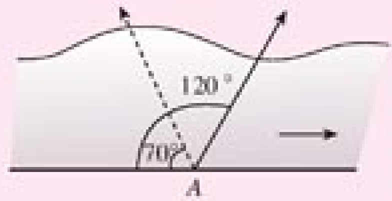
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，从高为 h 的气球(A)上测量铁桥(BC)的长．如果测得桥头 B 的俯角是 α，桥头 C 的俯角是 β，求该桥的长．

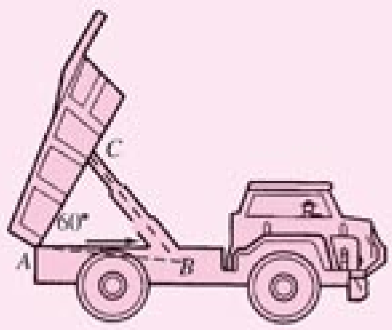
3. 如图，一渡船自岸边 A 处出发，与岸边成 70° 方向以 30 km/h 的速度航行，由于河水流速的影响，它实际航行的方向与河岸成 120°，试求水流速度（水流方向与河岸平行，精确到 0.1 km/h）．



（第 3 题）

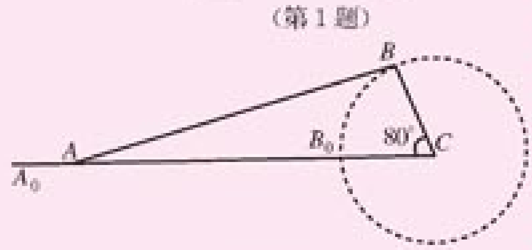
练习B

1. 如图，自动卸货汽车的车厢采用液压结构．设计时，需要计算油泵顶杆 BC 的长度．已知车厢的最大仰角为 60°，油泵顶点 B 与车厢支点 A 之间的距离为1.95 m，AB 与水平线之间的夹角为 $6^\circ 20'$，AC 的长为 1.40 m，计算顶杆 BC 的长（精确到 0.01 m)．



（第 1 题）

2. 如图，在曲柄 CB 绕 C 点旋转时，活塞 A 作直线往复运动．设连杆 AB 长340 mm，曲柄 CB 长 85 mm，求曲柄 CB 从初始位置 CB_0 按顺时针方向旋转 80° 时，活塞 A 移动的距离（精确到 1 mm)．

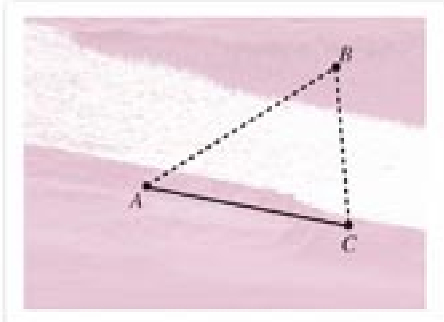


（第 2 题）

习题1-2 A

1. 如图，设 A，B 两点在河的两岸，测量者在与 A 同侧的河岸边选取测点 C，测得 AC 的距离是50 m，$\angle BAC=51^\circ$，$\angle ACB=75^\circ$，求 A，B 两点间的距离（精确到

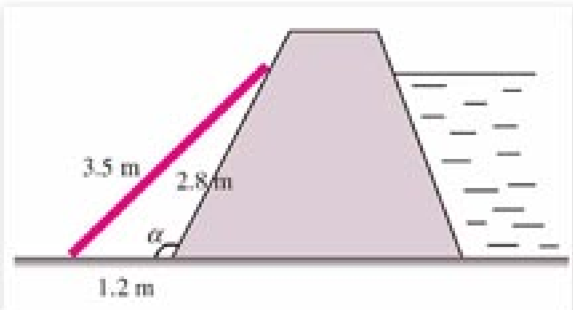
0.1 m).



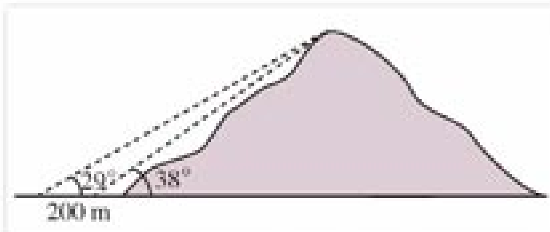
(第1题)

2. 为了测量河堤背水坡对地面的倾斜角，用一根长为 3.5 m 的长棒靠在堤旁，测得长棒与地面接触的一端离堤脚的距离为 1.2 m，堤脚与长棒的顶端的距离为 2.8 m（如示意图）. 你能用这些数据求出河堤背水坡的倾斜角 α 的大小吗（精确到 1°）？

3. 如图，勘探队员朝一座山行进，前后两次测得山顶的仰角分别为 29°和 38°，两个测点之间的距离为200 m，求此山的高度（测量者的高度忽略不计，精确到 0.1 m).

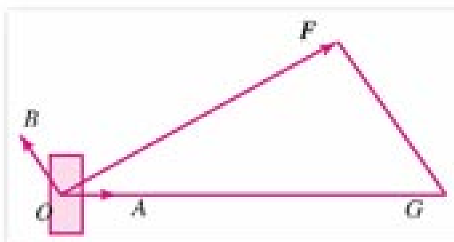


(第2题)



(第3题)

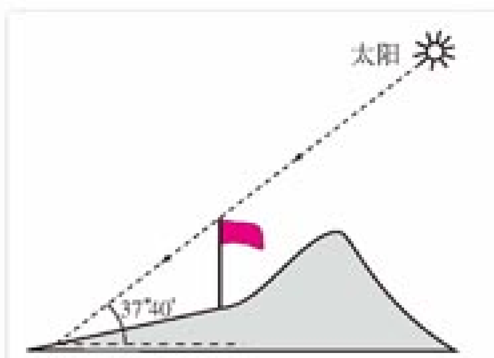
4. 如图所示，对某物体施加一个大小为 5 N 的力 $\boldsymbol{F}$，这个力被分解到 OA，OB 两个方向上. 已知 $\angle AOB=120°$，力 $\boldsymbol{F}$ 与 OA 的夹角为 25°，求分力的大小（精确到 0.01 N).



(第4题)

习题 1-2 B

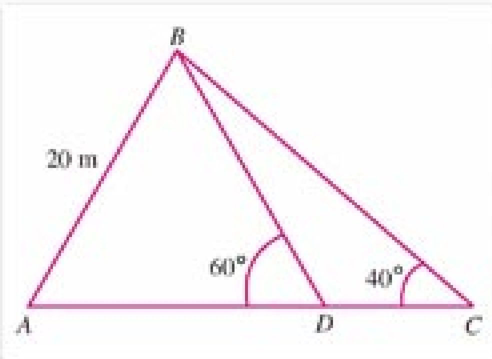
1. 如图，在倾斜角等于 12°30′ 的山坡上竖立一根旗杆. 当太阳的仰角是 37°40′ 时，旗杆在山坡上的影子的长是 31.2 m，求旗杆的高（精确到 0.1 m).



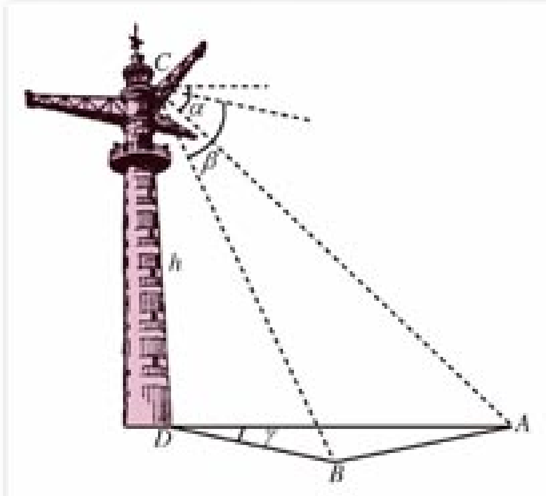
(第1题)

2. 如图所示的一块三角形绿地 ABC 中，AB 边长为 20 m，由点 C 看 AB 的张角为 40°，在 AC 边上一点 D 处看 AB 的张角为 60°，且 $AD=2DC$. 试求这块绿地的面积（精确到 1 m^2).

3. 如图，跳伞塔 CD 高 h，在塔顶 C 测得地面上两点 A，B 的俯角分别是 α，β，又测得 $\angle ADB=\gamma$，求 AB 的长.



（第 2 题）



（第 3 题）

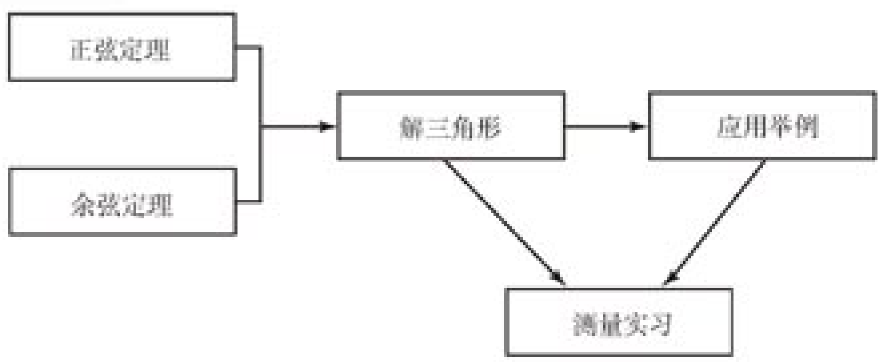
实 习 作 业

请同学们选择一个有关测量的问题，进行实际测量，并写出实习报告.

测量项目			
测得的相关数据		附图	
计算过程（主要算式与结果）			
参与测量人员		课题负责人	
参与计算人员		复核	
指导教师审核意见			
备注			

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 已知三角形中的哪些元素，可以用正弦定理解这个三角形？

2. 利用正弦定理解三角形时，何时有唯一解？何时有两个解？何时无解？

3. 已知三角形中的哪些元素，可以用余弦定理解这个三角形？

4. 研究正弦定理、余弦定理与三角形全等条件之间的关系.

5. 如果在求一个三角形的角时，既可以用正弦定理，也可以用余弦定理，你认为选择哪种方法较好？试举例说明.

6. 通过实习，对怎样提高测量的精确度谈谈你的体会.

Ⅲ 巩固与提高

1. 在$\triangle ABC$中（保留根号或精确到0.1）：

（1）已知$c=10$，$\angle A=45°$，$\angle C=30°$，求b；

（2）已知$a=20$，$b=28$，$\angle A=40°$，求$\angle B$和c.

2. 根据下列条件解$\triangle ABC$：

（1）$b=20$，$\angle A=60°$，$a=20\sqrt{3}$；

(2) $b=20$，$\angle A=60^\circ$，$a=10\sqrt{3}$；

(3) $b=20$，$\angle A=60^\circ$，$a=15$.

3. 由下列条件，解$\triangle ABC$（精确到0.1）：

(1) $a=7$，$b=10$，$c=6$；

(2) $a=2.730$，$b=3.696$，$\angle C=82^\circ28'$.

4. 已知四边形$ABCD$的四条边长为$AB=2.4$，$BC=CD=DA=1$，且$\angle A=30^\circ$，求$\angle C$（精确到0.1°）.

5. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为120°，且$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，请你分别用两种方法求$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$及$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角（保留根号或精确到0.1）.

6. 已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的夹角为$60^\circ$，且$|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=7$，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角及$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$（精确到0.1）.

7. 已知在$\triangle ABC$中，$\angle A=2\angle B$，求证：$a=2b\cos B$.

8. 已知在$\triangle ABC$中，$\angle C=2\angle B$，求证：$\dfrac{\sin 3B}{\sin B}=\dfrac{a}{b}$.

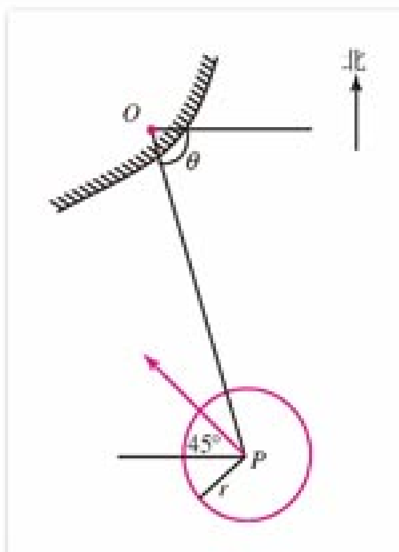
9. 在$\triangle ABC$中，已知$c=b(1+2\cos A)$，求证：$\angle A=2\angle B$.

10. 在$\triangle ABC$中，求证：

$$a=b\cos C+c\cos B,$$
$$b=a\cos C+c\cos A,$$
$$c=a\cos B+b\cos A.$$

11. 已知$\triangle ABC$中，$\sin A(\cos B+\cos C)=\sin B+\sin C$，求证这个三角形为直角三角形.

12. 如图，在某海滨城市O附近的海面上正在形成台风．据气象部门监测，目前台风中心位于城市O的南偏东$90^\circ-\theta$ $\left(\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)$方向300 km的海面$P$处，并以20 km/h的速度向北偏西$45^\circ$方向移动．如果台风侵袭的范围为圆形区域，目前圆形区域的半径为60 km，并以10 km/h的速度不断增大．几小时后该城市开始受到台风的侵袭？



（第12题）

IV 自测与评估

1. 在$\triangle ABC$中（保留根号或精确到0.1）：

(1) 已知$c=\sqrt{3}$，$\angle A=45^\circ$，$\angle B=75^\circ$，则$a=$________；

(2) 已知$c=2$，$\angle A=120^\circ$，$a=2\sqrt{3}$，则$\angle B=$________；

(3) 已知 $c=2$，$\angle A=45^\circ$，$a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，则 $\angle B=$________；

(4) $a=4$，$b=3$，$\angle C=60^\circ$，则 $c=$________；

(5) $a=2$，$b=3$，$c=4$，则 $\angle C=$________；

(6) $a=2$，$b=4$，$\angle C=135^\circ$，则 $\angle A=$________.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$b=4$，$c=3$，BC 边上的中线 $m=\frac{\sqrt{37}}{2}$，求 $\angle A$，a 以及面积 S.

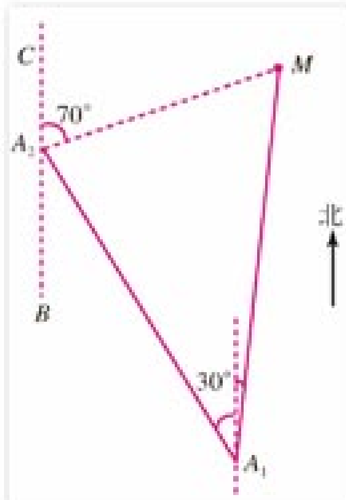
3. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，$AB=4$，$AD=5$，求 AC 的长和 $\frac{BC}{CD}$ 的值.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 中点，已知 $\angle BAD+\angle C=90^\circ$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

5. 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，且 $AC=2$，$AB=3$，$\angle A=60^\circ$，求 AD 的长.

6. 如图，一艘轮船按照北偏西 30° 的方向以每小时 28 海里的速度航行. 一个灯塔 M 原来在轮船的北偏东 10° 方向上，经过 40 分钟后，灯塔在轮船的北偏东 70° 方向上，求灯塔和轮船原来的距离（精确到 0.1 海里）.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，求证这个三角形为等边三角形.



（第6题）

数学文化　阅读与欣赏

亚历山大时期的三角测量

公元前332年，亚历山大征服了埃及．为了庆祝这个胜利，他在当时称为圣河的尼罗河入海处，建立了一座以他的名字命名的城市——亚历山大城，以示纪念．那时的亚历山大城是世界文化中心，有世界第一的图书馆、博物馆和大学，可惜这样宏伟的图书馆后来却毁于战火．伟大的数学家欧几里得和伟大的物理学家阿基米德都曾是活跃于亚历山大城的杰出科学家．

利用三角知识进行天文测量和地理测量的例子，在亚历山大时期举不胜举．我们在这里只介绍那个时期的两个三角测量的例子．

当时在亚历山大城任教的欧几里得已经完成了不朽的巨著《原本》，藏于亚历山大城的世界第一的图书馆中．图书馆的埃拉托塞尼管理员有机会接触到这些文化结晶，由此引发测量地球周长的念头．他发现地球的某一时刻在辛尼地方的一口深井底部可以见到太阳，也就是说太阳这时恰好在人的头顶上（图1-17）．同时在500 n mile外的亚历山大城的太阳光线倾斜了大约7.5°，约是周角的$\frac{1}{50}$，这样就可以计算出地球周长大约是

$$500\times 50=25\ 000(\text{n mile}),$$

这个结果与现代人测量的赤道长相差不多．

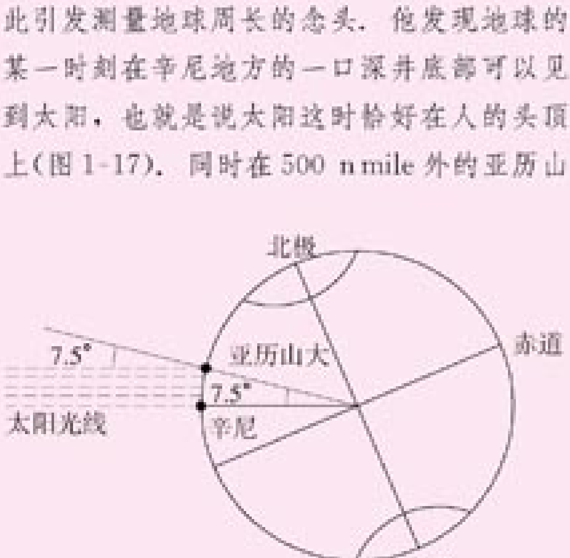


图1-17

另外一个例子是希帕克斯测量地球和月球间的距离．要知道那时没有先进的测量仪器，他假设一个人站在赤道A处看到月亮恰好在他头顶上方的C处（图1-18），另一个人站在赤道B处，看到月亮刚刚升起．这时BC和圆O相切，构成了直角三角形OBC，$\overset{\frown}{AB}$所对θ恰为A，B两地的经度差．

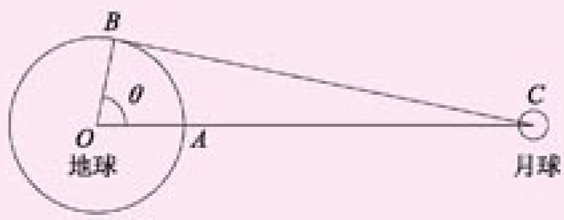


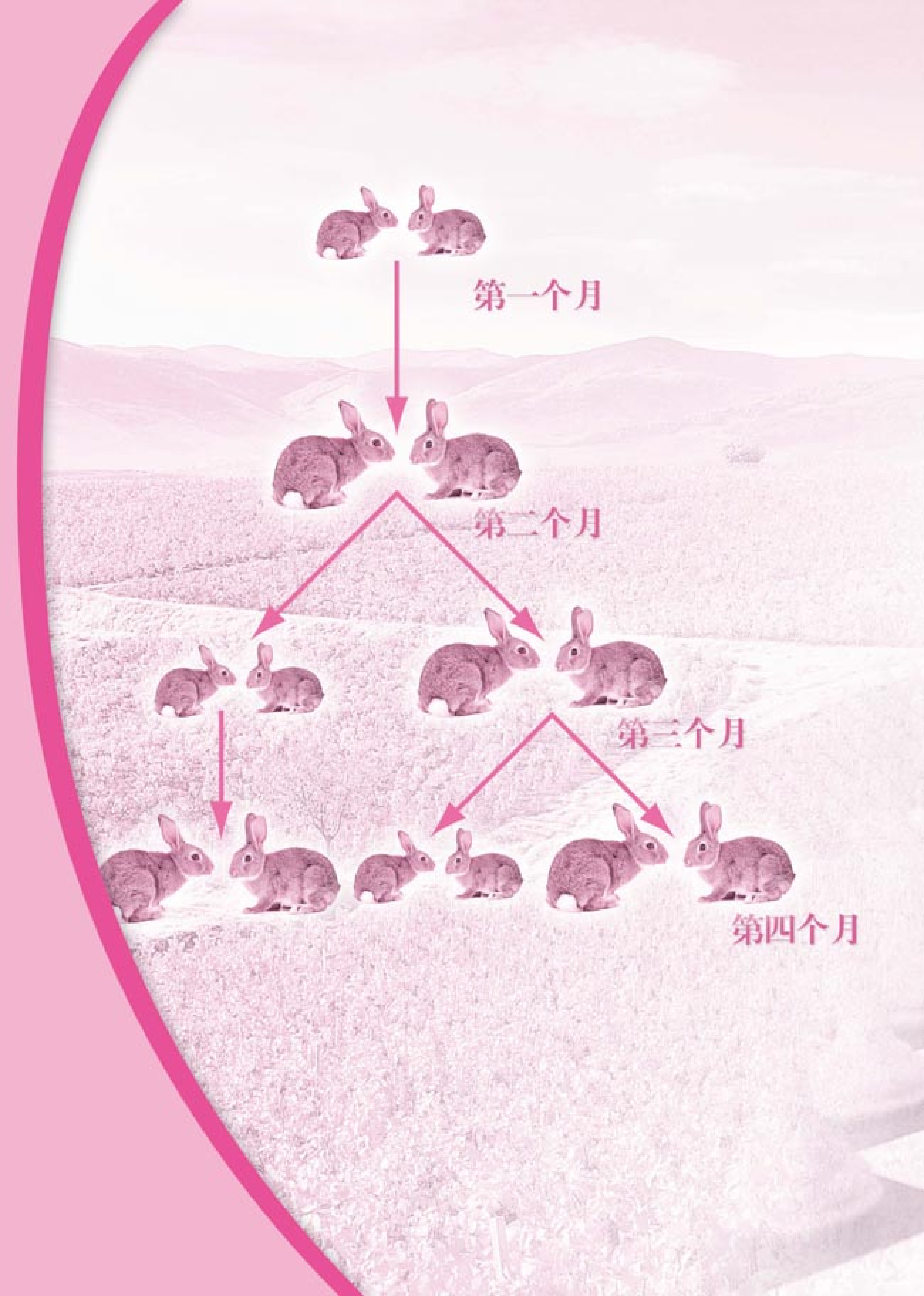
图1-18

希帕克斯测得$\theta=\left(89\frac{1}{16}\right)^\circ$，他利用自己编制的世界第一张正弦函数值表计算，得

$$\sin(90^\circ-\theta)=\frac{OB}{OC},$$

$$OC=\frac{OB}{\cos\theta}=250\ 000(\text{n mile}),$$

这个数据与实际距离误差也不太大．


第一个月
第二个月
第三个月
第四个月

第二章 数 列

2.1 数列

2.2 等差数列

2.3 等比数列

章头图中蕴含着一个很有趣的关于兔子繁殖的故事．意大利数学家斐波那契（Leonardo Fibonacci，约 1170—1250）在 1202 年提出了一个关于兔子繁殖的问题：

如果一对兔子每月能生 1 对小兔子（一雄一雌），而每一对小兔子在它出生后的第三个月里，又能生 1 对小兔子．在不发生死亡的情况下，由 1 对初生的小兔子开始，50 个月后会有多少对兔子？

根据设定的条件，从第 1 个月开始，以后每个月的兔子总对数是

$$1，1，2，3，5，8，\cdots.$$

这就是有名的斐波那契数列．

下面我们一起来进行几项活动．

1．将 1 张纸对折一次，得 2 层；再对折一次，得 4 层……这样不断地对折下去，关于纸的层数可以得到一列数

$$2，4，8，16，\cdots.$$

如果能对折 30 次，你能估算出它有多厚吗（假设一张纸的厚度为 0.05 mm）？

2．在平面上画 1 条直线，将平面分成 2 个部分；画 2 条直线，最多可以将平面分成 4 个部分；画 3 条直线，最多可以将平面分成 7 个部分……这样继续画下去，平面最多被分成的部分也可以得到一列数

$$2，4，7，11，\cdots.$$

你能发现这列数的规律吗？

3．如果操作计算器：$\boxed{1}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\cos}$ ……可以得到这样的一列数

$$1，\cos 1，\cos(\cos 1)，\cos(\cos(\cos 1))，\cdots.$$

请你试一试，会出现什么现象？你能解释这一现象吗？

上面这些按一定次序排列的一列数叫做**数列**．

在这一章中，我们将学习关于数列的一些基础知识，应用这些知识，同学们就能解决如上一些简单而又有趣的问题．

2.1 数列

2.1.1 数列

在前言中我们已经得到这样几列数

$$2，4，8，16，\cdots; \qquad ①$$

$$2，4，7，11，\cdots; \qquad ②$$

$$1，\cos 1，\cos(\cos 1)，\cos(\cos(\cos 1))，\cdots. \qquad ③$$

再看下面的例子.

正整数 1，2，3，4，5 的倒数排成一列数

$$1，\frac{1}{2}，\frac{1}{3}，\frac{1}{4}，\frac{1}{5}. \qquad ④$$

π 精确到 1，0.1，0.01，0.001，…的不足近似值排成一列数

$$3，3.1，3.14，3.141，\cdots. \qquad ⑤$$

无穷多个 1 排成一列数

$$1，1，1，1，\cdots. \qquad ⑥$$

当 n 分别等于 1，2，3，4，…时，$(-1)^n$ 的值排成一列数

$$-1，1，-1，1，\cdots. \qquad ⑦$$

上面例子中的每一列数，都是按照一定的次序排列起来的．像这样按照一定次序排列起来的一列数叫做**数列**．数列中的每一个数叫做这个数列的**项**，各项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项，…，第 n 项，….

数列的一般形式可以写成

$$a_1，a_2，a_3，\cdots，a_n，\cdots.$$

其中 a_n 是数列的第 n 项，叫做数列的**通项**．我们常把一般形式的数列简记作 $\{a_n\}$.

如果数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个函数式

$$a_n = f(n)$$

来表示，那么这个公式叫做这个数列的**通项公式**.

> 不是所有数列都能写出通项公式.

数列 $\{a_n\}$ 每一项的序号 n 与这一项 a_n 的对应关系，实

际上，可以看成序号集合到另一个数的集合的映射．例如，数列④对应的映射，可用图 2-1 表示．

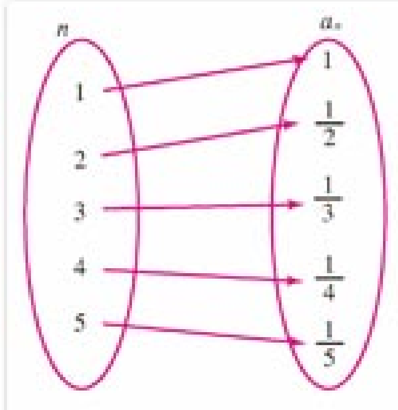


图 2-1

从映射、函数的观点看，数列可以看作是一个定义域为正整数集 $\mathbf{N}_+$（或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$）的函数，即当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值，而**数列的通项公式也就是相应函数的解析式**．

例如，

数列①的一个通项公式是　$a_n=2^n$；

数列④的一个通项公式是　$a_n=\frac{1}{n}(n\leqslant 5)$；

数列⑦的一个通项公式是　$a_n=(-1)^n$．

上面列举的数列中，你还能写出哪些数列的通项公式？

数列作为一种特殊的函数，也可以用列表法和图象法表示．例如上面给出的数列②④可以用列表和图象分别表示如下：

（1）数列②

n	1	2	3	4	$\cdots$
a_n	2	4	7	11	$\cdots$

（2）数列④

n	1	2	3	4	5
a_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

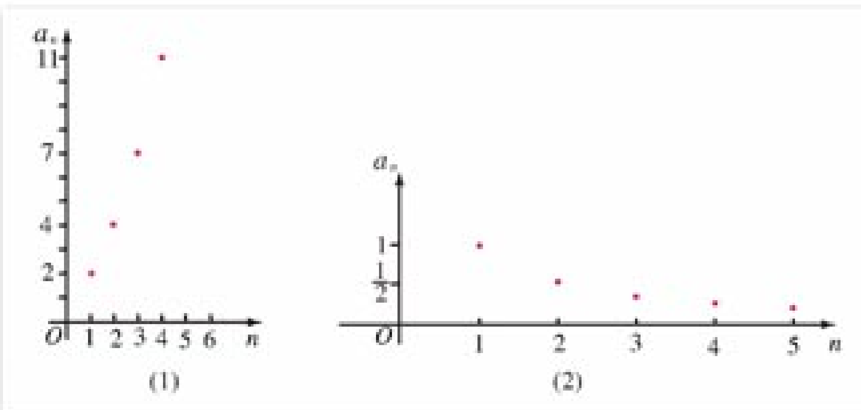


图 2-2

由于数列是定义在正整数集 $\mathbf{N}_+$（或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$）上的函数，因此，它们的图象是相应的曲线（或直线）上横坐标为正整数的一些孤立的点．

前面学习的数列中，哪些是有穷数列？哪些是无穷数列？

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**．

从第二项起，每一项大于它的前一项的数列叫做**递增数列**；从第二项起，每一项小于它的前一项的数列叫做**递减数列**；各项都相等的数列叫做**常数列**．

例 1　根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

（1）$a_n=\frac{n^2-1}{2n-1}$；　　　　（2）$a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$．

解：(1) 在通项公式中依次取 $n=1$，2，3，4，5，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$0,\ 1,\ \frac{8}{5},\ \frac{15}{7},\ \frac{8}{3};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1$，2，3，4，5，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1.$$

例 2 写出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 1，3，5，7；

(2) 0，2，0，2；

(3) $-\frac{2}{3}$，$-\frac{4}{15}$，$-\frac{6}{35}$，$-\frac{8}{63}$.

为什么例 2 中要求写出“一个”通项公式？

解：(1) 这个数列的前 4 项 1，3，5，7 都是序号的 2 倍减去 1，因此它的一个通项公式是

$$a_n=2n-1;$$

(2) 这个数列的前 4 项是 0，2 交错排列，因此它的一个通项公式是

$$a_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数}\\ 2, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

数列(2)的通项公式可以写成 $a_n=(-1)^n+1$ 吗？

(3) 分别观察这个数列前 4 项的分子和分母：分子为偶数列$\{2n\}$；分母为 1×3，3×5，5×7，7×9. 因此它的一个通项公式是

$$a_n=-\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}.$$

例 3 已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{x}$，设 $a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}_+)$：

(1) 求证：$a_n<1$；

(2) $\{a_n\}$是递增数列还是递减数列？为什么？

解：(1) 因为 $a_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$，又因为 $n\in\mathbf{N}_+$，所以

$$1\geqslant\frac{1}{n}>0.$$

因此 $a_n<1$.

(2) 因为

$$a_{n+1}-a_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n(n+1)},$$

又因为 $n+1>n\geqslant1$，所以 $a_{n+1}-a_n>0$，即 $a_{n+1}>a_n$.

因此$\{a_n\}$是递增数列.

思考与讨论

是否存在一个各项都小于 5 的无穷递增数列？如果存在，请写出一个这样的数列的通项公式.（提示：先定义一个在$(0,+\infty)$上，且函数值都小于 5 的函数）

练习A

1. （口答）说出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 2，3，4，5；

(2) −3，−6，−9，−12；

(3) $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$；

(4) 1，−3，5，−7.

2. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=n^2$；　　(2) $a_n=2n(-1)^n$；

(3) $a_n=n(n+3)$；　　(4) $a_n=\frac{n-1}{n(n+1)}$.

3. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的第 10 项：

(1) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{2n-1}$；　　(2) $a_n=1+\cos\frac{(n-1)\pi}{2}$；

(3) 请判断$\frac{51}{99}$是不是第(1)小题中的那个数列的项.

练习B

1. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式：

(1) 1，3，7，(　)，31，(　)，127；

(2) 2，5，(　)，17，26，(　)，50；

(3) $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$，(　)，$-\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$，(　)，$\frac{1}{128}$；

(4) 1，$\sqrt{2}$，(　)，2，$\sqrt{5}$，(　)，$\sqrt{7}$.

2. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}$，它的前 30 项中最大项是第几项？最小项是第几项？

3. 写出分别满足下列条件的数列$\{a_n\}$的一个通项公式：

(1) 从第 2 项起，每一项都比它的前一项大 2；

(2) 无穷、递减，且从第 2 项起，每一项都是它的前一项的 3 倍.

2.1.2 数列的递推公式（选学）

在 2.1.1 节我们列举了一些数列的例子，其中数列①的通项公式是$a_n=2^n$，只要依次用$n=1$，2，3，4，…代替公式中的 n，就可以求出这个数列的各项．观察数列①，容易发现，从第 2 项开始，每一项是它的前一项的 2 倍，因此该数列也可以用如下方法给出

$$a_1=2,$$
$$a_n=2a_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots).$$

这就是说，由上面数列的第 1 项，以及项 a_n 与 a_{n-1}间的关系式，可以写出这个数列的各项．

再如数列③，在前言中它是由操作计算器

$$\boxed{1}\ \boxed{\cos}\ \boxed{\cos}\ \boxed{\cos}\ \cdots\cdots$$

给出的，它的通项公式不易求得，但相邻两项之间的关系却非常简单，即 $a_n=\cos(a_{n-1})$，因此数列③可以这样来确定

$$a_1=1,$$
$$a_n=\cos(a_{n-1})\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots).$$

像上面那样，如果已知数列的第 1 项（或前几项），且从第二项（或某一项）开始的任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前几项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的**递推公式**．递推公式也是给出数列的一种方法．

例 1 已知数列$\{a_n\}$的第 1 项是 2，以后的各项由公式

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{1-a_{n-1}}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

给出，写出这个数列的前 5 项．

解：

$$a_1=2,$$
$$a_2=\frac{2}{1-2}=-2,$$
$$a_3=\frac{-2}{1-(-2)}=-\frac{2}{3},$$
$$a_4=\frac{-\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{2}{5},$$
$$a_5=\frac{-\frac{2}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}=-\frac{2}{7}.$$

你能猜想出这个数列的通项公式吗？

例 2 已知直线 l：$y=x$ 与曲线 c：$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$（如图 2-3 所示），过曲线 c 上横坐标为 1 的一点 P_1 作 x 轴的平行线交 l 于 Q_2，过 Q_2 作 x 轴的垂线交曲线 c 于 P_2，再过 P_2 作 x 轴

的平行线交 l 于 Q_3，过 Q_3 作 x 轴的垂线交曲线 c 于 P_3……设点 P_1，P_2，…，P_n，…的纵坐标分别为 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，试求数列$\{a_n\}$的递推公式.

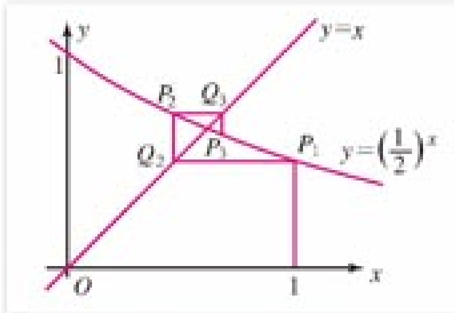


图 2-3

解：由题意，点 P_1 的横坐标为 1，纵坐标 $a_1=\dfrac{1}{2}$.

点 Q_{n+1} 与 P_n 的纵坐标相等，都是 a_n. 同时，点 P_{n+1} 与 Q_{n+1} 的横坐标相等.

因为 Q_{n+1} 在直线 $y=x$ 上，所以它的横、纵两坐标相等，都是 a_n，从而得到点 P_{n+1} 的横坐标是 a_n.

点 P_{n+1} 在曲线 c：$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 上，由横坐标得它的纵坐标为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a_n}$，即

$$a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}.$$

这就是数列$\{a_n\}$的递推公式.

你能比较 a_n 与 a_{n+1} 的大小吗？你能比较 a_n 与 a_{n+2} 的大小吗？

思考与讨论

章前图中的左图说明，一对小兔子（一雄一雌）一个月后长成一对成年兔，又一个月后生出一对小兔子（一雄一雌）；再过一个月小兔子长成成年兔，同时，成年兔又生出一对小兔子（一雄一雌）. 以此规律，每过一个月小兔子长成成年兔，成年兔生出一对小兔子. 假定每次生出的小兔子都是一雄一雌，并且排除兔子发生死亡的情况，这样每个月兔子的对数，依次可以排成一个数列，请写出此数列的前 6 项，你能通过递推公式表示这个数列吗？

练习A

写出下面数列$\{a_n\}$的前 5 项：

1. $a_1=2$，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}(n=2，3，4，\cdots)$；

2. $a_1=3$，$a_n=a_{n-1}+2(n=2，3，4，\cdots)$；

3. $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}(n=2，3，4，\cdots)$.

练习B

1. 满足 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 一定是递增数列吗？为什么？
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_3=2$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$，试写出这个数列的前 10 项.
3. 如果 $a_1=\dfrac{1}{8}$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n\geqslant 2)$，试写出数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项，并猜想出它的一个通项公式.

习题 2-1 A

1. 分别写出下面的数列：

(1) $\sqrt{2}$ 精确到 1，0.1，0.01，0.001，…的近似值（四舍五入）构成的数列；

(2) 今年的十二个月的天数顺次构成的数列；

(3) 0 到 20 之间的质数按照从小到大的顺序构成的数列.

2. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=10+2n$；　(2) $a_n=5\times(-1)^{n-1}$；　(3) $a_n=\dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

3. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的第 7 项，第 10 项，第 $n+1$ 项及第 $n-1$ 项：

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^3}$；　(2) $a_n=n(n+2)$；　(3) $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$；　(4) $a_n=-2^n+3$.

4. 根据数列的通项公式填表：

n	1	2	…	5	…		…	n
a_n			…		…	195	…	n^2-2n

5. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并对每一个数列各写出一个通项公式：

(1) 2，4，(　)，8，10，12；

(2) 2，4，(　)，16，32，(　)，128，(　)；

(3) (　)，4，3，2，1，(　)，-1，(　)；

(4) (　)，4，9，16，25，(　)，49.

6. 写出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 0，-2，-4，-6；　(2) $\dfrac{6}{5}$，$\dfrac{7}{6}$，$\dfrac{8}{7}$，$\dfrac{9}{8}$；　(3) -1，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{16}$.

7. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n(n+2)$：

(1) 求这个数列的第 10 项，第 15 项及第 21 项；

(2) 440 是不是这个数列中的项？222 是不是这个数列中的项？如果是，是第几项？如果不是，请说明理由.

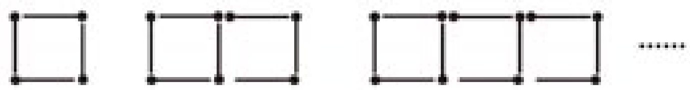
8. 写出下面数列$\{a_n\}$的前 5 项：

(1) $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=4a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$；　　(2) $a_1=-\frac{1}{4}$, $a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$.

习题 2-1 B

1. 写出数列 1，2，2，4，3，8，4，16，5，…的一个通项公式.

2. 如图，用 4 根火柴可以拼出一个正方形，用 7 根火柴可以拼出两个正方形……试写出一个与此有关的数列，并写出它的通项公式.



（第 2 题）

3. 观察下列各式：

$$1+3=4;$$
$$1+3+5=9;$$
$$1+3+5+7=16;$$
$$\cdots\cdots$$

请写出第 4、第 5 个等式，并写出第 n 个等式.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1-2x}{x+1}(x\geqslant 1)$，构造数列 $a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}_+)$：

(1) 求证：$a_n>-2$；

(2) 数列$\{a_n\}$是递增数列还是递减数列？为什么？

5. 将正整数数列 1，2，3，4，5，…的各项按照上小下大、左小右大的原则写成如下的三角形数表：

1

2　3

4　5　6

……

(1) 写出数表中第 4 行、第 5 行的各数；

(2) 写出数表中第 10 行的第 5 个数；

(3)* 数表中每行的第 1 个数依次构成数列$\{a_n\}$，数表中每行的最后一个数依次构成数列$\{b_n\}$. 试分别写出数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的递推公式.

探索与研究

如果一个数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且对于任意正整数n都有$a_{n+1}=a_n^2-na_n+1$，你能猜出这个数列的一个通项公式吗?

先算出前几项：将$a_1=2$代入递推公式，可得

$$a_2=2^2-1\times2+1=3,$$

于是

$$a_3=a_2^2-2\times a_2+1=4,$$
$$a_4=a_3^2-3\times a_3+1=5.$$

这时，我们发现这个数列的前4项中，从第二项开始，每一项都比它的前一项大1，于是猜想$\{a_n\}$的通项公式是

$$a_n=n+1.$$

本章前言中举过直线分平面的例子：如图2-4，1条直线将平面分成2个部分，2条直线最多将平面分成4个部分，3条直线最多将平面分成7个部分……

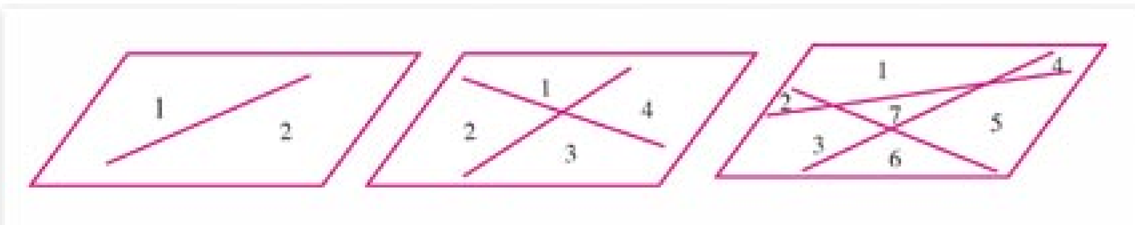


图 2-4

你发现其中的规律了吗? 如果还没有发现，那么再试验一下，看4条直线最多能将平面分成几个部分.

观察图2-5，数一数，得11个部分.

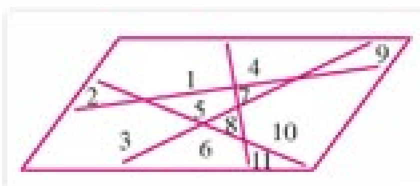


图 2-5

设n条直线最多将平面分成a_n个部分，那么就可得到数列$\{a_n\}$，$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=7$，$a_4=11$. 因为有

$$a_2-a_1=2,\ a_3-a_2=3,\ a_4-a_3=4,$$

于是我们猜想：$a_n-a_{n-1}=n$. 这个猜想对不对呢? 我们来试验5条直线的情况，确实得到$a_5=16$，$a_5-a_4=5$. 这样，猜想的结论得到了一次验证，但验证正确不等于猜想一定正确.

我们直接研究a_n与a_{n-1}的关系. 如果平面上$n-1$条直线已经将平面分成了a_{n-1}个部分，当第n条直线加进来时，它与前$n-1$条直线都相交（为了使平面分成的部分数最多，这一点是可以做到的)，第n条直线上出现$n-1$个交点，这条直线被这些交点依次分成n段，其中的每条射线或线段将平面上原来完整的一个部分一分为二，这说明由于第n条直线的加入，平面上多出了n个部分，从而说明前面的猜想是正确的.

必须注意的是，“猜想”得出的结论并不都是正确的. 例如，根据通项公式

$$a_n=n^4-10n^3+35n^2-48n+23$$

可以得到数列的前 3 项依次为 1，3，5，由此猜想这个数列是正奇数列（从小到大依次排成）. 当我们把 $n=4$ 代入通项公式，算得 $a_4=7$ 时，虽然猜想的结论又一次得到验证，但仍不能确定猜想的正确性. 因为当 $n=5$ 时，算得 $a_5=33$，而不是 $a_5=9$，这说明"这个数列是正奇数列"的猜想是错误的.

"观察、试验、归纳、猜想"是解决许多数学问题常用的探索过程，是一种重要的数学思想方法. 猜想的结论是否正确，最终还需严格证明，或者通过举出反例予以否定.

观察以下各数列，写出它的第 5 项、第 6 项，并猜想它的一个通项公式：

(1) 4，12，36，108，…；

(2) 6，-1，-8，-15，…；

(3) 1，-3，7，-15，….

2.2 等差数列

2.2.1 等差数列

请看下面的一些数列：

鞋的尺码，按照国家统一规定，有

$$22,\ 22.5,\ 23,\ 23.5,\ 24,\ 24.5,\ \cdots; \qquad ①$$

某月星期日的日期为

$$2,\ 9,\ 16,\ 23,\ 30; \qquad ②$$

一个梯子共 8 级，自下而上每一级的宽度（单位：cm）为

$$89,\ 83,\ 77,\ 71,\ 65,\ 59,\ 53,\ 47. \qquad ③$$

上面几个数列有什么共同的特点？

对于数列①，从第 2 项起每一项与前一项的差都等于 0.5；

对于数列②，从第 2 项起每一项与前一项的差都等于 7；

对于数列③，从第 2 项起每一项与前一项的差都等于 -6.

这就是说，这些数列具有这样的共同特点：从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做**等差数列**. 这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示.

例 1 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-5$，这个数列是等差数列吗？

解：因为当 $n\geqslant 2$ 时，

$$a_n-a_{n-1}=3n-5-[3(n-1)-5]=3,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差为 3.

> 通项公式为 $a_n=an-b$（a，b 是常数）的数列都是等差数列吗？

如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公差是 d，那么根据等差数列的定义得到

$$a_2-a_1=d,\ a_3-a_2=d,\ a_4-a_3=d,\ \cdots.$$

因此

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
……

由此归纳出等差数列的通项公式为

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

这个公式还可以用下面的方法得到.

由等差数列的定义得

$$a_2-a_1=d,$$
$$a_3-a_2=d,$$
$$a_4-a_3=d,$$
……
$$a_{n-1}-a_{n-2}=d,$$
$$a_n-a_{n-1}=d.$$

将这 $n-1$ 个式子的等号两边分别相加，得 $a_n-a_1=(n-1)d$，即

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

注 这种用叠加求通项公式的方法叫做**叠加法**.

例 2 已知等差数列 10，7，4，…：

(1) 试求此数列的第 10 项；

(2) -40 是不是这个数列的项？-56 是不是这个数列的项？如果是，是第几项？

解：(1) 设此数列为 $\{a_n\}$，由 $a_1=10$，$d=7-10=-3$，得到这个数列的通项公式为

$$a_n=10-3(n-1).$$

当 $n=10$ 时，$a_{10}=10-3(10-1)=-17$.

(2) 如果 -40 是这个数列的项，则方程

$$-40=10-3(n-1)$$

有正整数解. 解这个方程，得 $n=\frac{53}{3}$，所以 -40 不是这个数列的项.

如果 -56 是这个数列的项，则方程

$$-56=10-3(n-1)$$

有正整数解. 解这个方程，得 $n=23$，因此 -56 是这个数列的第 23 项.

如果三个数 x，A，y 组成等差数列，那么 A 叫做 x 和 y 的**等差中项**.

如果 A 是 x 和 y 的等差中项，则 $A=\frac{x+y}{2}$.

? 怎么证明 $A=\frac{x+y}{2}$？

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项；反之，如果一个数列从第 2 项起，每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项，那么这个数列是等差数列.

从等差数列的通项公式

$$a_n=a_1+(n-1)d=nd+(a_1-d)$$

可以看出：当公差 $d=0$ 时，该数列是常数列(即常数列是公差为 0 的等差数列)；当公差不为 0 时，a_n 是关于 n 的一次式.

要确定一个等差数列的通项公式，需要知道几个独立的条件？

设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=an+b\ (a,\ b\text{ 是常数}).$$

因为 $a_n-a_{n-1}=(an+b)-[a(n-1)+b]=a\ (n\geqslant 2)$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其中 a 是公差.

这样，我们得到了如下结论：

如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $a_n=an+b$ (a，b 是常数)；反之，如果数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=an+b$ (a，b 是常数)，则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

由于等差数列的通项公式可以表示为 $a_n=an+b$，因此从图象上看，表示这个数列的各点均在一条直线上. 当 $a\neq 0$ 时，各点均在一次函数 $y=ax+b$ 的图象上；当 $a=0$ 时，各点均在函数 $y=b$ 的图象上.

例 3 已知等差数列的公差为 d，第 m 项为 a_m，试求其第 n 项 a_n.

解：由等差数列的通项公式可知

$$a_n=a_1+(n-1)d,$$
$$a_m=a_1+(m-1)d.$$

两式相减，得

$$a_n-a_m=(n-m)d,$$

所以

$$a_n=a_m+(n-m)d.$$

例 4 梯子共有 5 级，从上往下数第 1 级宽 35 厘米，第 5 级宽43 厘米，且各级的宽度依次组成等差数列 $\{a_n\}$，求第 2，3，4 级的宽度.

解法 1：依题意，$a_1=35$，$a_5=43$，由等差数列的通项公式，得公差

$$d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=2,$$

因此 $a_2=37$，$a_3=39$，$a_4=41$.

解法 2：此等差数列共 5 项，a_3 是 a_1 与 a_5 的等差中项，因此

$$a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=39.$$

又因为 a_2 是 a_1 与 a_3 的等差中项，a_4 是 a_3 与 a_5 的等差中项，所以

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=37,\quad a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=41.$$

相当于已知线段两端点的坐标，求线段中点坐标.

答：梯子第 2，3，4 级的宽度分别为 37 cm，39 cm，41 cm.

例 5 已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=17$，公差$d=-0.6$，此等差数列从第几项开始出现负数？

解：由题意，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=17-0.6(n-1)$.

令$17-0.6(n-1)<0$，解得$n>\frac{88}{3}\approx 29.3$.

又因为$\{a_n\}$是递减数列，所以此数列从第30项开始出现负数.

相当于已知直线过点(1，17)，斜率为-0.6，求直线在x轴下方的点的横坐标的取值范围.

练习A

1. (1) 求等差数列2，5，8，…的第4项与第10项；

   (2) 求等差数列12，7，2，…的第15项；

   (3) 100是不是等差数列3，7，11，…的项？79是不是这个数列的项？如果是，是第几项？如果不是，说明理由.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中：

   (1) 已知$a_5=6$，$a_7=16$，求a_1与公差d；

   (2) 已知$a_3=20$，$a_{10}=-1$，求a_{15}.

3. 求下列各题中两个数的等差中项：

   (1) 30与18；　　(2) -13与9.

4. 由下列等差数列的通项公式，求首项和公差：

   (1) $a_n=3n+5$；　　(2) $a_n=12-2n$.

练习B

1. 试述等差数列的公差与数列增减性的关系.

2. 已知一个等差数列的首项为a_1，公差为d：

   (1) 将数列的前m项去掉，其余各项组成的数列是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别为多少？

   (2) 取出数列中的所有奇数项，组成一个新的数列，这个数列是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别为多少？

   (3) 取出数列中所有项数为7的倍数的各项，组成一个新的数列，这个数列是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别为多少？

   (4) 数列$a_1+a_2+a_3$，$a_2+a_3+a_4$，$a_3+a_4+a_5$，…是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别为多少？

3. 已知两个等差数列的公差不相等，但第 5 项相等，这两个等差数列中除第 5 项外，还有序号相同且数值相等的项吗？为什么？

2.2.2 等差数列的前 n 项和

如图 2-6 堆放着一堆钢管，最上层放了 4 根，下面每一层比上一层多放一根，共 8 层，这堆钢管共有多少根？

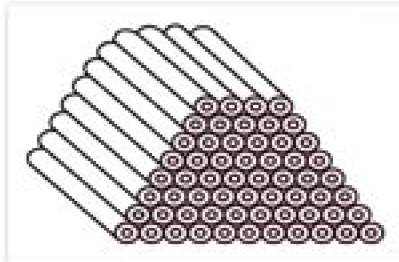


图 2-6

这堆钢管从上至下每层的数量组成首项 $a_1=4$，公差 $d=1$的等差数列. 求这堆钢管有多少根，就是求这个等差数列前 8 项的和. 怎样求这 8 项的和？

这堆钢管最下层的数量是 $a_8=11$.

我们设想，在这堆钢管旁，如图 2-7 所示堆放同样数量的钢管，这时每层都有钢管(4+11)根，因此这堆钢管的总数是

$$(4+11)\times 8\div 2=\frac{4+11}{2}\times 8=60.$$

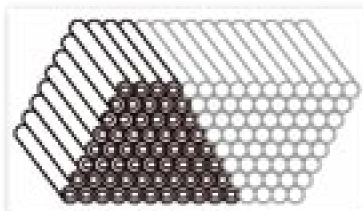


图 2-7

上述算法对等差数列前 n 项和的计算具有一般性.

设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n,$$

根据$\{a_n\}$的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d], \quad ①$$

再把项的顺序反过来，S_n 又可写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d], \quad ②$$

把①②两边分别相加，得

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n\text{个}}=n(a_1+a_n),$$

由此得到，求等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

这就是说，**等差数列的前 n 项和等于首末两项的和与项数乘积的一半**.

代入等差数列的通项公式，上面的公式还可以写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

例 1 等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，第 20 项 $a_{20}=29$，求前 20 项的和 S_{20}.

解：因为 $29=a_1+19\times 2$，解得 $a_1=-9$，所以

$$S_{20}=\frac{20(-9+29)}{2}=200.$$

例2 已知数列$\{a_n\}$的前n项和公式为$S_n=2n^2-30n$：

（1）这个数列是等差数列吗？求出它的通项公式；

（2）求使得S_n最小的序号n的值.

解：（1）将$n-1$代入数列的前n项和公式，得

$$S_{n-1}=2(n-1)^2-30(n-1).$$

因此

$$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-32\ (n\geqslant 2),$$

当$n=1$时，$a_1=S_1=2-30=-28$，也适合上式，所以这个数列的通项公式为

$$a_n=4n-32.$$

又因为

$$a_n-a_{n-1}=(4n-32)-[4(n-1)-32]=4\ (n\geqslant 2),$$

所以$\{a_n\}$是等差数列.

（2）因为$S_n=2n^2-30n=2\left(n-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{225}{2}$.

又因为n是正整数，所以当$n=7$或8时，S_n最小，最小值是-112.

如果仅利用通项公式，能求出使得S_n最小的序号n的值吗？

思考与讨论

1. 如果已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n的公式，那么这个数列确定了吗？如果确定了，那么如何求它的通项公式？应注意一些什么问题？

2. 如果一个数列的前n项和的公式是$S_n=an^2+bn+c$（a，b，c为常数），那么这个数列一定是等差数列吗？

例3 李先生为今年上高中的儿子办理了“教育储蓄”．从8月1号开始，每个月的1号都存入100元，存期三年：

（1）已知当年“教育储蓄”存款的月利率是2.7‰，问到期时，李先生一次可支取本息共多少元？（“教育储蓄”不需缴利息税）

（2）已知当年同档次的“零存整取”储蓄的月利率是1.725‰，问李先生办理“教育储蓄”比“零存整取”多收益多少元？（“零存整取”需缴20%的利息税）

解：（1）100元“教育储蓄”存款的月利息是

$$100\times 2.7‰=0.27(\text{元}).$$

第1个100元存36个月，得利息0.27×36(元)；

第2个100元存35个月，得利息0.27×35(元)；

……

第36个100元存1个月，得利息0.27×1(元).

因此，到期时李先生获得利息

$$0.27\times(36+35+\cdots+1)=179.82(\text{元}).$$

本息和为 3 600+179.82=3 779.82(元).

答：李先生一次可支取本息共 3 779.82 元.

(2) 100 元“零存整取”的月利息是

$$100\times1.725‰=0.172\,5(\text{元}),$$

存三年的利息是

$$0.172\,5\times(36+35+\cdots+1)=114.885(\text{元}).$$

因此，李先生多收益

$$179.82-114.885\times(1-20\%)=87.912(\text{元}).$$

答：李先生办理“教育储蓄”比“零存整取”多收益 87.912 元.

练习A

1. 根据下列各题中的条件，求相应等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n：

(1) $a_1=6$，$d=3$，$n=10$；

(2) $a_1=2$，$a_n=16$，$n=8$；

(3) $a_4=10$，$a_{10}=-2$，$n=12$.

2. 计算：

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)$；

(2) $2+4+6+\cdots+2n$；

(3) $1+3+5+\cdots+(2n+3)$；

(4) $1+4+7+\cdots+(3n+1)$.

3. (1) 求等差数列 5，9，13，…，73 的各项的和；

(2) 求等差数列 63，60，…，−12 的各项的和；

(3) 在两位正整数中，有多少个是 5 的倍数？求它们的和；

(4) 在两位正整数中，有多少个除以 3 余 1 的数？求它们的和.

练习B

1. 等差数列 4，3，2，1，…前多少项的和是−18？

2. 求集合$\{m\mid m=7n,\ n\in\mathbf{N}_+,\ 且\ m<100\}$的元素个数，并求这些元素的和.

3. 等差数列 14，11，8，…前多少项的和最大？为什么？

4. 数列$\{a_n\}$中，已知 $S_n=\dfrac{n+1}{n}$，求$\{a_n\}$的通项公式.

习题 2-2 A

1. 根据下列等差数列的通项公式，求首项和公差：

(1) $a_n=2n+7$；　　(2) $a_n=\sqrt{2}-2n$.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中：

(1) 已知 $a_1=6$，$d=3$，求 a_8；

(2) 已知 $a_4=10$，$a_{10}=4$，求 a_7 及 d；

(3) 已知 $a_2=12$，$a_n=-20$，$d=-2$，求 n；

(4) 已知 $a_7=\frac{1}{2}$，$d=-2$，求 a_1.

3. 在 12 与 60 之间插入 3 个数，使这 5 个数成等差数列，求插入的 3 个数.

4. 求下列各题中两个数的等差中项：

(1) $1-\sqrt{3}$与$\sqrt{3}+2$；　　(2) $(a+b)^2$与$(a-b)^2$.

5. 安装在一个公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，其中最大的与最小的皮带轮的直径分别为 216 mm 与 120 mm，求中间 3 个皮带轮的直径.

6. 在通常情况下，从地面到 10 km 高空，高度每增加 1 km，气温就下降某一个固定数值．如果高度为 1 km 时的气温是 8.5 ℃，高度为 5 km 时的气温是 −17.5 ℃，求高度分别为 2 km，4 km，8 km 时的气温.

7. 一位同学喜欢观察小动物的活动规律，他观察到随着气温的升高，一种昆虫在相等的时间内发出的啁啾声次数也在逐渐增加．下表是他记录的数据，34 上方及 40 下方的数据变得模糊不清了．但是该同学记得气温每升高 1 ℃他观察一次，而且观察到的数据成等差数列．请你为他补好这两个数据.

啁啾声次数	4	20		40
温度/℃	28	32	34	

8. 根据下列各题中的条件，求相应等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n：

(1) $a_1=2$，$d=5$，$n=10$；

(2) $a_1=-2$，$a_n=6$，$n=12$；

(3) $d=-5$，$a_{10}=-2$，$n=8$.

9. 一个凸 n 边形的内角成等差数列，最小角为 40°，公差为 20°，求 n.

10. 观察如下三角形数表，求第 n 行中各数的和.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & & & \cdots\cdots & & &
\end{array}
$$

11. 某屋顶的一个斜面成等腰梯形，要铺上瓦片．已知最上面一层(一行)铺 21 块，

往下每一层多铺 1 块，一共铺 19 层. 问铺屋顶的这个斜面需要用多少块瓦？

12. 为了参加 5 000 m 长跑比赛，李强给自己制定了 10 天的训练计划：第 1 天跑 5 000 m，以后每天比前一天多跑 400 m. 李强 10 天一共要跑多少路程？

习题 2-2 B

1. 如果一个三角形的三个内角的度数成等差数列，这个三角形的三个内角的大小能确定吗？你能得出什么结论？

2. 在 1 和 15 之间插入 25 个数，使得所得到的 27 个数成等差数列，求插入的 25 个数的和.

3. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $S_9<0$，$S_{10}>0$，则此等差数列的前 n 项和中，n 是多少时取得最小值？

4. 已知函数 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-20|$，$x\in\mathbf{N}_+$ 且 $1\leqslant x\leqslant 20$：

(1) 分别计算 $f(1)$，$f(5)$，$f(20)$的值；

(2) 当 x 为何值时，$f(x)$取得最小值？最小值是多少？

5. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_3+a_{11}=6$，求 S_{13}.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$：

(1) 计算 $f(0.1)+f(0.9)$的值；

(2) 设数列$\{a_n\}$满足 $a_n=f\left(\dfrac{n}{1\,001}\right)$，求此数列前 1 000 项的和.

2.3 等比数列

2.3.1 等 比 数 列

本章前言中，由折纸问题得到的数列是

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots. \qquad ①$$

此外，再来看以下两个数列：

$$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \cdots; \qquad ②$$

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots. \qquad ③$$

上面这几个数列有什么共同的特点？

对于数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于 2；

对于数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于 3；

对于数列③，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于 $-\frac{1}{2}$.

这就是说，这些数列具有这样的共同特点：从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫做**等比数列**，这个常数叫做等比数列的**公比**，公比通常用字母 q ($q\neq0$) 表示.

> 为什么 $q\neq0$？等比数列中的项有可能等于 0 吗？

例 1 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3\times2^n$，试问这个数列是等比数列吗？

> 等差数列的通项公式是怎样推导出来的？怎样用类似的方法推导等比数列的通项公式？

解：因为当 $n\geqslant2$ 时，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3\times2^n}{3\times2^{n-1}}=2,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，且公比为 2.

下面我们来探求等比数列的通项公式.

因为在一个等比数列 $\{a_n\}$ 中，从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于公比 q. 也就是说，从第 2 项起，每一项都等于它的前一项乘以公比 q. 于是有

$$a_1=a_1,$$
$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=a_1q^3,$$
$$\cdots\cdots$$

由此得到等比数列的通项公式

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}.}$$

其中，a_1 与 q 均不为 0.

你能通过公比 q 的不同取值的讨论，对等比数列进行分类吗？

等比数列的通项公式还可以用下面的方法得到：

由等比数列的定义可知

$$\frac{a_2}{a_1}=q,\ \frac{a_3}{a_2}=q,\ \frac{a_4}{a_3}=q,\ \cdots,\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=q,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=q,$$

将这 $n-1$ 个式子的等号两边分别相乘，可以得到$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1}$，即

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

如果三个数 x，G，y 组成等比数列，则 G 叫做 x 和 y 的**等比中项**.

如果 G 是 x 和 y 的等比中项，那么$\frac{G}{x}=\frac{y}{G}$，即

$$G^2=xy.$$

显然，两个正数(或两个负数)的等比中项有两个，它们互为相反数，一个正数和一个负数没有等比中项.

容易看出，在一个等比数列中，从第 2 项起，每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等比中项；反之，如果一个数列从第 2 项起，每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等比中项，那么这个数列是等比数列.

等比数列$\{a_n\}$的通项公式还可以写成

$$\begin{aligned}a_n&=a_1q^{n-1}\\&=\frac{a_1}{q}\cdot q^n=cq^n.\end{aligned}$$

这里 $c=\frac{a_1}{q}$ 是一个不为零的常数. 当 q 是不为 1 的正数时，$y=q^x$ 是一个指数函数，$y=cq^x$ 是一个非零常数与一个指数函数的积. 因此，从图象上看，表示数列$\{cq^n\}$的点都在函数

$$y=cq^x$$

的图象上. 例如，当 $a_1=1$，$q=2$ 时，$a_n=\frac{1}{2}\cdot 2^n$，表示这个数列各项的点就都在函数 $y=\frac{1}{2}\cdot 2^x$ 的图象上（如图 2-8 所示）.

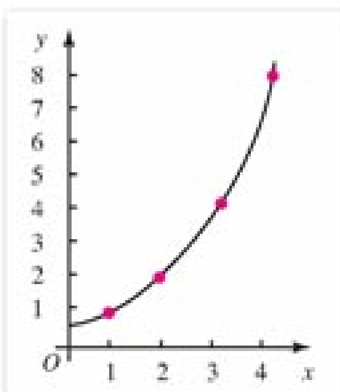


图 2-8

例 2 已知等比数列的公比为 q，第 m 项为 a_m，试求其第 n 项.

解：由等比数列的通项公式可知

$$a_n=a_1q^{n-1},$$
$$a_m=a_1q^{m-1}.$$

两式相除，得

$$\frac{a_n}{a_m}=q^{n-m},$$

因此

$$a_n=a_mq^{n-m}.$$

要确定一个等比数列的通项公式，需要知道几个独立的条件？

例 3 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_5=20$，$a_{15}=5$，求 a_{20}.

解：由 $a_{15}=a_5q^{10}$，得

$$q^{10}=\frac{1}{4},$$
$$q^5=\pm\frac{1}{2},$$

因此

$$a_{20}=a_{15}q^5=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\text{或 } a_{20}=-\frac{5}{2}.$$

思考与讨论

对于例 3 中的数列，你是否发现 a_5，a_{10}，a_{15}，a_{20}恰好成等比数列？你能说出其中的道理吗？你能由此推导出一个一般性的结论吗？

例 4 在 4 与$\frac{1}{4}$之间插入 3 个数，使这 5 个数成等比数列，求插入的 3 个数.

解法 1：依题意，$a_1=4$，$a_5=\frac{1}{4}$，由等比数列的通项公式，得

$$q^4=\frac{a_5}{a_1}=\frac{1}{16},$$
$$q=\pm\frac{1}{2}.$$

因此，插入的 3 项依次为 2，1，$\frac{1}{2}$或-2，1，$-\frac{1}{2}$.

解法 2：此等比数列共 5 项，a_3 是 a_1 与 a_5 的等比中项，因此

$$a_3=\pm\sqrt{a_1a_5}=\pm1.$$

a_2 是 a_1 与 a_3 的等比中项，a_4 是 a_3 与 a_5 的等比中项. 因为一个正数和一个负数没有等比中项，所以

$$a_3=1,\ a_2=\pm\sqrt{a_1a_3}=\pm2,\ a_4=\pm\sqrt{a_3a_5}=\pm\frac{1}{2}.$$

因此，插入的 3 项依次为 2，1，$\frac{1}{2}$或-2，1，$-\frac{1}{2}$.

探索与研究

1. 已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是项数相同的两个等比数列，仿照下表中的例子填写表格. 从中你能发现什么规律？证明你的结论.

	a_n	b_n	a_nb_n	判断数列$\{a_nb_n\}$是等比数列吗？	a_n+b_n	判断数列$\{a_n+b_n\}$是等比数列吗？
例	2^{n-1}	5×3^n	$15\times6^{n-1}$	是	$2^{n-1}+5\times3^n$	不是
自选 1						
自选 2						

2. 如果上题中的两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列，那么会有什么相应的结论？

练习A

1. 求下列等比数列的第 4 项和第 5 项：

(1) 4，-8，16，…；

(2) 2，$\frac{4}{3}$，$\frac{8}{9}$，…；

(3) 11，3.3，0.99，…；

(4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$，-1，$\sqrt{3}$，….

2. 求下列各组数的等比中项：

(1) 4，9；

(2) $4-\sqrt{3}$，$4+\sqrt{3}$；

(3) $a^4+a^2b^2$，$b^4+a^2b^2$，其中 $ab\neq0$.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中：

(1) 已知 $a_5=8$，$a_7=16$，求 a_1 与公比 q；

(2) 已知 $a_3=2$，公比 $q=-1$，求 a_{15}.

练习B

1. 已知一个等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q：
   (1) 将$\{a_n\}$的前m项去掉，其余各项组成的数列是等比数列吗？如果是，它的首项与公比分别为多少？
   (2) 取出$\{a_n\}$中的所有奇数项，组成一个新的数列，这个数列是等比数列吗？如果是，它的首项与公比分别为多少？
   (3) 取出$\{a_n\}$中所有项数为5的倍数的各项，组成一个新的数列，这个数列是等比数列吗？如果是，它的首项与公比分别为多少？
2. 已知两个等比数列的公比不相等，但第5项相等，这两个等比数列中除第5项外，还有可能出现序号与数值都相等的项的情况吗？

2.3.2 等比数列的前n项和

国际象棋起源于古印度．据说国王为了奖赏发明者，让发明者提一个要求．发明者说：“请在棋盘(图2-9)的第1个格子里放上1颗麦粒，在第2个格子里放上2颗麦粒，在第3个格子里放上4颗麦粒，在第4个格子里放上8颗麦粒，依次类推，每个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的2倍，直到第64个格子．请国王给我足够的麦子来实现上述要求．”国王觉得这事不难办到，就欣然同意了．

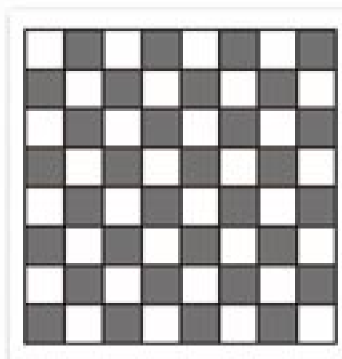


图 2-9

你认为国王有能力满足发明者的这个要求吗？

让我们来计算一下．

每个格子里的麦粒数依次组成一个等比数列

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{63},$$

于是，发明者要求的麦粒总数就是这个数列的前64项的和

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}.$$

怎样求等比数列的前n项和呢？

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由等比数列的定义，有

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q,$$
$$a_4=a_3q,$$
$$\cdots\cdots$$

$$a_{n-1}=a_{n-2}q,$$
$$a_n=a_{n-1}q.$$

将这 $n-1(n\geqslant 2)$ 个式子两边分别相加，得

$$a_2+a_3+\cdots+a_n=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})q,$$

即

$$S_n-a_1=(S_n-a_n)q.$$

整理，得

$$(1-q)S_n=a_1-a_nq.$$

当 $q\neq 1$ 时，

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (n\geqslant 2).$$

当 $n=1$ 时，以上等式也是成立的.

很明显，当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$.

综上可以得到，等比数列的前 n 项和公式

$$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1) \end{cases}$$

用上面的公式来解决麦粒问题❶：因为 $a_1=1$，$q=2$，$n=64$，所以

$$S_{64}=\frac{1\times(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1.$$

请同学们算一算，回答前面提出的问题.

注

❶ 按每千粒麦子的质量约为 40 克计算.

等比数列的前 n 项和公式还可以这样来推导

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1},$$

两边同乘 q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n,$$

两式相减，得

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

从而得出

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q\neq 1).$$

例 1 “一尺之棰，日取其半，万世不竭”. 怎样用学过的知识来说明它?

解：这句古话用现代文叙述是：一尺长的木棒，每天取它的一半，永远也取不完.

如果将每天取出的木棒长度排成一个数列，则得到一个首项 $a_1=\dfrac{1}{2}$，公比 $q=\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，它的前 n 项和为

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

不论 n 为何值，$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 总小于 1，这说明一尺长的木棒按上述方法永远也取不完.

例 2 等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=\frac{1}{2}$，$a_8=1$，求前 8 项的和 S_8.

解：因为 $a_8=a_1q^7$，所以 $a_1=\frac{a_8}{q^7}=2^7$.

因此

$$S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{2^7\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=2^8-1=255.$$

> 有别的解法吗？将这个数列的前 8 项倒过来排，试一试.

等比数列的前 n 项和公式及通项公式涉及到 5 个量：a_1，q，n，a_n，S_n，已知其中 3 个量就可以求出另外的 2 个量.

例 3 求和：$9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots99}_{n个9}$.

分析：数列 9，99，999，…不是等比数列，不能用公式求和，但将它转化成 $10-1$，$100-1$，$1\ 000-1$，…就容易解决了.

解：原式$=(10-1)+(10^2-1)+\cdots+(10^n-1)$

$=(10+10^2+\cdots+10^n)-n$

$=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n=\frac{10}{9}(10^n-1)-n.$

例 4 某工厂去年 1 月份的产值为 a 元，月平均增长率为 p（$p>0$），求这个工厂去年全年产值的总和.

解：该工厂去年 2 月份的产值为 $a(1+p)$元，3 月，4 月……的产值分别为 $a(1+p)^2$，$a(1+p)^3$……去年 12 个月的产值组成以 a 为首项，$(1+p)$为公比的等比数列. 因此，该厂去年全年的总产值为

$$S_{12}=\frac{a[1-(1+p)^{12}]}{1-(1+p)}=\frac{a[(1+p)^{12}-1]}{p}.$$

答：该工厂去年全年的总产值为$\frac{a[(1+p)^{12}-1]}{p}$元.

练习A

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n：

（1）$a_1=3$，$q=2$，$n=6$；

(2) $a_1=2.4$，$q=-1.5$，$n=5$；

(3) $a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{2}$；

(4) $a_1=-2.7$，$q=-\frac{1}{3}$，$a_n=\frac{1}{90}$.

2. (1) 求等比数列$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{2}$，1，…从第 6 项到第 10 项的和；

(2) 求等比数列$\frac{3}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{8}$，…从第 3 项到第 7 项的和.

3. 计算：

(1) $(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$；

(2) $0.9+0.99+0.999+\cdots+0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$.

练习B

1. 等比数列的首项为-1，前 n 项和为 S_n，如果$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，求 S_8.

2. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列，S_n 是其前 n 项和，试问

$$S_n,\ S_{2n}-S_n,\ S_{3n}-S_{2n},\ S_{4n}-S_{3n},\ \cdots$$

成等比数列吗？证明你的结论.

习题 2-3 A

1. 在等比数列$\{a_n\}$中：

(1) 已知 $a_1=-1.5$，$a_4=96$，求 q 与 S_n；

(2) 已知 $a_1=2$，$S_3=26$，求 q 与 a_3；

(3) 已知 $q=\frac{1}{2}$，$S_5=3\frac{7}{8}$，求 a_1 与 a_4；

(4) 已知 $a_3=-4$，$a_4=6$，求 q 与 S_5.

2. 某林场计划第一年造林 15 公顷，以后每年比前一年多造林 20%，第 5 年造林多少公顷？

3. 三个数成等比数列，它们的和等于 14，它们的积等于 64，求这个等比数列.

4. 设$\{a_n\}$是等比数列，且 $a_n>0$，求证数列$\{\lg a_n\}$为等差数列，并求出它的首项与公差.

5. 在等比数列$\{a_n\}$中，公比 $q\neq1$：

(1) 已知 a_1，q，n，求 a_n 与 S_n；　　(2) 已知 a_n，q，n，求 S_n；

(3) 已知 q，S_n，n，求 a_1 与 a_n.

6. 已知一个等比数列的首项为 a_1，公比为 q：

(1) 数列 $a_1+a_2+a_3$，$a_2+a_3+a_4$，$a_3+a_4+a_5$，…是等比数列吗？如果是，它的首项与公比分别是多少？

(2) 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等比数列吗？如果是，它的首项与公比分别是多少？

7. 三个不同的数成等差数列，其和为 6，如果将此三个数重新排列，它们又可以成等比数列，求这个等差数列.

8. 某工厂产值的月平均增长率为 p，求该工厂的年增长率.

9. 在一次利用电子邮件传播病毒的事例中，如果第一轮感染的计算机数是 80 台，并且从第一轮开始，以后各轮的每一台计算机都会感染下一轮的 20 台计算机，那么到第 5 轮后，被感染的计算机共有多少台？

10. 某市近 10 年的年国内生产总值从 2 000 亿元开始，以 10% 的速度增长. 这个城市近 10 年的国内生产总值一共是多少？

习题 2-3 B

1. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，求证：

$$a_1a_2\cdots a_n=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{1}{5}$，$a_n+a_{n+1}=\dfrac{6}{5^{n+1}}$ $(n=1, 2, \cdots)$，求此数列前 n 项和 S_n 的公式.

3. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\dfrac{1}{3}S_3$ 与 $\dfrac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\dfrac{1}{5}S_5$，且 $\dfrac{1}{3}S_3$ 与 $\dfrac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$S_{n+1}=4a_n+2$，$a_1=1$：

(1) 设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(2) 设 $c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，求证数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和的公式.

计算机上的练习

1. 分别写出计算等差数列与等比数列求和的一个算法程序.

2. 上机运行你写出的程序，计算练习或习题中求数列和的问题.

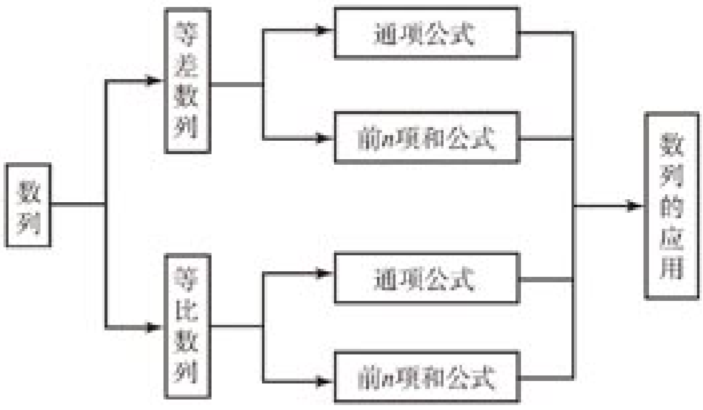
3. 已知等差数列 $\{a_n\}$，在 5 个量：

$$a_1，d，a_n，S_n，n$$

中，写出已知 3 个量，求另外两个量的算法.

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 什么叫做数列？怎样从函数观点去认识数列？
2. 确定一个数列有哪些方法？
3. 什么是等差数列？什么是等比数列？你会用几种方法推导它们的通项公式？
4. 给出一个数列的前 n 项和的公式，这个数列确定了吗？怎样由数列的前 n 项和公式求通项公式？
5*. 什么叫做数列的递推公式？如果给定了一个数列的递推公式，这个数列确定了吗？如果不确定，还需要附加什么条件？
6. 你会用多种方法推导等差数列与等比数列前 n 项和的公式吗？请你总结一下求等差数列与等比数列前 n 项和公式的推导方法.

Ⅲ 巩固与提高

1. 判断下列命题的真假：

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=f(n)$ 的定义域是正整数集的子集；

(2) 如果 $a_4+a_5=a_2+a_7$，则 $\{a_n\}$ 是等差数列；

(3) 常数列：a，a，a，…，$a(a\neq 0)$ 是等差数列又是等比数列；

(4) 数列的通项公式为 $a_n=3n+1$，则 $\{a_n\}$ 不是等差数列；

(5) 数列的通项公式是 $a_n=3^n+1$，则 $\{a_n\}$ 不是等比数列；

(6) 任意两个负数的等比中项不存在．

2. 填空：

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=n^2-2n+3$，则 $a_{10}=$______；

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_n=a_{n-1}+3$，则 $a_{10}=$______；

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n(n+1)$，则 $a_n=$______；

(4) 已知 $a_n=4n+1$，则 $S_n=$______；

(5) 3 与 14 的等比中项是______；

(6) 已知等比数列 $a_n=\frac{3}{8}\times 3^n$，则公比 $q=$______；

(7) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2-n+1$，则该数列的通项公式为______．

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$，$a_6=5$，$a_3+a_8=5$，求 a_9.

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$，$a_6=192$，$a_8=768$，求 S_{10}.

5. 已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，求 a_5.

6. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $1+\frac{1}{2^2}$，$1-\frac{3}{4^2}$，$1+\frac{5}{6^2}$，$1-\frac{7}{8^2}$；

(2) 0，$\sqrt{2}$，0，$\sqrt{2}$.

7. 写出下列数列的前 5 项：

(1) $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$；

(2) $a_1=-1$，$a_2=-2$，$a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}$.

8. 已知数列的每一项都是它的序号的平方减去序号的 5 倍，求这个数列的第 2 项与第 15 项．40，56 是这个数列的项吗？

9. 有 4 个数，其中前 3 个数成等差数列，后 3 个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是 37，第二个数与第三个数的和是 36，求这 4 个数．

10. 如果等差数列 $\{a_n\}$ 的项数是奇数，$a_1=1$，$\{a_n\}$ 的奇数项的和是 175，偶数项的和是 150，求这个等差数列的公差 d.

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件

$$a_1=a,\ a_n=f(a_{n-1})(n=2,3,4,\cdots),\ a_1\neq a_2,$$
$$f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})(n=2,3,4,\cdots),$$

其中 a 为常数，k 为非零常数，令 $b_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}_+)$：

(1) 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

12. 数列$\{a_n\}$的前n项和记为S_n，已知$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n(n=1,2,3,\cdots)$. 证明：

(1) 数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等比数列；

(2) $S_{n+1}=4a_n$.

Ⅳ 自测与评估

1. 选择题：

(1) 等比数列$\{a_n\}$中，如果公比$q<1$，那么等比数列$\{a_n\}$是（　　）.

(A) 递增数列　　(B) 递减数列

(C) 常数列　　(D) 无法确定数列的增减性

(2) 如果一个等差数列前3项的和为34，最后3项的和为146，且所有项的和为390，则这个数列有（　　）.

(A) 13项　(B) 12项　(C) 11项　(D) 10项

(3) 设$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}_+)$是等差数列，$S_n$是其前$n$项的和，且$S_5<S_6$，$S_6=S_7>S_8$，则下面结论错误的是（　　）.

(A) $d<0$　　(B) $a_7=0$

(C) $S_9>S_5$　　(D) S_6与S_7均为S_n的最大值

(4) 设$\{a_n\}$是递增等差数列，前3项的和为12，前3项的积为48，则它的首项是（　　）.

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 6

2. 填空题：

(1) 等差数列$\{a_n\}$中，a_1，a_3，a_4成等比数列，则公比为______.

(2) 等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，且$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{3n-1}{2n+3}$，则$\dfrac{a_8}{b_8}=$______.

(3) 等差数列$\{a_n\}$的前n项和是S_n，已知$S_{14}>0$，$S_{15}<0$，则在S_1，S_2，…中最大的是前______项的和.

3. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=10n-n^2$，数列$\{b_n\}$的每一项都有$b_n=|a_n|$，求数列$\{b_n\}$的前n项和.

4. 数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n(2n-1)a_n$，并且$a_1=\dfrac{1}{3}$，求此数列的通项公式及前n项和的公式.

5. 设数列$\{a_n\}$满足$a_n=2a_{n-1}+n(n=2,3,\cdots)$：

(1) 若$\{a_n\}$是等差数列，求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) $\{a_n\}$是否可能为等比数列？若可能，求出此数列的通项公式；若不可能，说明理由.

数学文化

阅读与欣赏

级数趣题

按照人们的传统习惯，等差数列也叫做等差级数或算术级数；等比数列也叫做等比级数或几何级数．但严格地说，级数是指用“+”号连接数列的各项所得的式子．

在我国古代数学著作中，对级数作过大量的研究，很早就建立了等差级数的理论．早在《周髀算经》中就有级数的运用．例如，在天文学上曾以直径 2×(19 832 里 200 步）递进“七衡”（日、月运行的圆周，用 7 个同心圆表示）；二十四节气以 9 寸$9\frac{1}{6}$分递为加减等等．在《九章算术》中，给出了等差级数问题：“今有女子善织，日自倍，五日织五尺．问日织几何？”早在庄子“天下篇”中就有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的论述，这些都是有名的关于数列的例子．

古人常常把生活中的一些趣闻编成数学题目，以提高人们对数学的兴趣．下面我们来看几个这样的题目：

一、“耗子穿墙”（《九章算术》）

今有垣厚 5 尺，两鼠相对．大鼠日一尺，小鼠亦一尺．大鼠日自倍，小鼠日自半．问几何日相逢？各穿几何？

九章算术的作者将这个问题变为“盈不足术”问题，“盈”为“多余”，“亏”为“不足”．这实际上是一个等比级数求和的问题．他的解法也很简单．答案是两天不足，三天有余．请同学自己完成．

如果将墙厚改为 100 尺，问题就不是一眼就能看出的．小鼠第一天打 1 尺，接下去无论打多少天也超不过 1 尺．我们要计算的只是大鼠的情况．设等比数列$\{a_n\}$为

$$1,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots.$$

解不等式

$$S_{n-1}<100<S_n-1,$$

就可以得出答案．

二、《张邱建算经》题

今有女善织，日益功疾．初日织五尺，今一月，日织九匹三丈❶．问日益几何？该题的大意是说，有一女子很会织布，一天比一天织得快，而且每天增加的长度都是一样的．已知第一天织了 5 尺，一个月后共织布 390 尺，问该女子织布每天增加多少？

这是一道利用等差数列求和公式求解的题．答案是$5\frac{15}{29}$寸．

我国古代数学家在级数方面的成就是很大的，这里就不一一列举了．后面仅介绍杨辉在《详解九章算法》中给出的三个高阶等差数列的求和公式：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+[a+(n-1)]^2$$
$$=\frac{n}{3}\left(a^2+a_n^2+aa_n+\frac{a_n-a}{2}\right)\ (a_n=a+n-1);$$

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

宋代沈括对级数继续进行研究，以上这三个公式只是沈括的一个公式的特例，由此可见我国古代数学成就之大．

❶ 4 丈为 1 匹，10 尺为 1 丈，10 寸为 1 尺．

无穷与悖论

数学家希尔伯特说："无穷是一个永恒的谜."无穷有许多与日常直观经验相悖的性质. 一个著名的悖论讲的是阿喀琉斯同乌龟赛跑的故事. 阿喀琉斯是希腊传说中的善跑者. 悖论的提出者芝诺（Zeno，约公元前495—前430）论证说，如果阿喀琉斯让乌龟先跑出一段路程，那他就将永远追不上乌龟.

因为阿喀琉斯如果想追上乌龟，首先必须到达乌龟开始跑的位置，但当阿喀琉斯到达乌龟起跑的位置时，乌龟已经跑到前面去了. 乌龟虽然跑得慢，但它毕竟在跑. 他如果想追上乌龟又面临一个同样的问题：他必须先再次跑到乌龟此刻的位置才能追上乌龟. 等他跑到了，完全同样的问题又摆在阿喀琉斯的面前. 这样的问题可以无限地出现. 虽然阿喀琉斯跑得快，但他也只能一步步逼近乌龟，却永远追不上它. 乌龟总是在他前头，他与乌龟之间总有一段距离需要跑，虽然这个距离越来越短，可"总有".

人们总觉得他是诡辩，一定可以找出毛病所在. 虽然从亚里士多德开始，大多数哲学家都力图指出芝诺的论证是错误的，但是很长时期一直没能解决.

从数学的观点看，只是在两个世纪之前才以"无穷级数的和是有限的"这一命题解决了这个问题. 例如，无穷级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

的和是多少，得出的答案为1. 在上述悖论中，阿喀琉斯到达乌龟的起点，要花 t_1 时间，这段时间内，乌龟向前跑了一段距离；阿喀琉斯跑这段距离要花 t_2 时间，这段时间内，乌龟又向前跑了一段距离……如此继续下去，可以列出一个数列

$$t_1,\ t_2,\ \cdots.$$

这个数列有无穷多项，但其和并不是一个无限大的数目，而是一个有限数

$$\frac{\text{两者最初相差的距离}}{\text{两者的速度差}}.$$

这是不是就可以说，造成谬论的原因是把项的无穷多与总和的无穷大混为一谈呢？还不能这样说. 对芝诺来说，即使总和并非无穷大，无穷多个步骤也是难以完成的. 阿喀琉斯越来越接近乌龟，距离越来越小，可是面对这无限多个步骤，尽管越来越容易完成，阿喀琉斯这个有限的人物，怎么可能完成？

总之，这个悖论至今仍没有一个满意的答案.

关于无穷，人们将不断探索下去，这些探索必将大大加深我们对无穷的理解，也将加深我们对运动本身的理解.

第三章 不等式

3.1 不等关系与不等式

3.2 均值不等式

3.3 一元二次不等式及其解法

3.4 不等式的实际应用

3.5 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

在考察事物之间的数量关系时，经常要对数量的大小进行比较．我们来看下面的例子．

国际上常用恩格尔系数（记为 n）来衡量一个国家和地区人民的生活水平的高低，它的计算公式是

$$n=\frac{\text{食品消费额}}{\text{消费支出总额}}\times 100\%.$$

有关机构还制定了各种类型的家庭应达到的恩格尔系数的取值范围：

家庭类型	贫穷	温饱	小康	富裕	最富裕
n	$n>60\%$	$50\%<n\leqslant 60\%$	$40\%<n\leqslant 50\%$	$30\%<n\leqslant 40\%$	$n\leqslant 30\%$

你在小学和初中已经学习了一些简单的不等式知识，看了这张表，你一定会理解这些不等式表达的意义．下面就是一个关于恩格尔系数的实际问题：

根据某乡镇的抽样调查，2003 年每个家庭年平均消费支出总额为 1 万元，其中食品消费额为 0.6 万元．预测 2003 年到 2005 年每个家庭年平均消费支出总额每年增加 3 000元，到 2005 年该乡镇人民生活状况达到小康水平，试问这个乡镇每个家庭食品消费额的年平均增长率至多是多少？

你能解决这个问题吗？

为了解决这类问题，我们要研究一元二次不等式的解法．解一元二次不等式是这一章学习的主要课题之一．

在这一章中，我们首先对初中学过的不等式知识进行复习，然后系统地学习不等式的基本性质并学习均值不等式及其应用．在探究一元二次不等式与相应的函数、方程之间相互关系的基础上，学习一元二次不等式的解法，并使同学们在相关知识的和谐、统一中去感受数学的美．

在生产与营销活动中，我们常常需要考虑：怎样利用现有的资源（人力、物力、资金……）取得最大的收益；或者，怎样以最少的资源投入去完成一项给定的任务．我们把这一类问题称为“最优化”问题．不等式的知识是解决“最优化”问题的得力工具．这一章最后，我们将借助二元一次不等式(组)的几何表示，学习“最优化”问题中的简单“线性规划”问题，从中感受不等式在解决实际问题中所起的重要作用．

3.1 不等关系与不等式

3.1.1 不等关系与不等式

我们知道，人造地球卫星和绕地球飞行的宇宙飞船，它们的飞行速度（记作 v km/s）不小于第一宇宙速度（记作 v_1 km/s），且小于第二宇宙速度（记作 v_2 km/s）．v，v_1，v_2 之间的关系可以用数学符号表示为

$$v_1 \leqslant v < v_2.$$

我们再看下面的问题．

某人为自己制定的月支出的计划中，规定手机话费不超过 150 元．他所选用的中国电信卡的收费标准为：

	月租费	每分钟通话费
中国电信卡	30 元	0.40 元

求这个人月通话时间（记为 x 分钟）的取值范围．

同学们可以列出下面的式子

$$30+0.40x \leqslant 150.$$

事实上，在客观世界中，量与量之间的不等关系是普遍存在的．我们用数学符号“≠”、“>”、“<”、“⩾”、“⩽”连接两个数或代数式，以表示它们之间的不等关系．含有这些不等号的式子，叫做**不等式**．

在上述所有的不等号中，要特别注意“⩾”和“⩽”两个符号的含义．如果 a，b 是两个实数，那么

$$a \geqslant b \text{ 即为 } a > b \text{ 或 } a = b;$$
$$a \leqslant b \text{ 即为 } a < b \text{ 或 } a = b.$$

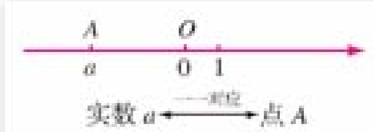


图 3-1

如何比较实数的大小呢？我们知道，实数集与数轴上的点集之间可以建立一一对应关系（图 3-1）．容易看到，那些表示实数的点在数轴上有次序地（无缝隙地）排列．数轴上的一个动点向着数轴的正方向运动时，它所对应的实数越来越

大．这就是说：

数轴上的任意两点中，右边点对应的实数比左边点对应的实数大．

在数轴上，如果表示实数 a 和 b 的两个点分别为 A 和 B，则点 A 和点 B 在数轴上的位置关系有以下三种：

(1) 点 A 和点 B 重合；

(2) 点 A 在点 B 的右侧；

(3) 点 A 在点 B 的左侧．

在这三种位置关系中，有且仅有一种成立．由此可以得到结论：

对于任意两个实数 a 和 b，在 $a=b$，$a>b$，$a<b$ 三种关系中有且仅有一种关系成立．

当我们没有任何度量工具时，要确定高矮差不多的甲、乙两个同学身高之间的不等关系，所采用的方法是：让他们背靠背地站在同一高度的地面上，这两个同学身高之间的不等关系便一目了然．在数学中我们比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了．

如果 $a-b$ 是正数，则 $a>b$；如果 $a>b$，则 $a-b$ 为正数；

如果 $a-b$ 是负数，则 $a<b$；如果 $a<b$，则 $a-b$ 为负数；

如果 $a-b$ 等于零，则 $a=b$；如果 $a=b$，则 $a-b$ 等于零．

通常，"如果 p，则 q"为正确的命题，则简记为

$$p \Rightarrow q,$$

读作"p 推出 q"．

如果 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$ 都是正确的命题，则记为

$$p \Leftrightarrow q.$$

读作"p 等价于 q"或"q 等价于 p"．

于是，上述结论可以写为

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b;$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b;$$
$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b.$$

例 1 比较 x^2-x 和 $x-2$ 的大小．

解： $(x^2-x)-(x-2)$

$=x^2-2x+2$

$=(x-1)^2+1.$

因为 $(x-1)^2\geqslant 0$，所以

$$(x^2-x)-(x-2)>0.$$

因此 $x^2-x>x-2$．

> **注** 本书中，如无特别说明，式子中的字母，均表示使式子有意义的实数．

例 2 当 p，q 都为正数且 $p+q=1$ 时，试比较代数式

$$(px+qy)^2 \text{ 与 } px^2+qy^2$$

的大小．

解： $(px+qy)^2-(px^2+qy^2)$

$=p(p-1)x^2+q(q-1)y^2+2pqxy.$

因为 $p+q=1$，所以

$$p-1=-q,\ q-1=-p.$$

因此

$$\begin{aligned}&(px+qy)^2-(px^2+qy^2)\\&=-pq(x^2+y^2-2xy)\\&=-pq(x-y)^2.\end{aligned}$$

因为 p，q 为正数，所以

$$-pq(x-y)^2\leqslant 0.$$

因此 $(px+qy)^2\leqslant px^2+qy^2$.

当且仅当 $x=y$ 时，不等式中等号成立.

上述两个例题的求解，是借助因式分解和应用配方法完成的，这两种方法是式子变形时经常使用的方法，同学们应熟练掌握.

练习A

1. 如果两个实数 a 和 b 不相等，请说出它们之间的大小关系.
2. (1) 当 $x=3$ 时，$x\geqslant 3$ 是否成立？
   (2) 当 $x\geqslant 3$ 时，$x=3$ 是否一定成立？
   (3) 当 $x\geqslant 3$ 和 $x\leqslant 3$ 都成立时，$x=3$ 是否一定成立？
3. 请用不等号表示下列关系：
   (1) a 是非负实数；
   (2) 实数 a 小于 3，但不小于 -2；
   (3) a 和 b 的差的绝对值大于 2，且小于等于 9.
4. 试比较 x^2+2x 与 $-x-3$ 的大小.

练习B

1. 试比较 $\dfrac{4a}{4+a^2}$ 和 1 的大小.
2. 已知 $a\neq b$，求证：$a^2+4b^2>2b(a+b)$.
3. 已知 a，$b\in\mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，试比较 a^5+b^5 和 $a^3b^2+a^2b^3$ 的大小.
   (提示：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$)
4. 已知 $x>1$，求证：$\lg x+\log_x 10\geqslant 2$，并说明式中等号成立的条件.

思考与讨论

已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，如果$c>d$，那么$a>b$是否一定成立？请说明理由.

3.1.2 不等式的性质

在初中我们学习了不等式的三条基本性质．事实上，不等式还具有下面的一些重要性质：

性质1　如果$a>b$，那么$b<a$；如果$b<a$，那么$a>b$.

性质1表明，把不等式的左边和右边交换位置，所得不等式与原不等式异向．我们把这种性质称为不等式的**对称性**.

性质2　如果$a>b$，且$b>c$，则$a>c$.

证明：根据两个正数之和仍为正数，得

$$\left.\begin{array}{l}a>b \Rightarrow a-b>0\\ b>c \Rightarrow b-c>0\end{array}\right\} \Rightarrow (a-b)+(b-c)>0 \Rightarrow a-c>0 \Rightarrow a>c.$$

这个性质也可以表示为

$$c<b,\ b<a \Rightarrow c<a.$$

我们把性质2所描述的不等式的性质称为不等式的**传递性**.

性质3　如果$a>b$，则$a+c>b+c$.

证明：因为$a>b$，所以$a-b>0$.

因此$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b>0$，即

$$(a+c)-(b+c)>0.$$

因此$a+c>b+c$.

性质3表明，不等式的两边都加上同一个实数，所得到的不等式与原不等式同向．由性质3很容易得出

$$a+b>c \Rightarrow a+b+(-b)>c+(-b) \Rightarrow a>c-b.$$

由此得到：

推论1　不等式中的任意一项都可以把它的符号变成相反的符号后，从不等式的一边移到另一边.

我们称推论1为不等式的**移项法则**.

推论2　如果$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$.

证明：因为$a>b$，所以$a+c>b+c$.

又因为$c>d$，所以$b+c>b+d$.

根据不等式的传递性，得

$$a+c>b+d.$$

我们把 $a>b$ 和 $c>d$（或 $a<b$ 和 $c<d$）这类不等号方向相同的不等式，叫做**同向不等式**. 推论 2 说明，两个同向不等式的两边分别相加，所得到的不等式与原不等式同向. 很明显，推论 2 可以推广为更一般的结论：

几个同向不等式的两边分别相加，所得到的不等式与原不等式同向.

性质 4　如果 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；如果 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$.

在解一元一次不等式 $3x-2\leqslant 5x+1$ 的过程中，应用了不等式的哪些性质？

请同学们自己完成性质 4 的证明.

推论 1　如果 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$.

证明：因为 $a>b$，$c>0$，所以 $ac>bc$.

又因为 $c>d$，$b>0$，所以 $bc>bd$.

根据不等式的传递性，得 $ac>bd$.

很明显，这个推论可以推广为更一般的结论：

几个两边都是正数的同向不等式的两边分别相乘，所得到的不等式与原不等式同向.

推论 2　如果 $a>b>0$，则 $a^n>b^n$（$n\in \mathbf{N}_+$，$n>1$）.

证明：因为

$$\left.\begin{array}{l} a>b>0, \\ a>b>0, \\ \cdots\cdots \\ a>b>0, \end{array}\right\} n\text{ 个}$$

根据性质 4 的推论 1，得 $a^n>b^n$.

推论 3　如果 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in \mathbf{N}_+$，$n>1$）.

证明：用反证法.

假定 $\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$，即

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\text{ 或 }\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b},$$

根据性质 4 的推论 2 和根式性质，得

$$a<b\text{ 或 }a=b.$$

这都与 $a>b$ 矛盾，因此

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

例　应用不等式的性质，证明下列不等式：

(1) 已知 $a>b$，$ab>0$，求证：$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

(2) 已知 $a>b$，$c<d$，求证：$a-c>b-d$；

(3) 已知 $a>b>0$，$0<c<d$，求证：$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$.

证明：(1) 因为 $ab>0$，所以

$$\frac{1}{ab}>0.$$

又因为 $a>b$，所以

$$a\cdot\frac{1}{ab}>b\cdot\frac{1}{ab}.$$

即$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$. 因此$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(2) 因为 $a>b$，$c<d$，所以

$$a>b,\ -c>-d.$$

根据性质 3 的推论 2，得

$$a+(-c)>b+(-d),$$

即 $a-c>b-d$.

(3) 因为 $0<c<d$，根据(1)的结论，得

$$\frac{1}{c}>\frac{1}{d}>0.$$

又因为 $a>b>0$，所以 $a\cdot\frac{1}{c}>b\cdot\frac{1}{d}$. 因此

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}.$$

从以上几个不等式的证明过程，可以看到：应用不等式性质对已知不等式进行变形，从而得出要证的不等式，是证明不等式的常用方法之一.

练习A

1. 用"$>$"或"$<$"号填空：

(1) $x+5$ ____ $x+2$；　　(2) $a+5$ ____ $b+5$ $(a<b)$；

(3) $7a$ ____ $4a$ $(a>0)$；　　(4) $3a$ ____ $3b$ $(a<b)$；

(5) $-5a$ ____ $-5b$ $(a<b)$；　　(6) $\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$ $(a>b>0)$.

2. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) $a>b\Rightarrow ac>bc$；　　(2) $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$；

(3) $a>b$ 且 $a\lg c<b\lg c\Rightarrow 0<c<1$.

3. 用"$>$"、"$<$"或"$\neq$"号填空：

(1) $a>b,\ c<d\Rightarrow a-c$ ____ $b-d$；　　(2) $a>b>0,\ c<d<0\Rightarrow ac$ ____ bd；

(3) 当 c ____ 0 时，$a>b\Rightarrow ac>bc$；　　(4) 当 c ____ 0 时，$a>b\Rightarrow ac<bc$；

(5) $a>0,\ b<0\Rightarrow ab$ ____ 0.

4. 回答下列问题：

(1) 由 $a>b$，$c>d$，能否判断 ac 与 bd 的大小？举例说明.

(2) 由 $a+c>b+d$ 能否判断 a 与 b 的大小？c 与 d 的大小？举例说明.

(3) 由 $a>b$ 能否判断$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$之间的大小关系？为什么？

5. 已知 $a\in\mathbf{R}$，求证：

（1）$a^2+7>5a$；　　（2）$a^2+a>2a-1$；

（3）$a^2+1\geqslant 2a$；　　（4）$4a^4\geqslant 4a^2-1$.

练习B

1. 用不等号“<”或“>”填空：

（1）如果 $a>b$，$c>0$，则 $d+ac$ ____ $d+bc$；

（2）如果 $a>b$，$c<0$，则 $c(d-a)$ ____ $c(d-b)$；

（3）如果 $a>b$，$d>e$，$c<0$，则 $d-ac$ ____ $e-bc$.

2. 证明下列不等式：

（1）已知 $0>a>b$，$c<0$，求证：$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$；

（2）已知 $a>b>c>d$，求证：$\frac{1}{a-d}<\frac{1}{b-c}$；

（3）已知 $a>b>c$，$a+b+c=0$，求证：$\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$.

3. 已知 $1<a<2<b<3$，求 $a+b$，$a-b$，$a-2b$，ab，$\frac{a}{b}$ 各自的取值范围.

习题3-1 A

1. 用你身边的例子说明，客观世界中量与量之间的不等关系是普遍存在的.

2. 比较下列两组数的大小：

（1）$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 与 $2\sqrt{3}-1$；

（2）$\log_4\frac{1}{3}$ 与 $\log_4 8$.

3. 比较下列各题中两个代数式值的大小：

（1）$(2a+1)(a-3)$ 与 $(a-6)(2a+7)+45$；

（2）$(x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)$ 与 $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$；

（3）1 与 $\frac{2x}{x^2+1}$；

（4）a^2+b^2 与 $2a+2b-2$；

（5）$3(a^2+2b^2)$ 与 $8ab$.

4. 用不等式的性质证明：

(1) $a>b \Rightarrow c-a<c-b$；

(2) $a>b>0$，$c<0 \Rightarrow \dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$；

(3) $a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{d}}>\sqrt{\dfrac{b}{c}}$.

5. 已知$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{3}$，求下列各式的取值范围：

(1) $2\alpha+\beta$；　　　　(2) $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

6. 列出下列各题中未知数 x 所满足的不等式：

(1) 某小区有居民 1 000 户，去年 12 月份总用水量为 8 000 吨．今年开展节约用水活动，有 800 户安装了节水龙头，这些用户每户每月平均节水 x 吨，使得今年1 月份该小区居民用水总量低于 6 000 吨；

(2) 某校学生为“希望工程”捐款，甲、乙两班都捐了360 元．其中，乙班平均每人捐款 x 元，甲班平均每人比乙班少捐 1 元，且甲班人数比乙班人数至少多 5 人．

习题 3-1 B

1. 通过比较不等式左边与右边代数式的大小，求证下列不等式，并说明式中等号成立的条件：

(1) $a^2+b^2+5\geqslant 2(2a-b)$；

(2) $a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$；

(3) $ab+bc+cd+da\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2$；

(4) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

2. 比较 x^3 与 x^2-x+1 的大小．(提示：根据 x 取值范围的不同，分类讨论．)

3. 列出下列各小题中未知数 x 所满足的不等式(或不等式组)：

(1) 一辆汽车原来每天行驶 x 公里．如果它每天多行驶 19 公里，那么在 8 天内它的行程 s 就超过 2 200 公里；如果它每天比原来少行驶 12 公里，那么行驶同样的路程 s 所需时间就超过 9 天．

(2) 某市市内电话费的收费标准为：通话的前 3 分钟(含 3 分钟)为 0.22 元，超过 3 分钟，每分钟按 0.11 元计费(不足 1 分钟，按 1 分钟计算)．已知通话时间为 x (x 为不小于 3 的整数) 分钟，且电话费不超过 0.60 元．

4. 已知 $xy>0$，$x\neq y$，试比较 $\log_a(3x^2+4xy+y^2)$ 与 $\log_a(2x^2+6xy)$ ($a>0$，$a\neq 1$) 的大小．

5. 设 a 是三个正数 a，b，c 中最大的数，且$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，试比较 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小．

(提示：设比值为 k，先判断 b，d 的大小，再判断 $a+d$ 与 $b+c$ 的差的符号．)

3.2 均值不等式

均值定理 如果 a，$b\in \mathbf{R}^+$，那么

$$\boxed{\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.}$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

证明：因为 $a>0$，$b>0$，所以

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0,$$

即$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. 当且仅当$\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即 $a=b$ 时，等号成立.

上面所证结论通常称为**均值不等式**.

对任意两个正实数 a，b，数$\frac{a+b}{2}$叫做 a，b 的**算术平均值**，数$\sqrt{ab}$叫做 a，b 的**几何平均值**.

均值定理可以表述为：

两个正实数的算术平均值大于或等于它的几何平均值.

这个不等式，在证明不等式、求函数的最大值、最小值时有着广泛的应用，因此我们也称它为**基本不等式**.

思考与讨论

均值不等式与不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的关系如何？请对此进行讨论.

下面我们给出均值不等式的一个几何直观解释，以加深同学们对均值不等式的理解.

我们可以令正实数 a，b 为两条线段的长，用几何作图的方法，作出长度为$\frac{a+b}{2}$和$\sqrt{ab}$的两条线段，然后比较这两条线段的长.

具体作图如下(图 3-2)：

(1) 作线段 $AB=a+b$，使 $AD=a$，$DB=b$；

(2) 以 AB 为直径作半圆 O；

(3) 过 D 点作 $CD\perp AB$ 于 D，交半圆于点 C；

(4) 连接 AC，BC，OC，则

$$CO=\frac{a+b}{2}.$$

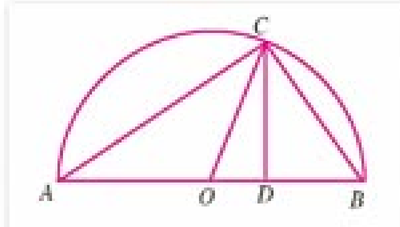


图 3-2

由于 $CD=a\tan A$，$CD=b\tan B=b\cot A$，因此，

$$CD^2=ab,\ CD=\sqrt{ab}.$$

当 $a\neq b$ 时，在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中，$CO>CD$，即$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$；

当且仅当 $a=b$ 时，点 O 与点 D 重合，$CO=CD$，即$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$.

所以$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时，不等式中的等号成立.

例 1　已知 $ab>0$，求证：

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2,$$

并推导出式中等号成立的条件.

> **注**　均值不等式的几何解释，我们通常将其说成“半径不小于半弦”.

证明：因为 $ab>0$，所以

$$\frac{b}{a}>0,\ \frac{a}{b}>0.$$

根据均值不等式，得

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2,$$

即$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$.

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a^2=b^2$ 时式中等号成立.

因为 $ab>0$，即 a，b 同号，所以式中等号成立的条件是 $a=b$.

例 2　(1) 一个矩形的面积为 100 m^2. 问这个矩形的长、宽各为多少时，矩形的周长最短？最短周长是多少？

(2) 已知矩形的周长为 36 m. 问这个矩形的长、宽各为多少时，它的面积最大？最大面积是多少？

分析：在(1)中，矩形的长与宽的积是一个常数，求长与宽的和的两倍的最小值；在(2)中，矩形的长与宽的和的两倍是一个常数，求长与宽的积的最大值.

解：(1) 设矩形的长、宽分别为 x(m)、y(m)，依题意得$xy=100$(m^2).

因为 $x>0$，$y>0$，所以$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$. 因此

$$2(x+y) \geqslant 4\sqrt{100},$$

即 $2(x+y) \geqslant 40$.

当且仅当 $x=y$ 时，式中等号成立，此时 $x=y=10$.

因此，当这个矩形的长和宽都是 10 m 时，它的周长最短，最短周长为 40 m.

(2) 设矩形的长、宽分别为 x(m)、y(m)，依题意得

$$2(x+y)=36,\text{ 即 } x+y=18.$$

因为 $x>0$，$y>0$，所以 $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$，因此

$$\sqrt{xy} \leqslant 9.$$

将这个正值不等式两边平方，得

$$xy \leqslant 81.$$

当且仅当 $x=y$ 时，式中等号成立，此时 $x=y=9$.

因此，当这个矩形的长和宽都是 9 m 时，它的面积最大，最大面积为 81 m^2.

由例 2 的求解过程，可以总结出以下规律：

两个正数的积为常数时，它们的和有最小值；

两个正数的和为常数时，它们的积有最大值.

例 3 求函数 $f(x)=\frac{-2x^2+x-3}{x}$ $(x>0)$的最大值，以及此时 x 的值.

解：$f(x)=1-\left(2x+\frac{3}{x}\right)$.

因为 $x>0$，所以 $2x+\frac{3}{x} \geqslant 2\sqrt{6}$，得

$$-\left(2x+\frac{3}{x}\right) \leqslant -2\sqrt{6}.$$

因此 $f(x) \leqslant 1-2\sqrt{6}$.

当且仅当 $2x=\frac{3}{x}$，即 $x^2=\frac{3}{2}$时，式中等号成立.

由于 $x>0$，因而 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$时，式中等号成立.

因此 $f(x)_{\max}=1-2\sqrt{6}$，此时 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

练习A

1. “任意两个同号的数的算术平均值不小于它们的几何平均值”的说法是否正确？为什么？

2. 求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ $(x>0)$的值域.

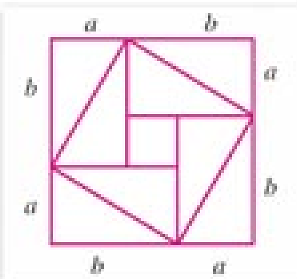
3. (1) 把 49 写成两个正数的积，当这两个正数各取何值时，它们的和最小？
(2) 把 36 写成两个正数的和，当这两个正数各取何值时，它们的积最大？
4. 一段长为 l m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜地，矩形的长、宽各为多少时，菜地的面积最大？求出这个最大值.

练习B

1. 用实验的方法比较三个正数 a，b，c 的算术平均值$\frac{a+b+c}{3}$和它们的几何平均值$\sqrt[3]{abc}$的大小，写出这个基本不等式.
2. 已知 a，$b\in\mathbf{R}^+$，求证：
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4.$$
3. 求函数 $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x}$ $(x>0)$的最小值及取得最小值时 x 的值.
4. 已知点 $P(x, y)$ 在直线 $2x+y-4=0$ 上运动，求它的横、纵坐标之积的最大值，以及此时点 P 的坐标.
5. 某工厂建造一个长方体无盖蓄水池，其容积为 4 800 m^3，深度为 3 m. 如果池底每 1 m^2 的造价为 150 元，池壁每 1 m^2 的造价为 120 元，怎样设计水池能使总造价最低？最低造价是多少元？

习题 3-2 A

1. 你能利用右边的图示，说明不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 成立吗？并请画出不等式中等号成立时相应的图示.



(第1题)

2. 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求函数 $f(\theta)=\tan\theta+\cot\theta$ 的最小值以及相应的 θ 的值.
3. 求函数 $f(x)=\frac{x^2}{x^4+2}$ $(x\neq 0)$的最大值以及相应的 x 值.
4. 已知直角三角形的面积为 50，问两直角边各为多少时，它们的和最小？这个最小值是多少？
5. 用 20 cm 长的一段铁丝折成一个面积最大的矩形，这个矩形的长、宽各为多少？并求出这个最大值.

6. 用铁皮做一个体积为 50 cm^3，高为 2 cm 的长方体无盖铁盒，这个铁盒底面的长、宽各为多少时，用料最少？

7. 用两种方法求函数 $y=(3-2x)(2x+1)\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right)$ 的最大值及相应的 x 的值.

8. 求函数 $y=2-\frac{4}{x}-x$（$x>0$）的最大值以及相应的 x 的值.

9. 求函数 $y=x+\frac{3}{x-2}$（$x>2$）的最小值以及相应的 x 的值.

10. 要建一间地面面积为 25 m^2，墙高为 3 m 的长方体形的简易工棚，已知工棚屋顶每1 m^2 的造价为 500 元，墙壁每 1 m^2 的造价为 400 元. 问怎样设计地面的长与宽，能使总造价最低？最低造价是多少？

习题 3-2 B

1. 已知 a，$b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值．

2. 已知 a，$b\in\mathbf{R}^+$，且 $3a+2b=2$，求 ab 的最大值以及相应的 a 和 b 的值.

3. 求函数 $y=\frac{x^2-x+4}{x-1}$（$x>1$）的最小值及相应的 x 的值.

4. 已知 $x>2$，$y>4$，$xy=32$，求 $\log_2\frac{x}{2}\cdot\log_2\frac{y}{4}$ 的最大值以及相应的 x 和 y 的值.

5. 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求函数 $f(\theta)=\frac{(\sin 2\theta+2)^2}{\sin 2\theta}$ 的最小值以及相应的 θ 的值.

6. 设矩形 $ABCD$（$AB>BC$）的周长为 24，把它沿对角线 AC 对折，折过去后，AB 交 DC 于点 P. 设 $AB=x$，求$\triangle ADP$ 的最大面积以及相应的 x 的值.

3.3 一元二次不等式及其解法

考察下面含未知数的不等式

$$15x^2+30x-1>0 \quad 和 \quad 3x^2+6x-1\leqslant 0.$$

这两个不等式有两个共同点：

(1) 含有一个未知数 x；

(2) 未知数 x 的最高次数为 2.

一般地，含有一个未知数，且未知数的最高次数为 2 的整式不等式，叫做**一元二次不等式**.

一元二次不等式的一般表达形式为

$$ax^2+bx+c>0\ (a\neq 0) \quad 或 \quad ax^2+bx+c<0\ (a\neq 0),$$

其中 a，b，c 均为常数.

> 注
> 一元二次不等式的一般表达形式中，不等号也可以是“$\geqslant$”或“$\leqslant$”.

一元二次不等式一般表达形式的左边，恰是关于自变量 x 的二次函数 $f(x)$ 的解析式，即

$$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0).$$

一元二次不等式

$$f(x)>0 或 f(x)<0\ (a\neq 0)$$

的解集，就是分别使二次函数 $f(x)$ 的函数值为正值或负值时自变量 x 的取值的集合. 一元二次方程

$$f(x)=0\ (a\neq 0)$$

的解集，就是使二次函数 $f(x)$ 的函数值为零时自变量 x 的取值的集合. 因此二次函数、一元二次方程和一元二次不等式之间有非常密切的联系.

下面我们通过实例，研究一元二次不等式的解法，以及它与相应的方程、函数之间的关系.

例如解不等式：

(1) $x^2-x-6>0$；　　(2) $x^2-x-6<0$.

我们来考察二次函数

$$f(x)=x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

的图象和性质.

方程 $x^2-x-6=0$ 的判别式

$$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-6)=25>0,$$

于是可知这个方程有两个不相等的实数根．解此方程得 $x_1=-2$，$x_2=3$.

建立直角坐标系 xOy，画出函数$f(x)$的图象(图 3-3)．它是一条开口向上的抛物线，与 x 轴的交点为 $M(-2,\ 0)$，$N(3,\ 0)$．观察这个图象，可以看出：

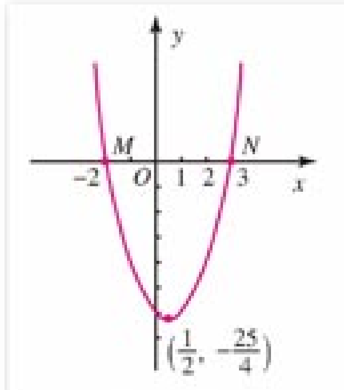


图 3-3

抛物线位于 x 轴上方的点的纵坐标大于零，因此这些点的横坐标的集合

$$A=\{x|x<-2 \text{ 或 } x>3\}$$

是一元二次不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集；

抛物线位于 x 轴下方的点的纵坐标小于零，因此这些点的横坐标的集合

$$B=\{x|-2<x<3\}$$

是一元二次不等式 $x^2-x-6<0$ 的解集.

事实上，当 $x\in A$ 时：

若 $x<-2$，则 $x+2<0$，且 $x-3<0$，由此可推知$(x+2)(x-3)>0$；

若 $x>3$，同样可推知$(x+2)(x-3)>0$.

当 $x\in B$，即 $-2<x<3$ 时，$x+2>0$，且 $x-3<0$，由此可推知$(x+2)(x-3)<0$.

不等式（1）和（2）还可以通过下述方法求解：

（1）因为

$$x^2-x-6=(x+2)(x-3),$$

所以解 $x^2-x-6>0$ 就是解$(x+2)(x-3)>0$，相当于解不等式组

$$\begin{cases}x+2>0\\x-3>0\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases}x+2<0\\x-3<0\end{cases}$$

解这两个不等式组，得

$$x>3 \text{ 或 } x<-2.$$

（2）解 $x^2-x-6<0$ 就是解$(x+2)(x-3)<0$，相当于解不等式组

$$\begin{cases}x+2>0\\x-3<0\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases}x+2<0\\x-3>0\end{cases}$$

解这两个不等式组，得

$$-2<x<3.$$

由(1)和(2)的解法，你能否解不等式

$$\frac{x+2}{x-3}\geqslant0,\ \frac{x+2}{x-3}\leqslant0?$$

比较上面的两种解法，可以明显地体会到，作出相应的二次函数的图象，并由图象直接写出解集的方法更简便一些.

探索与研究

根据例1的分析，如果函数的图象是连续不间断的，又存在不同的零点，这些零点分x轴为若干区间，我们容易得到：

(1) 在函数的变号零点附近，函数值的符号发生了由正到负或由负到正的变化；

(2) 在同一开区间内，函数值具有相同的符号，都为正或都为负.

这两个性质，对你解不等式有些什么帮助？利用这两个性质你能解下面的不等式吗？

$$(x+2)(x-1)(x+1)>0.$$

例1 解不等式：

(1) $x^2-2x+3>0$；　　(2) $x^2-2x+3<0$.

分析：考察方程 $x^2-2x+3=0$ 的判别式

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0.$$

二次函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 的图象位于 x 轴的上方(图3-4(1))，这时，对任意实数 x，都有 $x^2-2x+3>0$.

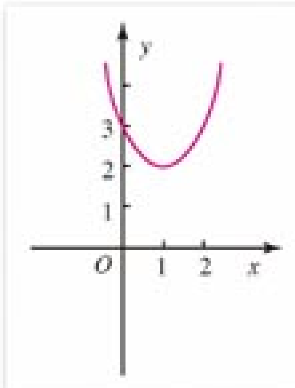


图3-4(1)

解：对任意实数 x，$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$.

因此不等式(1)的解集为实数集.

不等式(2)无解，或说它的解集为空集.

通过以上两例，我们不难对一元二次不等式

$$ax^2+bx+c>0\ (a\neq0)\text{和}\ ax^2+bx+c<0\ (a\neq0)$$

解集的形式作一般性的分析.

不妨假定 $a>0$. 因为如果 $a<0$，我们总能把它们化为二次项系数大于零的不等式.

设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式为 Δ.

(1) 当 $\Delta>0$ 时，二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等的实数根 x_1，x_2（设 $x_1<x_2$）.

考察这类二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象，这时，如图3-4(2)，函数的零点把 x 轴分为三个区间

$$(-\infty,\ x_1),\ (x_1,\ x_2),\ (x_2,\ +\infty).$$

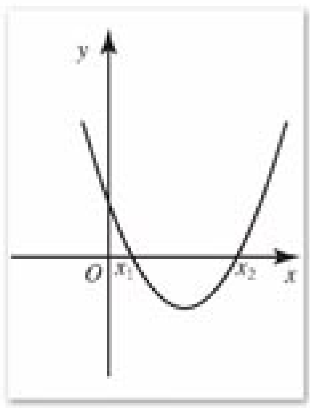


图3-4(2)

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是

$$(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty);$$

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是

$$(x_1,\ x_2).$$

(2) 当 $\Delta=0$ 时，通过配方，得

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

由图 3-4(3)可知，$ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $x\neq-\frac{b}{2a}$ 的全体实数. 即

$$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right).$$

$ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集，即不等式无解.

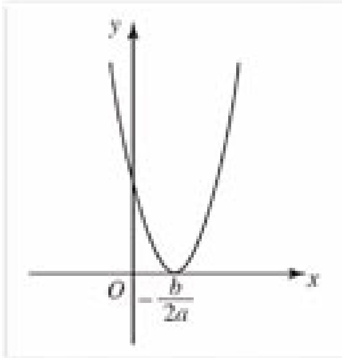


图 3-4(3)

(3) 当 $\Delta<0$ 时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象如图 3-4(1)所示.

通过配方，得 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

由此可知，$ax^2+bx+c>0$ 的解集是实数集 $\mathbf{R}$；

$ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集，即不等式无解.

例 2 解不等式 $1-x-4x^2>0$.

解：原不等式化为 $4x^2+x-1<0$.

因为 $\Delta=1^2-4\times4\times(-1)=17>0$，方程 $4x^2+x-1=0$ 的根是

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{8},\ x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}.$$

所以，不等式的解集是

$$\left\{x\left|\frac{-1-\sqrt{17}}{8}<x<\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right.\right\}.$$

例 3 解不等式 $x^2+4x+4>0$.

解：因为 $\Delta=4^2-4\times1\times4=0$，原不等式化为

$$(x+2)^2>0,$$

所以，不等式的解集是

$$\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\neq-2\}.$$

不等式 $x^2+4x+4\geqslant0$ 的解集是什么？$x^2+4x+4\leqslant0$ 的解集是什么？

例 4 解不等式 $-2x^2+4x-3>0$.

解：原不等式化为 $2x^2-4x+3<0$.

因为 $2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1>0$，所以不等式的解集是$\varnothing$.

例 5 求函数 $f(x)=\sqrt{2x^2+x-3}+\log_3(3+2x-x^2)$的定义域.

解：由函数 $f(x)$的解析式有意义，得

$$\begin{cases}2x^2+x-3\geqslant0\\3+2x-x^2>0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(2x+3)(x-1)\geqslant0\\(x-3)(x+1)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant-\frac{3}{2}\text{或 }x\geqslant1\\-1<x<3\end{cases}$$

因此

$$1 \leqslant x < 3.$$

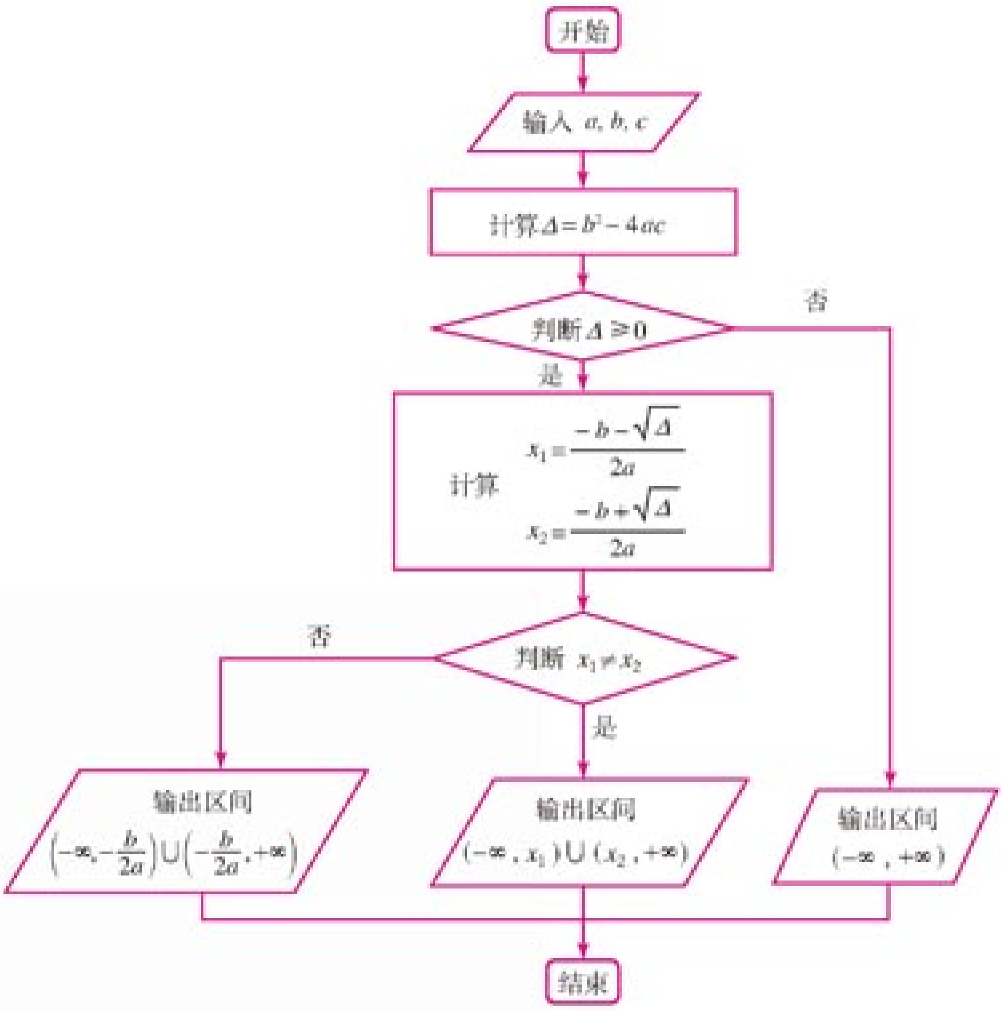
所求函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 3)$.

以解析式形式给出的函数的定义域，是使函数解析式有意义的自变量取值的集合. 列出关于自变量的不等式(组)并求其解，是求函数定义域的最常用的方法.

下面，我们用一个程序框图来描述求解一元二次不等式

$$ax^2+bx+c>0\ (a>0)$$

的算法过程：



练习A

1. 求下列不等式的解集：

(1) $x^2+4x+5>0$；　　(2) $x^2+4x+5<0$；

(3) $x^2-8x+16>0$；　　(4) $x^2-8x+16<0$.

2. 求下列不等式的解集：

(1) $x^2-2x-3>0$；　　(2) $x^2-2x-3<0$；

(3) $4x^2-12x+9\leqslant 0$；　　(4) $3+5x-2x^2\leqslant 0$.

3. 解下列一元二次不等式：

(1) $\frac{1}{2}x^2-4x+6<0$；　　(2) $4x^2-4x+1\geqslant 0$；

(3) $2x^2-x-1\leqslant 0$；　　(4) $3(x-2)(x+2)-4(x+1)^2+1<0$.

4. m 是什么实数时，关于 x 的方程 $mx^2-(1-m)x+m=0$ 没有实数根？

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_2(3x^2-2x-2)$；

(2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}}+\lg(16x^2-8x+1)$；

(3) $f(x)=2^{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{2x^2+5x-3}$.

练习B

1. 解关于 x 的不等式 $x^2+(m-1)x-m\geqslant 0$.

2. 关于 x 的不等式 $mx^2-(m+3)x-1<0$ 对于任意实数 x 均成立，求实数 m 取值的集合.

3. 关于 x 的方程 $x^2-(m+3)x+m+3=0$ 有两个不相等的正实数根，求实数 m 取值的集合.

习题3-3 A

1. 在直角坐标系中作出下列各函数的图象，并根据图象写出使下列各函数的值大于零；等于零；小于零时的实数 x 取值的集合：

(1) $f(x)=25-x^2$；　　(2) $y=x^2+6x+10$.

2. 解下列不等式：

(1) $4x^2-4x>15$；　　(2) $14-4x^2\geqslant x$；

(3) $x(x+2)<x(3-x)+1$；　　(4) $(2x-1)^2-(3x+2)^2>11$；

(5) $\frac{x}{9-x}<0$；　　(6) $\frac{2x+1}{x-1}\leqslant 1$.

3. 如果全集 $U=\mathbf{R}$，设集合 $A=\{x|x^2+3x+2<0\}$，求集合 $\complement_U A$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{-3x^2+2x+1}$；

(2) $f(x)=\log_2(x^2-x+\frac{1}{4})+\sqrt{x^2-1}$；

(3) $f(x)=\dfrac{\lg(x+4)}{\sqrt{2x^2-x-1}}$.

5. (1) m 是什么实数时，关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+3m^2=11$ 有两个不相等的实根？

(2) m 是什么实数时，关于 x 的方程 $mx^2-(1-m)x+m=0$ 有两个正实根？

6. (1) 不等式 $mx^2-(1-m)x+1>0$ 对任意实数 x 都成立，求实数 m 的取值范围；

(2) 不等式 $(m+1)x^2-(1-m)x+m\leqslant 0$ 对任意实数 x 都成立，求实数 m 的取值范围；

7. 已知方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=16\\ x-y=k\end{cases}$ 有实数解，求实数 k 的取值范围.

8. 用列举法表示集合 $\{x\in\mathbf{Z}\mid 0<x^2-x-2\leqslant 4\}$.

9. 已知集合 $M=\{x\mid 3x-x^2>0\}$，$N=\{x\mid x^2-4x+3>0\}$，求 $M\cap N$ 和 $M\cup N$.

习题 3-3 B

1. 不等式 $\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}\geqslant m$ 对任意实数 x 都成立，求自然数 m 的值.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是直角，两直角边和斜边 a，b，c 满足条件 $a+b=cx$，试确定实数 x 的取值范围.

3. 关于 x 的方程 $2x^2+7mx+5m^2+1=0$ 的两个实根中，一个比 2 大，另一个比 2 小，求实数 m 的取值范围.

4. 关于 x 的方程 $2x^2-4(m-1)x+m^2+7=0$ 的两根之差的绝对值小于 2，求实数 m 的取值范围.

5. 对于不等式 $\dfrac{1}{8}(2t-t^2)\leqslant x^2-3x+2\leqslant 3-t^2$，试求对区间 $[0,2]$ 上的任意 x 都成立的实数 t 的取值范围.

6. 用一条长 7.2 米的木料，做成“日”字形的窗户框，要使窗户面积不超过 1.8 平方米，且木料无剩余，求窗户宽的取值范围.

3.4 不等式的实际应用

许多实际问题，通过设未知数将其数学化后，便可以应用不等式的知识求解．下面举例说明．

例 1 一般情况下，建筑民用住宅时，民用住宅窗户的总面积应小于该住宅的占地面积，而窗户的总面积与占地面积的比值越大，住宅的采光条件越好．同时增加相等的窗户面积和占地面积，住宅的采光条件是变好了还是变差了？

分析：只要比较增加相等面积前后窗户的总面积与占地面积的比值的大小，即可作出正确的判断．

解：设 a 和 b 分别表示住宅原来窗户的总面积和占地面积的值，m 表示窗户和占地所增加的面积的值(面积单位都相同)，由题意得

$$0<a<b，m>0，$$

则

$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{ab+bm-ab-am}{b(b+m)}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}.$$

因为 $b>0$，$m>0$，所以 $b(b+m)>0$．

又因为 $a<b$，所以 $m(b-a)>0$．

因此$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}>0$，即

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}.$$

答：窗户和住宅的占地同时增加相等的面积，住宅的采光条件变好了．

例 2 有纯农药药液一桶，倒出 8 升后用水加满，然后又倒出 4 升后再用水加满，此时桶中所含的纯农药药液不超过桶的容积的 28%．问桶的容积最大为多少升？

分析：如果桶的容积为 x 升，那么第一次倒出 8 升纯农药药液后，桶内剩下的纯农药药液还有$(x-8)$升，用水加满后，桶内纯农药药液占容积的 $\frac{x-8}{x}$．

第二次又倒出 4 升药液，则倒出的纯农药药液为$\frac{4(x-8)}{x}$升，此时桶内还有纯农药药液

$$\left[(x-8)-\frac{4(x-8)}{x}\right]\text{升}.$$

解：设桶的容积为 x 升，显然 $x>8$.

依题意，得

$$(x-8)-\frac{4(x-8)}{x}\leqslant 28\%\cdot x.$$

由于 $x>8$，因而原不等式化简为

$$9x^2-150x+400\leqslant 0,$$

即 $(3x-10)(3x-40)\leqslant 0$．因此 $\frac{10}{3}\leqslant x\leqslant\frac{40}{3}$，从而

$$8<x\leqslant\frac{40}{3}.$$

答：桶的最大容积为 $\frac{40}{3}$ 升.

由此可知，解有关不等式的应用题，首先要选用合适的字母表示题中的未知数，再由题中给出的不等量关系，列出关于未知数的不等式(组)，然后解所列出的不等式(组)，最后再结合问题的实际意义写出答案.

例 3　解在章头语中提出的有关恩格尔系数的应用问题：

根据某乡镇家庭抽样调查的统计，2003 年每户家庭年平均消费支出总额为 1 万元，其中食品消费额为 0.6 万元．预测 2003 年后，每户家庭年平均消费支出总额每年增加 3 000 元，如果到2005 年该乡镇居民生活状况能达到小康水平（即恩格尔系数 n 满足条件 $40\%<n\leqslant 50\%$），试问这个乡镇每户食品消费额平均每年的增长率至多是多少（精确到 0.1).

解：设食品消费额的年平均增长率为 $x(x>0)$，则到 2005 年，

食品消费额为　$0.6(1+x)^2$(万元)，

消费支出总额为　$1+2\times0.3=1.6$(万元).

依题意得 $40\%<\frac{0.6(1+x)^2}{1.6}\leqslant 50\%$，即

$$\begin{cases}15x^2+30x-1>0\\3x^2+6x-1\leqslant 0\end{cases}$$

> **注**　恩格尔系数 n 的计算公式是
>
> $$n=\frac{\text{食品消费额}}{\text{消费支出总额}}\times 100\%.$$

解不等式组中的两个二次不等式，由 $x>0$，解得

$$\begin{cases}x>\frac{4\sqrt{15}}{15}-1\\0<x\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\end{cases}$$

因此 $\frac{4\sqrt{15}}{15}-1<x\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$．因为

$$\frac{4\sqrt{15}}{15}-1\approx 0.033=3.3\%,$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\approx 0.155=15.5\%,$$

所以该乡镇居民的生活如果在 2005 年达到小康水平，那么他们的食品消费额的年增长率就应在 3.3%到 15.5%的范围内取值．也就是说，平均每年的食品消费额至多是 15.5%．

习题 3-4 A

1. 某工人共加工 300 个零件．在加工 100 个零件后，改进了操作方法，每天多加工 15 个，用了不到 20 天的时间就完成了任务．问改进操作方法前，每天至少要加工多少个零件？
2. 甲、乙两人完成某项工作，甲单独完成比乙单独完成快 15 天．如果甲单独工作 10 天后，再由乙单独工作 15 天，所完成的工作量不少于这项工作总量的$\frac{2}{3}$．问甲单独工作最多需要多少天能完成任务？
3. 某乡种田专业户，2003 年粮食产量为 50 吨．由于实施了科学种田，该专业户计划到 2005 年粮食产量不低于 60.5 吨，他的粮食产量的年平均增长率最低不能低于多少？
4. 某种牌号的汽车在一种路面上的刹车距离 s(m)与汽车车速 x(km/h)的数值之间有如下关系
$$s=0.05x+\frac{x^2}{180},$$
在一次交通事故中，测得这种车的刹车距离不小于 12 m，问这辆汽车刹车前的车速至少是每小时多少千米（精确到 0.1 km)？

习题 3-4 B

1. 王宏同学将过年时父母给的压岁钱 100 元，按一年定期存在妈妈处，并约定以银行的年存款利率的 5 倍付息．到期后连本带利取出，王宏同学用其中 20 元帮助本班的特困生买书，剩余的部分又按原规定存在妈妈处．如果第二年到期后本利总额不低于 99 元，问银行的年存款利率不低于多少？
2. 某出版社出版某种图书，固定成本是 5 000 元，每本书的变动成本是 0.50 元，售价为 10.50 元，该出版社销售科对这本书付出的总劳务费与该书销量的平方成正比，比例系数是$\frac{2}{625}$，出版社要做到不亏损，这种图书的发行量至少应是多少本？
3. 某出版社，如果以每本 2.50 元的价格发行一种图书，可发行 80 000 本．如果一本书的定价每升高 0.1 元，发行量就减少 2 000 本，那么要使收入不低于200 000元，这种图书的最高定价应当是多少？

4. 一个车辆制造厂引进了一条摩托车整车装配流水线，这条流水线装配的摩托车数量 x(辆)与创造的价值 y(元)之间满足关系式

$$y=ax^2+bx,$$

其中 a，b 为常数．已知装配 20 辆车，可创造价值 3 600 元；若装配 10 辆车，可创造价值 2 000 元．如果这家工厂希望在一个星期内利用这条流水线创收 6 000 元以上，那么它在一个星期内大约应该装配多少辆摩托车？

5. 某公司欲将一批新鲜蔬菜用汽车从甲地运往相距 125 千米的乙地，运费为每小时 30 元，装卸费为 1 000 元．蔬菜在运输途中的损耗费(单位：元)是汽车速度(km/h)值的 2 倍，为使运输的总费用(包括运费、装卸费和损耗费)不超过 1 200 元，汽车的最高速度应为每小时多少千米？

3.5 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

我们看下面的不等式

$$x+y>700，10x+12y\leqslant 8\ 000，x\geqslant 0，y\geqslant 0.$$

在这四个不等式中，前两个不等式都含有两个未知数，且未知数的最高次数为1，我们称这样的不等式为**二元一次不等式**.

类似于方程组，我们把这四个不等式构成一个不等式组，并记为

$$\begin{cases} x+y>700 \\ 10x+12y\leqslant 8\ 000 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

像这样的不等式组，叫做**二元一次不等式组**.

这一大节，我们要研究二元一次不等式以及不等式组表示的平面区域，并在此基础上学习关于简单的线性规划问题的相关知识及其解法.

3.5.1 二元一次不等式(组)所表示的平面区域

二元一次不等式的一般形式为

$$Ax+By+C>0 \text{ 或 } Ax+By+C<0.$$

现在我们来探求，二元一次不等式解集的几何意义.

> **注** 可结合课件“二元一次不等式与平面区域”学习本节内容.

已知直线 l：$Ax+By+C=0$，它把坐标平面分为两部分，每个部分叫做开半平面，开半平面与 l 的并集叫做闭半平面. 以不等式解(x, y)为坐标的所有点构成的集合，叫做**不等式表示的区域**或**不等式的图象**.

我们如何求二元一次不等式在直角坐标平面上表示的区域呢？

直角坐标平面内直线 l 的一般形式的方程为

$$Ax+By+C=0. \qquad ①$$

根据直线方程的意义，凡在 l 上的点的坐标都满足方程①，而不在直线 l 上的点的坐

标都不满足方程①.

直线 l 把坐标平面内不在 l 上的点分为两部分，一部分在直线 l 的一侧，另一部分在 l 的另一侧．我们用下面的例子来讨论在直线的两侧点的坐标所应满足的条件.

在平面直角坐标系 xOy 中(图 3-5)，作直线

$$l：x+y-1=0.$$

由直线的方程的意义可知，直线 l 上的点的坐标都满足 l 的方程，并且直线 l 外的点的坐标都不满足 l 的方程.

在直线 l 的上方和下方取一些点：

上方　(0，2)，(1，3)，(0，5)，(2，2)；

下方　(−1，0)，(0，0)，(0，−2)，(1，−1).

把它们的坐标分别代入式子 $x+y-1$ 中．我们发现，在 l 上方的点的坐标使式子的值都大于 0，l 下方的点的坐标使式子的值都小于 0．这使我们猜想：l 同侧点的坐标是否使式子 $x+y-1$ 的值具有相同的符号？要么都大于 0，要么都小于 0？

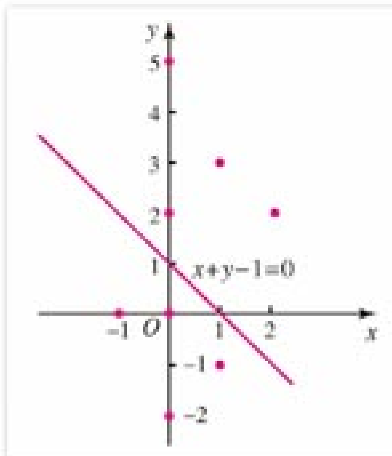


图 3-5

事实上，不仅对这个具体的例子有此性质，而且对坐标平面内的任一条直线都有此性质：

直线 l：$Ax+By+C=0$ 把坐标平面内不在直线 l 上的点分为两部分，直线 l 的同一侧的点的坐标使式子 $Ax+By+C$ 的值具有相同的符号，并且两侧的点的坐标使 $Ax+By+C$ 的值的符号相反，一侧都大于 0，另一侧都小于 0.

根据上面得出的结论，我们可以在直线 l 的某一侧任取一点，检测其坐标是否满足二元一次不等式．如果满足，则这点所在的这一侧区域就是所求的区域；否则 l 的另一侧就是所求的区域．显然，如果直线不过原点，则用原点的坐标来进行判断，比较方便.

你能证明上面这个结论吗？感兴趣的同学请看这一节的“探索与研究”.

例 1　画出下面二元一次不等式表示的平面区域：

(1) $2x-y-3>0$；　　　(2) $3x+2y-6\leqslant 0$.

解：(1) 所求区域不包含直线．用虚线画出直线

$$l：2x-y-3=0.$$

将原点的坐标(0，0)代入 $2x-y-3$，得

$$2\times 0-0-3=-3<0,$$

这样，就可以判定不等式 $2x-y-3>0$ 所表示的区域与原点位于直线 $2x-y-3=0$ 的异侧，即不包含原点的那一侧，如图 3-6 阴影部分.

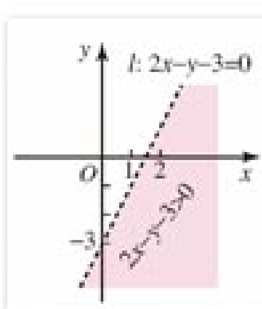


图 3-6

(2) 所求区域包含直线 l．用实线画出直线

$$l：3x+2y-6=0.$$

将原点的坐标(0，0)代入 $3x+2y-6$，得

$$3\times0+2\times0-6=-6<0，$$

这样，就可以判定不等式 $3x+2y-6\leqslant0$ 所表示的区域与原点位于直线 $3x+2y-6=0$ 的同侧，即包含原点的那一侧(包含直线 l)，如图 3-7 阴影部分.

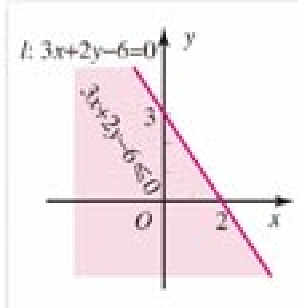


图 3-7

例 2　画出下列不等式组所表示的平面区域：

(1) $\begin{cases}2x-y+1>0\\x+y-1\geqslant0\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x-3y+2>0\\2y+1\geqslant0\\x-3\leqslant0\end{cases}$

解：(1) 在同一个直角坐标系中，作出直线：

$$2x-y+1=0\ (\text{虚线})，x+y-1=0\ (\text{实线}).$$

用例 1 中的选点方法，分别作出不等式

$$2x-y+1>0，x+y-1\geqslant0$$

所表示的平面区域，则它们的交集就是已知不等式组所表示的区域，如图 3-8 中的阴影部分.

(2) 在同一个直角坐标系中，作出直线：

$$2x-3y+2=0\ (\text{虚线})，2y+1=0\ (\text{实线})，x-3=0\ (\text{实线}).$$

用例 1 中的选点方法，分别作出不等式

$$2x-3y+2>0，2y+1\geqslant0，x-3\leqslant0$$

所表示的平面区域，则它们的交集就是已知不等式组所表示的区域，如图 3-9 中的阴影部分 G.

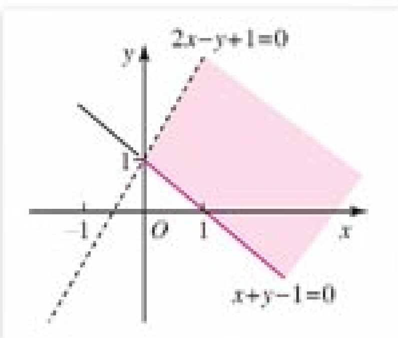


图 3-8

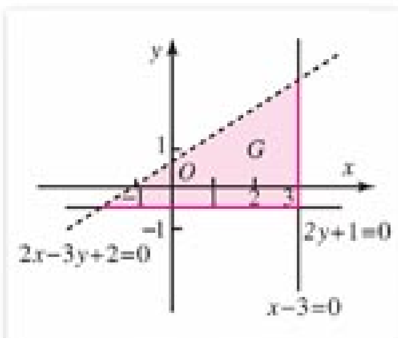


图 3-9

例 3　一个化肥厂生产甲、乙两种混合肥料，生产 1 车皮甲种肥料需要的主要原料是磷酸盐 4 吨，硝酸盐 18 吨；生产 1 车皮乙种肥料需要的主要原料是磷酸盐 1 吨，硝酸盐 15 吨．现有库存磷酸盐 10 吨，硝酸盐 66 吨．如果在此基础上进行生产，设 x，y 分别为计划生产甲、乙两种混合肥料的车皮数，请列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域.

解：x 和 y 所满足的数学关系式为

$$\begin{cases}4x+y\leqslant 10\\18x+15y\leqslant 66\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$$

分别画出不等式组中，各不等式所表示的区域，然后取交集. 图 3-10 所示的平面区域 Q(阴影部分)，就是不等式组所表示的区域.

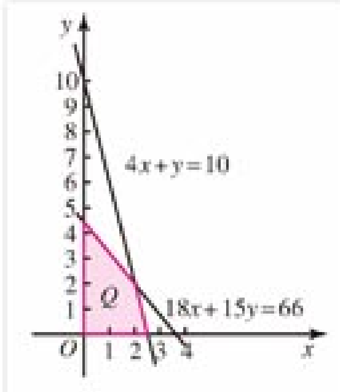


图 3-10

探索与研究

在坐标平面内，已知直线

$$l: Ax+By+C=0.$$

为什么在直线 l 的同一侧，二元一次三项式 $Ax+By+C$ 的值取相同的符号呢？让我们用两个向量内积值的符号来研究这一问题.

设 $P(x, y)$ 是坐标平面内不在 l 上的任意一点，作 $PP_0\perp l$，垂足为 $P_0(x_0, y_0)$（图 3-11).

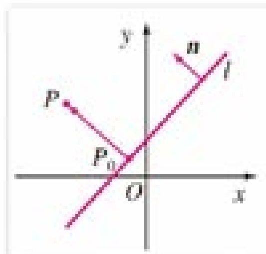


图 3-11

如果 $\boldsymbol{n}=(A, B)$ 为直线 l 的一个法向量，显然，$\overrightarrow{P_0P}\parallel\boldsymbol{n}$. 当点 P 在 $\boldsymbol{n}$ 指向的那一侧时，$\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 方向相同，而点 P 在直线 l 的另一侧($-\boldsymbol{n}$ 指向的那一侧)时，$\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 方向相反.

$$\overrightarrow{P_0P}\text{与}\boldsymbol{n}\text{ 方向相同}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}>0;$$

$$\overrightarrow{P_0P}\text{与}\boldsymbol{n}\text{ 方向相反}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}<0.$$

请把上面的向量表示式，转化为坐标表示，看看你能否证明下面的结论：

$$\overrightarrow{P_0P}\text{与}\boldsymbol{n}\text{ 方向相同}\Leftrightarrow Ax+By+C>0;$$

$$\overrightarrow{P_0P}\text{与}\boldsymbol{n}\text{ 方向相反}\Leftrightarrow Ax+By+C<0.$$

这一结论，就是说：

直线 l: $Ax+By+C=0$ 将坐标平面内不在 l 上的点分为两部分，直线 l 的法向量 (A, B) 方向指向的那一侧半平面，所有点的坐标都满足不等式 $Ax+By+C>0$；而在直线 l 的另一侧，所有点的坐标都满足不等式 $Ax+By+C<0$.

练习A

1. 画出下列各不等式所表示的平面区域：

(1) $3x+4>0$；　　(2) $2y-3\leqslant 0$；

(3) $3x+2y<-4$；　　(4) $2x-y-2\leqslant 0$.

2. 画出下列各不等式组所表示的平面区域：

(1) $\begin{cases} x+2y+4<0 \\ x-y+1\leqslant 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-y+6>0 \\ 2x+3y-1\geqslant 0 \\ 2x-4<0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x<3 \\ x-2y\leqslant 0 \\ 3x+2y\geqslant 6 \\ 3y<x+9 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 1<x+2y\leqslant 4 \\ -2\leqslant 2x-y\leqslant -1 \end{cases}$

3. 某公司从银行贷款不足 250 万元，分配给下属甲、乙两个工厂用以进行技术改造．已知甲厂可以从投入的金额中获取 20%的利润；乙厂可以从投入的金额中获取 25%的利润．如果该公司计划从这笔贷款中至少获利 60 万元，请列出甲、乙两厂分配到的贷款金额所满足的数学关系式，并画出相应的平面区域．

练习B

写出表示下列平面区域的二元一次不等式组：

(1) $\triangle ABC$ 的三条边围成的平面区域（包括三角形的三条边），其中点 $A(-2,1)$，$B(5,1)$，$C(3,4)$；

(2) 点 $A(-1,1)$，$B(2,-1)$ 是正方形 $ABCD$（字母 A，B，C，D 依逆时针顺序排列）的两个顶点，正方形 $ABCD$ 的四条边围成的平面区域（不包括正方形的四条边）．

思考与讨论

试证明，当 $B>0$ 时：

(1) 二元一次不等式 $Ax+By+C>0$ 所对应的平面区域是直线 $Ax+By+C=0$ 上方的部分；

(2) 二元一次不等式 $Ax+By+C<0$ 所对应的平面区域是直线 $Ax+By+C=0$ 下方的部分．

3.5.2 简单线性规划

在生产与营销活动中，我们常常需要考虑：怎样利用现有的资源（人力、物力、资金……），取得最大的收益．或者，怎样以最少的资源投入去完成一项给定的任务．我们把这一类问题称为“最优化”问题．不等式的知识是解决“最优化”问题的得力工具．这一节，我们将借助二元一次不等式（组）的几何表示，学习“最优化”问题中的简单“线性规划”问题．

下面我们通过实例来说明线性规划的有关问题及其求解方法．

问题 某工厂计划生产甲、乙两种产品，这两种产品都需要两种原料．生产甲产品1工时需要 A 种原料 3 kg，B 种原料 1 kg；生产乙产品 1 工时需要 A 种原料2 kg，B 种原料 2 kg．现有 A 种原料1 200 kg，B 种原料 800 kg．如果生产甲产品每工时的平均利润是 30 元，生产乙产品每工时的平均利润是 40 元，问甲、乙两种产品各生产多少工时能使利润的总额最大？最大利润是多少？

解：依题意可列表如下：

产品	原料 A 数量（kg）	原料 B 数量（kg）	利润（元）
生产甲种产品 1 工时	3	1	30
生产乙种产品 1 工时	2	2	40
限额数量	1 200	800	

设计划生产甲种产品 x 工时，生产乙种产品 y 工时，则获得利润总额为

$$f=30x+40y. \quad ①$$

其中 x，y 满足下列条件

$$\begin{cases}3x+2y\leqslant 1\,200\\ x+2y\leqslant 800\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases} \quad ②$$

于是问题转化为，在 x，y 满足条件②的情况下，求式子

$$30x+40y$$

的最大值．

画出不等式组②表示的平面区域 $OABC$（图 3-12 阴影部分）．

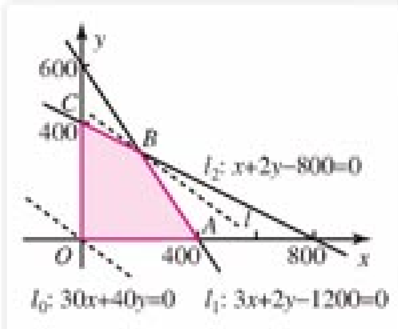


图 3-12

问题又可以转化为，在不等式组②表示的平面区域内找一点，把它的坐标代入式子 $30x+40y$ 时，使该式取最大值．

令 $30x+40y=0$，则此方程表示通过原点的一条直线，记为 l_0．易知，在区域 $OABC$ 内有 $30x+40y\geqslant 0$．考察这

个区域内任意一点$P(x, y)$到l_0的距离

$$d=\frac{|30x+40y|}{\sqrt{30^2+40^2}}=\frac{30x+40y}{\sqrt{30^2+40^2}},$$

于是

$$30x+40y=\sqrt{30^2+40^2}\cdot d.$$

这就是说，点$P(x, y)$到直线l_0的距离d越大，式子$30x+40y$的值也越大．因此，问题就转化为：在不等式组②表示的平面区域内，找与直线l_0距离最大的点．

为了在区域$OABC$内精确地找到这一点，我们平移直线l_0到位置l，使l通过$OABC$内的某点，且$OABC$内的其他各点都在l的包含直线l_0的同一侧，很容易证明该点到l_0的距离最大．用此法，区域$OABC$内的点B为所求．

解方程组

$$\begin{cases}3x+2y=1\,200\\x+2y=800\end{cases}$$

得点B的坐标$(200, 300)$，代入式子①，得

$$f_{\max}=30\times200+40\times300=18\,000.$$

答：用200工时生产甲种产品，用300工时生产乙种产品，能获得利润18 000元，此时利润总额最大．

在上述问题中，我们把要求最大值或最小值的函数

$$f=30x+40y$$

叫做**目标函数**，目标函数中的变量所要满足的不等式组②称为**约束条件**．如果目标函数是关于变量的一次函数，则称为**线性目标函数**．如果约束条件是关于变量的一次不等式（或等式），则称为**线性约束条件**．在线性约束条件下，求线性目标函数的最大值或最小值问题，称为**线性规划问题**．使目标函数达到最大值或最小值的点的坐标，称为问题的**最优解**．

一般地，满足线性约束条件的解(x, y)，叫做可行解．由所有可行解组成的集合叫做**可行域**．

例 1 下表给出甲、乙、丙三种食物中的维生素A，B的含量及单价：

	甲	乙	丙
维生素A（单位/千克）	400	600	400
维生素B（单位/千克）	800	200	400
单价（元/千克）	7	6	5

营养师想购买这三种食物共10千克，使它们所含的维生素A不少于4 400单位，维生素B不少于4 800单位，而且要使付出的金额最低，这三种食物应各购买多少千克？

解：设购买甲种食物x千克，乙种食物y千克，则购买丙种食物$(10-x-y)$千克．又设总支出为z元，依题意得

$$z=7x+6y+5(10-x-y),$$

化简得 $z=2x+y+50$.

x，y 应满足的约束条件

$$\begin{cases}400x+600y+400(10-x-y)\geqslant 4\,400\\800x+200y+400(10-x-y)\geqslant 4\,800\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\10-x-y\geqslant 0\end{cases}$$

化简，得

$$\begin{cases}y\geqslant 2\\2x-y\geqslant 4\\x+y\leqslant 10\\x\geqslant 0\end{cases}$$

根据上述不等式组，作出表示可行域的平面区域，如图 3-13 阴影部分所示.

画直线 l_0：$2x+y=0$，平行移动 l_0 到直线 l 的位置，使 l 过可行域的某点，并且可行域内的其他各点都在 l 的不包含直线 l_0 的另外一侧，该点到直线 l_0 的距离最小，则这一点的坐标使目标函数取最小值. 容易看出，点 M 符合上述条件. 点 M 是直线 $y=2$ 与直线 $2x-y=4$ 的交点.

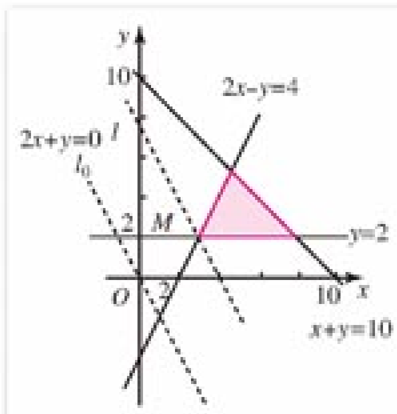


图 3-13

解方程组

$$\begin{cases}y=2\\2x-y=4\end{cases}$$

得点 $M(3,\ 2)$.

因此，当 $x=3$，$y=2$ 时，z 取得最小值

$$z_{\min}=2\times 3+2+50=58,$$

此时，$10-x-y=5$.

答：购买甲食物 3 千克，乙食物 2 千克，丙食物 5 千克时，付出的金额最低为 58 元.

例 2 某货运公司拟用集装箱托运甲、乙两种货物，一个大集装箱能够装所托运货物的总体积不能超过 24 m³，总质量不能低于650 千克. 甲、乙两种货物每袋的体积、质量和可获得的利润，列表如下：

货物	每袋体积(单位：m³)	每袋质量(单位：百千克)	每袋利润(单位：百元)
甲	5	1	20
乙	4	2.5	10

问：在一个大集装箱内，这两种货物各装多少袋（不一定都是整袋）时，可获得最大利润？

解：设托运甲种货物 x 袋，乙种货物 y 袋. 获得利润 z 百元，则

$$z=20x+10y.$$

依题意，可得关于 x，y 的约束条件

$$\begin{cases}5x+4y\leqslant 24\\2x+5y\geqslant 13\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$$

根据上述不等式组，作出表示可行域的平面区域，如图 3-14 阴影部分所示.

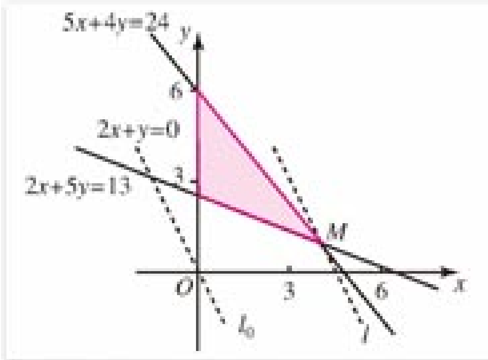


图 3-14

画直线 l_0：$20x+10y=0$，即 $2x+y=0$，平行移动 l_0 到直线 l 的位置，使 l 过可行域的某点，并且可行域内的其他各点都在 l 的包含直线 l_0 的同一侧，该点到直线 l_0 的距离最大，则这一点的坐标使目标函数取最大值，容易看出，图中的点 M 符合上述条件．点 M 是直线 $2x+5y=13$ 与直线 $5x+4y=24$ 的交点.

解方程组

$$\begin{cases}5x+4y=24\\2x+5y=13\end{cases}$$

得点 $M(4,\ 1)$.

因此当 $x=4$，$y=1$ 时，z 取得最大值．此时，

$$z_{\max}=20\times 4+10\times 1=90.$$

答：在一个大集装箱内装甲种货物 4 袋，乙种货物 1 袋，可获得最大利润9 000元.

思考与讨论

你是否发现，取得最优解的点，都在可行域的边界上．如果可行域是凸多边形，使问题达到最优解的点是否都在凸多边形的顶点？可行域内部是否存在使问题得到最优解的点？

例 3 A，B 两个居民小区的居委会组织本小区的中学生，利用双休日去市郊的敬老院参加献爱心活动，两个小区都有同学参加．已知 A 区的每位同学往返车费是 3 元，每人可为 5 位老人服务；B 区的每位同学往返车费是 5 元，每人可为 3 位老人服务．如果要求 B 区参与活动的同学比 A 区的同学多，且去敬老院的往返总车费不超过 37 元．怎样安排 A，B 两区参与活动同学的人数，才能使受到服务的老人最多？受到服务的老人最多是多少？

解：设 A，B 两区参与活动的人数分别为 x，y，受到服务的老人的人数为 z，则

$$z=5x+3y.$$

应满足的约束条件是

$$\begin{cases}y-x\geqslant 1\\3x+5y\leqslant 37\\x\geqslant 1\\x,\ y\in \mathbf{Z}\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} x-y+1\leqslant 0 \\ 3x+5y\leqslant 37 \\ x\geqslant 1 \\ x,\ y\in \mathbf{Z} \end{cases}$$

根据上述不等式组，作出表示可行域的平面区域中的整点，如图 3-15 阴影部分中所示的整点.

画直线 l_0：$5x+3y=0$，平行移动 l_0 到直线 l 的位置，使 l 过可行域的某点，并且可行域内的其他各点都在 l 的包含直线 l_0 的同一侧，该点到直线 l_0 的距离最大，则这一点的坐标使目标函数取最大值，容易看出，图中的点 M 符合上述条件. 点 M 是直线 $x-y=-1$ 与直线 $3x+5y=37$ 的交点.

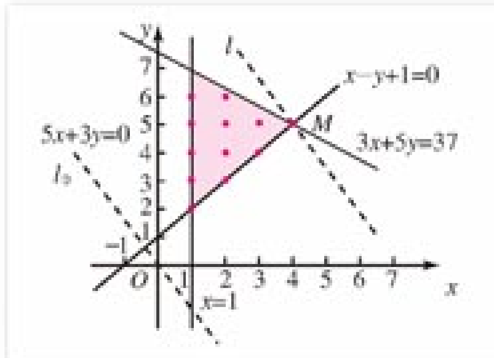


图 3-15

解方程组

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 3x+5y=37 \end{cases}$$

得点 $M(4,\ 5)$.

因此，当 $x=4$，$y=5$ 时，z 取得最大值，并且

$$z_{\max}=5\times 4+3\times 5=35.$$

答：A，B 两区参与活动同学的人数分别为 4，5 时，受到服务的老人最多，受到服务的老人最多是 35 人.

例 3 是整数线性规划问题. 整数线性规划问题的可行域是由满足不等式组的整点组成的集合，所求的最优解必须是整数解.

练习

1. 解下列线性规划问题：

(1) 求 $z=5x+8y$ 的最大值，式中的 x，y 满足约束条件：

$$\begin{cases} x+y\leqslant 6 \\ 5x+9y\leqslant 45 \\ x,\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

(2) 求 $z=3x+5y$ 的最大值与最小值，式中的 x，y 满足约束条件：

$$\begin{cases} 5x+3y\leqslant 15 \\ y\leqslant x+1 \\ x-5y\leqslant 3 \end{cases}$$

2. 某公司的 A，B 两仓库至多可以分别调运出某型号的机器 14 台，8 台. 甲地需要 10 台，乙地需要 8 台. 已知从 A 仓库将 1 台机器运到甲地的运费为

400 元，运到乙地的运费为 800 元；B 仓库将 1 台机器运到甲地的运费为 300 元，运到乙地的运费为 500 元．问怎样安排调运方案，可使运输费用最少？

3. 某厂拟生产甲、乙两种适销产品，每件销售收入分别为 3 千元、2 千元．甲、乙两种产品都需要在 A，B 两种机床上加工，A，B 两种机床上每加工一件甲种产品所需时间分别为 1 小时、2 小时；每加工一件乙种产品所需时间分别为 2 小时、1 小时．如果 A，B 两种机床每月有效使用时数分别为 400 小时、500 小时．如何安排生产，才能使销售总收入最大？

4. 营养学家指出，成人的日常饮食应该摄入至少 0.075 kg 碳水化合物，0.06 kg 蛋白质，0.06 kg 脂肪．已知 1 kg 食物 A 含有 0.105 kg 碳水化合物，0.07 kg 蛋白质，0.14 kg 脂肪，花费 28 元；而 1 kg 食物 B 含有 0.105 kg 碳水化合物，0.14 kg蛋白质，0.07 kg 脂肪，花费 21 元．为了满足营养专家指出的日常饮食要求，同时使花费最低，需要食物 A 和食物 B 各多少 kg？

思考与讨论

题目：已知 $f(a, b)=ax+by$，如果 $1\leqslant f(1, 1)\leqslant 2$，且 $-1\leqslant f(1, -1)\leqslant 1$，试求 $f(2, 1)$ 的取值范围．

用下面的方法求解本题，错在哪里？请你用正确的解法求解．

解：由已知，得下面的不等式组

$$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 2\\ -1\leqslant x-y\leqslant 1\end{cases}$$

两个同向不等式作加法，得

$$0\leqslant 2x\leqslant 3, \qquad ①$$

原不等式组化为

$$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 2\\ -1\leqslant -x+y\leqslant 1\end{cases}$$

两个同向不等式作加法，得

$$0\leqslant 2y\leqslant 3.$$

因此 $0\leqslant y\leqslant 1.5$. ②

两个同向不等式①和②作加法，得

$$0\leqslant 2x+y\leqslant 4.5.$$

因此 $0\leqslant f(2, 1)\leqslant 4.5$.

习题 3-5 A

1. 画出下列各不等式表示的平面区域：

(1) $2x+3y-6>0$；　　(2) $4x-3y-12\leqslant 0$；

(3) $3x-1<0$；　　(4) $x-2y\geqslant 0$.

2. 画出下列不等式组表示的平面区域：

(1) $\begin{cases} y\geqslant 2x+1 \\ x+2y<4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y\leqslant 12 \\ -3x+y\leqslant 6 \\ -1\leqslant x\leqslant 8 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-y\leqslant 1 \\ x+2y+3>0 \\ 2y-4\leqslant 0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-y+1\leqslant 0 \\ 3x+5y\leqslant 30 \\ x\geqslant -2 \end{cases}$

3. 求函数 $z=2x+3y$ 的最大值，式中的 x，y 满足约束条件

$$\begin{cases} 2x+3y-24\leqslant 0 \\ x-y\leqslant 7 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

4. 求函数 $z=7x+y$ 的最大值，式中的 x，y 满足约束条件

$$\begin{cases} 2x+5y\geqslant 15 \\ x-5y\geqslant 0 \\ 6\leqslant x\leqslant 8 \end{cases}$$

5. 某工厂用 A，B 两种零件组装甲、乙两种产品．组装一件甲产品需用 4 个 A 零件，耗时 1 小时；组装一件乙产品需用 4 个 B 零件，耗时 2 小时．该厂每天最多可获得 16 个 A 零件和 12 个 B 零件，且每天工作时间不超过 8 小时．如果组装一件甲产品可获利 1 500 元，组装一件乙产品可获利 2 000 元，那么应该怎样安排一天的生产，才能获得最大的利润？

6. 要将两种大小不同的钢板截成 A，B，C 三种规格的小钢板，每张钢板可截得三种规格的小钢板的块数如下表所示：

钢板类型	A 规格	B 规格	C 规格
第一种钢板	2	1	1
第二种钢板	1	2	3

如果至少需要 A，B，C 三种规格的小钢板各 15 块，18 块，27 块，问分别截这两种钢板各多少张可以满足需要，且使所用两种钢板的张数最少？

习题 3-5 B

1. 画出下列二元不等式所表示的平面区域：

(1) $(2x-y+4)(x+y-1)>0$；　　(2) $\dfrac{x+2y-1}{x-y+3}\leqslant 0$.

2. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象过原点，且 $-1\leqslant f(-1)\leqslant 2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围.

3. 电视台在某企业的赞助下播放两套电视连续剧. 其中甲连续剧每次播放时间为 80 分钟，广告时间为 1 分钟，收视观众为 60 万；乙连续剧每次播放时间为 40 分钟，广告时间为 1 分钟，收视观众为 20 万. 已知该企业与电视台所签协议要求电视台每周至少播放 6 分钟广告，而电视台每周只能为该企业提供不多于 320 分钟的节目时间. 问电视台每周应播放两套电视连续剧各多少次，才能使收视的观众最多.

4. 某机械厂的车工分Ⅰ、Ⅱ两个等级，各级车工每人每天的加工能力、成品合格率及日工资数如下表所示：

级别	加工能力（个/人天）	成品合格率（%）	工资（元/天）
Ⅰ	240	97	56
Ⅱ	160	95.5	36

工厂要求每天至少加工配件 2 400 个，车工每出一个废品，工厂要损失 2 元. 现有Ⅰ级车工 8 人，Ⅱ级车工 12 人，且工厂要求至少安排 6 名Ⅱ级车工参与加工配件. 试问如何安排工作，才能使工厂每天支出的费用最少？

5. 甲、乙两个粮库要向 A，B 两镇运送大米，已知甲库最多可调出 100 t 大米，乙库最多可调出 80 t 大米，A 镇需要 70 t 大米，B 镇需要 110 t 大米，两库到两镇的路程和运费如下表：

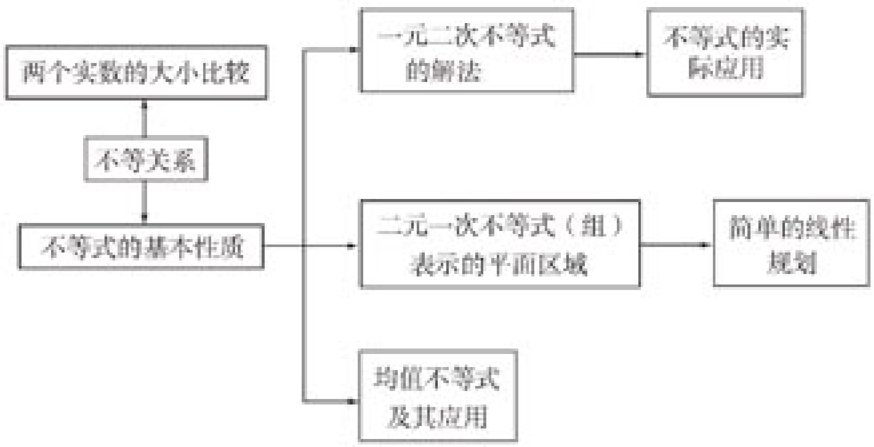
	路程（km）		运费（元/t·km）	
	甲库	乙库	甲库	乙库
A 镇	20	15	12	12
B 镇	25	20	10	8

(1) 这两个粮库各运往 A，B 两镇多少大米，才能使总运费最省？此时总运费是多少？

(2) 最不合理的调运方案是什么？它造成的经济损失是多少？

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 你知道等式有哪些性质吗？请你把等式与不等式的基本性质进行比较，找出它们的相同点与不同点.
2. 在学习一元二次不等式的图象解法和二元一次不等式(组)表示的平面区域时，你是否已经体会到“相等”与“不等”两种数量关系之间的相互转化？“数”与“形”两种表达形式之间的相互转化？请你谈谈对这两种转化的体会.
3. 在解一元二次不等式时，是否一定要把二次项系数化为正值？为什么？
4. 应用均值不等式求最大(最小)值时需要注意什么？
5. 学习简单线性规划一节后，请你谈谈用不等式去解决实际问题所起作用的体会.

Ⅲ 巩固与提高

A 组

1. 比较大小：

(1) 已知 $a\neq b$，a，$b\in \mathbf{R}$，试比较

$$a^2(a+1)+b^2(b+1)\text{与}a(a^2+b)+b(b^2+a)$$

的大小；

（2）设 $a>b>0$，试比较

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\text{与}\frac{a-b}{a+b}$$

的大小；

（3）已知 $p\in\mathbf{R}$，试比较

$$(p^2+\sqrt{2}p+1)(p^2-\sqrt{2}p+1)\text{与}(p^2+p+1)(p^2-p+1)$$

的大小.

2. 已知 $a>b>c$，求证：

（1）$\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-c}$；　　（2）$\frac{1}{(a-b)^2}>\frac{1}{(a-c)^2}$.

3. 解下列不等式：

（1）$(x-1)(x+a)>0$；　　（2）$x^2-2ax+1<0$；

（3）$2^{2x}-2^{x+1}-3<0$；　　（4）$2(\lg x)^2-\lg x-1>0$.

4. 如果不等式 $(m+1)x^2+2mx+m>0$ 对任意实数 x 都成立，求实数 m 的取值范围.

5. 已知方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 的两个根都是正数，求实数 m 的取值范围.

6. 实数 x 为何值时，下列等式成立：

（1）$\frac{x-1}{x-2}=\cos\theta\ \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right)$；

（2）$\frac{x+2}{x-1}=\tan\theta\ \left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

7. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{2+x-x^2}$；　　（2）$y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\lg(x^2-x)$；

（3）$y=\ln(x^2-5x+4)+\ln(x-5)^2$.

8. 求函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 的值域.

9.（1）在面积为定值 S 的扇形中，半径是多少时，扇形的周长最小？

（2）在周长为定值 P 的扇形中，半径是多少时，扇形的面积最大？

10. 甲、乙两地相距 S km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不超过 c km/h. 已知汽车每小时的运输成本（单位：元）由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v（单位：km/h）的平方成正比，且比例系数为 b；固定部分为 a 元（$a<bc^2$）. 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大的速度行驶？

11. 点 $P(a,2a)$ 到直线 $4x-3y+2=0$ 的距离等于 4，且在不等式 $2x+y-3<0$ 表示的区域内，求实数 a 的值.

12. 作出不等式组

$$\begin{cases}4x+3y+8>0\\x<0\\y<0\end{cases}$$

表示的平面区域，并写出这个区域内所有整点(横、纵坐标均为整数的点)的坐标.

13. 作出下列不等式组表示的平面区域：

(1) $\begin{cases} x-y+1>0 \\ x+2y+1>0 \\ x\leqslant 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-y+2<0 \\ x-y+3>0 \\ y>-1 \end{cases}$

14. 某运输公司有 7 辆可载 6 吨的 A 型卡车与 4 辆可载 10 吨的 B 型卡车，有 9 名驾驶员. 建筑某段高速公路时，此公司承包了每天至少搬运 360 吨沥青的任务. 已知每辆卡车每天的往返次数为 A 型卡车 8 次，B 型卡车 6 次，每辆卡车每天的成本费为 A 型卡车 160 元，B 型卡车 252 元. 问每天派出两种型号的卡车各多少辆，公司所花的成本费最低？

15. 咖啡馆配制两种饮料，甲种饮料每杯含奶粉 9 克，咖啡4 克，糖 3 克；乙种饮料每杯含奶粉 4 克，咖啡 5 克，糖 10 克. 已知每天原料的使用限额为奶粉 3 600 克，咖啡 2 000克，糖 3 000 克. 如果甲种饮料每杯能获利 0.7 元，乙种饮料每杯能获利1.2 元，每天在原料的使用限额内，要求饮料能全部售完. 问每天应配制两种饮料各多少杯，才能获得最大利润？

B 组

1. 如果 $12<a<60$，$15<b<36$，求 $a+b$，$2a-b$，$\frac{a}{b}$ 的取值范围.

2. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，a，b 满足条件 $a+b>0$，求证：

$$f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b).$$

3. 解下列不等式：

(1) $\dfrac{6x^2-17x+12}{2x^2-5x+2}>0$；

(2) $\dfrac{(3x-2)(x-2)}{(x-4)^2}\leqslant\dfrac{(2x+2)(x-2)}{(x-4)^2}$.

4. 给出三个不等式 (1) $\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}$；(2) $bc>ad$；(3) $ab>0$. 以其中任意两个不等式为条件，剩下的一个不等式为结论所构造的命题中，有几个真命题？请写出所有的真命题，并加以证明.

5. 设 α 为第一象限角，试比较$\frac{1}{2}\tan\alpha$ 与 $\tan\frac{1}{2}\alpha$ 的大小.

6. 如果不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是$\{x\mid x<m$ 或 $x>n\}$ $(m<n<0)$，求关于 x 的不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集.

7. 如果关于 x 的不等式

$$\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$$

的解集是非空集合$\{x\mid 4<x<m\}$，求实数 a，m 的值.

8. 设函数 $f(x)=\lg[(m^2-3m+2)x^2+2(m-1)x+5]$：

(1) 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，求实数 m 的取值范围；

(2) 如果函数 $f(x)$ 的值域为 **R**，求实数 m 的取值范围.

9. (1) 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ 的最小值以及相应的 x 的值；

(2) 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值以及相应的 x 的值.

10. 设计一幅宣传画，要求画面面积为 4 840 cm^2，画面的宽与高的比为 λ ($\lambda<1$)，画面的上下各留 8 cm 空白，左右各留 5 cm 空白. 怎样设计画面的高与宽的尺寸，才能使宣传画所用纸张的面积最小?

11. 挂在墙上的一幅画的上边沿 A 离地面 a m，画的下边沿 B 离地面 b m，某人的眼睛 C 离地面 c m ($c<b$). 这个人站在离墙多远的地方看画 AB 时的视角最大?

12. 已知 x，y 满足约束条件

$$\begin{cases}2x+y-2\geqslant 0\\x-2y+4\geqslant 0\\3x-y-3\leqslant 0\end{cases}$$

求目标函数 $z=x^2+y^2$ 的最大值、最小值及相应的 x，y 的值.

13. 设实数 x，y 满足不等式组

$$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 4\\y+2\geqslant |2x-3|\end{cases}$$

(1) 求点 (x, y) 所在的平面区域；

(2) 设 $-1<a<0$，在(1)所求的区域内，求函数 $f(x, y)=y-ax$ 的最大值和最小值.

14. 某工厂生产甲、乙两种产品，已知生产甲产品每单位质量可获利 10 元，生产乙产品每单位质量可获利 12 元. 甲、乙两种产品的生产都必须经过厂里完成不同加工任务的三个车间，每单位质量的产品在每个车间里所需加工的总时数如下表所示. 问应如何安排生产，才能使厂方在本月获得最大的利润?

单位质量的产品所需工时 \ 车间 / 产品	一车间	二车间	三车间
甲种产品	2	3	1
乙种产品	3	2	1
本月可用以加工的总工时(小时)	1 500	1 500	600

15. 为了发展教育事业，某人准备投资 1 200 万元兴办一所完全中学. 为了考虑社会效益和经济效益，对该地区教育市场进行调查后，得出一组数据列表(以班级为单位)如下：

市场调查表

	班级学生数	配备教师数	硬件设施（万元）	教师年薪 万元/人
初中	45	2	26	2
高中	40	3	54	2

根据物价部门的有关文件，初中是义务教育阶段，收费标准应严格控制，预计除书本费、办公费以外，每生每年可收取 1 600 元，高中每生每年可收取 2 700 元．因生源和环境等条件限制，办学规模以 20 至 30 个班为宜，教师实行聘任制．请你合理地安排招生计划，使年收入的学费总额最多．

Ⅳ 自测与评估

1. 选择题：

（1）已知 $a>b$，则下列不等式中不成立的个数是（　　）：

$$a^2>b^2,\quad \frac{1}{a}<\frac{1}{b},\quad \frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}.$$

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）如果 $x>0$，$y>0$，$x+y+xy=2$，则 $x+y$ 的最小值为（　　）．

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）$1+\sqrt{3}$

（C）$2\sqrt{3}-2$　　（D）$2-\sqrt{3}$

（3）如果不等式 $5-x>7|x+1|$ 和不等式 $ax^2+bx-2>0$ 有相同的解集，则实数 a，b 的值为（　　）．

（A）$a=-8$，$b=-10$　　（B）$a=-1$，$b=9$

（C）$a=-4$，$b=-9$　　（D）$a=-1$，$b=2$

（4）设 a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 均为非零实数，又设

不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和不等式 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$

的解集分别为 M 和 N，如果 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，则（　　）．

（A）$M=N$　　（B）$M\supseteq N$

（C）$M\subseteq N$　　（D）以上答案均不正确

（5）函数 $f(x)=\frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是（　　）．

（A）$\frac{4}{5}$　　（B）$\frac{5}{4}$　　（C）$\frac{3}{4}$　　（D）$\frac{4}{3}$

（6）不等式 $x-(m^2-2m+4)y+6>0$ 表示的平面区域是以直线 $x-(m^2-2m+4)y+6=0$ 为界的两个平面区域中的一个，且点 $(1,1)$ 不在这个区域中，则实数 m 的取值范

围是(　　).

(A) $(-1, 3)$　　(B) $(-\infty, -1)\cup(3, +\infty)$

(C) $[-1, 3]$　　(D) $(-\infty, -1]\cup[3, +\infty)$

2. 填空题:

(1) 不等式 $-4<x^2-5x+2<26$ 的解集是______;

(2) 不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $(-\infty, -2)\cup(3, +\infty)$, 则不等式 $cx^2+bx+a>0$ 的解集是______;

(3) 已知 $x>1$, $y>1$, $xy=10$, 则 $\lg x\cdot\lg y$ 的最大值为______;

(4) 已知集合

$$A=\{(x, y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\},$$
$$B=\{(x, y)\mid (y-x)(y+x)\leqslant 0\},$$

设集合 $M=A\cap B$, 则集合 M 所对应的平面区域的面积为______.

3. 求正整数 k 的值, 使对任意实数 x, 代数式 $\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}$ 的值恒大于 k.

4. 已知函数 $f(x)=\log_a x\,(a>0, a\neq 1, x\in\mathbf{R}^+)$, 如果 $x_1, x_2\in\mathbf{R}^+$, 试判断

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\text{与 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

的大小, 并说明理由.

5. 某投资人打算投资甲、乙两个项目. 根据预测, 甲、乙两个项目最大盈利率分别为 100%和 50%, 可能的最大亏损率分别为 30%和 10%. 投资人计划投入的资金额不超过 10 万元. 如果要求确保可能的投入资金的亏损不超过 1.8 万元, 问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元, 才能使可能产生的盈利最大?

附录

部分中英文词汇对照表

正弦定理	law of sines
解三角形	solving triangles
余弦定理	law of cosines
测量	meterage
距离	distance
仰角	elevation angle
数列	sequence of number
等差数列	arithmetic sequence
公差	common difference
等比数列	geometric sequence
公比	common ratio
不等式	inequality
不等式的解	solution inequality
不等式的解集	solution set of inequality
线性规划	linear program
目标函数	objective function
可行解	feasible solution
可行域	feasible region

后记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准(实验)，人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持．在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志．

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授．从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了“课标”中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查．

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文．我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断的完善．现在所取得的成果，是实验研究组全体成员，编者、实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶．

各实验区参加教材审读、研讨及修改的主要成员有：

韩际清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颖、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勤、王宗武、黄武吕．

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒风杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳．

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意．

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的学校领导和师生们．

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力．

我们的联系方式如下：

电话：010-58758523 010-58758532　电子邮件：longzw@pep. com. cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学教材实验研究组