经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修3-1

数学史选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

人民教育出版社

B版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–1

数学史选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　杨　静　陈明晖
责任编辑　　王旭刚
美术编辑　　李宏庆　王　喆
封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书
数　学
选修 3-1
B 版
数学史选讲
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著
*
人民教育出版社　出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销
*
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：5.25　字数：117 000
2007 年 4 月第 2 版　2011 年 6 月第 16 次印刷
ISBN 978-7-107-18808-4
G·11898（课）　定价：5.30 元

本册导引

数学是一门基础学科，我们从小学就开始学习数学. 按理说，我们对这门学科应该感到熟悉而亲切，但是在许多人眼里，数学是那么抽象、深奥，以致显得有些面目呆板，甚至生硬冰冷.

然而数学冰冷的面孔背后，却有着丰富多彩的故事. 本册书就是要带大家进入这个缤纷的世界中，去认识历史上一位位杰出的数学家，感受他们刻苦钻研、不畏艰辛的科学精神；去探究数学概念、理论诞生的源头，追寻它们发展的轨迹；见证学科发展中的重要事件，感悟科学的真谛.

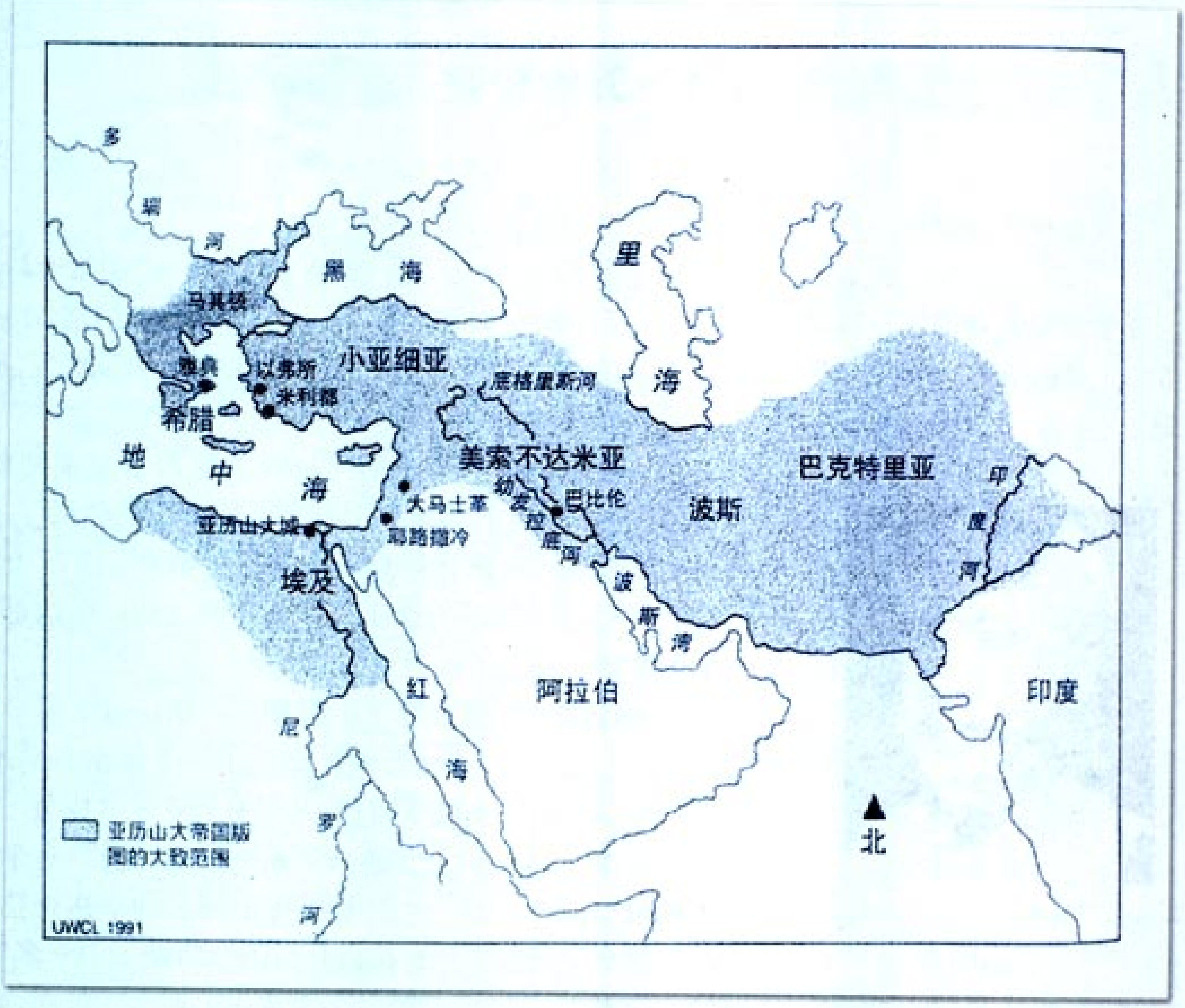
古希腊的欧几里得的《原本》创立了演绎论证的思维模式，其影响远远超出了数学的领域. 中国古代数学具有独特的算法特点，其成就遥遥领先于当时的西方. 求解方程的努力不仅导致了几何作图的突破，而且引发了代数学的解放. 微积分等近现代的产物，其思想竟萌芽于古代. 对游戏问题的研究，促成了人们对随机世界的认识. 刘徽、祖冲之、阿贝尔、伽罗瓦、欧拉、高斯等数学家告诉我们如何学习和做人……

在这里，你们可以从古到今，纵横千年，了解数学辉煌的历史，领略数学用途广泛的巨大威力，体会数学独特的魅力. 希望通过本书的学习，能帮助你们加深对数学思想的理解，体会数学对人类文明发展的重要作用，从而对数学有个更为全面而深刻的认识.

目　录

第一章 灿烂的古希腊数学

古希腊位于欧洲南部，除了现在的希腊半岛以外，还包括整个爱琴海区域、北面的马其顿、意大利半岛和小亚细亚等地．希腊濒临地中海，岛屿星罗棋布，手工业、商业、航海业发达，其文化受到埃及、巴比伦的许多影响．



古希腊时期亚历山大帝国版图的大致范围

希腊的数学内容包括算术（含代数）、几何学和三角学．“算术”、“几何”、“三角学”这些名称均来自希腊．希腊文“算术”的原意是“数(shù)和数数(shǔ shù)的技术（或学问)”．现在算术仍然是研究自然数、分数、小数的四则运算及乘方、开方运算的科目．“几何”一词最早出现在希腊，原意是土地测量即“测地术”，可见几何学直接起源于农业生产的需要．“三角学”一词原意是三角形的测量，也就是解三角形．

希腊人的哲学思想，以严谨的逻辑性著称，他们善于通过精细的思考和严密的推理去认识世界，这一特点在数学研究中尤为突出．古代巴比伦人和古埃及人虽然积累了大量的数学知识，但他们只能回答“应该怎样做”，却无法回答“为什么要这样做”．古希腊人在

探究前人的数学工作时，有意识地解决了“为什么要这样做”的问题，将人类早期的“经验数学”逐步转化为“理论数学”．其中，毕达哥拉斯学派的创立人毕达哥拉斯（Pythagoras，约前 580—约前 500），留下千古名著《原本》❶的欧几里得（Euclid，约前 330—约前 275）和被誉为“数学之神”的阿基米德（Archimedes，前 287—前 212）代表了古希腊数学的最高成就．

注

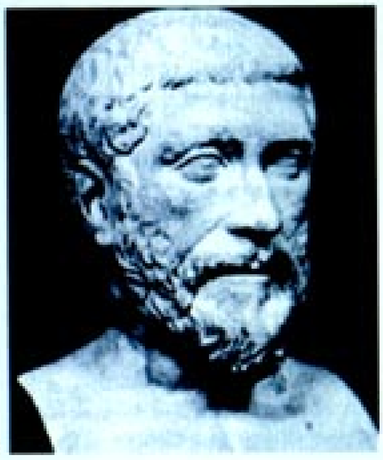
❶ 在我国，《原本》（Elements）常被译为《几何原本》，“几何”二字是 1607 年徐光启、利玛窦的中译本所加．

1.1 万物皆数

数统治着宇宙．

——毕达哥拉斯

希腊数学发展的第一阶段是雅典时期，即从泰勒斯（Thales of Miletus，约前 625—前 547）到柏拉图（Plato，约前 427—前 347）学派为止，约公元前 7 世纪中叶到公元前 3 世纪．



毕达哥拉斯

（Pythagoras，约前 580—约前 500）

这一时期产生了希腊第一位伟大的数学家泰勒斯，他被后人誉为是“科学之父”和“希腊数学的鼻祖”，他利用太阳影子成功地计算出了金字塔的高度，实际上利用的就是相似三角形的性质．继泰勒斯之后，毕达哥拉斯学派对数学作出了最为突出的贡献．

毕达哥拉斯据传曾就学于泰勒斯，他接过学术事业的火炬，在克洛吞（Crotona）组织了一个政治、学术、宗教三位一体的“友谊联盟”，其中有 300 多名成员．联盟里，纪律、服从和先生的决定高于一切，会员对学派中传授的知识要保密．这就是历史上闻名的毕达哥拉斯学派．这个学派在毕达哥拉斯死后继续活跃了 100 多年．他的追随者们一般都不在自己的著作上留名．因而，我们把学派的数学思想和成果归功于毕达哥拉斯信徒的集体．

据说是毕达哥拉斯发现了勾股定理，他为了庆祝这一伟大发现还曾宰牛祭神．毕达哥拉斯发现的这个定理，描述了直角三角形的三边关系：若直角三角形的三边长度分别为 a，b，c，其中 c 为斜边，则

$$a^2+b^2=c^2.$$

事实上，中国大约在西周（前 11 世纪—前 8 世纪）时期就已经知道，用边长为 3，4，5 的三角形去确定直角．埃及人知道用这个原理去构建他们的金字塔．虽然迄今没有直接证据表明毕达哥拉斯证明了勾股定理，但西方人认为首先给出合乎逻辑证明的是毕达哥拉斯．因此，他们把这个定理称为“毕达哥拉斯定理”．它是初等几何中最精彩、最有用的

定理之一. 它的重要意义可以概括为以下几个方面：

(1) 它的证明是论证数学的发端；

(2) 它是历史上第一个把数与形联系起来的定理，即它是第一个把几何与代数联系起来的定理；

(3) 它导致了不可公度量的发现，由此引发了第一次数学危机，大大加深了人们对数的理解；

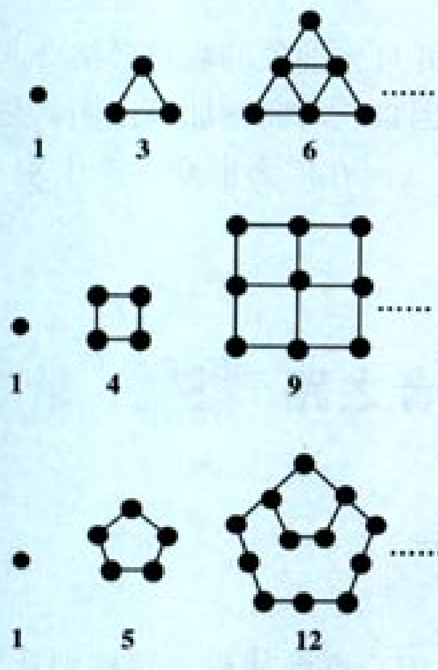
(4) 它是欧氏（欧几里得）几何的基础定理，并有巨大的使用价值.

由于这个定理非常重要，所以研究它的人很多，在整个数学中再找不到一个定理，其证明方法之多能超过毕达哥拉斯定理. 1940 年，卢米斯（E. S. Loomic）在他的著作《毕达哥拉斯定理》中收集了这个著名定理的 370 种证明方法，并进行了分类［见本章“阅读与欣赏 1”］.

毕达哥拉斯学派非常注意数与图形的关系，认为数的多寡及形状决定着一切自然物体. 他们研究的“形数”包括三角形数、正方形数、五边形数等等，这些数被看作是某些几何图形中点的数目，如图 1-1 所示.

这是一些等差序列. 用同样的方式可以定义所有的多边形数. 毕达哥拉斯学派关于“形数”的研究，充分体现出数与形的结合，强烈地反映出他们将数作为几何思维元素的精神，并且由于数形结合的观点而推动了几何学的抽象化倾向.

“万物皆数”的信念使毕达哥拉斯学派相信，“数”是宇宙的来源，自然现象可以通过数学来理解. 他们对数进行深入的研究，认为数是音乐和谐的基础，阐明了单弦的调和乐音与弦长的关系，成为音乐理论的始祖.



三角形数为 1，1+2，1+2+3，…，

或由序列 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 表示的数.

正方形数为 1，1+3，1+3+5，…，

或由序列 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 表示的数.

五边形数为 1，1+4，1+4+7，…，

或由序列 $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ 表示的数.

图 1-1

毕达哥拉斯学派所说的数仅指整数，分数是被看成两个整数之比的关系. 起初，毕达哥拉斯学派相信任何量都可以表示成两个整数之比（即某个有理量）. 然而，毕达哥拉斯

学派后来却发现：不是任意两条线段都是“可公度量”[1]的，例如正方形的对角线和一边就构成不可公度量. 不可公度量［见本章“阅读与欣赏 2”］的发现动摇了毕达哥拉斯学派的数学理论基础，给他们招来了重大危机（即数学史上所谓的第一次数学危机）. 据说，学派成员希帕苏斯（Hippasus，公元前 470 左右）首先发现了不可公度量，当时正在海上集会的其他成员听到这个发现后惊恐不已，随即将他抛入了大海.（还有传说是希帕苏斯泄露了不可公度量的秘密而遭此厄运.）

注

[1] 可公度量：对于任何两条给定的线段，总能找到第三条线段，以它为单位线段能将给定的两条线段划分为整数段，则这样两条给定线段为“可公度量”，即有公共的度量单位.

不可公度量的发现对古希腊的数学观点有极大的冲击. 这表明，几何学的某些真理与算术无关，几何量不能完全由整数及其比表示，反之数却可以由几何量来表示. 毕达哥拉斯学派所推崇的“万物皆数”此时遇到了前所未有的困难，整数的尊崇地位受到挑战，于是几何学开始在希腊数学中占有特殊地位. 同时这也反映出，直觉和经验不一定靠得住，而推理证明才是可靠的. 从此希腊人开始由“自明的”公理出发，经过演绎推理，建立起几何学体系. 这可以说是第一次数学危机的自然产物，同时更是数学思想上的一次巨大革命.

第一次数学危机并没有很快地轻易解决. 最后约在公元前 370 年，才由柏拉图的学生欧多克斯（Eudoxus，约前 408—前 355）给出了解答. 他用公理化方法创立了新的比例理论，巧妙地处理了可公度和不可公度. 这个问题到 19 世纪由德国数学家戴德金（R. Dedekind，1831—1916）及康托尔（G. Cantor，1845—1918）等人建立了现代实数理论后才算彻底解决.

毕达哥拉斯学派从具体事物中抽象出数的概念，并且将抽象的数与形结合起来，使数学逐渐成为一门独立的学科. 他们在数学中引入逻辑因素，对命题加以证明，是欧几里得公理化体系的先驱. 虽然，他们的成果由于保密没有立刻在广大群众中产生应有的影响，但他们的历史功绩是永远不可磨灭的.

1.2 几何学无王者之路

托勒密国王问欧几里得有无学习几何的捷径？

欧几里得回答说：“几何学无王者之路.”

雅典文化的鼎盛时期延续了半个多世纪后，文化中心逐渐从雅典转移到亚历山大城，希腊几何学的黄金时代开始了. 到了欧几里得时代，几何脱离哲学而独立成为真正的演绎科学. 公理化方法在几何学中取得相当了不起的成就，代数也取得一些成就，希腊数学至此达到全盛时期. 欧几里得的著作《原本》，是世界数学史上最伟大的著作之一. 时至今日，我们在初中阶段学习的平面几何知识大部分来源于这本两千多年前的著作.

数学界的一代宗师

欧几里得生于雅典．在雅典的柏拉图学院受过教育，毕业后应统治埃及的托勒密（Ptolemy，约前 367—前 283）国王邀请客居亚历山大，从事教学工作．他是亚历山大前期（从欧几里得起到公元前 146 年）第一位大数学家、教育家．欧几里得学习勤奋、治学严谨，鄙视在学习上不肯刻苦钻研、急功近利、投机取巧的人．有一个著名的传说直到今天还很流行，说是有一个青年去拜他为师，问他研究几何学究竟可以得到什么利益．欧几里得听了转身就对奴婢说："给这个人三个银币让他走，他想靠几何学发财呢．"

欧几里得

（Euclid，约前 330—前 275）

欧几里得从以前一些希腊大几何学家——泰勒斯、毕达哥拉斯等那里得到了丰富的几何学材料．但对欧几里得来说，要使几何学成为一个经得起严格推敲的综合体系，就要给几何学以稳固的逻辑基础．这个任务就当时来说他是尽善尽美地完成了．他所编写的《原本》成了经典的教科书，两千年来青年人和成年人都依靠它来学习几何学．可是不要以为欧几里得只是把传到他手里的几何学材料编辑一下就是了．他在总结前人工作的同时，作了许多修订和补充，并创造性地进行释疑和论证，使之条理化和系统化．

千古佳作——《原本》

欧几里得的《原本》

古希腊人重视数学命题的逻辑证明，力求把数学知识建立在公理基础之上，追求严密的公理化体系成为希腊数学的一种风尚和传统．《原本》便是这种传统的杰出代表．

《原本》首先列出 23 条定义，如"点是没有部分的"；"线只有长度没有宽度"等；然后是 5 条公设和 5 条公理，其中 5 条公设为：

Ⅰ．由任意一点到任意一点可作直线．

Ⅱ．一条有限直线可以继续延长．

Ⅲ．以任意点为心及任意的距离可以画圆．

Ⅳ．凡直角都相等．

Ⅴ．同平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角的和小于二直角，则这两直线经无限延长后在这一侧相交．

如图 1-2 所示，第五公设是说，如果 $\alpha+\beta$ 小于两直角，则直线 AB 与直线 CD 将会在右边相交．

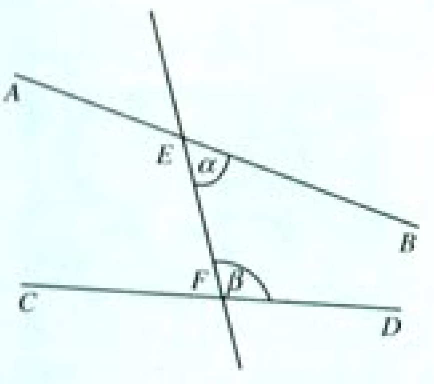


图 1-2

《原本》在定义、公设、公理的基础上，演绎地证明了 465 条定理，内容包括直线与圆的性质、比例论、相似形、数论、不可公度量的分类、立体几何，及穷竭法等 13 卷.

《原本》是最早一本内容丰富的数学书，为所有的后代人使用，它的内容决定了其后数学思想的发展. 首先，这本书的叙述方式是史无前例的. 它先摆出定义、公设、公理，然后有条不紊地、由简单到复杂地证明一系列定理. 这种方式一直沿用到现代，大大推进了数学的发展. 其次，欧几里得在证明图形存在之后才把它作为逻辑对象处理. 最后，欧几里得对公理的选择非常出色，他能用一小批公理证出几百个定理.

正如斯威克（J. Swick）所说："《原本》对于职业数学家常常有着一种不可逃避的迷惑力，而它的逻辑结构大概比世界上任何其他著作更大地影响了科学思想.""《原本》仅次于《圣经》，大约成为西方世界历史中翻版和研究最广的书." 正是这本著作为后来千百年确立了直到今天还认为是几何学原理的东西，划定了初等几何学的范围.

《原本》是数学史上第一座理论丰碑. 读过这本书后，对数学本身、证明、定理按逻辑顺序的排法都会有新的认识. 它最大的功绩是在数学中确立了演绎范式，这种范式要求一门学科中的每个命题必须是在它之前已建立的一些命题的逻辑结论，而所有这样推理的出发点是一些基本定义和被认为是不证自明的基本原理——公设或公理. 这就是后来所谓的公理化思想.

《原本》为人们提供了使知识条理化和严密化的强有力的手段，同时也成为人们训练逻辑推理最有力的教育手段.

直到 18 世纪末，几何领域仍是欧几里得一统天下. 许多数学家都相信欧几里得几何是绝对真理，牛顿（I. Newton，1642—1727）的老师巴罗（I. Barrow，1630—1677）就曾列举 8 点理由来肯定欧氏几何，说它概念清晰；定义明确；公理直观可靠而且普遍成立；公设清楚可信且易于想象；公理数目少；引出量的方式易于接受；证明顺序自然；避免未知事物.

然而，这个近乎科学"圣经"的欧氏几何并非无懈可击，罗素（B. Russell，1872—1970）曾这样批评道："他的定义并不总是下了定义的. 他的公理并不总是不可证明的，他的证明需要许多他还没有意识到的公理."虽然如此，《原本》仍不失为传世巨著，是数学史上的一块瑰宝.

1.3 我将撬动地球

“给我一个支点，我将撬动地球.”

——阿基米德

运用杠杆原理撬动地球

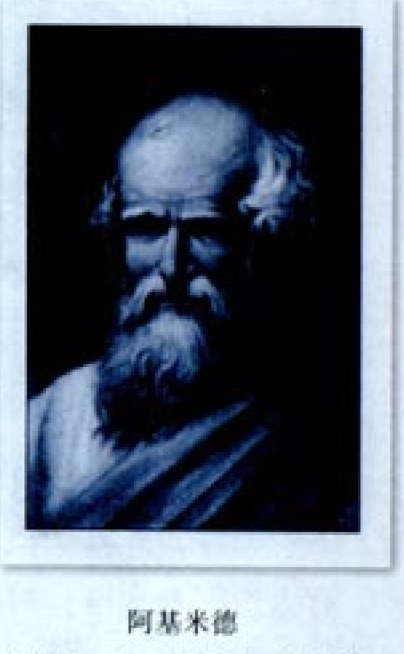
阿基米德与欧几里得同是亚历山大时期的伟大数学家，他代表了亚历山大时期的最高数学成就，他的许多创造在今天仍然具有重要的科学价值；他怀着把科学的理论研究和实际应用结合起来的思想，创造了许多机器，这些机器在他的祖国叙拉古的守卫战中起了很大的作用. 阿基米德的墓碑上刻有他最引以自豪的数学发现的象征图形——球及其外切圆柱❶.

阿基米德生于叙拉古城（今意大利西西里岛）. 父亲是天文数学家，阿基米德从小就受到良好的家庭教育，他 11 岁时到了“智慧之都”——亚力山大城，在那里追随欧几里得的门生学习. 阿基米德才智高超，回到叙拉古以后，就专心于数学研究. 这些研究使他在力学（静力学、液体力学）和技术方面也有了一些发现.

阿基米德的数学著作的最大特点是：用严格的数学方法对力学和物理学问题进行详尽的研究. 这是数学阐述的典范，在一定程度上类似于现代数学杂志的论文，写得完整、简练，显示出巨大的创造性、计算技能和证明的严谨性.

阿基米德第一个提出了圆周长、圆面积和扇形面积的准确公式，并且提出了这些公式中的一个常数 π 的近似值. 他在这些计算中已经利用了穷竭法——圆可以被它的内接多边形所“穷竭”，即二者的面积之差可小于任意给定的量.

他不仅要求出圆周对直径的比的近似值，而且还要确定这样所造成的误差的极限. 为此他写了一本篇幅不长但是非常重要的著作《圆的量度》. 圆的周长介于边数相同的内接多角形和外切多角形的周长之间. 把这个内接多角形和外切多角形的边数一次又一次地倍加上去就能无限制地接近于圆周的长度. 阿基米德从正三角形开始，巧妙地算到了正 96 角形，得到所谓阿基米德值 $\pi=\frac{22}{7}$，用小数来表示就得到准确度达 0.01 的近似值（3.14）.



阿基米德

（Archimedes，前 287—前 212）

注

❶ 以此纪念阿基米德发现球的体积和表面积均为其外切圆柱体积和表面积的三分之二.

现在，我们很多时候是用阿基米德值来计算圆周长、圆面积和球体积．由此可见这个伟大发现的重要意义．阿基米德所用的方法是以穷竭法的最简单形式提出来的，我们有充分的理由把这种方法认作是积分计算的先驱．穷竭法是极限理论的最初形式，阿基米德把它作为一种工具，算出了各种曲线围成的面积和各种曲面围成的体积，并且得出的结果与初等微积分课本中用定积分计算的结果相符．

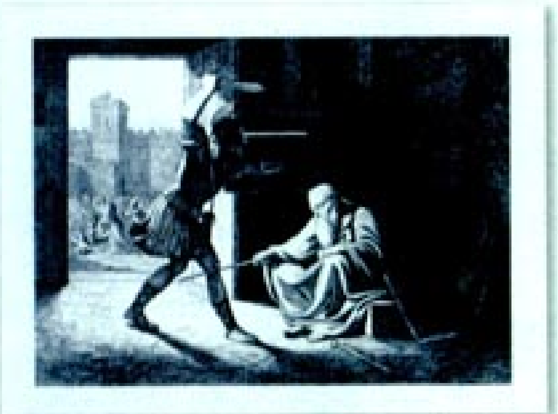
阿基米德在《圆的量度》中奠定了积分计算的基础，而在《论螺线》这篇著作中引入了数学史上第一个足够微小的三角形，它在本质上扮演着17世纪提出的微分三角形的角色，成为把握微分概念和方法的关键．如果说莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716）和牛顿是现代微积分之“父”的话，那阿基米德就要算是它的“老祖宗”了．

阿基米德除了是伟大的数学家，还是杰出的力学家与军事家．他使用天平，用实验的方法研究机械学，首次使用了“重心”概念，他一生发明的实用机械共有40多种，被誉为“力学之父”，著名的“阿基米德原理”和“阿基米德螺线 $\rho=a\theta$”等仍收入现行中学物理和数学课本中．

我们学习过的浮力定律据说是在这样的情况下发现的：

希伦王怀疑王冠被首饰匠偷掺了银子，便求教于他．阿基米德思索了很久都没有结果．一天，他在迈入浴盆的一刹那，发现浴盆里的水溢了出来，于是悟出了浮力定律，他高兴得忘记穿衣就跑到街上，并一面大喊：“我知道了！我知道了！”阿基米德全神贯注的研究精神值得我们学习．

古代的历史学家把阿基米德描写成一位天才的军事工程师．据说，在保卫叙拉古反击罗马的围攻中，他运用自己提出的杠杆原理，第一个使用滑轮组，配合其他简单机械，设计了灵巧的机械装置．他发明了可调整射程且带活动射杆的射石机；可把敌舰从水中吊起的简易吊车；还制造了点火玻璃和反射镜，使敌舰着火．正是阿基米德的聪明才智击溃了强大的罗马军队的一次次进攻，使叙拉古城在两年内未被攻陷．



阿基米德之死

然而，一天晚上，罗马人趁叙拉古人庆祝节日时偷袭成功，当时阿基米德正凝视着一幅几何图．他是那么专心，连罗马人占领了城市都不知道．忽然在他面前出现了一个士兵，要他去见将军，但是阿基米德想要把问题证明了再去．于是士兵大怒，拔出剑来刺死了他．有些人说，当那个罗马士兵拿着出鞘的剑走过去杀他的时候，阿基米德恳求他留一点时间给他，免得给世上留下一道尚未证完的问题，但士兵不理会，一剑刺死了他．还有第三种传说，罗马士兵闯入阿基米德家，把画在沙盘上的几何图踩坏，他怒斥士兵：“不要弄坏我的图！”士兵拔出短剑，杀死了这位旷世绝伦的数学家、力学家和机械师．不管怎样，阿基米德和他的创作永远受到世人的无比尊敬．

有人说阿基米德具有极高的天分，另有人说是由于辛勤的劳动，他才得以把自己的发现清楚地表达出来，使每个人不费力气就很容易弄懂．他常常被人逼着才去洗澡，擦香

膏，可是就在这时候他还要在地上画几何图形，用手指在涂抹了香膏的身体上画几何线. 后人给阿基米德以极高的评价，将其与牛顿和高斯并称为历史上最伟大的三位数学家. 无怪乎人们称他是“数学之神”，这充分反映出后人对他的崇敬.

现在看来，古希腊数学家使数学成为一门抽象科学；建立了演绎证明；创立了几何学、三角学，奠定了数论基础等；萌芽了一些高等数学思想，如极限等. 当然，古希腊数学由于历史局限也存在不足，如重几何轻代数，认为几何方法是数学证明的唯一方法；畏于无理数的存在，不将算术应用于几何；等等.

习题

1. 试用不同于“阅读与欣赏”中的方法证明毕达哥拉斯定理.
2. 试述欧几里得《原本》的重要贡献.

数　学　文　化

阅读与欣赏

1. 毕达哥拉斯定理证明方法之一

证明：如图 1-3，设直角三角形的两直角边和斜边分别为 a，b，c，以此直角三角形为基础作出两个边长为$(a+b)$的正方形.

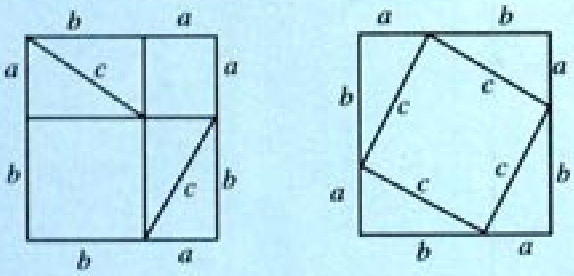


图 1-3

由于这两个正方形内各含有四个与原直角三角形全等的三角形，除去这些三角形后（见图 1-4），两图形剩余部分面积仍相等，第一个图形剩余面积为 a^2+b^2，第二个图形剩余面积为 c^2，所以 $a^2+b^2=c^2$，定理得证.

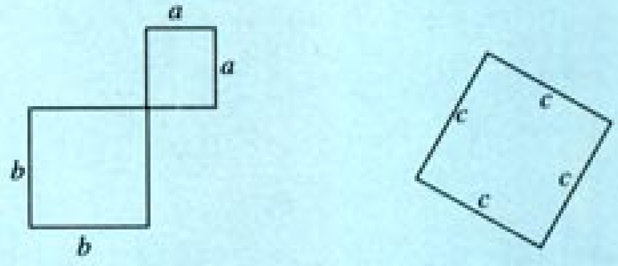


图 1-4

2. 证明正方形的对角线与其一边构成不可公度量

证明：如图 1-5，假设正方形的对角线与其一边构成可公度量，则二者之比为

$\alpha:\beta$（α，β 互素）.

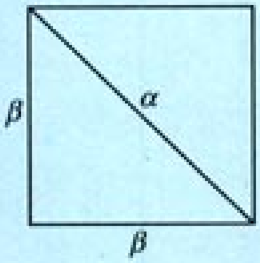


图 1-5

根据勾股定理，有 $\alpha^2=2\beta^2$.

这里 α^2 为偶数，则 α 也必为偶数，设 $\alpha=2\rho$，于是 $\alpha^2=4\rho^2=2\beta^2$，即 $\beta^2=2\rho^2$，β^2 为偶数，则 β 也必为偶数.

这与 α，β 互素的假设相矛盾，因此正方形的对角线与其一边不可公度.

这一证明与我们今天证明$\sqrt{2}$为无理数的方法相同.

第二章 中国古代数学瑰宝

从上一章我们知道，古希腊数学是以演绎为主的数学体系．与此相比，我国古代数学则表现出强烈的算法精神．所谓“算法”，不只是单纯的计算，而是为了解决一整类实际或科学问题而概括出来的、带一般性的计算方法．它是归纳思维的产物．这种能力与欧几里得的演绎风格迥然不同而又相辅相成．

从公元前后至公元 14 世纪，我国数学取得了辉煌的成就．数学家在解决实际问题中创造了大量结构复杂的算法，形成了独具特色的东方数学，是近代数学诞生的另一源泉．

2.1 古算明珠——“方程术”与“正负术”

虽天圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉！

——刘徽

我们先来看一道应用题：有上、中、下三等稻禾，各捆成束．上等稻禾 3 束、中等稻禾 2 束、下等稻禾 1 束，共收得稻谷 39 斗；上等稻禾 2 束、中等稻禾 3 束、下等稻禾 1 束，共收得稻谷 34 斗；上等稻禾 1 束、中等稻禾 2 束、下等稻禾 3 束，共收得稻谷 26 斗．问一束上等、中等、下等稻谷各能打谷多少斗？

设上、中、下等稻禾各一束打出的粮食分别为 x，y，z 斗，则问题就相当于解一个三元一次联立方程组：

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

此题来自我国古代最重要的数学经典《九章算术》（约公元前 2 世纪）第 8 卷的“方程术”．书中没有表示未知数的符号，而是把 x，y，z 的系数和常数项用算筹❶排列成一个方阵（这里，我们用现代语言表示）：

$$\begin{array}{l l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{上等稻禾束数} \\ \text{中等稻禾束数} \\ \text{下等稻禾束数} \\ \text{稻谷斗数} \end{array} \end{array}$$

注

❶ 算筹是中国古代的一种计算工具，一般用竹子制成．一根算筹比一枝普通铅笔稍短稍细．

《九章算术》解线性方程组采用了“遍乘直除”法：用右列上等稻禾的系数“遍乘”中列和左列各数，即用右列上等稻禾系数分别乘以中列、左列中的各数；然后所得结果按

列分别“直除”右列，即连续减去右列对应各数，也就是将中列与左列 x 的系数化为 0. 反复执行这种“遍乘直除”算法，就可以解出方程. 这相当于以下的一系列推导：

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 26 & 34 & 39\end{bmatrix}\\ (3)\ (2)\ (1)\end{array}\xrightarrow[(3)\times 3=(5)]{(2)\times 3=(4)}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}3 & 6 & 3\\ 6 & 9 & 2\\ 9 & 3 & 1\\ 78 & 102 & 39\end{bmatrix}\\ (5)\ (4)\ (1)\end{array}\xrightarrow[(5)-(1)=(7)]{(4)-(1)\times 2=(6)}$$

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 2\\ 8 & 1 & 1\\ 39 & 24 & 39\end{bmatrix}\\ (7)\ (6)\ (1)\end{array}\xrightarrow{(7)\times 5=(8)}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 20 & 5 & 2\\ 40 & 1 & 1\\ 195 & 24 & 39\end{bmatrix}\\ (8)\ (6)\ (1)\end{array}\xrightarrow{(8)-(6)\times 4=(9)}$$

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 2\\ 36 & 1 & 1\\ 99 & 24 & 39\end{bmatrix}\\ (9)\ (6)\ (1)\end{array}\xrightarrow{(6)\times 36-(9)=(10)}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 180 & 2\\ 36 & 0 & 1\\ 99 & 765 & 39\end{bmatrix}\\ (9)\ (10)\ (1)\end{array}\xrightarrow{(1)\times 36-(9)=(11)}$$

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 0 & 108\\ 0 & 180 & 72\\ 36 & 0 & 0\\ 99 & 765 & 1\,305\end{bmatrix}\\ (9)\ (10)\ (11)\end{array}\xrightarrow{(11)\times 5-(10)\times 2=(12)}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 0 & 540\\ 0 & 180 & 0\\ 36 & 0 & 0\\ 99 & 765 & 4\,995\end{bmatrix}\\ (9)\ (10)\ (12)\end{array}$$

从最后一个方程解出上等稻禾 $x=\frac{4\,995}{540}=9\frac{1}{4}$，中等稻禾 $y=\frac{765}{180}=4\frac{1}{4}$，下等稻禾 $z=\frac{99}{36}=2\frac{3}{4}$. 《九章算术》方程术的“遍乘直除”算法，实质上就是我们今天所使用的解联立线性方程组的消元法，西方文献中称之为“高斯消去法”，相当于利用线性方程组的系数增广矩阵进行初等变换来求解，只要把上面的矩阵进行一次转置就得到现在常用的行变换. 这是《九章算术》的一项了不起的成就，西方采用线性方程组的系数增广矩阵变换已是近代的事，比《九章算术》要晚近 2 000 年. 《九章算术》方程术，是世界数学史上的一颗明珠.

“方程术”也具有前面指出的算法性质，利用它可解决一类问题. 你也许奇怪，算法具有解决一类问题的一般性，这里却就题论题，只引入了第一题的数据，怎么能是算法呢？这是为了避免凭空陈述的困难，正如《九章算术》的主要注释者刘徽（生平不详，于公元 263 年撰《九章算术注》）所说，“以空言难晓，故特系之禾以决之”，并不是此术只适用于此题，后面同类型的题皆用了这个“术”.

在我国历史上曾有过用解线性方程组来考核、提升官吏的事情. 公元 855 年左右，唐代青州尚书杨损要从两个条件几乎一样的小吏中提升一人. 杨损认为，将要提升的官吏还

得具备数学能力，于是当众出了一道题，大意是：有一人傍晚在林中无意中听到几个盗贼在商量如何分配偷来的布匹．他们说：若每人分 6 匹，就会余 5 匹；若每人分 7 匹，就会少 8 匹．试问，这里共有几个盗贼？布匹总数又是多少？先得到正确答案的那个人得到了提升．

《九章算术》是我国古代数学著作中流传至今的最早著作．根据现在的考证，它的成书年代最迟在公元前 1 世纪，而且，从先秦至西汉中叶的长时期里众多学者编纂、修改了这一数学著作．它采用问题集的形式：先提出有具体数值的问题，然后给出具体的数值解答，再给出解决这一类问题的普遍方法，即“术”．因此，《九章算术》是由个别到一般的归纳体系．全书 246 个问题，大体按数学性质分为九个大类，组成九章，每章为一卷．各章的名称和基本内容为：方田：主要讲平面形面积的计算和分数算法；粟米：各种比例问题；衰分：比例分配；少广：开方问题；商功：立体体积的计算问题；均输：根据均输法纳税和输送等方面的计算问题；盈不足：算术中盈亏问题的解法和比例问题；方程：多元一次方程组应用问题的解法；勾股：勾股定理的应用．这些问题几乎都来自当时社会生产、生活的实践，与实际应用有着密切而直接的联系．《九章算术》奠定了中国古代数学思想、方法的基础，是中国古代数学文献的典范，在它之后的许多古代数学著作在体例上都与其相似．另外，它早已流传到许多国家，现在已有日、英、俄、德等各种文字的译本．

《九章算术》

单位正方形的对角线的长度不是有理数，这一发现曾引起古希腊毕达哥拉斯学派的恐慌，甚至导致了第一次数学危机的发生．与此相比，中国古代数学家却是相对自然地接受了那些“开不尽”的无理数．中国古代数学家是在开方运算中接触到无理数的．《九章算术》开方术中就指出了存在有开不尽的情形：“若开之不尽者，为不可开”，并给这种不尽根数起了一个专门名词——“面”．“面”，就是无理数．这种坦然的态度也许归功于他们早就习惯使用的十进位值制记数制，这种十进位值制使他们能够有效地计算“不尽根数”的近似值．刘徽就在“开方术”注中明确提出了用十进制小数任意逼近不尽根数的方法，他称之为“求徽数法”，并指出在开方过程中，“其一退以十为母，其再退以百为母，退之弥下，其分弥细，则……虽有所弃之数，不足言之也”．

另外，在《九章算术》的“遍乘直除”法中，当方程系数相减时会出现较小数减较大数的情况，正是在这里，《九章算术》的作者们引进了负数，并给出了正、负数的加减运算法则，即“正负术”．用现代符号表述，设 $a>b>0$，则“正负术”相当于：

$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b)$，$(\pm b)+(\mp a)=\mp(a-b)$；

$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b)$；

$0+a=a$；

$0+(-a)=-a$；

$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b)$，$(\pm b)-(\pm a)=\mp(a-b)$；

$(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b)$；

$0-a=-a$；

$0-(-a)=+a$.

对负数的认识是人类数系扩充的重大步骤. 公元7世纪印度数学家也开始使用负数，但负数的认识在欧洲却进展缓慢，甚至到16世纪数学著作中还尽量回避使用负数.

与《原本》相对比，《九章算术》具有不同的特点：第一，内容密切联系实际，全书246个问题几乎都来自社会生产、生活实际；第二，具有归纳性的推导方式，多是先举出某一社会生活领域中的具体问题，由此归纳出某一类问题的一般解法；第三，以算法为主要内容，书中经常出现的“术”，就是一类问题的共同解法，以后可以用来解决其他同类问题. 这种重应用、重计算的思想是推动数学发展的动力之一，因而在数学的发展中具有普遍的意义. 可见，《九章算术》与《原本》的思想方法各有自己的特色，二者相辅相成，成为现代数学思想方法的两大源泉. 这两部数学书的不同特点在东、西方有深刻的影响，形成东、西方数学的不同风格.

2.2 “韩信点兵”与中国剩余定理

（数之为用）大则可以通神明、顺性命，小则可以经世物、类万物，讵容以浅近窥哉？

——秦九韶

传说，韩信（？—前196）为了保守军事机密，在清点部下人数时，先让他们7人一列，最后剩3人；再按143人一列，剩105人；又按312人一列，剩27人；后按715人一列，剩248人. 经过稍加思索，韩信便知有35 283个兵士.

其实这只是古算书《孙子算经》（约公元4世纪）中最著称于世的“物不知数”问题的翻版. 我们来看看原题：“今有物不知其数，三三数之剩二；五五数之剩三；七七数之剩二. 问物几何？”设N为所求的数，即为$N\equiv2 \pmod 3$，$N\equiv3 \pmod 5$，$N\equiv2 \pmod 7$. 书中给出了答案23及解法. 其实，“23”只是无穷多个答案中的最小数. 用现在的话说，书中的解法是：一个数用3除，除得的余数乘70；用5除，除得的余数乘21；用7除，除得的余数乘15. 再求出这三个乘积的和，如果所得和数小于105，即为所求的答数；否则必须减去105的倍数，得到小于105的得数才是答案. 用数学符号表示，即$N=70\times2+21\times3+15\times2-105\times2=23$. 《孙子算经》还说明，对任意余数$R_1$，$R_2$，$R_3$，只要将算式中的2，3，2换成$R_1$，$R_2$，$R_3$，并调整105的系数就行了. 对任意余数$R_1$，$R_2$，$R_3$，其解答为：$N=70R_1+21R_2+15R_3-105P$（$P$为正整数）.

因此，凡是除数为3，5，7的同类问题，只要记住70，21，15，105这几个关键数字，都可依照上面的方法求出答案. 文人墨客便把解法编成歌谣，其中暗藏计算时所用的

数字：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，

七子团圆正半月，除百零五便得知.

这是今天关于一次同余组一般解法的剩余定理的特殊形式. 孙子问题引导了宋代数学家秦九韶（约 1202—1261）求解一次同余组的一般算法——"大衍求一术". 秦九韶在《数书九章》第一卷"大衍总数术"中明确、系统地叙述了求解一次同余方程组的一般方法. 我们用现代语言叙述如下：

秦九韶的《数书九章》

设有一次同余组 $N\equiv R_i(\bmod a_i)$，$i=1，2，\cdots，n$. 假如诸模数 a_i 两两互素，那么只要求出一组数 k_i，满足 $k_i\dfrac{M}{a_i}\equiv 1(\bmod a_i)$，$i=1，2，\cdots，n$，$M=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$，就可以得到适合已给一次同余组的最小正整数解为

$$N=\left(\sum_{i=1}^{n}R_ik_i\frac{M}{a_i}\right)-pM,$$

其中 p 为整数.

"大衍总数术"中的关键部分，就是关于数组 k_i（$i=1，2，\cdots，n$）的计算方法. 秦九韶称这些数 k_i 为"乘率"，并把自己发现的求乘率的方法称为"大衍求一术". 以任一乘率 k_i 为例. 令 $G_i=\dfrac{M}{a_i}$，若 $G_i>a_i$，秦九韶首先用 a_i 除 G_i，求得余数 $g_i<a_i$，那么 $G_i\equiv g_i(\bmod a_i)$. 于是

$$k_iG_i\equiv k_ig_i(\bmod a_i).$$

但因为 $k_iG_i\equiv 1(\bmod a_i)$，所以问题归结为求 k_i，使适合 $k_ig_i\equiv 1(\bmod a_i)$. 秦九韶把 a_i 叫"定数"，g_i 叫"奇数"，他的"大衍求一术"，实际上相当于把奇数 g_i 与定数 a_i 辗转相除，相继得商数 q_1，q_2，…，q_n 和余数 r_1，r_2，…，r_n，在辗转相除时随即按下表公式算出 c 值：

	商数	余数	c 值
a_i/g_i	q_1	r_1	$c_1=q_1$
g_i/r_1	q_2	r_2	$c_2=q_2c_1+1$
r_1/r_2	q_3	r_3	$c_3=q_3c_2+c_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_{n-2}/r_{n-1}	q_n	r_n	$c_n=q_nc_{n-1}+c_{n-2}$

秦九韶指出，当 $r_n=1$ 而 n 是偶数时，最后得到的 c_n 就是所求乘率 k_i；如果 $r_n=1$ 而 n 是奇数，则将 r_{n-1} 与 r_n 相除，形式上令 $q_{n+1}=r_{n-1}-1$，那么余数 r_{n+1} 仍是 1，再作 $c_{n+1}=q_{n+1}c_n+c_{n-1}$，这时 $n+1$ 为偶数，c_{n+1} 就是所求的 k_i.

不论哪种情形，最后一步都出现余数1，整个计算到此终止，秦九韶因此把他的方法叫做“求一术”．至于“大衍”的意义，秦九韶在《数书九章》序中把它和《周易》“大衍之数”相附会．

秦九韶的“大衍求一术”简洁、明确，带有很强的机械性，其程序可毫无困难地转化为算法语言，用计算机来实现．在《数书九章》中，秦九韶广泛应用“大衍求一术”解决了历法、工程、赋役和军旅等方面的实际问题．另外，由于在许多问题中模数并非两两互素，于是秦九韶又设计了将模数化为两两互素的计算程序．在西方，欧拉（L. Euler，1707—1783）、高斯分别于1743年、1801年才对一次同余组进行深入研究，重新获得了与“大衍求一术”相同的定理，并对模数两两互素的情形给出了严格证明．从1856年到1876年，德国人马蒂升（L. Matthiessen，1830—1906）等西方学者多次指出“大衍求一术”原理与高斯方法的一致性，从而引起了欧洲学者的瞩目．因此，关于一次同余组求解的剩余定理常常被称为“中国剩余定理”．德国数学史家康托尔（M. B. Cantor，1829—1920）高度评价了“大衍求一术”，他称赞发现这一算法的中国数学家是“最幸运的天才”．

然而，这位幸运的天才却处在不幸的时代．他生活在南宋兵荒马乱的年代．秦九韶自幼勤奋好学，苦心钻研，博学多才，“星象、音律、算术以至营建等事，无不精究．”至于骈俪诗词，“游戏、毬、马、弓、剑，莫不能知．”他在战乱时期依然能潜心钻研数学，并于1244～1247年居母丧期间，总结长期研究所积累的数学知识和创造性成果，写出18卷20多万字的巨著《数书九章》．此书内容丰富，立论新颖，构思风趣，无论就其创造发明，还是就其改进、发展前人数学遗产，都不失为我国数学宝库中的一块灿烂瑰宝．除数学成就外，他还记载了数学和天文历法乃至雨雪量等方面的珍贵资料，以及南宋时期户口增长、耕地扩展、赋税、利贷、度量衡以及货币流通、海外贸易等社会经济领域的情况．

秦九韶的业绩不仅属于中国而且属于全世界．美国数学史家萨顿（G. Sarton，1884—1956）说，秦九韶是“他那个民族，他那个时代，并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一．”

2.3　古代数学精英

科学上没有平坦的大道，真理长河中有无数的礁石险滩．只有不畏攀登的采药者，只有不怕巨浪的弄潮儿，才能登上高峰采得仙草，深入水底觅得骊珠．

——华罗庚

在我国古代数学史上涌现出了一批杰出的数学家，他们从解决实际问题出发，阐明了许多深奥的数学思想，创造了众多简洁有效的算法．直至今日，那些闪耀着他们智慧之光的思想方法，体现他们人格魅力的精神品质，仍能给我们以启迪．

刘徽，魏末晋初时人，是我国古代伟大的数学家．公元263年，他完成了对《九章算术》的详细注解、整理的工作，从此这本书才有了定本．刘徽通过对《九章算术》作注来

表述自己在数学上的研究成果，继承和发扬了前人的思想方法．他的注及原书，成为中国古代数学的基石，对后世产生了巨大的影响．

刘徽
（魏末晋初）

前面说过，阿基米德用圆内接正多边形的周长去接近圆的周长来计算圆周率［见 1.3 节］．刘徽也对圆周率进行了推导，但方法是用圆内接正多边形的面积去逼近圆的面积．他从圆内接正六边形算起，令边数一倍一倍地增加，即 12，24，48，96，…，1 536……逐个算出正六边形，正十二边形，正二十四边形……的面积，这些数值逐步地逼近圆面积．刘徽方法的特点是，得出一批一个大于一个的数值，这样来一步一步地逼近圆周率．这方法是可以无限精密地逼近圆周率的，但每一项都比圆周率小．用他自己的话是：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．”他称这个方法为“割圆术”．刘徽算到了正 192 边形，这时候 π 的近似值是 3.141 024．

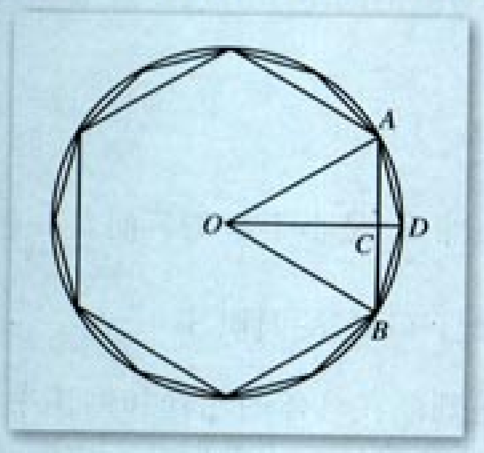


图 2-1

下面，我们用现代数学语言来解释一下“割圆术”：有一个半径为 1 的圆 O，作一内接正六边形（如图 2-1）．正六边形的面积是$\triangle ABO$的面积的六倍．因为 $AB=OA=1$，$OC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以正六边形的面积是

$$6\times\frac{1}{2}\times AB\times OC=6\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

再作内接正十二边形，于是四边形 $ADBO$ 的面积是

$$\frac{1}{2}\times OD\times AB=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}.$$

所以正十二边形的面积是 $6\times\frac{1}{2}=3$．同样可以算出正二十四边形，正四十八边形……的面积．

圆的面积是未知的、要求的；但是正多边形的面积是已知的、可求的．刘徽把圆看作边数无穷的正多边形，而边数有限的正多边形的面积是已知的、可求的．他的想法的可贵之处在于用已知的、可求的来逼近未知的、要求的．也就是说，用有限来逼近无穷．这种思想极其重要，在近代数学中起着重要的作用．

我们知道，计算各种面积、体积时需要精确的 π 值．而刘徽求 π 值的方法所蕴涵的思想又启发了新的求面积、体积的途径，它与用积分求面积、体积的思想具有相同实质［见选修 2-2］．

例如，求抛物线 $y=x^2$ 与 OX 轴、OX 的垂线 AC 所围面积．设 OC 的长是 a．运用刘徽割圆术的思想，需要找一个和它逼近的、面积可计算的图形．如图 2-2，我们把 OC 进行 n 等分，分点是（$O=$）M_0，M_1，M_2，…，M_{k-1}，M_k，…，M_n（$=C$），于是相邻两

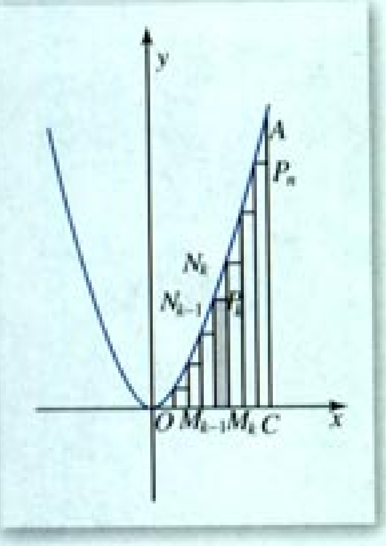


图 2-2

点的距离是$\frac{a}{n}$. 分别从这些分点 M_{k-1}，M_k（$k=1$，…，n）作垂直于 OX 轴的直线，交抛物线于 N_{k-1}，N_k；从 N_{k-1} 作平行于 OX 轴的直线，交 M_kN_k 于 P_k. 于是我们得到一个和 OAC 相近似的图形，这个图形由直线 OC，P_nC 和折线 $OM_1N_1P_1N_2\cdots P_{k-1}N_{k-1}P_kN_kP_{k+1}N_{k+1}\cdots P_{n-1}N_{n-1}P_n$ 所组成. 这个图形的面积是可以算得出来的，因为它是由很多块矩形拼凑起来的. 由于 $y=x^2$，所以 $M_{k-1}N_{k-1}=\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2$，因此矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 的面积是$\frac{a}{n}\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2$，所以整个近似图形的面积是

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2+\left(\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]\\&=\frac{a^3}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2].\end{aligned}$$

这里由 OC，P_nC 和折线所组成的图形所起的作用就相当于刘徽割圆术中的正多边形. 又因为

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1),$$

所以 OAC 的面积 S 的近似值 S_n 等于$\frac{a^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$. 显然 S_n 是小于 S 的，而且 n 越大，S_n 和 S 的差越小. 当 n 趋于无穷大时，S_n 趋于$\frac{a^3}{3}$. 因此，OAC 的面积 $S=\frac{a^3}{3}$.

我们知道，《九章算术》不是一个演绎逻辑系统，但是刘徽在具体的注释和阐述中，充分发挥了他的逻辑思维水平，他的注文充满了浓厚的理论色彩，在一定程度上克服了《九章算术》理论分析不足的缺点，这是对《九章算术》思想方法的深化，具有重大的历史意义.

勾股定理在《九章算术》以前就已经出现了，但主要应用在天文方面.《九章算术》则用得很广，而且该书先讲了勾股定理及其变形，然后才讲应用，这已注意到了逻辑性. 勾股术曰："勾股各自乘，并而开方除之，即弦." 刘徽利用"出入相补原理"证明了 $a^2+b^2=c^2$［见本章"阅读与欣赏"］.

刘徽取得了许多重要的数学成就，遗憾的是，没有流传下关于这位伟大数学家的生平资料. 值得庆幸的是，他的思想后来得到祖冲之父子的推进和发扬.

祖冲之（429—500），字文远，南北朝时代南朝宋、齐之间的一位杰出科学家. 他不仅是一位数学家，同时还通晓机械制造、音乐，并且是一位文学家.

祖冲之接受了刘徽计算圆周率的方法，但并不满足于刘徽的结果，他进一步计算到圆内接正 1 536 边形，得出圆周率 3.141 6，继而又推算得到：

$$3.141\,592\,6<\pi<3.141\,592\,7.$$

这一结果的重要意义在于指出误差范围. 大家不要低估这个工作，它的工作量相当巨大.

祖冲之
(429—500)

至少要对9位数字反复进行130次以上的各种运算，包括开方在内．即使今天我们用纸笔来算，也绝不是一件轻松的事，何况古代计算还是用算筹（小竹棍）来进行的，这需要怎样的细心和毅力啊！他这种严谨的治学态度，不怕复杂计算的毅力，都值得我们学习．

祖家世世代代都对天文历法有研究，祖冲之比较容易接触到数学的文献和历法资料，因此他从小就对数学和天文学发生了兴趣．用他的话说，他从小就“专攻数术，搜炼古今”．这“搜”、“炼”两个字，刻画出他的治学方法和精神．“搜”表明他不但阅读了祖辈相传的文献和资料，还主动去寻找从远古到他所生活的时代的各项文献和观测记录，也就是说他尽量吸收了前人的成就．而更重要的还在“炼”字上，他不仅阅读了这些文献和资料，并且做过一些“由表及里，去芜存精”的工作，把自己所搜到的资料经过消化，据为己有．他广博地学习和消化了古人的成就和古代的资料，但是他不为古人所局囿，决不“虚推古人”，这是另一个可贵的特点．

祖冲之认为，“迟疾之率，非出神怪，有形可检，有数可推”．也就是说，天体运行的规律，不是什么神怪的、不可捉摸的东西，它是有形体可供观察检验、有数据可供计算推测的．这种想法，加之他的勤奋和高超的计算能力，他创制了一部新的历法．公元462年（刘宋大明六年），他上表给皇帝请讨论颁行，定名为“大明历”，这是当时最先进的历法．

新的历法遭到了皇帝宠幸的戴法兴的反对．朝中百官惧怕戴法兴的势力，多所附和．思想保守的戴法兴认为，历法中的传统方法是古人制定，应该“万世不易”、不可变革．他说天文历法非凡夫俗子所测，甚至责骂祖冲之是“诬天背经”，“非冲之浅虑，妄可穿凿”．祖冲之并没有为权贵吓倒，勇敢地进行了辩论，说不应该信古而疑今，并写下一篇《驳议》，说“愿闻显据，以窍理实”，“浮词虚贬，窃非所惧”．为了明辨是非，他愿意彼此拿出明显的证据来相互讨论，至于那些捕风捉影、无根据的贬斥，他丝毫也不惧怕．这场辩论反映了进步与保守、科学与反科学两种势力的斗争．

这场斗争祖冲之没有得到胜利．他死后，由于他的儿子祖暅的再三坚持，并经过了实际天象的检验，才在公元510年正式颁行．这已经是祖冲之死后的第10个年头了．

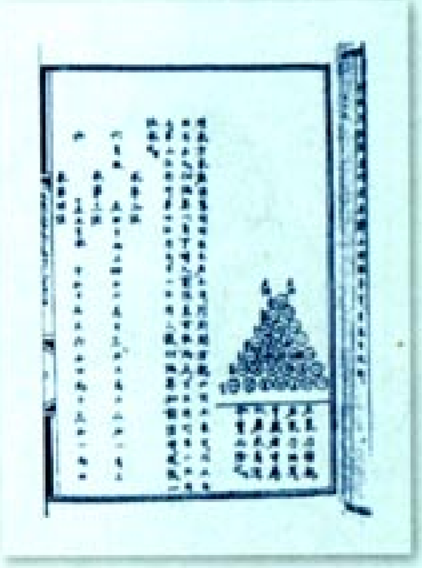
另外，祖冲之的数学专著《缀术》，由于内容深奥，当时学习的人们无法理解，因此废弃不用以致失传，这是我国数学史上的一个重大损失．

祖冲之广泛吸收古人成就而不为其所拘泥，艰苦劳动、勇于创造和敢于坚持真理的精神，依然是我们学习的榜样！

公元960～1368年间，我国历史上涌现出了许多优秀的数学家，其中以宋元四大家——杨辉（约13世纪中叶）、秦九韶、李冶（1192—1279）、朱世杰（13世纪末到14世纪初）为代表．下面我们简单介绍一下杨辉的贡献．

杨辉，字谦光，南宋人，著有《详解九章算法》(1261)，对《九章算术》的题目按解

题深浅程度进行了重新编排．书中的“开方作法本源图”实际是6行的二项式系数表，即$(a+b)^n$的展开式的各项系数．这个三角形现在被称为“杨辉三角”，但杨辉指明此系贾宪（约11世纪）所用．他还给出了此三角形的构造方法．西方称这种二项式系数表为“帕斯卡三角形”，从时间上看，它的出现时间已分别在贾宪和杨辉之后400年和600年了．杨辉著有5部共21卷数学书，在改进乘除捷法、纵横图研究、级数求和等方面作出重要贡献．



开方作法本源图

（采自《永乐大典》）

在数学教育方面，杨辉提倡循序渐进和熟读精思的学习方法，还特意为初学者制定了“习算纲目”，具体给出各部分知识的学习方法、时间及参考书．他还特别强调要明算理，要“讨论用法之源”．例如，他讲减法时不只讲算法，而且指明：“加法乃生数也，减法乃去数也，有加则有减．凡学减，必以加法题考之，庶知其源．”他的先进的教育思想和教学方法对后世有着深刻的影响，在中国数学教育史上占有重要地位．

需要指出的是，中国古代数学也有其局限性．因为算法化的思想重视的是构造出可利用算筹计算的方法，并不需要探讨这种算法所依据的数学原理．因而一般地，中国古代倾向于回答“怎样求出结果”和“结果是什么”的问题而不回答“为什么这样做”的问题，虽然算法达到相当高明的程度，但对有关的数学原理缺乏探讨．这在一定程度上影响了严格的数学理论体系在中国古代的建立．

但是，总体来说，中国传统数学博大精深，即使在今天，也是我们取之不竭的宝贵财富．例如，中国古代极其重要的数学思想——算法化思想，就是要得出直接可以计算的结构和程序，为此要求有一种“机械化”的计算步骤，并且一定是“能行性”的步骤才行．如前面的分析所知，“术”就是一个有“能行性”的机械式的计算程序．由于计算机的出现，算法化的倾向在近代数学中的作用也日益显著，越来越为人们所认识．中国古代算术的思想与方法，正好与近代计算机的使用融合无间，也必将因此而重返青春，以另一种崭新面貌在未来的数学发展中扮演重要角色．

习　题

1. 试用“方程术”求解书中提到的杨损出的考题．

2. 请比较阿基米德与刘徽求圆周率方法的异同．

3. 古希腊数学与中国古代数学各有什么特点？

数学文化 阅读与欣赏

中国古代数学家证明勾股定理的巧妙方法

公元3世纪三国时期的数学家赵爽（字君卿）约在222年深入研究了《周髀算经》，为该书写了序言，并作了详细注释，期间给出了迄今所知中国古代最早的勾股定理证明.

《周髀算经》是现存的中国古代数学著作中最早的一部，作者不详，成书年代据考应不晚于公元前2世纪西汉时期.《周髀算经》主要是以文字形式叙述了勾股算法，但没有给出勾股定理的证明. 赵爽在“勾股圆方图”中对勾股定理凭借“出入相补”方法作出了推导. “出入相补”方法是指，两个平面图形如果能拼补相等，则其面积相等. 如图2-3，考虑以一直角三角形的勾和股为边的两个正方形的合并图形，其面积应有a^2+b^2. 如果把左、右外侧的三角形1、2分别绕顶点作旋转变换放到1′、2′位置，就产生新的图形——以原三角形之弦为边的正方形，其面积应为c^2，因此$a^2+b^2=c^2$.

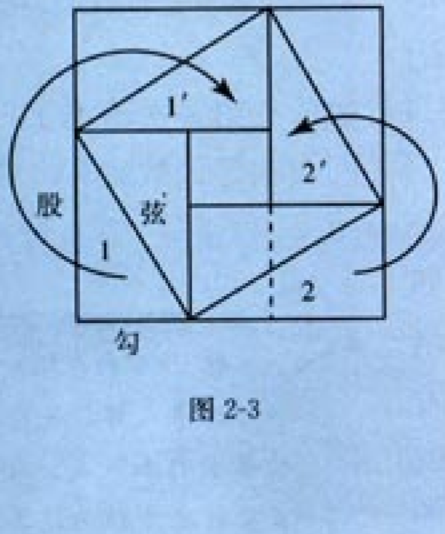


图2-3

魏晋数学家刘徽在注解《九章算术》时，给出了证明勾股定理的另一种方法. 他先给出定义：短边为勾，长边为股，斜边为弦. 然后在注文中给出证明思路：以勾为边的正方形称为朱方，以股为边的正方形称为青方，利用出入相补方法，可以合成以弦为边的正方形. 可惜这一注文的插图已经失传. 但经17、18世纪中、日学者的探索，古证获得复原（如图2-4）.

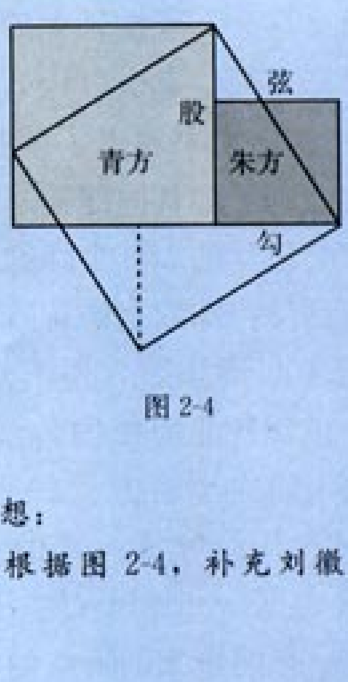


图2-4

想一想：

请你根据图2-4，补充刘徽的方法的证明.

第三章 代数学的进步

3.1 解方程的故事

墓中安葬着丢番图，多么令人惊讶，它忠实地记录了其所经历的人生旅程．上帝赐予他的童年占六分之一，又过十二分之一他两颊长出了胡须，再过七分之一，点燃了新婚的蜡烛．五年之后喜得贵子，可怜迟来的宁馨儿，享年仅及其父之半便入黄泉．悲伤只有用数学研究去弥补，又过四年，他走完了人生的旅途．

——《希腊诗文选》(公元 500 年前后所辑) 中第 126 首

上面这段话是希腊数学家丢番图（Diophantus，生平不详，主要活动年代大约是 250—275 年前后）的碑文．根据我们以前学过的代数知识，设丢番图的年龄为 x，很容易列出方程 $\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$，从而推算出这位数学家活了 84 岁．你也许惊讶于古代数学家们的智慧，也许不屑于他们的成就，因为你已经在初中就会做这些题目了．我们姑且不去评价他们的成就，先来看看代数学的主要发展．

代数学历史悠久．根据现存的一块汉穆拉比时代（公元前 18 世纪）的泥板，得知古巴比伦人已经知道某些二次方程的解法．而古希腊时期流传至今的与代数有关的著作只有丢番图的《算术》．该书解决了某些一次、二次方程问题和不定方程问题，出现了缩写符号和应用负数的例子．其问题构思巧妙，解题方法多样，但最大的缺点就是没有解方程的一般方法．它所包罗的 189 个问题中所出现的特殊数字是有特殊作用的，每一个问题，要用只适用于它自身特殊数字的特殊而往往又很奇特的办法来求得其答案．有人打趣说：研究了丢番图的 100 道题后，还不知道怎样去解第 101 道题．直到中世纪❶的阿拉伯数学家才系统研究了二次方程的解法，建立了解方程的变形法则，还特别创造了三次方程的几何解法．其中花拉子米（Mohammed ibn Mūsā al-Khwārizmi，约 783—850）是中世纪时期对欧洲数学影响最大的阿拉伯数学家，他的名著《代数学》第一次给出了一元二次方程的一般代数解法及几何证明，同时又引进了移项、合并同类项等代数运算．我国古代数学家在代数学方面的光辉成就，我们在第二章中已有所介绍．

注

❶ 欧洲中世纪时期指从公元 476 年西罗马帝国的没落到 15 世纪文艺复兴时代开始．

然而在这之后近乎 7 个世纪都没有得到三次、四次方程的求根公式❶．直到 1500 年左右，意大利波洛尼亚大学的数学教师费罗（S. Ferro，1465—1526）发现了 $x^3+mx=n$ 类型的三次方程的解法，但他没有发表自己的方法．因为十六七世纪的人们，常把所得的发现保密，然后向对手们提出挑战，要他们解出同样

注

❶ 方程的求根公式，又称方程的根式解，是指只对方程的系数作加、减、乘、除和求正整数次方根的运算来求得方程的解．

的问题．费罗只在1510年左右把方法秘传给他的学生费奥（A. M. Fior）和自己的女婿．这种状况持续了二三十年．在1530年，意大利的另一位数学家塔塔利亚（N. Tartaglia，约1499—1557）突然宣称自己可以解 $x^3+mx^2=n$（m，$n>0$）类型的三次方程．费奥听说后大吃一惊，赶忙打听塔塔利亚的情况．原来塔塔利亚原名分塔那，因为小时候在战乱中被一个法国兵用马刀砍伤脸部而引起口吃，因此大家称他为塔塔利亚，意即“口吃者”．他本人也以此为姓发表文章，从而沿用下来．塔塔利亚出身贫寒，自学了拉丁文、希腊文和数学，靠在意大利各城讲学谋生．费奥怀疑塔塔利亚的能力，于是在1535年向他提出挑战，要他解30个三次方程．比赛定在米兰大教堂公开举行．塔塔利亚很快解出了形如 $x^3+mx^2=n$ 和 $x^3+mx=n$ 两种类型的所有三次方程，而费奥只能解出老师教给的后一类型的方程．塔塔利亚获胜而归，却依然保守解法的秘诀．

当时有一位在米兰行医并教授数学的学者卡丹（G. Cardano，1501—1576），他听说这件事后，在1539年的一天，把塔塔利亚请入家中款待，再三恳切要求他把解法告诉自己，并发誓对此保守秘密．塔塔利亚这才把方法写成一首语句晦涩的诗告诉卡丹．然而没过几年，卡丹便不顾自己的誓言，把这个方法发表在1545年出版的《大术》一书中．他在书中说明，解法取自塔塔利亚，并且费罗在30年前就发现了这个法则，但他们都保留了证明．他本人则用几何方法证明了三次方程的求根公式．书中记载了三次方程 $x^3+px=q$ 的解法，用现在的语言叙述，实质是考虑恒等式

塔塔利亚

（N. Tartaglia，约1499—1557）

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3,$$

若选取 a 和 b，使

$$3ab=p,\ a^3-b^3=q, \tag{*}$$

由（*）不难解出 a 和 b：

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\ b=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

于是得到 $a-b$ 就是所求的 x，后人称之为“卡丹公式”．卡丹还对形如 $x^3=px+q$（p，$q>0$）的方程给出了解的公式：$x=a+b$，其中

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\ b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

另外，书中还记载了他的学生费拉里（L. Ferrari，1522—1565）发现的四次代数方程的一般解法．

塔塔利亚为了抗议卡丹的背信弃义，在《各种问题与发明》（1546）中发表了他自己的方法．但是无论在这本书中还是后来的《数量概论》（1556）中，他都没有给出关于三次方程本身更多的材料．关于谁先解出三次方程的争议使塔塔利亚与费拉里发生了公开冲突，最后以双方肆意谩骂而告终．

可以说，直到16世纪数学家们一直把解方程作为代数学的主要研究内容，并为此付出了一辈又一辈的努力.

3.2 青年数学家阿贝尔和伽罗瓦

阿贝尔留下的一些思想，可供数学家们工作150年.

——埃米特

他（指伽罗瓦）被数学的鬼魅迷住了心窍.

——伽罗瓦的中学老师

解决了三、四次方程之后，数学家自然要考虑一般的五次或更高次的方程能否像二、三、四次方程一样来求解，也就是说，对于形如

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

（其中 $n\geqslant5$）的代数方程，如何求根式解呢？在解出三、四次方程后的整整两个半世纪内，很少有人怀疑五次或五次以上方程根式求解的可能性. 但是所有寻求这种解法的努力都失败了. 1770年法国数学家拉格朗日（J. L. Lagrange，1736—1813）在一篇文章中考察了人们所熟知的二、三、四次方程的一切解法，指出这些解法所根据的情况对于五次及更高次方程不可能成立. 拉格朗日试图证明这种不可能性，然而在长达200页的论文之后，仍未能如愿. 他不得不感慨道，这个问题“好像是在向人类的智慧挑战”.

阿贝尔
(N. H. Abel，1802—1829)

横遭冷遇的青年

迎接这一挑战的是在拉格朗日的文章发表过后半个多世纪，来自挪威的一位年青人阿贝尔（N. H. Abel，1802—1829）. 阿贝尔家境贫寒，13岁进入奥斯陆一所教会中学，学校不得法的教育没能使他对数学感到乐趣. 15岁那年，情况发生了转机. 一位优秀的数学教师霍尔姆博（B. M. Holmboë，1795—1850）来校任教，他发现了阿贝尔的数学天才，并唤起了阿贝尔学习数学的兴趣. 在良师的启发和帮助下，阿贝尔迅速学完了初等数学课程，然后攻读高等数学，同时还自学了许多数学大师的著作. 在此基础上，阿贝尔以“初生牛犊不怕虎”的姿态猛攻一些尚未解决的深奥数学问题. 中学快毕业的时候，他开始了对五次方程根式解问题的研究. 他注意博采众家之长，在研读拉格朗日、高斯关于方程论著作的基础上，按高斯对二项方程 $x^2-A=0$ 的处理方法，着手这一问题. 最初，他自认为解五次方程已获成功. 可是他的老师霍尔姆博与奥斯陆大学教授汉森丁（C. Hansteen）两人都看不出所以然，又找不出论证中的破绽，只好把这篇文章寄给丹麦数学家德根（F. Degen）. 德根没发现有什么不对，但感觉问题不是如此简

单，于是要求阿贝尔对其方法举例说明．在寻找实例的过程中，阿贝尔发现了自己论文的致命错误．他并没有灰心，只是父亲去世（1820 年）造成的家庭负担及考大学的问题使他暂时将其放一放．1821 年，他在霍尔姆博等人的资助下进入大学学习．

1823 年初夏，阿贝尔有幸去哥本哈根拜见德根及其他数学家．与德根的讨论使阿贝尔的思想发生了本质的变化．他开始意识到，五次方程根式解，在一般情况下，或许就是不可能的．返回奥斯陆后，他采取了相反的观点，终于获得成功．

1824 年，阿贝尔证明了五次或五次以上的代数方程没有一般的用根式求解的公式．该证明写进了“论代数方程——证明一般五次方程的不可解性”的著名论文中，从而结束了一般代数方程求根式通解的设想．他深知其结果的重要性，决定先以小册子形式自费出版．为了节省经费，他把小册子压缩到 6 页，叙述很简洁，以致许多学者难以读懂．“数学王子”高斯也不相信一个青年能用这么短的篇幅，解决他本人都尚未解决的难题．当他收到阿贝尔的论文时将文章扔到了一边，并感叹道：“又一个荒谬之人．”总之，这篇论文在当时没有得到任何一位外国数学家的重视．

1825 年，阿贝尔大学毕业，社会没有给这位天才提供用武之地．他决定申请经费出国，继续深造和谋求职位．他先后到了柏林和巴黎，然而依然没有机会．这期间，他还患上了肺病．幸而在德国结识的好朋友克雷尔（A. L. Crelle，1780—1855）帮助了他．

1827 年 5 月 20 日，阿贝尔回到了故乡．回国后更失望，仍然没有找到职位的希望，他不得不靠作家庭教师维生．直到 1828 年在挪威军事科学院当上代课教师前，他一直没有固定的工作，只能以私人授课维持生计，用他的话说“穷得就像教堂里的老鼠”．然而，他并没有在逆境中倒下去，仍在坚持研究，并取得了许多重大成果．他写下了一系列关于椭圆函数的文章，发现了椭圆函数的加法定理、双周期性，并引进了椭圆函数的反演．正是这些重大发现才使欧洲数学家们认识到他的价值．1828 年 9 月，四名法国科学院院士上书给挪威国王，请他为这位天才安排一个合适的职位．

1829 年 1 月，长期的劳累和营养不良使得他的肺病再次发作，并随着时间的推移不断恶化．4 月 6 日，一颗耀眼的数学新星陨落了！就在他去世两天后，克雷尔来信通知他已被柏林大学任命为数学教授，此后荣誉和褒奖接踵而来．

阿贝尔的一系列工作为后人留下了丰厚的数学遗产．

才华横溢的传奇少年

阿贝尔关于代数方程的工作只是证明了对于一般的五次和五次以上方程根式解是不可能的，但并不妨碍人们去求一些特殊的代数方程，比如阿贝尔方程的根式解．在阿贝尔的工作之后，数学家所面临的一个问题就是：什么样的特殊方程能够用根式来求解？这个问题稍后被一位同样年轻的法国数学家伽罗瓦（É. Galois，1811—1832）解决．

伽罗瓦出生在巴黎附近一个小镇的镇长家，家境富裕，幼时就受到良好的家庭教育．1823 年考入中学，在中学的第三年才开始学习数学．伽罗瓦一接触到数学，立即就被数学的神奇迷住了．他如饥似渴地吸取数学营养，但很快就不满于教科书内容的贫乏、琐碎．于是，他毅然抛开教科书，直接阅读数学大师们的专著．他的一位老师说：“他被数

伽罗瓦
(É. Galois，1811—1832)

学的鬼魅迷住了心窍.”学完数学大师的著作，他坚信自己能做到的绝不会比他们少. 不过，他忽视了其他学科，导致他首次（1828 年）报考当时著名的巴黎综合工科大学失败.

1828 年 10 月，伽罗瓦从数学初级班升入数学高级班. 数学教授里查德（L. P. E. Richard）发现伽罗瓦具有敏锐的洞察力，他不仅能很快地学会和掌握现成的知识和方法，而且能领悟和发现新的思想方法. 里查德认定伽罗瓦具有非凡的数学天赋，并断言："伽罗瓦只适宜在数学的尖端领域中工作."据伽罗瓦说，他在 1828 年犯了和阿贝尔在 8 年前犯的同样错误，以为自己解出了一般的五次方程. 但他很快意识到了这一点，并重新研究方程理论，他坚持不懈，直到成功地用群论阐明了这个带普遍性的问题. 1829 年 5 月 25 日和 6 月 1 日，他先后将他的两篇关于群的初步理论的论文呈送给法国科学院. 科学院请柯西（A.-L. Cauchy，1789—1857）做论文的主审. 然而，一些事件挫伤了这个良好的开端，而且在这位年轻数学家的个性上留下了深深的烙印. 首先，伽罗瓦的父亲由于受不了保守的天主教牧师的恶毒诽谤于 1829 年 7 月 2 日自杀身亡. 之后不到一个月，中学毕业的伽罗瓦第二次报考巴黎综合工科大学，由于口试中主考官不理解他的阐述，甚至还嘲笑他. 伽罗瓦在提及这次考试时曾写道，他不得不听"主考人的狂笑声"，据说"由于被狂笑声所激怒"，他把黑板擦布扔到主考人头上. 这样，伽罗瓦再一次被综合工科大学拒之门外. 最后他不得已报考了巴黎高等师范学校，于 1829 年 10 月被录取.

伽罗瓦呈交给科学院的论文被莫名其妙地丢失，于是他又写了一篇论文，详细阐述他的理论，于 1830 年 2 月再次交给法国科学院. 这次论文审查者是傅里叶（J. B. J. Fourier，1768—1830）. 可惜，傅里叶还没来得及审查伽罗瓦的论文，就在这年的 5 月因病去世. 人们在他的遗物中未能发现伽罗瓦的手稿. 两次挫折，使伽罗瓦感到愤怒. 他写信质问法国科学院，为什么对"小人物"的研究成果如此轻慢. 在这种情况下，科学院只好建议伽罗瓦再次呈交他的论文. 伽罗瓦于 1831 年 1 月第三次提交他的论文. 法国科学院委托泊松（S.-D. Poisson，1781—1840）和拉克鲁阿（S. F. Lacroix，1765—1843）审查伽罗瓦的论文. 这两位数学家虽然认真地审阅了这篇论文，可得出的结论却是"不可理解". 在他们给科学院的报告中说："我们已经尽了我们的最大努力来研究伽罗瓦的证明，他的推理显得不很清楚，到目前为止，我们还不能对它作出正确评价，因为有说服力的证明还没有得到. 因此，在这篇报告中，我们甚至不能给出他的证明思想."事实上，他们没有完全看懂伽罗瓦的文章. 这样，伽罗瓦的伟大发现再次被学术界否定了. 事实是，伽罗瓦在 1829～1831 年间完成的几篇论文，成为近世代数的发端，其中提出"群"的概念，并用以建立了判别代数方程根式可解的充分必要条件，从而宣告了这一经历了三百年的难题的彻底解决！

进入大学的伽罗瓦因参加反对波旁王朝的共和活动而被开除，并两次入狱，1832 年在一次由政治、爱情纠葛引起的决斗中去世，时年仅 21 岁．他在决斗前预感到自己可能身遭不幸，于是，在参加决斗的前一天，异常冷静地写下了三封著名的信，其中第三封信是写给好友舍瓦烈（A. Chevalier）的，这封长信主要谈论数学问题．它显示了伽罗瓦在生命即将结束的时刻，仍然惦记着他一生为之奋斗的事业——数学．决斗的时刻一步步临近，伽罗瓦快速而认真地审校他的论文，然而时间太紧迫了，他不得不在论文的空白处写下这么一句话："这个论据需要补充．现在没有时间．"

伽罗瓦从 15 岁开始接触数学到他不满 21 岁去世，总共才 5 年多的时间．在他短暂的学术生涯中完成的工作足以证明他是历史上最伟大的数学家之一．他留下的数学著作，加起来也不过 60 页左右．这些篇幅不大的论著展示了这位青年数学家非凡的才华和创造力，而他的精确、简要、明晰的文风更为他深远的数学思想增加了奇异的光彩．伽罗瓦成长的道路不是一帆风顺的，甚至经受了常人难以想象的挫折．他的成就是那样辉煌，但生前却不被人赏识；他在少年时代就才华横溢，却两次蒙受落考的耻辱．但是伽罗瓦百折不挠，绝不灰心丧气，而是更加坚定自己的信念，勇敢地走自己的路，这正是我们当代青年学习的可贵精神．

阿贝尔和伽罗瓦，这两位从中学时代就致力于数学研究的青年学者在稍纵即逝的数学生涯中留下了永恒的遗产，同时他们面对逆境永不屈服的精神也是一笔珍贵的财富．

3.3 代数学与三大几何作图难题

伽罗瓦的理论不仅回答了方程的求解问题，而且解决了古希腊"三大几何问题"中"三等分任意角"和"倍立方体"问题．什么是"三大几何问题"呢？这还得从古希腊说起．公元前 5 世纪以后，希腊人开始对几何学进行比较完整、系统的探讨．他们的研究成果不仅被欧几里得收集在他的《原本》之中，同时还有其他的探索．只用没有刻度的直尺和圆规（即"欧几里得"工具）来解倍立方体（找出一个体积是原来立方体体积二倍的新立方体）、三等分任意角和化圆为方（求作正方形，使其面积等于已知圆的面积），就是"几何三大难题"．

关于这三个问题有种种传说．其中埃拉托塞尼（Eratosthenes，约前 284—前 192）在题为《柏拉图》的著作中就曾写过倍立方体的传说：当先知得到神的谕示向提洛岛的人们宣布，为了止息瘟疫，他们必须建造一个祭坛，体积是现有那个祭坛的两倍．工匠们试图弄清怎样才能造成一个立体，使其体积为另一个体积的两倍，为此他们陷入深深的困惑之中，于是他们就这个问题去请教柏拉图．柏拉图告诉他们，先知发布这个谕示，并不是因为他想得到一个体积加倍的祭坛，而是因为他希望通过派给他们这项工作，来责罚希腊人对于数学的忽视和对几何学的轻视．

其实，三大几何问题是已被希腊人解决了的问题的扩张．一个角既然能被平分，自然

就会考虑它的三等分问题．正方形对角线上的正方形的面积是原正方形的 2 倍，就容易想到作一个立方体使它的体积等于已知立方体的 2 倍．希腊人已讨论了图形等面积的变换问题，考虑作一个正方形使它的面积等于一个圆的面积亦是极其自然的事．

你也许会问：既然这些是几何问题，几何知识不能解吗？怎么要用代数学知识来解？难点就在于作图工具的限制．希腊人认为直线和圆是基本图形，而直尺和圆规是它们的物质模型，因此用直尺和圆规作图是最好的．在《原本》的公设中，硬性规定了用直尺和圆规作图方法，从此就愈来愈看重尺规作图这一限制了．而这三道作图问题超出了尺规作图的平面几何学的范围．它们只能借助某些曲线来解决；而这些曲线或是利用其他作图工具作出的，或是用尺规能确定它们的若干点而描绘出来的．

伽罗瓦的工作提供了可作图的一个判别法：对于一个作图问题首先要建立一个代数方程，它的解就是所要求的量．可作图的条件是这个量必须属于给定量的域的某个二次扩张域．利用这个判别法就可以解决上述两个问题，判明这两个问题都是不可解的．实际上，1837 年旺泽尔（P. L. Wantzel，1814—1848）首先给出前两个问题尺规作图不可能的证明，接着 1882 年林德曼（C. L. F. Lindemann，1852—1939）证实了 π 的超越性以后，也给出了最后第三个问题尺规作图不可能的证明，从而彻底解决了此类几何作图“难题”．但是历代数学家在求解这三个问题的过程中，却得到了许多数学成果，如圆锥曲线，穷竭法等．

下面我们只举其中一例来简单的看一下问题是如何解决的．

“化圆为方”问题就是已知半径为 a 的圆，其面积当然是 πa^2，要求一正方形，其每边长为 x，使得 $x^2=\pi a^2$，例如 $a=1$，要找 x 使 $x^2=\pi$，或说要找线段 x，它满足二次方程 $x^2-\pi=0$．即要用尺规作 $x=\sqrt{\pi}$的线段．因为在有理数域上 π 是超越的❶，从而$\sqrt{\pi}$也是超越数．（你能证明这一点吗？提示：反证法．）有人证明过，超越数不可能由尺规作出．所以“化圆为方”这个问题是不可解的．

注

❶ 若 α 是有理系数代数方程 $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的根，则称 α 是代数数，不是代数数的复数称为超越数．π 是超越的，也就是说它不满足任何一个代数方程．

其实如果没有作图工具的限制，许多数学家也早就解决了这几个问题．例如，伟大的数学家阿基米德就曾试图变换某些条件完成“三等分任意角”．

他曾经证明了一个几何命题：“如图 3-1，AB 是$\odot O$的任一弦，延长 AB 至 C 使 BC 等于$\odot O$的半径，连接 CO 并延长，使其交圆于 E，D，则 $\angle AOE=3\angle BOD$”．他发现：

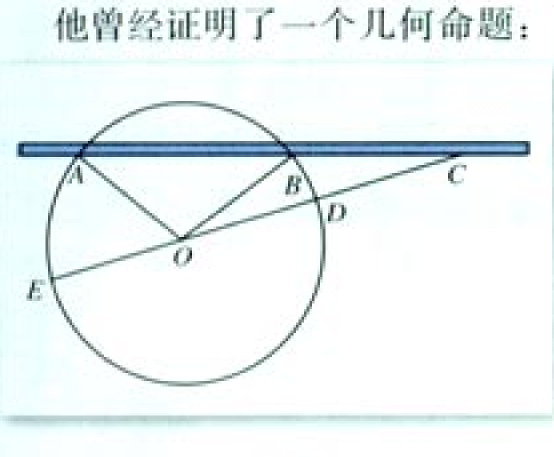


图 3-1

“只要在直尺上再加上一个标识点，三等分任意角可以完成．”

在直尺 AC 上加一个标识点 B，欲三等分$\angle AOE$，先以 O 为圆心，BC 长为半径作圆，令尺过点 A，使点 B 在$\odot O$上移动，当点 C 落在直径

EOD 延长线上时，则$\angle BOC=\frac{1}{3}\angle AOE$.

原理的证明极简单，注意到三角形外角性质便有：

$$\begin{aligned}\angle AOE &= \angle OAC+\angle OCA=\angle OBA+\angle OCA\\ &=\angle BOC+2\angle OCA=3\angle BOC,\end{aligned}$$

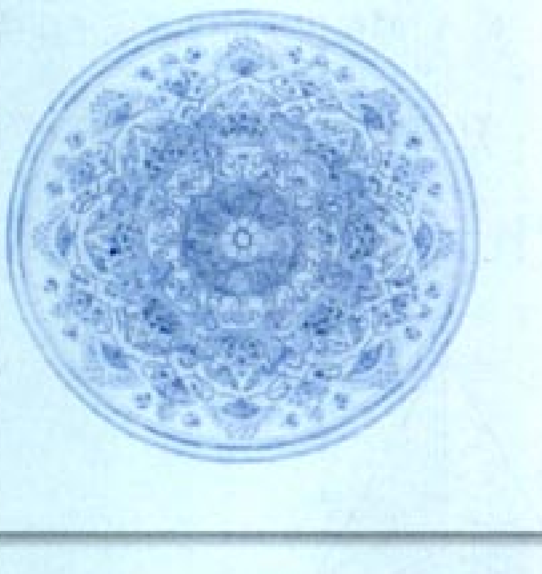
这里，$\angle OAB=\angle OBA$，$\angle BOC=\angle BCO$.

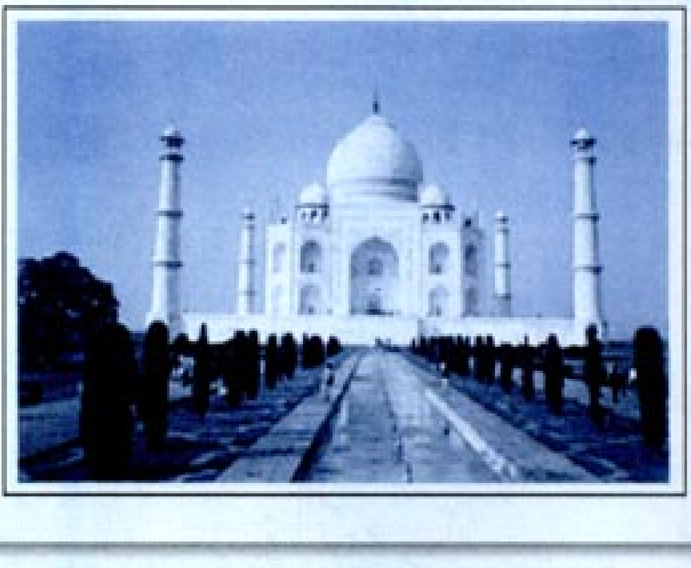
由此，我们可以得出两点启示：数学是相通的，某一学科的问题可以用其他学科的知识来解决；问题的条件是重要的，不同的条件会有极为不同的结果.

3.4 对称的数学

伽罗瓦在成功地解决了曾困扰数学家们将近 3 个世纪的求方程根式解问题时，提出了一个核心的数学概念——群. 群是数学上一个基本的结构，是刻画自然界普遍存在的对称现象的有力工具，群论是现代数学的重要分支. 选修《对称与群》就介绍了群的基础知识.

在我们的日常世界中，对称性无处不在. 人类制造物，小到衣物装饰，大到房屋建筑，诸如屋顶、墙壁、窗格、地面、雕阑、画栋，几乎处处都有对称. 曾广为流行、深得人爱的万花筒就利用了对称性. 在万花筒的像中，人们可以看到它有许多对称的轴线. 通常的万花筒是由两个夹角为$\frac{\pi}{3}$或$\frac{\pi}{4}$的平面镜和一个（或一组）小东西组成的，这个东西被置放在夹角内使得两个镜子里都反射它并相互反射. 结果看到这物体有 6 个或 8 个像（视夹角大小而定）排列在优美的对称位置上.





在我们发现对称性之后，首先要描述对称性. 对任何具体的对称性往往有不同的表示方法，这时出现的最主要的问题是：什么是对称性的本质？也就是说，什么是对称性的共性？这就需要对于对称性进行分析，找出刻画对称性的最好方法. 在这个过程中，发现对

称性都显示某种变换之下的不变性，而找出这些保持某种对象不动的变换，则是描述其对称性的有效方法．把这些变换集中起来，形成集合，这就是群．

下面我们通过对正三角形的分析，看如何得出群的概念．

在平面上，我们可以考虑对于一直线的对称（或反射）以及对于一点的对称．

首先，如图 3-2，点 A 和点 A' 叫做对于直线 l 是对称的，如果 $AA'\perp l$ 于 O 点，且 $AO=OA'$．

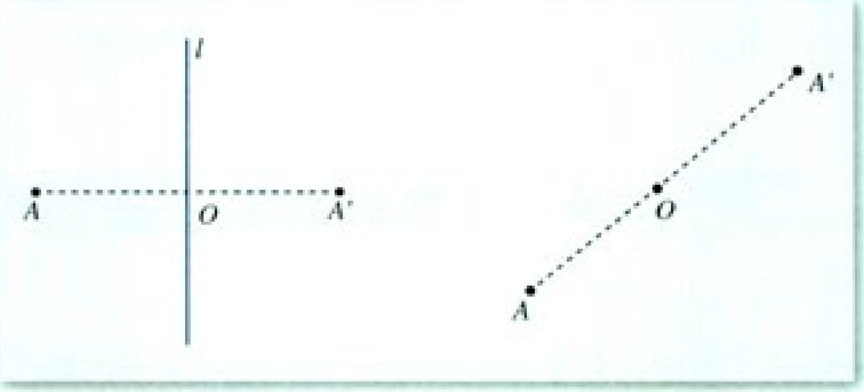


图 3-2　　　　图 3-3

由 A 到 A' 的作用也可以看成平面在空间中作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋转．

其次，如图 3-3，点 A 和点 A' 叫做对于点 O 是对称的，或以 O 为（2 次）对称心，如果 AA' 过 O 点，且 $AO=OA'$．

由 A 到 A' 的作用也可以看成平面绕 O 点作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋转，或平面在空间中绕过点 O 垂直于平面的直线作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋转．

我们可以进一步来考虑对于一个 n 次对称心的对称，如图 3-4，点 A_1，A_2，…，A_{n-1}，A_n 以点 O 为 n 次对称心，如果 $OA_1=OA_2=\cdots=OA_{n-1}=OA_n$，且 $\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\cdots=\angle A_{n-1}OA_n=\angle A_nOA_1=\frac{360^\circ}{n}$．由 A_1 到 A_2 的作用也可以看成平面绕点 O 作 $\frac{360^\circ}{n}$ 的旋转，或平面在空间中绕过点 O 垂直于平面的直线作 $\frac{360^\circ}{n}$ 的旋转．同样，对于一个 n 次对称轴的对称，也就是通过直线 l 的平面绕 l 做 $\frac{360^\circ}{n}$ 的旋转．

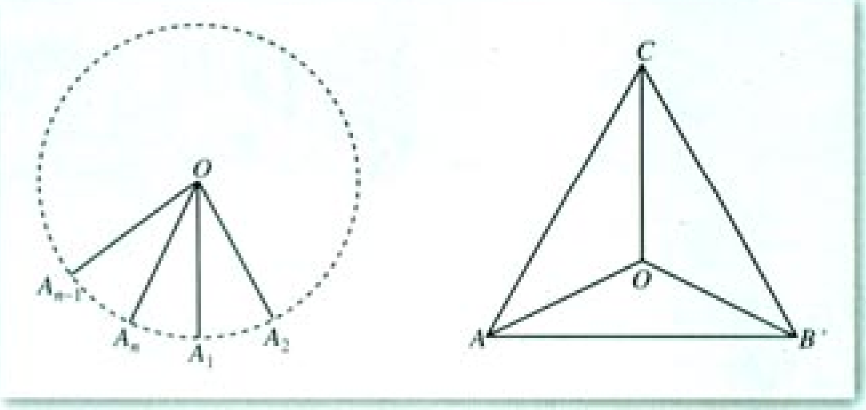


图 3-4　　　　图 3-5

平面上的图形，如果通过绕某个轴（或某个 n 次心）作旋转（或翻转）把自己变换到自己（或者说结果图形不变），就称为对于这个轴（或这个心）对称.

正三角形 ABC（图 3-5）：$AB=BC=CA$，$\angle CAB=\angle ABC=\angle BCA=\frac{180^\circ}{3}$. $\triangle ABC$ 的中心 O 是一个 3 次对称心；OA，OB，OC 是 3 个对称轴. 使$\triangle ABC$ 保持不变的动作共有 6 个：

3 转：不动（也可看成绕 O 转 0°）；

绕 O 转 120°；

绕 O 转 240°.

3 翻：对 OA 翻；

对 OB 翻；

对 OC 翻.

这 6 个动作对于 3 个顶点 A，B，C 的作用：

$$a_1=\begin{bmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & B & C \end{bmatrix},\ a_2=\begin{bmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & A \end{bmatrix},\ a_3=\begin{bmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & A & B \end{bmatrix},$$

$$a_4=\begin{bmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & C & B \end{bmatrix},\ a_5=\begin{bmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & B & A \end{bmatrix},\ a_6=\begin{bmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

可以证明，这 6 个对称动作包括所有使正三角形不变的对称动作，它们构成一个群，它完整地反映出保持正三角形不变的所有对称性. 我们这里介绍的是具体群.

历史上，长期以来人们只停留在研究具体的群，也就是变换群. 随着研究的深入，数学家们对此进行了抽象、推广和应用，发展出了系统的群的理论.

代数学也由于群的概念的引进和发展而获得了新生. 在群的思想引人之前，它主要是初等代数学，指的是 19 世纪上半叶以前的方程理论，主要研究某一方程（组）是否可解，怎样求出方程所有的根（包括近似根）以及方程的根所具有的各种性质等. 在群出现之后，多种代数系统（环、域、格、布尔代数、线性空间等）被建立. 这时，代数学的研究对象发生了重大变革，研究对象扩大为向量、矩阵，等等，它渐渐转向代数系统结构本身的研究. 代数学呈现出崭新的面貌，它不再仅仅是研究代数方程，而更多地是研究各种抽象的“对象”的运算关系，即变成了抽象代数学. 这一过程被称为代数学的解放.

习题

1. 已知 π 是超越数，求证$\sqrt{\pi}$也是超越数.（提示：用反证法.）

2. 思考生活中都有哪些对称.

数学文化

阅读与欣赏

“代数学”名称的来源

花拉子米是中世纪对欧洲数学影响最大的阿拉伯数学家，他的《对原与对消计算概要》（al-Kitāb al-mukhtasar fi hisāb al-jabr wa'l-muqābala）（约820年前后）一书在12世纪被译成拉丁文，在欧洲产生巨大影响．阿拉伯语“al-jabr”，意为还原移项，用来表示解方程的移项还原步骤，例如$bx+2q=x^2+bx-q$变为$bx+2q+q=x^2+bx$；“wa'l-muqābala”即对消之意，用来指消去方程两端相同的项或合并同类项，如上式变为$3q=x^2$．书中用代数方式处理了线性方程组与二次方程，第一次给出了一元二次方程的一般代数解法及几何证明，同时又引进了移项、同类项合并等代数运算，这一切为作为“解方程的科学”的代数学开辟了道路．

这本书约1140年被英国人罗伯特（Robert of Chester）译成拉丁文，作为标准的数学课本在欧洲使用了数百年，引导了16世纪意大利代数方程求解方面的突破．在14世纪“al-jabr”演变为拉丁语“algebra”，也就成了今天的英文“algebra”（代数），因此花拉子米的上述著作通常就称为《代数学》．

在中国，曾有人音译为“阿尔热八达”．后来李善兰（1811—1882）在所翻译的《代数学》的序文中正名说：“代数术略与中土天元之理同，而法则异……西国名阿尔热八达，系西方（阿拉伯）语言补足、相消也．”也就是说，代数与中国的天元术道理相同，但方法不同．外国人称之为“阿尔热八达”，它是补足、相消的意思．李善兰学贯中西，解释恰当，“代数”一词能反映这一学科当时以字母表示数的本质属性．

第四章 数与形的完美结合——解析几何的产生

数形本是相倚依，焉能分作两边飞.
数缺形时少直觉，形少数时难入微.
数形结合百般好，隔离分家万事休.
几何代数统一体，永远联系莫分离.

——华罗庚

4.1 时代的产物

西方数学，自古希腊以来长期是几何学占据统治地位，使得几何学几乎成为数学的同义词. 这种趋势直到17世纪上半叶才开始有所改变. 这一时期，代数学逐渐成熟起来，科学发展也迫使几何学寻求更为有效的思考工具以及更能量化的科学方法. 在这样的推动下，解析几何学诞生了.

其实，解析几何思想的萌芽要追溯到2 000多年前. 早在公元前2世纪，阿波罗尼奥斯（Apollonius，约前262—前190）就具有了坐标的思想；希帕霍斯（Hipparchus，前180—前125）在解决地理中的几何问题时曾明确指出，地面上一点的位置可由两个数来确定. 而天体运动和物体运动的研究对解析几何的产生更是至关重要，如开普勒（J. Kepler，1571—1630）发现行星绕太阳运动的轨迹是椭圆；伽利略（G. Galileo，1564—1642）指出各抛射物体的运动轨迹是抛物线等. 这些无疑为数学提供了用运动观点来研究圆锥曲线和其他曲线的问题. 正是几何图形可以表示运动，启迪人们反过来把静止不变的几何图形，视为变量运动的轨迹. 这就引导数学发生了质的变化——由研究常量的初等数学，进入了研究变量的高等数学.

17世纪，欧洲各国发展迅速. 航海、天文、力学、军事、生产等科学技术的发展，向数学提出了一系列亟待解决的问题：如何进一步掌握行星运动规律，确定地球的经纬度，准确计算炮弹运动轨迹等等，都迫使人们寻求解决变量问题的新方法，这成为解析几何产生的外部条件.

同时，数学本身也具备了建立解析几何的内部条件. 第一个条件是初等数学日臻成熟. 初等几何，远在古希腊时期就基本成熟，其中欧几里得的《原本》和阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》代表了那一时期数学的最高成就. 第二个条件是数学观和数学方法论的重大改变. 经过文艺复兴之后，欧洲人继承和发展了希腊数学观，认为数学是研究自然的有力工具. 这种新的数学观为数学的方法论开辟了一条广阔的途径.

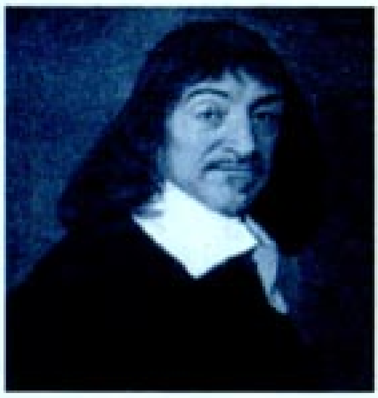
在初等几何和初等代数较为完善成熟的基础上，人们试图用代数方法研究几何问题，于是诞生了一门崭新的数学分支——解析几何.

解析几何的建立第一次真正实现了几何方法与代数方法的结合，使形与数统一起来，这是数学发展史上的一次重大突破. 其中，法国数学家笛卡儿（R. Descartes，1596—1650）和费马（P. de Fermat，1601—1665）堪称解析几何的鼻祖.

4.2 勇于探索的数学家

解析几何使笛卡儿的名字载入史册，远胜于他的任何一项哲学泛论. 解析几何是精密科学进步中所曾迈出的最伟大的一步.

——穆勒



笛卡儿

（R. Descartes，1596—1650）

在近代史上，笛卡儿以资产阶级早期哲学家闻名于世，被誉为第一流的物理学家，近代生物学的奠基人和近代数学的开创者. 1637 年，笛卡儿发表了重要著作《方法论》，其附录的《几何学》使他成为解析几何的创立者之一.

笛卡儿出生于法国一个古老的贵族家庭. 笛卡儿的妈妈在他出生几天后就去世了，父亲竭尽全力照顾他这个“小哲学家”——他总想知道阳光普照下的世间万物的来历，以及保姆讲述的有关天相的全部奥秘.

笛卡儿 8 岁时进入耶稣会学校. 校长注意到他似乎比其他孩子需要更多的休息，所以特许他每天早上高兴躺到什么时候都行，据说他因此养成了清晨卧床静思的习惯，并且几乎终生不变. 每当他打算思考问题时，总是在床上度过他的早晨. 他曾断言：在那些长长的安静的早晨所进行的沉思乃是产生他的哲学和数学的真正源泉.

传说，笛卡儿在一次“晨思”时，看见一只苍蝇正在天花板上爬，他突然想到，如果知道了苍蝇与相邻两个墙壁距离之间的关系，就能描述它的路线，这使他头脑中产生了关于解析几何的最初闪念.

和数学史上任何重大成果一样，笛卡儿的解析几何并非天才人物的突发奇想或空穴来风，都是艰苦探索、潜心思考的结果. 从 1619 年开始，笛卡儿开始用大部分时间来思考他在数学中的新想法：是否可以用代数中的计算过程来代替几何中的证明呢？要这样就必须找到一座能连接几何与代数的桥梁，使几何图形数值化，从而能用数值的方法去解决.

1637 年笛卡儿出版了《方法论》一书，该书主要是哲学著作，但包括 3 个著名的附录：《折光》、《气象》和《几何学》，解析几何的发明包含在《几何学》这篇附录中.

《几何学》开宗明义，在任意选取单位线段的基础上定义了线段的加、减、乘、除、

乘方、开方等运算，用字母符号(a，b，c，…)表示线段．由于笛卡儿用线段表示积、幂，就是可以在几何中自由运用算术或代数术语．他用这些术语将一切几何问题化为关于一个未知线段(z)的单个代数方程：

$$z=b,$$

$$z^2=-az+b,$$

$$z^3=-az^2+bz+c,$$

$$z^4=-az^3+bz^2+cz+d,$$

……

《几何学》的主要目标是讨论如何给出这些方程的标准解法(由线段作图画出)．

笛卡儿在《几何学》中建立了历史上第一个倾斜坐标系，稍后又给出了直角坐标系．笛卡儿《几何学》提出了今天解析几何的基本思想：在平面上引进所谓“坐标”的概念，并借助这种坐标在平面上的点和有序实数对(x，y)之间建立一一的对应关系．每一对实数(x，y)都对应于平面上的一个点；反之，每一个点都对应于它的坐标(x，y)．以这种方式可以将一个代数方程 $f(x, y)=0$ 与平面上一条曲线对应起来，于是几何问题便归结为代数问题，并反过来通过对代数问题的研究可以发现新的几何结果．首次明确提出点的坐标和变数的概念，并借助坐标系用含有变数的代数方程来表示和研究曲线．例如，笛卡儿在解决古希腊数学问题——帕波斯问题时，用二次方程表示圆锥曲线．这是解析几何产生的重要标志．

《几何学》还引入了单位数的概念，使所有的几何量都统一于数的表示，把数与形结合起来．在笛卡儿看来，面积和长度都是数值，没有二次量和一次量之分，这就冲破了传统几何中停留在“形”观念上的束缚，为实现“形”与“数”结合开辟了道路．他还利用实例深刻地指出：几何问题可以归结为代数问题，用代数方法研究几何图形的性质具有极大的优越性．

《几何学》的整个思路与传统的方法大相径庭．他认为“古人的几何学”所思考的只限于形相，而近代的代数学则“太受法则和公式的束缚”，因此他主张“采取几何学与代数学中一切最好的东西，互相取长补短”．正是这种敢于向传统和权威挑战的巨大勇气，以及大胆思索创新的精神，使笛卡儿为自己的科学发现开辟了一条崭新的道路——建立解析几何．

在笛卡儿几何学的基础上，人们可以扩充已有的成果，一步跨入任意维数的空间：在平面上，我们只需两个坐标；在通常的立体空间，需要三个坐标；力学和相对论几何，需要四个坐标；而数学家喜欢的空间，或者需要 n 个坐标，或者坐标数跟所有的自然数 1，2，3，…一样多，甚至像直线上的点一样多．

另外，笛卡儿把以往对立的两个研究对象“数”与“形”统一起来，并引入了变量的概念，这就相当于把运动带进了数学，从此开始了变量数学的领域，成为数学史上一项划时代的变革．恩格斯评价道：数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了．

笛卡儿是一位勇于探索的科学家，他建立的坐标系为现代数学搭建了框架结构，而解析几何则使初等数学嬗变为高等数学. 笛卡儿是 17 世纪欧洲科学界和哲学界最有影响的巨匠之一，无愧为近代科学的始祖.

4.3　业余数学大师

我已经发现了大量极其美妙的定理.

——费马

解析几何学的另一位开山祖师是被人称作“业余数学大师”的费马.

费马

(P. de Fermat，1601—1665)

费马出身于一个法国商人家庭，他本人以律师为职业. 他不仅博览群书、见多识广，而且精通多种语言，他把大部分业余时间都用来钻研古典数学著作并进行大量数学研究. 虽然数学只不过是他的业余爱好，而且他在 30 岁之后才开始从事数学研究，但他在 17 世纪数学史上做出了非常突出的成就.

在解析几何上，费马是一位名符其实的创立者.

费马关于解析几何的主要著作是《平面和立体轨迹引论》(写于 1629 年，1679 年出版). 这是历史上关于解析几何的最早著作. 在这一著作中，已经有了解析几何的两个基本概念：坐标概念以及通过坐标把代数方程同曲线相联系的概念. 费马在“坐标”的基础上，把希腊时期已得到的曲线都表示成了代数方程. 反过来，费马说：“只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一的末端就绘出一条直线或曲线”. 根据这个原理，费马指出如下方程（用今天的符号）的图形：

$c(a-x)=by$　　表示一条直线，

$b^2-x^2=y^2$　　表示一个圆，

$a^2-x^2=ky^2$　　表示一个椭圆，

$a^2+x^2=ky^2$ 和 $xy=a^2$　　表示双曲线，

$x^2=ay$ 和 $y^2=dx$　　表示抛物线.

由于那时还没有负坐标，所以无法表示整个曲线. 同时，他对纵坐标 y 怎样依赖横坐标 x 解释得并不清楚. 但他确实领会到了方程同曲线之间的对应关系. 不仅如此，他也有了坐标变换的概念. 他明确指出：一次方程表示直线，二次方程表示圆锥曲线. 费马后来还定义了新曲线：$x^my^n=a$，$y^n=ax^m$ 和 $r^n=a\theta$.

费马的著作《平面和立体轨迹引论》虽然到 1679 年才正式出版，但该书写成于 1629 年，也就是说他早已经发现了解析几何的基本原理，比笛卡儿 1637 年出版的《几何学》

还早. 他们研究解析几何的方法不大相同：费马主要着眼于继承希腊人的思想，他认为自己只是重新表达了阿波罗尼奥斯的工作；笛卡儿则从批判希腊的传统出发，认为自己是在改变古代的方法. 费马解析地定义了许多新曲线；笛卡儿提出了几种由运动生成的新曲线. 在很大程度上，费马从方程出发，然后来研究轨迹；笛卡儿则从轨迹出发，然后求它的方程. 这正是解析几何基本原则的两个方面. 因此，虽然他们之间发生过谁先发现解析几何的争论，但是历史公正的评价是：他们分别用不同的方法，各自独立的，差不多同时创立了解析几何，他们应该共享创建解析几何的荣誉.

不仅如此，费马还是概率论的创始人之一. 17 世纪的数论几乎是费马的世界. 他更因提出了困扰人类 300 多年的费马大定理而闻名于世［见本章“阅读与欣赏”］.

到 17 世纪，微积分的诞生已势在必然，但在完成它诞生的最后步骤之前，还需要一个对运动轨迹等几何对象进行数量描写的工具，而笛卡儿和费马的解析几何学的出现恰好提供了这个工具. 它是牛顿、莱布尼茨在大体完成微积分之前，为微积分的创立作出贡献最多的一个. 随着许多数学家的不断修改和补充，到 19 世纪后，解析几何已经发展得相当完备，但这并不意味着解析几何的活力已经结束. 事实上，作为一个有效的数学工具，它不仅广泛地应用于物理学和其他工程技术领域，而且常常渗透到各个数学分支，在一个庞大的纵横交错的数学丛林中发挥着积极的作用.

习题

1. 几个世纪以来，几何学一直处于数学教育的核心地位，然而随着代数、解析几何及微积分的出现，数学变得更加符号化、更加抽象了. 如何看待几何学在数学教育中地位的变化？
2. 试总结解析几何与传统几何学的不同.
3. 结合本章，请说出解析几何产生的重要标志是什么？

数学文化

阅读与欣赏

费马大定理——会下金蛋的鹅

在我国，哥德巴赫猜想几乎尽人皆知，虽然它已具有250年历史，但数论中最大的难题之一——费马大定理至少已有350年的历史.

无论中国还是西方，都知道直角三角形的三边（假设a，b为两直角边，c为斜边）有如下关系：$a^2+b^2=c^2$. 由此勾股定理可以得出一个著名的数论问题：满足不定方程❶$x^2+y^2=z^2$的正整数解有没有？有多少？容易验证，3，4，5就是这个方程的一组解. 关于这个不定方程的完备结果出现在公元3世纪古希腊数学家丢番图的《算术》当中.

到了17世纪，费马看到《算术》中介绍$x^2+y^2=z^2$的解时，突发灵感，在书的页边上写道："将一个高于二次的幂分为两个同次幂，这是不可能的. 关于此，我确信已发现一种美妙的证法，可惜这里空白的地方太小，写不下."这就是有名的费马大定理：（用现代语言叙述）

当整数$n>2$时，方程$x^n+y^n=z^n$不存在正整数解.

正是这个《算术》书的旁注激发了几乎所有优秀数学家的兴趣，他们经过无数的努力但都没能攻克它. 因此，西方把这个并没有证明的定理称为费马大定理. 由于在解决这个问题的过程中，它的研究带动了数论乃至整个数学的发展，给数学带来了新的理论、新的技术、新的方法，开拓了新的学科领域，从而促进了数学的进展. 因此费马大定理被称为"会下金蛋的鹅".

维尔斯

（Wiles，1953— ）

在经历了众多前人的努力后，费马大定理终于在1995年被英国数学家维尔斯（Wiles，1953— ）证明了. 对这个困扰世间350多年的难题的解决充分显示了人类智慧的无限威力. 维尔斯因此连续获得了一系列大奖及其他荣誉，其中包括：1995～1996年度的沃尔夫数学奖；1996年的奥斯特洛夫斯基奖；1996年的美国国家科学院数学奖；1996年当选为美国国家科学院外籍院士.

费马大定理的证明被英国《卫报》称为是一项"世纪性的成就"，它充分反映出当今数学发展的特点之一——各门学科的大联合.

❶ 不定方程是未知数的数目比方程的数目多的方程或方程组，例如方程$x^2+y^2=z^2$有三个未知数，而只有一个方程，3>1.

第五章　运动与变化的数学——微积分诞生记

客观世界的一切事物，小至粒子，大到宇宙，始终都在运动和变化着．如何用数学来描述运动现象就成为众多数学家努力的方向．17世纪，在生产、技术需求的刺激之下，科学以前所未有的速度向前发展．在这一时期，天文、测量、机械、工程等许多领域亟待解决求面积、体积、速度、曲线的切线等问题，迫切需要一种有理有据的成型的数学算法．而此时，解析几何的创立将变量引进数学，使运动和变化的定量表述成为可能．正是在这样的背景下，诞生了近代数学乃至整个数学发展史上最伟大的成就之一——微积分．

5.1　两千年的孕育

微积分是微分学和积分学的总称．微积分的思想萌芽，特别是积分学，部分可以追溯到古代．自古以来，面积和体积的计算就是数学家们感兴趣的问题．在古代希腊、中国和印度数学家们的著述中，不乏用无穷小过程计算特殊形状的面积、体积和曲线长的例子．如阿基米德成功地将“穷竭法”［见1.3节］应用于求复杂曲边形的面积，刘徽和祖冲之父子等人的工作，都是人们建立一般积分学的漫长努力．

虽然，极限理论不止一次地出现在古代数学家的著作中．如在《庄子》的“天下篇”中，就有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的文字记载；刘徽在他的“割圆术”［见2.3节］中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周和体而无所失矣．”但与积分学相比，微分学的真正起源则要晚得多．1608年，荷兰眼镜制造商里帕席发明了望远镜，这不仅引起了天文学的新高涨，而且推动了光学的研究．开普勒的行星运动三大定律和伽利略的动力学标志着自文艺复兴以来，蓬勃发展的自然科学使微分学的基本问题成为人们关注的焦点：求即时速度、曲线的切线以及函数的最大值和最小值等．例如，确定天体、炮弹等非匀速运动物体的速度与加速度使瞬时变化率问题的研究成为当务之急．望远镜的光程设计需要确定透镜曲面上任一点的法线，这使得求任意曲线的切线问题变得不可回避．

在解析几何创立之前，人们主要采用几何方法解决微积分问题．笛卡儿和费马创立的解析几何是代数与几何相结合的产物，使得微积分先驱者们考虑的几何问题有了代数化的可能，他们两人也成为将坐标方法引入微分学问题研究的先锋．笛卡儿在求切线时提出了所谓的“圆法”，它在本质上是一种代数方法，是牛顿研究微积分的起点．

巴罗为求曲线的切线，提出与笛卡儿不同的几何方法，引入了微分三角形的概念．这种微分三角形正是莱布尼茨创立微积分的着眼点．巴罗不仅是微积分的先驱之一，而且还

是一位知人善任，勇于为人才开路的“伯乐”，或许他更大的功绩是培养出了一位令他永远感到自豪的学生——牛顿.

5.2　站在巨人的肩膀上

我不知道世上的人对我会怎么看；但自认为我不过像一个在海边玩耍的孩童，不时为拾到几块异乎寻常地美妙的卵石或贝壳而沾沾自喜，对于展现在我面前的浩瀚的真理海洋，却全然没有发现.

——牛顿

这是牛顿在他漫长的一生行将结束时对自己的评价. 然而，有能力评价他工作的后继者们差不多毫无例外地把他当作是人类天才的顶峰. 拉格朗日称牛顿是历史上最有才能的人，也是最幸运的人，因为宇宙体系只能被发现一次. 英国诗人波普（Pope）这样来描述这位伟大的科学家：“自然和自然的规律沉浸在一片混沌之中，上帝说，生出牛顿，一切都变得明朗.”

牛顿

(I. Newton，1642—1727)

牛顿在伽利略去世那年——1642 年（儒略历）出生于英国林肯郡的一个农民家庭. 少年牛顿不是神童，成绩并不突出，但酷爱读书和制作玩具. 17 岁时，牛顿被母亲从他就读的格兰瑟姆中学召回田庄务农. 但在牛顿的舅舅和中学校长斯托克斯（J. Stokes）的竭力劝说下，牛顿在九个月后又重返学校. 斯托克斯的劝说辞中，有一句话可以说是科学史上最幸运的预言，他对牛顿的母亲说：“在繁杂的农务中埋没这样一位天才，对世界来说将是多么大的损失！”

牛顿于 1661 年进入剑桥大学三一学院，1665 年获学士学位. 在这里，他幸运地遇到了自己的“伯乐”——著名的数学家巴罗. 牛顿在师从巴罗的过程中开始了微积分的研究，并深得巴罗的启发和指导，取得了长足的进步. 最难能可贵的是，1669 年巴罗宣布牛顿的学识和才能已经超过自己，推荐牛顿替代自己接任“卢卡斯数学教授”一职. 当时牛顿年仅 26 岁，既未发表过著作也未受到人们的注意. 但这一职务使他的才能得到更好的发挥，为他的科学研究开创了一个良好的起点. “巴罗让贤”的故事也被传为数学史上的一段佳话.

牛顿说过：“我之所以比别人看得远，是因为我站在巨人的肩膀上.” 牛顿从笛卡儿那儿继承了解析几何学；从开普勒那儿学到了行星运动三大定律；从伽利略那儿获得了物体运动定律的启示. 但这些砖石并不等于大厦，牛顿才是数学和力学大厦的杰出建筑师.

不平凡的十八个月

1665 年夏至 1667 年春，牛顿为了躲避瘟疫从剑桥回到家乡．在家乡躲避瘟疫的这 18 个月，竟成为牛顿科学生涯中的黄金岁月：发明流数术（微积分），发现万有引力定律，用实验证明白光是由各色光所组成……可以说牛顿一生大多数科学创造的蓝图，都是在这 18 个月中描绘的．

牛顿对微积分问题的研究始于 1664 年秋，当时他对笛卡儿的圆法产生兴趣并试图寻找更好的方法．同时，牛顿首创符号“o”表示 x 的无穷小增量——“瞬”．1665 年11 月，牛顿发明“正流数法”（微分法）；1666 年 5 月又建立“反流数法”（积分法）．1666 年 10 月，牛顿将上述成果整理成论文《流数简论》，在同事间流传，这是历史上第一篇系统的微积分文献．《流数简论》反映出牛顿微积分的运动学背景：以速度形式引进了“流数”（微商）的概念．特别重要的是，牛顿在《流数简论》中建立了微积分基本定理：微分与积分是互逆的关系，并以此作为建立微积分普遍算法的基础．

《流数简论》标志着微积分的诞生，但它在许多方面还不成熟，牛顿为了改进和完善自己的微积分学说，先后写成了三篇论文：《运用无穷多项方程的分析学》（以下简称《分析学》）、《流数法和无穷级数》（以下简称《流数法》）和《曲线求积术》（以下简称《求积术》）．这三篇论文分别代表了牛顿思想发展的三个阶段．

《分析学》中的思想在 1665～1666 年已有，1669 年写成，1711 年出版．在这篇论文中，牛顿利用无穷级数来计算流数、积分及解方程．牛顿以无穷小增量“o”为基本概念，却回避了《流数简论》中的运动学背景，将“o”看成静止的无穷小量，有时直接令其为零．

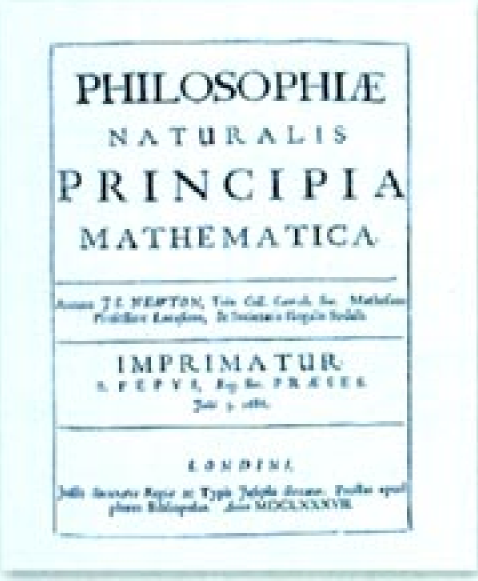
《流数法》写于 1671 年，但直到 1736 年（牛顿去世 9 年后）才发表，是《流数简论》的直接发展．牛顿在其中又恢复了运动学观点，把时间看成是最基本的自变量，是衡量一切变化的标准尺度．《流数法》用力学解释趋于零的变量．

无论是《分析学》还是《流数法》都是以无穷小作为微积分算法的论证基础，而“o”成为“招之即来，挥之即去”的神秘物，牛顿为了克服这一困难，又写了《求积术》一文．《求积术》写于 1676 年，1704 年出版，是牛顿最成熟的微积分著作．牛顿在其中引入“最后比”概念，试图建立没有无穷小的微积分．他对“最后比”的解释相当于今天的当增量 $\Delta x \to 0$ 时，比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限为$f'(x)$的思想．牛顿还第一次引进流数记号：$\dot{x}$ 表示变量 x 的一次流数（导数），$\ddot{x}$ 表示二次流数，$\dddot{x}$ 表示三次流数，往后依次类推．

牛顿对于发表自己的科学著作态度谨慎，大多数著作都是经朋友再三催促后才发表，所以发表时间经常晚于写作时间很多年．牛顿的微积分学说最早的公开表述出现在 1687 年出版的力学名著《自然哲学的数学原理》（以下简称《原理》）中，《原理》堪称数学史上划时代的著作．

物理学和数学的成功结合

《原理》共分 3 卷，包括物体运动理论和万有引力的讨论，是牛顿最伟大的著作．《原


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

IMPRIMATUR

LONDINI

牛顿的《自然哲学的数学原理》

理》的出版标志着自然科学史上的第一次理论大综合．但是，牛顿无论在一般方法上还是在具体研究上都是以数学家的身份去探索自然的，因为他相信自然界是用数学设计的．

《原理》被爱因斯坦（A. Einstein，1879—1955）称赞为“无比辉煌的演绎成就”．全书从三条基本的力学定律出发，运用微积分工具，严格地推导证明了包括开普勒行星运动三大定律、万有引力定律等在内的一系列结论，并且将微积分应用于流体运动、声、光、潮汐、彗星乃至宇宙体系，充分显示了这一新数学工具的巨大威力．

《原理》中的微积分命题虽然都采用几何形式来叙述、证明，但牛顿在发明微积分时却是从笛卡儿的代数方法入手，并没有多少综合几何的背景．而几乎就在同时，他开始研究微积分，并在不到一年的时间里取得了基本发现．牛顿后来才重新钻研了巴罗译注的《原本》，弥补了几何方面的不足，完成了《原理》中的几何表述．

牛顿在写作《原理》时，付出了艰辛的劳动．那时候，他常常陷入极度的冥思苦想之中，连自己是否吃饭都记不清楚．有时，他的衣服只穿一半就一整天失神地坐在床沿上．他从不休假或休息片刻，只有当他以卢卡斯数学教授的身份去讲课时才离开房间．他很少在夜里两三点钟以前睡觉，常常是在凌晨五六点钟才上床，一天总共只睡四五个小时．没有这种超过一般人的勤奋和努力，完成《原理》的写作是不可能的．

充满荣耀的晚年

1696 年，牛顿成为造币厂总监，但他的数学天才并没有消亡．一天，牛顿精疲力尽地回到家中，听说约翰·伯努利（Johann Bernoulli，1667—1748）和莱布尼茨向全欧洲的数学家提出了“最速降线问题”❶．当天晚饭后他就解决了这个问题．第二天他把结果匿名地送到了皇家学会．当伯努利看到这个正确而巧妙的解答时，立即断定只有牛顿才能在这么短的时间内给出答案，他惊呼道：“呵！我从狮子的利爪中认出了它！”

注

❶ 最速降线问题：一个质点在重力作用下，从一个给定点到不在它垂直下方的另一个点，如果不计摩擦，问：沿着怎样的曲线滑下所需时间最短？

当别人问牛顿是如何做出那些自然科学发现时，他说：“心里总是装着研究的问题，等待那最初的一线希望渐渐变成普照一切的光明．”他认为，如果自己在科学上做了一点事情，那完全归功于自己的勤奋和耐心思考．据他的助手回忆，牛顿往往一天伏案工作 18 个小时左右，送到书房的午餐和晚餐经常一口未动．偶尔去食堂用餐，出门便陷入思考，兜个圈子又回到住所．除了顽强的毅力和失眠的习惯，牛顿不承认自己与常人有什么区别．

牛顿为人类做出了巨大的贡献，赢得了崇高的地位．1703年，他被选为皇家学会主席，连任24年，直到逝世．1705年，他被封为爵士．1727年，他在病痛中死去，终年85岁．法国作家伏尔泰（Voltaire，1694—1778）在其隆重的葬礼上看到英国的大人物都争抬牛顿的灵柩时，感叹道："英国人悼念牛顿就像悼念一位造福于民的国王．"

综观牛顿的一生，他不愧为世界上最伟大的数学家之一．他不仅提出流数法，成为微积分的创始人，而且，在数学的许多领域都取得了伟大的成就．就连莱布尼茨都称赞道，"在从世界开始到牛顿生活的年代的全部数学中，牛顿的工作超过一半．"

5.3 万能大师

我有那么多的想法，如果那些比我更敏锐的人有一天深入到它们之中，把他们绝妙的见解同我的努力结合起来的话，它们或许有些用处．

——莱布尼茨

在微积分的创立上，牛顿与莱布尼茨共同分享荣誉．

莱布尼茨是德国莱比锡一位哲学教授的儿子，自幼接触古希腊罗马文化，阅读了许多著名学者的著作，由此而获得了坚实的文化功底和明确的学术目标．15岁时，他进入莱比锡大学学习法律，还广泛阅读了培根、开普勒、伽利略等人的著作，并对他们的著述进行深入的思考和评价．

莱布尼茨

（G. W. Leibniz，1646—1716）

莱布尼茨在21岁获得法学博士学位后便投身外交界．在出访外国期间，莱布尼茨研究了笛卡儿、费马、巴罗等人的著作．他的兴趣已明显地朝向了数学和自然科学，开始了对无穷小演算的研究，独立地发现了微积分的基本概念与算法，和牛顿并蒂双辉地开创了微积分．

与牛顿流数术的运动学背景不同，莱布尼茨创立微积分首先是出于对几何问题的考虑，尤其是对微分三角形的研究．1673年开始写作的《数学笔记》中有莱布尼茨的微积分思想、符号和计算方法．莱布尼茨是数学史上最伟大的符号大师之一．他曾经说过："要发明，就要挑选恰当的符号，用含义简明的少量符号来表达和比较忠实地描绘事物的内在本质，从而最大限度地减少人的思维劳动．"他用拉丁文Summa（求和）的第一个字母S的拉长——$\int$表示积分和用dy，dx表示微分，这些符号沿用至今，对微积分的发展

起了很大的促进作用．莱布尼茨借助解析几何发现，“$\int$意味着和，d意味着差.”他用和与差的关系说明$\int$与d的互逆关系．这样，莱布尼茨明确地指出了积分和微分是互逆过程，这成为他具有微积分思想的标志.

1684年，莱布尼茨发表了他的第一篇微分学论文《一种求极大与极小和求切线的新方法》(简称《新方法》)，这也是数学史上第一篇正式发表的微积分文献．1686年，莱布尼茨又发表了他的第一篇积分学论文《深奥的几何与不可分量及无穷的分析》．至此，莱布尼茨的微积分思想被公诸于众.

莱布尼茨的博学多才在科学史上非常罕见，他的研究领域涉及哲学、历史、语言、数学、生物、地质、物理、机械、神学、法学、外交等，并在每个领域中都有杰出的成就．在数学上，他的贡献也远不止于发明了微积分.

莱布尼茨1679年撰写的《二进制算术》，使他成为二进制的发明人．我们通常用的十进制系统中每个数位均有十个符号可供选择，而二进制系统中只有两个符号，一个表示虚位，另一个表示实位，所以是最简单的数字记数法．二进制在现代被应用于计算机设计，而莱布尼茨没有将它运用到自己设计的可进行四则运算的计算机上．但是，他发现二进制数可以给中国《易经》的六十四卦图一个很好的数学解释，所以，莱布尼茨高兴地说：“可以让我加入中国籍了吧！”

5.4 异曲同工

17世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨独自研究并完成了微积分的创立工作．虽然这只是初步的工作，但他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起．他们能够从孕育微积分的多种“个例”中，洞察和整理出潜藏着的共性东西——微积分，并把它提升和确立为数学理论.

微积分的产生是数学发展史上的重大事件，从此数学真正进入变量数学时期．正因为其意义重大，所以在牛顿和莱布尼茨的故乡英国和欧洲大陆之间发生了一场关于建立微积分优先权问题的争论，双方都有一大批忠实的支持者．争论长达一个多世纪之久，致使两个地区的学者互不往来．由于牛顿在《原理》中给微积分披上几何的外衣，使他的流数术显得僵硬呆板．固守牛顿的几何形式，沿用牛顿的落后记号，成为18世纪阻碍英国数学发展的绊脚石.

经过数学史家严肃的考证和认真的研究，一致认为牛顿和莱布尼茨二人基本同时、各自独立地创立了微积分．从下表可以看出，就发明时间而言，牛顿先于莱布尼茨；就发表时间而言，莱布尼茨则早于牛顿.

微积分的创作及发表	主要创作年代	发表年代
牛　顿	1665—1667	1687，1704，1711，1736
莱布尼茨	1673—1676	1684，1686

因此建立微积分的光荣应同属于他们二人，微积分基本公式也被后人称为“牛顿-莱布尼茨公式”.

在建立微分学时，牛顿主要从力学出发，以速度为模型建立了微分学；而莱布尼茨则主要从几何出发，从作曲线在一点的切线开始建立微分学. 他们二人采取了不同的符号，牛顿用 $\dot{x}$ 表示 x 的流数，即导数；而莱布尼茨用 $\mathrm{d}x$ 表示 x 的微分等. 后者由于精心设计，反复改进，成为沿用至今的符号. 欧洲大陆的数学得以迅速发展，莱布尼茨的巧妙符号功不可没. 牛顿和莱布尼茨的学风也不尽相同，作为科学家的牛顿，学风严谨，小心谨慎，人们认为他迟迟不发表微积分著作的原因，是没有找到合理的基础；但作为哲学家的莱布尼茨则比较大胆，富于想象，勇于推广. 牛顿严谨的治学精神和莱布尼茨大胆的开创精神都是发展科学所必需的.

不管牛顿和莱布尼茨的研究方法有多么不同，经过两人的工作后，微积分已不再像古希腊时代那样，所有数学都是几何学的一个分支或几何学的延伸，而成为一门崭新的独立学科——研究变量及其关系的数学. 他们把微积分建立在符号运算的基础上，把一般方法应用于解决不同的几何和物理问题，而不仅仅是解决某些问题或某一类具体问题. 牛顿和莱布尼茨都把求积问题，如求面积、体积等问题归结为求微分的反问题，从而建立起微积分基本定理.

微积分的创立，被恩格斯誉为“人类精神的最高胜利”. 在 18 世纪，微积分进一步深入发展，在与实际应用的紧密交织下，刺激和推动了许多数学新分支的产生，从而形成了具有鲜明特点的数学领域——分析学. 但是，当初牛顿和莱布尼茨在建立微积分时，以无穷小为基础缺乏严密的逻辑性，最终导致第二次数学危机［见“阅读与欣赏”］的爆发. 经过近一个世纪的不懈努力，数学家们终于在严格化的基础上重建了微积分：法国数学家柯西建立了极限理论，德国数学家魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815—1897）以现代的“$\varepsilon-\delta$”方式重新定义了微积分的基本概念.

微积分在具有了坚实的严格化基础后，任意驰骋在近代和现代的科学技术园地中，建立起无数的丰功伟绩！

习　题

1. 思考微积分的思想方法对数学科学及自然科学发展的作用.
2. 请简单归纳促进微积分建立的主要因素.
3. 简述牛顿、莱布尼茨建立微分学的不同的研究方法.

数 学 文 化

阅读与欣赏

第二次数学危机

1820年以前，在微积分中占优势的是无穷小算法：导数是无穷小之比，积分是无穷小之和．至于什么是无穷小，当时并没有一个公认的精确定义，而是随着运算的进行，无穷小时而为零，时而又非零．微积分遇到如此严重的逻辑困难，一些唯心主义者抓住它进行猛烈的攻击．

英国大主教贝克莱（G. Berkeley，1685—1753）是攻击微积分的典型代表．1734年他发表了一本名为《分析学家——与一个不信神的数学家的对话》，咒骂牛顿的微积分的推导是“分明的诡辩”，污蔑微积分“招摇撞骗，把人们引入歧途”．他极尽谩骂之能事，实质在兜售唯心论，维护宗教神学．

与此同时，莱布尼茨在大陆上也遭到荷兰纽汶提（B. Nieuwentijdt，1654—1718）的责难．纽汶提认为莱布尼茨说不清“无穷小”与“0”的区别，并认为在推导过程中不该略去无穷小．

在贝克莱的挑动下，造成了数学史上的“第二次数学危机”，展开了一场关于微积分基础问题的大论战，长达10多年之久．这场论战激励着大批数学家，如法国的达朗贝尔（J. le R. d'Alembert，1717—1783）、拉格朗日等对微积分基础概念的深入研究，促进了微积分理论基础的建设．微积分在实践中的胜利，迫使贝克莱后来也不得不承认“流数术是一把万能的钥匙，借着它，近代数学家打开了几何以至大自然的秘密．”

最后，直到19世纪初，柯西和魏尔斯特拉斯对微积分进行了严格化后，才克服了第二次数学危机．

第六章　近代数学的两座灯塔——欧拉与高斯

在数学的长河中，有成千上万的数学家为数学的发展做出了可贵的贡献．其中，阿基米德、牛顿、欧拉和高斯被称为数学史上的“四杰”．他们不仅为后人留下了极其丰富的科学遗产，而且他们为科学献身的精神指引着所有后来者勇往直前．前面我们已经介绍过阿基米德和牛顿，下面我们来介绍一下另外两位伟大的数学家．

6.1　征服黑暗的欧拉

读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师．

——拉普拉斯

“欧拉进行计算看起来毫不费劲儿，就像人进行呼吸，鹰在风中盘旋一样”（阿拉戈[1]语），这对欧拉无与伦比的数学才能来说并不夸张．他是18世纪数学界的中心人物，是继牛顿之后最重要的科学家之一．

注

[1] 阿拉戈（D. F. J. Arago，1786—1853），法国物理学家，天文学家．

万能顾问

欧拉出生于瑞士巴塞尔的一个牧师家庭．他自幼聪慧过人，对数学具有浓厚的兴趣．1720年，年仅13岁的欧拉进入巴塞尔大学．他才思敏捷，学习刻苦，课堂进度远远不能满足他的求知欲望，于是他独立学习和研究更艰深的数学著作，他认为这是在数学学科上获得成功的最好方法．

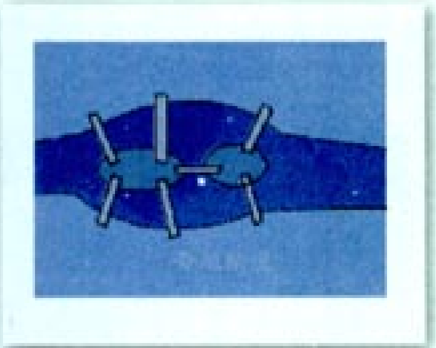
欧拉
（L. Euler，1707—1783）

欧拉15岁在巴塞尔大学获学士学位，翌年又获得哲学硕士学位，19岁便开始发表论文．1727年，欧拉抵达俄国圣彼得堡，从此，他的一生和科学工作都同圣彼得堡科学院和俄国紧密地联系在一起．在圣彼得堡的头14年间，欧拉以无可匹敌的工作效率在分析学、数论和力学等领域做出了杰出的成果．

到1741年，欧拉完成近90种著作，可谓硕果累累，就连他的导师约翰·伯努利都称他为“最善于学习和最有天赋的科学家”．欧拉除了发表大量精湛的数学论文外，还应俄国政府的要求，解决了许多诸如地图

学、造船业中的实际问题．然而，由于过度疲劳，欧拉在年仅 28 岁时右眼失明，但他仍旧坚韧不拔地工作着．

1741 年，欧拉应普鲁士国王腓特烈大帝（Frederich the Great，1712—1786）邀请出任柏林科学院物理数学所所长，同时负责给国王的侄女讲授数学、天文、物理、宗教等课程，在这 25 年中，欧拉为柏林和圣彼得堡科学院递交数百篇科学论文．1766 年欧拉在沙皇女王的再三邀请下，不顾俄国严寒的天气对其视力的影响，重返圣彼得堡，不料左眼视力也日趋衰弱，最终双目失明．在此后的生活中，欧拉是在全盲中度过的，但是他凭着顽强的毅力、超人的才智、渊博的知识，坚持科学研究．通过对大儿子 A·欧拉（1734—1800，数学家和物理学家）口授论文，他又发表了多部专著，近 400 篇论文．

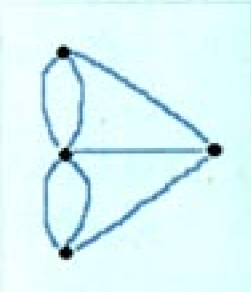


哥尼斯堡七桥问题

18 世纪初流传着一个著名的数学问题——哥尼斯堡七桥问题：哥尼斯堡城内有一条河，河的两条支流绕过两个小岛，河上建有七座桥，如左图所示．问一个人从某地出发，能否经过每座桥一次且只一次，最终又回到出发点？

许多人都投入到这道趣题当中，但谁也无能为力．于是求救信递到欧拉的面前，因为人们把欧拉当作智慧的象征，相信他是万能的．欧拉果然不负众望圆满地解决了这一问题，证明这种走法不存在．欧拉首先将这个问题化繁为简，把被河流隔开的小岛和两块陆地看成四个点，把每座桥看成一条线，便得到如下图形．

这样一来，七桥问题就抽象为四个点和七条线组成的几何图形，这样的几何图形在数学上叫网络．于是，“哥尼斯堡七桥问题”就变成“从四个点中某一个点出发，能否一笔把这个网络画出来”．这就是所谓的“一笔画”问题．欧拉进一步研究发现，根本就不存在这样一条无重复地走过所有七座桥的路线．欧拉利用几何的抽象化和理想化将七桥问题转化为一个图论问题，通过简单图形来完成从实际到数学模型的转化．



七桥问题的简化图

分析的化身

18 世纪微积分最重大的进步是由欧拉做出的．欧拉出版的《无穷小分析引论》（1748）、《微分学》（1755）和《积分学》（1768—1770）是微积分史上里程碑式的著作，在很长时间里被当作分析课本的典范而普遍使用．这三部著作包含了欧拉本人在分析领域的大量创造，同时引进了一批标准符号，如：i——$\sqrt{-1}$，e——自然对数的底，$f(x)$——函数，$\sum$——求和等等，这为以后的学习与研究带来极大的方便，对分析表述的规范化起了重要作用．

欧拉在学生时代就阅读过洛必达（G. F. A. de L'Hospital，1661—1704）的《无穷小分析》，这是继牛顿、莱布尼茨之后第一本系统的微积分著作．当欧拉来到柏林科学院后，在那里读到了莱布尼茨的大量论文和手稿，这对于欧拉数学思想的完善和发展起了重大作

用. 欧拉从这些论文和手稿中逐渐悟出了莱布尼茨自然哲学思想的真谛，抓住了微积分的精髓. 他记下了大量笔记，由此产生了要写一部全面系统的微积分专著，把这门新兴学科提高到一个新水平的思想.《无穷小分析引论》（以下简称《引论》）就是这一思想的结晶. 欧拉在《引论》的序言中写道："不妨公开声明，在这本书中不仅包括许多全新的内容，而且也指出了它们的来源，读者们从这里可以获得许多重要的发现." 数学史家认为，《引论》是第一部最系统的分析学著作.

《引论》首次把函数概念放在突出的地位，并把函数概念作为全书的基础.《引论》的第一章就是函数概论. 第四章是用无穷级数解释函数，给无穷级数理论注入了新的生命. 第六章是用函数观点讨论指数与对数.《引论》把三角学发展到一个崭新的阶段，使三角学脱离天文学而发展为分析学的一个分支. 欧拉用分析方法研究三角学时，发现了一个重要公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$. 欧拉令 $x=\pi$，便得到一个奇妙的恒等式：$e^{i\pi}+1=0$. 这个恒等式把数学中最重要最基本的 5 个数 1，0，i，π，e 用一个恒等式联系起来了. 德国数学家克莱因（C. F. Klein，1849—1925）认为，这是整个数学中最卓越最漂亮的公式之一.

欧拉的《引论》及他的其他一些著作，对以后的数学家有极大的吸引力. 因为欧拉是杰出的方法发明家，是善于用归纳法进行数学研究的大师. 他在自己的著作中，总是下功夫把有关的归纳证明细心地、详尽地、有条有理地写出来，坦率地表述把他引向发现的那些思想. 因此，读欧拉的著作，不只是能从中学到现成的结论，更重要的是能学到获得这些结论的思考方法. 大概由于这个缘故，欧拉的著作被视为学习数学的最好学校. 高斯在信中写道："学习欧拉的著作，乃是认识数学的最好工具."

鉴于欧拉对微积分的贡献，同时代的人称他为"分析的化身"，约翰·伯努利这样赞许这位学生在分析方面的青出于蓝："我介绍高等分析时，它还是个孩子，而欧拉正在将它带大成人."

硕果累累

欧拉是历史上最多产的数学家，他的数学专著和论文蔚为大观，文集计划可达 84 卷. 他撰写长篇学术论文就像一个才思敏捷的作家给朋友写信那样容易. 欧拉的足迹遍及数学的所有分支，他在微积分、微分方程、曲线曲面的解析几何、微分几何、数论、级数、变分法上都有卓越的贡献. 他巧妙地把握数学，是优秀的发明家，也是熟练的巨匠. 人们可以在数学的所有分支中找到他的名字，其中有欧拉公式、欧拉多项式、欧拉常数、欧拉定理、欧拉积分、欧拉线等等.

欧拉的多产得益于他一生非凡的记忆力和心算能力，他在 70 岁时还能准确地回忆起年轻时读过的荷马史诗的每页头行和末行. 他能够背诵出当时数学领域的主要公式和前 100 个质数的前六次幂，不仅一般的代数运算，就连复杂的高等数学，他都能准确无误地进行心算.

欧拉是理论联系实际的典范，他运用数学工具观察星球运动，为光学和天体望远镜做出了重大贡献；他研究了"等周问题"、"最速降线问题"，成为变分法的奠基人. 欧拉堪

称优秀的教师，撰写了力学、代数学、数学分析、解析几何、微分几何、变分法方面的课本，这些教材在后来100多年甚至更长时间内都是标准的著作.

欧拉品德高尚，爱护人才，当他得知拉格朗日在“等周问题”上获得成果，就压下自己的有关论文不发表，使拉格朗日的论文得以问世. 欧拉能够在任何地方、任何条件下进行工作. 由于他非常喜欢孩子（他一生有过13个孩子，除5个外都夭折了），所以在写作论文时常常膝上抱着婴儿，大一点的孩子则绕膝玩耍. 在撰写艰深的数学论文时，他那种轻松自如令人难以置信. 据说，欧拉常常在两次叫他吃晚饭的半小时内赶出一篇数学论文.

1783年9月18日下午，欧拉在和同事讨论了天王星轨道计算后疾病发作，他喃喃自语道：“我要死了！”就这样，“他停止了计算，也停止了生命”. 欧拉不仅在数学方面作出了伟大的贡献，而且还将数学应用到了力学、天文学、物理学等方面，为人类留下了巨大的科学财富，这位“数学家之英雄”永远属于整个世界文明.

6.2　数学王子高斯

像19世纪数学在创造性的科学思想方面所产生的其他一切事物一样，对系统算术的进一步精辟阐述和发展是与高斯连在一起的.

——克罗内克

德国数学家高斯被后人誉为“数学王子”，这种赞誉恰如其分. 他是18到19世纪数学史上的杰出代表，起着承上启下的作用. 18世纪的数学处于分析学蓬勃发展的时代，数学家们往往毫不顾及推理的严格性，而得到大量与天文学、力学等有联系的分析学成果. 数论、代数学和综合几何学也只有较零散的结果. 这时，高斯强调数学作为一门严谨的科学，必须要追求明确的定义、清晰的假设、严格的证明以及成果的系统化，倡导了至今已延续近200年的现代数学传统.

数学神童

高斯1777年出生在德国的布劳恩什维格，祖父是农民，父亲靠手艺维持家庭生计，母亲是石匠的女儿. 高斯的舅舅心灵手巧，是当地出名的织绸能手，他一有机会就教育高斯，把所知道的一些知识传授给他.

高斯

(C. F. Gauss，1777—1855)

传说高斯在很小的时候就已经学会了计算. 在他3岁时的一天，他观看父亲计算工人们的周薪. 父亲喃喃地计数，就在他长叹一声准备写下钱数时，身边传来微小的声音：“爸爸！算错了……”父亲惊异地再算一次，果然小高斯讲的是正确的.

另外一个著名的故事也可以说明高斯很小的时候就

有很快的计算能力．当他还在小学读书时，一天，算术老师要求全班同学算出以下的算式：

$$1+2+3+4+\cdots+98+99+100=?$$

在老师把问题讲完不久，高斯就在他的小石板上端端正正地写下答案 5 050，而其他孩子算到头昏脑胀，还是算不出来．最后只有高斯的答案是正确无误的．原来高斯不是按着 1，2，3 的次序一个一个往上加，而是发现 1 加 100 是 101，2 加 99 是 101，直到 50 加 51 还是 101，这样一共有 50 个 101，用 50 乘 101 就是 5 050 了．他用的方法是古代数学家经过长期努力才找到的求等差级数和的方法．

高斯的算术老师发现了这个“神童”，大喜过望，甚至说：“他超过了我，我已经没有什么可以教给他的了．”于是自掏腰包买了一本数学书送给高斯．

高斯家里很穷，为了节省灯油，天一黑，父亲就要他上床睡觉．然而，高斯太喜欢读书了．他把一个大萝卜挖空，塞进一块油脂，插上粗棉卷成的灯芯做成一盏小油灯．他一个人躲在顶楼上，在微弱的灯光下，专心一意地看书学习，直到被疲劳和寒冷压倒才睡觉．

据说有一天，14 岁的高斯一面走在回家的路上，一面全神贯注地看书，不知不觉走进了布劳恩什维格公爵费迪南德（Duke Ferdinand）的庄园．恰巧公爵夫人遇到这个沉迷于书本的孩子，通过和他交谈，她发现高斯竟然完全明白书中的深奥内容．通过公爵夫人的引见，高斯受到公爵的赏识，他日后学习的全部费用由公爵负担，这样高斯有了接受高等教育的机会．

数学世界里处处流芳

在公爵善意的帮助下，15 岁的高斯进入一所著名的学院．在那里他学习了古代和现代语言，同时也开始对高等数学作研究．他很快掌握了微积分的思想和方法，并且直接阅读牛顿、欧拉、拉格朗日这些大数学家的外文原著．在这期间，高斯写了许多日记，记录了他的深刻见解、新颖思想和巧妙方法，为他日后继续研究各种问题打下了坚实的基础．

1795 年，高斯在公爵的资助下来到格丁根大学．高斯对古代语言非常感兴趣，他还拿不定主意，不知是继续攻读数学，还是研究古代语言．如果以现实观点来看，学数学以后找工作是不大容易的．1796 年 3 月 30 日，年仅 19 岁的高斯用圆规和直尺作出了正 17 边形，解决了 2 000 多年来的一大难题．

我们知道当 $n\geqslant 3$ 时，正 n 边形是指那些每一边都相等，内角也一样的 n 多边形．早在公元前 3 世纪，希腊数学家欧几里得就知道用圆规和没有刻度的直尺可以作出正 3，4，5，6，8，10，15 边形等等．但是，在这之后的 2 000 多年以来没有人知道怎样用圆规和直尺构造正 7，9，11，13，17 边形．2 000 多年来，许多数学家总是努力构造这些正多边形，谁也没有反过来想一想：或许有些正多边形单用圆规和直尺是根本作不出来的．

高斯用代数方法漂亮地解决了 2 000 多年来的几何难题，而且找到正 17 边形的尺规作图法．更可贵的是，他还证明了单用圆规和直尺根本作不出正 7，9，11，13 和 14 边形．他深入研究了正多边形的规律，得出一般公式，把能否用尺规作出的正多边形清清楚

楚地表示出来．这个发现在数学史上很重要，高斯兴奋极了，下定决心把自己的一生献给数学．

据说，高斯甚至在遗嘱中曾建议为他建造以正 17 边形棱柱为底座的墓碑．然而在他的纪念碑上只刻着一颗十七角星，原来是负责刻纪念碑的雕刻家认为，正 17 边形与圆形太像了，大家一定分辨不出．

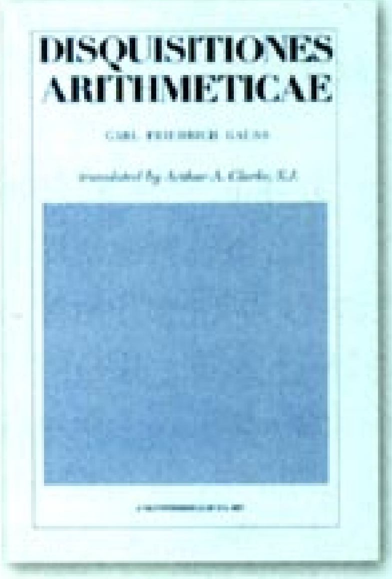
1799 年，高斯完成了他的博士论文，他在这篇论文中第一次严格证明了代数基本定理：

复数域上一元 n 次代数方程一定有 n 个根（k 重根按 k 个计算）．在这里，n 是正整数，根可以是复数、实数和虚数．这里的根不是指 3.2 节中所讲的用求根公式求得的根式解．从 3.2 节中我们已经知道，对于一般的五次和五次以上的代数方程没有根式解．

要证明代数方程一定有根是件很不简单的事．因为这不是逐个考虑五、六、七、八次方程是否有根，而是要概括地考虑任何次方程是否有根．高斯对这个基本定理给出了严格的证明，为数学家做出了榜样，吸引大家把主要精力和时间用到研究一般性的定理上．因此，高斯研究代数基本定理的方法开创了探讨数学中存在性问题的新途径，从指导思想上为数学的发展开辟了广阔的前景．

《算术研究》

高斯的杰作《算术研究》（以下简称《研究》）是他 20 岁时写成，1801 年发表的．在高斯之前，数论这一学科虽然不乏光辉的成就，但还只是一系列孤立的结果．高斯在《研究》一书中收集了前人在这个领域中的一切成就，并对它们进行了精心的整理和提高．他把记号标准化，把现有的定理系统化并加以推广，对要研究的问题和解决问题的已知方法进行了分类，又引进了新的方法．因此，《研究》的出版开创了数论发展中的一个活跃时期，在此后 100 年左右的时间里，数论领域中几乎没有什么发现是不能直接追溯到高斯的《研究》里去的．所以《研究》的出版被认为是近代数论的开端．



高斯的《算术研究》

《研究》共分 7 节．第一节：一般同余；第二节：一次同余；第三节：幂剩余；第四节：二次剩余；第五节：二次型；第六节：应用；第七节：分圆问题．

这本书可以说是第一本系统的数论著作，高斯第一次介绍“同余”这个概念，而且还有被高斯称为“数论酵母”的“二次互反律”．这个定理是描述一对素数的美丽关系，欧拉知道这些关系，但无法证明它．高斯在 17 岁时给出了这个定理的第一个严格证明，他认为这是数论的“宝石”，一生中共给出五种不同的证明．

从 1796 年解决正 17 边形的作图问题到 1801 年，是高斯学术创造力最旺盛的时期．据统计，在这 6 年间（19～24 岁）高斯给出的猜想、定理、证明、概念、假设和理论，平均每年不少于 25 项．高斯最辉煌的成就是 1801 年《算术研究》的发表，它把过去一直

是零星成果堆砌的数论，织成一张结构紧凑、自成系统的网；另外，高斯在1801年准确地预报了“谷神星”的运行轨道，这两项成就使他不仅在数学界而且在科学界一举成名.

德国数学家康托尔（G. Cantor，1845—1918）是这样评价《研究》的：“高斯曾说：‘数学是科学的女王，数论则是数学的女王’，如果这是真理，我们还可以补充一点，《算术研究》是数论的宪章. 高斯总是迟迟不肯发表他的著作，这给科学带来的好处是，他付印的著作在今天仍然像第一次出版时一样正确和重要，他的出版物就是法典，比人类其他法典都更高明，因为不论何时何地从未发觉其中有任何一处毛病.”

从24岁开始，高斯虽未完全放弃对数论、代数学、几何学和分析学的研究，但其主要精力和时间逐步转向更有实际效用的科学上，如天文学、测地学、物理学和应用数学.

追求完美

高斯对自己的工作要求精益求精，非常严格地要求自己的研究成果. 他自己曾说“宁可少些，但要好些”.

高斯在和朋友的一次谈话中对日记和著作迟迟不发表做出了解释. 他说，在他20岁前，有众多的新思潮涌入他的脑际，使之难以驾御全部思想，而且，记录下来的仅为一小部分. 日记中只包含了对研究成果的最简单的陈述. 作为一个青年，他苦苦追求着综合证明中密不可分的各个环节. 正是在这些方面，高斯以阿基米德和牛顿为楷模，希望他留下的全都是精益求精的、完善的业绩，使其加一点或减一点都会损其全貌. 他的成果必须是先进的、完整的、简洁的和令人信服的，不再带有为取得成功而付出的任何的劳动痕迹. 他说过，在脚手架最后拆完搬开之前，教堂不成其为教堂. 遵循这种指导思想，高斯宁可将他的杰作反复揣摩，而不愿轻易地拿出大纲.

与高斯同时代的人请求他放松那严格的尽善尽美，以便使数学得到更迅速地发展. 但高斯却从未放松过，直到他逝世多年后，人们才知道他早就预见了一些19世纪的数学. 如果高斯当时公布他的学识，就可能使数学的发展早半个世纪或更多. 阿贝尔和雅可比（C. G. J. Jacobi，1804—1851）就能从高斯所停留的地方开始工作，而不是把他们的努力花在重新发现高斯在他们出生前就已经知道的东西上.

高斯的生活很简朴，他不太注重物质享受. 他从青年时代起直到去世始终那样简朴：一个小工作室，一张漆白色的直立书桌，一张窄沙发，在他70岁后才增添一把扶椅，不明亮的灯，没有取暖设备的睡房，平淡的食物，一条睡袍及紫色的睡帽. 高斯灵敏的思维一直保持到生命的最后一刻，60多岁还自学俄语并达到写作水平，有许多创见是在年逾古稀时完成的.

1855年2月3日凌晨，高斯在沉睡中逝去. 在他逝世后，柏林、格丁根、布劳恩什维格都建有各种纪念碑，以此来纪念这位在自然科学史上占有重要地位，为人类作出重大贡献的科学家.《高斯全集》的出版历时67年（1863—1929），共12卷，记录了高斯为人类留下的不朽的精神财富.

高斯的一生是奋斗不息的一生，他本人更是为数不多的、具有强烈开拓精神的数学家之一. 他总努力使其研究成果成为完善的艺术品. 除非做到这点，否则他决不罢休. 因

此，他从不出版达不到他所希望的形式的作品．在德国慕尼黑的博物馆中有一幅高斯的油画像，底下几行字，很贴切地说明了他的成就："他的思想深入数字、空间、自然的最深秘密；他测量星星的路径、地球的形状和自然力；他推动了下个世纪的数学进展．"

习题

1. 你在实际生活中遇到过类似"七桥问题"的几何问题吗？如果有，能否试着用你学过的几何知识分析解决它？
2. 追求数学的严格性是高斯治学的最突出的特点之一，请列举几个例子说明之．

第七章 几何学的新天地
——非欧几何的诞生

7.1 欧氏几何的“家丑”

平行公设是欧氏几何原理中的家丑.

——达朗贝尔

“过直线外一点有且仅有一条平行线.”这是我们在初中就学过的公理. 别小看它，它曾经花费了数学家们2 000多年的时间来研究它，甚至还有个几何学的“家丑”的名声. 为什么呢？一切还得从欧几里得的《原本》说起.

我们知道，早在公元前3世纪左右，希腊数学家欧几里得在他的巨著《原本》中把几何总结成系统的理论，其中主要内容就是当今中学课程里的平面几何和立体几何，因而把这些最基本的几何知识，叫做欧几里得几何，简称欧氏几何.

《原本》是用公理法建立演绎理论体系的最早典范. 它的全部内容的基石是五个公设，其中第五个公设是：

Ⅴ 同平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角的和小于二直角，则这两直线经无限延长后在这一侧相交.

因为这条公设是论及平行线的，所以也称为平行公设或平行线公理. 由于第五公设表述冗长、啰嗦，不像是公设，倒像一个可以用其他公设证明的定理. 另外，欧几里得用到它的时候很迟，在第29个命题的证明中才第一次用到它，以后再也没有让它出现过. 这就给人一种感觉，好像欧几里得本人也不愿把它当作公设使用. 于是，引起人们一种疑问：莫非第五公设本来就是一个定理，只是因为欧几里得没能给出它的证明，才不得不把它放在公设之列. 由此便产生出证明第五公设的想法.

从公元前3世纪到19世纪初2 000多年间，有案可查的就达2 000多名数学家试图证明第五公设，都想补救欧氏体系的缺陷. 他们主要从两条途径进行证明：试图用其他公理来证明平行公设，以使它变成一条定理；用更好的公理来代替欧几里得的平行公理. 其中本章开头给出的平行定理就是历史上出现的一种替代形式.

在长达2 000多年的时间里，几乎所有历代数学家都认为第五公设是一个可证的命题，并且坚信迟早会找到它的证明. 虽然数学家们付出了宝贵的年华，但所有这些尝试均以失败告终，因为它们中的绝大多数或迟或早被证明依靠了与欧几里得公设本身等价的隐含假定. 为把欧几里得公设作为定理导出而作的所有尝试都是这样的，每一种尝试都蕴涵徒然的循环：或者假定了与所要证明的事实的等价假定，或者有某种其他形式的推理错误. 因此，第五公设被数学家称为欧氏几何的“家丑”.

直到1733年萨凯里（G. Saccheri，1667—1733）才做出了值得注意的研究成果. 萨

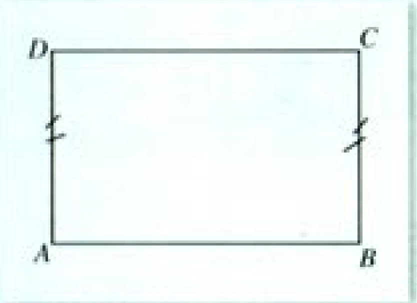


图 7-1

凯里没有像其他人那样试图从正面进攻平行公设，而是应用他所喜爱的反证法．这种证明方法的基本思想是：保持欧几里得的其他公设不变，假设第五公设不真，由此进行逻辑推演．如果推导出逻辑矛盾来，就反驳了第 5 公设不真的假设，从而也就间接证得第 5 公设．他考虑了一个看起来像矩形的图形 $ABCD$（如图 7-1），其中 $AD=BC$，且 $\angle A=\angle B=90^\circ$．不用平行公设，可以证明 $\angle C=\angle D$．（你能给出证明吗？）

这个图形有三种可能：

（1）直角假设：$\angle C$，$\angle D$ 是直角；

（2）钝角假设：$\angle C$，$\angle D$ 是钝角；

（3）锐角假设：$\angle C$，$\angle D$ 是锐角．

如果利用平行公设，就能证明 $\angle C$，$\angle D$ 是直角，即直角假设成立．相反，由直角假设也能证明平行公设．因此，平行公设和直角假设等价．而与欧氏平行公设对立的公设有：（V′）过直线外一点没有直线与所给直线平行；（V″）过直线外一点至少有两条直线与给定直线平行．由这两个命题能分别证明钝角假设、锐角假设成立．同样，（V′）与钝角假设等价，（V″）与锐角假设等价．如果我们保留欧几里得几何中不依赖平行公设的命题，然后把平行公设替换为（V′）或（V″），就能得到新的几何体系，分别叫做椭圆几何、双曲几何，它们都是非欧几何．

什么是“非欧几何”？顾名思义，不是欧氏几何的几何．一般来说，非欧几何有广义、狭义、通常意义三个方面的不同含义．所谓广义非欧几何指一切和欧几里得的几何学不同的几何学，狭义非欧几何只是指双曲几何，至于通常意义的非欧几何，就是指椭圆几何和双曲几何这两种几何．历史上先出现了双曲几何，后出现的椭圆几何．

萨凯里本想通过逻辑证明排除钝角和锐角这两种情形，从而间接证明直角假设为真，即平行公设为真．结果，他却得到了一个没有矛盾的新几何体系——双曲几何．但他却以“结论不合情理”而否认了，并在书末说道：“欧氏几何无懈可击！”为什么呢？有两种说法．有人说，因为欧氏几何有 2 000 年的传统，对人们的影响是根深蒂固的，萨凯里无法突破思想上的束缚．还有人说，萨凯里完成自己的研究后，教会作出了没收、充公的暗示．萨凯里也许自始至终认为在锐角下找不到矛盾，只不过是为了让他的著作能通过教会的审查，才毫无诚意地做了个不可能愚弄数学家的谬论．

萨凯里走到了一个新奇世界的门口，但是他没有继续下去．否则，他的研究将成为几何学史上最伟大的发现，他本人也将成为新学科——非欧几何的创立者！

7.2 新奇的非欧几何世界

小说家发明人物、对话和情节，关于它们，他既是作家又是主人；数学家随心所欲地设计公设，使它的数学体系奠基于其上；二者十分相像．小说家和数学家在选择和处理他们的素材时，都可能受他们所处环境的限制；但是没有什么超人的、永恒的必然性迫使他们去创造出某人物或发明某体系．

——贝尔

下面，我们分别给出了双曲几何与椭圆几何的一个模型，让同学们初步领略一下非欧几何的新奇．

我们知道，计量单位在确定的情况下，所有的实数都分布在一条数轴上，完全"充满了"整个数轴，没有"空隙"．任意一点 P，都可以找出一条线段 OP 与一个实数值相对应．实数即有理数和无理数的集合，与数轴上的点是一一对应的．

一个有趣的事实是，0 和 1 之间的点与 1 和无穷大之间的点都是"同样的多"．因为在以 O 点为起点的数轴上，我们总可以找到在线段 OB(B 点在数轴的 1 上)上的任意点 A(图 7-2)的对应点 A'，使 $OA\times OA'=1$；因为 B 点在数轴的 1 上，所以 B 点的对应点就是其本身；当任意点 A 越接近 O 点时，其对应点(两点互为倒数) A'点就离 O 点越远；这样 O 点就与数轴上无穷远的点对应上了．于是，射线的无穷远点经过这样的变换就向 O 点"靠近"，整条射线变换后就"压缩"在线段 OB 上．

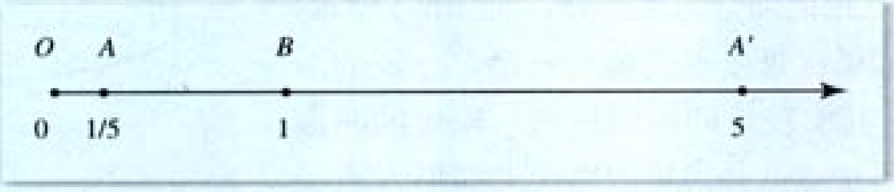


图 7-2

找每条射线上的任一点与其对应点的对应关系就叫做"反演"．现在我们把这种情况转移到平面上，画一个半径为 1 的圆(单位圆)和由它的圆心出发的无数条射线．根据前面的方法，可以把圆外的任一点转化为圆内的一点，反之亦然(图 7-3)．利用这种方法就能得到双曲几何的庞加莱模型．

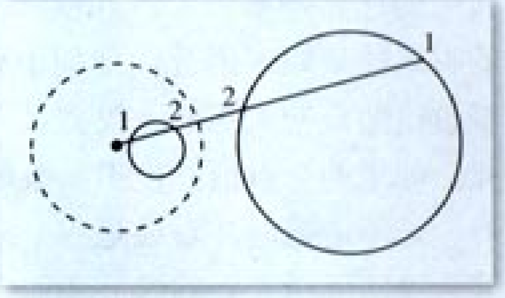


图 7-3

在欧几里得几何中，一个点只表示位置．由这些点可组成线段，一条直线的长度是无限的；还可组成平面，一个平面在二维上是无限的．在庞加莱的模型中，点的概念仍旧是欧几里得几何中的点，"平面"变成一个单位圆，"直线"是与圆边界正交(垂直)的圆弧，就好像欧几里得平面被"压缩"变形，缩进一个圆中(图 7-4)．这样，过"平面"上一点可以画出无数条与已知直线"平行"的直线．

庞加莱模型有一个杰出的演绎者，他就是摩里茨·埃舍尔（Maurits Escher，1898—1972）．他有四幅著名的版画——《圆极限》Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，画中的圆弧垂直交叉形成非欧几何世界中的三角形和四方形，并且越接近边缘的就越小．它们表达了对庞加莱所描述过的东西的感觉：在这里，对所有事物和居民来说，他们的这个圆形世界是无限的．这些生物并不知道，无论什么东西在离开圆心时都会缩小，在接近圆心时则会变大．这表明圆的边界永远无法达到，因而这世界在他们看来是无穷大的．

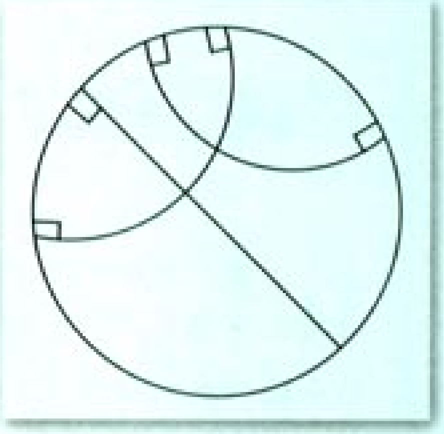


图 7-4

埃舍尔的《圆极限》

下面，我们来谈谈椭圆几何的模型．

假定地球是一个理想球体，一个穿过这个球心的平面与球表面相交成一个大圆，这个大圆对应于平面上的直线．在欧氏几何中，平面上两条不平行的直线恰好交于一点；但在球面上，任何两条直线总是交于两点．另外，在一个平面上，任何两条直线都不能封闭一块区域；在球面上，任何两条直线总能封闭一块区域．

假如我们要以最短的路程从球表面的 A 点走到 B 点，那么过 A 点、B 点及球心的平面（有一个且仅有一个这样的平面）割球面成一个大圆，沿着这个大圆的劣弧（一弦把圆分为两部分，每一部分都叫做弧（图 7-5）．如果这条弦不是圆的直径，分成的两弧就会一大一小，其中较长的叫做优弧，较短的叫做劣弧．）从 A 点走到 B 点就是最短的路线．如果 A 点和 B 点恰好位于一条直径的两端，我们则可以沿着两条弧中的任意一条去走．在欧几里得几何中，两点之间的直线段最短．因此，球面上两点的“直线段”就是经过这两点的大圆的一段劣弧．相应地，连接这两点的最长路程就是同一大圆所剩下的优弧．如果两个点恰好位于一条球直径的两端，此时最短路线和最长路线相等．在航空、航海上，不能把海洋看成是一个欧几里得平面，而应看成是球面的一部分．可见欧氏几何并非人类实际所需要的唯一几何学．

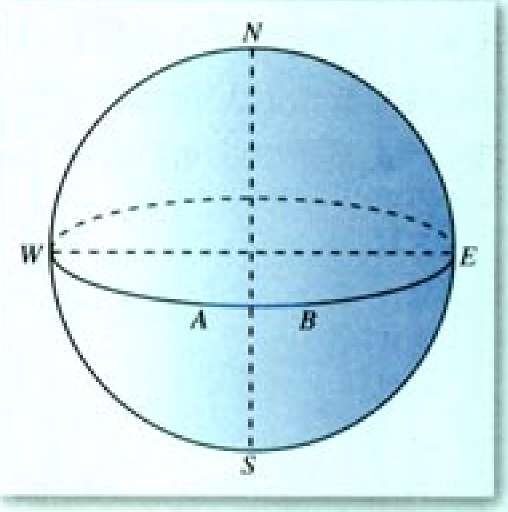


图 7-5

7.3 几何学的“哥白尼”

非欧几何是人类智慧解放者的大主教.

——开塞尔

欧氏几何诞生最早，已有2 000多年的历史. 绝大多数人从小接触的就是欧氏几何. 人们相信，欧氏几何准确地描述了世界，它是绝对真理的一部分. 一个根深蒂固的思想是，我们生活的空间是欧氏空间. 或者说，欧氏空间是物理空间的几何，是关于空间的真理. 这种思想在100多年前，非欧几何刚刚诞生的时期更是占绝对的统治地位. 以至于在许多年中，与之相悖的任何思想都被拒之门外. 数学家康托尔曾这样评述这种无知的保守：一旦错误的结论被广泛接受，那么它将不会被轻易地放弃，而且对它懂得越少，则它的地位越牢固. 非欧几何的历史就是最好的例证.

人们公认的非欧几何的创立人是高斯、波约(J. Bolyai，1802—1860)和罗巴切夫斯基(N. I. Lobatchevsky，1793—1856). 他们各自独立地发现了同一种非欧几何——双曲几何，但是这三个人对待新发现的态度却迥然不同——保守，消极，积极.

高斯是有史以来最伟大的数学家之一，在数论、代数、数学分析、概率论、天文和物理等许多领域都有他的足迹，被誉为“数学王子”. 他也曾试图证明第五公设，后来才逐渐认为第五公设是不可证明的，并萌发了非欧几何学的轮廓，从1813年他就开始发展新几何，起初他称之为反欧几何（anti-Euclidean Geometry），星空几何，最后称非欧（non-Euclidean）几何，他认为非欧几何在逻辑上是相容的，并且具有欧氏几何一样的可应用性. 但他由于“怕引起哀波提亚人的嚎叫”（这里所讲的哀波提亚人是古希腊的一个部落，一向以愚昧著称）. 因此生前一直不肯把自己的这一重大发现公布于世，只是把部分成果写在日记和与朋友的往来书信中.

波约的父亲F·波约（F. Bolyai）也是一位数学家，和高斯是好朋友，而且曾经试着证明平行公理，但是没有成功，因此波约的父亲反对他继续从事这种看起来毫无希望的研究. 1820年，他写信给儿子说：“希望你不要再作克服平行线理论的尝试了. 你会花掉所有的时间而终生不能证明这个问题……它会剥夺你一切余暇、健康、休息和所有的幸福. 这个地狱般的黑暗将吞吃成千个像牛顿那样的巨人……这是永远留在我心里的巨创.”J·波约不顾父亲的反对，坚持研究下去，终于成为非欧几何的发现者之一. 1823年11月3日，他激动而充满信心地写信告诉父亲：“我已从乌有创造了另一个新奇的世界.”这个新奇的世界就是非欧几何. 1832年，他的发现作为附录发表在他父亲的几何著作中. 老波约把这个附录寄给高斯评阅. 然而，高斯读了小波约的结果后却对老波约说：“我无法夸赞他，因为这样做就等于夸奖我自己.”高斯的态度使小波约十分气恼，以为高斯想剽窃自己的成果. 1840年俄国数学家罗巴切夫斯基关于非欧几何的德文著作的出版，无疑又是对小波约的一个沉重打击，从此他再没有做进一步的研究，也不再发表数学论文.

罗巴切夫斯基生于俄国高尔基城. 1807年入喀山大学，毕业后留校任教. 他很早就

波约

（J. Bolyai，1802—1860）

从事第五公设的证明，后来认识到用欧氏其他公理证明第五公设是不可能的．他保留欧氏其他公设，而换以与第五公设相反的命题："过平面上直线外一点，至少可以作两条直线与原直线不交"，据此推导出一系列与欧氏几何完全不同的命题，得到一个全新的几何体系．他在1826年2月6日在喀山大学数学物理系大会上宣读了划时代的论文《几何原理概述及平行线定理的严格证明》．为了纪念罗氏的功绩，把这一天定为非欧几何的诞生日，并称这种几何为罗氏非欧几何．会后，系学术委员会委托三位专家组成鉴定小组，对罗巴切夫斯基的论文作出书面鉴定．他们的态度无疑是否定的，但又迟迟不肯写出书面意见，以致最后连文稿也给弄丢了．

罗巴切夫斯基并没有因同行的冷漠而放弃对新几何的研究，1829年，他又撰写出一篇题为《几何学原理》的论文．这篇论文重现了第一篇论文的基本思想，并且有所补充和发展．此时，罗巴切夫斯基已被推选为喀山大学校长，可能出自对校长的尊敬，《喀山大学通报》发表了这篇论文．1832年，他把"论几何学原理"一文送交圣彼得堡科学院，由数学家 M. B. 奥斯特罗格拉茨基审查．可是这位学者对罗巴切夫斯基的发现很不理解，同年11月7日，他在给科学院的鉴定书中一开头就以嘲弄的口吻写道："看来，作者旨在写出一部使人不能理解的著作．他达到了自己的目的．"接着，他对罗巴切夫斯基的新几何思想进行了歪曲和贬低．最后粗暴地断言："由此我得出结论，罗巴切夫斯基校长的这部著作谬误连篇，因而不值得科学院的注意．"

罗巴切夫斯基

（N. I. Lobatchevsky，1793—1856）

正如高斯所预想的那样，非欧几何的发现引起了"哀波提亚人的嚎叫"．罗巴切夫斯基的这篇论文不仅引起了学术界权威的恼怒，而且激起了社会上保守势力的叫嚣．1834年，有篇题为《评罗巴切夫斯基的著作〈几何学原理〉》的匿名文章，公开对罗巴切夫斯基进行人身攻击．匿名者在文中恶言相向："难以理解，罗巴切夫斯基先生是如何用数学中最简明的几何学，建立起晦涩的、不可思议和神秘莫测的学说的．"

罗巴切夫斯基面对种种责难没有放弃，不屈不挠地继续进行研究．在通往真理的坎坷道路上，罗巴切夫斯基为非欧几何的生存和发展奋斗了30多年，他在任何情况下都没有动摇过对新几何远大前途的坚定信念．为了扩大非欧几何的影响，争取早日取得学术界的承认，除了用俄文外，他还用法文、德文发表自己的著作．在晚年身患重病，卧床不起的困境下，他也没有停止过对非欧几何的研究．他的最后一部巨著《泛几何学》，就是在他几乎双目失明，临去世的前一年，口授他的学生完成的．

当高斯看到罗巴切夫斯基1840年的德文非欧几何著作《平行线理论的几何研究》后，思想是矛盾的．他一方面私下在朋友面前高度称赞罗巴切夫斯基是“俄国最卓越的数学家之一”，并下决心学习俄语，以便直接阅读罗巴切夫斯基的全部几何著作；另一方面，他从不以任何形式公开评价罗巴切夫斯基的新几何思想．他积极推荐罗巴切夫斯基为哥丁根皇家科学院通讯院士，可是在评选会上以及他亲笔写给罗巴切夫斯基的推荐通知书中，对罗巴切夫斯基在数学上的最大贡献——创立非欧几何却避而不谈．高斯享有“数学王子”的美誉，凭他的声望和影响，完全有可能减少罗巴切夫斯基的压力，促进学术界对非欧几何的公认．然而，在传统数学观念和保守势力面前，高斯却保持了沉默，这在客观上也助长了保守势力的气焰．

直到高斯去世后，他的日记及私人信件公诸于世，世人才知道高斯对非欧几何这么有兴趣．由于高斯在当时无可比拟的学术地位，许多数学家接受了非欧几何的观念而开始研究．然而，此时距非欧几何无声无息的诞生已有数十年之久．

现在一般认为非欧几何是由这三位学者彼此独立地发现的，但就发表时间之早，论证的完整和内容的丰富，以及对新几何始终不渝的捍卫来说，要首推罗巴切夫斯基．比之高斯的保守、波约的消沉，罗氏坚持宣传新几何的精神确实令人敬佩．

非欧几何的出现，改变了人们认为欧氏几何唯一地存在几千年不变是天经地义的观点．它的革命思想不仅为新几何学开辟了道路，而且是20世纪相对论产生的前奏和准备．后来的事实说明，非欧几何所导致的思想解放对现代数学和现代科学有着极为重要的意义，人类终于突破感官的局限而深入到自然的更深刻的本质．从这个意义上说，为确立和发展非欧几何贡献了一生的罗巴切夫斯基不愧为现代科学的先驱者，因此他被称为几何学的“哥白尼”．

7.4 从假设到现实——非欧几何的意义

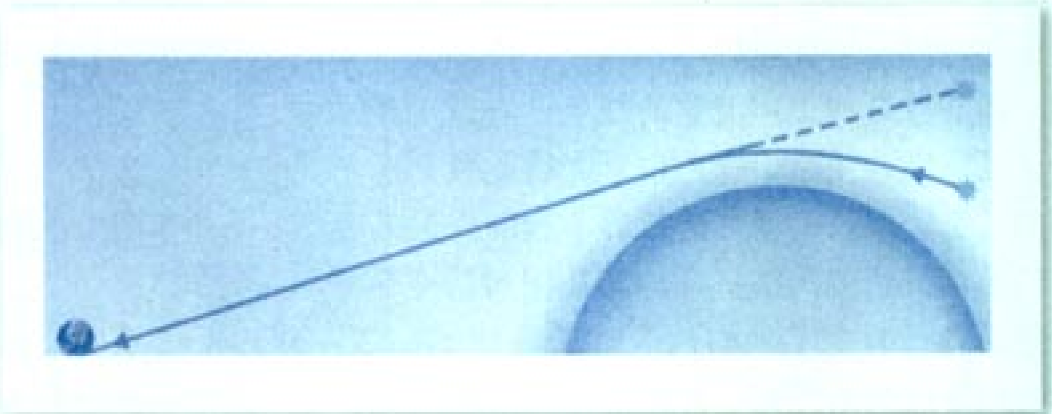
已经有大量的根据可以说，从非欧几何发展起来的思想是极其富有成效的．

——爱因斯坦

最初，人们是出于对公理的完善来研究第五公设的，因而从未想过会有什么新的几何体系出现，更不曾想过这种研究会有什么现实意义．然而事实表明，由这一系列研究发展而来的新理论在现实中大有用武之地．

高斯是第一个相信非欧几何能够应用的人．为了检验他的非欧几何的应用可能性，高斯实际测量了由布诺肯山（Brocken）、霍赫海根山（Hohehagen）和英色伯格山（Inselberg）三个山峰构成的三角形的内角之和，三角形三边分别为69，85和197公里．他发现内角和比180°超出了14″85．这什么也证明不了，因为实验误差远大于15″，所以正确的和可能是180°，甚至更小些．高斯认识到这个三角形还是小，因为在他的几何中，三角形内角和与180°的偏离程度正比于它的面积．只有在非常大的三角形中才有可能显示出任何的差距．然而高斯还是相信这门新的几何与欧氏几何一样有用．

1915 年，物理学家爱因斯坦创立了广义相对论，为现代科学史树立了一座丰碑．按照广义相对论的引力场理论，大尺度宇宙或强引力场的空间不是平直的，而是弯曲的，在这里，光不是沿着通常人们所说“直线”传播，而是沿着“曲线”（短程线）传播的．太阳是大质量物质，存在强引力场，在太阳边缘，光的传播要出现 1.7 秒的弯曲．广义相对论对强引力场空间结构非欧几何特性的解释，已被现代天文观测所证实．1919 年 5 月，英国天文学家、物理学家爱丁顿（A. S. Eddington，1882—1944）率领两支考察队在西非的普林西比进行测量，证实了星光经过太阳附近时确实发生了偏转，偏转数值与爱因斯坦预言非常符合．后来，一些人用厘米电磁波进行实验，精确的光测结果进一步证实了广义相对论理论的正确．



星光弯曲示意图

这说明，数学往往会走在实际的前头，然后再在社会实践中获得应用，即依靠数学内部矛盾的推动而发展起来的纯粹的、抽象的理论，最终会反过来推动社会实践活动的发展，在科学史上有许多这样的例子．

当数学家深思新几何出现的意义时，思想得到了一次真正的解放．原来人们可以通过构造不同的公理体系来建立不同的几何学．所以罗巴切夫斯基几何的出现为大量新几何的出现打开了大门．

习　题

1. 萨凯里给出了一个看起来像矩形的图形 $ABCD$，其中 $AD=BC$，$\angle A=\angle B=90°$．不用平行公理，求证 $\angle C=\angle D$．
2. 写一篇读后感．

第八章 探索随机世界的利器——概率论和数理统计的源流

8.1 游戏的数学

起源于为碰运气而取胜的游戏的研究所产生的一门科学，竟成为人类知识的最重要的内容，这实在是值得注意的.

——拉普拉斯

我们生活的世界充满了不确定性，例如明天是否下雨；购买的彩票中奖的机会是多少；等等. 如果要衡量这种不确定性，就需要用到一门新的数学分支——概率论.

帕斯卡

(B. Pascal，1623—1662)

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支. 生活、科学的众多领域都是它的用武之地. 然而这一有价值的学科的诞生却引发自一个赌徒的问题.

据说，1654 年左右，爱好赌博的法国人梅雷（A. G. C. de Mere，1610—1685）写信向法国数学家帕斯卡（B. Pascal，1623—1662）请教：甲、乙二人各出同样的赌注，掷硬币进行赌博. 若正面朝上，甲得 1 分，乙不得分；若反面朝上，乙得 1 分，甲不得分. 谁先得到事先约定的分数，就赢得全部赌注. 问题是，在没有赌完的情况下，如何分配赌本才算公平？这就是数学史上著名的“点数问题”. 帕斯卡和“业余数学家之王”费马在通信中讨论了这一问题，用排列组合方法得出正确解答. 帕斯卡和费马在通信中还研究了其他的赌博问题. 概率概念的要旨在帕斯卡和费马的通信讨论中才比较明确，所以，大家公认他们两人是概率论的创立者.

下面我们试以下例来说明他们的方法. 例如甲再得 2 分，乙再得 3 分就可获胜，这时如何分赌本呢？当时对这个问题有各种不同的解答（例如有人认为甲应得总赌注的 3/5，乙应得 2/5），但唯一正确的解答应是依据甲乙二人如果继续赌下去，最终能获胜的概率. 显然，为确保能分出胜负，最多需要再掷 4 次，这时共有 16 种等可能的情形（用 A 表示甲赢，用 B 表示乙赢）：

AAAA	AAAB	AABB	ABBB	BBBB
	AABA	ABAB	BABB	
	ABAA	ABBA	BBAB	
	BAAA	BAAB	BBBA	
		BABA		
		BBAA		

其中有 11 种情况甲赢，5 种情形乙赢，因此，赌本应该照 11∶5 来分配. 帕斯卡后来还给出了问题的通解：令 m 表示甲若获胜所需再赢得的分数，n 表示乙若获胜所需再赢得的分数，则甲、乙两人应得赌金之比为：

$$(C_{m+n-1}^{0}+C_{m+n-1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{n-1}):(C_{m+n-1}^{0}+C_{m+n-1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{m})$$

其实，这一问题的萌芽可追溯到 15 世纪，其中意大利学者在这一时期做了最初的尝试. 比如 1494 年，意大利数学家帕乔利（Luca Pacioli，约 1445—1517）在其所著《算术、几何、比与比例集成》一书中曾经提出“点数问题”. 一些学者已从数学角度研究过这个赌博问题，但都未能得出问题的正确解答. 后来，这个问题几乎在所有的关于概率论的著作中，都被反复地、详细地探讨过，前后达 200 年之久.

既然很早以前就有了赌博，那为什么直到 17 世纪概率论才诞生呢？这是因为当时的社会背景有其特殊之处，有新的问题、动机来推动新理论的发展. 那些具有概率性质的最初的问题，起源于人类生活的各种领域，后来逐渐具体化成概率论的概念和方法.

14 世纪荷兰、意大利率先建立了海运保险公司. 海运货物保险是继陆地、湖泊、河流运输保险之后出现的. 这些公司通过计算各种风险，收取相应的保险金. 海运的保险费是货物价值的 12%～15%，而陆地的费用则是货物的 6%～8%. 从 16 世纪开始，许多国家也出现了海运保险公司，17 世纪其他保险形式也相继诞生. 保险公司收集的数据成为概率论发展初期所利用的原始材料.

17 世纪荷兰、西班牙、法国、英国、德国首先出现了各种参考手册，上面记载着教区居民结婚、参加洗礼、举行葬礼的登记数. 这是在瘟疫流行的时候引进的方式，最早的可追溯到 1517 年. 后来还增加记录了出生、死亡人口的性别，以及死亡原因等. 基于这些统计资料出现了一些概念，例如在某一阶段死亡的可能性，能活到某一年龄的机会等等. 毫无疑问，这些发展影响了概率论基本概念的形成. 因此，在各种历史时期里，一定程度上进行着收集、分析统计数据的活动. 然而，直到出现资本主义，系统而足够广泛的统计研究才开始，那时贸易和货币交易，尤其是和保险有关的业务正迅速发展，而且各种新机构相继建立. 可以说，统计是推动概率论早期发展的一个基本因素.

文艺复兴时期自然科学迅猛发展，观测和实验的重要性也日益增加. 处理观测结果的方法，特别是估计观测中出现的误差，这些问题就变得重要了，这也刺激了概率论的发展.

偶然性和必然性之间的相互关系，规律和因果关系等问题都是古代研究的对象，长期以来列在哲学家的研究议程中. 因此，17 世纪所积累的哲学思想也影响了概率论的早期发展.

保险公司的实际需要；人口统计问题；处理各门科学的数据或观测结果；以及与机会游戏有关的抽象问题，它们与组合学，与偶然性、必然性的哲学观念有着密切关系，刺激了概率论的诞生.

只有与事件的概率估计有关的问题出现在人类活动的各个领域，只有解决这些问题的需求变得更加迫切的时候，概率论才能出现.

在概率论早期，绝大多数问题与赌博有关. 甚至今天，作为概率的最初表示，我们还

常常提到掷骰子．这是因为在这种情境中很容易证明如何计算结果的概率．人们以赌博为模型来讨论概率论问题，主要是因为它提供了方便的形式和固定的术语，这有助于描述许多现象和解决各种问题．

8.2 伯努利家族的贡献

寻求一个随机事件的概率是概率论的基本课题．上面提到的“点数问题”的求解，依据了概率的古典定义，即：如果在相同的条件 S 下，存在 n 个互不相容且等可能的情形，有 m 个是有利于事件 A 的，那么事件 A 的概率就定义为 $\frac{m}{n}$.

概率论发展初期，主要是从讨论赌博问题开始的，当时所研究的问题限于古典概型，即一个试验只有有限个基本事件，且每个基本事件出现的概率相等．事件的概率值的确定依据计算各种等可能性数目，所以利用概率的古典定义足以解决这类问题了．但是，这种方法有很大的局限性．因为在更多的场合，根本就无法数清所有的可能情况，也无法确定不同情况的可能性彼此间的大小．例如掷一枚骰子，共掷 n 次，那么其中出现 m 次 6 点的概率是多少呢？它的计算方法是设某事件 E 在一次试验中出现的概率为 p，则不出现的概率为 $1-p$，那么 n 次试验中出现 m 次事件 E 的概率为 $p_n(m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$，其中 $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$．然而，当 n 无穷大时，概率的计算是相当麻烦的，而且如果不知道事件在一次试验中的概率，就无法用上面的公式计算 n 次试验中事件出现的概率．瑞士数学家雅各布·伯努利（Jacob Bernoulli，1654—1705）就曾在他的著作《猜度术》（1713）中指出过古典定义的弊端：

雅各布·伯努利
(Jacob Bernoulli，1654—1705)

“无论怎样，想要就某事的发展做出一个正确的预测，似乎只需要严密地推算出其各种可能出现的结果，然后确定其中一种比另一种更易发生的可能．然而，我们很快又会遇到麻烦，因为这种方法只在很少的一些情况下适用……试问：谁人能够告知所有疾病的种类，推算出所有即将发生的病例……并说出一种病症比另一种更加致命的可能．或者，谁又能够列举出大气每日所经历的无数变化，并据以在当日预报出此后一个月，甚至一年内的天气？”

接着他给出了解决的办法：伯努利定理——大数定律的最早形式，其基本思想是，在大量重复同一试验时，某一事件出现的频率会越来越稳定于某一数值．

大数定律的例子司空见惯．例如投掷硬币，投掷一

次、两次甚至十次八次都可能出现正面、反面相差甚多的局面．但是，当次数很多很多时，出现正面的频率一般就越来越接近$\frac{1}{2}$．也许有人觉得这只不过是想当然，实际上，历史上许多人的确做过这个实验．法国科学家蒲丰（G. L. L. Buffon，1707—1788）就曾让一个小孩向空中掷钱币 4 040 次，掷出正面 2 048 次，反面 1 992 次，掷出正面频率为 0.507．下表是历史上掷硬币的记录，其中这些频率与概率 0.5 的偏差都不大．

总次数	正面出现的次数	反面出现的次数	正面出现的频率
4 040	2 048	1 992	0.507
4 092	2 048	2 044	0.501
20 480	10 353	10 127	0.505 5
12 000	6 109	5 981	0.509 1
24 000	12 012	11 988	0.500 5

《猜度术》还包含了许多新结果，发展了不少新方法．比如详尽论述了排列与组合理论，给出了机会对策中所产生的各种各样新问题的解答．这本书当时鼓舞了一些学者转向这门诱人的学科．雅各布・伯努利的侄子丹尼尔・伯努利（Daniel Bernoulli，1700—1782）便是一个非常喜欢这门学科的人，他于 1730 年发表的《赌博法新论》以其大胆和周到而引人注目．他在这本书里把他的研究推广到包括人寿保险和健康统计的问题．

提到伯努利，就不能不提伯努利家族，这个家族三代人中有八位数学家，他们几乎对当时数学的各个分支都作出了许多重大的贡献，其中以第一代的雅各布・伯努利和约翰・伯努利（Johan Bernoulli，1667—1748），及第二代的丹尼尔・伯努利最为著名．

雅各布在青年时代根据父亲的意愿学习神学，但对神学不感兴趣，而对数学有着浓厚的兴趣．后来在荷兰和英国旅行期间，结识了一些知名的数学家，使学识大有长进．从 1687 年起直到逝世，雅各布始终在巴塞尔大学任教授，讲授数学和物理学．约翰是雅各布的弟弟．他在大学学习期间，怀着对数学的热情，跟随哥哥秘密学习数学，并开始研究数学．虽然 1694 年获得了医学博士学位，做了医生，但数学比医学更能吸引他，于是转而全面研究数学．28 岁那一年（1695），他就在荷兰格罗宁根大学任数学教授，1705 年雅各布去世，约翰便接替哥哥，任巴塞尔大学教授．他还培养了一批出色的数学家，其中包括 18 世纪数学界的中心人物欧拉 [见 6.1 节]．

雅各布、约翰经常与莱布尼茨以及其他数学家通信，他们兄弟之间也经常互相通信．通过书信提出问题，研究解决问题，也争论问题．伯努利兄弟自悬链线问题产生了分歧，以后争论加剧．这些争论无疑会促进科学的发展．但由于双方过分敏感自尊，性格暴躁，相互批评指责又过于尖刻，使兄弟之间时常造成不快，甚至双方的家庭也都卷入了争论．其后果之一是当雅各布死后，他的《猜度术》的手稿被他的遗孀和儿子在外藏匿多年，直到他死后 8 年（1713）才得以出版，几乎使这部经典著作的价值受到损害．

丹尼尔是伯努利家族中最杰出的一位，是约翰的儿子．他与父亲一样，早年学习医学，后来改攻数学．他的研究涉及代数、概率论、微积分学、级数理论、微分方程等方面．丹尼尔以他高超的数学才能解决了许多数学和物理上的重大问题，先后获得巴黎科学

院奖金达十次之多，因此年纪轻轻就享有盛誉. 据说，有一次在旅途中，年轻的丹尼尔同一个风趣的陌生人谈着，他谦虚地自我介绍说："我是丹尼尔·伯努利."而陌生人立即带着讥讽的神情，回答道："那我还是牛顿呢！"丹尼尔当时的学术地位可见一斑！

8.3 更上一层楼

概率论已成为人类知识的最重要的组成部分之一.

——拉普拉斯

自牛顿和莱布尼茨创立微积分以来，18 世纪的数学家对这一领域进行了深入的研究并取得了光辉的成就. 这种发展与广泛的应用紧密地交织在一起，刺激和推动了许多数学新分支的产生，从而形成了"分析"这个新的数学领域.

随着数学分析的蓬勃发展，人们开始把它作为研究概率论的工具. 随着研究工具的进步，概率论也逐步走向系统和成熟，其研究水平更上了一层楼. 法国数学家拉普拉斯(P. S. Laplace，1749—1827)是当时概率论的集大成者，他极大地发展了概率论，在研究概率论时他运用了微分方程，特征函数和反演公式，母函数，积分等分析工具. 19 世纪初拉普拉斯独立完成了总结当时整个概率论研究的任务，即 1812 年出版的《概率的分析理论》. 这是概率论历史上的一个里程碑，它开创了概率论发展的新阶段，实现了概率论研究由组合技巧向分析方法的过渡. 另外，数学家们还把概率论应用到了许多领域，例如法庭审判等.

在 20 世纪前，概率论已经有了很多重要的结果，但当时概率论方面的论文和著作除少数外都明显缺乏数学的严格性. 甚至当时的数学家没人能把概率论演绎成一门逻辑上完美的数学学科. 究其原因在于：第一，19 世纪的分析本身就没有严格化，以它为研究工具的概率论的严格化就可想而知了；第二，概率论公理化所必需的测度论还未发明. 因此，不严密是难以避免的.

为此，许多数学家做出了种种努力，直到 1933 年原苏联数学家柯尔莫戈洛夫（A. N. Kolmogorov，1903—1987）的《概率论基础》一书出版，才改变了这一局面. 他建立了在测度论基础上的概率论的公理化体系，奠定了近代概率论的基础. 这样，概率论就从半物理性质的科学变成严格的数学分支，和所有其他数学分支一样建立在同样的逻辑基础之上.

8.4 数据的学问

数理统计学是一门应用数学学科，它研究怎样以有效的方式收集、整理、分析带有随机性的数据，并在此基础上，对所研究的问题作出统计性的推断，直至对可能作出的决策

提供依据或建议．形象地说，数理统计学就是数据的学问．它的数学基础是概率论．数理统计学的产生，一方面是由于在自然、社会、生产等各种领域中应用上的需要；另一方面由于近代数学和概率论的发展，把一些多少是从经验上提出的、个别的方法，加以理论上的提高和系统化．可以说，数理统计学是伴随着概率论的发展而发展起来的．

历史上，各国都曾有钱粮人丁户数的记载，这实际是普查，并非现代意义下的统计．历史上最早出现的统计推断是英国统计学家格兰特（J. Graunt，1620—1674）在1662年组织的对伦敦市死亡人数的调查，他据此做出了第一个死亡率表，每个国家不同时期的死亡率表是各国人寿保险公司的必备之物．他还发表了专著《从自然和政治方面观察死亡统计表》．因此，数理统计学可认为是格兰特于17世纪60年代开创的．格兰特对生命统计、保险统计及经济统计进行了数学的研究．这一学问曾被称为“政治算术”．

由于需要对各地人口、农业生产品及国际贸易数量的估计，亟待若干形式的统计数据作为处理问题的根据，并需要科学的方法，对统计数据进行分析．于是统计学的数学性质逐渐加深，奠定了现代数理统计学的基础．同时，19世纪初概率论有较大的发展，这必然影响到数理统计学的发展．数理统计学的一个重要方法——最小二乘法就是在这时诞生的．

当时天文学家们依靠大量的观测，试图寻找精确的行星轨道，但是每一个观测结果都容易有误差．因而，每一次测量都会给出行星的略有不同的轨道方程式，而且不清楚用什么样的方法来确保从给定的数据集合中计算出最精确的行星轨道．开普勒和伽利略两人致力于这一问题的研究．解决这一问题的根本思想是寻找总体误差最小的曲线．这个思想其实很简单，用数学家波利亚（G. Pólya，1887—1985）的例子说，把一头牛放在湖的中心，牛从哪儿上岸呢？显然应该选择离它最近的岸边作为它的目标．用坐标来表示，那就是使距离

$$D=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

极小的地方，这里$(x_0,\ y_0)$是牛的所在位置的坐标，$(x,\ y)$是要上岸的目的地的坐标．由这种思想出发，我们所要求的曲线希望同所有数据$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_n,\ y_n)$的距离极小，也就是所求曲线为$y=f(x)$时，这些点到这条曲线的距离最小，但是用坐标之差表示的距离的值有正，有负，加在一起时有时互相抵消，因此，我们的要求是距离平方之和最小，这也就是最小二乘法的名称的由来．

勒让德（A. M. Legendre，1752—1833）、高斯各自独立地发现了这一法则．1805年，勒让德在《确定行星轨道的新方法》一文中，阐述了用最小二乘法给出这一曲线的方法．高斯大约在1801年使用了这样一个方法来计算新发现的小行星谷神星的轨道．1809年，发表了《天体沿圆锥曲线绕日运行运动理论》一文，在文中他声明从1795年他就开始使用了最小二乘法，从而引发了高斯与勒让德谁是最先发现最小二乘法的争论．

19世纪里，比利时统计学家、天文学家凯特勒（L. A. J. Quetelet，1796—1874）为统计学的推广做出了重大贡献．拉普拉斯、泊松、傅里叶等数学家的思想启发了他在统计方面的工作．他把正态曲线从观察误差领域推广到许多学科范畴，将概率理论应用到人口学、社会科学及保险业等，为在人文科学、社会科学中进行开发统计研究迈开了一大步．

其中最著名的是他引进的“普通人”（average man）概念．最初这是从人体测量的意义上引进的，后来，他在许多著作中发展并推广了这一概念．因为凯特勒意识到平均值在统计学中的重要性，所以他想通过比较“普通人”在不同时代的变化，来研究历史发展的规律．但是，他的推理含糊不清、不甚严密，以致有很多数学家和统计学家批评他的“普通人”概念．例如，贝特朗在《概率论》一书中写道：

“这位比利时的作者在普通人的身上放置了一个普通的灵魂．（普通人）没有爱好，没有恶习，他既不愚蠢也不聪明，既不无知也不博学……从每个意义上说，他是中等的．吃了38年一个健康士兵的平均食物供量后，他不得不死去，不是由于年老，而是由于统计在他身上发现的平常的疾病．”

虽然凯特勒在科学范围内没有留下任何重大的遗产，但是他是一位天才的统计学推广者，使统计方法获得普遍应用．另外，同一时期的英国生物学家高尔顿（S. E. Galton，1822—1911）则最早把统计方法应用于生物学．他曾到非洲考察和探险，搜集了大量资料，并投入很大精力钻研资料中所隐藏的模型与关系．他在1889年出版了《自然遗传》一书，引进了回归直线、相关系数的概念，创立了回归分析．此外，高尔顿还提出了中位数、四分位数、百分位数及四分位偏差等概念．

从19世纪末开始，数理统计学蓬勃发展，日渐成熟，一些重要概念和方法相继出现，一些分支基本形成．1885年左右，统计学之父——英国统计学家皮尔逊（K. Pearson，1857—1936）将统计学与概率理论结合起来，研究基本的统计问题，求出了能通用的用来描述研究群体的数学公式，形成了较为系统的数学理论．术语“总体”、“众数”、“标准差”、“变差系数”都是他引进的．1901年，他还与高尔顿一起首创“生物计量学”（biometry）一词，使生物统计成了统计学的重要内容．1864年，麦克斯韦（J. C. Maxwell，1831—1879）已经将概率和统计理论应用于物理学，开创了统计物理学．1877年，玻尔兹曼（L. E. Boltzman，1844—1906）运用统计数学从事分子能量研究，提出了分子动能的常态分布，从而创立了气体分子运动论．

二战后，由于经济和军事技术上的飞速发展以及电子计算机的出现，使统计方法的应用范围十分广泛．如在工业上应用统计进行质量管理，并由此产生了抽样检验、管理图等方法；电子计算机的广泛使用，使得过去停留在理论上的方法得以付诸实施，而这又反过来促进人们提出和解决一些理论上的问题．数理统计学在应用和理论两方面获得了深入发展．总之，概率论、统计学的发展与应用的日益广泛，促进了纯粹数学与应用数学的分化，也促进了数学向其他人文科学、社会科学的渗透．

习题

1. 收集资料，看看伯努利家族有哪些贡献？
2. 写一篇你感兴趣的数学家的传记．

第九章　中国现代数学两巨星

数学是我国人民所擅长的学科.

——华罗庚

中国古代数学有着光辉的传统，取得了辉煌的成就，当时许多成果在世界上遥遥领先．但明代以后逐渐落后于西方．20 世纪初，在科学与民主的高涨声中，中国数学家们踏上了学习并赶超西方先进数学的光荣而艰难的历程.

随着 17 世纪初到 18 世纪初，欧几里得《原本》前六卷首次被翻译成中文，西方数学开始在中国传播．到了 19 世纪，除了初等数学以外，解析几何、微积分、概率论等近代数学也已经传入．西方数学在中国的早期传播对中国现代数学的形成起了一定的作用，但由于当时整个社会环境与科学基础的限制，总的来说其功效并不显著.

自鸦片战争以后，部分有识之士逐步认识到数学对于富国强兵的意义，从而竭力主张改革国内数学教育，同时派遣留学生出国学习西方数学．尤其是辛亥革命前后，更多的热血青年怀着科学救国、教育救国的思想走出国门到欧、美、日各国学习现代数学．他们没有留恋国外优越的工作环境，学成后毅然回国，在各个大学创办数学系，把自己的青春和智慧奉献给祖国的数学事业．抗日战争期间，国内时局动荡，生活艰苦．他们在空袭炸弹的威胁下，照常上课，并举行各种讨论班，同时坚持深入的科学研究，产生了一系列先进的数学成果，创造了中国现代数学发展历程中的奇迹．下面，我们来介绍一下这一时期涌现的数学家中两位最杰出的代表——华罗庚和陈省身.

9.1　传奇数学家——华罗庚

自学成才

华罗庚(1910—1985)，江苏省金坛县人，一位自学成才的数学大师．小时候，由于家境贫寒，华罗庚无法继续升入高中．经过努力，他考取了上海中华职业学校商科．然而，当还差一学期就毕业时，再次由于家里拿不出学费，华罗庚不得不弃学回家帮助父亲经营小店.

这时华罗庚已对数学产生了强烈的兴趣．那时金坛初中有一个留法学物理的青年教师王维克，很欣赏华罗庚的数学才能，并借书给他看．一共只有一本大代数，一本解析几何，一本 50 页的微积分．华罗庚边站柜台，边用零散时间学习数学．家里人都说他在“看天书”．为了怕他看书影响做生意，父亲多次要撕掉他的“天书”．但是华罗庚仍然坚持自学.

1928 年，华罗庚就职于金坛初中，任会计兼事务．实际上，包括打铃、打扫卫生等.

那年，金坛发生了流行瘟疫．华罗庚染病卧床 6 个月．病愈后左腿却留下残疾．在逆境中，他顽强地与命运抗争，誓言是："我要用健全的头脑，代替不健全的双腿！"

上海《学艺》杂志曾在 1926 年第 10 期上登载一篇苏家驹的文章"代数的五次方程式的解法"．华罗庚发现了苏家驹文章中的错误，他于 1930 年在上海《科学》(15 卷 2 期) 上发表了文章"苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立理由"．这篇论文引起当时的清华大学数学系主任熊庆来（1893—1969）的注意，他认为华罗庚有天才，有培养前途．但他纳闷的是从未听说过数学界中有一个华罗庚．后来，熊庆来从系里一个教员金坛人那里打听到了华罗庚的情况，于是决定把华罗庚调到清华．

聪明在于学习　天才由于积累

经熊庆来推荐，华罗庚于 1931 年到清华大学任数学系助理，管理图书、公文、打字，也兼办杂事，如通知教员开会等．在清华大学，华罗庚如鱼得水，拼命学习数学，用一年半时间学完了数学系全部课程，并且多次在国外的数学杂志上发表论文．至 1933 年，华罗庚的水平与能力已为大家所认识．系里欲聘任他为助教，但碰到资格问题，因为华罗庚只有初中文凭．不少教授认为，清华大学出了个华罗庚是一件好事，不应该因资格问题而限制人才使用，由此他被破格提升为助教．1935 年，他又被提升为教员．

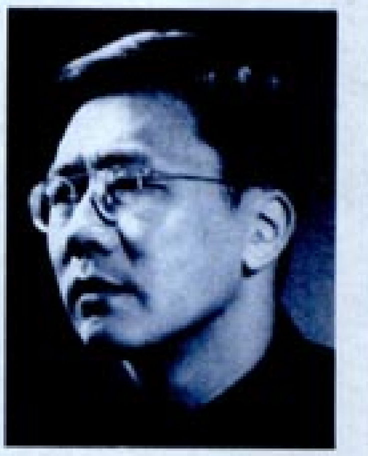
1936 年，华罗庚被推荐到英国剑桥大学跟随著名数学家哈代(G. H. Hardy，1877—1947）学习．两年中华罗庚发表了十多篇论文，引起国际数学界赞赏．但是由于学费十分昂贵，他为了节省费用始终没有正式注册读学位．对此，华罗庚说："我是来学数学的，不是来读学位的．"

直到 1979 年，由于华罗庚的突出数学贡献，法国南锡大学授予华罗庚荣誉博士称号，以后香港中文大学（1983）与美国伊利诺伊大学（1984）也授予他荣誉博士称号．而此前华罗庚一直只有初中毕业的文凭．

华罗庚虽然聪明过人，但从不提及自己的天分，而把比聪明重要得多的"勤奋"与"积累"作为成功的钥匙，他提出"聪明在于学习，天才由于积累"，反复教育年青人，要他们学数学做到"拳不离手，曲不离口"，经常锻炼自己．

拳拳报国心

1937 年，抗日战争爆发，当时一些主要大学都迁移至大后方．清华大学、北京大学和南开大学迁至昆明，成立了"西南联合大学"．1938 年，华罗庚访英回国，在西南联合大学任教授．在昆明郊外一间狭小的阁楼里，他艰难地写出《堆垒素数论》，这本书后来成为 20 世纪数学论著的经典．1946 年 3 月，他应邀访问苏联，回国后不顾反动当局的限制，在昆明为青年作"访苏三月记"的报告．1946 年 9 月，华罗庚应纽约普林斯顿大学邀请去美国讲学，并于 1948 年被美国伊利诺依大学聘为终身教授．



华罗庚（1910—1985）

1949 年，当华罗庚闻知新中国成立的消息时，便毅然放弃优裕生活携全家返回祖国，为祖国的数学事业作出了重大贡献．他一生硕果累累，是中国解析数论、典型群、矩阵几何学、自导函数论等方面的研究者和创始人，并培养了许多学生．他还担任过清华大学数学系主任、中科院数学所所长等职．在“文化大革命”十年浩劫期间，华罗庚在工农业生产中推广统筹法和优选法，足迹遍及 27 个省市自治区，创造了巨大的物质财富和经济效益．华罗庚被广大群众誉为“人民的数学家”．

华罗庚还是我国中学生数学竞赛的首创者，从 1956 年到 1978 年间，他亲自担任竞赛委员会主任，还写了大量中学生课外数学读物和学习方法的书，为培养优秀数学人才倾注了大量心血．

1985 年 6 月 12 日，华罗庚应邀到日本东京大学作学术报告．他先中文，后改用英语演讲．日本学者被他精彩的演说深深吸引，原定 45 分钟的报告在经久不息的掌声中被延长到一个多小时．当他满头大汗结束讲话时，突然心脏病发作倒在讲台上．他用行动实践了自己的诺言：“最大的希望就是工作到生命的最后一刻．”

名师高徒

由于青年时代受到过“伯乐”的知遇之恩，华罗庚对于人才的培养格外重视．他发现和培养陈景润的故事是数学界的一段佳话．

陈景润(1933—1996)，福建福州人，1953 年毕业于厦门大学数学系．他的一篇数论文章受到了华罗庚的赏识．经华罗庚推荐，陈景润从厦门大学被调到中科院数学研究所工作．为了攻克世界著名数学难题“哥德巴赫猜想”，陈景润付出了常人难以想象的辛苦．1966 年，他屈居于六平方米的小屋，借一盏昏暗的煤油灯，伏在床板上，用一支笔，耗去了几麻袋的草稿纸，居然攻克了“哥德巴赫猜想”中的(1+2)，创造了距摘取这颗数论皇冠上的明珠(1+1)只是一步之遥的辉煌．他证明了“每个大偶数都是一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和”，使他在哥德巴赫猜想的研究上居世界领先地位．这一结果国际上誉为“陈氏定理”，受到广泛征引．

华罗庚一生都是在磨难中挣扎．他常说他的一生曾遭逢“三大劫难”．首先是在他童年时，家贫，失学，患重病，腿残疾．第二次劫难是抗日战争期间，孤立闭塞，资料图书缺乏．第三次劫难是“文化大革命”十年浩劫，家被查抄，手稿散失，禁止他去图书馆，将他的助手与学生分配到外地等．在这样恶劣的环境下，要坚持工作，做出成就，需付出何等努力，需怎样坚强的毅力是可想而知的．

9.2 当代几何大师——陈省身

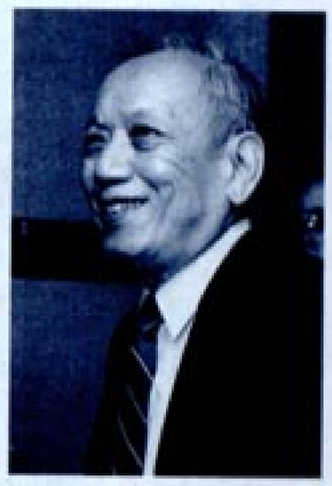
青年才俊

陈省身(1911—2004)，出生于浙江嘉兴一个知识分子家庭. 9 岁考入秀州中学预科一年级，这时他已能做相当复杂的数学题. 1922 年秋，父亲到天津法院任职，陈省身全家迁往天津. 第二年，他进入离家较近的扶轮中学. 陈省身在班上年纪虽小，却充分显露出他在数学方面的才华. 15 岁考入南开大学本科研修数学. 数学系主任姜立夫（1890—1978)，对陈省身的影响很大. 姜立夫人格高尚，教学严谨，循循善诱，使人感到读数学有无限的兴趣前途. 陈省身当时是全校闻名的少年才子，大同学遇到问题都要向他请教，他也非常乐于帮助别人.

1930 年，陈省身从南开大学毕业，到清华大学任助教并就读清华大学研究生，随美国芝加哥大学毕业的孙光远先生研究射影微分几何. 在清华学习期间，他先后发表了三篇论文.

微分几何有三百年的历史，出发点是微积分在几何学上的应用. 其正确的方向是所谓“大型微分几何”，即研究微分流形上的几何性质. 它与拓扑学有密切关系，其系统研究那时才刚开始. 这是陈省身在清华时始终憧憬着的方向，但未曾入门. 陈省身说，那时的心情，就像远望着一座美丽的高山，还不知如何可以攀登.

1934 年，陈省身从清华大学研究生院硕士毕业后，取得公费留学的资格，动身去德国汉堡大学攻读博士学位，两年后即获得了博士学位.



陈省身（1911—2004）

几何大师

在获得数学博士学位之后，1936 年，陈省身又前往法国巴黎拜当时最伟大的几何学家嘉当(É. J. Cartan，1869—1951) 为师，跟随嘉当 10 个月，受益终身. 嘉当每礼拜四下午是办公时间，因为有很多学生，所以要见他就必须在办公室前排队. 最初，陈省身也需要排队. 后来由于嘉当给的题目，陈省身大部分都会做，于是嘉当便改在家里每周见他一次. 在此期间陈省身共发表了三篇论文，但工作范围远远超于这些论文的内容.

从法国回国，陈省身一直任教于西南联合大学，直到 1943 年，陈省身接受邀请前往美国普林斯顿高级研究所从事数学研究，这一年，他完成了《关于高斯博内公式的简单内蕴证明》，这篇论文被誉为数学史上划时代的论文，这是陈省身一生中最重要的数学工作，因此，他后来被国际数学界尊称为“微分几何之父”. 如果说陈省身在清华时期是遥望着微分几何那座高山，那么现在则是攀登上了山的顶峰.

留美 30 年，陈省身获得了极高的学术声誉. 1975 年他荣获了美国科技最高奖——国家科学奖章，1984 年他又荣获了国际数学界最高奖——沃尔夫奖，这年 5 月以色列总统亲自向陈省身教授颁奖，以表彰他一生的数学工作，特别是他在整体微分几何方面的杰出贡献. 奖状评语说："此奖授予陈省身，因为他在整体微分几何上的卓越贡献，其影响遍及整个数学." 陈省身是迄今为止唯一荣获此项殊荣的华人.

宏伟愿望

1946 年，为了使中国成为数学强国，陈省身回国，并在中央研究院培养了许多优秀学生，其中就有国家最高科技奖获得者，吴文俊（1919— ）院士. 1947 年，吴文俊赴法留学，钻研代数拓扑学，其间提出了后来以他的名字命名的"吴示性类"和"吴公式"，有力地推动了示性类理论与代数拓扑学的发展. 吴文俊还在代数几何、博弈论及数学机械化等许多领域作出重要贡献. 1948 年陈省身应邀再度赴美，1949 年担任芝加哥大学的教授. 1960 年起在加州大学伯克利分校工作，培养了 31 名博士生，其中最著名的是丘成桐（1949— ）. 丘成桐的工作很广泛，其中最有影响且最重要的工作是关于"卡拉比猜想"的证明. 这一成功，促使一大批同类方程得到解决，成果累累，取得了代数几何学、复解析几何学、微分几何等领域的一系列重要定理. 他于 1982 年获得数学界的另一最高奖项——菲尔兹奖，成为菲尔兹奖得主中第一位中国人.

1972 年，陈省身开始每年回国访问讲学，从此，他把自己的后半生与中国数学事业的发展紧密地联系在一起. 1985 年他提出了"21 世纪中国成为数学大国"的响亮口号（有人称之为"陈省身猜想"），并身体力行，把获沃尔夫奖的 5 万美元奖金全部捐出，用于创建南开数学研究所，致力于培养中国数学高级人才. 20 世纪 90 年代，陈省身和他的学生丘成桐向中央倡议申办国际数学家大会，并为此做了大量卓有成效的幕后工作. 2002 年 8 月，四年一届的国际数学家大会在北京成功举办，来自全球的 4 000 多位杰出数学家参加了这次盛会，91 岁高龄的陈省身担任了本届大会的名誉主席，他高兴地对新闻界说：中国已经是数学大国，下一步目标是做数学强国. 他一再论证，21 世纪中国建成数学大国是有充分理由的，因为中国人的数学才能无需讨论.

2000 年，89 岁高龄的陈省身叶落归根，定居于南开大学，第二年他还率先垂范，以九十高龄为南开本科生讲授微积分基础课. 他深入浅出地引导同学们去领略数学的神奇和快乐. 2004 年 12 月，陈省身在南开走完了他的数学人生，国际数学界的一颗巨星陨落了，但是他的精神仍然鼓舞着我们攀登数学高峰，实现他"数学强国"的梦想！

习题

1. 读过中国现代数学家努力拼搏的事迹之后，请谈谈你的感受.
2. 法国大数学家庞加莱说过："若想预见数学的将来，正确的方法是研究它的历史和现状."请你写一篇对数学史的认识的小论文.

菲尔兹奖和沃尔夫奖简介

菲尔兹奖(Fields Prize)是由加拿大数学家菲尔兹(J. C. Fields，1863—1932)提议设立的国际性数学奖，是国际数学界最有影响的奖项之一. 菲尔兹本人捐赠的部分资金和1924年国际数学家大会的结余经费建立了菲尔兹奖的基金，他的建议在1932年的国际数学家大会上通过，并决定从1936年起开始评定，在每届国际数学家大会上颁发. 此后由于第二次世界大战爆发而中断，1950年又恢复颁奖.

菲尔兹奖主要奖励年轻数学家的工作，1974年的国际数学家大会上更明确规定该奖只授予40岁以下的数学家. 获奖者的获奖工作一般能够反映当时数学的重大成就. 菲尔兹奖设立初期，并没有在世界上引起广泛重视，随着国际数学家大会的影响的不断扩大，特别是获奖者的杰出数学成就，菲尔兹奖的荣誉日益提高，现已成为当今数学家渴望得到的最高奖励之一.

沃尔夫奖(Wolf Prize)是由沃尔夫基金会设立的奖项. 沃尔夫(R. Wolf，1887—1981)是富有的犹太工业家，曾任古巴驻以色列大使，后移居以色列. 1976年1月1日，沃尔夫及其家族捐巨款成立了沃尔夫基金会. 沃尔夫奖旨在“促进科学和艺术的发展以造福于人类”，给在化学、农业、医学、物理学、数学和艺术方面的杰出成就者颁奖. 每年颁奖一次，沃尔夫奖的评奖委员会由世界著名科学家组成.

沃尔夫数学奖的选定是根据候选人数学成就的综合评价，获奖人获奖时多已蜚声数坛，迄今获奖者年龄平均在60岁以上，因此可以与菲尔兹奖互为补充，交相辉映.

附录

部分中英文词汇对照表

欧几里得几何（欧氏几何）	Euclidean geometry
毕达哥拉斯定理	Pythagoras theorem
平行公设	parallel axiom
勾股定理	Gougu rule
中国剩余定理	Chinese remainder theorem
负数	negative number
杨辉三角	Yang Hui'triangle
不定方程	indeterminate equation
超越数	transcendental number
代数数	algebraic number
对称	symmetry
群	group
解析几何	analytic geometry
费马大定理	Fermat's last theorem
微积分	differential and integral calculus
极限	limit
代数学基本定理	fundamental theorem of algebra
非欧几何	non-Euclidean geometries
概率论	probability theory
统计学	statistics

后 记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持．在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志．

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授．从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了“课标”中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查．

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文．我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断的完善．现在所取得的成果，是实验研究组全体成员、编者、实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶．

各实验区参加教材审读、研讨及修改的主要成员有：

韩继清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颉、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勤、王宗武、黄武昌．

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒风杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳．

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意．

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的师生们．

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力．

我们的联系方式如下：

电话：010－58758523　010－58758532

电子邮件：longzw@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学教材实验研究组