普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–4

对称与群

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　王殿军

责任编辑　　刘长明

美术编辑　　李宏庆　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 3－4

对称与群（B版）

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

·

人民教育出版社　出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京瑞诚印刷有限公司印装　全国新华书店经销

·

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：4.25　字数：94 000

2006 年 7 月第 1 版　2009 年 8 月第 5 次印刷

ISBN 978-7-107-19806-9
G·12856（课）　定价：4.45 元

目 录

引 言

仔细观察我们周围的世界，你会发现许多对称的事物．对称性是自然界十分普遍的一种现象，也是自然界许多事物所具有的一种重要性质．德国著名数学家、物理学家外尔（H. Weyl，1885—1955）说过：“美和对称紧密相连”．

在初中平面几何中，我们就学习过轴对称图形和中心对称图形的概念．可以说，轴对称和中心对称是最普遍的对称性，也是人们最早认识和研究的对称性．

轴对称图形给人以匀称、平衡、稳定的感觉．轴对称现象不仅在自然界大量存在，而且也常常被用于建筑设计、艺术造型和商标图案等．图 0-1 中列举了一些事物，它们的图形都具有轴对称性，其中有建筑物、人体、蝴蝶、烛台、京剧脸谱、徽标、装饰汉字、旗帜、飞机图案等．

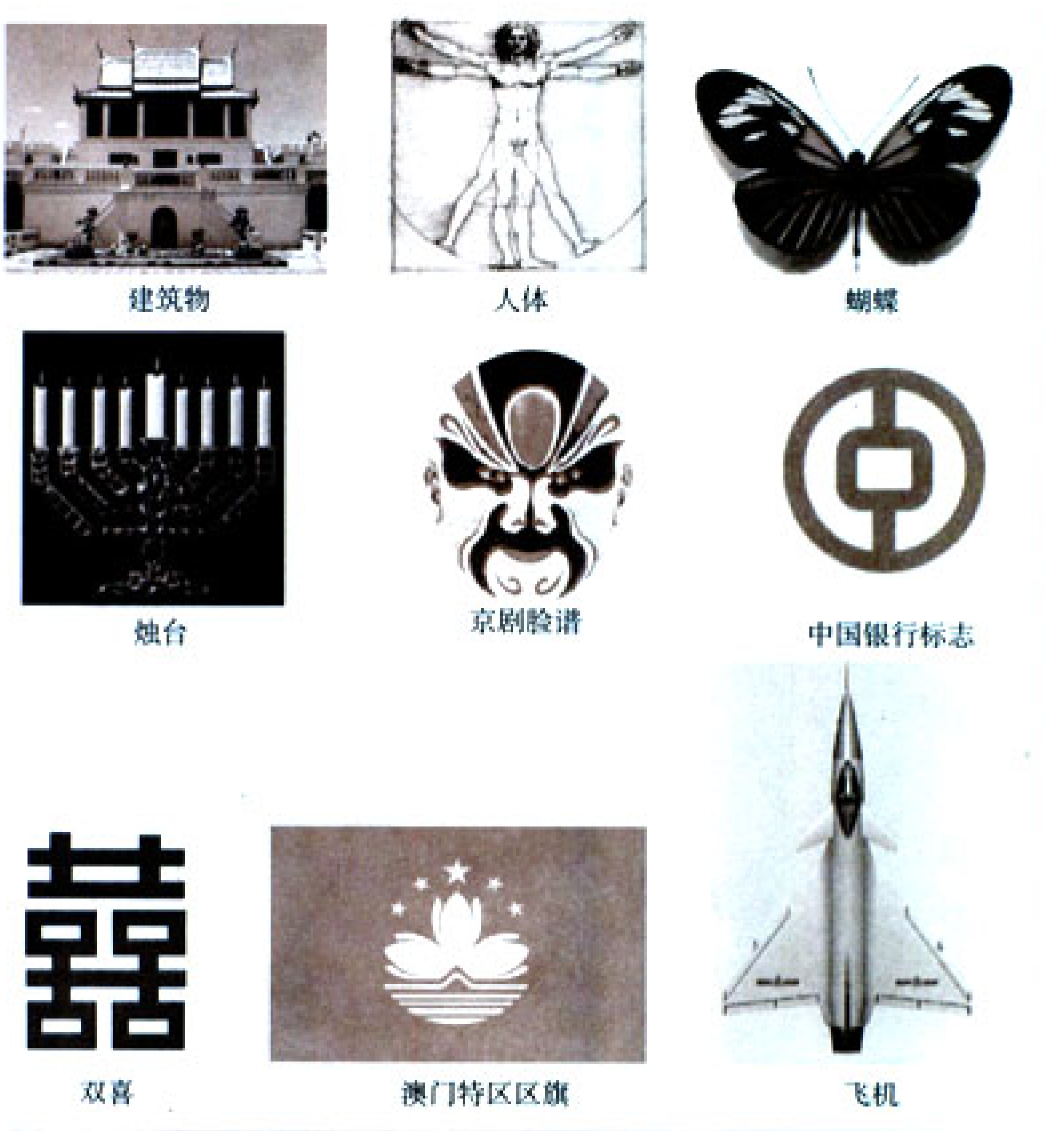


图 0-1

中心对称虽然没有轴对称那么普遍，但是也很常见．图 0-2 中列举了一些具有中心对称性的事物，其中有晶莹的雪花、美丽的花朵、机械齿轮、太极图、汽车轮轴盖、徽标图案等．

图 0-2

对称不仅给人以形式上的美感，而且还包含着许多的科学道理．比如，飞机、舰艇的对称性利于飞机和舰艇在航行中保持平衡（图 0-3）．

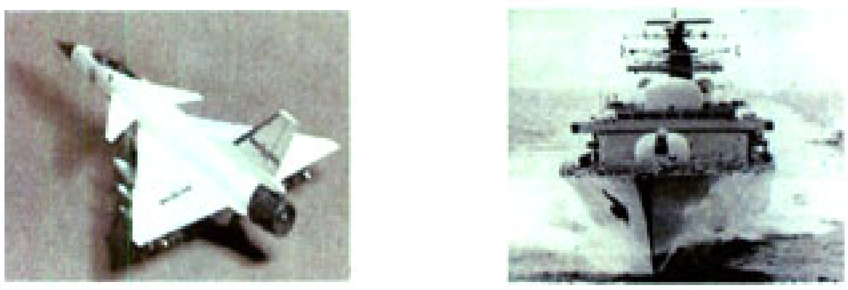


图 0-3　左右对称的飞机和舰艇

人双耳的对称分布有利于辨别声音的来源，人双眼的对称分布有利于判断物体的位置．建筑物和桥梁的对称造型要考虑美观这个因素，但是更多地是考虑使用方便和受力均衡的问题．如果说圆形的瓷盘、瓷碗、花瓶，主要考虑的是适用、美观和加工方便，那么具有中心对称性的螺旋桨、齿轮、风扇，就是为了消除高速旋转时的离心力所带来的危险，具有深刻的科学道理（图 0-4）．

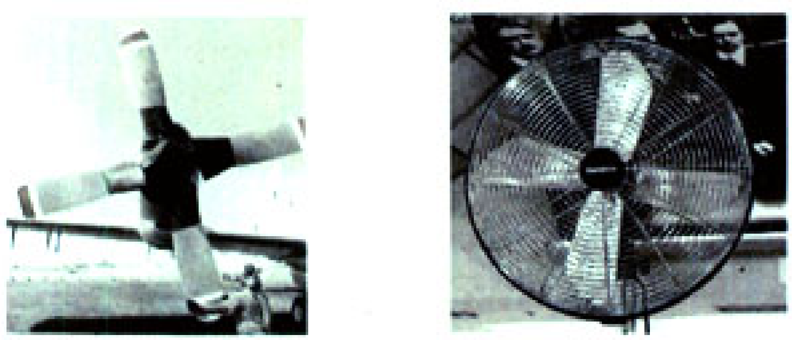


图 0-4　飞机螺旋桨、电风扇

实际上，除了轴对称和中心对称之外，还有其它不同类型的对称．如果把下列图形看作平面上这样一个图形（图 0-5），它的两端可依照同样的规律无限延伸，那么它既不是轴对称图形，也不是中心对称图形．它是一种具有所谓平移对称性的几何图形，这种图形经

常被用来作为装饰用的花边.

图 0-5　装饰花边（局部）

如果我们把图 0-6 中所列举的图形，看作是依照同样规律铺满整个平面的图形的局部．那么，这种图案也具有某种平移对称性．这种图案也很常见，注意观察你所见到的地砖铺设图案和墙面装饰图案，不难发现类似的图形.

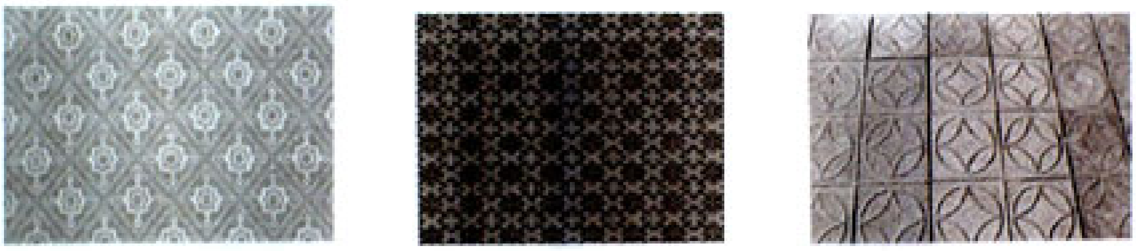


图 0-6　平面装饰图案（局部）

当然，地砖铺设图案不会是无限延伸的，但是我们可以把这些图案理解为按照同样规律无限延伸的图案的一个局部．如果说图0-5中的图案是一维平移对称图形，它只能沿着一个直线方向平移，那么图 0-6 中的图案就是具有二维平移对称性的图案，它可以沿着两个不同的方向平移.

具有平移对称性的图形，给人以连绵不断、整洁宽阔的感觉，这也是大部分地砖都以这种方式铺设的重要原因之一．另外一个原因是，这种图案可以由一个单位图案不断重复而产生，这有利于地砖的统一加工制作和铺设.

下面是几个具有另一种对称性的图形（图 0-7）．这种新的对称性就是所谓的旋转对称性．后面我们会给出旋转对称性的严格定义，粗略来说，那就是图形绕某个点旋转某个角度之后，能与原来的图形完全重合．图 0-7 中所列举的图形都是具有这种性质的图形.

香港特区区旗　　轮轴盖　　海星

图 0-7

上面我们只是直观而粗略地提到平移对称性和旋转对称性，要给出这种对称性的严格定义，我们需要引进新的数学工具.

人们不可能列举出全部具有对称性的事物，我们要做的事情是研究给定事物所有可能

的对称性．如果注意观察，我们会发现，雪花不仅具有轴对称性，而且具有中心对称性．如果你在显微镜下观察雪花，会发现没有两片雪花的形状是完全相同的．但是，它们所具有的对称性都是相同的，因为雪花具有六边形那样的结构（图 0-8）．

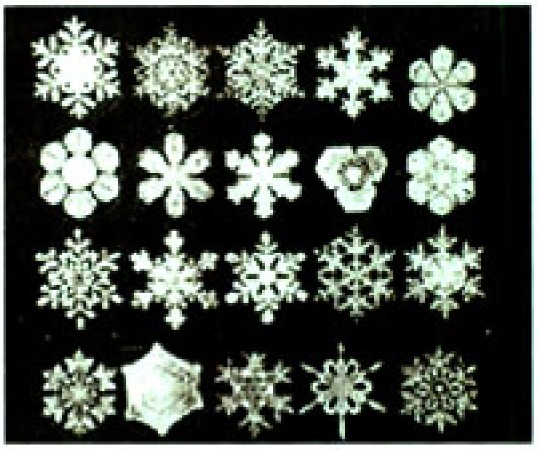


图 0-8 缤纷的雪花

我们也会发现，正六边形比正三角形“更对称”，而正十二边形比正六边形“更对称”．当然，圆形有更多的对称性，任何一条通过圆心的直线都是圆的对称轴．虽然图 0-9 中的图形都具有对称性，但是它们对称的“程度”显然不同．

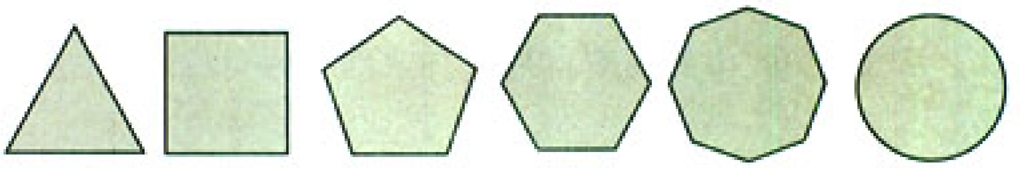


图 0-9

以上的讨论使我们明白，除了轴对称和中心对称之外，还有一些其它类型的对称性．于是，我们面临如何定义新对称性的问题．如果说以前我们定义对称图形主要依靠直观想象和语言描述，那么现在我们要学习使用精确严格的数学语言．

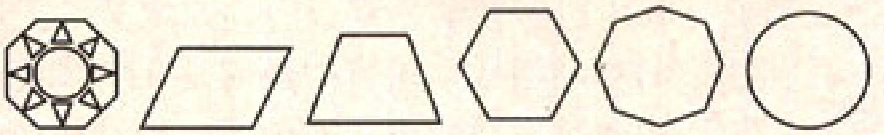
此外，如果要研究一个图形的全部对称性，比较两个图形是否具有相同的对称性，考察两个图形哪个“更对称”，这些也都需要更好的数学工具和语言．

实际上，对称现象不仅体现在物体和几何图形上，许多自然现象，许多数学公式也都有对称性．比如，多项式 $x^3+y^3+z^3$ 中字母 x，y，z 的出现就是完全对称的．面对纷繁多样的对称性，我们也需要新的数学工具去研究它，认识它．

本专题课程的目的，就是要通过对几何图形对称性的研究，逐渐引入群的概念．希望通过这个专题的学习，使大家能对群论这样一个非常重要的数学分支，有初步的认识，同时也能初步了解一些群论解决具体问题的实例．

练习

1. 识别下列图形的对称类型，找出它们的对称中心和对称轴.



2. 考察下列图形的对称性. 哪些是中心对称图形？哪些是轴对称图形？

3. 分别画出三种轴对称图形、中心对称图形.
4. 列举出你所见过的一些有规律的图案，它既不是轴对称的也不是中心对称的.
5. 在下列的印刷体的字母表中，包含着一些具有对称性的字母：

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(1) 列出其中具有中心对称性的字母.

(2) 列出其中具有轴对称性的字母.

第一章　平面图形的对称性与等距变换

在初中的时候，我们就是利用图形移动、重合的方式定义了图形的全等、轴对称和中心对称．其实，几何图形的移动用数学语言来说就是几何平面的变换．从引言中我们看到，无论是在现实生活中还是在数学中，人们遇到的对称性远不止中心对称和轴对称．

我们原来采用直观朴素的方式来定义的对称性，有其局限性．当我们要研究其它类型的对称性的时候，比如多项式的对称性，原来的定义方式就不适用了．

此外，原来的定义方式，只能粗略地告诉我们，哪个图形是中心对称的，哪个图形是轴对称的，但是缺乏一种描述一个图形整体对称性的方式．要想解决这些问题，我们首先要从改进对称性定义入手．

在本章中，我们通过分析轴对称图形与轴反射变换的关系、中心对称图形与中心反射变换的关系，认识变换与对称性的密切关系．然后，通过引入旋转变换和平移变换的概念，给出旋转对称性和平移对称性的数学描述．

最后，我们通过分析旋转变换、轴反射变换和平移变换的共同特点，引入等距变换的概念，并讨论等距变换的基本性质．此外，还要引入变换合成（乘法）运算的概念，并讨论变换合成运算的性质．

1.1　变换与对称

1.1.1　轴反射变换与轴对称图形

人们把一个集合 S 到它自身的一一映射 φ 叫做**变换**，并记为：$\varphi: S\leftrightarrow S$．如果 S 是由一些点组成的集合，则称 φ 为**点变换**或**几何变换**．

在本课程中，我们既用 α 表示一个平面，也用 α 表示这个平面上全体点所组成的集合．因为我们主要研究平面上的点变换，也就是 α 到它自身的一些特殊的变换．因此，如果没有特别声明，我们所说的变换都是指平面上的点变换．

我们为什么要研究这样的点变换呢？让我们通过研究几种简单的情况来认识这个问题．

定义 1　设 L 是平面 α 上一条给定的直线，把平面 α 上任意一点 P 映射为关于直线 L 的对称点 P' 的点变换，称为平面 α 关于直线 L 的**轴反射变换**（axial reflection transformation），直线 L 称为**反射轴**（axial of reflection）．轴反射变换也简称为**轴反射**（axial reflection）．

图 1-1 是轴反射变换的一个示意图．在轴反射变换下，反射轴垂直平分连结每一对对

应点 P，P'的线段．反射轴上每一个点在该反射变换下的象就是它自身，这样的点称为反射变换的**不动点**（fixed point）．注意到 P，P'在反射变换下互为象．

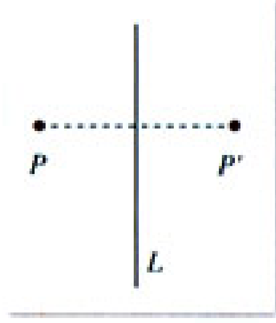


图 1-1　关于直线 L 的反射变换

观察一下容易发现，在轴反射变换下一个图形与它的象全等．因此，轴反射变换是一种全等变换，也就是说，轴反射变换把一个图形变为它的全等图形．图 1-2 显示了轴反射变换下$\triangle ABC$ 和它的象$\triangle A'B'C'$的位置关系．

图 1-3 中有两只兔子的图形，在以图中的虚线为轴的反射变换下，可以把其中一只兔子变为另外一只．

早在初中平面几何中，我们就学习过轴对称图形的定义．

我们不难发现，如果一个图形是轴对称图形，那么它在关于其对称轴的轴反射变换下的象与它自身完全重合．反过来，如果一个图形在一个轴反射变换下与它自身完全重合，那么这个图形也是一个轴对称图形，反射轴就是它的对称轴．由此可见，轴对称图形可以用轴反射变换来定义．

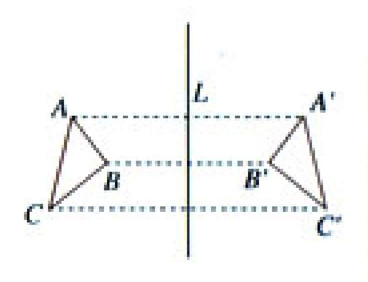


图 1-2　轴反射变换下三角形与它的象

定义 2　如果存在一条直线 L，使得图形 F 在以 L 为轴的轴反射变换下的象与 F 完全重合，则称 F 是关于 L 的一个**轴对称图形**（figures symmetric with respect to a straight line），直线 L 称为图形 F 的一个**对称轴**（symmetric axial）．

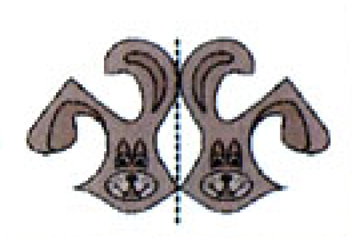


图 1-3

既然，这里所给出的轴对称图形的定义，与初中时候给出的定义完全一致，那么为什么还要重新给出定义呢？在原来的定义中，我们使用了一个说法“折叠”．折叠最大的不好之处是会引起被折叠图形的变形，不利于推广．

另外一个区别是，我们这里的轴反射变换是整个平面的一个变换，而初中时候，我们往往把折叠理解为对图形本身的折叠，而不是对图形所在的整个平面的折叠．

下面给出轴反射变换的几个简单性质，这些性质的证明留给读者作为练习．

性质 1　轴反射变换的全部不动点正好是反射轴上所有的点．

性质 2　轴反射变换保持平面上任意两点间的距离不变．即，如果 $\varphi: \alpha \to \alpha$ 是一个轴反射变换，$\varphi(P)=P'$，$\varphi(Q)=Q'$，那么线段 PQ 的长度等于线段 $P'Q'$的长度，简记为 $PQ=P'Q'$．

性质 3　轴反射变换的对应线段或者其延长线如果相交，那么交点一定在反射轴上．

思考与讨论

在纸上画出如下的图形 F 和两条彼此平行的直线 L_1，L_2（图 1-4）.

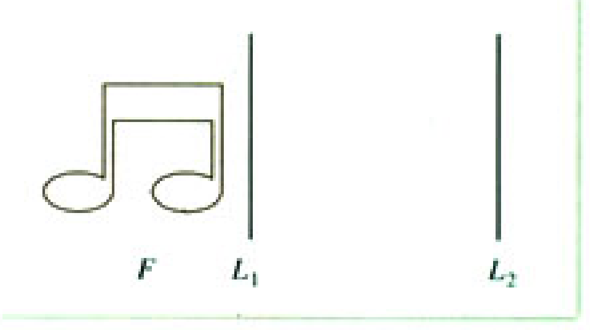


图 1-4

（1）画出图形 F 在以 L_1 为轴的反射变换下的象 F_1；

（2）画出图形 F_1 在以 L_2 为轴的反射变换下的象 F_2.

讨论，把 F 直接变为 F_2 的变换是一个什么样的变换. 你能否由这个具体问题总结出什么一般性的结论？

1.1.2　中心反射变换与中心对称图形

上面我们给出了轴反射变换的定义，揭示了轴反射变换和轴对称图形之间的联系. 下面我们给出点反射变换的定义，类似地建立点反射变换和中心对称图形的关系.

定义 3　设 O 是平面 α 上一个给定的点，把平面 α 上任意一点 P 映射成关于点 O 的对称点 P' 的点变换称为平面 α 关于 O 的**中心反射变换**（central symmetric transformation），点 O 称为**反射中心**（center of reflection）. 中心反射变换简称为**中心反射**（central reflection）或**点反射**（point reflection）.

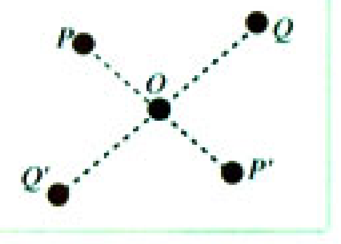


图 1-5　关于点 O 的反射变换

图 1-5 是中心反射变换的一个示意图. 在中心反射变换下，反射中心平分任意两个对应点之间的连线，反射中心是中心反射变换唯一的不动点.

一个几何图形在中心反射变换下的象与这个几何图形全等. 所以，中心反射变换也是一种全等变换. 下面是一个四边形和它在中心反射变换下的象（图 1-6）.

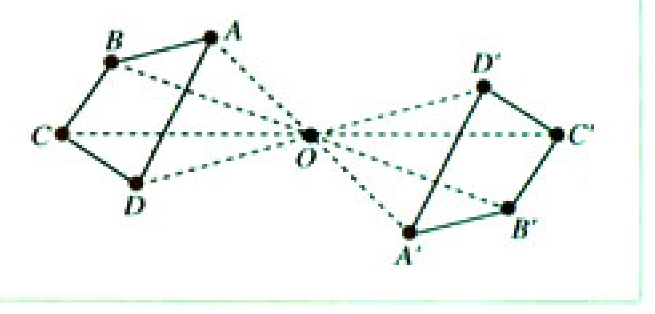


图 1-6　中心反射变换下四边形与它的象

在初中我们也学习过中心对称图形的定义. 容易看出，如果把一个平面图形，绕平面上某一点旋转 180°，那么图形上任何一点都变成了该点关于旋转中心的对称点. 因此，绕一点旋

转 180°所引起的几何变换，与关于该点的中心反射变换是相同的.

图 1-7 给出了一个由两头猪的图象所构成的图形. 这个图形是中心对称图形. 从这个图形也可以看出，中心反射变换和绕该中心旋转 180°的变换是相同的. 既然如此，中心对称图形也可以用中心反射变换来定义.

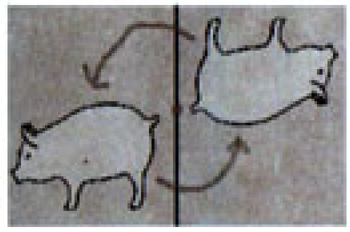


图 1-7

定义 4 如果存在一个点 O，使得图形 F 在以 O 为反射中心的中心反射变换下的象，与 F 自身完全重合，则称 F 是关于 O 的一个**中心对称图形**（figures symmetric with respect to a point）.

这里给出的中心对称图形的定义，与初中时候给出的定义本质上是完全一致的. 下面我们列举出中心反射变换的两个简单性质.

性质 1 中心反射变换保持平面上任意两点间的距离不变.

性质 2 中心反射变换下，对应线段平行、长度相等、方向相反.

1.1.3 旋转变换与旋转对称图形

定义 2 和定义 4 分别用轴反射变换和中心反射变换刻画了轴对称图形和中心对称图形，那么有没有可能利用其他点变换来刻画更一般的对称性呢？

如果说中心对称图形是这样的图形，它在绕对称中心旋转 180°这样的变换下不变（与自身重合），那么，我们为什么不能考虑这样类似的图形，它在绕某个点旋转某个角度之后也与自身重合？

比如，中国香港特别行政区区旗上的紫荆花图案（图 0-7），既不是轴对称图形，也不是中心对称图形. 但是，它在旋转 72°这样的变换下与原图形重合. 因此，可以说它具有某种旋转对称性. 为此，首先我们需要把中心反射变换的概念推广为一般的旋转变换，然后，再像定义中心对称图形和轴对称图形那样，利用旋转变换来定义旋转对称图形.

定义 5 在平面 α 上，把每一点 P 绕一个固定点 O 旋转一个定角 θ，变成另外一个点 P'，由此产生的变换称为平面 α 的一个**旋转变换**（rotation transformation），固定点 O 称为**旋转中心**（center of rotation），定角 θ 称为**旋转角**（angle of rotation）. 旋转变换简称为**旋转**（rotation）.

不难看出，中心反射变换就是旋转角为 180°的一个旋转变换. 因此，中心反射变换是旋转变换的特殊情况，或者说，旋转变换是中心反射变换的推广. 下面是一个旋转变换的示意图（图 1-8）.

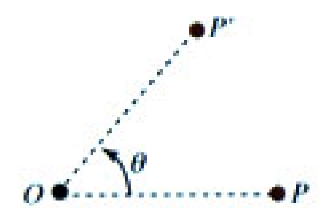


图 1-8

要决定一个旋转变换，主要有三个要素：旋转中心、旋转方向、旋转角度.

旋转中心比较清楚. 而旋转方向有顺时针和逆时针之分. 为方便起见，我们约定，如果不特别声明，我们所说的旋转都是按照逆时针方向旋转.

因为在几何变换中，我们只关心点的变换结果，不关心变换过程本身. 因此，如果是同一个旋转中心，那么旋转角为 θ 和 $360°+\theta$ 所决定的变换是相同的. 这样，旋转角为 $-30°$ 的变换，等于旋转角为 $360°+(-30°)=330°$ 的变换，这可以理解为按照顺时针旋转 30°，或按

逆时针方向旋转 330°.

在旋转角为 0°的旋转变换下，任何一点的象都是它自身，也可以说任何一个点都是不动点．像这样保持每个点都不动的变换称为**恒等变换**（identical transformation).

定义 6　如果存在一个点 O，使得图形 F 在以 O 为旋转中心，以 θ 为旋转角的非恒等旋转变换下的象与 F 自身重合，则称 F 是一个具有旋转角 θ 的**旋转对称图形**（rotation symmetric figures with angle θ).

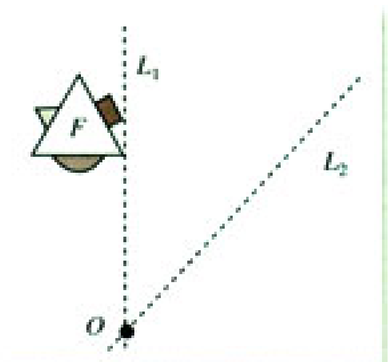
由定义可知，中心对称图形一定是旋转对称图形，反之不然．因此，旋转对称图形是中心对称图形的推广，中心对称图形是旋转对称图形的特殊情况.

注意：如果图形具有旋转角为 θ 的旋转对称性，那么它也具有旋转角为 2θ、3θ……这样的旋转对称性.

请读者按照这个定义，考察一下，引言中所出现的图形中，哪些图形具有旋转对称性，它们的最小正旋转角是多少？

思考与讨论

现有如下的图形 F 和两条交于 O 点的直线 L_1，L_2（图 1-9).



（图 1-9）

（1）画出图形 F 在以 L_1 为轴的反射变换下的象 F_1；

（2）画出图形 F_1 在以 L_2 为轴的反射变换下的象 F_2.

讨论：把 F 直接变为 F_2 的变换是一个什么样的变换．你能否由这个具体问题总结出什么一般性的结论？

一个几何图形在旋转变换下的象与这个几何图形全等．所以，旋转变换也是一种全等变换．既然旋转变换是中心对称变换的推广，利用旋转变换就可以定义更丰富的对称性．下面是旋转变换的几个简单性质.

性质 1　旋转变换保持任意两点之间的距离不变.

性质 2　非恒等的旋转变换有唯一的不动点.

性质 3　如果一个图形在旋转 θ 角度之后与自身重合，那么旋转 $k\theta$ 角度之后也与自身重合，其中 k 是任意整数.

思考与讨论

设 $\theta>0$ 是使得一个几何图形与自身重合的最小旋转角度，那么一定有正整数 n，使得 $\theta=\frac{360^\circ}{n}$.

1.1.4 平移变换与平移对称图形

如果你在一张纸上画一个图形，然后在桌面上沿着一条直线移动这张纸，那么这种移动就演示了一个平移. 在平移中，原来图形中的点所移动的途径都是彼此平行的直线，而且所移动的方向和距离都是一样的.

在引言中出现的装饰花边、由规则地砖铺设的地板，都可以看作是由一个基本单位图形，经过适当平移而产生的图形. 为了研究类似的排列有序的图形的对称性，我们需要引入平移变换的概念.

定义 7　在平面 π 上给定一个向量 $\overrightarrow{AA'}$，把每一点 P 按照给定向量 $\overrightarrow{AA'}$ 的方向移动到另外一个点 P'，并且使得向量 $\overrightarrow{PP'}$ 与 $\overrightarrow{AA'}$ 长度相同，由此所产生的变换称为沿着向量 $\overrightarrow{AA'}$ 的一个平移变换（translation transformation），$\overrightarrow{AA'}$ 称为平移向量（translation vector）. 平移变换简称为平移（translation）.

由定义可以看出，平移是由移动距离和移动方向所唯一确定的，而一个向量恰好可以同时体现距离和方向，这就是我们选择平移向量来表示平移变换的原因. 下面是一个平移变换下 $\triangle BCD$ 和它的象 $\triangle B'C'D'$ 的示意图（图 1-10）.

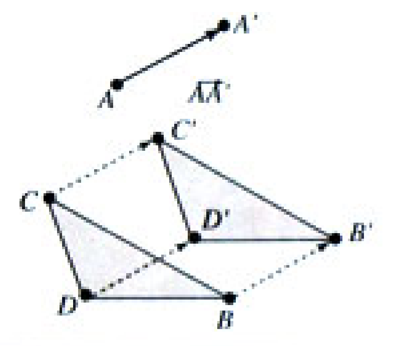


图 1-10　平移变换下的三角形和它的象

一个几何图形在平移变换下的象与这个几何图形全等. 所以，平移变换也是一种全等变换. 容易看出，平移距离为 0 的平移变换是恒等变换.

如果你试图画出一个完整的图形，这个图形在一个非恒等平移变换下与它自己重合，那么你注定不会成功. 简单思考一下，你就会明白，在非恒等平移变换下不变的图形，只能是一个无界的图形. 对于无界图形，我们虽然不能画出它的全部，但是我们很容易从它的局部看出它的全部.

定义 8　如果一个图形 F 在某个非恒等的平移变换下的象与 F 自身完全重合，则称 F 是一个具有平移对称性的图形，或者简称为平移对称图形（translation symmetric figures）.

古今中外，人们很喜欢把具有一定平移对称性的图形用在建筑装饰、地面装饰、墙壁装饰，甚至一些艺术品中，一些画家还在自己的绘画作品中使用这种图案. 图 1-11 中列举了一些具有平移对称性的图形（局部）.

思考与讨论

如果要选择一种规格的正多边形铺满整个平面，使得各正多边形之间既没有空隙也没有重叠，那么我们只能选择哪几种正多边形？

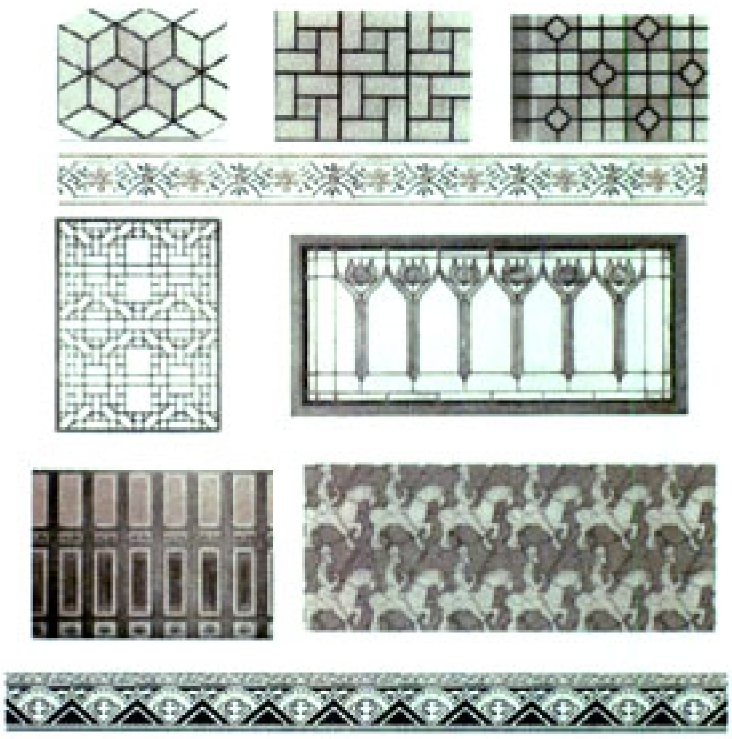


图 1-11　平移对称图形（局部）

平移变换有下面的性质.

性质 1　平移变换保持任意两点间的距离不变.

性质 2　非恒等的平移变换没有不动点.

通过上面的学习，我们可以发现，对称性可以用变换来定义. 我们上面所使用的变换，都有一个共同的性质：保持任意两点之间的距离不变. 这种变换就是我们下面要讨论的主题.

练习

1. 给出集合 $S=\{1, 2, 3\}$ 的全部变换.
2. 下列汽车轮轴盖具有旋转对称性，求它们的最小正旋转对称角.

图 1-12

1.2 等距变换与刚体运动

前面，我们比较严格地给出了轴反射变换、中心反射变换、旋转变换、平移变换的定义．研究了这些变换的简单性质，同时揭示了变换与对称性之间的关系．中心反射变换是旋转变换的一个特例，因此实际上我们只建立了三种不同的变换：轴反射、旋转、平移．

尽管这三种变换的定义很不相同，但它们都是全等变换，它们都保持平面上任意两点之间的距离不变．在数学中，人们把保持任意两点间距离不变的变换叫做“等距变换”．

本节我们给出等距变换的定义，同时要讨论等距变换的简单性质，尤其是要引入等距变换的合成运算，并研究这种运算的性质．

1.2.1 等距变换及其性质

定义 1　设 σ 是平面 α 的一个变换，平面上任意一点 P 在变换 σ 下的象记为 P'，即 $\sigma(P)=P'$．如果变换 σ 不改变任意两点之间的距离，即对于任意两点 P，Q，$PQ=P'Q'$，其中 $\sigma(Q)=Q'$，则称变换 σ 为平面 α 上的一个等距变换(isometric transformation)，等距变换也称为全等变换（congruent transformation）．

注

σ 为小写希腊字母，英文名称为 sigma[ˈsigmə]．

等距变换对我们来说并不陌生．由前面已经学过的知识，我们可以得到下面的结论．

定理 1　平面上的轴反射变换、旋转变换和平移变换都是等距变换．

注意到中心反射变换是旋转变换的特殊情况．因此，到目前为止，我们所学过的变换都是平面上的等距变换．

平面上是不是只有这么几种等距变换呢？

答案是肯定的．但是，在本课程中我们不给出严格证明，希望有兴趣的同学自己去思考，应该如何给出证明．下面所列举出的等距变换的性质，对于上述问题的思考和讨论很有帮助．

定理 2　设 σ 是平面上的一个等距变换．

（1）如果 σ 保持两点不动，则 σ 也保持过这两点之直线上的点都不动．

（2）如果 σ 保持平面上不共线的三点不动，那么 σ 必然是恒等变换．

（3）若 σ 把点 P，Q 分别变为点 P'，Q'，那么 σ 一定把直线 PQ 上的点变到直线 $P'Q'$ 上，而且相对位置完全相同．

（4）等距变换 σ 被三个不共线的点的象所唯一确定．

等距变换 σ 是性质很强的一种变换．定理 2 说明，只要知道三个不共线的点以及其在等距变换 σ 下的象，那么这个等距变换就完全确定下来了．

由这个定理，我们也可以看出，等距变换把一个三角形变为与它自己全等的三角形．也就是说，等距变换不改变三角形的大小和形状．

思考与讨论

我们已经知道等距变换保持三角形的大小和形状不变．你能根据这个结论，证明等距变换也保持任何正 n（$n\geqslant 3$）边形的大小和形状不变吗？

实际上，等距变换不仅保持三角形和正多边形的大小和形状不变，而且保持任何几何图形的形状和大小都不变．这就是说，等距变换一定是全等变换．全等变换当然也一定是等距变换（为什么?）．由此可见，等距变换和全等变换完全是一回事，这也是我们把等距变换叫做全等变换的原因．

1.2.2 等距变换的合成运算及性质

虽然，我们还没有完全搞清楚，平面上到底有些什么样的等距变换，但是，这并不妨碍我们用一个符号 $E(2)$来表示平面上全体等距变换所组成的集合．

我们之所以用 $E(2)$来表示平面上全体等距变换的集合，是因为人们也常把等距变换称为欧几里得（Euclid）变换．我们只研究平面上的欧几里得变换，实际上在空间中，也可以类似定义等距变换（欧几里得变换），并使用 $E(3)$来表示空间中的全体等距变换．现在，相信大家已经明白，符号 $E(2)$中的数字 2 的含义了，它代表了平面的维数是 2．

前面，我们主要关注等距变换是什么样的变换，从几何上给出了描述和刻画．下面，我们更多地关心等距变换的整体性质，尤其要建立等距变换合成运算，并讨论这种运算的性质．

设 σ，τ 是平面上两个等距变换．如果先施行变换 σ，然后再接着施行变换 τ，会是什么样的情况?

注：τ 为小写希腊字母，英文名称为 Tau [tɔː]．

如果先施行变换 σ，平面上一点 P 被变为点 P'，即，

$$\sigma: P\to P';$$

接着再施行变换 τ，点 P' 就会进一步被变为点 P''，即，

$$\tau: P'\to P''.$$

如果考虑这两个等距变换的合成作用，那么效果相当于直接把 P 变为点 P''．我们可以用下面的符号来表示这种合成作用：

$$P\xrightarrow{\sigma}P'\xrightarrow{\tau}P''. \tag{2.1}$$

如果使用映射的记号，应该有 $P''=\tau(P')$，$P'=\sigma(P)$，从而有

$$P''=\tau(P')=\tau(\sigma(P)). \tag{2.2}$$

由（2.1）或（2.2）可以看出，对于任何一点 P，等距变换 σ，τ 的这种合成作用，把 P 变为唯一确定的一个点$P''=\tau(\sigma(P))$．因此，这样的合成作用相当于一个变换．这个变换，我们就把它形象地称为变换 σ，τ 的**合成**或**乘积**，并且很自然地记为 $\tau\cdot\sigma$．

按照刚才的讨论，我们相当于按照如下方式来定义变换 σ，τ 的**合成** $\tau\cdot\sigma$：

$$\tau\cdot\sigma(P)=\tau(\sigma(P)). \tag{2.3}$$

现在有一个问题我们必须给出回答，那就是：如果 σ，τ 是平面上两个等距变换，那么它们的合成 $\tau\cdot\sigma$ 也是等距变换吗？

这个问题很容易回答．设 P，Q 是平面上任意两点．既然 σ 是等距变换，应该有

$$\sigma(P)\sigma(Q)=PQ❶. \tag{2.4}$$

再利用 τ 是等距变换，应该有

$$\tau(\sigma(P))\tau(\sigma(Q))=\sigma(P)\sigma(Q). \tag{2.5}$$

根据定义式（2.3），以及（2.4）和（2.5），就可得到

$$\tau\cdot\sigma(P)\tau\cdot\sigma(Q)=PQ.$$

注

❶ $\sigma(P)\sigma(Q)$ 表示 P 和 Q 经 σ 变换后的两点 $\sigma(P)$，$\sigma(Q)$ 间的距离．

由此可见，如果 σ 和 τ 都是平面上的等距变换，那么它们的合成 $\tau\cdot\sigma$，也是一个等距变换，简记为 $\tau\sigma$.

如果把 $E(2)$ 中的全体元素看作运算对象，把等距变换的合成看作一种“乘法”运算，我们相当于已经证明了：等距变换在合成运算下封闭．这个结论可以用数学化的形式表示如下．

(Ⅰ) 若 σ，$\tau\in E(2)$，则 $\tau\sigma\in E(2)$．（封闭性）

我们都熟悉数的乘法运算，但是对于这种运算对象为等距变换的合成运算，一开始可能多少有点不适应．随着进一步的学习和讨论，我们会逐渐熟悉这种运算．

在下面的例题中，我们要计算一些特殊等距变换的合成，以便大家更好地理解等距变换合成运算的含义．

例 1　在平面上取定一点 O，用 ρ_θ 来表示旋转中心为 O、旋转角为 θ 的旋转变换．求 $\rho=\rho_{\theta_2}\rho_{\theta_1}$．

解：设 P 是平面上任意一点，$\rho_{\theta_1}(P)=P'$，$\rho_{\theta_2}(P')=P''$（如图 1-13）．

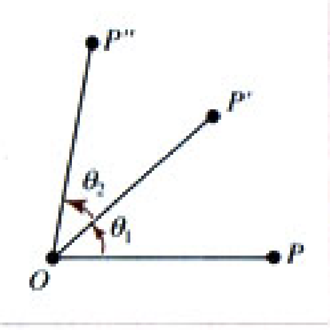


图 1-13

由变换合成运算的定义，我们有 $\rho(P)=P''$.

根据旋转变换的意义，OP' 是由 OP 绕 O 点旋转 θ_1 得到，OP'' 是由 OP' 绕 O 点旋转 θ_2 得到，所以 OP'' 是由 OP 绕 O 点旋转 $\theta_1+\theta_2$ 得到．由此即得，

$$\rho=\rho_{\theta_2}\rho_{\theta_1}=\rho_{\theta_2+\theta_1}.$$

我们把合成变换 $\sigma\sigma$ 简记为 σ^2．可以类似地定义：

$$\sigma^2=\sigma\sigma，\sigma^3=\sigma\sigma^2，\cdots，\sigma^n=\sigma\sigma^{n-1}，\cdots. \tag{2.6}$$

这样，对于任意一个等距变换 σ 和任意一个自然数 n，σ^n 都是有意义的，称为 σ 的 n 次方幂．容易证明，等距变换的方幂有下列运算性质：

$$\sigma^m\sigma^n=\sigma^{m+n}，(\sigma^m)^n=\sigma^{mn}， \tag{2.7}$$

其中 m，n 为任意正整数．

容易看出，如果在平面上取定一条直线 L，σ 是关于直线 L 的轴反射变换，那么 σ^2 一定是恒等变换．

例 2　设 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 是平面上两个非零向量，t_v 表示以 $\boldsymbol{v}$ 为平移向量的平移变换，t_u 表示以 $\boldsymbol{u}$ 为平移向量的平移变换，求 $t=t_ut_v$.

解：设 $t_v(P)=P'$，$t_u(P')=P''$（图 1-14）.

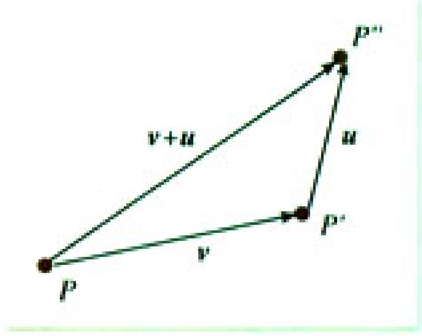


图 1-14

根据向量加法运算的意义，点 P'' 相当于 P 点在平移变换 t_{u+v} 下的象.

因为点 P 是平面上任意一点，所以，

$$t=t_ut_v=t_{u+v}.$$

下面我们接着讨论等距变换合成运算的性质.

我们知道，数的乘法运算和加法运算都满足结合律．那么对于等距变换的合成运算而言，它是否也满足结合律？

设 σ，τ，ρ 是三个等距变换，P 是平面上任意一点，则由等距变换合成运算的定义，我们有

$$\begin{aligned}\rho(\tau\sigma)(P)&=\rho(\tau\sigma(P))=\rho(\tau(\sigma(P)))\\&=(\rho\tau)(\sigma(P))=(\rho\tau)\sigma(P).\end{aligned}$$

这说明

$$\rho(\tau\sigma)=(\rho\tau)\sigma. \tag{2.8}$$

这就是说，等距变换的合成运算满足结合律.

(II) 若 σ，τ，$\rho\in E(2)$，则 $\rho(\tau\sigma)=(\rho\tau)\sigma$.（结合律）

如果我们用 ε 来表示平面上的恒等变换，也就是保持平面上任何一点都不动的变换，那么 ε 显然也是一个等距变换，而且容易看出，对于任何一个等距变换 σ 都有

$$\sigma\varepsilon=\varepsilon\sigma=\sigma. \tag{2.9}$$

我们把 ε 称为等距变换合成运算的**单位元**.

等距变换合成运算的单位元 ε，类似于数的乘法运算中的 1．具有单位元是 $E(2)$ 中等距变换合成运算的一个重要性质：

(III) 存在 $\varepsilon\in E(2)$，对于任意 $\sigma\in E(2)$，都有 $\sigma\varepsilon=\varepsilon\sigma=\sigma$.（单位元）

设 σ 是平面上任意一个等距变换，我们考虑这样的一个变换，它与变换 σ 互为相反变换，也就是说，如果 σ 把点 P 变为点 P'，那么这个变换就把点 P' 变为 P.

这样一个变换完全由变换 σ 所决定．我们用符号 σ^{-1} 来表示这个变换，并称它为 σ 的逆变换，或简称为 σ 的逆．即，如果 $\sigma(P)=P'$，那么 $\sigma^{-1}(P')=P$.

作为练习，请读者自己证明等距变换的逆变换也是等距变换.

因为，如果 $\sigma(P)=P'$，那么

$$\sigma\sigma^{-1}(P')=\sigma(P)=P',\ \sigma^{-1}\sigma(P)=\sigma^{-1}(P')=P,$$

所以，

$$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=\varepsilon. \tag{2.10}$$

于是有下列结论.

(IV) 对任意 $\sigma\in E(2)$，存在 $\sigma^{-1}\in E(2)$，使 $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=\varepsilon$.（逆元）

综上，我们已经看到，$E(2)$ 中所定义的合成运算，具有性质(I)～(IV).

在数学中，如果一个集合上定义了某种运算，而且这种运算还满足(Ⅰ)～(Ⅳ)那样的四条性质，这个集合连同它的运算一起常被称为**群**（group）.

习惯上，人们把定义了合成运算的 $E(2)$ 称为**等距变换群或欧几里得变换群**，记成 $(E(2),\cdot)$.

一般抽象群的定义，我们将会在第三章中给出.

必须注意到，虽然等距变换的合成运算使用了数的乘法运算的符号和名称，但是其意义截然不同. 最根本的区别在于，现在的运算对象是等距变换而不是数.

数的乘法运算不仅满足结合律，而且还满足交换律. 那么，对于等距变换的合成运算，交换律还成立吗?

例 3 在平面上建立直角坐标系 xOy，设 σ 是中心为 O 角度为 $45°$ 的旋转变换，τ 是关于 y 轴的反射变换，设 P 点的坐标为 $(1,0)$，求点 $\sigma\tau(P)$，$\tau\sigma(P)$ 的坐标.

解：根据变换 σ 和 τ 的定义可知，点 $\sigma(P)$ 和 $\tau(P)$ 的坐标分别为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $(-1,0)$. 这样，$A=\tau\sigma(P)$ 和 $B=\sigma\tau(P)$ 的坐标分别为 $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$（图1-15）.

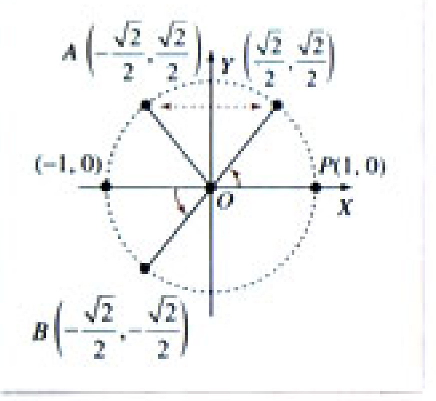


图 1-15

这个例子虽然简单，但是它却揭示了一个很重要的事实：等距变换的乘法不满足交换律. 也就是说，一般情况下，$\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

根据 $E(2)$ 中等距变换的乘法运算和性质，我们可以进一步下约定：

$$\sigma^0=\varepsilon,\ \sigma^{-k}=(\sigma^{-1})^k, \tag{2.11}$$

其中 k 为正整数. 结合（2.6）式，我们就可以看出，一个等距变换的任何整数次幂都是有意义的，而且对于任何整数 m，n，下列式子都成立：

$$\sigma^m\sigma^n=\sigma^{m+n},\ (\sigma^m)^n=\sigma^{mn}. \tag{2.12}$$

思考与讨论

对于给定的一个正整数 n，你能否给出一个旋转变换 ρ，使得 $\rho^n=\varepsilon$，$\rho^{n-1}\neq\varepsilon$?

利用等距变换乘法的运算性质，可以得到平面等距变换的分类.

定理 1 设 σ 是平面上任意一个非恒等的等距变换.

(1) 如果 σ 有唯一的不动点，那么 σ 是旋转变换.

(2) 如果 σ 至少有两个不动点，那么 σ 是一个轴反射变换.

(3) 如果 σ 无不动点，那么 σ 或者是一个平移变换与旋转变换的合成，或者是一个平移变换与轴反射变换的合成.

这个定理说明，从本质上而言，等距变换只有旋转、轴反射和平移三种，或者说，任何一个等距变换，都可以通过这三种基本变换实现.

习惯上，人们把一个平移变换与轴反射变换的合成称为**滑移**. 滑移图案最典型的例子就是沿着直线行进的脚印. 左脚形成的脚印是右脚形成的脚印的一个滑移（图 1-16）.

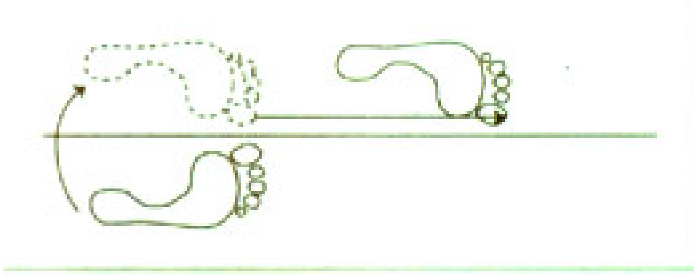


图 1-16

1.2.3 平面刚体运动

平面等距变换中有一类特殊的变换，叫做刚体运动或者刚体变换.

设 σ 是平面上的一个等距变换，如果 σ 能把平面上任何一个几何图形变成能够与自己完全重合的几何图形，那么就称 σ 是一个平面**刚体运动**（the rigid motion）或**刚体变换**（the rigid transformation）.

这就是说，平面刚体运动是这样一种变换，它不改变任何图形的形状，始终保持图形在平面中，只改变图形的位置.

容易看出，平面上的等距变换中，只有旋转变换、平移变换以及它们的合成变换是刚体运动. 轴反射变换不是刚体运动.

> 人们常把能够通过刚体运动互变的几何图形称为同向全等图形. 请举出两个平面几何图形，它们全等但不同向全等.

平面上的任意两个刚体运动的合成变换还是一个刚体运动. 如果用 $R(2)$ 表示平面上全体刚体运动所组成的集合，那么 $R(2)$ 关于等距变换的合成运算也封闭，而且也满足上一节列举的等距变换的运算性质（Ⅰ）～（Ⅳ）.

练习

1. 说明平面上的滑移变换不是刚体运动.
2. 举例说明，若 σ，τ 是两个等距变换，而且它们都不是刚体运动，但是 $\sigma\tau$ 有可能是刚体运动.

本章小结

Ⅰ 知识结构

1. 变换与对称的关系

(1) F 为轴对称图形 $\Leftrightarrow$ F 在轴反射变换下不变.

(2) F 为中心对称图形 $\Leftrightarrow$ F 在中心反射变换下不变.

(3) F 为旋转对称图形 $\Leftrightarrow$ F 在旋转变换下不变.

(4) F 为平移对称图形 $\Leftrightarrow$ F 在平移变换下不变.

(5) 轴反射变换、中心反射变换、旋转变换、平移变换的共同性质是：它们都保持任意两点之间的距离不变.

2. 等距变换

(1) 保持任意两点间距离不变的变换叫等距变换.

(2) 轴反射变换、中心反射变换、旋转变换、平移变换都是等距变换.

(3) 等距变换也称为全等变换.

(4) 等距变换完全由它在三个不共线的点上的作用唯一决定.

(5) 有不动点的等距变换，只可能是旋转或轴反射.

3. 等距变换的合成运算及性质

(1) 任意两个等距变换的合成还是一个等距变换.

(2) 等距变换的全体关于合成运算满足：封闭性，结合律，有单位元（恒等变换），每个变换有逆变换.

(3) 平面上全体等距变换关于合成运算构成一个等距变换群$(E(2), \cdot)$.

(4) 平面上无不动点的等距变换是平移变换与旋转变换的合成或滑移（平移与反射的合成）.

4. 刚体运动

(1) 能够保证把平面上任何几何图形变成与自己能够完全重合的几何图形的变换叫刚体运动.

(2) 刚体运动是一种特殊的等距变换.

(3) 平面上有且只有旋转变换、平移变换以及它们的合成变换是刚体运动.

II 思考与交流

1. 通过建立坐标系，利用解析几何等的方法，证明：若等距变换 σ 只有唯一的不动点 O，则 σ 是以 O 为旋转中心的一个旋转变换.
2. 用代数方法证明，一个非恒等的平移变换与一个非恒等的旋转变换的合成必然有不动点.
3. 证明关于两条相交直线的反射变换合成一个旋转变换.
4. 探索利用等距变换合成运算及其性质简化等距变换的分类.
5. 思考一下等距变换与刚体运动的区别.

III 巩固与提高

1. 设 σ_1，σ_2 分别是关于下列两条直线的轴反射变换：
$$L_1：x+y=2；L_2：x-y=2.$$
分别求出点 $P(1，0)$在合成变换 $\sigma_1\sigma_2$ 和 $\sigma_2\sigma_1$ 的象.
2. 设 σ_1，σ_2 分别是关于下面两条直线的轴反射变换：
$$L_1：2x+y=0；L_2：2x+y=2.$$
证明合成变换 $\sigma_1\sigma_2$ 和 $\sigma_2\sigma_1$ 都是平移变换，给出这两个平移变换的代数表达式.
3. 设 σ 是把原点 $O(0，0)$变为点 $A(2，0)$的平移变换；τ 是关于 x 轴的反射变换，分别给出 $\sigma\tau$ 和 $\tau\sigma$ 的代数表示式.
4. 设 σ 是把原点 $O(0，0)$变为点 $A(1，2)$的平移变换；τ 是绕原点转 $30°$的旋转变换，分别给出下列变换的代数表示式：σ，τ，$\sigma\tau$，$\tau\sigma$.

第二章　平面图形的对称变换群

通过第一章的学习我们知道，平面图形的对称性可以用平面的等距变换来定义. 例如，等腰三角形和等腰梯形，在关于其对称轴的反射变换下，仍然与原来的图形重合，所以它们具有轴对称性. 这样的保持一个图形与原来图形重合的等距变换就是图形的对称变换.

一个图形的全部对称变换，正好能反映出这个图形所有的对称性. 本章，正是要研究一个图形的全体对称变换，通过这种方式来认识图形的全部对称性.

我们会看到，对于任何给定的图形，其对称变换的全体，关于等距变换的合成运算构成一个群，这就是所谓的图形的对称变换群.

本章我们不仅要研究许多图形的对称变换和对称变换群，还要通过图形对称变换群的研究，引入抽象群的概念.

2.1　平面图形的对称变换

定义 1　若一个平面图形 F 在一个等距变换 σ 作用下的象仍与原来重合，则称 σ 为 F 的一个对称变换（symmetric transformation）或称图形 F 具有对称变换 σ. 此时，我们也说，图形 F 在等距变换 σ 的作用下保持不变.

一个图形 F 如果具有非恒等的对称变换，则称 F 为对称图形，否则称 F 为非对称图形.

按照这个定义，一个图形 F 的对称变换 σ 有两个要求：

第一，σ 必须是等距变换；

第二，σ 必须保持图形 F 不变.

注意：所谓一个变换保持图形不变的意思，并不是说保持图形上每一点都不变. 而是说，变换前后，图形完全重合. 也就是说，尽管图形上每一点都被变到了一个新的位置，但是整个图形与原来完全重合.

比如，如果你把一个正三角形绕它的中心形旋转 120°，那么三角形中每个点都改变了位置，但是，整个三角形与原来完全重合(图 2-1).

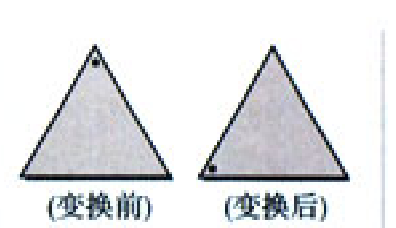


图 2-1

为了能看出变换前后的区别，我们特意在三角形一个角上作了一个标记.

因为恒等变换是任何图形的对称变换，所以人们也把恒等变换称为图形的平凡对称变换. 按照定义 1，具有非平凡对称变换的图形都是对称图形. 由此可见，对称图形要比我们所熟悉的轴对称图形、中心对称图形广泛得多.

思考与讨论

怎样的图形才有非平凡平移对称变换？你能给出这样一个图形吗？

如果我们要想知道一个图形的全部对称性，那么我们必须搞清它的全部对称变换.

设 F 是一个平面图形，我们用 $S(F)$ 来表示 F 的全部对称变换所构成的集合. 集合 $S(F)$ 所包含的元素越多，图形 F 就越对称. 因此，这个集合完全刻画了图形 F 的对称性.

一般而言，对于给定的图形 F，要确定它的对称变换的全体 $S(F)$ 是比较困难的. 下面我们来讨论一下三角形的对称变换和正方形的对称变换.

2.1.1　三条边互不相等的三角形

设 σ 是一个三条边都不相同的 $\triangle ABC$ 的对称变换，下面我们来说明 σ 只能是恒等变换. 既然 $\triangle ABC$ 在 σ 作用下的象与原来重合，那么每个顶点在 σ 作用下的象必然与原来某个顶点重合.（图 2-2）

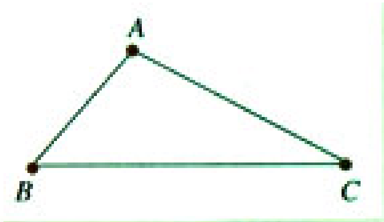


图 2-2　只有恒等对称变换的三角形

如果 $\sigma(A)=B$，那么 $\sigma(B)=A$，$\sigma(C)=C$ 或 $\sigma(B)=C$，$\sigma(C)=A$.

当 $\sigma(B)=A$，$\sigma(C)=C$ 时，我们有 $BC=\sigma(B)\sigma(C)=AC$，矛盾.

当 $\sigma(B)=C$，$\sigma(C)=A$ 时，我们有 $BC=\sigma(B)\sigma(C)=CA$，矛盾.

如果 $\sigma(A)=C$，同样可以推出矛盾. 所以，必然有 $\sigma(A)=A$.

类似可以说明，$\sigma(B)=B$，$\sigma(C)=C$.

由于等距变换 σ 已经有三个不共线的不动点，所以 σ 为恒等变换，即，$\sigma=\varepsilon$. 故，此时 $\triangle ABC$ 只有恒等对称变换，$S(\triangle ABC)=\{\varepsilon\}$，$\triangle ABC$ 为非对称图形.

2.1.2　只有两条边相等的三角形

设等三角形 $\triangle ABC$ 满足条件 $AB=AC\neq BC$，它的原始位置如图2-3(1).

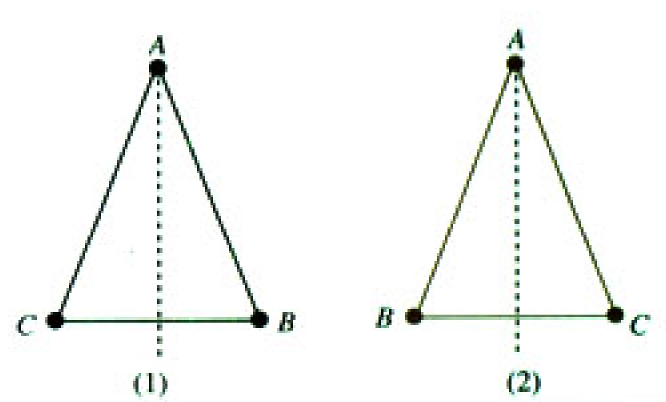


图 2-3　有两个对称变换的等腰三角形

仿照三条边互不相等的三角形为非对称图形的证明可以证明，如果 σ 是 $\triangle ABC$ 的一个对称变换，那么 $\sigma=\varepsilon$ 或者 σ 是关于底边 BC 垂直平分线的轴反射变换（图 2-3）. 因此，此时 $\triangle ABC$ 仅有两个对称变换.

注意，按照对称变换的定义，如果 σ 是 $\triangle ABC$ 的对称变换，那么在 σ 的作用下，

$\triangle ABC$应该与原来完全重合. 但是，为了显示变换情况，我们一一画出图形在不同对称变换下的象，并且通过顶点字母显示变换情况.

2.1.3 正三角形

对于正三角形 ABC 而言，如果 σ 是$\triangle ABC$的一个对称变换，那么 σ 一定保持$\triangle ABC$的中心 O 不变. 因此，它或者是一个绕中心的旋转，或者是关于通过中心的直线的反射.

以 O 为中心，分别以 0°，120°，240°为旋转角的 3 个旋转变换，是正三角形 ABC 全部旋转对称变换（图 2-4）.

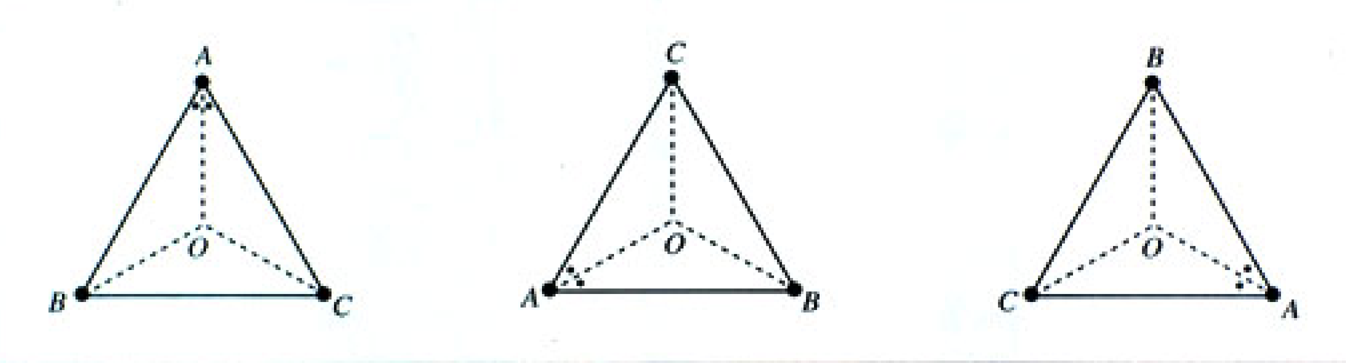


图 2-4　正三角形 ABC 的 3 个旋转变换

为了更容易看出旋转变换的变化情况，我们在三角形一个角上作了标记.

关于 OA，OB，OC 的轴反射变换，是正三角形 ABC 的全部轴反射对称变换（图 2-5）.

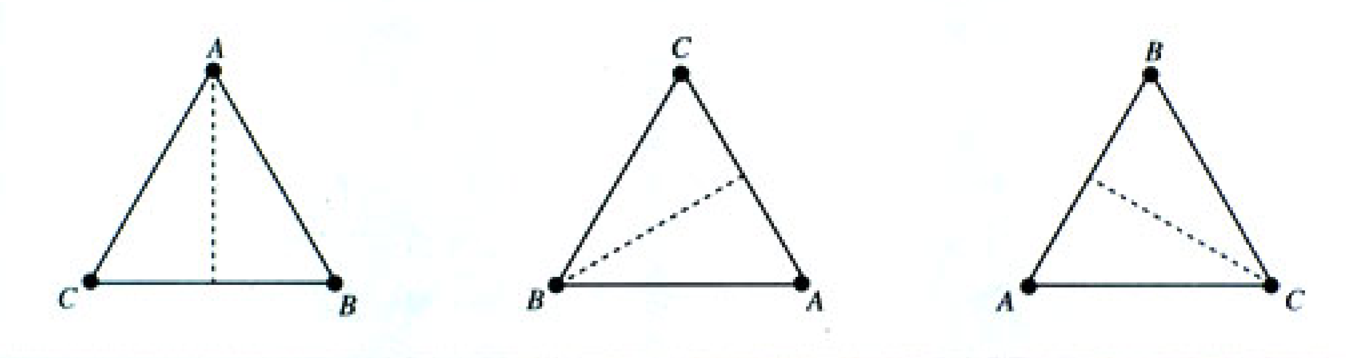


图 2-5　正三角形 ABC 的 3 个轴对称变换

因此，正三角形 ABC 共有 6 个对称变换，其中 3 个旋转变换，3 个反射变换. 通过观察图 2-4 和图 2-5 中正三角形 ABC 的顶点位置，可以看出这 6 个对称变换的变化情况.

2.1.4 正方形 $ABCD$

正方形 $ABCD$ 的任何对称变换 σ 一定保持正方形的中心 O 不动. 这样，σ 只能是旋转或轴反射.

绕正方形 $ABCD$ 的中心 O 旋转 0°，90°，180°，270°的 4 个旋转变换，是正方形 $ABCD$ 全部的旋转对称变换（图 2-6）.

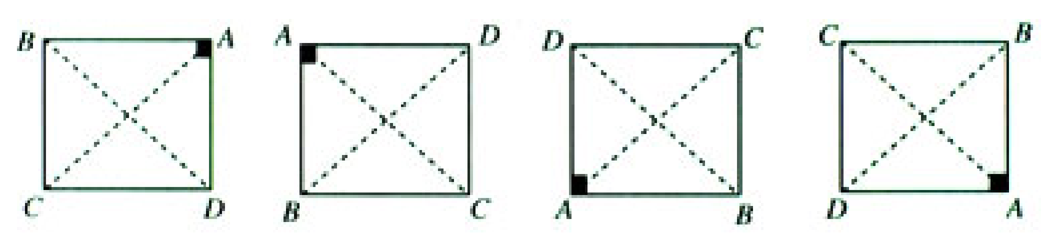


图 2-6 正方形的 4 个旋转变换

关于两条对角线 AC，BD 及其两对对边中点的连线的反射变换，是正方形 $ABCD$ 全部的轴反射对称变换.（图 2-7）

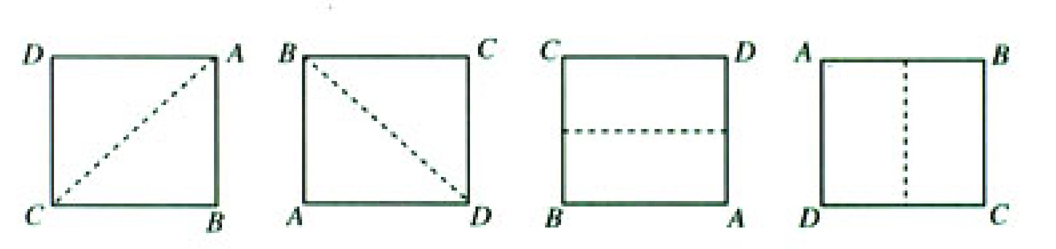


图 2-7 正方形的对称变换

所以，正方形 $ABCD$ 共有 8 个对称变换，其中 4 个为旋转变换，4 个为轴反射变换.

思考与讨论

你能根据我们关于正三角形和正方形对称变换的讨论结果，归纳出正五边形、正六边形，甚至一般正 n 边形对称变换的情况吗？

下面我们给出一个具有平移对称变换的图形.

下面是一个由树叶图案所组成的图形，假定它左右两边按照同样的规律无限延伸(图 2-8).

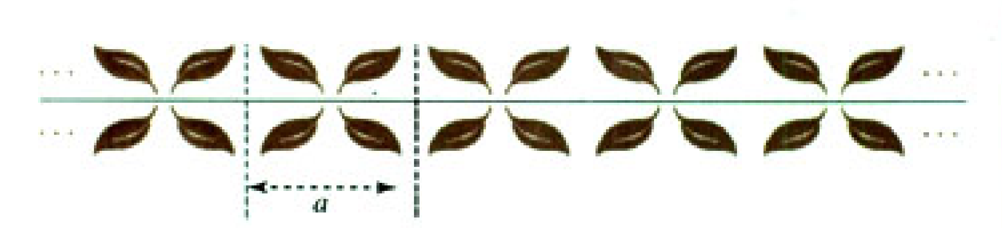


图 2-8

（1）如果把上述图形，沿着它的水平对称轴方向，进行距离 a 或者 a 的正整数倍的平移，那么这个图形保持不变（与自己重合）. 因此，沿着水平轴平移 na 是它的对称变换，n 为任意正整数. 由此可见，这个图形具有无穷多个非恒等的平移对称变换.

你还能找出上述图形（图 2-8）的其他对称变换吗？

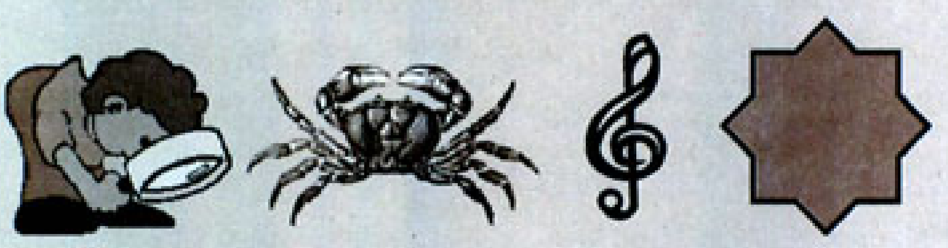
（2）关于水平对称轴的反射变换，也是这个图形的对称变换.

练习

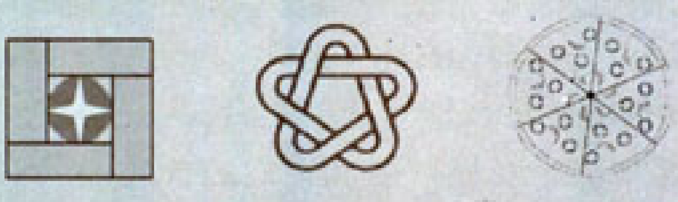
1. 指出下列图形中，哪些是对称图形？

(1) 两边无限延伸的树叶图形：

(2) 拿放大镜的小男孩、螃蟹、音乐符号、八角星：

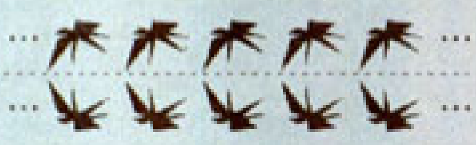


2. 求出下列图形的全部对称变换.

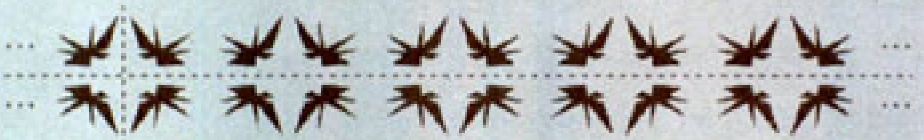


3. 求出下面两个无限图形的全部对称变换.

(1)



(2)



4. 给出正五边形的全体旋转对称变换.

2.2 平面图形的对称变换群

上面我们引入了图形对称变换的概念，并且讨论了三角形、正方形等图形的对称变换.

我们知道，一个图形的对称性由它的全部对称变换所体现. 因此，考察一个给定图形的全体对称变换，就是我们当前的主要任务.

当然，给定任何一个几何图形，你可以千方百计，设法求出它的全部对称变换. 但是，图形千变万化，无穷无尽，我们不可能对所有的图形，都去求出它的对称变换.

尽管图形多种多样，但是，许多图形的对称性都是相同的. 比如，雪花图案丰富多彩，但是都与正六边形具有相同的对称性. 这就提示我们，应该着重研究一下图形全体对称变换的整体性质和结构.

说具体一点，我们就是要来研究，一个图形 F 的全体对称变换的集合 $S(F)$，关于等距变换的乘法运算有什么样的性质，有什么样的结构.

2.2.1 平面图形的对称变换群

设 F 是平面为 α 上的一个图形. 为方便起见，如果 σ 是图形 F 的一个对称变换，我们记之为

$$\sigma(F)=F.$$

由于图形是由点组成的，如果我们就把一个图形 F 看作是由图形上所有的点所组成的集合，并定义

$$\sigma(F)=\{\sigma(P)\mid P\in F\},$$

那么 $\sigma(F)=F$ 也正好符合集合相等的意义.

如果采用 $\sigma(F)=F$ 来表示对称变换，那么图形 F 的全体对称变换的集合

$$S(F)=\{\sigma\mid\sigma\in \mathrm{E}(2),\ \sigma(F)=F\}.$$

我们先回顾一下等距变换合成运算及其性质.

➢ $E(2)$是由平面上全体等距变换所组成的集合.

➢ 设 σ，τ 是平面上两个等距变换，那么它们的合成（乘积）$\tau\sigma$ 表示先施行 σ 再接着施行 τ 这样一个合成等距变换.

➢ 关于等距变换的乘法运算，有下面性质：

(I) 若 σ，$\tau\in E(2)$，则 $\sigma\tau\in E(2)$.（封闭性）

(II) 若 σ，τ，$\rho\in E(2)$，则 $\rho(\tau\sigma)=(\rho\tau)\sigma$.（结合律）

(III) 恒等变换 $\varepsilon\in E(2)$，使得对任意 $\sigma\in E(2)$，有 $\sigma\varepsilon=\varepsilon\sigma=\sigma$.（单位元）

(IV) 若 $\sigma\in E(2)$，则存在 $\sigma^{-1}\in E(2)$使 $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=\varepsilon$.（逆元）

➢ 我们把$(\mathrm{E}(2),\ \cdot\ )$称为平面上的等距变换群.

设 F 是一个平面 α 上的几何图形. 下面我们来考察$S(F)$关于等距变换的合成运算有什么样的性质.

(i) $S(F)$关于等距变换的乘法运算封闭. 即：

若 σ，$\tau\in S(F)$，则 $\tau\sigma\in S(F)$.

这一点是比较容易说明的.

首先，如果 σ，$\tau\in S(F)$，那么 $\tau\sigma\in E(2)$. 其次，由 $\tau\sigma(F)=\tau(\sigma(F))=\tau(F)=F$，我们有 $\sigma\tau\in S(F)$.

由此可见，图形 F 的对称变换关于等距变换的乘法运算是封闭的.

(ii) $S(F)$中等距变换乘法满足结合律. 即，

若 σ，τ，$\rho\in S(F)$，则 $\rho(\tau\sigma)=(\rho\tau)\sigma$.

这一点是很容易理解的. 既然结合律对于 $E(2)$中任何等距变换都成立，而 $S(F)\subseteq E(2)$，对于 $S(F)$也成立.

(iii) 恒等变换 $\varepsilon\in S(F)$，而且对于任意的 $\sigma\in S(F)$，都有 $\sigma\varepsilon=\varepsilon\sigma=\sigma$.

这是由于恒等变换是任何图形的对称变换.

(iv) 若 $\sigma \in S(F)$，则存在 $\sigma^{-1} \in S(F)$ 使得 $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=\varepsilon$.

这一点我们需要加以论证. 如果 $\sigma \in S(F)$，那么 $\sigma(F)=F$. 由等距变换的性质（IV），$\sigma^{-1} \in E(2)$ 也是等距变换，而且 $\sigma^{-1}\sigma=\varepsilon$. 我们有，

$$\sigma^{-1}(F)=\sigma^{-1}(\sigma(F))=\sigma^{-1}\sigma(F)=\varepsilon(F)=F,$$

即，$\sigma^{-1}(F)=F$，$\sigma^{-1} \in S(F)$，而且 $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=\varepsilon$.

比较一下，我们会发现，$E(2)$关于等距变换的乘法运算具有性质(I)～(IV)；而$S(F)$关于等距变换乘法运算具有完全类似的性质(i)～(iv).

类似地，我们把 $S(F)$连同其中的乘法运算记为$(S(F), \cdot)$，并称为平面图形 F 的对称变换群，或简称为图形 F 的对称群.

2.2.2 正三角形的对称变换群

下面，我们讨论正三角形 ABC 的对称变换群.

在上一节，我们已经确定了正三角形 ABC 的全体对称变换，它们由 6 个变换组成，其中有 3 个旋转变换，3 个轴反射变换. 这些变换都是借助图形用语言来描述的. 为了便于进行运算，我们需要引入更简洁的符号来表示对称变换.

我们知道，正三角形 ABC 的任何一个对称变换，必然把它的顶点还变为顶点（为什么?）. 这样，只要能用一种符号表明正三角形 ABC 三个顶点的变换情况，那么这个对称变换也就清楚了.

设正三角形 ABC 原始位置如图 2-9.

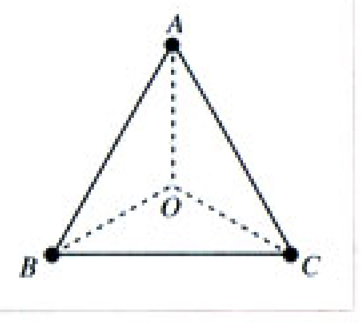


图 2-9 正三角形的原始位置

那么，应该如何表示绕$\triangle ABC$ 的中心 O 旋转 120°的对称变换 ρ_1?

注意到，在对称变换 ρ_1 作用下，$\triangle ABC$ 的三个顶点的变化情况如下：

$$\rho_1: A \to B,\ B \to C,\ C \to A. \tag{2.1}$$

为了表示出（2.1）所给出的对称变换，数学家们发明了下面的符号：

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

也就是说，在（2.2）中，我们把每个顶点的象，写在它的正下方. 比如，ρ_1：$A \to B$，所以在（2.2）中，B 写在 A 的正下方. 类似地，C 写在 B 的正下方，A 写在 C 的正下方.

我们把（2.2）中的符号称为 A，B，C 的一个置换. 按照我们所约定的置换所表示的含义，下列置换所表示的都是同一个对称变换：

$$\begin{pmatrix} A & C & B \\ B & A & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & A & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix}, \cdots, \tag{2.3}$$

我们认为它们是相等的.

也就是说，在一个置换中，第一行中的字母排列顺序可以任意，只要你能确保上下关系没有被打乱就可以了. 注意观察（2.3），你会发现，尽管这些置换中，第一行中字母顺序不

同，但是，B 始终在 A 的正下方，C 始终在 B 的正下方，A 始终在 C 的正下方.

类似地，绕$\triangle ABC$ 的中心 O 旋转 240°的对称变换 ρ_2，可以表示为

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}.$$

恒等对称变换 ρ_0 可以表示为

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}.$$

如果正三角形 ABC 的原始位置如图 2-9 所示，那么图 2-10 分别表示了正三角形 ABC 在旋转对称变换 ρ_0，ρ_1，ρ_2 下的象.

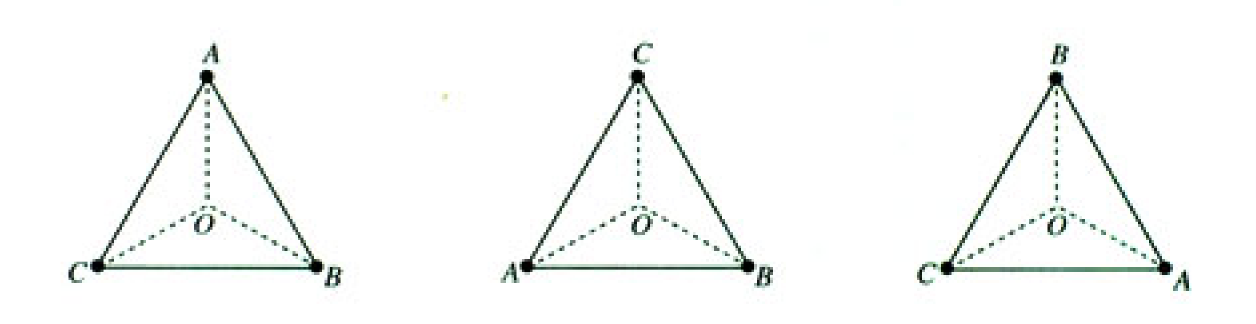


图 2-10 正三角形在旋转对称变换下的象

图 2-11 表示出了正三角形 ABC 的三个轴反射对称变换 τ_1，τ_2，τ_3 下的象.

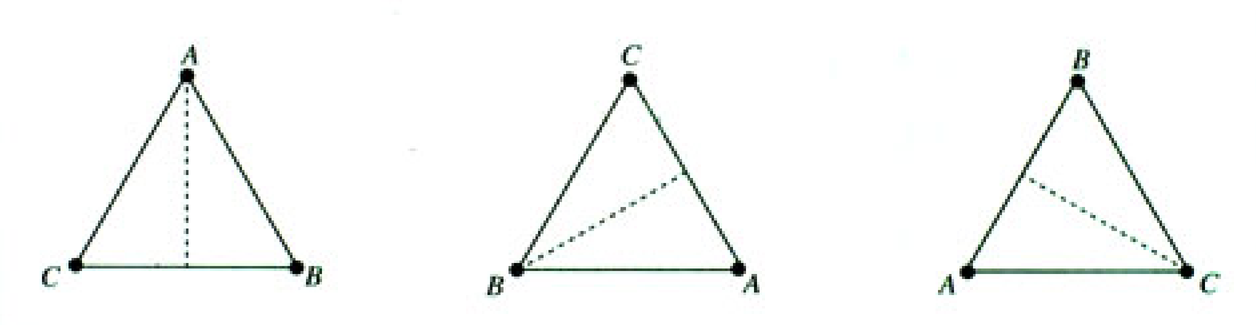


图 2-11 正三角形在轴反射对称变换下的象

如果采用置换，那么这三个轴反射变换可以表示为：

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}.$$

综上，正三角形 ABC 全部的 6 个对称变换就可以表示为：

$$\rho_0=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix},\ \rho_1=\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix},\ \rho_2=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix},$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix},\ \tau_2=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix},\ \tau_3=\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

我们用集合 D_3 来表示正三角形 ABC 的全部对称变换，即，

$$D_3=\{\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3\}, \tag{2.5}$$

其中 $\rho_0=\varepsilon$ 是恒等变换. 按照对称变换群的定义，D_3 是正三角形 ABC 的对称变换群.

我们为什么要选用置换符号来表示正三角形 ABC 的对称变换呢？

当然原因之一是，置换能简洁地表示正三角形 ABC 的对称变换. 但是，更重要的是利

用置换，我们更容易计算两个对称变换的积.

比如，我们要计算 $\tau_1\rho_1$. 由（2.4）式，我们知道

$$\rho_1=\begin{pmatrix}A & B & C\\ B & C & A\end{pmatrix},\quad \tau_1=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A & C & B\end{pmatrix}.$$

为了便于计算，我们把这两个置换表示成如下形式：

$$\rho_1:\begin{array}{ccc}A & B & C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ B & C & A\end{array}\qquad \tau_1:\begin{array}{ccc}A & B & C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ A & C & B\end{array}.$$

根据等距变换合成运算的定义，我们有

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C\\ \rho_1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & B & C & A,\\ \tau_1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & C & B & A\end{array}$$

所以，

$$\tau_1\rho_1=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A & C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & C\\ B & C & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B & C\\ C & B & A\end{pmatrix}=\tau_2. \tag{2.6}$$

又比如，我们要计算 $\tau_2\tau_1$. 由（2.4）式，我们知道

$$\tau_1=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A & C & B\end{pmatrix},\quad \tau_2=\begin{pmatrix}A & B & C\\ C & B & A\end{pmatrix}.$$

于是，我们有

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C\\ \tau_1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & A & C & B,\\ \tau_2 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & C & A & B\end{array}$$

所以，

$$\tau_2\tau_1=\begin{pmatrix}A & B & C\\ C & B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & C\\ A & C & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B & C\\ C & A & B\end{pmatrix}=\rho_2. \tag{2.7}$$

使用类似的方法，可以计算正三角 ABC 任意两个对称变换的乘积.

特别，经过类似计算，我们可以得到：

$$\rho_1\tau_1=\begin{pmatrix}A & B & C\\ B & C & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & C\\ A & C & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B & C\\ B & A & C\end{pmatrix}=\tau_3. \tag{2.8}$$

$$\tau_1\tau_2=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A & C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & C\\ C & B & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B & C\\ B & C & A\end{pmatrix}=\rho_1. \tag{2.9}$$

比较一下（2.6）与（2.8），我们会发现，$\tau_1\rho_1=\tau_2$，而 $\rho_1\tau_1=\tau_3$，因此 $\tau_1\rho_1\neq\rho_1\tau_1$. 这说明，对称变换的乘法不满足交换律.

为完整起见，我们把正三角形 ABC 的全体对称变换的乘法运算结果，用如下的表格给出（见表 2-1）．这个表称为 D_3 的乘法表

乘法表的构成是这样的，第 1 行和第 1 列刚好由 D_3 的 6 个元素按照同样次序组成，称为乘法表的首行和首列．表格主体部分由 6 行 6 列组成，主体部分的每个元素等于该元素所在行的首元素与所在列的首元素的乘积．

例如，ρ_2 所在的行与 τ_3 所在列交叉处的元素为 τ_1，它等于 ρ_2 与 τ_3 的乘积 $\rho_2\tau_3$．

表 2-1

$\bullet$	ε	ρ_1	ρ_2	τ_1	τ_2	τ_3
ε	ε	ρ_1	ρ_2	τ_1	τ_2	τ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ε	τ_3	τ_1	τ_2
ρ_2	ρ_2	ε	ρ_1	τ_2	τ_3	τ_1
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	ε	ρ_1	ρ_2
τ_2	τ_2	τ_3	τ_1	ρ_2	ε	ρ_1
τ_3	τ_3	τ_1	τ_2	ρ_1	ρ_2	ε

2.2.3 正方形的对称变换群

由上一节的讨论，我们知道，正方形 $ABCD$ 共有 8 个对称变换，其中 4 个为旋转变换，4 个为轴反射变换．

如果把正方形 $ABCD$ 的对称变换群记为 D_4，那么 D_4 由 8 个元素组成．

我们用 ρ_0，ρ_1，ρ_2，ρ_3 分别表示正方形 $ABCD$ 的 4 个旋转对称变换，旋转角分别为 0°，90°，180°，270°的旋转对称变换（图 2-12）．

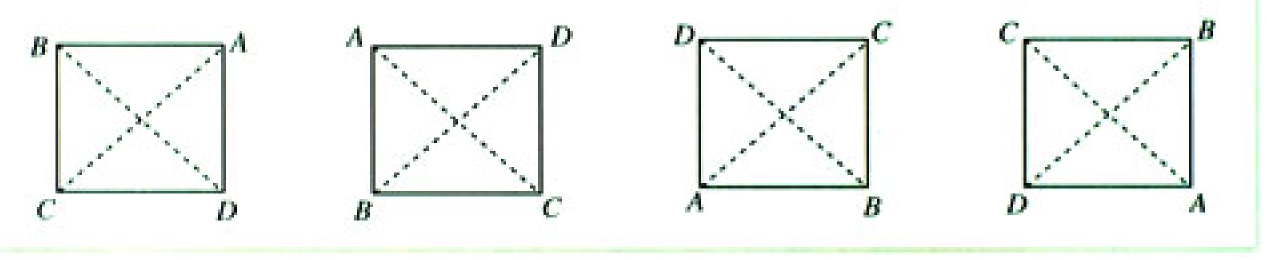


图 2-12 正方形的旋转对称变换

我们用 τ_1，τ_2，τ_3，τ_4 分别表示正方形 $ABCD$ 的 4 个轴反射对称变换，反射轴分别为 AC，BD，LM，NK．（图 2-13）

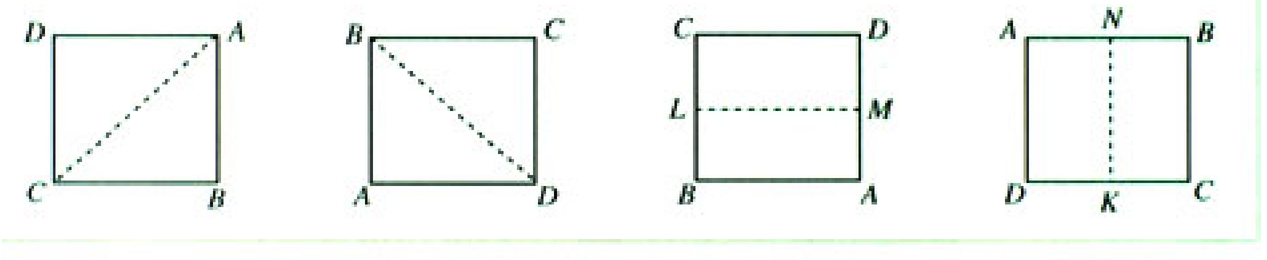


图 2-13 正方形的轴反射对称变换

根据以上约定的符号，正方形 $ABCD$ 的全体对称变换的集合

$$D_4=\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}.$$

D_4 就是正方形 $ABCD$ 的对称变换群.

类似于正三角形的情况，我们可以用置换的符号，来表示正方形 $ABCD$ 的对称变换. 请读者根据图 2-12 和图 2-13，完成正方形 $ABCD$ 的对称变换的下列置换表示式：

$$\rho_0=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A & B & C & D\end{pmatrix},\quad \rho_1=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ B & C & D & A\end{pmatrix},$$

$$\rho_2=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix},\quad \rho_3=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix},$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A & D & C & B\end{pmatrix},\quad \tau_2\doteq\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix},$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix},\quad \tau_4=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ B & A & D & C\end{pmatrix}.$$

同样，我们可以像计算正三角形对称变换乘积那样，来计算正方形 $ABCD$ 的对称变换的乘积. 例如，

$$\begin{aligned}\tau_4\rho_1 &= \begin{pmatrix}A & B & C & D\\ B & A & D & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ B & C & D & A\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A & D & C & B\end{pmatrix}=\tau_1.\end{aligned}$$

2.2.4 正多边形的对称变换群

根据正三角形和正方形对称群的讨论，不难看出，对一般的正 n 边形而言，如果用 D_n 来表示它的对称群，那么 D_n 也由 $2n$ 个元素组成，其中有 n 个旋转对称变换，n 个轴反射对称变换.

在数学中，人们把正 n 边形的对称变换群称为二面体群（dihedral group），并记为 $(D_n, \cdot)$，或简记为 D_n.

如果我们用 A_1，A_2，…，A_n 分别表示正 n 边形的 n 个顶点并且按照逆时针方向依次标记在正 n 边形的 n 个顶点上. 那么我们也可以用类似于正三角形和正方形那样，通过置换的方式，来表示正 n 边形的全体对称变换.

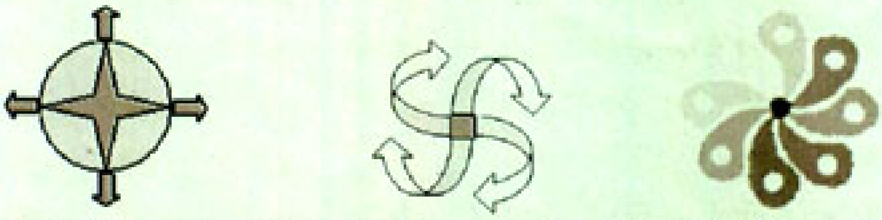
关于这种一般情况，我们不在这里讨论了，在下一章中，通过一般置换群的讨论，我们再给出 D_n 的元素的置换表示形式.

思考与讨论

如果用 R_n 来表示由正 n 边形的 n 个旋转对称变换构成的集合，$n\geqslant 3$. 考察一下，R_n 关于变换的合成运算具有什么样的性质.

练习

1. 求出下列图形的对称变换群.



2. 通过观察二面体群 D_3 和 D_4 的乘法表，检验下列结论是否正确：

(1) 一个旋转变换与一个轴反射变换的乘积一定等于一个轴反射变换.

(2) 两个不同的反射变换的乘积一定是一个旋转.

(3) 两个旋转的乘积还是一个旋转.

本章小结

Ⅰ 知识结构

1. 平面图形的对称变换

(1) 满足 $\sigma(F)=F$ 的等距变换 σ 称为 F 的一个对称变换.

(2) 具有非恒等的对称变换的图形称为对称图形.

(3) 一个图形 F 的对称性可以由它的全部对称变换来刻画.

2. 平面图形的对称变换的合成运算及其性质

(1) 如果用 $S(F)$ 表示图形 F 的全体对称变换所组成的集合，那么 $S(F)$ 关于等距变换的合成运算具有：

封闭性（任意两个对称变换的合成还是对称变换）;

结合律（对称变换也是等距变换）;

单位元条件（恒等变换是对称变换）;

逆元条件（每个对称变换的逆变换还是对称变换）.

(2) 平面图形 F 的全体对称变换关于等距变换的合成运算构成图形 F 的对称变换群 $(S(F),\ \cdot)$.

3. 一些特殊图形的对称变换群

(1) 正三角形的对称变换群为 D_3.

(2) 正方形的对称变换群为 D_4.

(3) 一般正 n 边形的对称变换群为 $2n$ 阶二面体群 D_n.

(4) 正多边形的对称变换可以用顶点的置换来表示. 对称变换的合成可以利用置换直接进行运算.

Ⅱ 思考与交流

1. 用置换形式给出正五边形的全体对称变换，并列出它们的乘法表. 通过观察，指出这个乘法表的特点.

2. 通过观察上述正五边形对称变换的乘法，仔细讨论下述问题：

$$旋转\times旋转=?\qquad 旋转\times反射=?$$

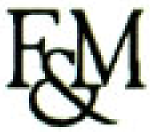
反射×反射=？ 反射×旋转=？

3. 如果一个图形具有非恒等的平移对称变换，那么这个图形一定是一个无限图形.

4. 给出一个只有平移对称变换的图形.

Ⅲ 巩固与提高

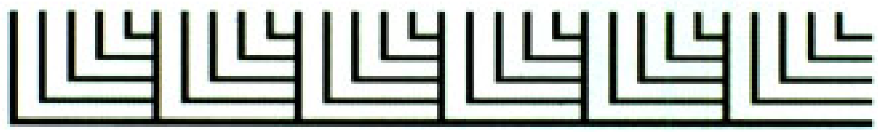
1. 分别求出下列图形的对称变换群.

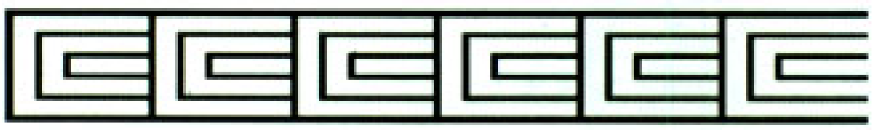





(1) (2) (3) (4) (5)

2. 下面是两个左右两端可以按照同样规律无限延伸的图形，分别求出它们的对称变换群.





第三章　置换群与抽象群

在前面两章中，我们建立了图形的对称性与等距变换的关系，以及图形对称变换群的概念. 图形的对称变换群可以完全刻画图形的对称性，因此对称变换群是研究图形对称性最有力的工具. 实际上，对称性不仅仅是几何图形所特有的性质，我们在数学中还会遇到其他类型的对称性.

例如，在多项式 $x^3+y^3+z^3+w^3$ 中，变量 x，y，z，w 的出现就是对称的；而在多项式 $x^3+y^4+z^4+w^3$ 中，变量 x 和 w 的出现就是对称的，y 和 z 的出现也是对称的，但 x 和 y 的出现不是对称的.

本章中我们会看到，对于不同的对称性都可以利用群论工具来研究. 当然，我们不可能系统深入地介绍群论知识.

在本章中，我们先研究多项式的对称变换群，然后研究 n 次对称置换群，最后介绍抽象群的定义，并给出群的一些具体例子，简单讨论一下抽象群的性质.

3.1　n 次对称群 S_n

在上一章我们研究了几何图形的对称变换群. 在研究正 n 边形的对称变换群的时候，我们注意到，正 n 边形的对称变换一定保持其中心 O 不动，从而只能是旋转或者轴反射变换. 由于对称变换必然把正 n 边形的顶点还变为顶点，所以正 n 边形的对称变换完全可以由其在顶点上的作用情况来决定.

例如，对于正三角形 ABC，我们用 $\begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix}$ 来表示恒等对称变换 ρ_0，用 $\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix}$ 来表示绕$\triangle ABC$ 的中心 O 旋转120°的对称变换 ρ_1，用 $\begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$ 来表示绕$\triangle ABC$ 的中心 O 旋转240°的对称变换 ρ_2.

3.1.1　置换的概念和表示符号

如果我们抛开 A，B，C 所代表的几何意义，只把它们看成是一个集合 $T=\{A, B, C\}$的元素，那么上面每一个置换都给出集合 T 到自身的一个一一映射，也就是集合 A 的一个变换，对应法则是第一行的每个元素正下方的元素就是它的象.

在数学上，人们把一个含有 n 个元素的有限集合 X 到它自身的一一映射，即变换，称为集合 X 的一个置换或 n 次置换，并把 X 的全体置换记为 $\mathrm{Sym}(X)$.

如果 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$，我们就用记号 S_n 代替 $\mathrm{Sym}(X)$.

在第二章中，我们已经运用置换的符号，表示出了正三角形 ABC 的每个对称变换.

因为正三角形 ABC 的每个对称变换，恰好对应它的顶点集合的一个置换．而我们用来表示正三角形 ABC 对称变换的符号，例如，$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$等，恰好是数学中用来表示置换的符号．

设 σ 是 $T_n=\{1, 2, \cdots, n\}$的一个置换，使得：

$$\sigma: 1 \to i_1,\ 2 \to i_2,\ \cdots,\ n \to i_n,$$

即，

$$\sigma(k)=i_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

我们可以仿照表示正三角形对称变换的方式，把置换 σ 表示为如下形式：

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix},$$

其中 i_1，i_2，$\cdots$，i_n 是 1，2，$\cdots$，n 的一个排列．

容易看出，T_n 上的全体 n 次置换总数为 $n!$．

如果用 1，2，3 来代表一个正三角形的 3 个顶点(图 3-1)，那么正三角形的 6 个对称变换刚好给出全部的 3 次置换：

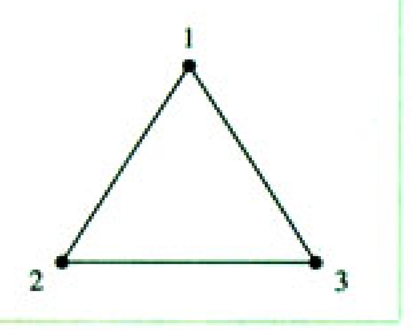


图 3-1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

如果用 1，2，3，4 来代表正方形的 4 个顶点(图 3-2)，那么正方形的 4 个旋转对称变换只能给出 4 个 4 次置换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

它们对应着正方形如下的 4 个对称变换(图 3-2)，其中第一个图形是正方形的原始位置，而其余图形表示正方形在旋转对称变换之后的位置．

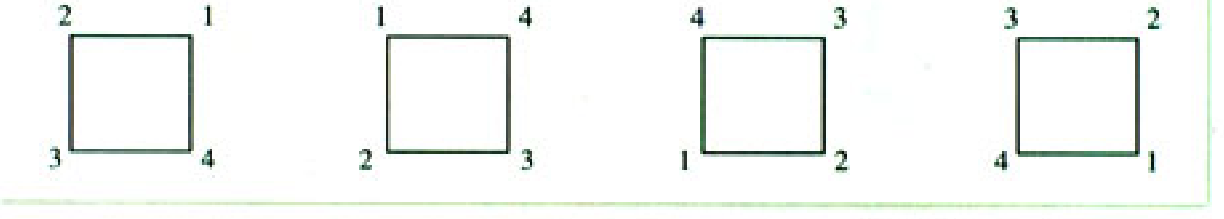


图 3-2

正方形的 4 个轴反射对称变换可以用置换表示如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

它们相应当对称变换可以用下图(图 3-3)显示出来．

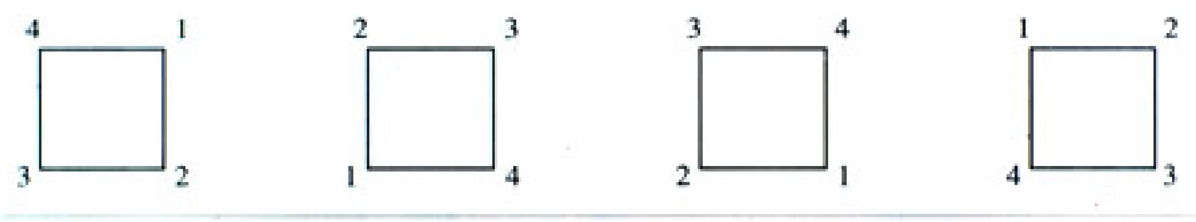


图 3-3

我们知道，总共有 $4!=24$ 个 4 次置换. 利用正方形的对称变换，我们得到了如下 8 个 4 次置换：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

3.1.2 置换的乘法运算

类似于等距变换的合成运算和图形对称变换的合成运算，我们也可以定义置换的合成运算.

两个 n 次置换σ，τ 的合成$\sigma\cdot\tau$，我们规定按照从右到左的顺序. 也就是说，如果要求一个数字 k 在合成置$\sigma\cdot\tau$ 下的象，先求出 k 在置换 τ 下的象 $\tau(k)$，那么 $\tau(k)$在 σ 下的象 $\sigma(\tau(k))$就定义为 k 在$\sigma\cdot\tau$ 的象$\sigma\cdot\tau(k)$.

如果要用严格的数学方式表达，那么两个 n 次置换σ，τ 的合成置换$\sigma\cdot\tau$ 是按照如下方式定义的一个置换：

$$\sigma\cdot\tau(k)=\sigma(\tau(k)),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{3.1}$$

下面看一个具体的例子.

如果要计算下列两个置换

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\ \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$

的合成置换 $\sigma\cdot\tau$. 由于 $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$所表示的变换是

$$\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \tau:\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow,\\ 3&2&1&4\end{array}$$

而 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$所表示的变换是

$$\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \sigma:\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow,\\ 2&3&4&1\end{array}$$

按照置换合成的定义，$\sigma\cdot\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$所表示的置换可以由下面

的方式决定：

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 3 & 2 & 1 & 4. \\ \sigma: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \tag{3.2}$$

所以，

$$\sigma\cdot\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

由此可见，任意两个 n 次置换的合成还是一个 n 次置换．这完全类似于两个对称变换的合成还是一个对称变换．

在计算两个 n 次置换的合成时，并不一定要列出(3.2)式那样的竖式，可以按照(3.2)式提供的方法来计算合成置换．下面给出几个计算置换合成的例子．请根据例子中的计算结果，检验你是否真正理解了置换合成的定义，是否会计算置换的合成．

例 1 计算下列置换的乘积：

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$.

解：(1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$.

从这个例题中不难看出，置换的合成运算不满足交换律．

简单计算可以发现，$\begin{pmatrix}4&2&1&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$ 是恒等置换 I.

由此不难得到，如果置换

$$\sigma=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix},$$

那么它的逆置换

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}.$$

那么究竟全体 n 次置换的所组成的集合 S_n 关于置换的合成运算，具有一些什么样的

重要性质?

实际上，类似于全体等距变换关于等距变换的合成，也类似于一个图形的对称变换的全体，关于对称变换的合成，全体 n 次置换的集合 S_n 关于置换合成也具有下列性质：

(i) S_n 中任意两个置换的乘积仍然在 S_n 中；

(ii) S_n 中置换的乘法运算满足结合律；

(iii) S_n 中包含恒等置换；

(iv) S_n 中任意一个置换的逆置换仍然在 S_n 中.

因此，我们把 $(S_n, \cdot)$ 称为 n 次对称群.

在上一章中，我们讨论过正 n 边形的对称变换群，我们称之为二面体群，并记之为 D_n. 如果把正 n 边形的顶点标为 1，2，…，n，那么 D_n 也可以看作是由 $2n$ 个 n 次置换组成的群.

练习

1. 写出集合 $T_4=\{1, 2, 3, 4\}$ 全部 24 个置换.
2. 如果按照逆时针方向依次把正五边形的顶点标为 1，2，3，4，5，写出正五边形 5 个旋转对称变换所对应的 5 个置换.
3. 计算下列置换的合成：

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1&4&3&2\\2&1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&4&1\\4&2&1&3\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}4&2&1&3\\2&1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix}4&2&1&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$.

3.2 多项式的对称变换群

正如我们前面指出的那样，对称现象不仅仅限于几何图形. 下面我们就来讨论多项式的对称性，这种对称性也称为代数对称性.

下面是关于变量 x，y，z 的四个多项式：

$$x+y+z,\ xy+yz+zx,\ x^2+y^2+z^4,\ xyz^2.$$

在字母 x，y，z 进行置换 $\sigma=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$ 后，上述多项式分别变为：

$$y+z+x，yz+zx+xy，y^2+z^2+x^4，yzx^2.$$

前两个多项式在变量进行了这样的置换之后，仍然与原多项式相同，而后两个多项式在变量进行置换 σ 之后，已经与原来的多项式不相同了.

不难看出，在字母进行置换 $\sigma=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$ 后，上述四个多项式都仍然与原来相同.

如果一个多项式在字母进行某种置换之后，仍然与原来相同，我们就说这个多项式在字母的这种置换下不变.

例如，多项式 $x^3+y^3+z^3+w^3$ 在变量 x，y，z，w 的任何置换都不变. 与图形的对称变换类似，我们也可以把这种不改变多项式的置换称为多项式的对称变换.

定义 2.1 设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 x_1，x_2，…，x_n 的一个多项式. 如果这个多项式在字母 x_1，x_2，…，x_n 的一个置换 σ 下仍然与原来相同，我们就称 σ 为多项式的对称变换. 如果一个多项式有非恒等的对称变换，我们就称这个多项式具有对称性.

显然，保持一个多项式中字母都不动的恒等置换一定是该多项式的对称变换. 因此，任何多项式都有对称变换. 但是，并非每个多项式都具有对称性. 多项式 $x^3+y^4+z^5+w^6$ 就没有对称性.

与图形的对称性类似，一个多项式的对称性可以用它的对称变换的全体来体现. 但是，一般而言，要给出一个多项式的全部对称变换是很困难的.

例 1 给出多项式 $x_1+x_2+2x_3$ 的全体对称变换.

解：多项式 $x_1+x_2+2x_3$ 的对称变换一定要保持 x_3 不动，而其余两个字母是完全对称的. 所以，多项式 $x_1+x_2+2x_3$ 有如下的两个对称变换：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}，\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}.$$

既然多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的字母为 x_1，x_2，…，x_n，那么，对于多项式的变量进行置换，就相当于对于这些变量的下标进行置换. 在这种理解下，我们就可以把多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的对称变换，看作是字母 x_1，x_2，…，x_n 的下标集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的置换.

如果多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 S_n 中一个置换 σ 作用下不变，我们也说置换 σ 是多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的对称变换.

例如，S_3 中任何一个置换都是多项式 $x_1+x_2+x_3$ 的对称变换.

设 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个多项式，我们用 $S(F)$ 表示 F 的全体对称变换（关于下标的置换）. 那么 $S(F)\subseteq S_n$.

很容易看出，$S(F)$ 关于置换的合成，也具有类似于图形对称变换群和 n 次对称群那样的运算性质. 因此，人们也把 $S(F)$ 称为多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的对称变换群.

如果一个多项式变量比较多，那么确定它的对称变换群是困难的. 一般来说，可以让 S_n 中每个置换作用于多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，然后找出那些保持多项式不变的置

换就可以了.

例 2　给出下列多项式的对称变换群

(1) $x_1^2+x_2^2+x_3^2$；

(2) $x_1^2+5x_1x_3+x_2^2+x_1^2x_2x_3^2$.

解：(1) 多项式 $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是一个对称多项式，S_3 中的置换都是它的对称变换．因此，它的对称变换群为 S_3.

(2) 根据这个多项式的特点，它的任何对称变换一定保持 x_2 不动，由此，它的对称变换群由下列置换组成：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

练习

1. 判断置换 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ 是否为多项式 $x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 的对称变换.
2. S_3 中的哪些置换是多项式 $x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+2x_1x_2x_3+x_2^3$ 的对称变换.
3. 给出下列多项式的对称变换群.
   (1) $x_1^2+x_2^2+x_3^3+x_4^3$；
   (2) $x_1^2+4x_1x_2x_3+x_2^2+x_3^2+3x_3^3$.
4. 给出字母 x_1，x_2，x_3，x_4 的一个多项式，使得它的对称变换群为 S_4.

3.3　抽象群的定义与性质

3.3.1　抽象群的概念

到现在为止，我们已经定义了：等距变换群 $(E(2),\ \cdot)$，一个图形 F 的对称变换群 $(S(F),\ \cdot)$，正 n 边形的对称变换群 $(D_n,\ \cdot)$，由全部 n 次置换组成的 n 次对称群 $(S_n,\ \cdot)$，以及一个多项式的对称变换群.

你能说出它们的共同特点吗？

其实，它们都是带有某种合成运算的集合．尽管这些集合的背景不同，运算的含义也不一样，但是它们关于各自的合成运算都具有下面的共同性质.

(1) 一个非空集合；

(2) 定义了某种合成运算；

(3) 合成运算满足下列四条性质：

(Ⅰ) 封闭性：集合中任意两个元素的合成还是集合中的元素；

(Ⅱ) 结合律：合成运算满足结合律；

(Ⅲ) 单位元素：集合中具有一个类似恒等置换那样的元素；

(Ⅳ) 每个元素都有逆元素.

其实，具有这样性质的带有运算的集合很多.

例 (1) $G=\{-1, 1\}$关于数的乘法运算满足上述条件.

(2) 全体整数 $\mathbf{Z}$ 关于加法运算满足上述条件.

(3) 全体正有理数关于数的乘法满足上述条件.

相信你自己也能举出类似的例子. 因为，在数学中，带有一种运算并满足上述条件的非空集合很多. 数学家们从这些具有不同背景的众多的例子当中，抽象出了一个重要的概念——“群”.

可以说，前面我们学习的都是具体的群，它们可以看作是抽象群的具体例子.

下面我们以相对比较严格的方式给出抽象群的定义.

首先我们给出二元运算的概念.

设 G 是一个非空集合，所谓定义了 G 的一个二元运算“·”，如果对于 G 的任意两个元素 a，b，都有 $a\cdot b$ 是 G 中的一个元素.

其实，二元运算对于我们来说并不陌生. 例如，二面体群 D_n 中等距变换的合成是 D_n 的二元运算，对称群 S_n 中置换的合成是 S_n 的二元运算，整数的加法是整数集合 $\mathbf{Z}$ 的加法运算，整数的乘法运算也是整数集合的二元运算.

思考一下：除法是否为整数集合 $\mathbf{Z}$ 的二元运算，为什么?

定义 4.1 设 G 是一个非空集合，如果满足下述四个条件：

(Ⅰ) G 中定义了一个二元运算“·”，即对于任意 a，$b\in G$，有 $a\cdot b\in G$；

(Ⅱ) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$，$a$，$b$，$c\in G$；

（结合律）

(Ⅲ) 存在 $e\in G$ 使得 $e\cdot a=a\cdot e=a$，$a\in G$；

（单位元）

(Ⅳ) 对于任意的 $a\in G$，存在 $a'\in G$ 使得 $a'\cdot a=a\cdot a'=e$ （逆元）

则称$(G,\ \cdot)$为一个**群**(group).

如果用语言来叙述，群 G 就是一个带有二元运算“·”的集合，这个运算满足结合律，G 中存在单位元，G 中每个元素都有逆元.

习惯上，人们不仅把群的二元运算叫做“乘法”运算，而且也借用了过去数的乘法运算符号，但是有两点应该注意：

(1) 虽然我们把这个二元运算称为“乘法”运算，但是它与数的乘法运算可以毫无关系，而且这里的运算符号“·”也常常被省略；

(2) 如果我们遇到的二元运算是过去熟悉的某种运算，例如加法运算，那么我们仍然选用传统的运算符号“+”.

总而言之，二元运算采用什么样的称呼，选用什么样的符号并不重要，重要的是它究竟是怎样运算的. 这一点希望大家通过群的不同的例子，认真体会一下.

思考与讨论

群中的二元运算是否一定适合交换律？

3.3.2 群的例子

例 1 非零有理数集合 $\mathbf{Q}^*$ 关于普通乘法运算构成一个群($\mathbf{Q}^*$，·).

解：根据数的乘法运算和非零有理数的性质，不难验证下列四条：

(I) 二元运算：对任意 a，$b\in\mathbf{Q}^*$，$a\cdot b\in\mathbf{Q}^*$；

(I) 结合律：对任意 a，b，$c\in\mathbf{Q}^*$，$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

(II) 单位元：$1\in\mathbf{Q}^*$ 是单位元；

(III) 逆元：对任意 $a\in\mathbf{Q}^*$，$a'=\frac{1}{a}$就是 a 的逆元，所以($\mathbf{Q}^*$，·)是一个群.

类似可以验证，($\mathbf{Q}^+$，·)，($\mathbf{R}^*$，·)，($\mathbf{R}^+$，·) 也都是群，其中 $\mathbf{Q}^+$，$\mathbf{R}^*$，$\mathbf{R}^+$ 分别表示正有理数集合，非零实数集合，正实数集合，二元运算都是数的乘法. 但是，($\mathbf{Z}^*$，·)，($\mathbf{Q}$，·)，($\mathbf{R}$，·) 都不是群. (为什么?)

例 2 整数集合 $\mathbf{Z}$ 关于普通加法运算构成一个群($\mathbf{Z}$，+)，称为整数加群.

解：根据数的加法运算和整数的性质，不难验证下列四条：

(I) 二元运算：对任意 a，$b\in\mathbf{Z}$，$a+b\in\mathbf{Z}$；

(II) 结合律：对任意 a，b，$c\in\mathbf{Z}$，$(a+b)+c=a+(b+c)$；

(III) 单位元：$0\in\mathbf{Z}$ 是单位元（或零元）

(IV) 逆元：对任意 $a\in\mathbf{Z}$，$a'=-a$ 就是 a 的逆元(或负元)

所以($\mathbf{Z}$，+)是一个群.

类似可以验证，($\mathbf{Q}$，+)，($\mathbf{R}$，+)也都是群，但是($\mathbf{N}$，+)不是群，其中 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{N}$ 分别为有理数集合，实数集合，自然数集合.

按照群的定义，我们前面遇到的等距变换群，图形的对称变换群，多项式的对称变换群，n 次对称群 S_n 等，都是群的特例. 只不过它们各自的二元运算有所不同.

由此可见，群的二元运算是非常广泛的，可以是数的乘法或加法，也可以是变换的合成，置换的合成等等.

例 3 集合 $Z_3=\{0,1,2\}$关于模 3 运算$\oplus$构成一个群(Z_3，$\oplus$)，模 3 的加法运算$\oplus$的定义如下：如果 a，$b\in Z_3$，那么规定：

$$a\oplus b=a+b \text{ 除以 3 所得到的余数.}$$

解：由于任何整数除以 3 所得到的余数只有三种可能性：0，1，2，因此上述关于模 3 的加法运算$\oplus$的定义是有意义的. 而且满足下列四条：

(I) 对任意 a，$b\in Z_3$，$a\oplus b\in Z_3$；

(II) 对任意 a，b，$c\in Z_3$，$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$；

(III) 单位元：$0\in Z_3$ 是单位元(或零元)；

为了能清楚看出逆元条件成立，我们给出模 3 加法的运算表（表 3-1）.

表 3-1

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

(IV) 由于运算表的主体部分每行每列都有单位元 0 出现，因此每个元素都有逆元素.

综上可知，Z_3 关于模 3 运算$\oplus$构成一个群（Z_3，$\oplus$）.

其实，对于任意正整数 n，可以在 $Z_n=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$中类似地定义模 n 加法运算. 而且，可以证明，Z_n 关于模 n 加法运算也构成一个群(Z_n，$\oplus$).

练习

1. 举出两个群的例子.
2. 设(G，·)是一个群，证明 G 中的单位元是唯一的，G 中每个元素的逆元也是唯一的.
3. 列出 $Z_4=\{0, 1, 2, 3\}$关于模 4 加法运算的运算表，并说明 $Z_4=\{0, 1, 2, 3\}$关于模 4 加法运算的构成一个群.

本章小结

Ⅰ 知识结构

1. n 次置换的合成运算及其性质

(1) n 元集合 X 到它自身的一个一一映射称为一个 n 次置换，X 的全体置换记为 $\mathrm{Sym}(X)$.

(2) 如果 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$，则用符号 S_n 取代符号 $\mathrm{Sym}(X)$.

(3) 两个 n 次置换 σ，τ 的合成 $\sigma \cdot \tau$ 定义为：$\sigma \cdot \tau(k)=\sigma(\tau(k))$，$k=1, 2, \cdots, n$.

(4) 全体 n 次置换组成的集合 S_n 关于置换的合成运算满足：封闭性、结合律、单位元条件（恒等置换）、逆元条件（每个置换有逆置换）.

(5) 全体 n 次置换组成的集合 S_n，关于置换的合成运算构成 n 次对称群 $(S_n, \cdot)$.

2. 多项式的对称变换群

(1) 若一个多项式在字母进行某种置换之后，仍然与原来相等，则称这个多项式在字母的这种置换下不变.

(2) 若一个多项式在字母的一个置换 σ 下不变，则称 σ 为该多项式的对称变换.

(3) 若一个多项式有非恒等的对称变换，则称这个多项式具有对称性.

(4) 若用 $S(F)$ 表示多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体对称变换所构成的集合，则 $S(F)$ 关于置换的合成构成多项式的对称变换群.

3. 抽象群的定义

(1) 一个非空集合 G 如果有一个二元运算“$\cdot$”，并且满足：封闭性，结合律，有单位元，每个元素有逆元，则称 G 关于这个二元运算构成一个群.

(2) 我们学习的等距变换群、图形的对称变换群、多项式的对称变换群、n 次对称群，都是群的特例.

(3) 除此之外，还有大量的群的例子．因此，群是一个十分广泛的概念.

(4) 抽象群论是现代数学的重要分支．我们这里仅仅介绍了群的概念，并列举了一些群的简单例子.

Ⅱ 思考与交流

1. 设 a 是群 G 的一个元素．那么 a，a^2，a^3，$\cdots$，a^k，$\cdots$都是 G 的元素．如果存在正整数

m 使得 $a^m=e$(单位元)，则称使得 $a^m=e$ 的最小正整数 m 为 a 的周期或者阶．证明：如果一个群 G 的元素个数有限，那么它的每个元素都有周期.

2. 证明图形的旋转变换一定有周期，并给出正六边形全部 6 个旋转对称变换的周期.

III 巩固与提高

1. 给出下列多项式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1+x_2-x_3-x_4$ 的对称变换群，并列出这个群的乘法表.
2. 证明 $U_4=\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ 关于数的乘法运算构成一个群，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.
3. 设 $G=\{0, 1\}$，如果按照下述方式来定义 G 的二元运算“·”：
$$0\cdot 0=0,\ 1\cdot 0=0\cdot 1=1,\ 1\cdot 1=0,$$
证明 G 关于这个运算构成一个群.
4. 设 $Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2} \mid a, b\in Q, 且 ab\neq 0\}$，讨论 $Q(\sqrt{2})$ 关于数的乘法运算是否构成一个群.

第四章　群论的神奇应用

群论是很神奇的一个数学分支．在我们这本小册子中，只能非常通俗地介绍一下群论最基本的概念．前面，我们已经领略了一下群论在研究各种不同对称性中的作用．实际上，群论的应用远比想象的要更加广泛，更加深入．在本章中，我们有选择地介绍群论的一些典型应用，这些应用相对比较容易理解．通过这些典型应用实例的学习，希望读者能够对群论的神奇应用有所了解．

4.1　群与装饰艺术

从字面上来看，群与装饰艺术似乎毫无关系，一个是数学概念，一个属于艺术范畴．事实上，在装饰艺术中，许多设计图案都是一个基本图案的重复，这种重复，就需要运用反射、旋转、平移等变换，这就需要用到群．常见到墙纸、纺织品、建筑装饰、地砖铺设图案的设计，都属于这种情形．

尽管装饰图案千变万化，无穷无尽，但是，无论是带状的装饰图案，还是面状的装饰图案，它们的对称性只有有限多种类型．当然要找到这全部不同的对称性，并证明只有这么多对称性，还是相当困难的．这些结果是由很多数学家共同努力完成的．我们在这里，不打算给出这种对称性分类工作的证明过程．只给大家介绍结果．

数学家已经证明，平面上的装饰性对称群一共有 24 个，其中有 7 个是关于无限延伸的带状装饰图案的对称性群，另外 17 个是可以充满整个平面的装饰性图案的对称性群．

4.1.1　带饰对称性

我们所讨论的具有对称性的带饰，是被理解为可以无限延伸的带子．我们并不真正关心带饰图案，而是关心所有可能的对称性．原因是带饰图案千变万化，无穷无尽，我们不可能穷尽它们．

但是，按照对称性来考察带饰图形，我们会发现，尽管带饰图案纷繁多样，但是它们的对称类型却只有 7 种．这样出人意料的结论，仅仅是数学家运用群论的一个小小的成果而已．

在这里，我们无法重复这个结论的推导过程，只是通过尽量通俗的方式，介绍这 7 种不同类型的对称性．

具有对称性的带饰，必然有几个特点，图案中有一条直线，使得在带饰图案与自身重合的任何等距变换之下，这条直线也与自身重合，这条直线称为**带轴**．

所谓带饰的对称类型只有 7 种，其实就是说它们的对称变换群一共有 7 个类型．我们把这些群列举在下面，并通过简单的图案来表示出每种群所对应的带饰图案．

（1）仅由一些平移组成的对称变换群 L_1，这些平移的方向沿着带轴的方向，移动的距离是某个固定长度的倍数．对应的图案见图 4-1.

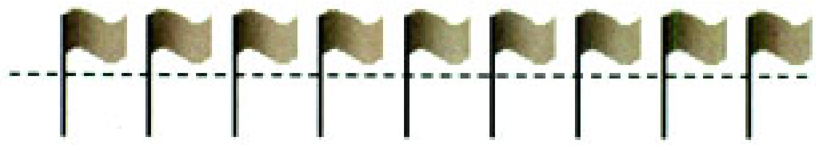


图 4-1 L_1

（2）由群 L_1 添加一个绕带轴上某一点作 180°角的旋转所得到的对称变换群 L_2．对应的图案见图 4-2.

图 4-2 L_2

（3）由群 L_1 添加垂直与带轴一个直线的反射所得到的对称变换群 L_3．对应的图案见图 4-3.

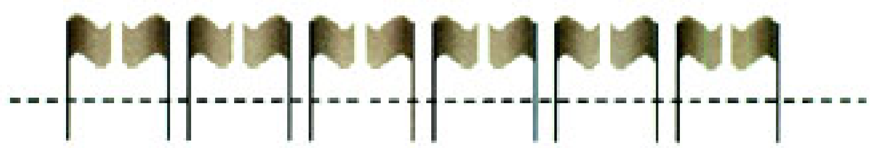


图 4-3 L_3

（4）由群 L_1 添加一个关于带轴的反射所得到的对称变换群 L_4．对应的图案见图 4-4.

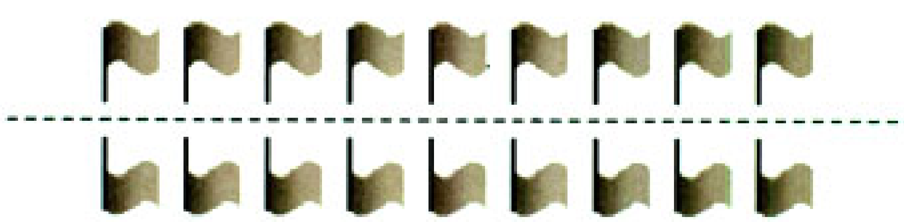


图 4-4 L_4

（5）由群 L_1 添加这样的变换所得到的对称变换群 L_5，这个变换为一个反射变换和平移变换的乘积，反射轴为带轴，平移为沿带轴方向移动距离 $\frac{a}{2}$．对应的图案见图 4-5.

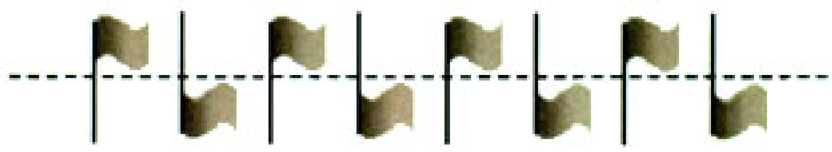


图 4-5 L_5

（6）由群 L_4 添加一个关于垂直于带轴的一个直线的反射变换所得到的群 L_6．对应的图案见图 4-6.

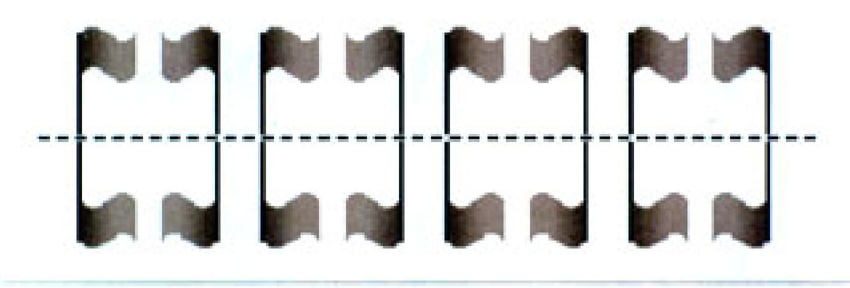


图 4-6　L_6

（7）由群 L_5 添加一个关于垂直于带轴的反射所得到的群 L_7．对应的图案见图 4-7．

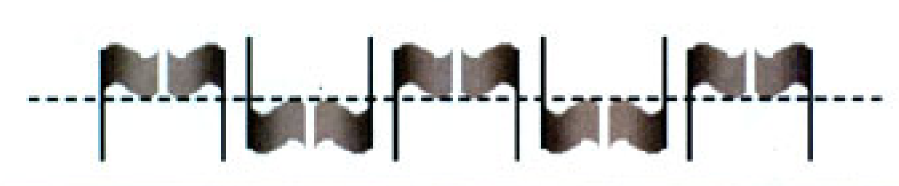


图 4-7　L_7

思考与讨论

请仿照上述由小红旗构成的 7 种类型的带饰图案，自己设计出 7 种类似的带饰图案．

带饰图案是很常见的一种装饰图案．下面随意列举一些．其中大部分都是用来装饰建筑物或者器物边沿的图案．虽然图案的对称性并不是十分标准，但是希望你能认真观察，识别出它们各自的对称类型．

图 4-8

图 4-9

图 4-10

图 4-11

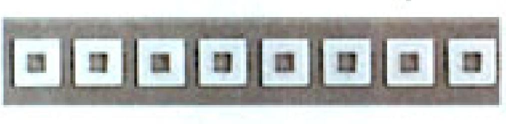


图 4-12

图 4-13

图 4-14

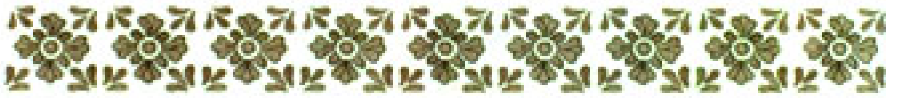


图 4-15

图 4-16

在了解带饰图案及其对称性之后，请你注意留心自己日常生活中所见到的带饰图案，识别它们的对称类型．现在，许多报刊专栏中也时常出现这种带饰装饰图案．

建议在学习本部分之后，每个同学设计一个有趣的带饰图案，并采用板报的形式展出．

4.1.2 面饰对称性

平面装饰图案简称为面饰图案．与带饰图案类似，人们主要关注的是面饰图案的对称性，不是面饰图案本身．面饰图案对称类型更加重要，因为这些类型也恰好是平面结晶图形的类型．

面饰图案也是我们在现实生活中，经常能够见到的图案．下面就是经常出现在古建筑门、窗上的装饰图案（图 4-17～图 4-22）．

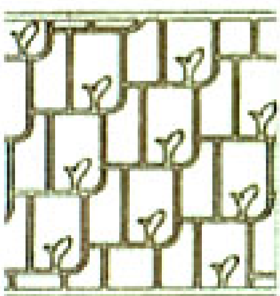


图 4-17

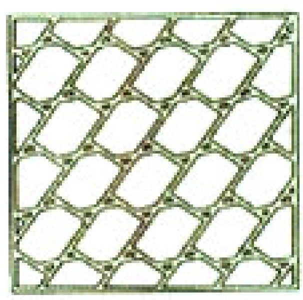


图 4-18

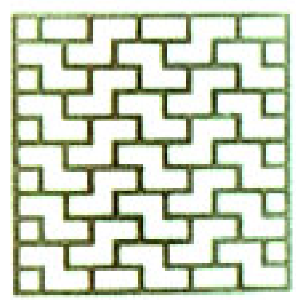


图 4-19

图 4-20

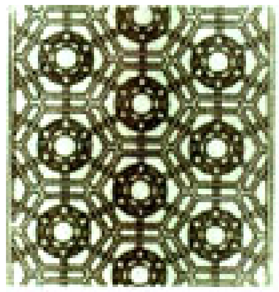


图 4-21

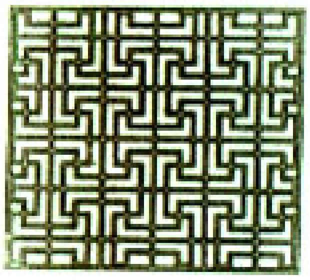


图 4-22

面饰图案的对称变换群的特点是，既没有不动点，也没有不动直线．这种群也称为平面的费得洛夫（Fedorov）群，共有 17 个不同类型．之所以叫费得洛夫群，是因为费得洛夫是最早完全确定这些对称类型，或者说是发现这些对称变换群的数学家．

面饰图案一般是由面饰单元，经过两组不同方向的平移生成的．由于面饰单元可以具

有不同对称性，所以面饰图案也会具有不同的对称性．数学家正是按照不同对称性把面饰图案分成了 17 类．

对于平面装饰图案和它们的对称变换群，我们不打算一一列举．有兴趣的同学可以参阅有关对称方面的专门书籍．

4.2 群与晶体结构对称性

前面我们学习了平面上的等距变换群，实际上，从应用的角度而言，空间等距变换更重要一些．所谓空间等距变换，就是不改变空间中任意两点之间距离的几何变换．

类似于平面图形的对称性，空间几何图形有镜面对称、轴对称、中心对称等等，我们可以用空间的等距变换来定义这些对称性．类似地，可以建立空间图形的对称变换群．

虽然，空间图形的对称性可以仿照平面的情况进行研究，但是，空间的情况更加复杂．空间最基本的等距变换也只有三种：旋转变换、镜面反射变换和平移变换．可以证明，空间中任何一个等距变换都可以通过这三种基本等距变换来实现．

我们之所以要提一下空间对称性，是因为接下来要介绍的群在晶体分类研究中的应用，分子对称群，都要牵扯到空间对称性和空间等距变换．

人们用平面图案来装饰事物的表面．由此产生了平面装饰艺术．但是艺术从来没有进入过立体装饰艺术，也许这是因为人们无法看到立体内部装饰的缘故．

但是，大自然却不关心是否有人能看到物体的内部，自然界中充满了立体装饰．大自然立体装饰艺术杰作之一就是晶体．奇妙的晶体就是大自然按照某种精妙的方式对原子进行排列的结果，晶体内部原子的排列图案就是立体装饰．

下面是一些大家熟悉的晶体内部原子和分子的排列图案（图 4-23～图 4-28）．

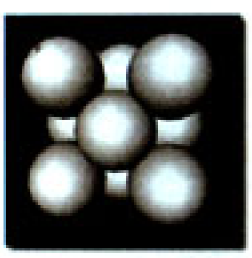


图 4-23　金

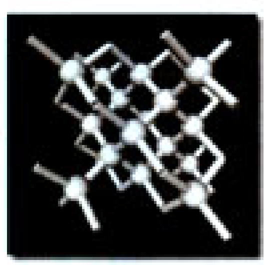


图 4-24　钻石

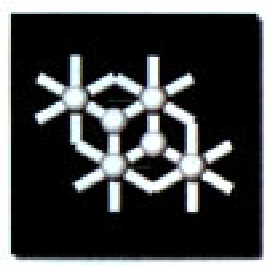


图 4-25　石墨

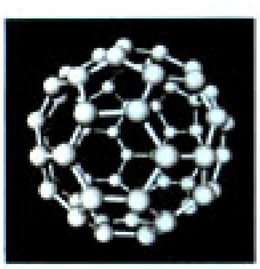


图 4-26　碳 60

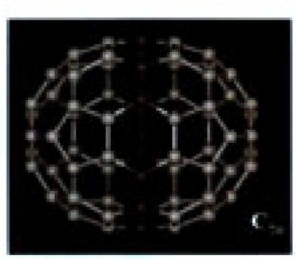


图 4-27　碳 70

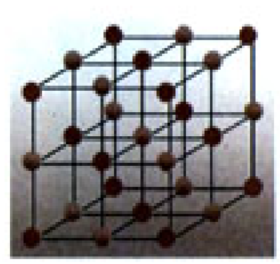


图 4-28　食盐

虽然在自然界中，我们见到的晶体都是有限的，但是，如果考察晶体内部原子的排列规律，可以设想这种晶体完全可以依照同样的规律充满整个空间．这一点非常类似于我们前面介绍的平面装饰图案，现实中不可能有无限的装饰图案，但是，从研究对称性的角度而言，可以设想图案充满整个平面．

现在对于晶体所呈现出来的规律，我们也可以这样来理解．这样理解的晶体就是所谓的理想晶体．理想晶体可以充满整个空间，可以看作是由空间中一个单位晶格，经过三组不共面的平移而产生的．

一个不是十分严格，但是容易理解的解释是这样的，如果单位晶格是一块砖，那么我们可以通过沿着三个互相垂直的方向平移，使得这样完全相同的砖块堆满整个空间，一块砖就好比一个单位晶格．

晶体中，**单位晶格**是由原子在空间中所形成的一个规则的多面体，晶体可以理解为由单位晶格有规则地堆砌而成的．

晶体可以千变万化，但是，它们所呈现出的对称性却是有限的，因为每个晶体都有自己的对称变换群．

晶体物理学和晶体化学理论告诉我们，晶体对称性不仅仅是结构问题，对称性与晶体的物理性质和化学性质都是密切相关的．这也是人们十分关注晶体对称性的原因之一．

晶体的对称性当然与晶体单位晶格和平移方向都有关系．而要描述这些对称性自然离不开群论这个工具．晶体不同对称类型的确定，或者不同晶体对称群的确定，可不像面饰对称性那么容易，离开强大的群论工具，人们是不可能完成这种对称性分类的．即使群论已经十分成熟的今天，人们要完成这个分类工作，也需要几十页的篇幅．

一个晶体 C 的对称变换，要么把 C 的某个单位晶格还变成它自己，要么把一个单位晶格变成另外一个单位晶格．

在 19 世纪末期，经过 Fedorov，Schoenflies，Barlow 等一些科学家和数学家的共同努力，利用群论工具证明了，保持一个单位晶格不动（是指变换前后这个单位晶格与自己完全重合）的对称变换群，也称为对称点群，一共有 32 种；而晶体对称变换群共有 230 种，这些群也称为空间群．

4.3 分子对称性群

物质都是由分子构成的，而分子又是由原子组成的．如果把原子（核）看作小球，那么分子的模型就是由这些小球连接起来组成的一个空间架构，称之为**分子构型**．

分子构型完全可以看作是一个空间几何图形．所谓分子的对称性，其实就是指由分子构型所构成的几何图形的对称性，这完全可以用图形的对称变换来刻画．

在研究分子对称性的时候，化学家们习惯于把分子的对称变换称为分子的**对称操作**．我们不打算，也不可能详细叙述有关分子对称性的理论．下面我们简单了解一下水分子和氨分子的对称性，然后介绍一下分子对称性的应用．

水分子 H_2O 由一个氧原子 O 和两个氢原子 H 构成，并且三个原子在同一个平面中(三点决定一个平面)(图 4-29).

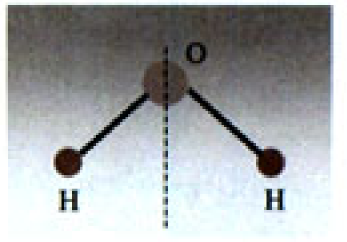


图 4-29 水分子模型

根据水分子模型，不难列出水分子的全部对称操作：

1) 空间的恒等操作；

2) 关于水分子所在平面镜面反射操作；

3) 关于垂直于水分子平面且通过氧原子所在位置的镜面发射操作；

4) 以水分子平面中 $\angle HOH$ 的平分为轴，在空间中旋转 180°.

这 4 个对称操作是水分子 H_2O 的全部对称操作，如果按照变换合成的方式来定义操作的二元运算，那么它们所组成的一个群，称为分子 H_2O 的对称操作群（或对称群），在结构化学中把这个群记为 C_{2v}.

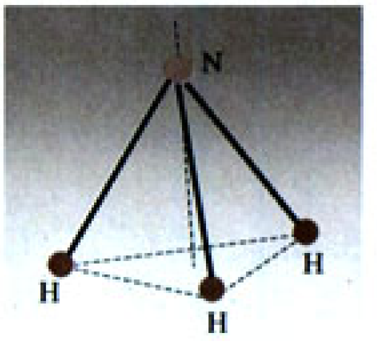


图 4-30 氨分子模型

氨分子 NH_3 由一个氮原子 N 和三个氢原子 H 构成. 氨分子的构型很对称，整个分子模型呈现为一个锥形，三个氢原子 H 在同一个平面中(图 4-30).

根据氨分子模型，不难看出氨分子有三个对称面，这三个对称面可以由过一个 N-H 棱和分子真轴（图中虚竖线）得到. 三个氢原子在平面内构成一个正三角形，分子的真轴过正三角形的中心，且垂直于正三角形所在平面，所以真轴就是一个旋转轴.

根据以上对氨分子 NH_3 模型架构的分析，我们可以列出这个分子的全部对称操作：

1) 关于三个对称面的三个镜面反射操作；

2) 关于真轴的三个旋转（其中包括恒等操作).

这 6 个对称操作是氨分子 NH_3 的全部对称操作，它们所组成的群称为氨分子 NH_3 的对称群，在结构化学中把这个群记为 C_{3v}.

思考与讨论

如果在氨分子 NH_3 模型中，用数字 1 来标记氮原子，分别用数字 2，3，4 标记三个氢原子，请用 1，2，3，4 的置换的形式，写出氨分子 NH_3 的全部 6 个对称操作，并讨论这个群与 D_3(6 阶二面体群)的关系.

我们不打算再讨论其他分子的对称性. 由以上讨论，希望读者明白，任何一个分子，都可以用类似方式来讨论它的对称性，决定出它的全部对称操作，从而给出它的对称群.

我们可以告诉大家这样一个结论：分子对称群共有 32 种不同的类型.

分子对称性的研究是有用的. 例如，可以用来判断分子是否具有偶极距、旋光性等等，而这些性质与物质的化学性质密切相关.

4.4 群与代数方程根式可解性

设有一个 n 次代数方程
$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$
它的系数是给定的复数，那么这个方程必定有 n 个根，这就是著名的**代数基本定理**.

德国数学家高斯（C. F. Gauss，1777—1855）在 1799 年给出了这个定理的第一个证明. 后来的数学家陆续给出了许多种不同的证明，但是所有这些证明都是非构造性的. 也就是说，只能证明根的存在性，无法给出求出根的方法.

当然，并不是对于所有的情况都无法给出根的求法.

一次代数方程的解是显然的，二次方程的解也很简单. 数学史告诉我们，早在公元前 1700 年左右，古巴比伦人就知道了二次方程的求根公式. 但是三次方程的求根公式直到 3000 年之后的 16 世纪初，才由意大利数学家费罗(S. Ferro，1465—1526)和塔塔利亚(N. Tartaglia，1499—1557)先后独立得到，后来由卡当(G. Cardano，1501—1576)于 1545 年在他自己的著作中公布于世. 后来人们把三次方程的求根公式称为卡当公式.

四次方程的求根公式和三次方程的求根公式几乎同时发现. 卡当的著作中就同时公布了四次方程的求根公式. 这个公式是由卡当的学生费拉利(L. Ferrari，1522—1565)给出的.

解决了三、四次方程求根问题之后，数学家自然要考虑一般的五次或更高次的求解问题，也就是说，五次和五次以上的代数方程，它的解能否也通过只对方程的系数作加、减、乘、除和求正整数次方根等运算而得到. 这就是方程是否可以根式解的问题.

但是，五次和五次以上的代数方程是否可以根式解的问题，在此后两百多年的时间里，尽管有无数杰出的数学家共同努力，始终没有能够解决.

让我们简要追寻一下这个问题的研究历程.

- 1770 年：拉格朗日详细考察了人们求解二、三、四次方程的方法，首次意识到五次及其以上方程求根公式可能不存在. 虽然他未能证明自己的断言，但是，他提出的根的置换理论，揭示了问题的本质，也是这个问题最后解决所出现的曙光.
- 1801 年：高斯证明分圆多项式 x^p-1(p 为素数)可以用根式求解. 这使得人们意识到，至少有一部分高次方程是可以根式求解的.
- 1824 年：挪威的一位年青人阿贝尔证明了：五次代数方程通用的求根公式是不存在的. 当然，结合高斯关于分圆多项式的结论，我们知道，接下来的问题是解决，如何判定具体的代数方程是否可根式解. 这个问题阿贝尔并没有回答.
- 1830 年：法国天才数学家伽罗瓦彻底解决了五次方程何时可以根式解的问题. 可是他的结果一直没有能够发表.
- 1846 年：伽罗瓦死后 14 年，他的这一伟大成果发表，其中首次提出了群的概念，并最终利用群论解决了这个世界难题.
- 1870 年：法国数学家若尔当(C. Jordan，1838—1922)根据伽

E. Galois(1811—1832)

罗瓦的思想撰写了《论置换与代数方程》一书，人们才真正领略了伽罗瓦的伟大思想.

如果要真正搞懂，伽罗瓦究竟是如何利用群论解决高次方程可根式解的问题，不仅需要一定的群论知识，还需要学习其他抽象代数的内容.

就是在今天，一个数学专业的学生，也要具备相当的代数学专门知识，才能理解伽罗瓦理论. 在我们这一本小册子中，当然不可能详论.

但是，我们还是想粗略地介绍一下伽罗瓦解决方程根式可解问题的基本思想. 对于一个 n 次代数方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \tag{4.1}$$

我们用 F 来表示由这样一些数所组成的集合，这些数可以由方程的系数经过有限次加、减、乘、除运算所得到，我们称之为方程的**系数域**

例如，如果方程(4.1)的系数都是整数或者有理数，那么它的系数域 F 就是全体有理数 $\mathbf{Q}$；而方程 $x^2+\sqrt{2}x+1=0$ 的系数域为$F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$.

设 ξ_1，ξ_2，...，ξ_n 是(4.1)的根. 那么由这些根经过有限次加、减、乘、除运算所得到的一切数的集合 K，我们称之为方程的**根域**

> **注** ξ 为小写希腊字母，英文名称为 Xi[ksai].

例如，方程 $x^2+1=0$ 的根域 $K=\{a+bi\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$；而方程$x^2+\sqrt{2}x+1=0$ 的根域为$K=\{a+bi+c\sqrt{2}+di\sqrt{2}\mid a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{Q}\}$.

根据韦达定理，我们知道，方程的系数一定可以由根经过有限次加、减、乘、除运算得到，所以系数域一定包含在根域之中. 当然，也有时候二者是相同的.

方程(4.1)的根域 K 到自身的一个一一映射$\sigma: K\to K$ 如果满足下列条件：

(1) $\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b)$，$a$，$b\in K$；

(2) $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$，$a$，$b\in K$；

(3) $\sigma(c)=c$，$c\in F$；

就称 σ 为方程(4.1)的根域的一个**基本自同构**. 基本自同构的全体按照类似于变换的乘法可以构成一个群，叫做给定方程的**伽罗瓦群**，记为 G.

利用基本自同构的性质可以直接证明，如果 ξ 是原方程的一个根，那么 $\sigma(\xi)$ 也是该方程的一个根. 这样，每个基本自同构就能诱导出方程根的一个置换. 我们可以把 G 所对应的那些根的置换所形成的群记为 H. 那么我们知道，H 是 S_n 的子群.

当然，一般而言，并非根的每个置换都对应一个基本自同构，也就是一般情况下 H 不会等于是 S_n. 但是，的确存在一些高次方程，使得 $H=S_n$. 这时候基本自同构与 n 个根的置换之间完全是一一对应的. 伽罗瓦正是利用这个对应关系以及 S_n 的性质得到他著名的结果.

原来，在群论里有可解群这样一个概念. 伽罗瓦证明，方程根式可解当且仅当上述伽罗瓦群 G 是可解群，而 G 是可解群当且仅当 H 是可解群. 这样，从理论上而言，方程是否根式可解的问题就完全清楚了，就是一个群论问题.

那么伽罗瓦是如何得出五次及其五次以上方程一定没有统一求根公式的呢？原来，他能给出这样的方程，这时候恰好有 $H=S_n$，而在群论里面很容易证明当 $n\geqslant5$ 的时候 S_n 不是一个可解群，而当 $n=1, 2, 3, 4$ 的时候 S_n 是可解群．这样，我们终于明白为什么 5 次方程是一个分水岭，原来是群的可解性在起作用．

现在我们再一次看到了群论的强大威力．当然这里我们无法给出可解群的定义．但是，相信这不会影响到我们对群论奇妙应用的领略，也不会减少我们对创造群论的天才数学家伽罗瓦的崇敬．

本章小结

Ⅰ 知识结构

1. 带饰对称性及其分类

(1) 尽管有丰富多彩的带饰图案，但是无论什么带饰图案，其所具有的对称性都是我们所罗列出的七种之一.

(2) 每一种带饰图形的对称变换群，一定包含一个具有固定方向的变换．因此，必然是可以无限延伸的图形.

2. 面饰对称性及其分类

(1) 面饰图案比带饰图案更加丰富，但是其对称类型也只有 17 种.

(2) 对称面饰图案的对称变换群，必然包含两个不同方向的平移变换，从而必然是在平面上可以无限延伸的图形.

3. 群与晶体分类

(1) 晶体可以千变万化，但是，它们所呈现出的对称性却是有限的，因为每个晶体都有自己的对称变换群，而晶体的对称群只有 230 种.

(2) 晶体对称性不仅仅是外表的结构问题，对称性与晶体的物理性质和化学性质都是密切相关的.

4. 分子对称性群

(1) 由原子组成的分子，其空间结构可以看作是一个立体图形，因而也可以考虑其对称性.

(2) 由于分子图形是有限的，因而其对称变换群是由有限个空间等距变换构成的群. 习惯上，称这样的群为点群.

(3) 分子对称性点群一共有 32 种. 因此，无论是什么样的分子，其对称性总是这 32 种之一.

(4) 分子对称性与其化学性质和物理性质密切相关.

5. 群与高次方程可解性问题

(1) 若一个代数方程的根可以由方程的系数，经过加、减、乘、除、开方表示出来，则称这个代数方程可根式解.

(2) 一次、二次、三次、四次代数方程都可根式解.

(3) 五次及其五次以上代数方程是否可根式解的问题，在历史上许多年都无法解决.

在 Lagrange，Abel，Galois 等数学家的共同努力下，这个问题才最终得以解决.

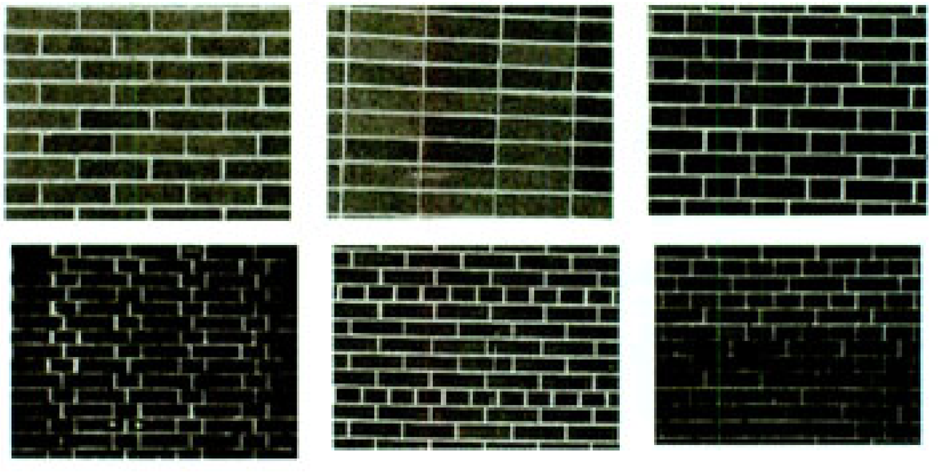
(4) 并非每个五次代数方程都可以根式解. 方程是否可以根式解的问题，与该方程的伽罗瓦群是否为可解群有关.

II 思考与交流

1. 如果要用同样大小的正多边形覆盖住整个平面，使得不留任何空隙，也不重叠，只能选用什么样的正多边形?
2. 如果允许使用两种正多边形按照上述方式覆盖住整个平面，有哪些可能性?
3. 分析上述覆盖图形的对称变换群.

III 巩固与提高

1. 通过查文献等方式，了解更多的关于群论应用的实例.
2. 几个人组成一个小组，在学校及其周边寻找建筑物的砖墙，画出它们的图形，研究砖墙图案的不同类型及其对称性，看看是不是能找到下列类型的砖墙图案.



学习总结报告

我们处在一个千变万化的世界之中．科学家要从错综复杂的自然现象中发现规律，而数学家要为这些规律提供好的描述语言．

我们学习的群与对称就是一个很好的实例．我们周围的世界，几乎处处呈现出对称现象．对称图案无穷无尽，大到建筑，小到晶体和分子，无论是宏观世界还是微观世界，都充满着对称美．

当人们赞美对称美，感叹自然界的神奇的时候，也为众多的对称感到迷茫．究竟有多少种对称？应该如何描述对称？应该如何研究对称？

数学家发现了利用变换下的不变性来研究对称性，神奇地把变与不变这个对立的概念统一起来了．他们进一步发现，保持一个物体或图形不变的全体对称变换恰好构成一个群．

这样，一个图形的对称变换群就可以完全刻画这个图形的对称性．于是，对称性就能够完全利用群这样一个数学工具去研究，去分类．

群的定义是抽象的，但是它有无数具体神奇的应用．这也是抽象与具体的对立统一．也许你无法完全理解群论那些深刻的应用，但是你应该设法去体验，从具体问题中发现数学问题，创造数学理论的方法．设法理解数学概念的建立，数学理论的完善，是从具体到抽象，从特殊到一般的一个不断地探求过程．

我们希望，你在学习这个专题课程之后，能认真总结一下自己的学习体会，完成一个总结报告．在你的总结报告中，应该包含如下三个方面的内容：

1．**知识结构体系**：认真总结所学知识的整体结构和内容，理清其中的逻辑关系，尤其是关于对称与变换的关系，等距变换的性质和分类，各种不同类型的群应该认真进行总结．在总结时，一定要在自己理解的基础上，尽量使用自己的语言，切忌简单摘抄．

2．**知识拓展应用**：通过查阅资料，阅读参考书籍，访问请教等方式，了解群论更多的神奇应用的例子．同时，选择一种类型的对称现象，自己去深入研究其对称性的类型．比如，砖墙图案的对称类型，地砖图案的对称类型等等．

3．**体会思想方法**：认真总结等距变换的引入、性质的讨论和分类过程，体会在数学中提出问题、解决问题的思路和方法．认真总结各种特殊群和抽象群的引入过程，深入体会数学概念的抽象和提炼过程．

数 学 文 化

阅读与欣赏

对称美与数学美

“虽然数学没有明显地提到善和美，但善和美也不能和数学完全分离．因为美的主要形式就是秩序、匀称和确定性，这些正是数学所研究的原则．”

——亚里士多德

人们经常使用对称这个词语，经常为自己看到的宏伟建筑而惊呼．瞧，这座建筑多么对称呀！对称现象在艺术领域、自然界、科学上都广泛存在．从建筑物外形到生物有机体的构造，从平面装饰图案到晶体内部原子排列，到处都呈现出对称的景象（见图 1）．


泰姬陵（印度）

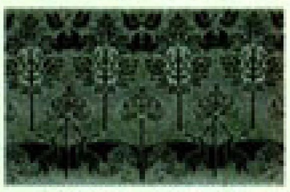
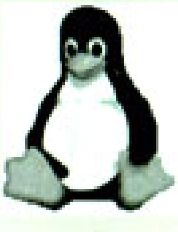

挂毯图案（局部）

图 1　建筑与装饰

在自然界里，我们可以找到无数对称的例子．无论是动物界、植物界，还是矿物界，也都充满着颇为美观的实例．

对称性具有基本的艺术感染力，因为对称所体现出的规则、匀称、和谐和周期性，都能给人一种愉悦的感觉，惹人喜爱．因此，从古到今，对称就在艺术中得到普遍使用．诗歌中的韵律，建筑里的构图，音乐里的旋律，装饰图样，都无不体现出某种对称的美丽．


蜜蜂


企鹅

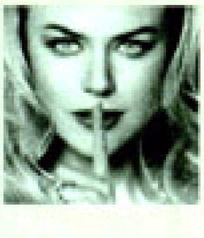

人的面部

图 2　丰富美丽的对称图案

更妙的是，对称性与美学有密切关系．正常人的外貌具有左右镜象对称性，设想一个人如果少一只眼，或嘴歪在一边，那看起来一定很不好看．此外，对于动物尤其是脊椎动物，也都是以左右对称为美．中国、希腊、罗马的古建筑绝大多数是左右对称的．圆形的杯、碗、碟、花瓶等工艺品的造型大都是旋转对称的．这些都说明：对称是美．

可以说，凡是出现对称图案的地方，都会伴随着人们对美丽的赞美．无论是美丽的蝴蝶，还是奇妙雪花图案，无不令人赞叹．赞叹大自然的奇妙，赞叹世界的奇妙．自然界为什么会呈现出如此众多的对称现象，在历史上曾被许多哲学家们讨论过．

我们无法去问大自然，它为什么选择对称，但是我们至少可以去研究对称，搞清大自然都为我们呈现了哪些对称性．当人们试图解决这样的问题时，却发现自己对对称概念的理解并不精确，缺乏描述对称性的精确语言，自然也无法区分不同的对称，更谈不上去彻底搞清有多少种不同的对称性．

这正如伽利略所说的：“如果不理解它的语言，没有人能读懂宇宙这本伟大的书，它的语言就是数学．”

可以说，数学的语言是一种万能的语言．歌德曾迢趣说：数学家就像法国人一样，无论你说什么，他们都能把它翻译成自己语言，并且立刻成为全新的东西．马克思也说过：一门科学只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了．

在研究对称性上，数学同样发挥了决定性的作用．用来解决对称性问题描述和刻划

的数学工具就是群. 或者说得更具体一点，就是那些对称变换群.

数学家们引入了变换的概念. 他们发现，如果一个事物具有一种对称性，那么它必然在某种变换下保持不变；如果一个事物在一种变换下保持不变，那么它也必然具有某种对称性.

这样，要搞清一个事物的全部对称性，只需要搞清保持它不变的全体变换. 数学家们不仅创造了如何精确地去表述这些变换，而且还发现保持一个事物不变的全体变换恰好构成一个变换群.

于是，群担任了研究对称性的主要角色.

当人们赞叹各式各样花边的美丽时，数学家们告诉你，所有带饰图案，只有 7 种不同类型的对称性.

当人们惊奇的发现，许多中外建筑的窗格图案如此丰富多彩，地板和墙壁的装饰图案更是纷繁奇妙的时候，数学家们告诉你，所有面饰图案，从对称性类型而言，只有 17 种不同类型.

当人们为晶体的奇妙构造赞叹不已，千方百计去发现新晶体、创造新晶体的时候，数学家们告诉你，无论你发现的晶体多么新颖，它的对称类型不外乎是 230 种之一.

如果你认为对称只是一个表面现象，那你就大错特错了. 在本书的最后一章中，我们已经提到过，分子对称性与物质的旋光性和偶极矩有直接关系. 实际上，对称性的本质意义远比人们想象的要更加深刻.

例如，在一个氢原子中，一个电子轨道是圆形的这一事实，是原子核作用在电子上的库仑力对称的结果和证据. 这儿“对称”意味着在所有方向上力的大小都一样. 元素周期表的一般结构，实际上是上面所说的对称——库仑力的各向同性的直接而出色的结果.

又例如，反粒子的存在性，是相对论的对称原理的体现，这一点已经在狄拉克的理论中被预测到.

人们往往只关注狭义相对论的这些具体结论，而忽略了爱因斯坦在创立这些理论时的原始思想，这种思想就是提出了物理规律的一种新的对称性，并且认识到对称性是制约物理规律的利器，从而把对称性推到物理基础研究的主角地位. 这一新的对称性就是物理定律的洛伦兹变换不变性.

物理学家所熟悉的各种守恒律也与对称性有关. 历史上著名的女代数学家诺特 (A. E. Noether)，建立了对称和守恒这两个重要概念之间的联系.

这不禁使人联想到，孙悟空再怎么折腾，也逃不出如来佛的手心. 这真是，自然真深奥，数学更奇妙，要想揭谜底，数学不可少！

后记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持。在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志。

本套高中数学实验教科书由丁尔陞教授、李建才教授、陈宏伯编审等组成编写指导委员会，负责指导教科书的编写工作。教科书编写的总指导为丁尔陞教授，主编为高存明编审。参加本套教科书编写的其他成员有：罗声雄、万庆炎、邱万作、郭鸿、韩际清、罗才忠、房艮孙、江守礼、王殿军、黄铎、陈研、高尚华、张爱和、张增喜、张润琦、朱铉道、范登晨、段发善、魏榕彬、徐望根、邵光砚、王人伟、曹惠中、秦静、许玉铭、李迈岸、杨静、刘长明、闫燕南、王旭刚、陈亦飞等。山东省的尹玉柱、秦玉波、王文清、颜长安、杨冠夏、于善胜、田明泉、邵丽云、韩相和、张頵、尚凡青、杨长智、常传洪，广东省的郭伟才、刘会金、梁锡焜、郑其中、何洌、罗建中和上海市的阴洪生等第一线教师审读了书稿，提出了许多宝贵意见。这套教科书是众多专家、学者和教师集体智慧的结晶。在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意。

我们还要感谢使用本套教科书的实验区的师生们，希望你们在使用本套教科书的过程中，能够及时把意见和建议反馈给我们，对此，我们将深表谢意。让我们携起手来，共同完成教材建设工作。我们的联系方式如下：

电话：010－58758333

E-mail：jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所　中学数学教材实验研究组