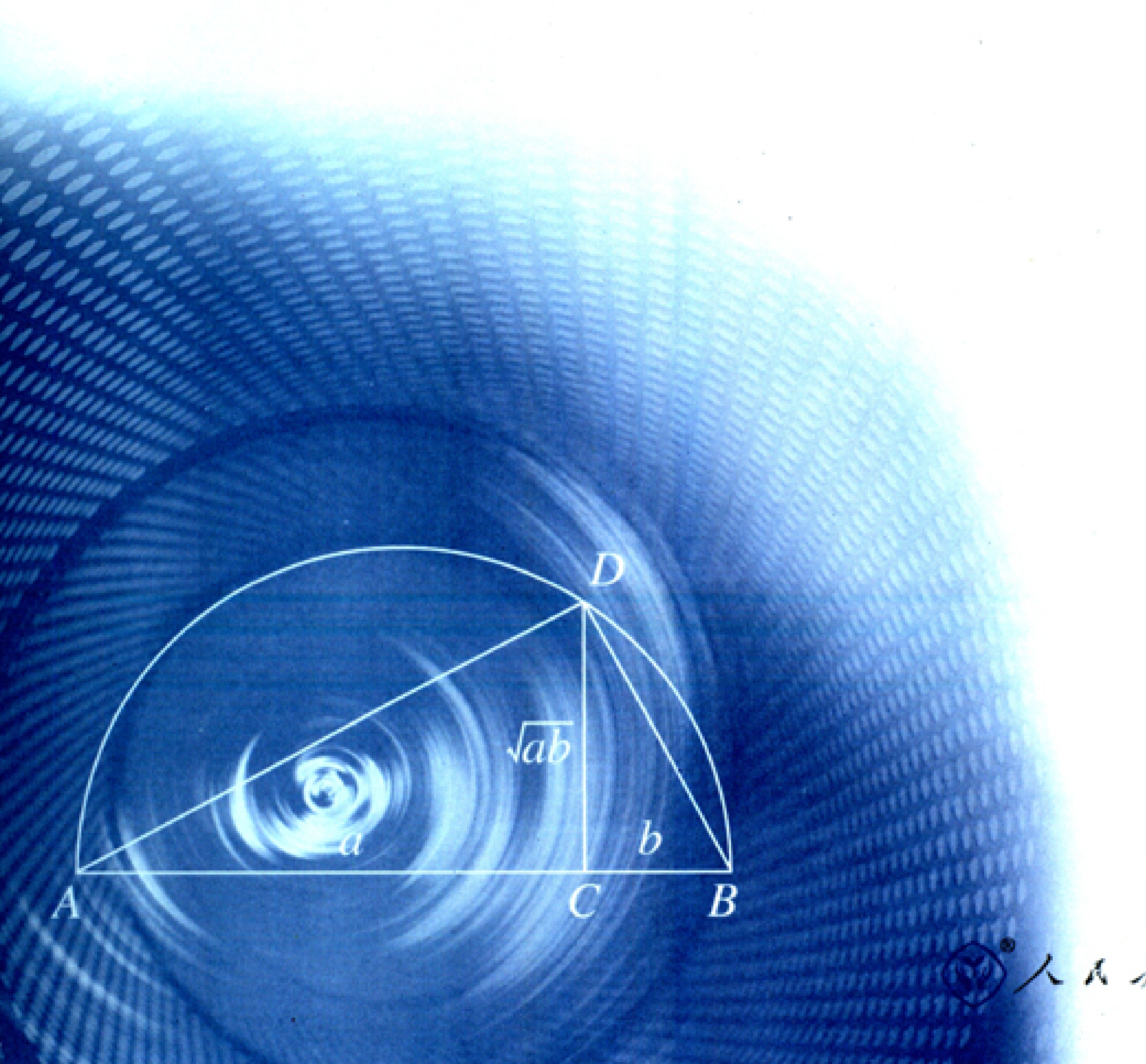
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–5

不等式选讲

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

本册主编　　房艮孙

编　　者　　房艮孙　李迈岸

责任编辑　　王旭刚

美术编辑　　张　蓓　王　喆

绘　　图　　王　鑫

封面设计　　林荣桓

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 4-5

不等式选讲（B版）

人民教育出版社　课程教材研究所
中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组　编著

*

人民教育出版社　出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：5.75　字数：128 000

2007 年 4 月第 2 版　2010 年 4 月第 25 次印刷

ISBN 978-7-107-18023-1
G・11112（课）　定价：5.70 元

本册导引

不等关系是客观世界中广泛存在的一个基本关系，各种类型的不等式在现代数学的各个分支及实际应用中起着十分重要的作用.

在第一章中，我们首先回顾了不等式的基本性质和基本不等式. 在同学们已经掌握一元一次不等式、一元二次不等式、二元一次不等式组解法和背景的基础上，介绍了含有绝对值不等式的解法，以及绝对值的三角不等式. 我们还通过一些简单问题介绍了证明不等式的一些基本方法：比较法、综合法、分析法、放缩法和反证法.

在第二章中，我们给出了柯西不等式的几种不同形式——代数形式、向量形式、三角不等式（形式），通过实例引入了排序不等式，并用排序不等式证明了平均值不等式. 我们还运用这些不等式，通过建立适当的数学模型，解决了一些特定的优化问题. 希望由此帮助同学们体验数学在解决实际问题中的价值和作用，体验利用数学解决实际问题的过程.

数学探究是高中引入的一种新的学习方式. 我们希望通过一些案例和课题，帮助同学们初步理解数学概念和结构产生的过程，初步尝试研究过程.

在第二章中，我们特别强调了不等式的几何背景和物理背景，以加深同学们对一些重要不等式的理解，从而有利于提高同学们的逻辑思维能力.

在第三章中，我们进一步介绍了数学归纳法及其使用范围，并应用数学归纳法证明了贝努利不等式，给出了平均值不等式的归纳法证明. 此外，作为数学文化，在这一章中我们还介绍了归纳法的简单历史，介绍了完全归纳法，不完全归纳法和第二归纳法，以帮助同学们加深对数学归纳法的理解，体会数学发展、完善过程中的历史轨迹，从而提高文化素养和创新意识.

目 录

第一章　不等式的基本性质和证明的基本方法

1.1　不等式的基本性质和一元二次不等式的解法

1.1.1　不等式的基本性质

我们要研究不等式，首先要明确实数的大小关系．如何确定实数之间的大小呢？由于实数与数轴上的点之间是一一对应的，因此，在数轴上，规定点从左到右依次出现，则它们所表示的实数也从小到大依次排列，即

设 a，b 为两个实数，它们在数轴上的点分别记为 A，B．如果 A 落在 B 的右边，则称 a 大于 b，记为 $a>b$；如果 A 落在 B 的左边，则称 a 小于 b，记为 $a<b$；如果 A 与 B 重合，则称 a 与 b 相等，记为 $a=b$.

这样，对于任何两个实数，有且只有以下三种情况之一成立：

$$a>b;\ a=b;\ a<b.$$

上述关系式的另一表达方法是

$$\boxed{\begin{aligned} &a>b \Leftrightarrow a-b>0;\\ &a<b \Leftrightarrow a-b<0;\\ &a=b \Leftrightarrow a-b=0.\end{aligned}}$$

其中符号“$\Leftrightarrow$”（双向箭头），读作“等价于”，其意义是该符号两边的式子可以互相推出．也就是说如果左边的关系式成立，则右边的关系式成立；反之，如果右边的关系式成立，则左边的关系式成立．

上面的关系式沟通了实数大小的几何意义和代数意义之间的联系，是比较两个实数大小以及用比较法证明不等式的出发点．下面我们回顾一些不等式的基本性质，它们是我们进一步学习的基础．

1. 对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

2. 传递性：$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$.

3. 加(减)：$a>b \Rightarrow a+c>b+c$.

4. 乘(除)：$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$；

$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$.

5. 乘方：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$，其中 n 为正整数，且 $n\geqslant 2$.

6. 开方（取算术根）：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，其中 n 为正整数，且$n\geqslant 2$.

7. $a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

（本性质说明两个同向不等式相加，所得的不等式和原不等式同向.）

8. $a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

（本性质说明两边都是正数的同向不等式两边分别相乘，所得的不等式和原不等式同向.）

事实上，以上这些基本性质是我们解不等式和证明不等式的基础和出发点. 关于不等式的推导，大多依赖于以上几条性质.

例　已知 $ab\neq0$，$a>b$，试比较$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小.

解：要比较$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小，只需要考虑它们的差就可以了.

因为$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，并且 $a>b$，即 $b<a$，所以 $b-a<0$.

分两种情况讨论：

（1）如果 $ab>0$，则$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$，即$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

（2）如果 $ab<0$，则$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$，即$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

练习

1. 判断下列各命题的真假，并说明理由.

（1）如果 $a>b$，那么$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；　　（2）如果 $ac<bc$，那么 $a<b$；

（3）如果 $a<b$，那么$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；　　（4）如果 $ac^2>bc^2$，那么 $a>b$；

（5）如果 $a>b$，那么 $a^n>b^n$.

2. 证明：如果 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$. 对比不等式性质 7，你能得出什么结论？

3. 证明：如果 $a>b>0$，$0<c<d$，则$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. 对比不等式性质 8，你能得出什么结论？

4. 用“$>$”，“$<$”填空：

（1）$a<b<0$，则$\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$；　　（2）$a>b>c>0$，则$\frac{c}{a}$ ____ $\frac{c}{b}$；

（3）$0<a<b<1$，则$\frac{1}{a^n}$ ____ $\frac{1}{b^n}$，其中 n 为正整数.

5. 设 $a>0$，$b>0$，比较下面两式的大小：

（1）$\frac{b}{a}$，$\frac{b}{a+1}$；　　（2）$\frac{b}{a}$，$\frac{b+1}{a}$.

6. 如果 $a>b>0$，$c<d<0$，$f<0$，证明：$\frac{f}{a-c}>\frac{f}{b-d}$.

1.1.2 一元一次不等式和一元二次不等式的解法

我们已经学习过一些简单的不等式解法，如一元一次不等式和一元二次不等式，下面我们作一简要回顾.

1. 一元一次不等式

含有一个未知数并且未知数最高次数是一次的不等式，叫做一元一次不等式.

在初中，我们学过一元一次不等式的解法，下面我们通过一个例子复习一下.

例 1 解不等式：

$$\frac{x-4}{2}-3(x+1)<(x+2)-14.$$

解：不等式两边同时乘以 2 得

$$(x-4)-6(x+1)<2(x+2)-28,$$

即 $-5x-10<2x-24$，

移项整理，得 $-7x<-14$.

两边同时乘以 $-\frac{1}{7}$，不等号方向改变，得

$$x>2.$$

所以原不等式解集为

$$\{x \mid x>2\}.$$

2. 一元二次不等式

含有一个未知数并且未知数最高次数是二次的不等式，叫做一元二次不等式.

下面我们来回顾一元二次不等式

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0 \ (a>0)$$

的解法. 设 $\Delta=b^2-4ac$ 为其判别式：

(1) 当 $\Delta>0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同实根 x_1，x_2，设$x_1<x_2$(图 1-1)，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上，和 x 轴($y=0$)相交于两个点 x_1，x_2，即函数 $y=ax^2+bx+c$ 以 x_1，x_2 为其零点.

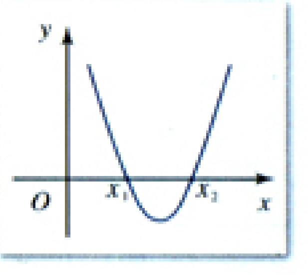


图 1-1

当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，抛物线图象在 x 轴上方，即

$$ax^2+bx+c>0;$$

当 $x_1<x<x_2$ 时，抛物线在 x 轴下方，即

$$ax^2+bx+c<0.$$

所以，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为

$$\{x \mid x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\};$$

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为

$$\{x \mid x_1 < x < x_2\}.$$

（2）当 $\Delta=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相同实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$（图 1-2），抛物线与 x 轴只有一个交点，即函数 $y=ax^2+bx+c$ 有一个二重零点．当 $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ 时，抛物线图象在 x 轴上方，即 $ax^2+bx+c>0$．

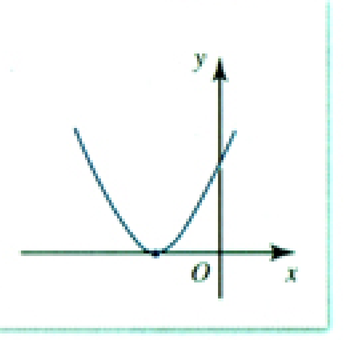


图 1-2

所以，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\left\{x \mid x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$；

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\varnothing$（空集）．

（3）当 $\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根（图 1-3），抛物线与 x 轴没有交点，即函数 $y=ax^2+bx+c$ 没有实根．抛物线的图象在 x 轴上方．

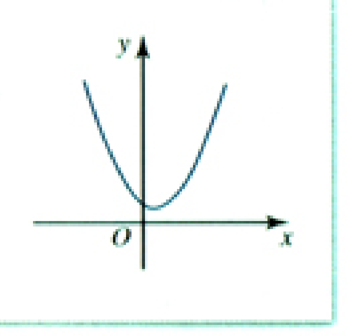


图 1-3

因此，x 为任意实数时都有 $ax^2+bx+c>0$．

所以，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为全体实数；

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\varnothing$（空集）．

思考与讨论

对于函数 $y=ax^2+bx+c$，如果 $a<0$，讨论相应的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 和 $ax^2+bx+c<0$ 解集的情况．

例 2　解下列一元二次不等式：

（1）$4x^2+6x+2<0$；　　（2）$4x^2+4x+1<0$；

（3）$-3x^2+x-6<0$．

解：（1）因为 $\Delta=36-4\times4\times2=4>0$，方程 $4x^2+6x+2=0$ 的解为

$$x_1=-1，x_2=-\frac{1}{2}.$$

所以不等式的解集为 $\left\{x \mid -1<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$．

（2）因为 $\Delta=4^2-4\times4=0$，所以原不等式的解集为 $\varnothing$．

（3）不等式两边同时乘以 -1，得

$$3x^2-x+6>0.$$

因为 $\Delta=(-1)^2-4\times3\times6=-71<0$，所以原不等式的解集为全体实数．

例 3　某保险公司为提高员工的计算机水平，委托一计算机培训公司培训员工．培训公司将按照课程深度的进展以及教学设备的逐步升级而提高授课费用．具体为：完成整个培训需时 70 天，将整个培训分为 7 个阶段，每阶段培训 10 天．第一阶段培训费用为

8 000元，而后每阶段比前一阶段增加培训费 1 000 元，并且每个阶段一旦开始就要完成，不能只进行半个阶段的培训就停止.

由于保险公司考虑到员工不需要非常深入的计算机知识技能，以及考虑培训资金有限，因而不准备完成整个培训. 现保险公司为员工提供的培训资金为60 000元，则员工最多能够接受几个阶段的培训？

解：这 7 个阶段的培训费用为一个等差数列，第 x 个阶段的培训费用为

$$8\ 000+(x-1)\cdot 1\ 000.$$

若员工接受培训 x 个阶段，则总的费用为

$$\frac{8\ 000+[8\ 000+(x-1)\cdot 1\ 000]}{2}\cdot x,$$

因此，我们有不等式

$$\frac{8\ 000+[8\ 000+(x-1)\cdot 1\ 000]}{2}\cdot x<60\ 000,$$

即
$$x^2+15x-120<0,$$

解得
$$\frac{-15-\sqrt{705}}{2}<x<\frac{-15+\sqrt{705}}{2}.$$

又由于每个阶段培训必须完成，x 只能取非负整数，所以最多可培训 5 个阶段.

练习

1. 解下列一元一次不等式：

(1) $3x+2<2(x+1)-4$；　　(2) $\dfrac{4x+5}{3}-2(x+2)\geqslant -5(x-1)$.

2. 解下列不等式：

(1) $(x+4)(x-3)>0$；　　(2) $(x+5)(4-x)<0$；

(3) $(6x+2)(2x+1)<0$；　　(4) $\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)(2x+3)\geqslant 0$.

3. 解下列关于 x 的不等式：

(1) $2x+3-x^2>0$；　　(2) $x(x+2)-1>x(3-x)$；

(3) $x^2-2\sqrt{3}x+3>0$；　　(4) $x^2+6(x+3)>3$.

4. 解不等式 $(m^2+1)x^2+mx-1<0$，其中 m 为常数.

5. 解不等式 $0<x^2-x-2<4$.

6. 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2-3x+2<0\}$，求 $\complement_U A$.

7. 若不等式 $ax^2-bx-6>0$ 的解是 $2<x<3$，求不等式 $x^2+ax+b+3<0$ 的解集.

习题 1－1

1. 用不等号填空：

(1) 如果 $a>b$，那么 $a-b$ ____ 0；

(2) 如果 $a<b$，那么 $-(2-4a)$ ____ $-(2-4b)$；

(3) 如果 $cx>b$，$ca^2<0$，那么 x ____ $\frac{b}{c}$.

2. 若 $a\neq b$，比较 a^2-ab 和 $ba-b^2$ 的大小.

3. 已知 $x\neq 0$，比较 $(x^2+2)^2$ 与 x^4+x^2+4 的大小.

4. 证明下面的结论：

(1) 如果 $a<b<0$，$c<d<0$，那么 $ac>bd$；

(2) 如果 $a>b$，$e>f$，$c>0$，那么 $f-ac<e-bc$；

(3) 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $\frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$；

(4) 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，$e>0$，那么 $\frac{e}{ac}<\frac{e}{bd}$.

5. 解不等式 $\sqrt{6-x^2}>\sqrt{x}$.

6. 解不等式 $2^{x^2+x-2}<1$.

7. 解不等式 $2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)>0$.

8. 求函数 $y=\sqrt{x+2}+\log_2(25-x^2)$ 的定义域.

9. 已知 $-1<x<y<0$，比较 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，x^2，y^2 的大小关系.

10. 设 x，y 为正数，比较 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 与 $\frac{1}{x+y}$ 的大小.

11. 判断下面各组两个不等式的解集是否相同：

(1) $(x-2)(x-1)^2>(2x-4)(x-1)^2$ 与 $x-2>2x-4$；

(2) $(x-2)(x-1)^2<(2x-4)(x-1)^2$ 与 $x-2<2x-4$；

(3) $\frac{x-3}{x-1}>0$ 与 $(x-3)(x-1)>0$；

(4) $\frac{x-3}{x-1}\geqslant 0$ 与 $(x-3)(x-1)\geqslant 0$；

(5) $(x-2)^2(x-1)(x-4)>0$ 与 $(x-1)(x-4)>0$；

(6) $(x-2)^2(x-1)(x-4)\geqslant 0$ 与 $(x-1)(x-4)\geqslant 0$.

12. 解不等式：

(1) $(x-1)^2(x-2)(x-3)<0$；　　(2) $(x-1)^2(x-2)(x-3)\geqslant 0$.

13*. 解不等式 $\sqrt{x^2-3x+2}<x+3$.

14*. 解不等式 $a^{3x^2-2x+1}>a^{2x^2-3x+3}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

15*. 解不等式 $\log_a(x^2-5x+6)<\log_a(2x-2)$，$0<a<1$.

16. 某高校教师向学校申请一个科研项目的资助基金，希望学校分五期投入资金资助项目，随着项目的深入，投入资金量应逐渐加大，具体计划为：第一期投入 3 万元，以后每期比前一期多投入 5 000 元，现学校批准在这个项目上只投入 11 万元的资金，问这些资金够资助几期的项目研究？

1.2 基本不等式

这一节我们把基本不等式写成定理的形式，并加以证明．为加深同学对基本不等式的理解，我们给出一些几何解释，直观地说明基本不等式的几何意义．

定理 1 设 a，$b\in\mathbf{R}$，则

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．

证明：由于

$$a^2+b^2\geqslant 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\geqslant 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geqslant 0.$$

上式中最后一个不等式对于一切 a，$b\in\mathbf{R}$ 成立，并且当且仅当 $a=b$ 时等号成立．

故原不等式成立．

对上面结论作简单的恒等变形，就可以得到另一个很有意义的不等式．

定理 2 如果 a，b 为正数，则

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．

证明：$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$

故上面不等式成立，并且当且仅当 $a=b$ 时等号成立．

定理 2 是我们证明许多不等式的出发点，故称之为**基本不等式或平均值不等式**．

我们称$\frac{a+b}{2}$为正数 a，b 的**算术平均值**，$\sqrt{ab}$为正数 a，b 的**几何平均值**．因而这一定理可用语言叙述为：**两个正数的算术平均值大于或等于它们的几何平均值**．

几何说明 1 设 $a\geqslant b>0$，分别以$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$为长、宽作矩形 $ABCD$，作$\angle A$ 的平分线交 CD 于 E，交 BC 的延长线于 F，则$\triangle ADE$ 和$\triangle ABF$ 都是等腰直角三角形．所以

$$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot BF=\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\frac{1}{2}a,$$

$$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot DE=\frac{1}{2}\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}=\frac{1}{2}b,$$

$$S_{ABCD}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$$

从图 1-4 中可看出 $S_{\triangle ABF}+S_{\triangle ADE}\geqslant S_{ABCD}$．

即 $\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$，且等号成立 $\Leftrightarrow$ F 和 C 重合 $\Leftrightarrow$ AB

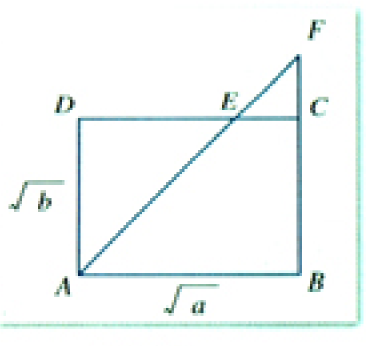


图 1-4

$=BC \Leftrightarrow$ 矩形 $ABCD$ 为正方形 $\Leftrightarrow a=b$.

几何说明 2　如图 1-5，以 $a+b$ 为直径作半圆，记其圆心为 O，端点分别记为 A，B，在直径 AB 上取点 C，使得 $AC=a$，过 C 作 AB 的垂线交圆 O 于 D，则

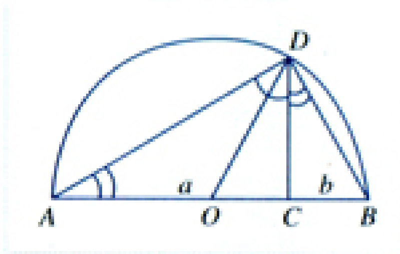


图 1-5

$$OD=\frac{1}{2}(a+b).$$

因为　$\angle A+\angle ADC=\angle BDC+\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，

所以　$\angle A=\angle BDC$，

所以　$\mathrm{Rt}\triangle ACD \backsim \mathrm{Rt}\triangle DCB$，

所以　$\frac{CD}{b}=\frac{a}{CD}$，

所以　$CD=\sqrt{ab}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODC$ 中斜边 $OD=\frac{1}{2}(a+b)\geqslant CD=\sqrt{ab}$，即

$$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立（C 点和圆心 O 重合）.

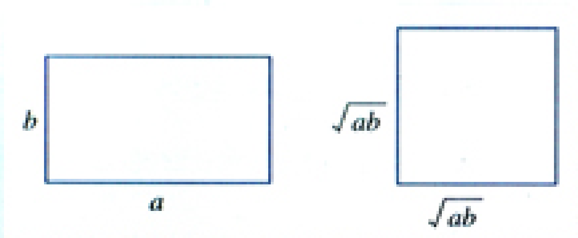


图 1-6

注　将 a，b 看成两条线段的长度，以它们为边长作一长方形，则其面积为 ab，和它等面积的正方形的边长为 $\sqrt{ab}$，这解释了“几何平均值”这一名词的来源.

阅读　作为平均值不等式的应用，让我们对下面问题作出猜测和证明. 考虑“在所有面积为 1 的矩形中，正方形有最小的周长”这个猜测. 显然一个单位面积的“瘦长”矩形比同样面积的“短胖”矩形有更大的周长，于是自然猜想正方形有最小的周长. 我们可以用基本不等式来证明这一猜测，设 a，b 为矩形的边长，其面积为 1，则 $ab=1$，故 $\sqrt{ab}=1$，于是得

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}=1.$$

当且仅当 $a=b$(为正方形)时等号成立，此时正方形的边长 $a=b=1$，周长为 4，当 $a\neq b$ 时，矩形的周长 $2(a+b)>4\sqrt{ab}=4$. 即面积为 1 的矩形中，正方形有最小的周长.

例　设 a，b，c 为正数，求证：

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc\ (\text{当且仅当 } a=b=c \text{ 时等号成立}).$$

证明：$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac]\geqslant 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0.$$

由于　$a+b+c>0$　且　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$，

因而$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0$成立，且当且仅当$a=b=c$时，等号成立.

所以原不等式成立，当且仅当$a=b=c$时等号成立.

定理 3　如果a，b，c为正数，则

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc},$$

当且仅当$a=b=c$时，等号成立.

证明：$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}.$$

由上例知，定理 3 成立.

我们称$\frac{a+b+c}{3}$为正数a，b，c的算术平均值，$\sqrt[3]{abc}$为正数a，b，c的几何平均值. 由定理 3 知，三个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值. 我们称定理 3 中的不等式为三个正数的**算术—几何平均值不等式**，或简称为**平均值不等式**.

对于n个正数，我们同样可以定义它们的算术平均值

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

和几何平均值

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

并且这n个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.

定理 4　（一般形式的算术—几何平均值不等式）如果a_1，a_2，…，a_n为n个正数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

并且当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时，等号成立.

关于这个定理的证明，感兴趣的同学可以参看第二章第三节的相关内容.

注：在定理 1～定理 4 的不等式中，在所讨论的实数、正数相等的条件下，等号成立. 如果在某些特定条件下，一个不等式转化为等式，那么我们称这个不等式是“精确”的. 这一类不等式在现代数学中非常重要，它们为解决某些有关优化的极值问题提供了理论基础. 恒等变形是证明这类不等式的一种常用方法.

习题 1-2

1. 已知 a，b，c 是不全相等的正数，求证：

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$；

(2) $a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.

2. 已知 x，y，z 为正数，求证：

(1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$；

(2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 3$.

3. 设 a，b，c 及 x，y，z 都是正数，求证：

$$\frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2\geqslant 2(xy+yz+zx).$$

4. 求证：$a^2+b^2\geqslant 2(a+b)-2$.

5. 求证：$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$.

6. 设 a，b 为正数，且 $a\neq b$，求证：$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$.

7. 设 a，b，c 为正数，求证：$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc$.

8. 已知 a，b，c 为实数，$a+b+c=1$，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$.

9. 用铁丝网围成面积为 3 600 m^2 的矩形场地，问至少要用多少米长的铁丝网？

10. 求证：给定圆的内接矩形中，正方形的面积最大.

11. 设 a，b，c 为互不相等的正数，求证：

$$a^4+b^4+c^4>a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>abc(a+b+c).$$

12. 已知 $a>0$，$b>0$，求证：

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}.$$

13. 求证：$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 2$.

14*. 设 a_1，a_2，a_3，a_4 为正数，求证：

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4},$$

并且当且仅当 $a_1=a_2=a_3=a_4$ 时，等号成立.

1.3 绝对值不等式的解法

在不等式的应用问题中经常涉及到距离、体积、重量等等，它们都是通过非负数来衡量的，因而研究带绝对值的不等式就显得尤为重要.

1.3.1 $|ax+b|\leqslant c$，$|ax+b|\geqslant c$ 型不等式的解法

设 x，a 为实数，$|x-a|$表示数轴上的点 x 与点 a 之间的距离. 特别地，$|x|$表示数轴上的点 x 与原点之间的距离. 于是

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0\\0, & x=0\\-x, & x<0\end{cases}$$

例 1 解不等式：

(1) $|x|<1$； (2) $|x|>3$.

解：(1) 由绝对值的几何意义知，不等式$|x|<1$的解集为数轴上的点到原点距离小于 1 的点的集合，在数轴上表示如图 1-7 所示.

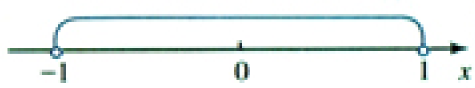


图 1-7

因而不等式$|x|<1$的解集是$\{x|-1<x<1\}$，即$(-1,1)$.

(2) 根据绝对值的几何意义，不等式$|x|>3$的解集为数轴上到原点的距离大于 3 的点的全体. 在数轴上表示如图 1-8 所示.

图 1-8

因而不等式$|x|>3$的解集是$\{x|x<-3$ 或 $x>3\}$，即$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

作类似的讨论可知：

(1) $a>0$，则$|x|\leqslant a$ 的解集为闭区间$[-a,a]$，

$|x|\geqslant a$ 的解集为$(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$.

(2) $a<0$，则$|x|\leqslant a$ 的解集为空集$\varnothing$，$|x|\geqslant a$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

例 2 解不等式：

(1) $|2x-3|\leqslant 1$； (2) $|-2x+1|>5$.

解：(1) 因为 $|2x-3|\leqslant 1 \Leftrightarrow -1\leqslant 2x-3\leqslant 1$

$$\Leftrightarrow 2\leqslant 2x\leqslant 4$$

$$\Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant 2,$$

所以原不等式的解集为$\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，即为$[1,2]$.

(2) $|-2x+1|>5 \Leftrightarrow |2x-1|>5 \Leftrightarrow 2x-1>5$ 或 $2x-1<-5$

$$\Leftrightarrow 2x>6 \quad 或 \quad 2x<-4$$

$$\Leftrightarrow x>3 \text{ 或 } x<-2,$$

所以原不等式的解集为$\{x|x>3$ 或 $x<-2\}$，即

$$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty).$$

练习

1. 下列各式是否对一切实数成立？如果不成立，举反例说明.

(1) $|-a|=a$；　(2) $\sqrt{(-a)^2}=-|a|$；

(3) $|b-a|=|a-b|$；　(4) $\sqrt{a^2}=|a|$.

2. 解下列不等式，并在数轴上表示它的解集：

(1) $|x|<4$；　(2) $|x|>5$；

(3) $2|x|\leqslant 8$；　(4) $5|x|>10$；

(5) $|3x|<6$；　(6) $|4x|>16$.

3. 解下列不等式：

(1) $|x+3|<7$；　(2) $|x+1|\geqslant 10$；

(3) $|2-x|\geqslant 1$；　(4) $\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{2}{3}$；

(5) $|3x-1|<5$；　(6) $\left|\frac{1}{2}x+1\right|\geqslant 3$.

4. 解下列不等式：

(1) $|x-1|\leqslant 0.04$；　(2) $|x+1|\leqslant 0.05$；

(3) $|5x-3|\geqslant 2$；　(4) $|3x+4|\geqslant 2$.

5. 解下列不等式：

(1) $|x|-2<1$；　(2) $2|x|+1>7$；

(3) $|1-2x|<5$；　(4) $|3-2x|>9$.

6. 解下列关于 x 的不等式：

(1) $|x-a|\leqslant b$ $(b>0)$；　(2) $|x-a|\geqslant b$ $(b>0)$；

(3) $|x-a|<|x-b|$ $(a\neq b)$.

1.3.2　$|x-a|+|x-b|\geqslant c$，$|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 型不等式的解法

例 1　解不等式$|x-1|+|x-2|>5$.

解法一　这是一个含有两个绝对值的不等式，为了使其转化为不含绝对值符号的不等式，需要分类讨论.

$|x-1|=0$，$|x-2|=0$ 的根 $x=1$ 及 $x=2$ 把实数轴分成三个区间，在这三个区间上，

根据绝对值的定义，代数式$|x-1|+|x-2|$有不同的解析表达式，因而原不等式的解集为以下三个不等式组解集的并集.

(1) 因为在$x\leqslant1$的限制下：$|x-1|+|x-2|=1-x+2-x=3-2x$，所以当$x\leqslant1$时，

$$|x-1|+|x-2|>5 \Leftrightarrow 3-2x>5 \Leftrightarrow 2x<-2 \Leftrightarrow x<-1.$$

因此不等式组$\begin{cases}x\leqslant1\\|x-1|+|x-2|>5\end{cases}$的解集为$(-\infty,\ -1)$.

(2) 因为在$1<x<2$的限制下：

$$|x-1|+|x-2|=x-1-x+2=1,$$

所以当$1<x<2$时，不等式$|x-1|+|x-2|>5$无解.

因此不等式组$\begin{cases}1<x<2\\|x-1|+|x-2|>5\end{cases}$的解集为$\varnothing$.

(3) 由于在$x\geqslant2$的限制下：$|x-1|+|x-2|=x-1+x-2=2x-3$，因此在$x\geqslant2$的限制下：$|x-1|+|x-2|>5 \Leftrightarrow 2x-3>5$

$$\Leftrightarrow 2x>8$$

$$\Leftrightarrow x>4.$$

所以不等式组$\begin{cases}x\geqslant2\\|x-1|+|x-2|>5\end{cases}$的解集为$(4,\ +\infty)$.

于是原不等式的解集为以上三个不等式组解集的并集

$$(-\infty,\ -1)\cup\varnothing\cup(4,\ +\infty)=(-\infty,\ -1)\cup(4,\ +\infty).$$

解这类含绝对值的不等式的一般步骤是：

(1) 令每个绝对值符号里的一次式为0，求出相应的根.

(2) 把这些根由小到大排序，它们把实数轴分为若干个区间.

(3) 在所分区间上，根据绝对值的定义去掉绝对值符号，讨论所得的不等式在这个区间上的解集.

(4) 这些解集的并集就是原不等式的解集.

从函数的观点考虑，用图象法.

解法二 $|x-1|+|x-2|>5 \Leftrightarrow |x-1|+|x-2|-5>0.$

构造函数：$f(x)=|x-1|+|x-2|-5.$

于是原不等式的解集为$\{x\,|\,f(x)>0\}$.

写出$f(x)$的分段解析表达式：

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\leqslant1\\-4, & 1<x<2\\2x-8, & x\geqslant2\end{cases}$$

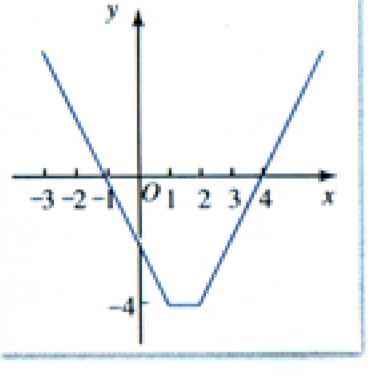


图 1-9

作出$f(x)$的图象（如图1-9）. $f(x)$为分段线性函数，其零点为-1，4.

于是$f(x)>0 \Leftrightarrow x<-1$或$x>4$.

所以原不等式的解集为$(-\infty,\ -1)\cup(4,\ +\infty)$.

例 2　解不等式 $|x+2|+|x-1|<4$.

解法一　$|x+2|=0$ 和 $|x-1|=0$ 的根 -2，1 把实数轴分为三个区间：

$$(-\infty,\ -2],\ (-2,\ 1),\ [1,\ +\infty).$$

在这三个区间上 $|x+2|+|x-1|$ 有不同的解析表达式，它们构成了三个不等式组.

(1) $x\leqslant -2$ 时，$|x+2|+|x-1|<4 \Leftrightarrow -2-x+1-x<4$

$$\Leftrightarrow -2x<5$$

$$\Leftrightarrow x>-\frac{5}{2},$$

所以不等式组 $\begin{cases} x\leqslant -2 \\ |x+2|+|x-1|<4 \end{cases}$ 的解集为 $\left(-\frac{5}{2},\ -2\right]$.

(2) $-2<x<1$ 时，$|x+2|+|x-1|<4 \Leftrightarrow x+2+1-x<4 \Leftrightarrow -2<0$,

所以不等式组 $\begin{cases} -2<x<1 \\ |x+2|+|x-1|<4 \end{cases}$ 的解集为 $(-2,\ 1)$.

(3) $x\geqslant 1$ 时，$|x+2|+|x-1|<4 \Leftrightarrow x+2+x-1<4$

$$\Leftrightarrow 2x<3$$

$$\Leftrightarrow x<\frac{3}{2},$$

所以不等式组 $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ |x+2|+|x-1|<4 \end{cases}$ 的解集为 $\left[1,\ \frac{3}{2}\right)$.

因此原不等式的解集为 $\left(-\frac{5}{2},\ -2\right]\cup(-2,\ 1)\cup\left[1,\ \frac{3}{2}\right)$

$$=\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right).$$

解法二　x 为不等式 $|x+2|+|x-1|<4$ 的解 $\Leftrightarrow$ x 是与数轴上的点 $A(-2)$ 及 $B(1)$ 两点距离之和小于 4 的点.

A，B 两点的距离为 3，因此线段 AB 上任何一点到 A，B 距离之和都等于 3，因此都是原不等式的解. 但我们需要找到原不等式解的全体，于是关键在于找到与 A，B 距离之和为 4 的点.

如图 1-10，我们将 B 向右移动 $\frac{1}{2}$ 个单位至点 $B_1\left(\frac{3}{2}\right)$，此时 B_1 与 A 及 B 距离之和增加 1 个单位，同理我们将 A 点向左移动 $\frac{1}{2}$ 个单位到 $A_1\left(-\frac{5}{2}\right)$，这时 A_1 与 A 及 B 距离之和也增加一个单位. 从数轴上可以看到 A_1 与 B_1 之间的任何点到 A，B 的距离之和均小于 4，而当 $x\leqslant -\frac{5}{2}$ 或 $x\geqslant \frac{3}{2}$ 时，x 与 A，B 两点的距离之和都不小于 4.

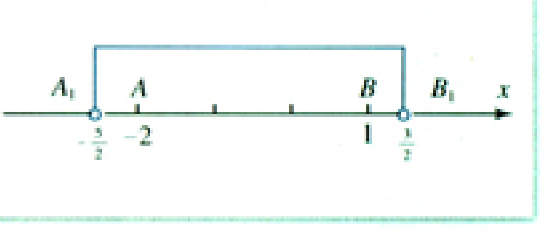


图 1-10

因而原不等式的解集为 $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$.

思考与讨论

你现在能对例 1 的解集作一个几何解释吗？能直接写出它的解集吗？

注：例 1、例 2 的解法体现了分类讨论、函数与方程结合、数形结合的思想.

分类讨论的关键是由 $|x-a|=0$，$|x-b|=0$ 的根把 $\mathbf{R}$ 分成若干小区间，在这些小区间上解去掉绝对值符号的不等式，这一解法具有普遍性.

几何解法的关键是理解绝对值的几何意义.

图象法的关键是构造函数，正确画出函数的图象，求出函数的零点.

分区间讨论的方法具有普遍性，但较麻烦，几何法和图象法直观，但只适用于数据较简单的情况. 以上三种方法各有千秋，都是我们应该熟练掌握的.

思考与讨论

如果你已经学过复数和解析几何，由例 2 的几何解法，你能解下面的不等式吗？

设 z 为复数，解不等式 $|z+2|+|z-1|<4$，并在复平面上画出其解集.

练习

1. 用分段讨论法、图象法解下列不等式：

(1) $|x+5|+|x+3|\leqslant 4$；　　(2) $|x-3|+|x-2|>6$.

2. 在 $[-3, 3]$ 上作下列函数的图象：

(1) $y=2|x+1|-|x-2|$；　　(2) $y=|x|+2|x-1|+2$.

3. 解下列不等式：

(1) $|x|+|x+2|<4$；　　(2) $|x+3|-|x-1|>5$.

4. 解不等式：

(1) $|x+3|+|x|<3$；　　(2) $|x+5|-|x-3|>10$.

5*. 在直角坐标系 xOy 中画出下列不等式解集的图象：

(1) $|x|-|y|\geqslant 1, -2\leqslant x\leqslant 2$；　　(2) $|x|+2|y|\leqslant 1$.

图象关于 x 轴对称吗？关于 y 轴呢？关于原点呢？

习题 1-3

1. 解不等式：

(1) $|4x+5|\geqslant 25$；　(2) $2|x-3|\geqslant 6$；

(3) $|3x-1|\leqslant 8$；　(4) $|4x-1|+2\leqslant 10$.

2. 在$[-2, 2]$上作函数 $y=2|x+1|+|x|+|x-1|$ 的图象，并解不等式

$$y=2|x+1|+|x|+|x-1|>5.$$

3. 下列函数定义在$[-3, 3]$上，作出它们的图象.

(1) $y=\frac{1}{2}(|x|-x)$；　(2) $y=\frac{1}{2}(x-|x|)$；

(3) $y=\frac{1}{2}(|x|+x)$；　(4) $y=-\frac{1}{2}(x+|x|)$.

4. 用分段讨论法、图象法解下列不等式：

(1) $|x-3|+|x+1|\leqslant 6$；

(2) $|x-2|+|x-4|>3$.

5. 解不等式：$|2x-1|+|3x+2|\geqslant 8$.

6. 证明：

$$\max\{x, y\}=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)；\ \min\{x, y\}=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

7. 设 a，b 为实数，证明：

(1) $|a|^2=a^2$；　(2) $|a+b|\leqslant|c+d|\Leftrightarrow(a+b)^2\leqslant(c+d)^2$.

8. 设 a，b 为实数，证明：

(1) $|ab|=|a||b|$；　(2) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$(如果 $b\neq 0$).

9. 解不等式：

(1) $\frac{1}{3}|4x-1|<5$；　(2) $|2x+5|>7$.

10. 解不等式 $3<|x-2|\leqslant 5$.

11. 已知不等式$|ax+1|<3$ 的解集为$\{x|-2<x<1\}$，求 a 的值.

12. 已知不等式 $|x+b|<3$ 的解集是$\{x|-4<x<2\}$，求 b 的值.

13. 设对于任意实数 x，不等式$|x+7|\geqslant m+2$ 恒成立，求实数 m 的范围.

14. 解不等式$|x+3|+|2x-1|\geqslant 7$.

15. 正整数 n 取什么值时，下面的不等式成立？

(1) $\left|\frac{2n}{2n+1}-1\right|<0.1$；　(2) $\left|\frac{2n}{2n+1}-1\right|<0.01$.

16. 解不等式$\left|\frac{x-3}{3x}-\frac{1}{3}\right|<0.001$.

1.4 绝对值的三角不等式

我们取两个符号相反的实数 3，-2，容易验证，它们和的绝对值比它们绝对值的和小，即 $|3+(-2)|=1<|3|+|-2|=5$；而取两个符号相同的实数 3，2，则它们和的绝对值等于它们绝对值的和，即 $|3+2|=|3|+|2|=5$. 那么对于任意两个实数是否有上述性质呢？

定理 1　若 a，b 为实数，则

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

当且仅当 $ab\geqslant 0$ 时，等号成立.

证明：利用不等式的基本性质 5、6，进行恒等变形

$$\begin{aligned}|a+b|\leqslant|a|+|b| &\Leftrightarrow |a+b|^2\leqslant(|a|+|b|)^2\\ &\Leftrightarrow (a+b)^2\leqslant|a|^2+2|a||b|+|b|^2\\ &\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\leqslant a^2+2|a||b|+b^2\\ &\Leftrightarrow ab\leqslant|a||b|\\ &\Leftrightarrow ab\leqslant|ab|.\end{aligned}$$

上面最后一个不等式成立，故原不等式成立. 由上面每一步都是恒等变形及 $ab=|ab|\Leftrightarrow ab\geqslant 0$ 可知，当且仅当 $ab\geqslant 0$ 时，等号成立.

几何说明　(1) 当 $ab>0$ 时，它们落在原点的同一边，此时 a 与 $-b$ 的距离等于它们到原点距离之和.

(2) 如果 $ab<0$，则 a，b 分别落在原点两边，a 与 $-b$ 的距离严格小于 a 与 b 到原点距离之和（图 1-11 为 $ab<0$，$a>0$，$b<0$ 的情况，$ab<0$ 的其他情况可作类似解释）.

$|a-b|$ 表示 $a-b$ 与原点的距离，也表示 a 到 b 之间的距离.

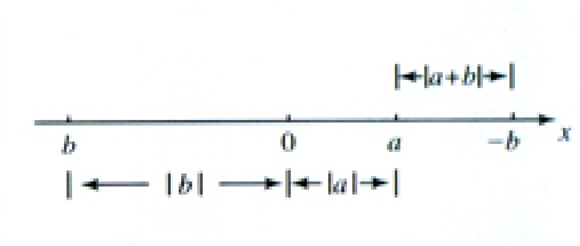


图 1-11

定理 2　设 a，b，c 为实数，则

$$|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|,$$

等号成立 $\Leftrightarrow (a-b)(b-c)\geqslant 0$，即 b 落在 a，c 之间.

证明：根据定理 1，

$$|a-c|=|(a-b)+(b-c)|\leqslant|a-b|+|b-c|,$$

且等号成立 $\Leftrightarrow (a-b)(b-c)\geqslant 0$，即 $(a-b)$ 与 $(b-c)$ 同号 $\Leftrightarrow b$ 落在 a，c 之间.

（图 1-12 说明了定理 2 中等号成立的情况.）

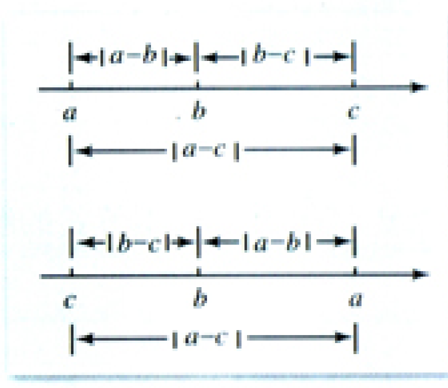


图 1-12

例 1　设 $\varepsilon>0$，$|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{4}$，$|y-a|<\dfrac{\varepsilon}{6}$，求证：

$$|2x+3y-2a-3b|<\varepsilon.$$

证明：$|2x+3y-2a-3b|=|2(x-a)+3(y-b)|$

$$\leqslant|2(x-a)|+|3(y-b)|$$
$$=2|x-a|+3|y-b|$$
$$<2\times\frac{\varepsilon}{4}+3\times\frac{\varepsilon}{6}$$
$$=\varepsilon.$$

例 2 设 $M,\varepsilon>0$，$|x-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|y-b|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|a|\leqslant M$，$|y|\leqslant M$，求证：

$$|xy-ab|<M\varepsilon.$$

证明：$|xy-ab|=|xy-ay+ay-ab|$

$$\leqslant|xy-ay|+|ay-ab|$$
$$=|y(x-a)|+|a(y-b)|$$
$$=|y||x-a|+|a||y-b|$$
$$<M\frac{\varepsilon}{2}+M\frac{\varepsilon}{2}$$
$$=M\varepsilon.$$

推论 1 $||a|-|b||\leqslant|a+b|$.

证明： 因为 $|a|=|(a+b)-b|$

$$\leqslant|a+b|+|-b|$$
$$=|a+b|+|b|,$$

所以 $|a|-|b|\leqslant|a+b|$.

同理可证 $|b|-|a|\leqslant|a+b|$.

所以 $||a|-|b||\leqslant|a+b|$.

推论 2 $||a|-|b||\leqslant|a-b|$.

证明： 由推论 1 知 $||a|-|-b||\leqslant|a+(-b)|$，

所以 $||a|-|-b||\leqslant|a-b|$.

例 3 已知实数 a，b，c 满足不等式 $|a-b|>c$，证明不等式 $|x-a|+|x-b|>c$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

证明：因为对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，由绝对值的三角不等式得

$$|x-a|+|x-b|=|x-a|+|b-x|$$
$$\geqslant|(x-a)+(b-x)|$$
$$=|a-b|>c,$$

所以 $\forall x\in\mathbf{R}$ 都是原不等式的解，即原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

习题 1-4

1. (1) 设 $\varepsilon>0$，$M>0$，已知 $|a|<\varepsilon$，$|b|<M$，求证：$|ab|<\varepsilon M$.

(2) 已知 $\varepsilon>0$，$M>0$，$|h|<M\varepsilon$，$|x|>M$，求证：$\left|\frac{h}{x}\right|<\varepsilon$.

2. 求证：$\left|a+\frac{1}{a}\right|\geqslant 2$ $(a\neq 0)$.

3. 已知 $|x_1-a|<\varepsilon$，$|x_2-a|<\varepsilon$，$|x_3-a|<\varepsilon$，求证：

(1) $\left|\frac{x_1+x_2}{2}-a\right|<\varepsilon$；　　(2) $\left|\frac{x_1+x_2+x_3}{3}-a\right|<\varepsilon$.

4. 设 x_1，x_2，x_3 为实数，求证：$|x_1+x_2+x_3|\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|$. 等号成立的充分必要条件是什么？

5. 求证：(1) $|x-a|+|x-b|\geqslant|a-b|$；(2) $|x-a|-|x-b|\leqslant|a-b|$.

6. 设 n 为正整数，解不等式 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0.001$.

7. 设 $|x-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|y-b|<\frac{\varepsilon}{2}$，求证：$|(x+y)-(a+b)|<\varepsilon$.

8. 设 $\varepsilon>0$，$x\leqslant t\leqslant y$，$|x-a|<\varepsilon$，$|y-a|<\varepsilon$，求证：$|t-a|<\varepsilon$.

9.* 寻求 $\delta>0$，使得当 $|x-a|<\delta$ 时，不等式 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$ 成立，其中 $x>0$，$a>0$，$\varepsilon>0$.

1.5 不等式证明的基本方法

我们在前面几节中已经用到了证明不等式的一些基本方法，现在作个小结.

1.5.1 比较法

因为 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$，所以要证 $a>b$，只需要证 $a-b>0$. 同样要证 $a<b$，只需证 $a-b<0$. 这是证明不等式中常常采用的一种方法，称为**比较法**.

例 1　比较 $(x+1)(x+2)$ 与 x 的大小.

解：$(x+1)(x+2)-x$

$=x^2+3x+2-x$

$=x^2+2x+2$

$=(x+1)^2+1>0$.

所以　$(x+1)(x+2)>x$.

例 2　已知：b，m_1，m_2 都是正数，$a<b$，$m_1<m_2$，求证：$\frac{a+m_1}{b+m_1}<\frac{a+m_2}{b+m_2}$.

证明：$\frac{a+m_1}{b+m_1}-\frac{a+m_2}{b+m_2}$

$$=\frac{(a+m_1)(b+m_2)-(a+m_2)(b+m_1)}{(b+m_1)(b+m_2)}$$

$$=\frac{am_2+bm_1-am_1-bm_2}{(b+m_1)(b+m_2)}$$

$$=\frac{(a-b)(m_2-m_1)}{(b+m_1)(b+m_2)}.$$

因为 $b>0$，m_1，$m_2>0$，

所以 $(b+m_1)(b+m_2)>0$.

又 $a<b$， 所以 $a-b<0$.

因为 $m_1<m_2$，

所以 $m_2-m_1>0$.

从而 $(a-b)(m_2-m_1)<0$.

于是 $\frac{(a-b)(m_2-m_1)}{(b+m_1)(b+m_2)}<0$.

所以 $\frac{a+m_1}{b+m_1}<\frac{a+m_2}{b+m_2}$.

从上面的结果知道，当变量 $x(x>0)$ 越大时，$\frac{a+x}{b+x}$ 的值也会越大．特别地，取 $a=0$，$b=1$，则可证明函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

在 $[0,+\infty)$ 上是增函数（请你自己来证明）．从这个结论出发，作为应用，我们来证明下面的例子．

例3 设 a，b 为实数，求证：

$$\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\geqslant\frac{|a+b|}{1+|a+b|}.$$

证明：因为函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

在 $[0,+\infty)$ 上是增函数．

又 $|a|+|b|\geqslant|a+b|$，

所以 $\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\geqslant\frac{|a+b|}{1+|a+b|}$.

注 利用函数的单调性也是证明不等式的一个重要方法．学过导数的同学会有更深的体会．

比较法是证明不等式的基本方法之一，其步骤是先求差，然后变形，最终通过比较作判断．整个过程的关键在于变形，在变形过程中会用到因式分解、配方、乘法公式等工具．

练习

1. 比较 $3x^2$ 和 $2x-1$ 的大小.
2. 比较 $(ac+bd)^2$ 和 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 的大小.
3. 用比较法证明：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.
4. 设 α，β 为锐角，比较 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的大小.
5. 已知 a，b 为正数，用比较法证明：$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}\geqslant a+b$.
6. 设 a，b，c 为不全相等的正数，用比较法证明：
$$2(a^3+b^3+c^3)>a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b).$$
7. 已知 $x+y+z=1$，用比较法证明：$x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

1.5.2 综合法和分析法

在证明不等式的时候，我们经常要从命题的已知条件出发，利用公理、已知的定义及定理，逐步推导，从而最后导出要证明的命题，这种方法称为**综合法**.

例 1 设 a、b、c 为不全等的三个正实数，求证：
$$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$$

证明：因为 a，b，c 不全等，即至少有两个不相等，不妨设$a\neq b$，于是
$$a+b>2\sqrt{ab},$$
$$b+c\geqslant2\sqrt{bc},$$
$$c+a\geqslant2\sqrt{ca},$$
所以 $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$.

例 2 已知 a，b，c 为正数，求证：

(1) $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant abc$；　　(2) $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

且当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

证明：将 (1) 中的 a，b，c 分别取为$\sqrt[3]{a}$，$\sqrt[3]{b}$，$\sqrt[3]{c}$，即得 (2). 所以只需证明 (1).

因为 $a=b=c$ 时，(1) 中等号成立，所以只需证 a，b，c 三个数至少有两个不相等时，有
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}>abc.$$

因为 a，b，c 地位“对称”（相同），所以不妨设 $a\neq b$. 于是
$$a^2+b^2>2ab,\qquad a^2-ab+b^2>ab.$$

由多项式乘法（或直接由立方和公式）知

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

再由 $a+b>0$ 及 $a^2-ab+b^2>ab$ 得

$$a^3+b^3>(a+b)ab=a^2b+ab^2. \quad ①$$

同理

$$b^3+c^3\geqslant(b+c)bc=b^2c+bc^2, \quad ②$$

$$c^3+a^3\geqslant(c+a)ca=c^2a+ca^2. \quad ③$$

将①②③相加得

$$\begin{aligned}2(a^3+b^3+c^3)&>a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\\&=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\\&>a(2bc)+b(2ac)+c(2ab)\\&=2abc+2abc+2abc\\&=6abc,\end{aligned}$$

所以　$a^3+b^3+c^3>3abc$.

例 3　已知 $a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=1$，求证：

$$ax+by+cz\leqslant1.$$

证明：因为　$a^2+x^2\geqslant2ax$，

$b^2+y^2\geqslant2by$，

$c^2+z^2\geqslant2cz$，

所以　$a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2\geqslant2(ax+by+cz)$.

考虑到 $a^2+b^2+c^2=1$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$，由上式即得

$$2\geqslant2(ax+by+cz),$$

即

$$ax+by+cz\leqslant1.$$

例 3 中的不等式是在 $a^2+b^2+c^2=1$ 和 $x^2+y^2+z^2=1$ 的条件下成立，故称为**条件不等式**. 在证明条件不等式时，要注意所给条件的应用.

例 3 证明过程中利用了基本不等式 $a^2+b^2\geqslant2ab$ 及本例的特别条件 $a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=1$.

我们不仅仅可以从已知条件出发去证明不等式，有时候也可以从需要证明的命题出发，分析使这个命题成立的充分条件，利用已知的一些定理，逐步探索，最后达到命题所给出的条件（或者一个已证明过的定理或一个明显的事实），这种证明方法称为**分析法**.

例 4　求证：$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

分析：由于比较法和综合法不太容易解决这类问题，故用分析法.

证明：

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}\\\Leftarrow\ &(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2\\\Leftarrow\ &9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}\\\Leftarrow\ &\sqrt{14}<\sqrt{18}\\\Leftarrow\ &14<18.\end{aligned}$$

最后一个不等式成立，故原不等式成立.

对于例 4 我们用综合法来证明，则应写为下面的形式：

证明：因为　$14<18$，

所以　$\sqrt{14}<\sqrt{18}$，

所以　$9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}$，

所以　$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$.

因为　$\sqrt{2}+\sqrt{7}>0$，$\sqrt{3}+\sqrt{6}>0$，

所以　$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

分析法和综合法也是证明不等式的两个基本方法，用综合法能证明的不等式，用分析法也可以证明．反过来，用分析法可以证明的不等式用综合法也可以证明．这里还要特别指出，对于比较复杂的问题，我们有时把分析法和综合法结合起来使用，也就是从已知条件出发，分析可得出什么结果，再由需要求证的结果，分析在什么条件（充分条件）下这些结果可以成立．这好比开挖隧道，你可以从两头的任何一头开挖，当然也可以从两头同时开挖，只要挖通就可以了．

练习

1. 用综合法证明：如果 a，b 为正数，则 $ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 4$.

2. 用综合法证明：如果 x 为实数，则 $\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$.

3. 用分析法证明：如果 a，b 为正数，且 $a\neq b$，则 $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$.

4. 用分析法证明：如果 a，b，c 为不全相等的正数，则

$$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c.$$

5. 用分析法或综合法证明：$-1\leqslant\frac{a^2-1}{a^2+1}<1$.

6. 求证：$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$.

7. 设 a，b，c 为正数，求证：

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geqslant abc.$$

8. 已知 $a>0$，$b>0$，求证：$a^5+b^5\geqslant a^3b^2+a^2b^3$.

1.5.3　反证法和放缩法

下面，我们换一种思考方式来证明命题．首先假设要证明的命题是不正确的，然后利用公理，已有的定义、定理，命题的条件逐步分析，得到和命题的条件（或已证明过的定理，或明显成立的事实）矛盾的结论，以此说明假设的结论不成立，从而原来结论是正确，这种方法称作**反证法**．

例 1　已知 $a \geqslant b > 0$，n 为正整数，且 $n \geqslant 2$，求证：$\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n]{b}$．

证明：假设 $\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n]{b}$ 不成立，于是必有

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}\\ \Rightarrow&(\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n\\ \Rightarrow&a < b.\end{aligned}$$

上式和已知条件矛盾，所以原不等式成立．

例 2　已知 $a+b+c>0$，$abc>0$，$ab+bc+ca>0$，求证：

$$a>0,\ b>0,\ c>0.$$

证明：用反证法．假设 $a>0$ 不成立，则 $a \leqslant 0$．分两种情况讨论：

（1）当 $a<0$ 时，因为　$abc>0$，所以　$bc<0$．

因为　$a+b+c>0$，

所以　$b+c>-a>0$，$a(b+c)<0$．

从而 $ab+bc+ca=a(b+c)+bc<0$，这与已知条件矛盾．

（2）当 $a=0$ 时，$abc=0$ 与 $abc>0$ 这一已知条件矛盾．

由上可知，“$a>0$ 不成立”的假设是错误的，因此 $a>0$ 成立．

同理可证 $b>0$，$c>0$．

说明　用反证法证明，就是从结论的反面出发，要求结论反面的情况只有有限多种．然后证明这种反面的结论都是不可能的，是与已知条件，已知事实，或已证过的定理相矛盾的．

例如上例中实数 a 的大小只有三种情况：$a>0$，$a=0$，$a<0$．要证明 $a>0$，只需否定 $a<0$ 和 $a=0$．

在证明不等式时，有时需要将所需证明的不等式的值适当放大（或缩小）使它由繁化简，达到证明目的，这种方法称为**放缩法**．其关键在于放大（缩小）要适当．如果所要证明的不等式中含有分式，那么我们把分母放大，则相应分式的值缩小；反之，如果把分母缩小，则分式的值放大．这是一种常用的放缩方式．

利用放缩法时，要依据需要适当放缩，不能过度．

例 3　已知 a，b，c，d 为正数，求证：

$$1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<2.$$

证明：设

$$m=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}.$$

因为 a，b，c，d 为正数，我们把四个分母都放大为 $a+b+c+d$（目的是使得分式的加法容易进行），使得 m 的值变小，从而

$$m>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}$$
$$=\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}=1.$$

另一方面，我们把前两项的分母缩小成 $a+b$（使前二项分母为同一值，便于相加），后二项的分母缩小成 $c+d$，则 m 的值被放大．故

$$m<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}=2.$$

放缩法有时对于证明有关对数的不等式是非常方便的．

例 4 求证：$\log_2 3>\log_3 4$.

证明：因为 $\log_2 3=\log_8 27>\log_9 27$，

又 $\log_3 4=\log_9 16$，

$\log_9 27>\log_9 16$，

所以 $\log_2 3=\log_8 27>\log_9 27>\log_9 16=\log_3 4$，

即 $\log_2 3>\log_3 4$.

最后，几何学的应用也是证明不等式的一个重要途径．我们通过下面的例子说明这种方法．

例 5 设 x 表示弧度，则

$$0<\sin x<x<\tan x,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

证明：在直角坐标系 xOy 中，作单位圆⊙O，将角 x 的始边置于 x 轴上，设角 x 的始边交⊙O 于 A 点．角 x 的终边交⊙O 于 B 点．过 A 作 x 轴的垂线交 OB 的延长线于 C（图 1-13）．因为

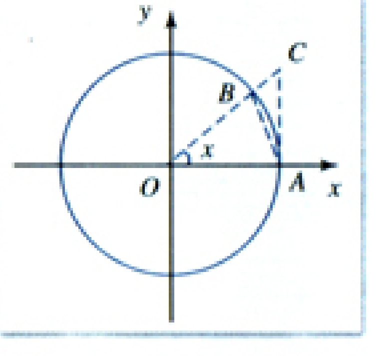


图 1-13

$0<\triangle OAB$ 的面积$<$扇形 OAB 面积$<\triangle OAC$ 面积，

所以 $0<\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$，

即 $0<\sin x<x<\tan x$.

例 6 证明：$|\sin x|\leqslant|x|$ 对于一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立．

证明：由上例，并考虑到 $x=0$ 时 $\sin x=0$，

（1）当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 时，得

$$|\sin x|=\sin x\leqslant x=|x|.$$

（2）当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ 时，$-x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，由（1）及 $\sin(-x)=-\sin x$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 成立，得

$$|\sin x|=|-\sin x|=|\sin(-x)|\leqslant|-x|=|x|,\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right).$$

(3) 当$|x|\geqslant\frac{\pi}{2}$时，有

$$|\sin x|\leqslant 1<\frac{\pi}{2}\leqslant|x|.$$

于是我们证明了不等式

$$|\sin x|\leqslant|x|$$

对于一切$x\in\mathbf{R}$成立.

练习

1. 用反证法证明：如果a，b为正数，则$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.
2. 用反证法证明：如果a，b，c，d为实数，$a+b=1$，$c+d=1$，且$ac+bd>1$，则a，b，c，d中至少有一个负数.
3. 用放缩法证明：$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.
4. 用放缩法证明：
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n},\ n=2,3,4,\cdots.$$
5. 设x，y为正数，且$x+y=1$，用反证法证明$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\geqslant 9$.
6. 求证：$\frac{1}{1+|a|}+\frac{1}{1+|b|}\leqslant 1+\frac{1}{1+|a+b|}$.

习题 1－5

1. 设$a\neq b$，比较下列各式大小：
   (1) $a^2(a+1)+b^2(b+1)$与$a(a^2+b)+b(b^2+a)$；
   (2) $(a^4+b^4)(a^2+b^2)$与$(a^3+b^3)^2$.
2. 设$a>b>0$，比较$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$与$\frac{a-b}{a+b}$的大小.
3. 已知a，b，c为不全相等的正数，求证：
$$(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)>16abc.$$
4. 已知a，b，c为不全相等的正数，求证：
$$2(a^3+b^3+c^3)>a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b).$$
5. 已知直角三角形两条直角边的和为10 cm，求面积最大时斜边的长，最大面积是

多少？

6. 已知 $a>b>0$，求证：$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$.

7. 求证：$\sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{10}$.

8. 已知 $a>b>c$，求证：

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0.$$

9. 若 $a>0>b$，$0>c>d$，则下面不等式中成立的是（　　）.

(A) $a+c<b+d$　　(B) $a-d<b-c$

(C) $ac<bd$　　(D) $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

10. 已知 $a=2-\sqrt{5}$，$b=\sqrt{5}-2$，$c=5-2\sqrt{5}$，那么（　　）成立.

(A) $a<b<c$　　(B) $a<c<b$

(C) $b<a<c$　　(D) $c<a<b$

11. 已知 $a<0$，$-1<b<0$，那么（　　）.

(A) $a>ab>ab^2$　　(B) $ab^2>ab>a$

(C) $ab>a>ab^2$　　(D) $ab>ab^2>a$

12. 已知 $x_1x_2\cdots x_n=1$，且 x_1，x_2，…，x_n 都是正数，求证：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 2^n.$$

13. 已知 a，b，c 为 $\triangle ABC$ 的三条边，求证：$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

14. 若 $a>0$，$b>0$，求证：$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

15. 已知 $0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

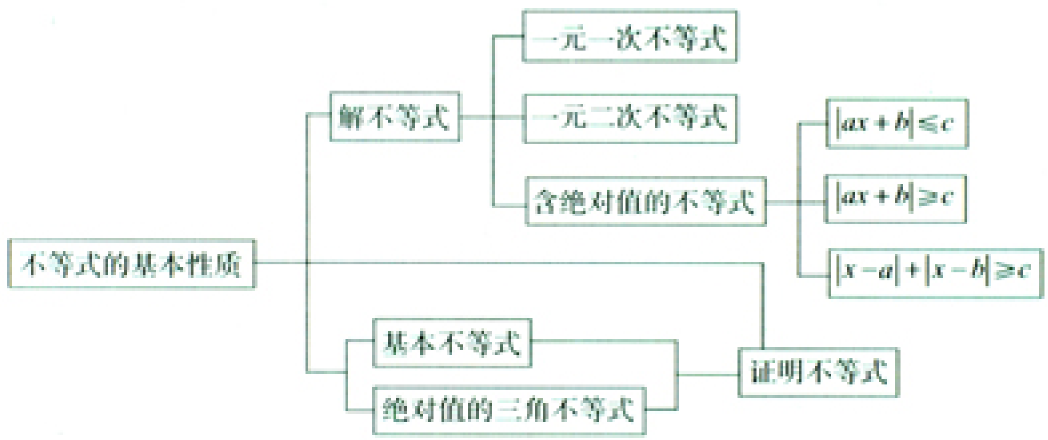
16*. 已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，求证：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$.

17. 下面每题的结论中，有几个是正确的？

(1) $a<b<0 \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\\ |a|>|b|\\ a^2>b^2\\ \sqrt{-a}<\sqrt{-b}\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}a>b\\ c>d\\ cd\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a-c>b-d\\ \frac{a}{c}>\frac{b}{d}\\ c-b>d-a\\ ac>bd\end{cases}$

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 写出基本不等式，给出一个在实际问题中应用基本不等式的例子.

2. 写出绝对值的三角不等式，说明它的几何意义.

3. 证明不等式的主要方法有几种？用每一种方法证明一个习题.

Ⅲ 巩固与提高

1. 比较$(x-1)(x^2+x+1)$和$(x+1)(x^2-x+1)$的大小.

2. 判断下面不等式的解集是否相同：

(1) $x>4$ 与 $x+\dfrac{1}{x^2-x-2}>4+\dfrac{1}{x^2-x-2}$；

(2) $x<4$ 与 $x+\dfrac{1}{x^2-x-2}<4+\dfrac{1}{x^2-x-2}$；

(3) $x>2$ 与 $x+\sqrt{x-3}>2+\sqrt{x-3}$；

(4) $x>2$ 与 $x+\sqrt{x-1}>2+\sqrt{x-1}$.

3. 判断下列不等式的解集是否相同：

(1) $\dfrac{x-1}{x+2}>0$ 与 $(x-1)(x+2)>0$；

(2) $\dfrac{x-1}{x+2}\geqslant 0$ 与 $(x-1)(x+2)\geqslant 0$；

(3) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1}>0$ 与 $x-2>0$；

(4) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1}<0$ 与 $x-2<0$.

4. 设关于 x 的不等式 $|x-4|+|x+5|<a$ 的解集不空，求 a 的取值范围.

5. 解不等式：$|x-1|<|x-4|$.

6. 解不等式：$|3x+3|+|x-2|>4$.

7. 求证：当 n 为正整数时，$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

8. 求证：$2<\sqrt{\log_3 2}+\sqrt{\log_2 3}<\sqrt{5}$.

9. 若 $a>0$，$b>0$，$2c>a+b$，求证：$c^2>ab$.

10. 设 a，b，c 为正数，求证：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{9}{a+b+c}$.

11*. 解不等式：$\left|\dfrac{x^2-2}{x}\right|>1$.

12. 已知 $a>0$，$b>0$，解不等式：$-b<\dfrac{1}{x}<a$.

13. 设 $x>y>0$ 且 $xy=2$，求证：$\dfrac{x^2+y^2}{x-y}\geqslant 4$.

14. 设 a，b，c 为不全相等正数，求证：

$$a^4+b^4+c^4>a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>abc(a+b+c).$$

15. 设 a，b，c 为正数，求证：$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc$.

16. 求证：$a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$.

17. 设 a，b，c 为正数，且满足条件 $a+b+c=1$. 求证：

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8.$$

18*. 已知 a，b，c 为三角形的三条边，求证：$\dfrac{a}{1+a}$，$\dfrac{b}{1+b}$，$\dfrac{c}{1+c}$ 也可以构成一个三角形.

19*. 求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

你能给出上面不等式的一个几何解释吗？等号成立的充分必要条件是什么？

20*. 解不等式：$|3|x-1|-2|<1$.

IV 自测与评估

1. 判断下列命题是否正确，并说明理由.

(1) 如果 $a<b$，$c=d$，那么 $ac<bd$；

(2) 如果 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$，那么 $a<b$；

(3) 如果 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$，那么 $a<b$；

(4) 如果 $a>b$，$c>d$，那么 $ac>bd$；

(5) 如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a-c>b-d$.

2. 解不等式：

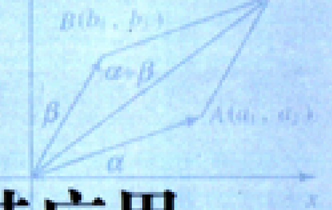
(1) $|2x+1|<3$； (2) $|3x+1|>9$.

3. 解不等式：$|x-2|+|x-4|>6$.

4. 已知 $|x-a|<b$ 的解集为 $\{x \mid -1<x<5\}$，求 a，b 的值.

5. 当 $a+b+c=1$ 时，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$.

6. 设 a，b 为正数，且 $a+b=1$，求证：$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 2\sqrt{2}$.



第二章 柯西不等式与排序不等式及其应用

2.1 柯西不等式

2.1.1 平面上的柯西不等式的代数和向量形式

从不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 出发，我们可以得到一个非常优美的不等式——柯西不等式．各种形式的柯西不等式是许多现代数学理论的出发点，在数学的很多分支中有着广泛的应用．我们先从最简单的情况开始．

定理 1 （柯西不等式的代数形式）设 a_1，a_2，b_1，b_2 均为实数，则

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2,$$

上式等号成立 $\Leftrightarrow a_1b_2=a_2b_1$.

证明：

$$\begin{aligned}
&(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ &a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-a_1^2b_1^2-a_2^2b_2^2\\
&-2a_1b_1a_2b_2\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ &a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ &(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant 0,
\end{aligned}$$

上式中等号成立 $\Leftrightarrow a_1b_2=a_2b_1$.

> 你能说明不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的几何意义吗？

看来证明这一结果并不困难，问题在于人们是如何发现这个结果的，只有了解了这一点，才能理解它的深刻含意，才有可能把它推广和深化．而要对一个代数结果作简单的解释，往往需要借助于几何背景．柯西不等式有非常直观的几何背景．为了解释这一点，让我们回顾一下数学 4 第二章中已学过的平面向量的有关知识．

在平面直角坐标系中，我们用有序实数对(a_1, a_2)来表示平面上的一个点，同时这个点也唯一地确定了一个以原点为起点，以(a_1, a_2)为终点的向量，于是在这样的规定下，我们建立了平面直角坐标系中的点和向量的一一对应，并且我们还在数学 4 中证明了在这样的对应下，平面上向量的加法和数乘的几何法则（加法为三角形法则）等价于相应的坐标分量的加法和数乘的代数运算，这种对应就好比在代数和几何之间架起了一座桥梁，沟通了它们之间的联系，于是我们可以用几何背景来解释一些代数问题了．

回到平面的柯西不等式上来，设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为平面上的两个向量，它们的起点都在原点，终点坐标分别为(a_1, a_2)，(b_1, b_2)，记

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2),$$
$$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2).$$

设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为两个非零向量，它们之间的夹角记为$\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$，并规定

$$0 \leqslant \langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle \leqslant \pi,$$

称$|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$为 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的数量积（内积），记作 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle.$$

其中$|\boldsymbol{\alpha}|$，$|\boldsymbol{\beta}|$分别表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的长度．在数学 4 第二章我们证明了

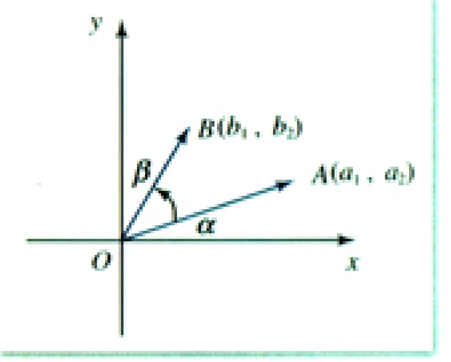


图 2-1

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2,$$

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2},$$

$$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}=\sqrt{b_1^2+b_2^2},$$

于是
$$\cos\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}},$$

$$\cos^2\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle=\frac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}\leqslant 1,$$

即
$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2,$$

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2|.$$

上式等号成立 $\Leftrightarrow \cos^2\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle=1 \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle=0$ 或 $\pi \Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 共线 $\Leftrightarrow O$，A，B 三点共线．于是我们得：

定理 2　（柯西不等式的向量形式）设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为平面上的两个向量，则

$$|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 及 $\boldsymbol{\beta}$ 为非零向量时，上式中等号成立 $\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 共线（平行）$\Leftrightarrow$ 存在实数 $\lambda\neq 0$，使得$\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$．

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\beta}$ 为零向量时，规定零向量和任何向量平行，如 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个是零向量，则规定$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$，上面的结果仍然正确．

注：在定理 2 中令 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2)$，则$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$，$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$，$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2$，于是得

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2|,$$

上式成立的充要条件是

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2.$$

注意到非零向量 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$ 的充分必要条件是存在实数 λ，使得$\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$，因此当$b_1b_2\neq 0$时，$\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$，所以不等式

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2$$

中等号成立 $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$．于是我们证明了定理 1 和定理 2 等价，因此它们可以看成是柯西不等式的两种不同形式：代数形式和向量形式．

下面我们研究柯西不等式的另一种形式——三角不等式．

记平面上非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2),\quad |\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2},$$

$$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2},\quad |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}.$$

如图 2-2 所示，向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 的端点分别为 A，B，C，则由向量加法的三角形法则知：

$$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{OA}|=|\boldsymbol{\alpha}|.$$

于是在△OBC 中，由三角形两边之和不小于第三边知

$$|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{BC}|\geqslant|\overrightarrow{OC}|,$$

即
$$|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|.$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为零 $\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 同向 $\Leftrightarrow$ 存在正实数 λ，使得$\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$.

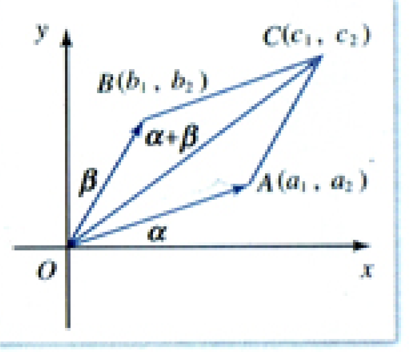


图 2-2

定理 3 设 a_1，a_2，b_1，b_2 为实数，则

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geqslant\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2},$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ 存在非负实数 μ 及 λ，使得 $\mu a_1=\lambda b_1$，$\mu a_2=\lambda b_2$.

证明：当 $a_1^2+a_2^2\neq0$，且 $b_1^2+b_2^2\neq0$，即 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 不是零向量时，上面已给出了几何的证明．当 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个为零向量，即$a_1^2+a_2^2=0$或 $b_1^2+b_2^2=0$ 时，上面的不等式中显然有等号成立；反之，如果等号成立，且 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个为零向量，则显然满足存在非负实数 μ 及 λ，使得：$\mu a_1=\lambda b_1$，$\mu a_2=\lambda b_2$.

注：在定理 3 中令 $a_2=b_2=0$，则得

$$\sqrt{a_1^2}+\sqrt{b_1^2}\geqslant\sqrt{(a_1+b_1)^2},$$

即$|a_1|+|b_1|\geqslant|a_1+b_1|$.

上式等号成立 $\Leftrightarrow$ 存在非负实数 λ 及 μ 使得 $\mu a_1=\lambda b_1$ $\Leftrightarrow$ $a_1b_1\geqslant0$．这就是直线上的关于绝对值的三角不等式.

如果以 a_1-b_1，a_2-b_2，b_1-c_1，b_2-c_2 分别代替定理 3 中的 a_1，a_2，b_1，b_2，则得：

定理 4 （平面三角不等式）设 a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2 为实数，则

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}+\sqrt{(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2}\geqslant\sqrt{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2},$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ 存在非负实数 λ 及 μ 使得

$$\mu(a_1-b_1)=\lambda(b_1-c_1),\ \mu(a_2-b_2)=\lambda(b_2-c_2).$$

几何说明：定理 4 中的不等式成立 $\Leftrightarrow|AB|+|BC|\geqslant|AC|$.

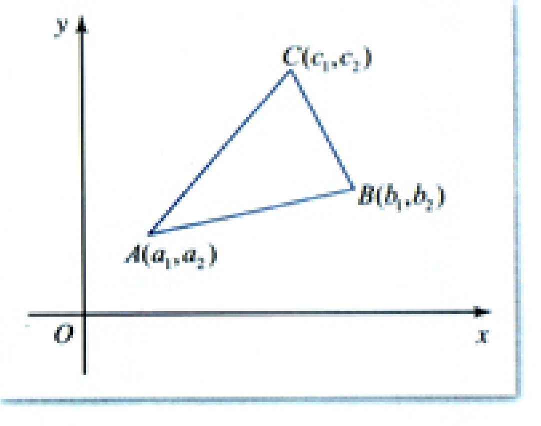


图 2-3

定理 5 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 为平面向量，则

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$ 为非零向量时，上面不等式中等号成立 $\Leftrightarrow$ 存在正常数 λ，使得$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\lambda(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$ $\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$ 同向，即夹角为零.

证明：记 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2)$，$\boldsymbol{\gamma}=(c_1, c_2)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(a_1-b_1, a_2-b_2),$$

$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}=(b_1-c_1, b_2-c_2),$$

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}=(a_1-c_1, a_2-c_2),$$

且

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2},$$

$$|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|=\sqrt{(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2},$$

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|=\sqrt{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2}.$$

则由定理 4，或者由图 2-3 立即得

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|\geqslant|\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}|,$$

且等号成立 $\Leftrightarrow$ 存在正常数 λ，使得 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\lambda(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$.

练习

1. 已知 $3x^2+2y^2\leqslant 6$，求证：$2x+y\leqslant\sqrt{11}$.
2. 类似本节定理 1，写出空间直角坐标系中柯西不等式的代数形式.
3. 类似本节定理 2，写出空间直角坐标系中柯西不等式的向量形式.
4. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, b_3)$，$\boldsymbol{\gamma}=(c_1, c_2, c_3)$，

   (1) 类似定理 4，写出空间代数形式的三角不等式；

   (2) 类似定理 5，写出空间向量形式的三角不等式.

2.1.2 柯西不等式的一般形式及其参数配方法的证明

下面给出柯西不等式的一般形式：

定理 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为实数，则

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|,$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$（当某 $b_j=0$ 时，认为 $a_j=0$，$j=1, 2, \cdots, n$）.

证明：若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，则不等式显然成立，故设 $a_1, \cdots, a_n$ 至少有一个不是零，则

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0.$$

考虑二次三项式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

$$=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2\geqslant 0.$$

对于一切实数 x 成立，设上面二次三项式的判别式为 Δ，则

$$\frac{\Delta}{4}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant 0.$$

所以 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$.

所以 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$.

上式等号成立 $\Leftrightarrow a_ix+b_i=0$. 如 $b_i=0$，则 $a_i=0$，$i=1$，2，…，n. 故不妨设一切 $b_i\neq 0$，$i=1$，2，…，n. 于是定理中等号成立 $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

上面的证明方法称为**参数配方法**.

下面给出柯西不等式的几个应用.

例 1 用柯西不等式证明：

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da.$$

证明：取两组数

$$a,\ b,\ c,\ d;$$
$$b,\ c,\ d,\ a,$$

则由柯西不等式有

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2+c^2+d^2+a^2)\geqslant(ab+bc+cd+da)^2,$$

即

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\geqslant(ab+bc+cd+da)^2.$$

因为 $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 0$，

所以 $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$.

例 2 设 a，b，c 为正数，且 $a+b+c=1$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$$

证明：构造两组数 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$；$\frac{1}{\sqrt{a}}$，$\frac{1}{\sqrt{b}}$，$\frac{1}{\sqrt{c}}$，于是由柯西不等式有

$$\left[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right]\geqslant\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2,$$

即 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 3^2$.

因为 $a+b+c=1$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

练习

1. 已知正数 a，b，c，求证：$\dfrac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc$.

2. 已知 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1$.

3. 已知 a，b，c 为正数，求证：$\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\geqslant 9$.

4. 设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为实数，求证：$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leqslant n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$.

5. 用柯西不等式证明：如果 x，y，z 为正数，$x+y+z=1$，则 $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

6. 设 a，b，c，d 为不全相等的正数，求证：

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}>\frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

习题 2-1

1. 设 a，b，c 为正数，且不全相等，求证：

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}>\frac{9}{a+b+c}.$$

2. 已知 $a^2+b^2=1$，求证：$|a\cos\theta+b\sin\theta|\leqslant 1$.

3. 设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为正数，求证：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2.$$

4. 已知 a，b 为正数，$a+b=1$，t_1，t_2 为正数，求证：$(at_1+bt_2)(bt_1+at_2)\geqslant t_1t_2$.

5. 设 a，b，c，d 为正数，$a+b+c+d=1$，求证：$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant\dfrac{1}{4}$.

6. 设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为实数，运用柯西不等式证明：

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}.$$

7. 设 a，b，c 为正数，求证：

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c.$$

8. 已知 a，b，c，d 为不全相等的正数，求证：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}>\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}.$$

9. 设 a_1，a_2，…，a_n 为实数，b_1，b_2，…，b_n 为正数，求证：

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

10*. 设 $a_1>a_2>\cdots>a_n>a_{n+1}$，求证：

$$(a_1-a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\frac{1}{a_3-a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n-a_{n+1}}\right)\geqslant n^2.$$

11*. 利用柯西不等式解方程：$2\sqrt{1-2x}+\sqrt{4x+3}=\sqrt{15}$.

12. 设 a，b，c，d 为实数，求证：$(a^3+b^3+c^3+d^3)\leqslant 4(a^6+b^6+c^6+d^6)$.

13*. 设 a_1，a_2，a_3 为正数，求证：

$$\sqrt{a_1^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^3}+\sqrt{a_2^3+a_2^2a_3+a_2a_3^2+a_3^3}+\sqrt{a_3^3+a_3^2a_1+a_3a_1^2+a_1^3}$$
$$\geqslant 2(\sqrt{a_1^3}+\sqrt{a_2^3}+\sqrt{a_3^3}).$$

14. 设 a，b，c 为正数，求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

15. 已知 a，b，c 为正数，求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

16. 若 a，b，c 为实数，且 $a^2+b^2+c^2=1$，求证：$-\frac{1}{2}\leqslant ab+bc+ca\leqslant 1$.

17. 已知 x_1，x_2，x_3，x_4 为实数，且 $x_1+x_2+x_3+x_4=6$，$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=12$，求证：$0\leqslant x_i\leqslant 3$，$i=1$，2，3，4.

2.2 排序不等式

一方面，一些非常重要的不等式，例如平均值不等式（算术—几何平均值不等式，算术—调和平均值不等式）是排序不等式的直接推论，因此排序不等式有非常深刻的理论意义，另一方面排序不等式也有广泛的实际背景.

我们先看一个实际问题. 某班学生要开联欢会，需要买价格不同的礼品 4 件、5 件及 2 件，现在选择商店中单价为 3 元、2 元和 1 元的礼品，问至少要花多少钱？最多要花多少钱？

这个问题不难回答，因为根据生活的实际经验，如果最贵（单价 3 元）的礼品买最少的件数，最便宜（单价 1 元）的礼品买最多的件数，应是花钱最少的，于是我们猜想至少

要花

$$1\times5+2\times4+3\times2=19\text{（元）}.$$

反之，如果单价（3 元）最高的礼品买最多的件数（5 件），单价最低（1 元）的礼品买最少的件数（2 件），于是最多需花

$$1\times2+2\times4+3\times5=25\text{（元）}.$$

为了证实我们的想法，我们将问题化归成数学模型．设有两组从小到大排列的数

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3,\quad b_1\leqslant b_2\leqslant b_3,$$

其中 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，

$b_1=2$，$b_2=4$，$b_3=5$.

设 c_1，c_2，c_3 是 b_1，b_2，b_3 的任一个排列，作和 $a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3$.

则最多可以得到 6 个不同的和数，我们猜测在这至多 6 个不同的数中

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ （称为顺序积之和）最大，

$a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$ （称为反序积之和）最小.

因为计算量不大，我们来实际计算一下，为方便起见，我们记

$$a=(a_1,\ a_2,\ a_3),\qquad c=(c_1,\ c_2,\ c_3).$$

(1) $c=(2,\ 4,\ 5)=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 时，

$a\cdot c=1\times2+2\times4+3\times5=25$（顺序积之和简称顺序和）；

$$\left.\begin{array}{l}(2)\ c=(2,5,4)\text{时，}a\cdot c=1\times2+2\times5+3\times4=24;\\(3)\ c=(4,2,5)\text{时，}a\cdot c=1\times4+2\times2+3\times5=23;\\(4)\ c=(4,5,2)\text{时，}a\cdot c=1\times4+2\times5+3\times2=20;\\(5)\ c=(5,2,4)\text{时，}a\cdot c=1\times5+2\times2+3\times4=21;\end{array}\right\}\text{（乱序积之和简称乱序和）}$$

(6) $c=(5,4,2)$时，$a\cdot c=1\times5+2\times4+3\times2=19$.（反序积之和简称反序和）

经计算，证实了我们的猜想，即：

$$a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1\leqslant a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\leqslant a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

（反序和≤乱序和≤顺序和）.

这是不是一个普遍规律呢？这次我们再考虑两组数

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_5,\qquad b_1\leqslant b_2\leqslant b_3\leqslant b_4\leqslant b_5,$$

$a_1=2$，$a_2=7$，$a_3=8$，$a_4=9$，$a_5=12$，$b_1=3$，$b_2=4$，$b_3=6$，$b_4=10$，$b_5=11$.

试一试：将 b 的各个分量重新排列记为 c_1，c_2，c_3，c_4，c_5，计算 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_5c_5$，至多可以得到 $5!=120$ 个不同的数.

用计算机编写程序计算，看一下是否

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5=304$ （顺序和）最大；

$a_1b_5+a_2b_4+a_3b_3+a_4b_2+a_5b_1=212$ （反序和）最小.

想想看，在什么条件下，顺序和与反序和相等呢？

思考与讨论

从特殊到一般的方法称为归纳法．通过观察、实验等方法经过由表及里，去伪存真的概括，总结抓住事物本质，最后抽象出定理和公式．这是我们研究数学的一种重要思想．同学们能把刚才的结果归纳成一般的定理吗？你能用正确、清晰的语言叙述你的猜测吗？你能证明你的猜测吗？

我们将问题抽象化，归结为下面的定义和定理．

定义 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 为两组实数，c_1，c_2，$\cdots$，c_n 为 b_1，b_2，$\cdots$，b_n的任一排列，称

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为这两个实数组的顺序积之和（简称顺序和），称

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

为这两个实数组的反序积之和（简称反序和）．称

$$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$$

为这两个实数组的乱序积之和（简称乱序和）．

定理 （排序原理，又称为排序不等式） 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 为两组实数，c_1，c_2，$\cdots$，c_n为 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 的任一排列，则有

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leqslant a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

等号成立（反序和等于顺序和）$\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$．

排序原理可简记作：反序和≤乱序和≤顺序和．

注：如果我们将 a_1，a_2，$\cdots$，$a_n(a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n)$ 解释为一个杠杆从支点到它上面放有质量为 c_1，c_2，$\cdots$，c_n 质点的距离，要想获得最大的力矩，就应当把质量最大的物体放在离支点最远的位置上，即当 $c_1=b_1$，$c_2=b_2$，$\cdots$，$c_n=b_n$ 时，静力矩最大．

证明：(1) 首先因为 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 的排列只有 $n!$ 个，所以和数 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$中不同的数也只有有限个，其中必有最大值和最小值．

设 $i<j$，$c_i\leqslant c_j$，考虑两个和

$$s_1=a_1c_1+\cdots+a_ic_i+\cdots+a_jc_j+\cdots+a_nc_n,$$

$$s_2=a_1c_1+\cdots+a_ic_j+\cdots+a_jc_i+\cdots+a_nc_n,$$

其中 s_2 是由调换 s_1 中的 c_i 与 c_j 的位置而得，用比较法比较 s_1 和 s_2 的大小．

$$\begin{aligned}s_1-s_2&=a_ic_i+a_jc_j-a_ic_j-a_jc_i\\&=(c_i-c_j)(a_i-a_j)\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $s_2\leqslant s_1$．

由此可见，一切和数中，最大和数所对应的情况只能是数组$\{c_i\}$由小到大排序的情况，即最大和数是顺序和，不符合如此顺序的$\{c_i\}$只要经过有限次调整顺序即可达到最大值．（而最小和数只能是$\{c_i\}$由大到小的排列，即最小和数是反序和．）

(2) 再证等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$. 如果 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$，不妨设

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=A,$$

则 $s=a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n=A(c_1+c_2+\cdots+c_n)$

$=A(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

对于 b_1，b_2，…，b_n 的任意一个排列 c_1，c_2，…，c_n 成立，所以

$$\begin{aligned}&a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\\=&a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\\=&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\end{aligned}$$

对任何一个 b_1，b_2，…，b_n 的排列成立. 反之，如果 a_1，a_2，…，a_n 不全相等，b_1，b_2，…，b_n 也不全相等，则不妨设 $a_1<a_2$，$b_i<b_j$，令 c_3，c_4，…，c_n 为 b_1，b_2，…，b_n 中去掉 b_i，b_j 后剩下的 $n-2$ 个元素的任一排列. 令

$$c'=(b_i, b_j, c_3, \cdots, c_n), b_i<b_j, i<j,$$

$$c''=(b_j, b_i, c_3, \cdots, c_n),$$

$$s'=a_1b_i+a_2b_j+a_3c_3+\cdots+a_nc_n,$$

$$s''=a_1b_j+a_2b_i+a_3c_3+\cdots+a_nc_n,$$

则
$$\begin{aligned}s'-s''&=a_1b_i+a_2b_j-a_1b_j-a_2b_i\\&=(a_1-a_2)(b_i-b_j)>0.\end{aligned}$$

所以 $s''<s'$.

从而 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leqslant s''<s'\leqslant a_1b_1+a_2b_n+\cdots+a_nb_n$.

也即反序和<顺序和.

定理证毕.

下面给出排序不等式的一些应用.

例 1 已知 a，b，c 为正数，求证：

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc.$$

证明：根据所需证明的不等式中 a, b, c 的“地位”的对称性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{c}$，$bc\leqslant ca\leqslant ab$.

由排序原理：顺序和≥乱序和，

得
$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant\frac{bc}{c}+\frac{ca}{a}+\frac{ab}{b},$$

即 $\dfrac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{abc}\geqslant a+b+c$.

因为 a，b，c 为正数，所以 $abc>0$，$a+b+c>0$.

于是 $\dfrac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc$.

例 2 设 c_1，c_2，…，c_n 为正数组 a_1，a_2，…，a_n 的某一排列，则$\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots+\frac{a_n}{c_n}\geqslant n$.

证明：不妨设 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则

$$\frac{1}{a_1}\geqslant\frac{1}{a_2}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{a_n}.$$

因为$\frac{1}{c_1}$，$\frac{1}{c_2}$，…，$\frac{1}{c_n}$是$\frac{1}{a_1}$，$\frac{1}{a_2}$，…，$\frac{1}{a_n}$的一个排列，故由排序原理：反序和$\leqslant$乱序和，得

$$a_1\cdot\frac{1}{a_1}+a_2\cdot\frac{1}{a_2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{a_n}\leqslant a_1\cdot\frac{1}{c_1}+a_2\cdot\frac{1}{c_2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{c_n},$$

即 $\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots+\frac{a_n}{c_n}\geqslant n$.

例 3 （切比晓夫不等式）设 a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，b_n 为任意两组实数，

（1）如果 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 或 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 且 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\geqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right);$$

（2）若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 而 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 或 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 而 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right).$$

上述两式中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立.

证明：（1）不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则由排序原理得

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1,$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}.$$

将上述 n 个式子相加，得

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

上式两边除以 n^2，得

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\geqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right).$$

上式等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立.

（2）的证明是类似的，作为练习.

练习

1. 设 a_1，a_2，…，a_n 为实数，用排序不等式证明：

$$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\leqslant a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

其中 c_1，c_2，…，c_n 为 a_1，a_2，…，a_n 的任一排列．

2. 设 a_1，a_2，…，a_n 为正数，证明：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

3. 设 a_1，a_2，…，a_n 为实数，证明：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}},$$

即 n 个实数的算术平均不大于其平方平均．

4*. 设 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$0\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，$c_1$，$c_2$，…，$c_n$ 为 b_1，b_2，…，b_n 的一组排列，证明：

$$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}\geqslant a_1^{c_1}a_2^{c_2}\cdots a_n^{c_n}\geqslant a_1^{b_n}a_2^{b_{n-1}}\cdots a_n^{b_1}.$$

5. 已知 a，b，c 为正数，且两两不等，求证：

$$2(a^3+b^3+c^3)>a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b).$$

6. 已知 a，b，c 为正数，$a\geqslant b\geqslant c$，求证：

(1) $\frac{1}{bc}\geqslant\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{ab}$；

(2) $\frac{a^5}{b^3c^3}+\frac{b^5}{c^3a^3}+\frac{c^5}{a^3b^3}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

习题 2-2

1. 证明切比晓夫不等式（例 3 的(2)）．

2. 设 x，y，z 为正数，求证：

$$x+y+z\leqslant\frac{x^2+y^2}{2z}+\frac{y^2+z^2}{2x}+\frac{z^2+x^2}{2y}.$$

3. 设 x，y，z 为正数，求证：

$$\frac{x^2+y^2}{2z}+\frac{y^2+z^2}{2x}+\frac{z^2+x^2}{2y}\leqslant\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}.$$

4. 设 $x>0$，求证：

$$1+x+x^2+\cdots+x^{2n}\geqslant(2n+1)x^n.$$

5. 设 a_1，a_2，…，a_n 为正数，求证：

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

6. 已知 a，b，c 为正数，用排序不等式证明：

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b).$$

7. 设 a，b，c 为正数，求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

8. 设 A，B，C 表示 $\triangle ABC$ 的三个内角的弧度数，a，b，c 表示其对边，求证：

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\geqslant\frac{\pi}{3}.$$

9. 设 a，b，c 为某一个三角形的三条边，$a\geqslant b\geqslant c$. 求证：

(1) $c(a+b-c)\geqslant b(c+a-b)\geqslant a(b+c-a)$；

(2) $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$.

10. 设 a_1，a_2，a_3 为正数，求证：

$$\frac{a_1a_2}{a_3}+\frac{a_2a_3}{a_1}+\frac{a_3a_1}{a_2}\geqslant a_1+a_2+a_3.$$

11. 设 a_1，a_2，a_3 为正整数，且各不相同，求证：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}.$$

12. 设 a_1，a_2，…，a_n 为各不相同（两两不同）的正整数，求证：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}.$$

13. 设 a_1，a_2，…，a_n 为 1，2，…，n 的一个排列，证明：

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\leqslant\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

14*. 设 a，b，c 为实数，求证：

$$\frac{a^{12}}{bc}+\frac{b^{12}}{ca}+\frac{c^{12}}{ab}\geqslant a^{10}+b^{10}+c^{10}.$$

15*. 设 a，b，c 为正数，求证：

$$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geqslant\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant a+b+c.$$

2.3 平均值不等式（选学）

我们经常使用“平均”这个词来量化自然科学、技术科学、经济科学、社会科学各个层面的许多客观事物，它使得我们对事物的某些数量方面得到一个概括性的了解. 通常我们所使用的平均，即为算术平均，也就是假设 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个实数，求这 n 个数的和再用 n 去除，得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

我们称其为这 n 个数 a_1，a_2，…，a_n 的算术平均．可是我们有什么理由相信通过算术平均可以得到事物的数量特征一个概括性的了解呢？这里面有许多深刻的数学方面的理由．下面我们仅仅通过一个例子来说明其中的一个理由．

设我们用仪器确定某个物质的质量 x 时，由于仪器的误差和观察误差，我们共作 n 次观察，得到 n 个数

$$a_1，a_2，\cdots，a_n.$$

如果量 x 的某一个值和这 n 个数的偏差 $x-a_1$，$x-a_2$，…，$x-a_n$（误差）的平方和最小，我们就称这个量（记为 $\overline{x}$）为 x 的"最可能"的值，也就是说，我们要适当地选取 x，使得误差的平方和尽可能地小．这里我们不直接把这 n 个数相加，而把它们的平方相加的一个原因是由于 $x-a_i(i=1，2，\cdots，n)$ 有些是正值，有些是负值，直接相加就会正负相消，不能反映总体的误差．下面我们来寻求使得平方误差最小的 x．考虑误差函数：

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2\\&=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\end{aligned}$$

寻求 $\overline{x}$，使得

$$f(\overline{x})=\min_{x\in\mathbf{R}} f(x).$$

我们自然认为以 $\overline{x}$ 作为 x 的最可能值是合理的，那么 $\overline{x}$ 是什么呢？

因为 $f(x)$ 是一个二次函数，其二次项系数 $n>0$，一次项 x 的系数为 $-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，立即可知 $f(x)$ 当

$$\overline{x}=-\frac{-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{2n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

时达到最小值，于是 x 的最可能的值 $\overline{x}$ 就是 a_1，…，a_n 的算术平均．

在研究客观事物的规律时，对于具体问题的各种不同的目的及客观事物的不同属性，经常需要用不同的方法去处理各种不同数据的平均值．求平均值方法有许多种，例如当 a_1，a_2，…，a_n 为正数时，我们称

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

为 a_1，a_2，…，a_n 的几何平均．另一个重要的平均就是调和平均（我们在本节后半部分详细讲解），那么同一组数的几何平均、算术平均、调和平均有什么关系呢？为什么要研究这些关系呢？事实上，它们是和许多最优化问题密切相关的．

例如，如果你仔细观察各种日常罐头用品，你会发现这些罐头的形状大都是高和底面直径大致相等的圆柱，你有没有想过为什么？

在这一节里，我们将讨论几个重要的平均及其相互关系．在这一基础上，我们会运用这些关系研究一些简单的极值问题，并回答上述问题．

下面我们用排序原理给出算术—几何平均不等式的一个证明．由于这一个不等式的重要性，在下一章里，我们还将用数学归纳法来证明它．

定理 1 （算术—几何平均值不等式，简称平均值不等式）设 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个

正数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

等号成立 $\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证明：(1) 首先证明当 $a_1a_2\cdots a_n=1$ 时定理成立. 令 $x_1=1$，$x_2=\frac{1}{a_1}$，$x_3=\frac{1}{a_1a_2}$，…，$x_n=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$.

令 $y_1=\frac{1}{x_1}$，$y_2=\frac{1}{x_2}$，…，$y_n=\frac{1}{x_n}$.

如果 b_1，b_2，…，b_n 为 x_1，x_2，…，x_n 的一个排列，满足 $0<b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则 $\frac{1}{b_1}$，$\frac{1}{b_2}$，…，$\frac{1}{b_n}$ 为 y_1，y_2，…，y_n 的一个排列，满足 $\frac{1}{b_1}\geqslant\frac{1}{b_2}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{b_n}>0$.

因此 $b_1\cdot\frac{1}{b_1}+b_2\cdot\frac{1}{b_2}+\cdots+b_n\cdot\frac{1}{b_n}=\underbrace{1+\cdots+1}_{n个1}=n$ 为序列 x_1，x_2，…，x_n 和 y_1，y_2，…，y_n 的反序和.

根据反序和 $\leqslant$ 乱序和，得

$$\begin{aligned}\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个}\leqslant x_1y_2+x_2y_3+\cdots+x_ny_1&=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1}\\&=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\\&=a_1+a_2+\cdots+a_n.\end{aligned}$$

即 $a_1+\cdots+a_n\geqslant n$.

由排序不等式知等号成立 $\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

(2) 一般情况，设

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

记 $b_1=\frac{a_1}{G}$，$b_2=\frac{a_2}{G}$，…，$b_n=\frac{a_n}{G}$，则

$$b_1b_2\cdots b_n=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{G^n}=1.$$

于是由(1)得

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant n,\ \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\geqslant 1,\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nG}\geqslant 1,$$

即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

等号成立 $\Leftrightarrow b_1=b_2=\cdots=b_n=1\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$.

注：第一步称为标准化，是证明齐次不等式时常常采用的方法，它可以减少证明的难度. 这里的齐次是将不等式的两边看成只有一个未知数时，此未知数在不等式两边以同样的方次出现.

推论 1　设 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个正数，且 $a_1a_2\cdots a_n=1$，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n,$$

且等号成立 $\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

当 $n=3$ 时，这个结论的几何解释是：如果一个长方体的体积为 1，则当它是正方体时，其棱长之和最小.

推论 2　设 C 为常数，且 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个正数，则当 $a_1+a_2+\cdots+a_n=nC$ 时，

$$a_1a_2\cdots a_n\leqslant C^n,$$

且等号成立 $\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$.

当 $n=3$ 时，这个定理的一个几何解释是：所有棱长之和相同的长方体中，正方体有最大的体积.

除了上面的算术平均和几何平均之外，我们还可以定义另外一种平均. 任意给定 n 个正数，我们先求它们倒数的平均

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

然后再作这个平均值的倒数

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

称其为 a_1，a_2，…，a_n 的调和平均.

定理 2　设 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个正数，则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

等号成立 $\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证明：因为 a_1，a_2，…，a_n 为正数，所以我们可以设 $b_1=\frac{1}{a_1}$，$b_2=\frac{1}{a_2}$，…，$b_n=\frac{1}{a_n}$.
则由定理 1（算术—几何平均值不等式）得

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}.$$

由 $b_1>0$，$b_2>0$，…，$b_n>0$，在上式两边取倒数，得

$$\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{b_1}\frac{1}{b_2}\cdots\frac{1}{b_n}},$$

即

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

也就是

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

等号成立 $\Leftrightarrow b_1=b_2=\cdots=b_n\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$.

由定理 1，定理 2，立即得

定理 3 设 a_1，a_2，…，a_n 为正数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

等号成立 $\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$.

推论：设 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个正数，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

证明：由定理 3

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

立即得 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$.

例 1 设 a_1，a_2，…，a_n 是 n 个正数，则

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geqslant na_1a_2\cdots a_n.$$

证明：由定理 1，得

$$\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1^na_2^n\cdots a_n^n}=a_1a_2\cdots a_n.$$

注：在上面这个不等式中，分别取 $n=2$，3，4，得

$$a_1^2+a_2^2\geqslant 2a_1a_2,$$
$$a_1^3+a_2^3+a_3^3\geqslant 3a_1a_2a_3,$$
$$a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4\geqslant 4a_1a_2a_3a_4.$$

例 2 设 x 为正数，求 $f(x)=x+\frac{1}{3x^3}$ 的最小值.

证明：直接简单地运用平均值不等式，得不到右边为常数的不等式. 为此需将右边变形，使其出现 x，x，x 和 $\frac{1}{3x^3}$ 的形式.

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{3x^3}&=\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{1}{3x^3}\\ &\geqslant 4\sqrt[4]{\left(\frac{x}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3x^3}}=\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

等号成立 $\Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{1}{3x^3}$. 因为 $x>0$，所以 $x=1$ 时等式成立，此时

$$f(1)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},$$

所以 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

最后我们回答本节开头提出的问题.

例 3 设圆柱的体积 V 固定，问底面半径 r 和圆柱高 h 为多少时，其表面积最小?

解：设 $\pi r^2h=V_0$. 则其表面积 $S=2\pi r^2+2\pi rh$.

为了利用条件 $\pi r^2 h=V_0$，我们将 $2\pi r^2+2\pi rh$ 写成 $2\pi r^2+\pi rh+\pi rh$，于是根据定理 1，

$$\begin{aligned}S&=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\pi rh+\pi rh\\&\geqslant 3\sqrt[3]{(2\pi r^2)\pi rh\pi rh}\\&=3\sqrt[3]{2\pi(\pi r^2 h)^2}\\&=3\sqrt[3]{2\pi V_0^2}\ (\text{常数}).\end{aligned}$$

所以如果我们能找到 r 及 h 使得上式成立，那么 r，h 即为所求．于是根据定理 1 有

$$2\pi r^2=\pi rh,$$

解得　$h=2r$.

又因为 $\pi r^2 h=2\pi r^3=V_0$，所以

$$r=\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}},\ h=\sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}.$$

此时其表面积为最小.

例 3 解释了通常见到的大多数罐头产品的直径和高大体相等的一个原因，就是节省用料.

这类问题都和函数的极值问题有关，在下一节里我们还要更详细地研究这个问题.

例 4　（加权平均不等式）设 a_1，a_2，…，a_n 为正数，p_1，p_2，…，p_n 都是正有理数，并且 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，那么

$$p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n\geqslant a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}.$$

证明：设正有理数 p_1，p_2，…，p_n 的公分母为 k，

$$p_1=\frac{m_1}{k},\ p_2=\frac{m_2}{k},\ \cdots,\ p_n=\frac{m_n}{k}.$$

因为　$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，

所以　$m_1+m_2+\cdots+m_n=k(p_1+p_2+\cdots+p_n)=k$.

在平均值不等式中取 m_1 个 a_1，m_2 个 a_2，…，m_n 个 a_n（共取 k 个元素），得

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n}{k}\geqslant(a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n})^{\frac{1}{k}}.$$

由 m_1，m_2，…，m_n 的定义，立即得

$$p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n\geqslant a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}.$$

这个不等式的用处很多，它是平均值不等式的直接推广（如果取 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$，就得到平均值不等式）．下面我们解释一下加权平均在力学中的意义.

设在直线上两点 A，B 处分别放置一个质点，其质量为 m_1，m_2，设 A，B 两点的坐标分别为 x_1 和 x_2，我们计算一下由这两个质点所构成的质点系的重心坐标 x_G．由力学知识知道

$$|\overline{AG}|m_1g=|\overline{GB}|m_2g,$$

其中　$\overline{AG}=x_G-x_1$，$\overline{GB}=x_2-x_G$.

于是　$$m_1(x_G-x_1)=m_2(x_2-x_G),$$

解得 $$x_G=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}.$$

记 $p_1=\frac{m_1}{m_1+m_2}$，$p_2=\frac{m_2}{m_1+m_2}$，则

$$x_G=p_1x_1+p_2x_2.$$

图 2-4

即重心坐标是这两个质点坐标的加权平均.

一般地，设在直线上有 n 个质点，它们的质量分别是

$$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n,$$

坐标分别是

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n.$$

则由数学归纳法可以证明这个质点系的坐标

$$x_G=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

即 x_G 为 n 个质点坐标 x_1，x_2，…，x_n 的加权平均；而 $x_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的加权系数分别为

$$p_1=\frac{m_1}{m_1+m_2+\cdots+m_n},$$

$$p_2=\frac{m_2}{m_1+m_2+\cdots+m_n},$$

…………

$$p_n=\frac{m_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

下面我们再给出由加权不等式得到的一个新的不等式.

例 5 （W. H. Young 杨格不等式） 设 p，q 为有理数，满足条件 $1<p<+\infty$，$1<q<+\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$（$p$，$q$ 互称为共轭指标），a，b 为正数，则

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqslant ab.$$

> **注** 给定 p，则 p 的共轭指标 q 是唯一确定的，且 $1<p<+\infty$ 时，由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 知 $1<q<+\infty$. 当 p 为有理数时，它的共轭指标 q 也是有理数.

证明：在加权平均不等式

$$p_1a_1+p_2a_2\geqslant a_1^{p_1}a_2^{p_2}$$

中令 $p_1=\frac{1}{p}$，$p_2=\frac{1}{q}$，则 $p_1+p_2=1$，再令 $a_1=a^p$，$a_2=b^q$，即得

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqslant ab.$$

注 1 由有理数序列“逼近”无理数的方法，根据极限性质，就不难证明加权平均不等式对所有适合条件

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$

的正实数 p_1，p_2，…，p_n 都成立．同样杨格不等式对于一切满足条件

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1<p<+\infty,\ 1<q<+\infty$$

的实数 p，q 也成立，从这里也可以进一步体会有理数逼近无理数的思想．

注 2 杨格不等式有非常直观的几何意义．如图在直角坐标系 xOy 中，设$OA=a$，$OB=b$，则

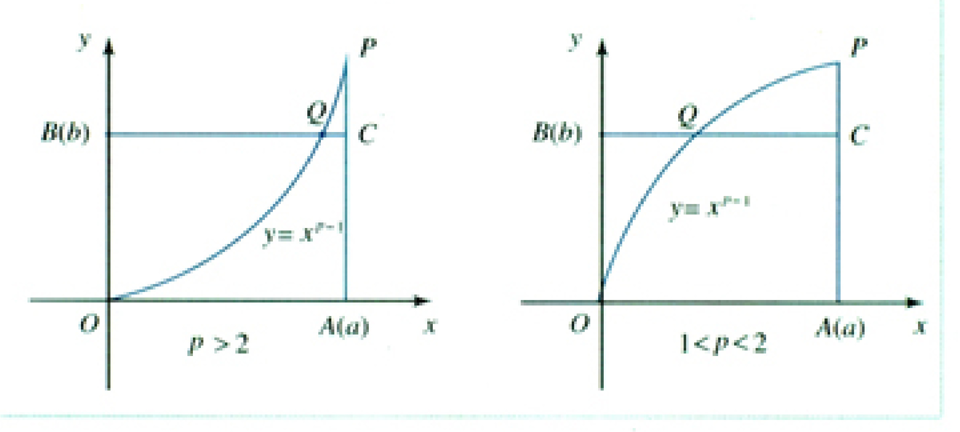


图 2-5

矩形 $OACB$ 的面积$=ab$，设曲线 $y=x^{p-1}$和 AC 的延长线于 P，交 BC 于 Q．由积分的知识知

$$\text{曲边形 } OAPQ \text{ 的面积}=\int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{a^p}{p},$$

$$\text{曲边形 } OBQ \text{ 的面积}=\int_0^b x^{q-1}\mathrm{d}x=\frac{b^q}{q}.$$

由曲边形 $OAPQ$ 的面积$+$曲边形 OBQ 的面积$\geqslant$矩形 $OACB$ 的面积知

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqslant ab,$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ P 和 C 重合 $\Leftrightarrow b=a^{p-1}\Leftrightarrow b^q=a^{q(p-1)}\Leftrightarrow a^p=b^q$．

注 3 当 $p=2$ 时，$q=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=2$，此时杨格不等式即为熟知的不等式

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab.$$

此时在图(2-5)中曲线 OQP 成为直线 $y=x$ 上的线段．

注

由$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 得 $q=\frac{p}{p-1}=1+\frac{1}{p-1}$，即 $\frac{1}{p-1}=q-1$，函数 $y=x^{p-1}$ 的反函数为 $x=y^{\frac{1}{p-1}}=y^{q-1}$，因此曲边形 OBQ 的面积$=\int_0^b y^{q-1}\,dy=\int_0^b x^{q-1}dx=\frac{b^q}{q}$．

练习

1. 设 a_1，a_2，…，a_n 为正数，求证：

(1) $\min\{a_1, a_2, \cdots a_n\} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$；

(2) $\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$；

(3) $\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \leqslant \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} \leqslant \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

2. 设 a_1，a_2，…，a_n 都是正数，证明：如果 $a_1+a_2+\cdots+a_n=C$，那么当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{C}{n}$ 时，乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 有最大值.

3. 设 a_1，a_2，…，a_n 都是正数，如果 $a_1a_2\cdots a_n=C$，那么当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，和式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

有最小值 $n\sqrt[n]{C}$.

4. 证明：如果 a_1，a_2，…，a_n 为正数，则 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geqslant n$.

5. 设 a_1，a_2，a_3，a_4，b_1，b_2，b_3，b_4 为正数，求证：

$$\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\frac{a_4}{b_4}\right)\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}\right) \geqslant 16.$$

6*. 令 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$，求证：当 $n>1$ 时

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

从而

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

习题 2-3

1. 设 n 为正整数，$n>1$，证明：

$$\log_{n+1}n \cdot \log_{n+1}(n+2) < 1.$$

2. 设 a_1，a_2，…，a_n 均为正数，且 $a_1a_2\cdots a_n=1$，求证：

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n) \geqslant 3^n.$$

3. 设 a_1，a_2，a_3 为正数，且 $a_1+a_2+a_3=1$，求证：

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2} \geqslant 27.$$

4. 设 a，b，c 为正数，且 $a+b+c=1$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$$

5. 设 a，b，c 为互不相等实数，求证：

$$a^4+b^4+c^4>a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>abc(a+b+c).$$

6. 设 $a+b+c=1$，且 a，b，c 为正数，求证：

$$\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\leqslant 3\sqrt{2}.$$

7. 设 a_1，a_2，a_3 为正数，$a_1+a_2+a_3=1$，求证：

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)\left(a_3+\frac{1}{a_3}\right)\geqslant\frac{1\,000}{27}.$$

8. 已知 a，b，c，d 为实数，求证：

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da.$$

9. 已知 a，b 为正数，$a+b=1$，求证：

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geqslant 9.$$

10. 设 a，b，c 为正数，$a+b+c=1$，求证：

$$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc.$$

11. 设 x_1，x_2，x_3 为正数，$x_1+x_2+x_3=1$，求证：

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\left(1+\frac{1}{x_3}\right)\geqslant 64.$$

12. 设 x，y 为正数，$x+y=1$，求证：

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\geqslant 9.$$

13. 求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

14. 设 x，y，z 为正数，$xyz=1$，求 $3x+4y+5z$ 的最小值，以及 x，y，z 为何值时，$3x+4y+5z$ 达到最小值？

2.4　最大值与最小值问题，优化的数学模型

设 D 为 $f(x)$ 的定义域，如果存在 $x_0\in D$，使得

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (f(x)\geqslant f(x_0)),\ x\in D$$

则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 D 上的最大(小)值，x_0 称为 $f(x)$ 在 D 上的最大(小)值点.

寻求函数的最大(小)值及最大(小)值问题统称为最值问题，它属于更一般的问题—极值问题的一个特别的情况.

一方面，极值问题广泛存在于自然科学，工程技术，国民经济，及社会生活的各个层面，因而寻求极值问题的解具有非常重要的实际意义；另一方面，由于寻求极值问题的解

促进了数学中很多相关学科的发展，于是这一问题也有深层次的科学理论意义，所以寻求极值问题的解不但是数学研究中一个经典的课题，并且也是一个至今仍然十分活跃的研究方向.

现代数学理论中有许多解决各种极值问题（包括近似解）的非常深刻的理论和成熟、优美的解法，但也还有许多尚未解决的重要问题，同时现代科学技术还在不断地提出新的迫切需要解决的极值问题.

本节我们用平均值不等式及柯西不等式解决某些初等函数的最值问题，并体会它们在解决实际问题中的作用，同时为今后的进一步学习打下基础.

我们已经具体学习了利用柯西不等式证明某些一般不等式的方法，下面我们再来学习如何用柯西不等式求函数的最值.

例 1 若 $3x+4y=2$，试求 x^2+y^2 的最小值及最小值点.

解：由柯西不等式

$$(x^2+y^2)(3^2+4^2)\geqslant(3x+4y)^2 \qquad ①$$

得

$$25(x^2+y^2)\geqslant 4,$$

所以

$$x^2+y^2\geqslant\frac{4}{25}.$$

不等式①中等号当且仅当 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$ 时成立. 为求最小值点，需解方程组

$$\begin{cases}3x+4y=2\\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{6}{25}\\ y=\dfrac{8}{25}\end{cases}$$

因此当 $x=\frac{6}{25}$，$y=\frac{8}{25}$ 时，x^2+y^2 取得最小值，最小值为 $\frac{4}{25}$，最小值点为 $\left(\frac{6}{25},\ \frac{8}{25}\right)$.

例 2 等腰直角三角形 AOB 的一直角边长为 1（图 2-6），在此三角形中任取一点 P，过 P 分别引三边的平行线，与各边围成以 P 为顶点的三个三角形（图中阴影部分），求这三个三角形的面积和的最小值，以及达到最小值时 P 的位置.

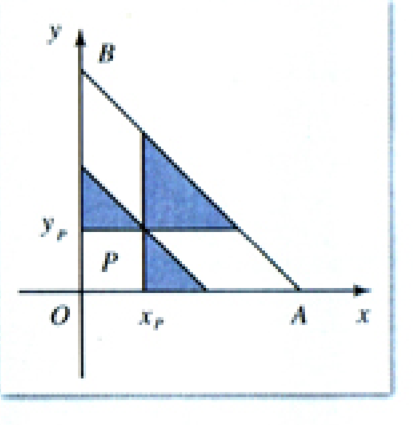


图 2-6

解：分别取 OB、OA 为 x 轴和 y 轴，则 AB 的方程为 $x+y=1$，记 P 点坐标为 $P(x_P,\ y_P)$，则以 P 为公共顶点的三个三角形的面积和 S 为

$$S=\frac{1}{2}x_P^2+\frac{1}{2}y_P^2+\frac{1}{2}(1-x_P-y_P)^2,$$

$$2S=x_P^2+y_P^2+(1-x_P-y_P)^2.$$

由柯西不等式，得

$$[x_P^2+y_P^2+(1-x_P-y_P)^2]\cdot[1^2+1^2+1^2]\geqslant[x_P+y_P+(1-x_P-y_P)]^2,$$

即 $2S\times 3=6S\geqslant 1$.

当且仅当$\frac{x_p}{1}=\frac{y_p}{1}=\frac{1-x_p-y_p}{1}$时，等号成立，即$x_p=y_p=\frac{1}{3}$时，面积 S 最小，且最小值为

$$S_{\min}=\frac{1}{6}.$$

我们已经学习了平均值不等式的几种形式，下面我们学习如何用平均值不等式求函数的最值.

例 3 （1）求 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+4}$的最大值；

（2）求函数 $y=x^2+\frac{6}{x^2+1}$的最小值，并求出取得最小值时的 x 值；

（3）若 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=2$，求 x^2+y^2 的最小值.

解：（1）$y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+4}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)+3}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{\sqrt{x^2+1}}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

当且仅当$\sqrt{x^2+1}=\frac{3}{\sqrt{x^2+1}}$，即 $x^2=2$，$x=\pm\sqrt{2}$时，y 取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

由此可知，当 $x=\pm\sqrt{2}$时，y 取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

（2）$y=x^2+\frac{6}{x^2+1}=x^2+1+\frac{6}{x^2+1}-1\geqslant 2\sqrt{6}-1$.

当且仅当$\frac{6}{x^2+1}=x^2+1$，即 $(x^2+1)^2=6$，$x^2+1=\sqrt{6}$，$x=\pm(\sqrt{6}-1)$时，y 取得最小值 $2\sqrt{6}-1$.

（3）由 $x^2+y^2\geqslant 2xy$，得 $2(x^2+y^2)\geqslant(x+y)^2$，即

$$x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}.$$

因为 $x+y=2$，所以 $x^2+y^2\geqslant 2$.

当且仅当 $x=y=1$ 时取得最小值 2.

> 解这类最值问题，要选好常用不等式，特别要注意等号成立的条件.

例 4 求函数 $y=\frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+8}}$的最值.

分析：$y=\frac{(x^2+8)+1}{\sqrt{x^2+8}}=\sqrt{x^2+8}+\frac{1}{\sqrt{x^2+8}}\geqslant 2$.

但根据平均值不等式等号成立时$\sqrt{x^2+8}=\frac{1}{\sqrt{x^2+8}}$，即 $x^2=-7$，这一方程在实数范围内无解，因此需要新的解题办法．于是我们运用函数 $y=x+\frac{1}{x}$在 $x\geqslant 1$ 时单调递增这一性质，来求函数$y=t+\frac{1}{t}$ （$t\geqslant 2\sqrt{2}$）的最值.

解：设 $t=\sqrt{x^2+8}$，则 $t\geqslant 2\sqrt{2}$，

于是 $y=\dfrac{x^2+9}{\sqrt{x^2+8}}=t+\dfrac{1}{t}$.

因为当 $t\geqslant 2\sqrt{2}$时，函数 $y=t+\frac{1}{t}$递增（请自行证明），所以函数 $y=t+\frac{1}{t}(t\geqslant 2\sqrt{2})$在 $t=2\sqrt{2}$处取得最小值.

故原函数的最小值为 $2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{9}{4}\sqrt{2}$，原函数无最大值.

例 5 求函数 $y=\dfrac{x^2-2x+6}{x+1}$ （$x\geqslant 0$） 的最小值.

解：$y=\dfrac{(x+1)^2-4(x+1)+9}{x+1}=(x+1)+\dfrac{9}{x+1}-4\geqslant 2\sqrt{(x+1)\dfrac{9}{x+1}}-4=2.$

当且仅当 $x+1=\dfrac{9}{x+1}$，即 $x=2$ 时，等号成立.

所以 $y_{\min}=2$.

本法叫分离常数法，就是在分子中凑出与分母相同的项，然后约分. 这在求含有分式的最值问题时经常用到. 这种类型的最值问题也可以用去分母的方法转化成关于 x 的二次方程，然后利用判别式求最值. 用平均值不等式来解此类问题时，特别要注意等号成立的条件.

在分式和三次式中求最值常用均值不等式.

例 6 从半径为 2 的圆板上剪下一个以圆心角为 θ 的扇形，围成一个圆锥的侧面（图 2-7），如何操作使圆锥体积最大(即求出相应的 θ 角)？

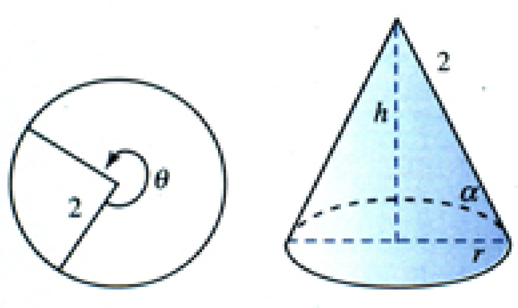


图 2-7

解：如图 2-7，圆锥的母线长为 2，设圆锥轴截面的底角为 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则圆锥底面半径 $r=2\cos\alpha$，高 $h=2\sin\alpha$，所以

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot 4\cos^2\alpha\cdot 2\sin\alpha$$

$$=\frac{8}{3}\pi(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$=\frac{8}{3}\pi\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{8}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)2\sin^2\alpha}$$

$$\leqslant\frac{8}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{8}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{16}{27}\sqrt{3}\pi.$$

注

$\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha$ 是三次关系，对于所有的三次关系的最值问题，几乎都用均值不等式（因为我们只学过二次函数求最值，没学过一般函数求最值，故只能用均值不等式求）.

当且仅当 $2\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，此时，圆锥底面半径 $r=\frac{2}{3}\sqrt{6}$，由此得扇形的中心角 $\theta=\frac{2\pi r}{2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}\pi$.

即从圆板上剪下中心角为 $\frac{2}{3}\sqrt{6}\pi$ 的扇形围成的圆锥体积最大，最大值为 $\frac{16}{27}\sqrt{3}\pi$.

例 7 消费者购买的某种大宗商品（比如计算机，汽车，房子等等），一般要用若干年后才被废弃，那么成本（就是商品的价格）并不是消费在最后一年，一般来说应该平均分摊在各年之中. 商品使用的年限越长，每年平摊的成本费用就越少.

但商品在使用一段时间后还要对其进行必要的维修，商品的维修、损耗费用（我们称为低劣化值）一般来说应该是逐年增加的. 于是作为消费者来讲，每年的消耗费用就会由两部分组成，一部分是商品成本消耗费（折旧），另一部分就是商品的维修、损耗费. 这样，商品的最佳更新年限应该是使每年平均消耗费用最低的年限，即：

年均消耗费用＝年均成本费的分摊＋年均维修费的分摊

商品最佳废弃年限＝年均消耗费用最低的年限.

比如，我们买某种汽车，购车时总费用（包括缴税）为 5 万元，每年应交保险费、养路费及汽油费合计6 000元；汽车的维修费平均为：第一年1 000元，第二年2 000元，第三年3 000元，依等差数列逐年递增. 问：这种汽车使用多少年报废最合算？

分析：要求汽车使用多少年报废最合算，实际上是求使用多少年的年平均费用最少，这需要建立年平均费用（s）和使用年数（n）的函数关系式.

解：设使用 n 年报废最合算，则年均费用

$$s=\frac{[(0.1+0.2+0.3+\cdots+0.1\times n)+0.6\times n+5]}{n}$$

$$=\frac{\frac{0.1\times n(n+1)}{2}+0.6n+5}{n}$$

$$=0.05(n+1)+\frac{5}{n}+0.6$$

$$=0.05n+\frac{5}{n}+0.65$$

$$\geqslant 2\sqrt{0.05n\times\frac{5}{n}}+0.65$$

$$=1.65.$$

当且仅当 $0.05n=\frac{5}{n}$，即 $n=10$ 时不等式中的等号成立.

因此汽车使用 10 年报废最合算，年平均费用为 1.65 万元.

二次函数是我们熟知的函数，它在求最值问题中也可以发挥很大的作用.

例 8 大楼共有 n 层，现每层指派一人. 若将人集中到第 k 层开会. 试问如何确定 k，能使每位参加会议人员上、下楼梯所走路程总和最小（假设相邻两层楼梯长都一样）?

解：设相邻两层楼梯长为 a，则问题转化为下列和式 S 的最小值的探求：

$$S=S(k)=a(1+2+3+\cdots+k-1)+0+a(1+2+\cdots+n-k)$$

$$=a\left[\frac{(k-1)(1+k-1)}{2}+0+\frac{(n-k)(1+n-k)}{2}\right]$$

$$=a\left[k^2-(n+1)k+\frac{n^2+n}{2}\right].$$

目标函数 $S(k)$ 为 k 的二次函数，且 $a>0$，故当 n 为奇数时，取 $k=\frac{n+1}{2}$，S 最小；当 n 为偶数时，取 $k=\frac{n}{2}$ 或 $\frac{n}{2}+1$，S 最小.

练习

1. 把 10 分成 5 个正数之和，问怎样分法，才能使这 5 个数的乘积具有最大值? 证明你的结论.
2. 如何把 27 分成 3 个数之积，使得它们的和最小? 证明你的结论.
3. 求函数 $y=2-9x-\frac{4}{x}$ $(x>0)$ 的最大值.
4. 求函数 $y=\frac{x^2+5x+15}{x+2}$，$x\geqslant 0$ 的最小值.
5. 设正变量 x，y，z 满足线性方程
$$ax+by+cz=d,$$
其中 a，b，c，d 为正常数. 求证：乘积 xyz 当 $ax=by=cz$ 时具有最大值.
6. 设 a，b，c，d 为正常数，正变量 x，y，z 满足下面方程
$$xyz=d,$$
求证：当 $ax=by=cz$ 时，和 $ax+by+cz$ 取到最小值.

7. 设三角形的三边为 x，y，z，令 $s=\frac{1}{2}(x+y+z)$，则三角形面积公式为

$$A=[s(s-x)(s-y)(s-z)]^{\frac{1}{2}}.$$

根据这一公式，证明在周长相同的所有三角形中，等边三角形具有最大面积.

8. 求函数 $y=2\sqrt{1-2x}+\sqrt{4x+3}$ 的最大值.

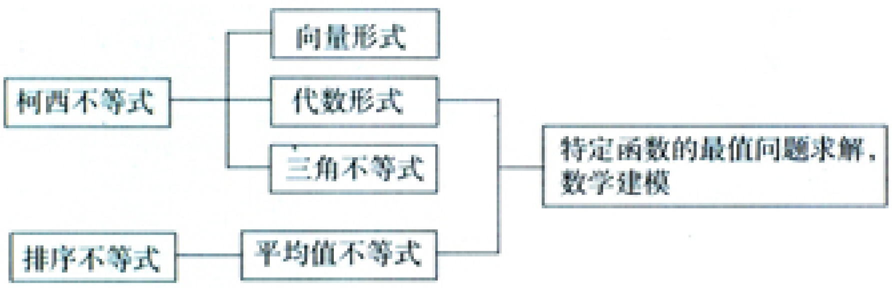
9. 某同学依照预定的配置单，在某电子市场组装了一台电脑，总费用为8 000元. 而后，在电脑的使用过程中，维修费平均为：第一年 200 元，第二年 400 元，第三年 600 元，依等差数列逐年递增，问：这台电脑使用多少年报废最合算(计算结果取整)？

习题 2-4

1. 若 $2x+3y=1$，求 x^2+y^2 的最小值，及最小值点.
2. 设 $x+2y+3z=3$，求 $4x^2+5y^2+6z^2$ 的最小值.
3. 设 $a+b+c+d=6$，$a^2+b^2+c^2+d^2=12$，求 d 的最大值.
4. 设实数 a_1，a_2，a_3 满足条件 $a_1+a_2+a_3=2$，求 $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ 的最大值.
5. 在半径为 R 的球的所有外切圆锥中求全面积最小的一个.
6. 在半径为 R 的圆内，求周长最大的内接长方形.
7. 某厂要生产一批无盖的圆柱形桶，每个桶的容积为 1 m³，用来做底的金属每平方米为 30 元，做侧面的金属每平方米为 20 元，如何设计圆桶尺寸，可以使成本最低？
8. 设 a，b，c 为正数，$a+b+4c^2=1$，求 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}c$ 的最大值？
9. 设 m，n 为正整数，$m>1$，$n>1$，且 $\log_3 m\cdot\log_3 n\geqslant 4$，求 $m+n$ 的最小值.
10. 求函数 $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值.
11. 求函数 $y=\cos^2 x(1+\sin x)$ 的最大值.
12. 设 $x>1$，求函数 $y=\log_2 x+\log_x 4$ 的最小值.
13. 在所有外切于一个给定半径为 R 的圆的菱形中求面积最小的一个.
14. 将进货单价为 8 元一个商品按 10 元销售，可卖出 120 个. 每涨价 1 元，则销售量减少 12 个. 为获得最大利润，问此商品的定价应为多少？
15. 建筑学规定，民用住宅的窗户面积必须小于地板面积，但按采光标准，窗户面积与地板面积的比应不小于 10%，并且这个比越大，住宅的采光标准条件越好，问同时增加相等的窗户面积与地板面积，住宅的采光是变好了还是变坏了？请说明理由.

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 写出柯西不等式的一般（代数）形式，用它解决一个实际问题．
2. 写出平均值不等式（算术—几何平均值不等式），用它解决一个实际问题．
3. 写出排序不等式，用它解决一个实际问题．
4. 利用平均值不等式解决某些特定函数的极值问题时需要注意什么问题？你有什么体会．

Ⅲ 巩固与提高

1. 若 $a<b<0$，则（　　）．

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(B) $0<\frac{a}{b}<1$　　(C) $ab>b^2$　　(D) $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

2. 若 $|a+c|<b$，则（　　）．

(A) $|a|<|b|-|c|$　　(B) $|a|>|c|-|b|$

(C) $|a|>|b|-|c|$　　(D) $|a|<|c|-|b|$

3. 设 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{7}-\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，则 a，b，c 的大小顺序是（　　）．

(A) $a>b>c$　　(B) $a>c>b$

(C) $c>a>b$　　(D) $b>c>a$

4. 若 $0<b<a$，$d<c<0$ 则下列各不等式中必成立的是（　　）．

(A) $ac>bd$　　(B) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

(C) $a+c>b+d$　　(D) $a-c>b-d$

5. $y=\log_a\left(\sqrt{x^2-4x+3}\cdot\frac{1}{x^2+x-2}\right)$的定义域是(　　).

(A) $x\leqslant1$ 或 $x\geqslant3$　　(B) $x<-2$ 或 $x>1$

(C) $x<-2$ 或 $x>3$　　(D) $x\leqslant-2$ 或 $x>3$

6. 已知 x，$y\in\mathbf{R}$，命题甲为 $|x-1|<5$，命题乙为 $\left||x|-1\right|<5$，那么（　　）.

(A) 甲是乙的充分条件，但不是乙的必要条件

(B) 甲是乙的必要条件，但不是乙的充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

7. $y=2\arcsin(2x-1)+\sqrt{\log_2(x+2)}$的定义域是（　　）.

(A) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$　　(B) $\left(0, \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

(C) $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$　　(D) $[0, 1]$

8. 直线 $kx-y=k-1$ 与 $ky-x=2k$ 的交点在第二象限，则实数 k 的取值范围是（　　）.

(A) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$　　(B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(C) $(0, 1)$　　(D) $\{-1\}$

9. 已知 $ab\neq0$，那么 $\frac{b}{a}>1$ 是 $\frac{a}{b}<1$ 的（　　）.

(A) 充分条件但不是必要条件　　(B) 必要条件但不是充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

10. $ax^2+2x-1=0$ 至少有一个正的实根的充要条件是（　　）.

(A) $a\geqslant0$　　(B) $-1\leqslant a<0$

(C) $a>0$ 或 $-1<a<0$　　(D) $a\geqslant-1$

11. $y=\frac{3+x+x^2}{1+x}$ $(x>0)$ 的最小值是（　　）.

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $-1+2\sqrt{3}$

(C) $-1-2\sqrt{3}$　　(D) $-2+2\sqrt{3}$

12. 已知 $4x^2+5y^2=y$ 那么 x^2+y^2 的最大值是（　　）.

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{16}$　　(C) $\frac{4}{25}$　　(D) $\frac{1}{25}$

13. $y=\log_{\sin x}(x^3+2x^2+x)$的定义域是______.

14. $y=\sin x+\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的值域是______.

15. $y=4x+\frac{16}{x^2}$ $(x>0)$ 的最小值是______.

16. $0<\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}<1$ 的解集是______.

17. 已知数列的通项 $a_n=\log_2\left(50\sin^n\dfrac{\pi}{4}\right)$，那么当 $n=$______时，数列前 n 项的和 S_n 最大（已知 $\lg 2=0.3010$）.

18. 要修一条深 2m，横截面为等腰梯形的引水渠，在横截面面积大小一定的条件下，要求渠底面和两侧面所用材料最省. 问渠壁的倾角 θ（锐角）多大时，才能满足这一要求.

19. 某单位要建造一间地面面积为 12 m^2 的背面靠墙的矩形小房，房屋正面的造价为 1 200 元/m^2，房屋侧面的造价为 800 元/m^2，屋顶的造价为 5 800 元. 如果墙高 3 m，且不计房屋背面的费用，问怎样设计房屋能使总造价最低，最低总造价是多少？

20. a，b，c 为正数，且 $3a+2b+c=39$，求 $\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c}$ 的最大值.

Ⅳ 自测与评估

1. 下列命题正确的是（　　）.

(A) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$ 成立当且仅当 a，b 均为正数

(B) $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ 成立当且仅当 a，b，c 均为正数

(C) $\log_a b+\log_b c+\log_c a\geqslant 3$ 成立当且仅当 a，b，$c\in(1,+\infty)$

(D) $\left|a+\dfrac{1}{a}\right|\geqslant 2$ 成立当且仅当 $a\neq 0$

2. 已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2=1$，则 $(1-xy)(1+xy)$ 有（　　）.

(A) 最小值 $\dfrac{1}{2}$ 和最大值 1　　(B) 最小值 $\dfrac{3}{4}$ 和最大值 1

(C) 最小值 $\dfrac{1}{2}$ 和最大值 $\dfrac{3}{4}$　　(D) 最小值 1

3. $y=x^2+\sqrt{1-x^2}$ 的值域是（　　）.

(A) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$　　(B) $\left[1,\dfrac{5}{4}\right]$

(C) $\left[1,\dfrac{1+2\sqrt{3}}{4}\right]$　　(D) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

4. 已知 $f(x)=\log_a\dfrac{1+x}{1-x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$，

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；

(2) 若 $f(x)>0$，求 x 的取值范围.

5. (1) 在面积为定值的扇形中，半径是多少时，扇形周长最小？

(2) 在周长为定值的扇形中，半径是多少时，扇形的面积最大？

数 学 文 化

阅读与欣赏

著名数学家柯西

柯西(A.-L. Cauchy，1789—1857)，1789 年 8 月 21 日生于法国巴黎，1857 年 5 月 23 日卒于巴黎附近的梭镇，是法国著名的数学家、力学家．

柯西于 1805 年入巴黎综合工科学校学习，两年后转到桥梁工程学校，1809 年成为工程师．1813 年放弃工程师的职业，从事理论科学研究．1816 年成为巴黎综合工科学校教授，并当选为法国科学院院士．1830 年，查理十世被逐，柯西拒绝效忠新的国王，因此失去所有职务，并流亡国外．在此期间，曾任原国王查理十世的家庭教师．1848 年恢复综合工科学校教授职务，并任巴黎大学教授．

柯西最重要的数学贡献在微积分、复变函数和微分方程等方面．在微积分方面，他率先定义了级数的收敛性，序列和函数的极限，并给出了级数收敛准则和一些判别法；提出关于极限理论的 ε-δ 方法．他给出了函数连续性的概念、定积分的第一个确切定义，以及广义积分的定义等．柯西最杰出的贡献在复变函数论领域，他系统地总结了复数理论，探讨了柯西—黎曼条件，建立了柯西积分定理和公式；定义了留数，建立了留数定理．柯西还深入研究了微分方程解的存在唯一性定理等，开创了微分方程研究的新领域．

此外，柯西对力学和天文学也有许多贡献．柯西一生共出版了七部著作和 800 多篇论文，其中包括了著名的《分析教程》(1821) 和《关于定积分理论的报告》(1827)．在他去世 25 年后，人们开始出版他的全集，至 1974 年才出齐最后一卷，总计 28 卷．

第三章　数学归纳法与贝努利不等式

3.1　数学归纳法原理

3.1.1　数学归纳法原理

观察

$$1=1^2,$$
$$1+3=2^2,$$
$$1+3+5=3^2,$$
$$1+3+5+7=4^2,$$
$$\cdots\cdots$$

我们自然地猜测对于一切正整数 n，都有

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

像这样由有限多个个别的特殊事例得出一般结论的推理方法，通常称为**归纳法**.

归纳法是我们认识客观世界的一个重要手段，很多自然科学，社会科学中得出的定理、定律都运用了归纳推理. 但是仅仅根据一系列有限特殊事例得出结论有时是不正确的. 例如，计算数列

$$a_n=n^2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

得到

$$a_1=1^2,\ a_2=2^2,\ a_3=3^2,\ a_4=4^2.$$

如果由此作出结论，归纳得到 $a_n=n^2$ 对于一切正整数成立，那就错了，因为事实上当 $n=5$时，

$$a_5=25+4!\ =49\neq5^2.$$

对于由归纳法得到的某些与自然数有关的命题 $P(n)$，我们常常用下面的方法和步骤（称为数学归纳法）来证明它的正确性：

（1）证明当 n 取初始值 n_0（例如 $n_0=0$，$n_0=1$ 等）时命题成立.

（2）假设当 $n=k$（k 为自然数，$k\geqslant n_0$）时命题正确，证明当$n=k+1$时命题也正确.

在完成了这两个步骤后，就可以断定命题对于从初始值 n_0 开始的所有自然数都正确.

我们先看本节开始的例子.

例　用数学归纳法证明：对一切正整数 n，有

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

证明：(1) 当 $n=1$ 时，左边=右边，等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时等式成立，也就是

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

那么当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\=&k^2+2(k+1)-1\\=&k^2+2k+1\\=&(k+1)^2.\end{aligned}$$

根据(1)及(2)，由数学归纳法知，等式对任何正整数 n 都成立.

用数学归纳法得出的结论是正确的. 事实上，命题对于初始值 n_0，例如 $n_0=1$，是正确的，那么根据从 k 到 $k+1$ 的推理过程，知命题对于 $n=2$ 是正确的，再一次从 k 到 $k+1$ 的正确性的推理，知命题对于 $n=3$ 是正确的，同样的可以证得对一切 $n=4$，5，6，…命题的正确性.

练习

用数学归纳法证明：

1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$.

2. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

3. 首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$.

4. 首项为 a_1，公比为 q 的等比数列的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$.

5. 设 $c>0$，$x_1=\sqrt{c}$，$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$，$n=1$，2，…，用数学归纳法证明：

$$x_{n+1}>x_n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

6. 设 $0<a_1<b_1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$，证明：

(1) $a_n<a_{n+1}$，$n=1$，2，…；

(2) $b_n>b_{n+1}$，$n=1$，2，…；

(3) $a_n<b_1$，$n=1$，2，…；

(4) $b_n>a_1$，$n=1$，2，….

3.1.2 数学归纳法应用举例

例 1 用数学归纳法证明：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证明：(1) 当 $n=1$ 时，左边$=1$，右边$=\frac{1}{6}(1\times2\times3)=1$，等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

于是

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
=&\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\
=&\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
=&\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
=&\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.
\end{aligned}$$

因此，当 $n=k+1$ 时，等式也成立．根据(1)及(2)，由数学归纳法知命题对于一切正整数 n 都成立.

例 2 用数学归纳法证明：多项式的平方等于各项平方和加上所有可能的每两项积的 2 倍，即

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2(&a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_n+\\ &a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_n+\cdots+a_{n-1}a_n).\end{aligned}$$

证明：(1) 当 $n=2$ 时，

$$(a_1+a_2)^2=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2.$$

(2) 假设对于 $n=k$ 等式成立，即

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2S_k,$$

其中 S_k 表示 a_1，a_2，…，a_k 中一切可能的每两项乘积的和，那么当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^2\\
=&[(a_1+\cdots+a_k)+a_{k+1}]^2\\
=&(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+a_{k+1}^2+2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}\\
=&a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2S_k+a_{k+1}^2+2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}\\
=&a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2+2S_k+2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}.
\end{aligned}$$

最后两项就是 a_1，a_2，…，a_k，a_{k+1} 中所有可能的每两项积的 2 倍的和，这是因为 S_k

表示 a_1，a_2，…，a_k 中所有这样积的和，而最后一项就是 a_1，a_2，…，a_k 乘以 a_{k+1} 所有积的 2 倍的和.

由(1)及(2)，根据数学归纳法，命题对一切不小于 2 的正整数 n 成立.

例 3 用数学归纳法证明：对于任意正整数 n，a^n-b^n 能被 $a-b$ 整除.（对于多项式 A，B，如果存在多项式 C，使得 $A=BC$，那么称 A 能被 B 整除.）

证明：(1) 当 $n=1$ 时，$a-b$ 能被 $a-b$ 整除.

(2) 假设当 $n=k$，k 为正整数时，a^k-b^k 能被 $a-b$ 整除. 那么，当 $n=k+1$ 时：

$$\begin{aligned}a^{k+1}-b^{k+1}&=a^{k+1}-a^kb+a^kb-b^{k+1}\\&=a^k(a-b)+b(a^k-b^k).\end{aligned}$$

因为 $(a-b)$ 和 a^k-b^k 都能被 $(a-b)$ 整除，所以上面的和 $a^k(a-b)+b(a^k-b^k)$ 也能被 $(a-b)$ 整除.

这也就是说当 $n=k+1$ 时，$a^{k+1}-b^{k+1}$ 能被 $(a-b)$ 整除. 根据(1)和(2)，由数学归纳法知命题对一切正整数 n 都成立.

例 4 平面内有 $n(n\geqslant 2)$ 条直线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点，证明：这 n 条直线的交点个数 $f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

证明：(1) 当 $n=2$ 时，两条直线不平行，故必相交于一点，又

$$f(2)=\frac{1}{2}\times 2\times(2-1)=1,$$

因此，当 $n=2$ 时命题成立.

(2) 假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时命题成立，也就是说平面内满足题中要求的任何 k 条直线交点的个数

$$f(k)=\frac{1}{2}k(k-1).$$

现在考虑平面内有 $k+1$ 条直线的情况，任取一条直线，记为 l.

由归纳假设，除 l 以外的其他 k 条直线的交点个数 $f(k)=\frac{1}{2}k(k-1)$. 又因为，由题设条件，任何两条直线不平行，所以直线 l 必定和平面内其他 k 条直线都相交于 k 个点，又因为任何三条直线不过同一点，所以上面 k 个交点两两不相同，且这 k 个交点和平面内其余 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 个交点也两两不相同，从而平面内交点的总的个数是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}k(k-1)+k\\=&\frac{1}{2}k[k-1+2]\\=&\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1].\end{aligned}$$

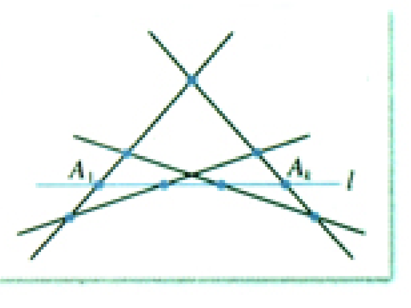


图 3-1

这也就是说，当 $n=k+1$ 时，$k+1$ 条直线的交点个数

$$f(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1].$$

根据(1)和(2)，由数学归纳法知命题对于一切大于1的正整数都正确.

数学归纳法帮助我们认识客观规律，实现了由有限到无穷的质的飞跃，是我们证明数学定理的一个重要手段. 依据前面的分析，数学归纳法依据的是以下正整数集的性质：

正整数集有最小数1，它含有正整数集合中每一个数后面的正整数，也就是它含有 n，也就含有 $n+1$.

用数学归纳法证明几何问题，关键在于分析由 k 变化到 $k+1$ 时，图形发生变化的情况.

特别要注意的是用数学归纳法证明数学命题的两个步骤是缺一不可的. 第一步是基础，是出发点，即 $P(1)$ 成立是 $P(n)$ 成立的基础，第二步是归纳步骤，由 $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ 是可以递推下去的保证，只有两者的结合，才能保证命题 $P(n)$ 对于一切自然数成立. 从前面的例子

$$a_n=n^2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

我们可以看到，只完成第一步而缺少第二步就可能得不出正确的结论，因为单靠第一步，我们无法递推下去. 证明任何有限多个特殊情况，我们都不能保证数学命题 $P(n)$ 对任何正整数的正确性，只要不完成第二步归纳步骤就不能保证命题的正确性.

同样，只有步骤(2)而无步骤(1)，也可能得出不正确的结论来. 例如，下面是一个只有步骤(2)而命题错误的例子. 假设 $n=k$ 时，

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+2$$

成立，也就是

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2+2,$$

那么

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+2(k+1)-1\\=&k^2+2+2k+1\\=&(k+1)^2+2.\end{aligned}$$

也就是说，如果 $n=k$ 时等式成立，那么 $n=k+1$ 时等式也成立，但是如果仅根据这一步就得出等式对于任何自然数成立，就错误了. 事实上，当 $n=1$ 时，上式左边 $=1$，而右边 $=1^2+2=3$，左边 $\neq$ 右边，也就是说原来的结论是错误的，这表明缺少步骤（1）这个基础，所有的推导就成了无本之源了.

练习

用数学归纳法证明下面各结论.

1. $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n\ (n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

2. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2$.

3. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

4. $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

5. $x^{2n}-y^{2n}$（n 为正整数）能被 $x+y$ 整除.

6*. 平面上的 $n(n\geqslant3)$ 个圆中，每两个圆都相交于两点，每三个圆都不交于一点，求证它们把平面分成了 n^2-n+2 部分.

7. $\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

8. 平面上 n 条直线至多将平面分成 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 个区域.

习题 3-1

1. 用数学归纳法证明：

(1) $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$；

(2) $1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

2. 用数学归纳法证明：

(1) $x^{2n-1}+y^{2n-1}$ 能被 $x+y$ 整除（n 为正整数）；

(2) n^3+5n 能被 6 整除（n 为正整数）.

3. 对于任何正整数 n，求下式

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

的和，并用数学归纳法证明你的结果.

4*. 设平面上有 n 条抛物线，其中每两条都相交于两点，且每三条都不相交于同一点，试问这 n 条抛物线把平面分成多少个部分？

5. 设 a_1，a_2，…，a_n 均不等于 -1，求证：

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$
$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

6. 不等式 $2^n>n^2$ 对哪些正整数能够成立，证明你的结果.

7. 设 $|x|\neq1$，求证：

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

8. 设 $\sin\alpha\neq0$，求证：

$$\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos2^2\alpha\cdot\cdots\cdot\cos2^n\alpha=\frac{\sin2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

9.* 设 $\sin x\neq 0$，求证：

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

10.* 在平面上有 n 条直线，把平面分成若干区域，只用两种颜色，能否使所有相邻区域涂上不同颜色？证明你的结论.

（提示：用数学归纳法，$n=1$ 时没问题；$n=k+1$ 时，我们先取出一条直线 L，由归纳假设，这时对剩下的区域作满足要求的二染色，然后把 L 放回原处，并把 L 某一侧的区域全部改变为另一种颜色.）

3.2 用数学归纳法证明不等式，贝努利不等式

3.2.1 用数学归纳法证明不等式

例 1 设 x_1，x_2，…，x_n 为实数，证明：

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

证明：(1) 我们已经知道

$$|x_1|=|x_1|,$$

$$|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|,$$

所以命题对 $n=1$ 和 $n=2$ 成立.

(2) 设命题对 $n=k$ 成立，即

$$|x_1+x_2+\cdots+x_k|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|,$$

于是，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}|x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}|&=|(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}|\\&\leqslant|x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}|\\&\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|.\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立. 由(1)及(2)，根据数学归纳法，可以断定命题对任何正整数都成立.

例 2 用数学归纳法证明算术—几何平均值不等式.

设 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个正数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

证明：不妨设 $a_n\geqslant a_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant a_1>0$，因为这并不影响它们算术平均与几何平均的值，若 $a_1=a_n$，则 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，此时原不等式中等号成立. 设 $a_n>a_1(n\geqslant 2)$，

(1) $n=2$ 时，根据基本不等式

$$\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2},$$

所以命题对 $n=2$ 成立.

(2) 设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\geqslant\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}.$$

为方便起见，记

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},$$

则由归纳假设，$A_k^k\geqslant a_1a_2\cdots a_k$.

当 $n=k+1$ 时，

因为 $a_{k+1}>a_1$，$a_{k+1}\geqslant a_2$，$a_{k+1}\geqslant a_3$，…，$a_{k+1}\geqslant a_k$，所以

$$\begin{aligned}a_{k+1}-A_k&=\frac{ka_{k+1}-(a_1+a_2+\cdots+a_k)}{k}\\&=\frac{(a_{k+1}-a_1)+(a_{k+1}-a_2)+\cdots+(a_{k+1}-a_k)}{k}>0,\end{aligned}$$

所以 $a_{k+1}>A_k$. 根据二项式定理及归纳假定得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}=\left(\frac{kA_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}\\&=\left(A_k+\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)^{k+1}\\&=A_k^{k+1}+(k+1)\cdot A_k^k\cdot\left(\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)^{k+1}\\&>A_k^{k+1}+A_k^k(a_{k+1}-A_k)\\&=A_k^{k+1}+A_k^ka_{k+1}-A_k^{k+1}\\&=A_k^ka_{k+1}\\&\geqslant a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}.\end{aligned}$$

即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}>\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}.$$

由(1)(2)，用数学归纳法知原命题成立.

例 3 用数学归纳法证明柯西不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2},$$

即 $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$.

证明：(1) 当 $n=2$ 时，

因为

$$\begin{aligned}&|a_1b_1+a_2b_2|^2-(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\\&=(a_1b_1+a_2b_2)^2-(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\\&=a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2-(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2)\\&=-(a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2)\\&=-(a_1b_2-a_2b_1)^2\leqslant0,\end{aligned}$$

所以 $|a_1b_1+a_2b_2|^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$.

即 $|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}$.

也即 $n=2$ 时，柯西不等式成立.

（2）设 $n=k(k\geqslant2)$时，

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2}.$$

则当 $n=k+1$ 时，由三角不等式及归纳假设，得

$$\begin{aligned}
&|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{k+1}b_{k+1}|\\
\leqslant&|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k|+|a_{k+1}b_{k+1}|\\
\leqslant&\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2}+|a_{k+1}b_{k+1}|\\
\leqslant&\sqrt{(\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2})^2+a_{k+1}^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2})^2+b_{k+1}^2}\\
=&\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2}\cdot\sqrt{(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2)+b_{k+1}^2}\\
=&\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2+b_{k+1}^2}.
\end{aligned}$$

因此柯西不等式得证.

练习

1. 证明对于任何正整数 n 有

$$|\sin nx|\leqslant n|\sin x|.$$

2. 用数学归纳法证明：当 n 为正整数时，

$$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2},$$

其中 $a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$.

3. 已知 a，b 为正数，求证：当 n 为正整数时，

$$\frac{1}{2}(a^n+b^n)\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

4. 用数学归纳法证明：

$$\frac{3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n-2)}<\sqrt{2n-1}\ （n\geqslant2，且 n 为正整数）.$$

5. 用数学归纳法证明：

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}\ （n\geqslant2，且 n 为正整数）.$$

6. 设 n 为大于 1 的正整数，求证：

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

7. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$，求证：对一切正整数 n，$\sqrt{2}<a_n<\sqrt{2}+\frac{1}{n}$ 成立.

8. 已知 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，$n=1, 2, 3, \cdots$，求证：

(1) $a_n<2$，$n=1, 2, 3, \cdots$；

(2) $a_n<a_{n+1}$，$n=1, 2, 3, \cdots$.

9. 设 $x_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{k}{a}\right)$（$a$，$k$ 为两个固定正常数），$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{k}{x_n}\right)$，用数学归纳法证明：

(1) $x_n\geqslant\sqrt{k}$，$n=1, 2, \cdots$；

(2) $x_{n+1}\leqslant x_n$，$n=1, 2, \cdots$.

3.2.2 用数学归纳法证明贝努利不等式

定理 1（贝努利不等式）　设 $x>-1$，且 $x\neq0$，n 为大于 1 的自然数，则

$$(1+x)^n>1+nx.$$

证明：用数学归纳法：

(1) 当 $n=2$ 时，由 $x\neq0$，知

$$(1+x)^2=1+x^2+2x>1+2x.$$

因此 $n=2$ 时命题成立.

(2) 假设 $n=k$（$k\geqslant2$ 为正整数）时命题成立，即

$$(1+x)^k>1+kx.$$

则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)^k(1+x)\\&>(1+kx)(1+x)\\&=1+x+kx+kx^2\\&>1+(k+1)x.\end{aligned}$$

由(1)(2)及数学归纳法知原命题成立.

例　设 n 为正整数，记

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n=1, 2, 3, \cdots,$$

求证：$a_{n+1}<a_n$.

证明：由 a_n 的定义知，对一切 $n=1, 2, 3, \cdots$，a_n 为正数，所以只需证 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$，$n=1, 2, 3, \cdots$.

由于 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right]^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

$$=\left[\frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)}\right]^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}$$

$$=\left[\frac{1+n(n+2)}{n(n+2)}\right]^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2},$$

因此，根据贝努利不等式

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+(n+1)\cdot\frac{1}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2}$$

$$>\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$=1.$$

所以 $a_n>a_{n+1}$ 对于一切正整数 n 成立.

下面我们利用平均值不等式将贝努利不等式推广到指数为有理数（指数也可以小于 1）的一般情况.

定理 2* 设 α 为有理数，$x>-1$，

(1) 如果 $0<\alpha<1$，则

$$(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x;$$

(2) 如果 $\alpha<0$ 或者 $\alpha>1$，则

$$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x.$$

当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

证明：显然当 $x=0$ 时等号成立.

(ⅰ) $0<\alpha<1$. 令

$$\alpha=\frac{m}{n},\ 1\leqslant m<n,$$

其中 m，n 为正整数，则由平均值不等式，

$$(1+x)^\alpha=(1+x)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{(1+x)\cdots(1+x)}_{m\text{个}}\underbrace{1\cdots1}_{n-m\text{个}}}$$

$$\leqslant\frac{m(1+x)+(n-m)}{n}$$

$$=\frac{mx+n}{n}$$

$$=1+\frac{m}{n}x$$

$$=1+\alpha x.$$

由平均值不等式知等号仅当 $1+x=1$，即 $x=0$ 时成立.

(ⅱ) $\alpha>1$.

(a) 如果 $1+\alpha x<0$，因为 $x>-1$，所以 $1+x>0$.

于是 $(1+x)^{\alpha}>0$，从而

$$(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x.$$

(b) 如果 $1+\alpha x\geqslant 0$，因为 $\alpha>1$，所以 $0<\frac{1}{\alpha}<1$，故由(1)得

$$0\leqslant(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1+\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha x=1+x.$$

上式中等号仅当 $x=0$ 时才成立.

将上式两边 α 次方，得

$$1+\alpha x\leqslant(1+x)^{\alpha},$$

即

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x.$$

(ⅲ) $\alpha<0$.

(a)如果 $1+\alpha x<0$，那么由 $1+x>0$ 知

$$(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x.$$

(b) 如果 $1+\alpha x\geqslant 0$，取正整数 n，使得 $0<-\frac{\alpha}{n}<1$，由(1)得

$$0<(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}}\leqslant 1-\frac{\alpha}{n}x.$$

因为上面不等式两边都是正数，两边取倒数，得

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}}\geqslant\frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x}\geqslant 1+\frac{\alpha}{n}x,$$

两边 n 次方，再由(ⅱ)得：

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant\left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)^{n}\geqslant 1+\frac{\alpha}{n}nx=1+\alpha x.$$

上式中等号仅当 $x=0$ 时才成立. 定理 2 证毕.

注：可以证明当 α 为实数时，定理仍然成立，其基本思想是用有理数列“逼近”无理数 α. 例如当 $0<\alpha<1$ 时，取一列有理数 r_1，r_2，…，r_n，…满足条件 $0<r_n<1$，且以 $\{r_n\}$ 逼近 α，于是

$$(1+x)^{r_n}\leqslant 1+r_n x,\quad n=1, 2, 3, \cdots.$$

利用极限理论由此可以证明

$$(1+x)^{\alpha}\leqslant 1+\alpha x.$$

可以证明当且仅当 $x=0$ 时等号成立. 类似地也可以用“逼近”的思想来证明，当 α 为实数且当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时，定理 2 仍然成立.

习题 3-2

1. 设 $x_1>0$，$x_1\neq 1$，且

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}.$$

用数学归纳法证明：

(1) 如果 $0<x_1<1$，则 $x_n<x_{n+1}$，$n=1$，2，…；

(2) 如果 $x_1>1$，则 $x_n>x_{n+1}$，$n=1$，2，….

2. 设 $x_1=a$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2x_n-1}$，$a>2$. 求证：

(1) $x_n>2$ 且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$；

(2) 如果 $a<3$，那么 $x_n\leqslant 2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$，$n=1$，2，3，….

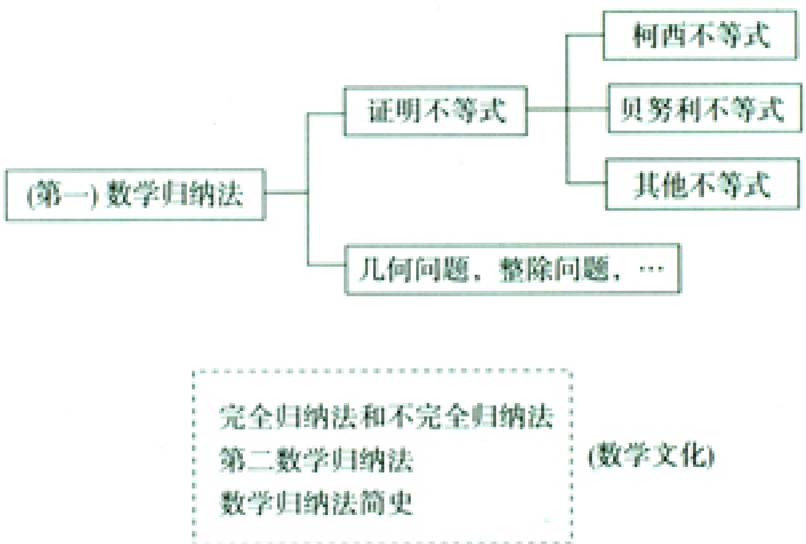
3. 设 n 为正整数且 $n>1$，$f(n)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，求证：$f(2^n)>\dfrac{n+2}{2}$.

4. 设 α_1，α_2，…，$\alpha_n\in(0,\ \pi)$，n 为正整数且 $n>1$，求证：

$$|\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)|<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n.$$

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 用数学归纳法证明数学命题的两个步骤为什么缺一不可，举例加以说明.
2. 写出贝努利不等式成立的条件及结论，讨论为何限制$x>-1$且$x\neq 0$?
3. 写一篇学习总结报告，在全班交流. 其内容包括：(1) 知识的总结. 总结不等式中蕴涵的数学思想方法和数学背景. 自己对不等式学习的感受体会. (2) 通过查阅资料、调查研究、访问求教，进一步探讨不等式的应用.

Ⅲ 巩固与提高

1. 用数学归纳法证明：

$$\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

2. 设n为大于2的整数，用数学归纳法证明：

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n+1}.$$

3. 求证：对任何自然数 n，$3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ 能被 17 整除.

4. 设 n 为自然数，证明 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 能被 x^2+x+1 整除.

5*. 设 $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$，求证：

（1）$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$；

（2）$\dfrac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$.

6*. 用数学归纳法证明，凸 n 边形（$n\geqslant 4$）共有 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 条对角线.

7. 求证：凸 n 角形的内角和为 $f(n)=(n-2)\pi$，$n\geqslant 3$.

8. 用数学归纳法证明组合公式：

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n.$$

9. 求证：$\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\dfrac{n}{a(a+n)}$，（$a>0$），$n$ 为正整数.

10. 求证：$(1+2+3+\cdots+n)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geqslant n^2$，$n$ 为正整数.

11. 若 a，b，c 三个正数成等差数列，公差 $d\neq 0$，正整数 $n\geqslant 2$，证明：$a^n+c^n>2b^n$.

12. 平面上通过同一点的 n 条直线分平面为 $2n$ 部分.

13*. 试证大于 6 元的一笔整数款项，都可以用 2 元及 5 元的钞票支付，而不需换钱.

14. 求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$，$n$ 为正整数，且 $n>1$.

15*. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$；$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，求 a_n，并用数学归纳法证明，其中

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

16*. 设直线上 $n(n\geqslant 2)$ 个点的坐标为 x_1，x_2，…，x_n；在每个点上放置质量为 m_1，m_2，…，m_n 的质点，求这个质点系的重心坐标.

17. 设 a_1，a_2，…，a_n 为正数，$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. 求证：

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ⅳ 自测与评估

用数学归纳法证明：

1. 求证：$2^n>2n+1$（n 为正整数，$n\geqslant 3$）．

2. 求证：$3^{4n+2}+5^{2n+1}$能被 14 整除（n 为自然数）．

3. 设$\frac{1}{2}<a_1<1$，$a_{n+1}=2a_n-a_n^2$，n 为正整数，证明：

   (1) $\frac{1}{2}<a_n<1$；

   (2) $a_{n+1}>a_n$，对于一切正整数 n 成立．

4. 当 $n\geqslant 2$ 时，若 a_1，a_2，…，a_n 都是正数，证明：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

5. 已知函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$f_0(x)=x$，令 $f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$，求证：

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1-nx^2}}.$$

6. 平面上有 n 条直线，其中任意两条直线不平行，任意三条直线不过同一点，求证它们彼此互相分割成 n^2 条线段．

数 学 文 化

阅读与欣赏

完全归纳法和不完全归纳法

归纳法是通过对事物观察、实验，经过概括和总结而得出的普遍规律的一种方法，是从认识特殊的事物扩大到认识一般事物的一种研究方法，归纳法分为完全归纳法和不完全归纳法．

完全归纳法是研究了事物的所有（有限种）可能情况而得出一般结论的方法，用完全归纳法得出的结论是可靠的，它可用于数学的证明之中．例如 1.5.3 节中，我们证明

$$|\sin x|\leqslant|x|,\quad \forall x\in\mathbf{R}$$

时，将 $\mathbf{R}$ 分成三个集合，

$$\mathbf{R}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left\{x\ \middle|\ |x|\geqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

在这三个集合上，我们分别证明了都有

$$|\sin x|\leqslant|x|.$$

从而证明了 $|\sin x|\leqslant|x|$ 对于一切实数 x 成立．这里我们用的就是完全归纳法．

从证明上看，归纳法应用的是完全归纳推理，即将要证明的命题分为有限种情况，如果每一种情况都能证明命题正确，那么原命题正确，也就是：

设 B_1，B_2，…，B_n 是构成 A 的全部元素，如果

$$B_1\Rightarrow C,\ B_2\Rightarrow C,\ \cdots,\ B_n\Rightarrow C,$$

那么 $A\Rightarrow C$.

不完全归纳法是仅仅根据事物的一部分特例而得出一般性结论的推理方法．不完全归纳法得出的结论不一定是正确的，有待于证明．根据不完全归纳法得出的结论有可能是错误的．例如德国数学家费马(Fermat)(1601—1665) 曾依赖于不完全归纳法，由

$$F_1=2^{2^1}+1=5,$$
$$F_2=2^{2^2}+1=17,$$
$$F_3=2^{2^3}+1=257,$$
$$F_4=2^{2^4}+1=65537$$

均为质数，而得出：一切正整数

$$F_n=2^{2^n}+1$$

均为质数的错误结论．事实上，欧拉(1707—1783)在 1733 年发现了 F_5 是一个合数．

但是不完全归纳法是人类研究科学、探索真理、发现客观规律的一种重要手段，它在人类科学技术史上起过非常重要的作用，例如牛顿提出万有引力学说，门捷列夫发现元素周期律过程中都曾经科学地运用了不完全归纳法．

数学归纳法

数学归纳法是一种重要数学证明方法，它帮助我们认识客观事物，由有限到无穷，实现质的飞跃．

特别要注意的是数学归纳法不是完全归纳法，而是变形的演绎法，它根据的是以下的最小数原理．

最小数原理 任何非空的正整数集的子集必有一个最小数.

设 $P(n)$ 表示一个与正整数有关的命题，下面由最小数原理来证明数学归纳法.

定理 1 （数学归纳法，第一数学归纳法）．如果

(1) $P(1)$ 成立，

(2) 在 $P(k)$ 成立的前提下，能推导出 $P(k+1)$ 成立，

则 $P(n)$ 对任何正整数成立.

证明：用反证法，由最小数原理，必定存在一个最小的正整数 n_0，使得 $P(n_0)$ 不成立．由(1)，$P(1)$ 成立，所以 $n_0 \neq 1$．于是 n_0-1 为正整数．又因为 n_0 是使 $P(n)$ 不成立的最小正整数，所以 $P(n_0-1)$ 成立，由(2)，知 $P(n_0)$ 成立．我们得到了两个矛盾的结果：

$$P(n_0)\text{成立，}P(n_0)\text{不成立.}$$

这不可能，于是数学归纳法得证.

下面是数学归纳法常见的一种变形形式.

定理 2 设 n_0 为整数（n_0 可以是负整数、0 或正整数），如果

(1) $P(n_0)$ 成立，

(2) 在 $P(k)(k \geqslant n_0)$ 成立的假定下，可以推出 $P(k+1)$ 成立，

则 $P(n)$ 对于一切大于等于 n_0 的整数 n 成立.

定理 2 的证明类似于定理 1，我们略去证明.

定理 3 （第二数学归纳法），设

(1) $P(1)$ 成立，

(2) 在 $P(m)(1<m \leqslant k)$ 成立的假定下，可以推出 $P(k+1)$ 成立，

则 $P(n)$ 对于一切正整数成立.

证明：设 $P(n)$ 对某些正整数不成立．根据最小数原理，必存在使得 $P(n)$ 不成立的最小正整数 k，即 k 是使 $P(n)$ 不成立的最小正整数．由(1)，$P(1)$ 成立，故 $k>1$，于是 $k-1$ 为正整数．因为 k 是使 $P(n)$ 不成立的最小正整数，所以 $P(m)$，$1 \leqslant m \leqslant k-1$ 都成立．再由定理的条件(2)知 $P(k)$ 成立，矛盾.

例 利用第二数学归纳法证明第 n 个质数

$$p_n < 2^{2^n}.$$

证明：(1) 当 $n=1$ 时，$p_1=2<2^{2^1}$，命题成立.

(2) 设 $1 \leqslant n \leqslant k$ 时命题成立，即

$$p_1<2^{2^1},\ p_2<2^{2^2},\ \cdots,\ p_k<2^{2^k}.$$

则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned} p_1p_2\cdots p_k &< 2^{2^1}2^{2^2}\cdots 2^{2^k} \\ &= 2^{2^1+2^2+\cdots+2^k} \\ &= 2^{2^{k+1}-2} < 2^{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

因此 $p_1p_2\cdots p_k+1 \leqslant 2^{2^{k+1}-2} < 2^{2^{k+1}}$.

所以 $p_1p_2\cdots p_k+1$ 的质因子 $p<2^{2^{k+1}}$．又因为 p_1，p_2，…，p_k 都不是 $p_1p_2\cdots p_k+1$ 的质因子（相除时余 1），故 $p>p_k$．于是 $p \geqslant p_{k+1}$．因此

$$p_{k+1} \leqslant p < 2^{2^{k+1}}.$$

即当 $n=k+1$ 时命题成立．由(1)(2)，根据第二数学归纳法知命题成立.

定理 4 （逆向归纳法）如果

(1) $P(n_k)$ 对无穷多个 $n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots$ 成立，

(2) 在 $P(k+1)$ 成立的假定下，可以推算出 $P(k)$ 成立，

则 $P(n)$ 对于一切正整数 n 成立.

证明：任意取定正整数 n，则小于 n 的正整数只有有限个，因为 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中有无穷多个正整数，所以必定存在 n_{i_0}，使得 $n_{i_0} \geqslant n$．则由(1)，$P(n_{i_0})$ 成立．由(2)，$P(n_{i_0}) \Rightarrow P(n_{i_0}-1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow P(n)$（有限步），于是 $P(n)$ 对任何正整数成立.

法国数学家柯西利用逆向归纳法证明了算术—几何平均不等式.

定理 5 （平均值不等式）设 a_1，a_2，…，a_n 为正数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

证明：(1) 用数学归纳法证明命题对 $n=2^m$，$m=1,2,3,\cdots$成立，即

(a) $m=1$ 时，$n=2$，由基本不等式

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}$$

知命题成立.

(b) 设命题对 $m=k$，即 $n=2^k$ 成立，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\geqslant\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}$$

成立，则当 $m=k+1$，即 $n=2^{k+1}$ 时，由归纳假定

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

$$\geqslant\sqrt{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\cdot\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}}$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}\cdot\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}}$$

$$=\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}\cdot a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}.$$

由(a)及(b)，由（第一）数学归纳法，知当 $n=2^m$ 时，不等式成立.

(2) 记

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

设 $n=k+1$ 时，不等式成立，即 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$，则当 $n=k$ 时，由归纳假设

$$A_k=\frac{kA_k+A_k}{k+1}=\frac{a_1+\cdots+a_k+A_k}{k+1}$$

$$\geqslant\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_kA_k}.$$

于是 $A_k^{k+1}\geqslant a_1a_2\cdots a_kA_k$，

所以 $A_k^k\geqslant a_1a_2\cdots a_k$.

所以 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\geqslant\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$.

即当 $n=k$ 时不等式成立，由(1)及(2)，依据逆向归纳法，对任何正整数均有

$$A_n\geqslant G_n,\ n=1,2,\cdots.$$

定理证完.

数学归纳法简史

我们经常要证明关于全体自然数的命题，由于自然数有无限多个，若是一个接一个地验证下去，那永远也做不完，而数学归纳法就是解决这类问题的一个重要方法.

数学归纳法在数学中有着广泛的应用，它是从有限到无限的过渡桥梁.

数学归纳法的思想可以远推至欧几里得（活动于约公元前 300 年）的《几何原本》. 该书第九卷第 20 命题是："质数比任何给定的一批质数都多."

欧几里得在证明这一命题时采用了独特的"几何"方式，他把数视为线段. 设有质数 a，b，c，另设 $d=a\cdot b\cdot c+1$，则 d 或是质数或不是质数. 如果 d 是质数，则 d 是与 a，b，c 三者都不同的质数. 如 d 不是质数，则它必有质因数 e，并且 e 与 a，b，c 都不同，所以一定有比给定的质数更多的质数. 这一证明里隐含了：若有 n 个质数，就必然存在 $n+1$ 个质数，因而自然推出质数有无限多个. 这是一种试图用有限推导把握无限的做法. 虽然它不是很完善，但由于它隐含着这个命题，人们还是普遍接受了它. 这可以说是数学归纳法思想产生的早期，人们沟通有限和无限的一种初步的尝试.

严格的数学归纳法是在 16 世纪后期才引入的. 1575 年意大利数学家、物理学家莫洛克斯（1494—1575）在他的《算术》一书中明确提出了这一方法，并且用它证明了

$1+3+\cdots\cdots+(2n+1)=(n+1)^2.$

法国著名数学家帕斯卡（1623—1662）承认莫洛克斯引用了这方法，并在他的著作《三角阵算术》中运用了这一方法.

帕斯卡发现了一种被后来称作“帕斯卡三角形”的数表，即二项展开式系数表，中国称为“贾宪三角形”. 它是宋代贾宪于公元11世纪最先发现的. 而帕斯卡在研究证明“算术三角形”等三个命题时，他最先准确而清晰地指出了证明过程所必须且只需的两个步骤，他称之为第一条引理和第二条引理.

第一条引理：该命题对于第一个底（即$n=1$）成立，这是很显然的.

第二条引理：如果该命题对任一底（对任一n）成立，它必对其下一底（对$n+1$）也成立.

由此可见，该命题必定对所有n值都成立.

帕斯卡的证明方法就是现在的数学归纳法，他所提出的两个引理就是数学归纳法的两个步骤，他在1654年写出的著作《论算术三角形》中做了详尽的论述. 因此，一般认为帕斯卡是数学归纳法的主要发明人.

由于当时还没有表示任意自然数的符号，因此其公式及证明只能用叙述的方法. 1686年J·贝努利首先采用了表示任意自然数的符号. 在他的名著《猜度术》（1713）中包含了运用数学归纳法证明问题的出色例子. “数学归纳法”这个名称及数学归纳法的证明形式是德摩根（1806—1871）所提出的. 皮亚诺（1858—1932）的自然数公理中包含了归纳原理.

本书主要参考文献

1. 华罗庚，数学归纳法，科学出版社，2002.
2. E. 贝肯巴赫，R. 贝尔曼，不等式入门，文丽译，北京大学出版社，1985.
3. 史济怀，平均，科学出版社，2002.
4. 范会国，几种类型的极值问题，科学出版社，2002.
5. 南山，柯西不等式与排序不等式，上海教育出版社，1996.
6. G. H. 哈代，J. E. 李特伍德，G. 波利亚，不等式，越民义译，科学出版社，1965.
7. 孙宗明，数学证明方法，兰州大学出版社，1995.

附 录

部分中英文词汇对照表

绝对值	absolute value
不等式	inequality
不等号	inequality sign
柯西不等式	Cauchy inequality
贝努利不等式	Bernoulli inequality
算术平均	arithmetic mean
几何平均	geometric mean
调和平均	harmonic mean
最小值	minimum
最大值	maximum
向量	vector
比较法	comparison method
分析法	analysis method
综合法	synthesis method
数学归纳法	mathematical induction
反证法	reduction to absurdity

后 记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持．在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志．

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授．从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了"课标"中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查．

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文．我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断的完善．现在所取得的成果，是实验研究组全体成员、编者、实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶．

各实验区参加教材审读、研讨及修改的主要成员有：

韩继清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颜、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勤、王宗武、黄武昌．

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒凤杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳．

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意．

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的师生们．

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力．

我们的联系方式如下：

电话：010－58758523　010－58758532

电子邮件：longzw@pep. com. cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学教材实验研究组