经全国中小学教材审定委员会
2007年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–3

球面上的几何

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–3

球面上的几何

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

A版

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

主要编者：王申怀　张劲松　刘长明
责任编辑：张劲松
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：李宏庆

主 编 寄 语

同学们，欢迎大家使用这套普通高中数学教科书，希望它能够成为你们学习数学的好朋友.

作为这套教科书的主编，在大家开始用这套书学习数学之前，对于为什么要学数学，如何才能学好数学等问题，我有一些想法与你们交流.

为什么要学数学呢？我想从以下两个方面谈谈认识.

数学是有用的. 在生活、生产、科学和技术中，在这套教科书中，我们都会看到数学的许多应用. 实际上，"数量关系与空间形式"，在实践中，在理论中，在物质世界中，在精神世界中，处处都有，因而研究"数量关系与空间形式"的数学，处处都有用场. 数学就在我们身边，它是科学的语言，是一切科学和技术的基础，是我们思考和解决问题的工具.

学数学能提高能力. 大家都觉得，数学学得好的人也容易学好其他理论. 实际上，理论之间往往有彼此相通和共同的东西，而"数量关系与空间形式"、逻辑结构及探索思维等正是它们的支架或脉络，因而数学恰在它们的核心处. 这样，在数学中得到的训练和修养会很好地帮助我们学习其他理论，数学素质的提高对于个人能力的发展至关重要.

那么，如何才能学好数学呢？我想首先应当对数学有一个正确的认识.

数学是自然的. 在这套教科书中出现的数学内容，是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础，其中的数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然的. 如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味. 这将有助于大家的学习.

数学是清楚的. 清楚的前提，清楚的推理，得出清楚的结论，数学中的命题，对就是对，错就是错，不存在丝毫的含糊. 我们说，数学是易学的，因为它是清楚的，只要大家按照数学规则，按部就班地学，循序渐进地想，绝对可以学懂；我们又说，数学是难学

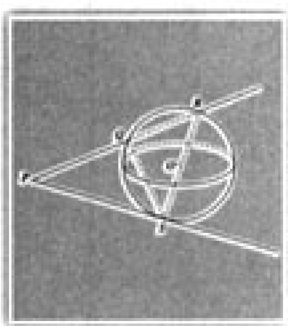
的，也因为它是清楚的，如果有人不是按照数学规则去学去想，总想把“想当然”的东西强加给数学，在没有学会加法的时候就想学习乘法，那就要处处碰壁，学不下去了.

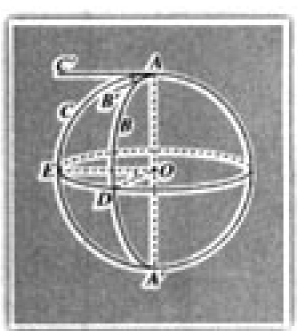
在对数学有一个正确认识的基础上，还需要讲究一点方法.

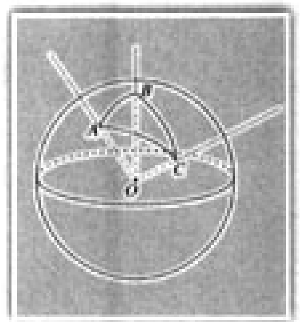
学数学要摸索自己的学习方法. 学习、掌握并能灵活应用数学的途径有千万条，每个人都可以有与众不同的数学学习方法. 做习题、用数学解决各种问题是必需的，理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法也是必需的，还要充分发挥问题的作用，问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性. 要善于提问，学会提问，“凡事问个为什么”，用自己的问题和别人的问题带动自己的学习. 在这套书中，我们一有机会就提问题，希望“看过问题三百个，不会解题也会问”. 类比地学、联系地学，既要从一般概念中看到它的具体背景，不使概念“空洞”，又要在具体例子中想到它蕴含的一般概念，以使事物有“灵魂”.

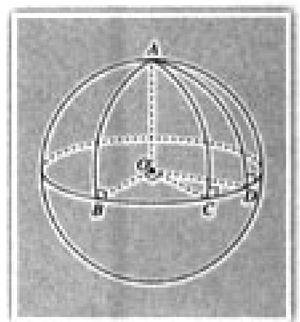
同学们，学数学趁年轻. 你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期. 这个时期下点功夫学数学，将会终生受益. 我们构建了这片数学天地，期盼它有益于大家的成长. 你们是这片天地的主人，希望大家在学习的过程中能对它提出宝贵的改进意见. 预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中.

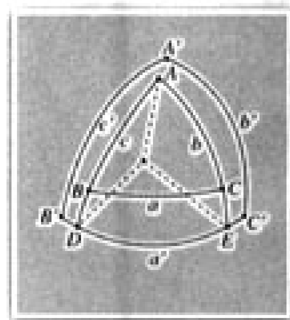
目 录

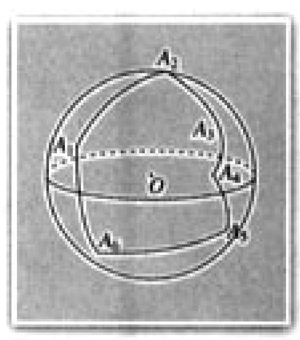


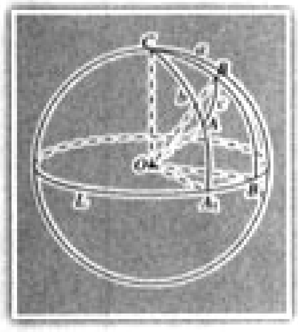


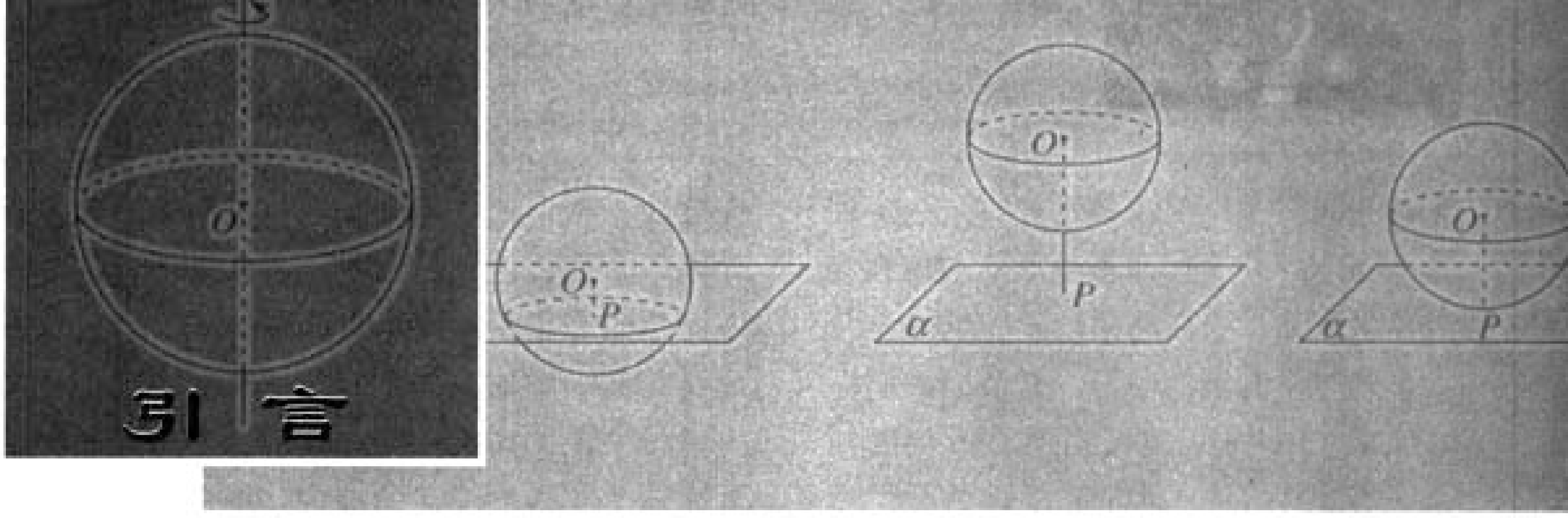












引言

在《数学 2》中，我们学习过球体，它是以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体．包围球体的曲面叫做球面．半圆的圆心叫做球心，半圆的半径叫做球的半径，半圆的直径叫做球的直径（图 0-1）．

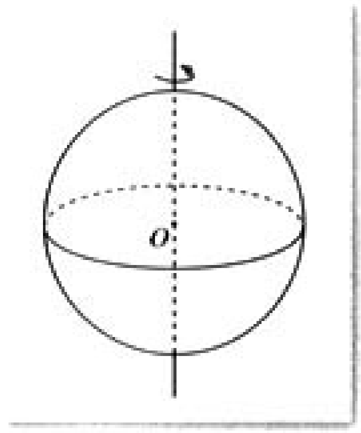


图 0-1

球面既可看成半圆以它的直径为旋转轴，旋转一周所成的曲面，又可看成与定点（球心）的距离等于定长（半径）的所有点的集合．本专题将研究球面上的几何（以后简称球面几何），考察球面上的点、线以及某些几何图形的性质和度量等等．

球面几何与人类的生产、生活息息相关．我们生活的地球可近似看成一个球，航海、航空、卫星定位等都离不开球面几何的知识．

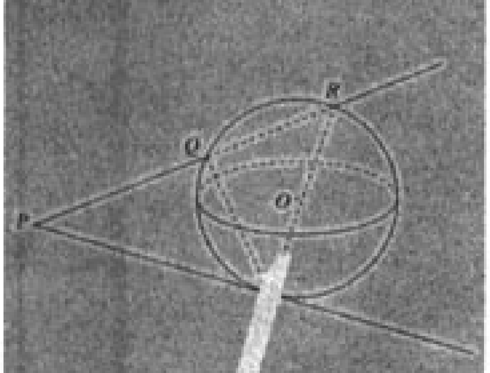
球面与平面虽然都是几何图形，但是两者之间有很大的不同，同时又存在紧密的联系．研究球面几何离不开欧氏几何，欧氏几何是研究球面几何的基础．我们可以通过类比欧氏几何的一些结论，猜想球面几何的相关结论；也可以通过这种类比，得到球面几何的研究方法．比如，在地球这样半径极大的球面上，从非常小的范围来看，大地好像一个平面．我们站在操场上，感觉操场是很平的．这就好比半径很大的一个圆上的一段小圆弧可近似看成线段一样．对地球表面面积非常小的局部区域，我们可以从欧氏几何的角度进行研究．也就是说，把地球表面非常小的局部区域看成平面区域，这种观点就是所谓局部“欧氏化”，此时所得结论与实际情况基本相符．但是，从大的范围看，如航海、航空、卫星定位等实际问题，采用“欧氏化”的研究方法所得出的结论就可能产生很大的误差，这时球面几何的知识就很有用了．

类比是学习本专题的重要思想方法．类比欧氏几何的研究问题和研究方法，主要是平面三角形的有关知识，提出球面几何的问题，研究球面上的图形，特别是球面三角形的有关性质．

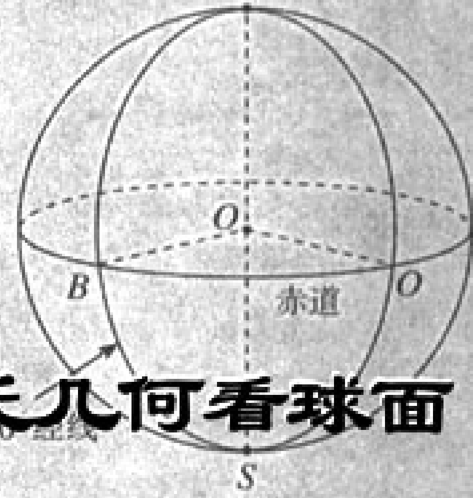
本专题首先从我们熟悉的欧氏几何出发，回顾平面、直线与球面的位置关系，得出与圆幂定理类似的球幂定理．然后从距离和角出发，进入球面几何的学习．我们知道，距离和角是平面上描述位置的基本概念，类似地，球面上的距离和角是球面上描述位置的基本概念．球面上的距离是本专题的核心概念，我们将学习球面上的距离和角的度量方法，并在此基础上，引进球面上的基本图形．与三角形是欧氏几何的研究重点一样，球面三角形是球面几何的研究重点．我们将研究它的内角和，两个球面三角形全等的判定，球面三角

形的边角关系　　正弦定理、余弦定理等．在球面三角形的基础上，进一步学习球面多边形的概念，并用球面多边形的内角和定理推导简单多面体的欧拉公式，体会球面几何与拓扑学的联系．最后将系统地归纳欧氏几何与球面几何等非欧几何的联系与差异．

通过本专题的学习，希望同学们在学会球面几何基础知识的同时，认真体会球面几何在实践中的作用，学会用球面几何的知识解决一些简单的实际问题．从中感受球面几何是描述客观世界的一类非常重要的数学模型，更好地了解我们生活的地球，更深入地认识客观世界．



第一讲 从欧氏几何看球面



我们以前学习的平面几何和立体几何统称欧几里得几何（简称欧氏几何）．本讲我们从欧氏几何的角度，即把平面和球面都放到三维欧氏空间中，利用已学过的立体几何知识研究平面、直线与球面的位置关系及其几何性质，主要介绍平面与球面的位置关系、直线与球面的位置关系、球幂定理以及球面的对称性．

一、平面与球面的位置关系

类比直线与圆的位置关系，结合图 1-1，我们知道，平面与球面有三种位置关系：

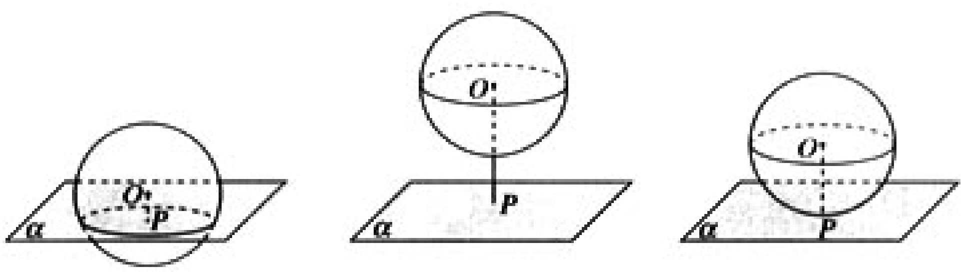


图 1-1

1. 平面与球面相交

用任意一个平面去截一个球，截面是圆面，平面与球面的交线是一个圆．

你能证明这个结论吗？试一试！

当平面与球面相交时，球心到平面的距离小于球的半径 r．

2. 平面与球面相离

平面与球面不相交，没有交点．此时球心到平面的距离大于球的半径 r．

3. 平面与球面相切

平面与球面相交，且只有一个交点．此时球心到平面的距离等于球的半径 r．

球面被经过球心的平面截得的圆叫做大圆，被不经过球心的截面截得的圆叫做小圆．

你能证明小圆的半径小于大圆的半径吗？试一试！

如图 1-2，当我们把地球看作一个球时，经线就是球面上从北极到南极的半个大圆，它以北极和南极为端点．国际

上，以过格林尼治天文台的经线为 0°经线，向东叫做东经，向西叫做西经. 地球球面上一点的经线的经度是过该点的经线所在半平面与 0°经线所在半平面所成的二面角的大小. 例如，点 A 的经度就是二面角 $A\text{-}NS\text{-}B$ 的大小，即$\angle BOC$ 的大小.

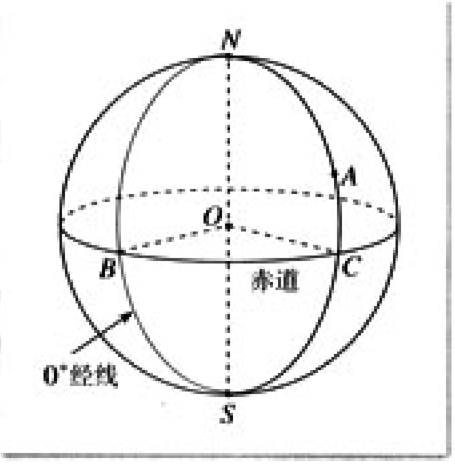


图 1-2

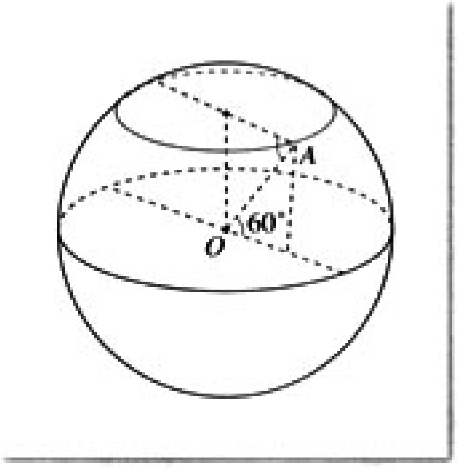


图 1-3

赤道是一个大圆. 与赤道所在平面平行的平面截地球表面所得的小圆叫做纬线. 过地球球面上一点的纬线的纬度是该点与球心的连线与赤道平面所成的角的大小. 赤道以北叫做北纬，赤道以南叫做南纬. 赤道为 0°纬线. 除赤道以外的其他纬线都是小圆. 如图 1-3 的纬线是北纬 60°.

很明显，地球表面上任意一点由经度和纬度唯一确定.

如果没有特别说明，以后我们把地球看成球，把地球表面看成球面.

二、直线与球面的位置关系和球幂定理

如图 1-4，同样，直线与球面也有三种位置关系.

1. 直线与球面相交：直线与球面有两个交点，这条直线叫做球面的割线. 此时球心到直线的距离小于球的半径 r；

2. 直线与球面相离：直线与球面没有公共点. 此时球心到直线的距离大于球的半径 r；

3. 直线与球相切：直线与球面有且只有一个公共点，这个公共点叫做切点，这条直线叫做球面的切线. 此时球心到直线的距离等于球的半径 r.

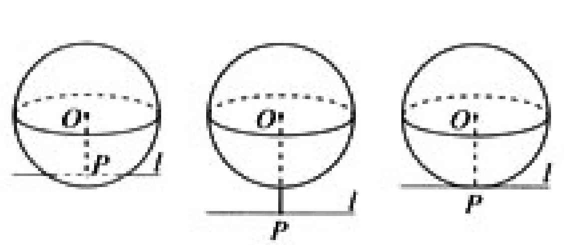


图 1-4

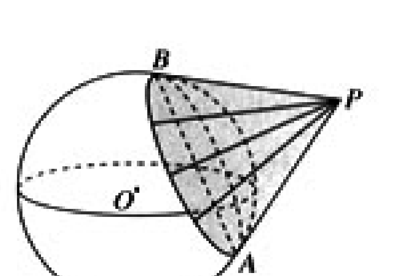


图 1-5

容易证明，过球面外一点 P 作球面的切线，所有的切线长（切点与点 P 间的距离）相等，它们构成一个圆锥面，如图 1-5.

如图 1-6，我们知道，在平面几何中有切线长定理、切割线定理、相交弦定理，这些定理统称圆幂定理.

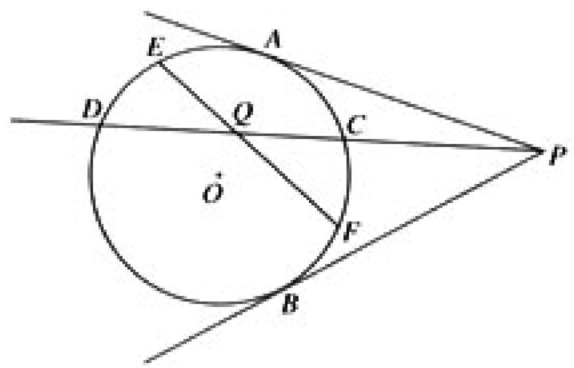


图 1-6

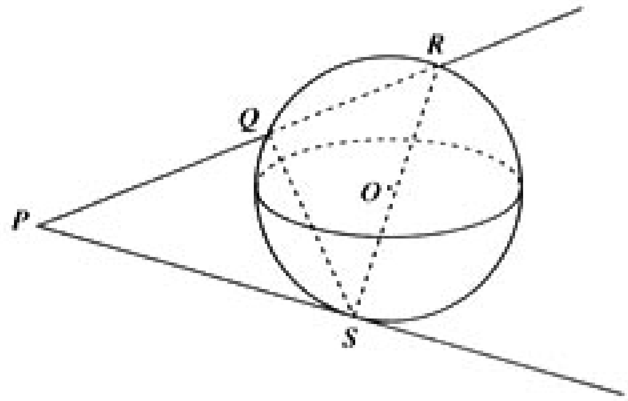


图 1-7

如图 1-7，类比圆幂定理，可以发现：

定理 1 从球面外一点 P 向球面引割线，交球面于 Q，R 两点；再从点 P 引球面的任一切线，切点为 S，则

$$PS^2 = PQ \cdot PR.$$

证明：如图 1-7，连结 SQ，SR.

由于两条相交直线 PS，PR 唯一确定平面 α，设平面 α 与球面的截面的圆心为 O. 由圆幂定理可知

$$PS^2 = PQ \cdot PR.$$

定理 2 从球面外一点 P 向球面引两条割线，它们分别与球面相交于 Q，R，S，T 四点（图 1-8），则

$$PQ \cdot PR = PS \cdot PT.$$

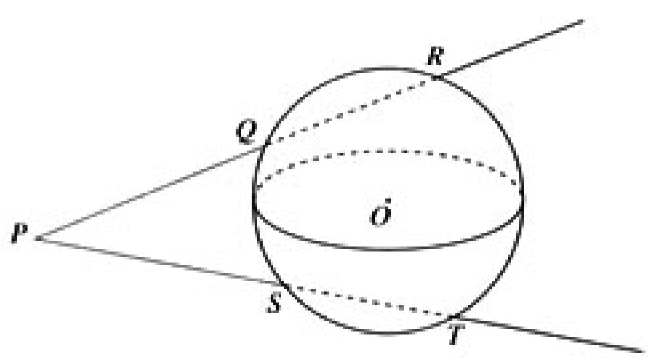


图 1-8

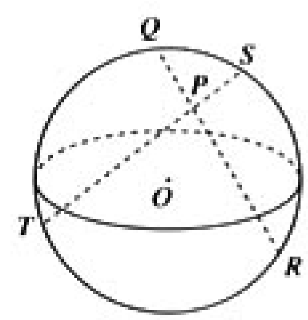


图 1-9

定理 3 设点 P 是球面内的一点，过点 P 作两条直线，它们分别与球面相交于 Q，R，S，T 四点（图 1-9），则

$$PQ \cdot PR = PS \cdot PT.$$

你能仿照定理 1 的证明过程，证明定理 2 和定理 3 吗？

定理 1、定理 2 和定理 3 统称为**球幂定理**.

三、球面的对称性

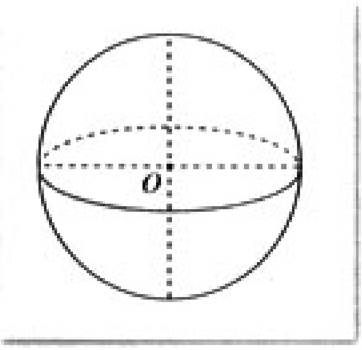


图 1-10

圆是非常美的对称图形，它既是轴对称图形，又是中心对称图形．球面是一个旋转曲面，与圆一样，球面也有很好的对称性．如图 1-10，我们容易看出：

（1）球面关于球心对称；

（2）球面关于球的任意一条直径对称；

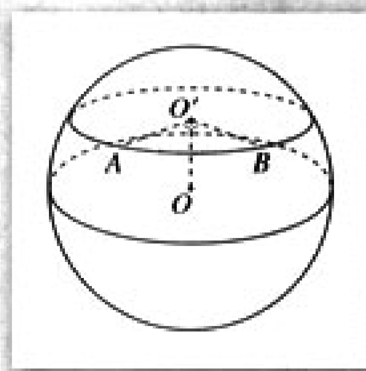
（3）球面关于球的大圆对称．

> 你还能发现其他一些对称性吗？

球面的这种对称性有很多应用，对我们研究球面几何具有很大的帮助．

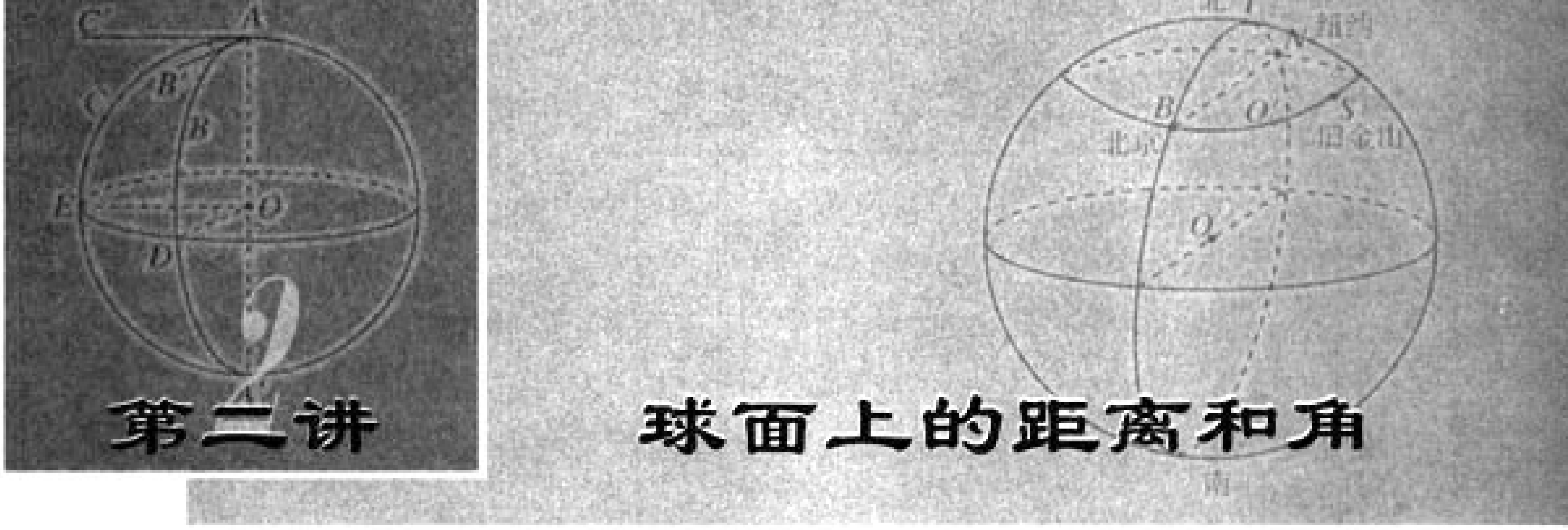
思考题

1. 求证：（1）用任意一个平面去截一个球，平面与球面的交线是一个圆；
   （2）这些圆中大圆是半径最大的圆．
2. 证明定理 2 和定理 3.
3. 按照纬度的定义，北极的纬度是多少？南极呢？
4. 假设地球的半径为 R，如图，在北纬 45° 的纬线上有 A，B 两点，且 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 90°，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的长．



（第 4 题）

5. 在航海中，常用海里作为路程的度量单位．1 海里的意义是地球表面上大圆的 $1'$ 圆心角所对的弧长．已知地球的半径约为6 400 km，1 海里等于多少千米（精确到 0.001 km）？
6. 查阅有关资料，了解北回归线、南回归线，北极圈、南极圈的纬度分别是多少？
7. 球面具有很好的对称性，除正文中提到的外，球面还有哪些对称性质？你能举出一些实例吗？



第二讲 球面上的距离和角

在上讲中，我们从欧氏几何的角度看球面，运用欧氏几何的研究方法，研究了球面的一些性质. 本讲我们从球面上的距离和角开始，进入球面几何的学习.

我们知道，位置是空间中最原始、最基本的概念之一. 几何中常用点表示位置，并用距离和角度（方位）来刻画位置间的关系. 与欧氏几何的学习类似，对球面几何的学习，我们从球面上的距离和角这两个最基本的概念开始.

一、球面上的距离

如图 2-1，我们知道，在平面上，经过两点可以连一条直线，且只可连一条直线. 平面上两点之间的所有连线中，线段最短，这条线段的长度叫做两点之间的距离. 平面上的两条直线有两种位置关系：平行和相交，如果相交，那么只有一个交点. 平面上的直线可以无限延长等等. 这些都是平面上直线的性质.

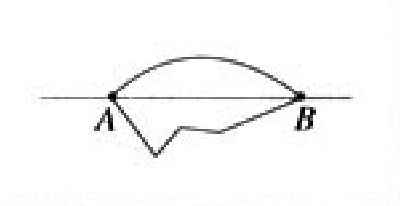


图 2-1

在平面上可以画出直线，但球面是一个曲面，球面上的线是弯曲的，不存在直线. 球面上有没有某种曲线可以“扮演”平面上直线的角色呢？也就是说，连结球面上任意两点有无数条曲线，而且它们的长短不一，其中是否存在一条最短的曲线？

思考

如图 2-2，一架飞机从北京首都国际机场起飞，目的地是美国纽约肯尼迪国际机场. 北京与纽约大致都在北纬 40°上，如果不考虑其他因素，飞机怎么飞行能够使航程最短？

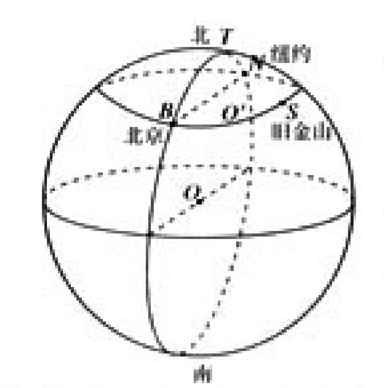


图 2-2

我们用点 B 表示北京、点 N 表示纽约，点 O 表示球心. 显然，在球面上，点 B，点 N 之间可以连无数条曲线. 在这无数条曲线中，经过点 B，点 N 之间有一个最短的路径. 实际上，经过 B，N，O 三点（显然，这三点不在同一条直线上）的平面截球面，得到一个圆，这个圆是大圆. 大圆上的两点 B，N 把大圆分成两段圆弧，长的一段叫做优弧，短的一段叫做劣弧. 这段劣弧的长度就是球面上这两点之间的最短路径，我们称之为**球面上两点间的距离**.

再回到图 2-2，飞机沿着大圆从北京向北经极地飞行到达纽约，航程最短. 它比飞机向东沿北纬 40°的小圆，经旧金山到达纽约的航程要短.

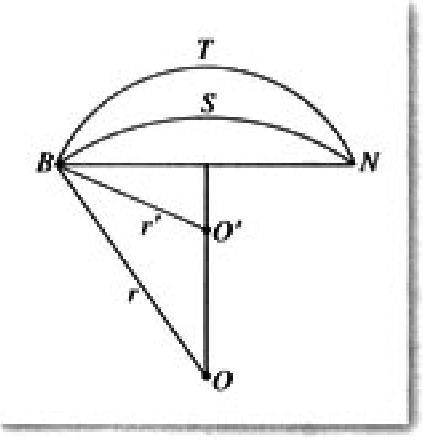


图 2-3

如果我们把图中的大圆弧和小圆弧画到同一个平面，如图 2-3. 观察图形可知，以点 O 为圆心，OB 为半径的圆弧 $\overset{\frown}{BSN}$，比以点 O' 为圆心，$O'B$ 为半径的圆弧 $\overset{\frown}{BTN}$ 要短. 也就是说，平面上经过任意两点的劣弧中，半径越大，劣弧越短.

这个结论非常重要，它的严格证明详见附录.

因此，球面上连结两点之间的最短路径是经过这两点的一段大圆弧——劣弧.

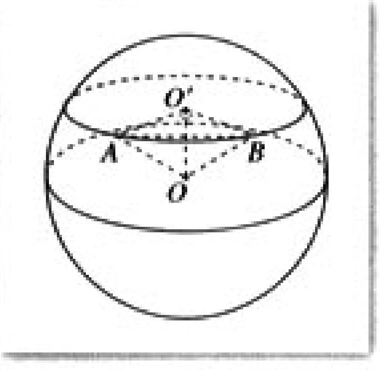


图 2-4

例 1 假设地球的半径为 R，如图 2-4，在北纬 45°的纬线上有 A，B 两点，且 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AO'B=90°$，求球面上 A，B 两点间的距离.

解：如图 2-4，连结 OA，OB，AB，OO'. 由纬度的意义，可得

$$\angle OBO'=45°，O'B=R\cdot\cos\angle OBO'=R\cdot\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

同理，$O'A=\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

因为 $\angle AO'B=90°$，

所以 $AB=\sqrt{O'A^2+O'B^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2}=R$.

又因为 $OA=OB=R$，

所以 $\angle AOB=60°$.

因此，球面上 A，B 两点间的距离等于 $\frac{\pi}{3}R$.

> ? 在圆 O' 中，劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度等于多少？

由于不在同一条直线上的三点唯一确定一个圆，因此过球面上两点必可连一条大圆弧——劣弧，且只可连一条大圆弧——劣弧. 这类似平面上经过两点可以连一条直线，且只可连一条直线；平面上两点之间的最短路径是线段. 因此，球面上的大圆可以“扮演”平面上直线的角色.

尽管球面上的大圆可以“扮演”平面上直线的角色，但是两者之间也有很大的不同.

平面上的两条直线可以相交：只有一个交点；也可以不相交（平行）：没有交点．但是球面上任意两个大圆（类似平面上的两条直线）必定相交，且有两个交点．

思考

为什么球面上两个大圆必定相交，且有两个交点？

如图 2-5，因为球面上的两个大圆所在的平面都经过球心 O，所以这两个大圆所在的平面有一个公共点，因此这两个平面必有一条过球心 O 的相交直线，这条相交直线显然是球的直径所在的直线，两个大圆的交点是这条直径的两个端点 A，A'．我们把球的直径的两个端点 A，A' 称为**对径点**．因此，两个大圆相交于对径点 A，A'．

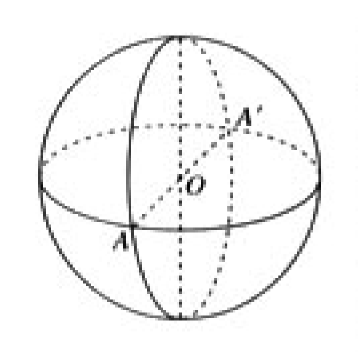


图 2-5

平面上两点间的距离在欧氏几何中起着重要作用．同样，球面上两点间的距离在球面几何中也起着重要的作用．球面角、球面三角形、球面多边形等等都是在球面上两点间距离的基础上定义的．

二、球面上的角

如图 2-6，我们知道，在平面上过一点 A，作两条射线 AB，AC，它们构成的图形叫做角，并记作$\angle BAC$．类似地，我们定义球面上的角——球面角．

如图 2-7，过球面上一点 A，作两条大圆弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AC}$，它们构成的图形叫做**球面角**，仍记作$\angle BAC$．点 A 称为球面角的**顶点**，大圆弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AC}$称为球面角的**边**，我们记作 AB，AC．

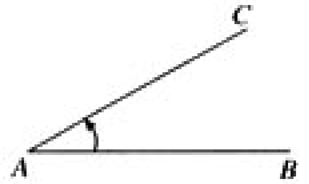


图 2-6

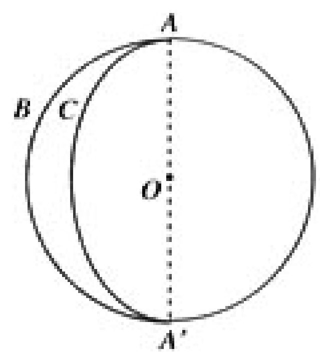


图 2-7

思考

如何度量球面角$\angle BAC$？

如图 2-8，球面角$\angle BAC$的两边AB，AC延长后相交于点A的对径点A'. AB，AC所在大圆的半平面构成一个二面角$B\text{-}AA'\text{-}C$，显然，球面角$\angle BAC$与二面角$B\text{-}AA'\text{-}C$唯一对应. 我们用二面角$B\text{-}AA'\text{-}C$来度量球面角$\angle BAC$，而二面角$B\text{-}AA'\text{-}C$的大小用它的平面角来度量，这样球面角$\angle BAC$的大小可以用平面上的角来度量了. 即在二面角$B\text{-}AA'\text{-}C$的棱AA'上，如果我们在球心O处，分别作$OD\perp AA'$，$OE\perp AA'$，且它们分别交球面角$\angle BAC$的两边AB，AC于D，E两点，那么$\angle DOE$为二面角$B\text{-}AA'\text{-}C$的平面角. 这时，用$\angle DOE$的大小度量球面角$\angle BAC$.

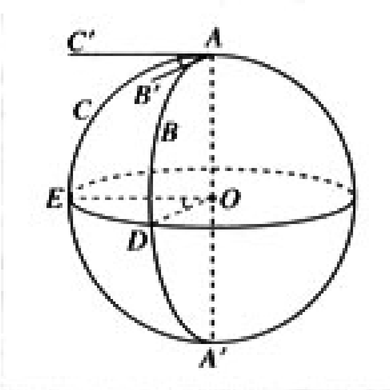


图 2-8

从另外一个角度看，如图 2-8，如果在点A处分别作大圆弧$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{AC}$的切线AB'和AC'，显然$AB'\perp AA'$，$OD\perp OA$，且AB'和OD在同一个平面内，所以$AB'/\!/OD$. 同理，$AC'/\!/OE$. 所以，$\angle B'AC'=\angle DOE$. 也就是说，$\angle DOE$等于点A处分别与球面角$\angle BAC$的两边AB和AC相切的射线AB'和AC'所成的角$\angle B'AC'$.

实际上，为了考虑问题的简便，二面角$B\text{-}AA'\text{-}C$的平面角通常取为大圆的圆心角$\angle DOE$.

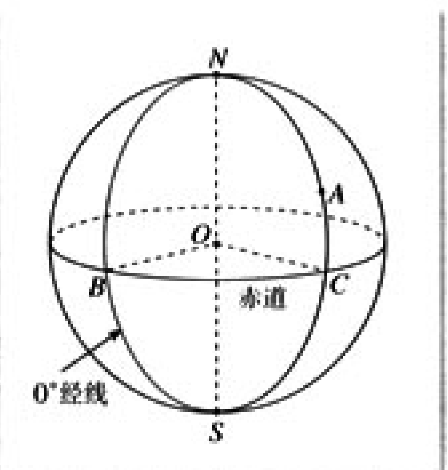


图 2-9

由球面角的定义，我们再看一下经线经度的意义. 如图 2-9，地球球面上一点的经线是过该点的经线（半个大圆）所在半平面与过格林尼治天文台的经线所在半平面组成的二面角的大小. 如图 2-9，点A在东经 90°的经线上，东经 90°的意义就是球面角$\angle BNC=90°$. 这个角我们也通常取为赤道所在大圆的圆心角，即$\angle BOC=90°$.

例 2 设地球的半径为R，且点A和点B分别表示地球赤道上的两个城市，它们的经度分别为东经 15°和西经 30°，那么它们之间的距离是多少？

解：如图 2-10，连结OA，OB，由经度的意义，我们知道，$\angle AOB=15°+30°=45°=\frac{\pi}{4}$.

因此，球面上A，B两点之间的距离为$\frac{\pi}{4}R$.

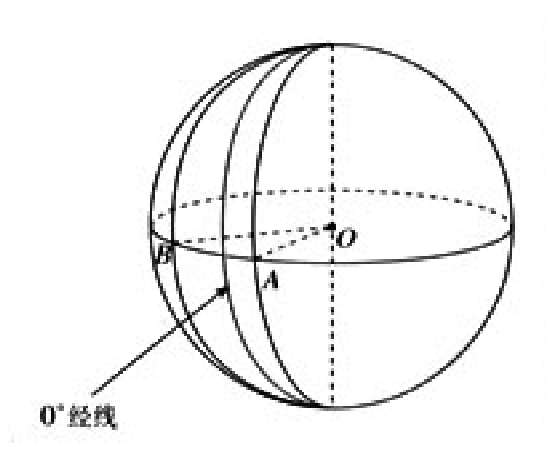
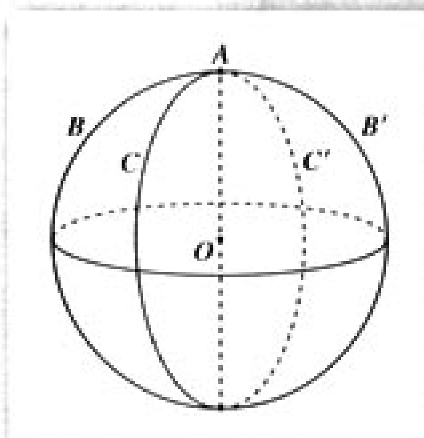


图 2-10

球面上的距离和球面角是球面几何中最基本的两个概念，它们是学习球面几何最基础的知识.

思考题

1. 已知地球的半径约为 6 400 km，北京位于北纬 40°、东经 116°，分别求北京到赤道、北极和南极的距离（用计算器，结果精确到 1 km）.
2. 如图，球面上经过点 A 的两个大圆相交构成四个球面角：$\angle BAC$，$\angle BAC'$，$\angle B'AC'$，$\angle B'AC$. 若 $\angle BAC=\alpha$，分别求 $\angle BAC'$，$\angle B'AC'$，$\angle B'AC$，并说明这四个球面角的和是多少.
3. 请把球面上的距离和球面角与平面上的距离和角作一个对比，并谈谈你对球面与平面性质的认识.



（第 2 题）

第三讲 球面上的基本图形

平面上除了直线和角之外，最基本的图形就是三角形了．类似地，本讲我们学习球面上的基本图形——极与赤道、球面二角形、球面三角形．

一、极与赤道

地球上有南极、北极和赤道．在球面几何中，我们也引进“极”和“赤道”的概念．

如图 3-1，我们知道，如果设点 N 为地球上的北极点，点 O 为地球的球心，那么半径 ON 垂直于赤道 L_N 所在的平面．也就是说，过球心 O 且垂直于地球半径 ON 的平面截地球球面所得的大圆是地球的赤道．

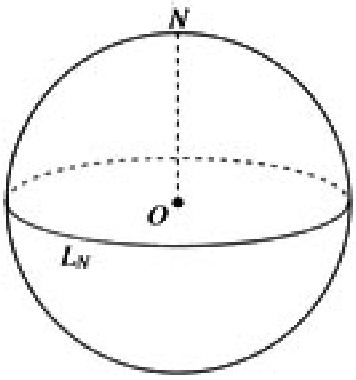


图 3-1

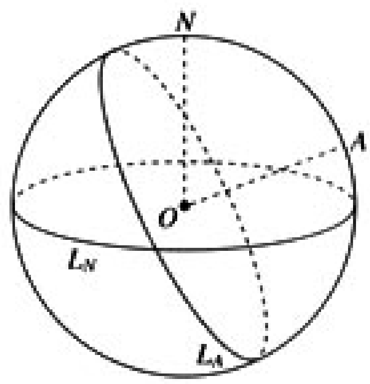


图 3-2

如图 3-2，我们可以在球面上任取一点 A，过球心 O 且垂直于球半径 OA 的平面截球面得到大圆 L_A，此时，我们称点 A 为极点，简称极；大圆 L_A 称为以点 A 为极点的赤道圆，简称赤道．这时，对于球面上的任意一点，均可得到与它对应的一个赤道；对于球面上的赤道，均可得到与它对应的两个极点．

从极与赤道的概念不难看出，它们是一体的，谁也离不开谁．有极就有与之对应的赤道，有赤道就有与之对应的极．两者之间除此之外，是否还有其他紧密的联系？

探究

由极与赤道的概念，求极与赤道上任意一点的距离.

容易知道，如果球的半径为 R，那么极点 A 与赤道上任意一点 B 的距离为 $\frac{\pi}{2}R$（图 3-3）. 也就是说，极与赤道上任意一点的距离相等. 类比平面上点到直线的距离，我们引入极到赤道的距离的概念.

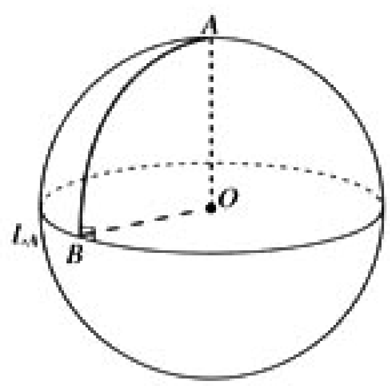


图 3-3

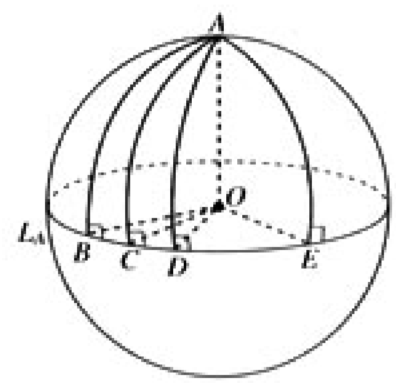


图 3-4

由于赤道是大圆，也就是球面上的一条“直线”，因此现在实际上是在讨论球面上一点（极）到与之对应的“直线”（赤道）的距离问题.

为了方便起见，我们不妨在单位球面上进行讨论. 如图 3-4，设与极点 A 对应的赤道为 L_A，点 B，E 是赤道 L_A 上的任意两点. 由极与赤道的概念可知，球面角 $\angle ABE$ 等于球面角 $\angle AEB$，且都等于 $\frac{\pi}{2}$. 因此极点 A 与赤道 L_A 上任一点 B 所连的大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 都是过此点的“垂线”. 换言之，过极点到赤道可以作无数条“垂线”，因此，极与赤道是球面上有特殊关系的点与“直线”. 这种情形在平面上是不存在的. 所以，如果点 C，D，…也是赤道 L_A 上的一些点，那么大圆弧 $\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{AD}$，…都是过极点 A 且与赤道 L_A 垂直的“垂线”.

另外，由极与赤道的概念可知，大圆弧 $\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{AE}$，…的长度均为 $\frac{\pi}{2}$. 反之，在球面上与点 A 的距离为 $\frac{\pi}{2}$ 的点必在赤道 L_A 上. 因此，我们也可以这样来理解赤道：与球面上一点 A 的距离为 $\frac{\pi}{2}$ 的点的集合（或轨迹），这个点的集合是一个大圆，这个大圆称为以点 A 为极点的赤道，记为 L_A.

二、球面二角形

> 类比平面上两条相交直线形成的角，球面上的两个大圆可以围成几个月形？

球面二角形与球面角有着紧密的联系．如图 3-5，球面角$\angle BAC$的两边 AB，AC 延长后相交于点 A 的对径点 A'．我们把球面角$\angle BAC$的两边 AB，AC 延长后相交于对径点 A'所组成的图形 $ABA'C$ 称为球面二角形．因为它像天空中一轮弯弯的月亮，所以又称它为月形．月形也可以看作球面上由两个大圆的各一半所围成的图形．我们把$\overset{\frown}{ABA'}$，$\overset{\frown}{ACA'}$称为球面二角形的边，记为 ABA'，ACA'，球面角$\angle BAC$或$\angle BA'C$称为球面二角形的夹角．

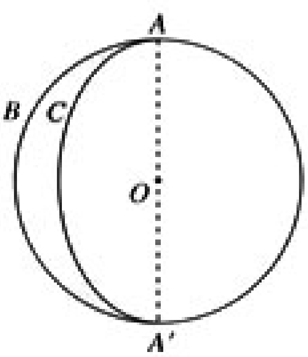


图 3-5

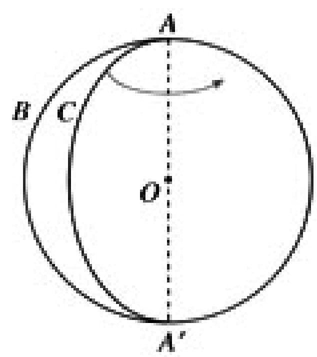


图 3-6

例 1　如图 3-6，已知球面角$\angle BAC=\alpha$（弧度），求证：月形 $ABA'C$ 的面积等于球面面积的$\frac{\alpha}{2\pi}$倍．

证明：将月形 $ABA'C$ 中的一条边 ACA' 在球面上由左向右旋转到边 ACA' 的位置，那么，边 ACA' 扫过整个球面．此时，边 ACA' 旋转了一周，所以球面可以看作是球面角为 2π 的月形．因此，若球面角$\angle BAC=\alpha$（弧度），那么月形 $ABA'C$ 的面积等于球面面积的$\frac{\alpha}{2\pi}$倍．因此

月形 $ABA'C$ 的面积$=\frac{\alpha}{2\pi}\times$球面面积$=\frac{\alpha}{2\pi}\times 4\pi r^2=2\alpha r^2$（其中 r 为球的半径）．

思考

球面二角形及其面积，与圆的圆心角及其扇形面积大小有何联系与区别？

三、球面三角形

1. 球面三角形

如图 3-7，我们知道，平面上的三角形是由三条线段首尾顺次相接构成的封闭图形．完全类似，我们把球面上三条“直线”段（即三条大圆的劣弧）首尾顺次相接构成的封闭图形称为球面三角形．也就是说，在球面上，给出不在同一大圆上的三点 A，B，C（图 3-8），可以得到经过这三点中任意两点的大圆的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$，这三条劣弧组成的图形称为球面 $\triangle ABC$．这三条劣弧称为球面 $\triangle ABC$ 的边，表示为 AB，BC，CA；A，B，C 三点称为球面 $\triangle ABC$ 的顶点；$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 三个球面角称为球面 $\triangle ABC$ 的三个内角．

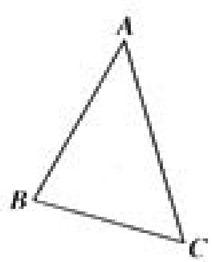


图 3-7

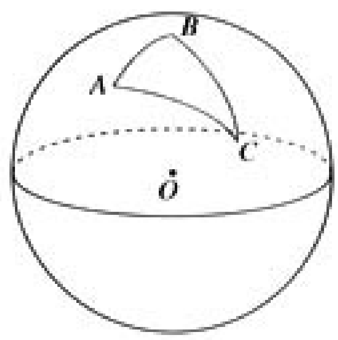


图 3-8

思考

如何度量球面 $\triangle ABC$ 的三边和三个内角？

如图 3-9，由于球面 $\triangle ABC$ 的三边都是圆弧，如果分别连结球心 O 与 A，B，C 三点，由球面角的定义及其度量可知，球面 $\triangle ABC$ 的三个内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 可以分别由二面角 $B\text{-}OA\text{-}C$，$A\text{-}OB\text{-}C$，$B\text{-}OC\text{-}A$ 来度量．

同样，如果设 $\angle AOB=\alpha$（弧度），$\angle BOC=\beta$（弧度），$\angle COA=\gamma$（弧度），那么球面 $\triangle ABC$ 的三边 AB，BC，CA 分别为

$$AB=r\alpha,\ BC=r\beta,\ CA=r\gamma,$$

其中 r 为球的半径．若 $r=1$，则 $AB=\alpha$，$BC=\beta$，$CA=\gamma$．

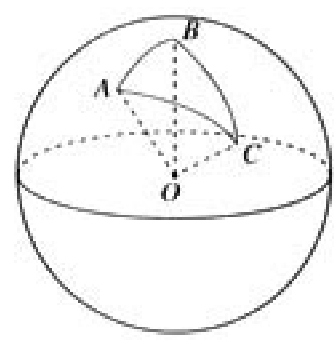


图 3-9

2. 三面角

从上面的过程可以看出，无论是度量球面 $\triangle ABC$ 的边长，还是它的内角，都涉及一个图形，即从球心 O 出发的三条线段 OA，OB，OC 组成的图形（图 3-10）．如果延长三条

线段 OA，OB，OC，使它们成为射线，那么这三条射线构成三个平面（类似三棱锥）．类比二面角，我们把这样的图形称为**三面角**，记为 $O\text{-}ABC$．其中点 O 称为三面角的顶点，OA，OB，OC 称为它的棱，$\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COA$ 称为它的面角．三面角中每相邻两面构成的二面角称为它的二面角，一个三面角有三个二面角．

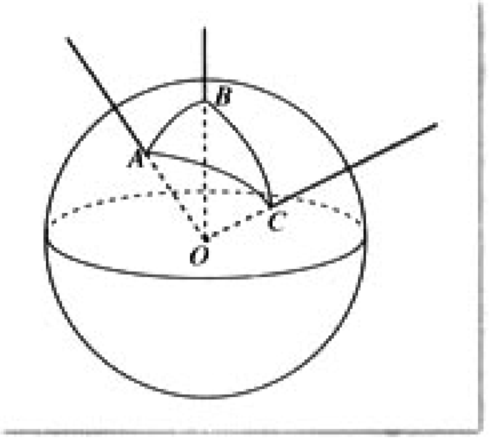


图 3-10

综上，球面$\triangle ABC$ 的三个内角对应于三面角 $O\text{-}ABC$ 的三个二面角，三条边对应于三面角 $O\text{-}ABC$ 的三个面角．即

球面$\triangle ABC$	三面角 $O\text{-}ABC$
内角	二面角
边	面角

因为有上面的对应关系，对球面上边与角的研究就转化为立体几何中角的研究，即我们可以利用三面角的有关知识研究球面三角形．在球面几何中，三面角是研究问题的一个“脚手架”．

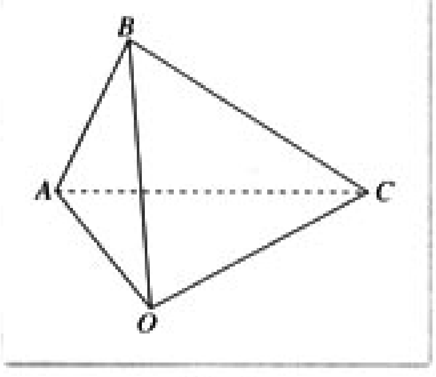


图 3-11

例 2 已知一个球心为 O 的单位球面上有 A，B，C 三点，且三面角 $O\text{-}ABC$ 的三个面角分别为 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$，求球面$\triangle ABC$ 的三边长．

解：如图 3-11，不妨设三面角 $O\text{-}ABC$ 的三个面角分别为

$$\angle AOB=\frac{\pi}{6},\ \angle BOC=\frac{\pi}{3},\ \angle COA=\frac{\pi}{4},$$

因此，球面$\triangle ABC$ 的三边长分别为

$$AB=\frac{\pi}{6},\ BC=\frac{\pi}{3},\ CA=\frac{\pi}{4}.$$

3. 对顶三角形

如图 3-12，给出球面$\triangle ABC$，其顶点 A，B，C 的对径点分别为 A'，B'，C'．容易证明，分别经过 A'，B'，C' 三点中任意两点的三条“直线”段（大圆劣弧）也构成一个球面三角形．我们把顶点分别为 A'，B'，C' 的球面$\triangle A'B'C'$，称为球面$\triangle ABC$ 的**对顶三角形**．

显然，由对径点的定义可知，球面$\triangle A'B'C'$ 的对顶三角形是球面$\triangle ABC$．

容易看出，两个对顶的球面三角形关于球心对称．

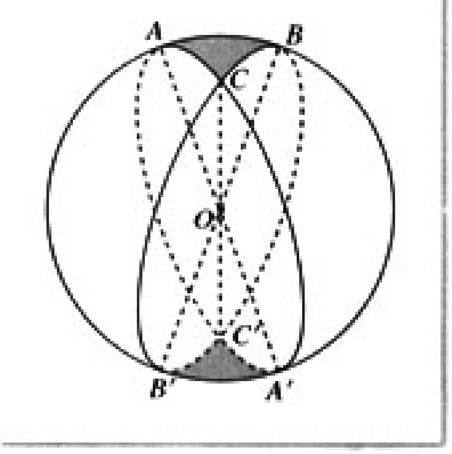


图 3-12

4. 球极三角形

如图 3-13，对于任意球面$\triangle ABC$，假设与边 BC 所在

大圆对应的极点为 A'，A''，与边 AC 所在大圆对应的极点为 B'，B''，与边 AB 所在大圆对应的极点为 C'，C''，而且点 A' 与 A，点 B' 与 B，点 C' 与 C 在同一个半球面内，这时，我们称球面 $\triangle A'B'C'$ 为球面 $\triangle ABC$ 的**极对称三角形**，简称**球极三角形**.

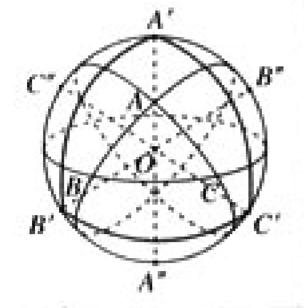


图 3-13

思考

如果球面 $\triangle A'B'C'$ 是球面 $\triangle ABC$ 的极对称三角形，那么球面 $\triangle A'B'C'$ 的极对称三角形是什么？为什么？

如图 3-14，设球面 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a，b，c，且它们对应的极点分别为 A'，B'，C'（分别与 A，B，C 在同一个半球面内），球极 $\triangle A'B'C'$ 的三边分别为 a'，b'，c'.

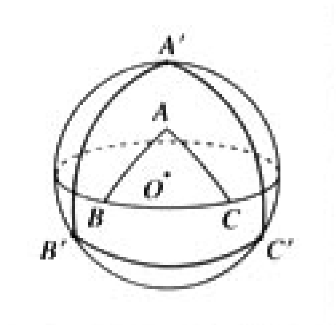


图 3-14

因为点 B' 是 b 所在大圆的极点，所以点 A，B' 距离是 $\frac{\pi r}{2}$（r 为球的半径），同理，点 A，C' 距离也是 $\frac{\pi r}{2}$.

由于点 A 与点 B'，C' 的距离都是 $\frac{\pi r}{2}$，因此，与点 A 的对应的赤道是 a' 所在的大圆. 同理可知，与点 B 的对应的赤道是 b' 所在的大圆，与点 C 的对应的赤道是 c' 所在的大圆. 又因为点 A 与 A'，点 B 与 B'，点 C 与 C' 在同一个半球面内，所以球面 $\triangle A'B'C'$ 的极对称三角形是球面 $\triangle ABC$. 也就是说

球面 $\triangle ABC$ 与它的球极 $\triangle A'B'C'$ 互为极对称三角形.

探究

球面三角形与它的球极三角形之间还有其他关系吗？

由球极三角形的定义，可以想到，球面 $\triangle ABC$ 与它的球极 $\triangle A'B'C'$ 的边角之间也有一定的关系. 为了考虑问题的简便，我们设球面为单位球面. 如图 3-15，延长球面 $\triangle ABC$ 的边 b，c，它们分别交 a' 于点 D，E，显然

$$a'=B'E+C'D-DE.$$

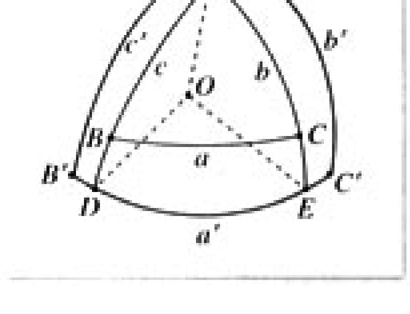


图 3-15

因为与极点 A 对应的赤道是 a' 所在的大圆，所以 $\angle A=DE$. 又因为与极点 B' 对应的赤道是 b 所在的大圆，所以 $B'E=\frac{\pi}{2}$. 同理，$C'D=\frac{\pi}{2}$.

因此

$$a'=B'E+C'D-DE=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\angle A=\pi-\angle A.$$

同理，$b'=\pi-\angle B$，$c'=\pi-\angle C$.

由此我们得到

在单位球面上，如果球面$\triangle ABC$的极对称三角形是球面$\triangle A'B'C'$，且它们的内角（单位：弧度）与边长分别为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，a，b，c和$\angle A'$，$\angle B'$，$\angle C'$，a'，b'，c'，那么

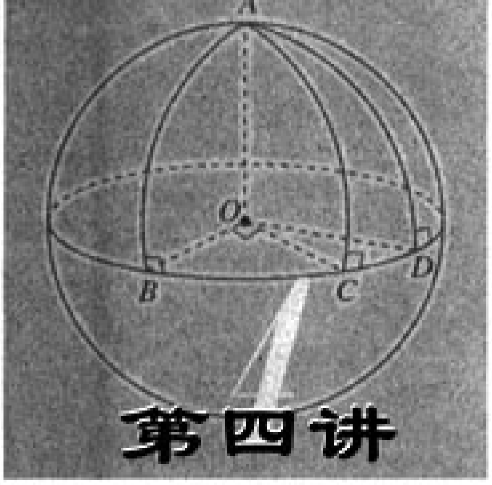
$$a'=\pi-\angle A，b'=\pi-\angle B，c'=\pi-\angle C;$$
$$a=\pi-\angle A'，b=\pi-\angle B'，c=\pi-\angle C'.$$

这个事实告诉我们，球面三角形与它的球极三角形的边角之间存在定量的关系，这是一个很重要的性质．在第五讲和第七讲中，我们会看到它的作用．

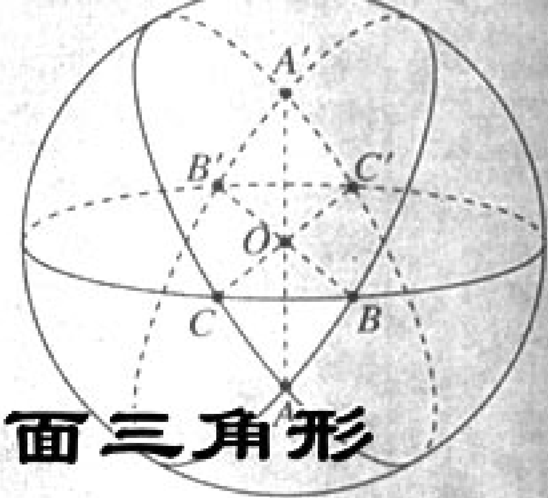
球面三角形具有很多重要的性质，下面第四讲和第五讲我们重点研究球面三角形．

思考题

1. 已知球心为O的单位球面上有A，B，C三点，且三面角$O\text{-}ABC$的三个面角分别为$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$，求球面$\triangle ABC$的三个内角的度数．
2. 求证：球面三角形必在同一个半球面上．
3. 求证：两个对顶的球面三角形的三条边、三个内角对应相等．
4. 你能找到三个内角都是$\frac{\pi}{2}$的球面三角形吗？如果能找到这样的球面三角形，它的球极三角形是什么？为什么？
5. 已知单位球面上球面三角形的三个内角分别为$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$，求它的球极三角形的三个内角．
6. 我们知道，单位球面上，球面三角形和它的球极三角形的边角之间存在定量的关系．求证：在任意球面上，球面$\triangle ABC$和它的球极$\triangle A'B'C'$之间也存在类似的边角关系．



第四讲 球面三角形



本讲我们在类比平面三角形有关性质的基础上，讨论球面三角形三边之间的关系、球面“等腰”三角形、球面三角形的周长以及球面三角形的内角和，重点是球面三角形的内角和，并比较它们与平面三角形性质的异同点.

我们知道，两个半径相同的球面可以通过平移使它们重合，而两个半径不同的球面可以通过放大或缩小半径使它们重合，即它们是相似的. 因此，在单位球面上讨论球面几何不失一般性. 为了讨论方便，如果没有特别说明，我们重点讨论单位球面上的球面三角形的性质.

一、球面三角形三边之间的关系

我们知道，平面三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边. 在球面上是否也有类似的结论呢?

由于三面角的引入，对球面上边与角的研究转化为立体几何中角的研究. 我们看一下与球面三角形对应的三面角.

由于球面三角形的边对应于三面角的面角，因此我们探究三面角中三个面角之间的关系.

如图 4-1，在单位球面上，球面$\triangle ABC$ 的三条边分别为 a，b，c，球心为 O，那么 $O\text{-}ABC$是一个三面角，且

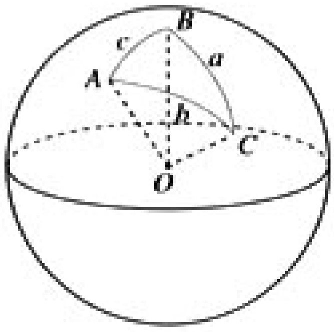


图 4-1

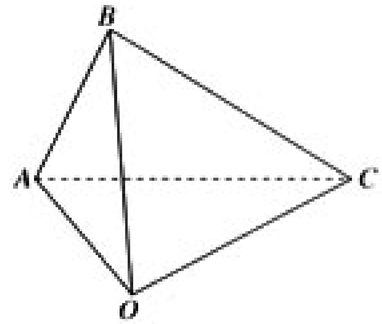


图 4-2

$$a=BC=\angle BOC,$$
$$b=CA=\angle COA,$$
$$c=AB=\angle AOB.$$

如图 4-2，在三面角 $O\text{-}ABC$ 中，容易证明

$$\angle AOB+\angle BOC>\angle COA.$$

请你给出证明过程.

这样，我们得到

三面角中的两个面角之和大于第三个面角.

对应到球面三角形中，即有

球面三角形中，两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.

例 1 已知单位球面上三条大圆弧长分别为$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，以这三条大圆弧为边是否可以构成一个球面三角形？

解：由于

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3},$$

所以，以长为$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$的三条大圆弧为边，不能构成一个球面三角形.

二、球面“等腰”三角形

类似平面三角形的两边相等，那么它们的对角相等，在球面三角形中，等边对等角，反之亦然. 也就是说，存在球面“等腰”三角形.

下面我们给出它的证明.

例 2 已知：在球面△ABC 中，$b=c$，求证：$\angle B=\angle C$.

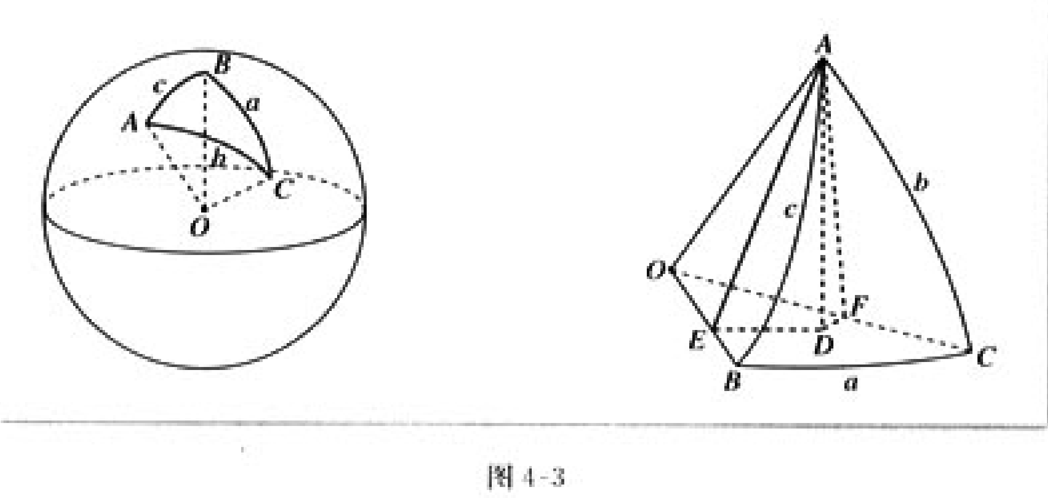


图 4-3

证明：如图 4-3，要证$\angle B=\angle C$，只需证二面角 $A\text{-}OB\text{-}C$ 等于二面角 $A\text{-}OC\text{-}B$ 即可.

连结 OA，OB，OC，并把三面角 $O\text{-}ABC$ 和球面△ABC 移出来. 作 $AD\perp$平面 OBC，垂足为 D. 作 $DE\perp OB$，$DF\perp OC$，垂足分别为 E，F，连结 AE，AF.

因为 $OB\perp AD$，$OB\perp DE$，
所以 $OB\perp$ 平面 ADE，
所以 $OB\perp AE$.
同理 $OC\perp AF$.
因为 $b=c$，
所以 $\angle AOB=\angle AOC$，
所以 $\mathrm{Rt}\triangle AOE\cong \mathrm{Rt}\triangle AOF$，
因此 $AE=AF$.
同理 $\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong \mathrm{Rt}\triangle ADF$.
因此 $\angle AED=\angle AFD$，
又因为 $\angle AED$，$\angle AFD$ 分别为二面角 $A\text{-}OB\text{-}C$，二面角 $A\text{-}OC\text{-}B$ 的平面角，
所以 $\angle B=\angle C$.
反过来，不难证明，在球面三角形中，等角对等边.
同样，在球面三角形中，大角对大边，大边对大角.

你能给出证明吗？试一试！

三、球面三角形的周长

思考

在平面三角形中，由于三角形的每条边长可以是任意长，因此三角形的周长可以等于任意大的数. 对于球面三角形，其周长会是怎样的情形呢？

因为球面三角形的每条边长都是大圆的劣弧，都小于大圆周长的一半，因此，球面三角形的周长小于 $\frac{3}{2}$ 个大圆周长，不能任意长. 实际上，球面三角形的周长小于大圆周长.

例 3　求证：**球面三角形的周长小于大圆周长.**

证明： 如图 4-4，设球面 $\triangle ABC$ 的三条边长分别为 a，b，c，球心为 O. 连结 OA，OB，OC，那么 $O\text{-}ABC$ 是一个三面角.

在三面角 $O\text{-}ABC$ 中，连结 AB，BC，AC. 由于球面三角形的边长与三面角的面角之间的对应关系，我们把球面三角形的边长问题转化为三面角的面角问题.

因为 $\angle AOB=\pi-(\angle OAB+\angle OBA)$，

$\angle BOC=\pi-(\angle OBC+\angle OCB)$，

$\angle COA=\pi-(\angle OAC+\angle OCA)$，

所以

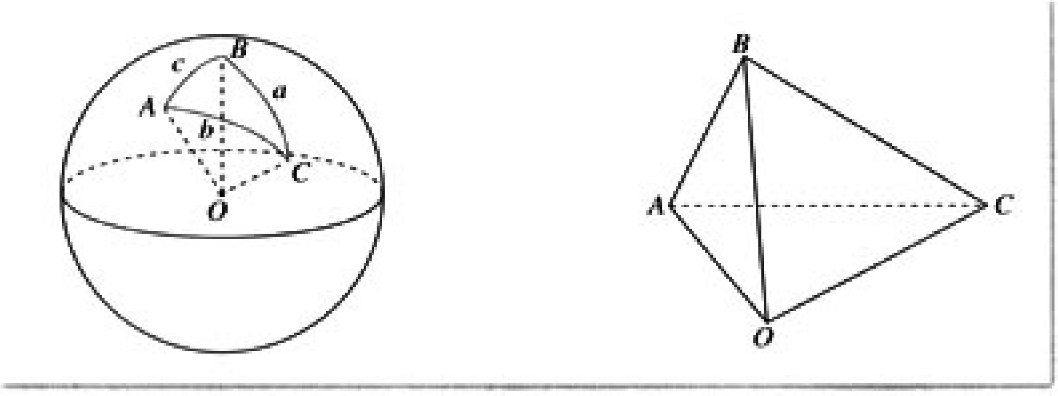


图 4-4

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=3\pi-(\angle OAB+\angle OBA+$
$\angle OBC+\angle OCB+\angle OCA+\angle OAC)$.

因为三面角中的两个面角之和大于第三个面角，

所以$\angle OAB+\angle OAC>\angle CAB$，

$\angle OBA+\angle OBC>\angle ABC$，

$\angle OCB+\angle OCA>\angle BCA$.

又因为$\angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=\pi$，

所以

$$\angle OAB+\angle OBA+\angle OBC+\angle OCB+\angle OCA+\angle OAC$$
$$>\angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=\pi,$$

所以

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=3\pi-(\angle OAB+\angle OBA+\angle OBC+\angle OCB+\angle OCA+\angle OAC)<2\pi.$$

所以，三面角 $O\text{-}ABC$ 的三个面角的和小于 2π.

因此，球面$\triangle ABC$ 的周长小于大圆周长.

这是球面三角形的一个很重要的结论.

四、球面三角形的内角和

思考

我们知道，平面三角形的一个非常重要的性质是内角和等于 π. 球面三角形的内角和是否也是一个定值呢？

我们看一个例子.

如图 4-5，设点 A 表示地球的北极，L_A 为赤道，点 B，C 是赤道 L_A 上的两点，且点 B 所在的经线是 $0°$，点 C 所在的经线是 $90°$.

因为地球上的经线和赤道都是大圆，且经线所在的平面与赤道所在的平面垂直，所以球面角 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$.

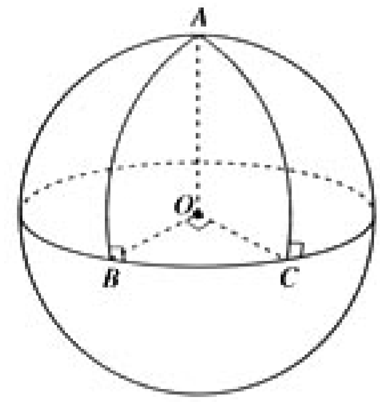


图 4-5

又由极与赤道的概念可知，球面角 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，因此球面 $\triangle ABC$ 的三个内角的和

$$\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=\frac{3}{2}\pi>\pi.$$

这说明球面上存在一个三角形，它的内角和大于 π. 是不是球面上任意三角形的内角和都大于 π 呢？

观察球面 $\triangle ABC$，直观告诉我们，它的三个内角确定后，其边长也唯一确定（这个结论在“第五讲　球面三角形的全等”会给出严格的证明）. 这时，球面 $\triangle ABC$ 唯一确定，其面积是唯一的. 因此，我们考虑球面 $\triangle ABC$ 的三个内角和与其面积之间的关系.

显然，球面 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\frac{1}{4}$ 上半球面面积，或说等于 $\frac{1}{8}$ 球面面积. 如果球的半径为 r，那么

$$\text{球面}\triangle ABC\text{的面积}=\frac{1}{8}\times 4\pi r^2=\frac{1}{2}\pi r^2=\left(\frac{3}{2}\pi-\pi\right)r^2$$
$$=(\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC-\pi)r^2.$$

探究

我们再在赤道上取一点 D，点 D 所在的经线是东经 $120°$，这时球面 $\triangle ABD$ 的面积是多少？

如图 4-6，容易知道，球面角 $\angle ABD=\frac{\pi}{2}$，$\angle ADB=\frac{\pi}{2}$，$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$，因此球面 $\triangle ABD$ 的三个内角的和

$$\angle ABD+\angle ADB+\angle BAD=\frac{5}{3}\pi.$$

$$\text{球面}\triangle ABD\text{的面积}=\frac{1}{6}\times 4\pi r^2=\frac{2}{3}\pi r^2=\left(\frac{5}{3}\pi-\pi\right)r^2$$
$$=(\angle ABD+\angle ADB+\angle BAD-\pi)r^2.$$

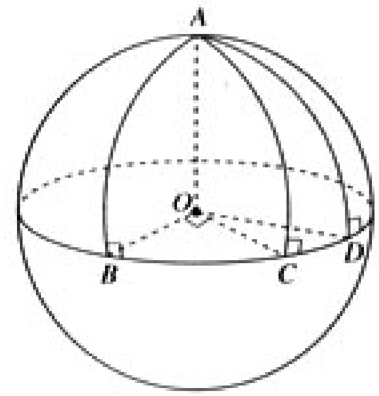


图 4-6

一般地，在半径为 r 的球面上，是否有

任意球面$\triangle ABC$的面积$=(A+B+C-\pi)r^2$？（A，B，C分别为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的弧度数）

事实上，这个猜想是正确的，即

在半径为 r 的球面上，任意球面$\triangle ABC$的面积$=(A+B+C-\pi)r^2$．特别地，在单位球面上，球面$\triangle ABC$的面积$=A+B+C-\pi$．

上述结论说明，球面三角形的内角和大于 π．

这个结论非常重要，我们给出它的证明．

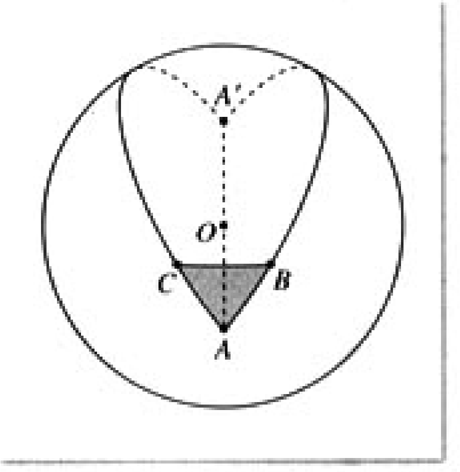


图 4-7

分析：如图 4-7，直接求球面$\triangle ABC$的面积不容易，但是求月形（球面二角形）的面积容易．月形 $ABA'C$ 的面积等于球面面积的$\frac{\alpha}{2\pi}$倍，其中球面角$\angle BAC=\alpha$．点 A，A' 互为对径点，而且月形 $ABA'C$ 可以看作由球面$\triangle ABC$和球面$\triangle A'BC$拼接在一起．因此，我们考虑把求球面$\triangle ABC$的面积转化为求某些月形的面积．

证明：如图 4-8，因为月形的两个顶点互为对径点，设 A，B，C 三点的对径点分别为 A'，B'，C'，我们分别观察以 A，B，C 为顶点的三个月形：

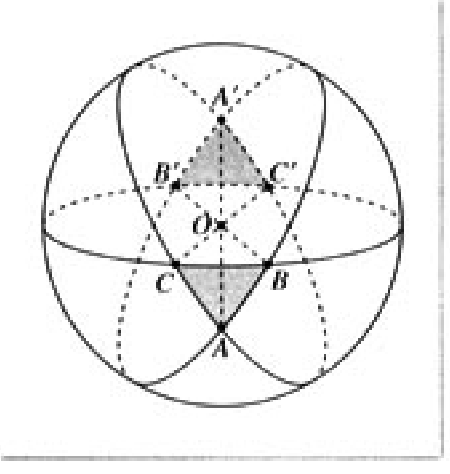


图 4-8

以 A 为顶点的月形 $ABA'C$：它可以看作由球面$\triangle ABC$和球面$\triangle A'BC$拼接在一起；

以 B 为顶点的月形 $BCB'A$：它可以看作由球面$\triangle BCA$和球面$\triangle B'CA$拼接在一起；

以 C 为顶点的月形 $CAC'B$：它可以看作由球面$\triangle CAB$和球面$\triangle C'AB$拼接在一起．

设球面$\triangle ABC$的三个内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$分别为 A，B，C（弧度）．下面求月形 $ABA'C$ 的面积．

我们知道，月形 $ABA'C$ 的面积等于整个球面面积的$\frac{A}{2\pi}$倍，即

月形 $ABA'C$ 的面积$=\frac{A}{2\pi}\times 4\pi r^2=2Ar^2$．

因此，

球面$\triangle ABC$的面积+球面$\triangle A'BC$的面积=月形 $ABA'C$ 的面积$=2Ar^2$； …… (1)

球面$\triangle ABC$的面积+球面$\triangle B'CA$的面积=月形 $BCB'A$ 的面积$=2Br^2$； …… (2)

球面$\triangle ABC$的面积+球面$\triangle C'BA$的面积=月形 $CAC'B$ 的面积$=2Cr^2$． …… (3)

又因为

球面$\triangle ABC$的面积+球面$\triangle A'BC$的面积+球面$\triangle B'CA$的面积+球面$\triangle CA'B'$的面积=半球面面积； …… (4)

球面$\triangle CA'B'$的面积=球面$\triangle C'AB$的面积； …… (5)

(1)+(2)+(3) 得

3×球面△ABC的面积+球面△$A'BC$的面积+球面△$B'CA$的面积+球面△$C'BA$的面积$=2(A+B+C)r^2$，　……（6）

将（4）（5）代入（6）得

2×球面△ABC的面积$+2\pi r^2=2(A+B+C)r^2$，

即

球面△ABC的面积$=(A+B+C-\pi)r^2$.

因为面积是一个正数，因此

球面三角形的内角和大于 π.

这与平面三角形的内角和等于 π 有很大区别，也是球面几何作为非欧几何模型与欧氏几何不同的重要特征之一.

思考

球面三角形的内角和是不是可以任意大？

如图 4-9，由于球面三角形的内角所对的边都小于大圆周的一半，所以每个内角都小于 π，因此，其**内角和小于 3π**. 实际上，由于球面三角形的周长小于大圆周长，球面三角形的内角和可以更小，可以证明**球面三角形的内角和小于 2π**.

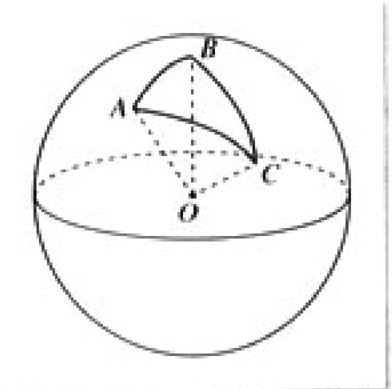
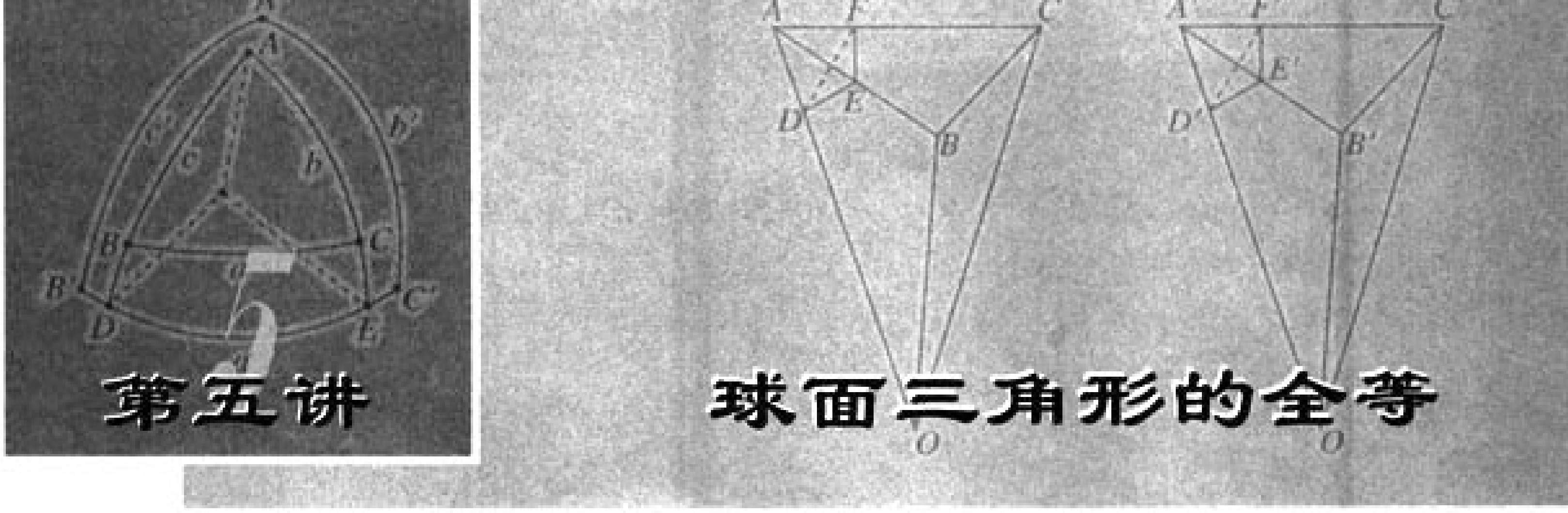


图 4-9

思考题

1. 球面上的三个大圆可以构成多少个球面三角形？
2. 设球面△ABC的三个内角分别为∠A，∠B，∠C，且点 A，B，C 的对径点分别为 A'，B'，C'，试分别写出球面△$A'BC$，△$AB'C$，△ABC'的三个内角与它们的面积.
3. 求证：球面三角形的内角和小于 2π.



第五讲 球面三角形的全等

全等是图形的重要性质之一．在欧氏几何中，我们对全等的研究是从平面三角形开始的，先讲全等的定义，再讲判定三角形全等的公理，最后运用三角形全等证明一些命题．我们对球面三角形全等的研究也遵循同样的思路．

类似于平面三角形全等的定义，我们规定两个球面三角形全等是指两个图形完全相等，即球面三角形的六个元素：三条边、三个角分别相等．

由于球面的半径不同，球面的大小也不一样，所以研究球面三角形的全等问题，只能在同一球面上或半径相等的球面上才有意义．

下面，我们讨论两个球面三角形全等的判定．

1．“边边边”（s. s. s）判定定理

我们知道，如果平面三角形的三条边对应相等，那么这两个三角形全等．类似地，**如果两个球面三角形的三对边对应相等，那么这两个球面三角形全等．**

思考

怎样证明这个判定定理？

证明：由球面$\triangle ABC$与三面角$O\text{-}ABC$的对应关系可知，由于球面三角形的三条边对应相等，所以与球面三角形对应的两个三面角的面角相等．这时，如果能够证明这两个三面角中每两个面所成的二面角也相等，那么就证明了球面三角形中的角对应相等，也即两个球面三角形全等．

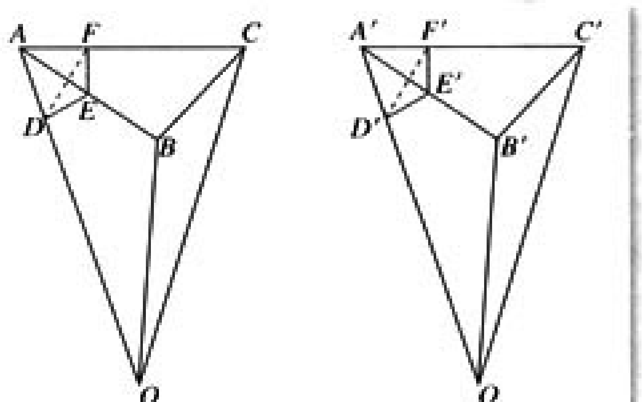


图 5-1

如图 5-1，在两个三面角$O\text{-}ABC$和$O\text{-}A'B'C'$中，连结AB，BC，CA，$A'B'$，$B'C'$，$C'A'$．

因为球面$\triangle ABC$与球面$\triangle A'B'C'$的三条边对应相等，即

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{B'C'}$，$\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{C'A'}$，

又因等弧上的弦相等，

所以$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$．

因为三对面角$\angle AOB=\angle A'OB'$，$\angle BOC=\angle B'OC'$，$\angle COA=\angle C'OA'$．

又因为 $OA=OB=OC=OA'=OB'=OC'$，

所以 $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$，$\triangle BOC \cong \triangle B'OC'$，$\triangle COA \cong \triangle C'OA'$，

所以 $\angle OAB=\angle OA'B'$，$\angle OBC=\angle OB'C'$，$\angle OCA=\angle OC'A'$.

又因为 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，所以 $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

在 OA 和 OA' 上分别取点 D 和 D'，使 $AD=A'D'$，再过点 D 在平面 OAB 和 OAC 上作 OA 的垂线，分别交 AB 和 AC 于点 E 和 F；同样地，过点 D' 在平面 $OA'B'$ 和 $OA'C'$ 上作 OA' 的垂线，分别交 $A'B'$ 和 $A'C'$ 于点 E' 和 F'，容易证明

$$\angle EDF=\angle E'D'F'.$$

又因为 $\angle EDF$ 和 $\angle E'D'F'$ 分别是二面角 $B\text{-}OA\text{-}C$ 和 $B'\text{-}OA'\text{-}C'$ 的平面角，所以这两个二面角相等.

同理可证，另外两对二面角也相等.

由球面三角形的内角与三面角中二面角的对应关系，可得

球面 $\triangle ABC$ 的和球面 $\triangle A'B'C'$ 的三对内角对应相等.

所以，球面 $\triangle ABC \cong$ 球面 $\triangle A'B'C'$.

借助三面角这个“脚手架”，我们还可以证明下面一些球面三角形全等的判定定理.

2. “边角边”（s. a. s）判定定理

如果两个球面三角形的两对边对应相等，且它们的夹角也相等，那么这两个球面三角形全等.

3. “角边角”（a. s. a）判定定理

如果两个球面三角形的两对角对应相等，且它们的夹边也相等，那么这两个球面三角形全等.

请同学们借助三面角这个“脚手架”，仿照“边边边”（s. s. s）判定定理的证明，证明上述两个定理.

4. “角角角”（a. a. a）判定定理

思考

在平面上，我们知道，三对角对应相等的两个三角形不一定全等. 也就是说，平面三角形全等的一个必要条件是至少有一对边对应相等. 在球面上，三对角对应相等的两个球面三角形是否也有类似的结论呢？

答案是否定的. 我们知道，在半径为 r 的球面上，

$$\text{球面}\triangle ABC\text{的面积}=(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)r^2.$$

因此，若两个球面三角形的三对内角相等，那么它们的面积一定相等. 所以，若两个球面三角形的三对内角相等（可以理解为形状一样），则它们的面积必相等（可以理解为大小一样），形状和大小一样的两个三角形当然全等. 所以，在球面上有两个球面三角形全等

的“角角角（a. a. a）”判定定理.

如果两个球面三角形的三对角对应相等，那么这两个球面三角形全等.

下面我们给出它的证明.

已知：在同一单位球面上有两个球面$\triangle ABC$和$\triangle DEF$，它们的三对角对应相等，即$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$.

求证：球面$\triangle ABC\cong$球面$\triangle DEF$.

分析：由于已经学过三个判定球面三角形全等的判定定理，我们尝试把球面三角形中角的关系转化为边的关系，由边的关系判定球面三角形全等．由于球面三角形与它的球极三角形之间存在定量的边角关系，因此我们设法通过构造球面三角形的球极三角形，实现球面三角形与其球极三角形之间边角的转换，进而证明结论.

证明：设球面$\triangle ABC$和$\triangle DEF$的极对称三角形分别为球面$\triangle A'B'C'$和$\triangle D'E'F'$，且这四个球面三角形的边长分别为a，b，c；d，e，f；a'，b'，c'；d'，e'，f'．根据球面三角形和球极三角形之间的边角关系，有

$$a'=\pi-\angle A,\ d'=\pi-\angle D,$$
$$b'=\pi-\angle B,\ e'=\pi-\angle E,$$
$$c'=\pi-\angle C,\ f'=\pi-\angle F.$$

又因为$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，

所以$a'=d'$，$b'=e'$，$c'=f'$.

因此，球面$\triangle A'B'C'\cong$球面$\triangle D'E'F'$.

所以$\angle A'=\angle D'$，$\angle B'=\angle E'$，$\angle C'=\angle F'$.

又根据球面三角形和球极三角形之间的边角关系，有

$$a=\pi-\angle A',\ d=\pi-\angle D',$$
$$b=\pi-\angle B',\ e=\pi-\angle E',$$
$$c=\pi-\angle C',\ f=\pi-\angle F',$$

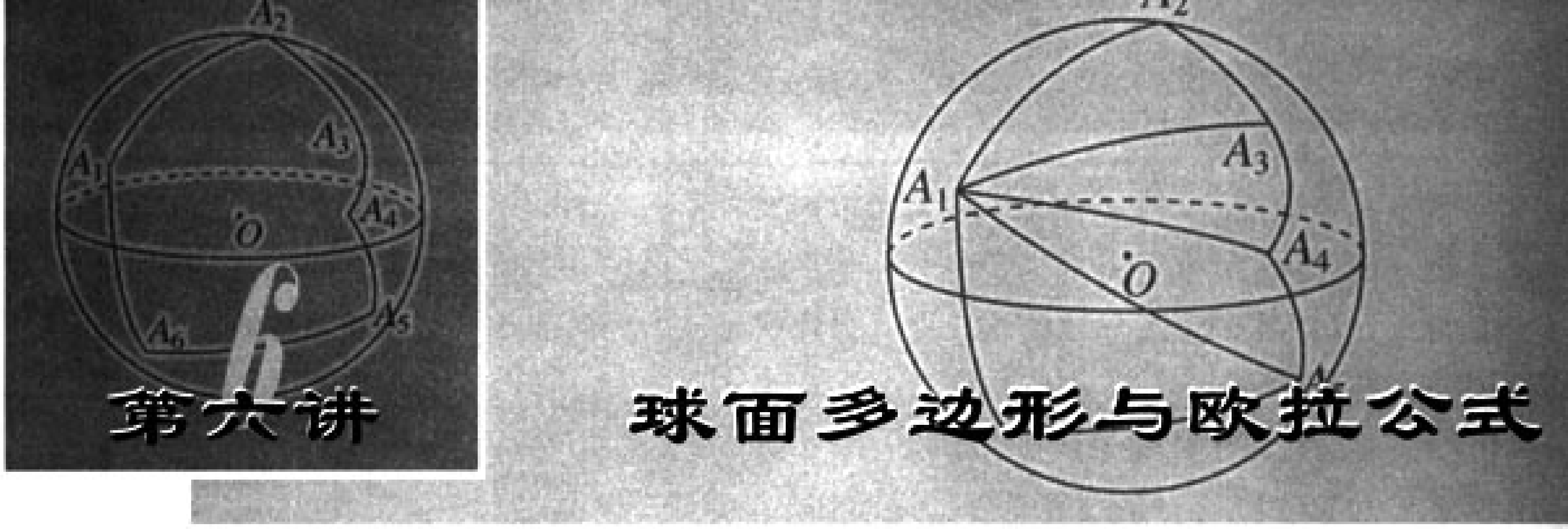
所以$a=d$，$b=e$，$c=f$.

因此，球面$\triangle ABC\cong$球面$\triangle DEF$.

从球面三角形全等的“角角角（a. a. a）”判定定理可见，平面几何与球面几何有显著不同之处．在平面几何中，如果两个三角形的三对角相等，那么这两个三角形相似，不一定全等；而在同一个球面上，如果两个球面三角形的三对角对应相等，那么这两个球面三角形全等．也就是说，在同一个球面上，不存在相似三角形这个概念，或者说，“相似”的三角形必定全等.

思考题

1. 仿照球面三角形全等的“边边边”（s. s. s）判定定理的证明，证明球面三角形全等“边角边”（s. a. s）和“角边角”（a. s. a）两个判定定理.
2. 证明：球面三角形与它的对顶三角形全等.
3. 利用球面三角形全等的判定定理证明：若一个球面三角形的两条边相等，则这两条边所对的角也相等；反之亦然.



第六讲 球面多边形与欧拉公式

球面几何有很多应用，用球面多边形的内角和公式证明拓扑学中的著名公式——欧拉公式就是一个重要的应用.

本讲我们首先在球面三角形的基础上介绍球面多边形，然后推导球面多边形的内角和公式，最后用球面多边形的内角和公式证明欧拉公式.

一 球面多边形及其内角和公式

与先学平面三角形，再学平面多边形一样，我们在球面三角形的基础上，引进球面多边形的概念.

我们知道，在平面上，$n(n\geqslant 3)$条首尾相接且互不相交的线段围成的封闭图形叫做n边形. 类似地，如图6-1，在球面上有n个点：A_1，A_2，A_3，…，A_n，且任意三点不在同一个大圆上，经过这n个点中任意两点作大圆，首尾顺次连结劣弧A_1A_2，A_2A_3，…，$A_{n-1}A_n$，如果这些劣弧互不相交，那么就把这些劣弧组成的封闭图形，叫做球面n边形，记为球面n边形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$. 点A_1，A_2，…，A_n称为球面n边形的顶点，$\angle A_1$，$\angle A_2$，…，$\angle A_n$称为球面n边形的内角.

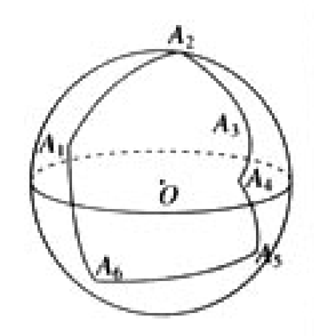


图6-1

类似平面凸多边形，如果球面n边形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$总在它的每一边所在大圆的半个球面内，那么称这个球面多边形为球面凸n边形. 这里，我们只研究球面凸n边形.

在平面几何中，我们知道，平面n边形的内角和为$(n-2)\pi$. 在单位球面上，球面$\triangle ABC$的面积$S'=A+B+C-\pi$，所以球面三角形的内角和为$\pi+S'$. 我们大胆猜想，单位球面上，球面$n(n\geqslant 3)$边形的内角和等于$(n-2)\pi+S$，其中S为球面n边形的面积. 事实上，这个结论是成立的.

设单位球面上的$n(n\geqslant 3)$边形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的n个内角分别为$\angle A_1$，$\angle A_2$，…，$\angle A_n$，其弧度数分别为A_1，A_2，…，A_n，S为这个球面n边形的面积，则

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=(n-2)\pi+S.$$

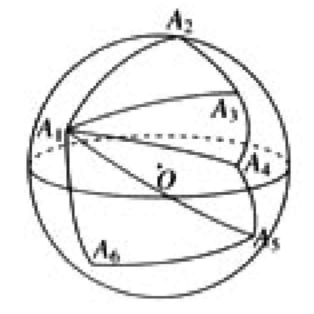


图6-2

分析：当$n=3$时，就是球面三角形的面积公式，结论显然成立. 当$n=4$时，如图6-2，我们总可以把两个不相邻的顶点用大

圆弧连结起来，由于这两个不相邻的顶点都在一个大圆的半个球面内，所以这段圆弧是劣弧，因此这段劣弧把球面四边形分为两个球面三角形，而这两个球面三角形面积的和等于球面四边形的面积．依次类推，便可得到球面 n 边形的面积公式，进而得到球面 n 边形的内角和公式．

你能把这个证明过程写出来吗？

二 简单多面体的欧拉公式

为什么可以用球面多边形的内角和公式证明简单多面体的欧拉公式呢？两者之间有什么样的联系？

为了解决这个问题，我们首先回顾简单多面体的欧拉公式．

我们知道，多面体是由若干个平面多边形所围成的封闭的几何体，如果一个多面体在它的每一个面所在的平面的同一侧，那么这个多面体称为凸多面体．

如果把多面体想象成由橡皮膜围成的，对这个橡皮膜做成的多面体进行充气，如果它能变成一个球面，我们把这样的多面体叫做**简单多面体**．

如果用 V 表示简单多面体的顶点数，E 表示简单多面体的棱数，F 表示简单多面体的面数，通过计算，我们发现

$$V-E+F=2.$$

这个结论被称为简单多面体的欧拉公式．

通过三角剖分的方法，可以证明这个公式．有兴趣的同学，可以查阅这方面的资料．

三 用球面多边形的内角和公式证明欧拉公式

从橡皮变换角度看，简单多面体与球等价，简单多面体的表面与球面等价．这时，我们大胆想象，橡皮膜变成球面后，组成简单多面体的每个面的各条边可以与球面多边形建立一定的联系．

下面我们给出欧拉公式的证明．

欧拉公式 如果用 V 表示简单多面体的顶点数，E 表示简单多面体的棱数，F 表示简单多面体的面数，那么

$$V-E+F=2.$$

证明：我们设想简单多面体 η 的表面是由橡皮膜围成的，所以它是可以任意变形的，即它的各棱可以任意伸长、缩短或弯曲．

我们在这个橡皮膜的简单多面体 η 中，吹入足够的空气，使它变成一个单位球面 ϑ，在变形过程中，保持橡皮膜不被吹破．这样，简单多面体 η 的一个顶点就变成单位球面 ϑ 上的一个点，η 的一条棱就变成 ϑ 上的一段曲线，此时 η 的各边就变成 ϑ 上的一个“网络”．此时，再调整此“网络”，使其上的每一条曲线都变成 ϑ 上的一段大圆弧．这样，就

把简单多面体 η 变成整个球面 ϑ，且 η 的一个面变成 ϑ 上的多边形．这时，η 的顶点数、棱数、面数与 ϑ 上的顶点数、棱数、面数完全相同．

我们把简单多面体 η 转化为成了单位球面 ϑ 上的"网络"．现在，只需研究 ϑ 上的顶点数、棱数、面数关系就可以了．

把 η 的各个面编号：1，2，…，F．η 的第 1 个面变成 ϑ 上的第 1 个球面多边形，设此球面多边形有 n_1 条边，它的 n_1 个内角的弧度数分别为 α_1，α_2，…，α_{n_1}，其面积为 S_1．由球面多边形的内角和公式有

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n_1}=n_1\pi-2\pi+S_1, \tag{1}$$

同理，η 的第 2 个面变成 ϑ 上的第 2 个球面多边形，设此球面多边形有 n_2 条边，它的 n_2 个内角的弧度数分别为 β_1，β_2，…，β_{n_2}，其面积为 S_2．由球面多边形的内角和公式有

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{n_2}=n_2\pi-2\pi+S_2, \tag{2}$$

……

η 的第 F 个面变成 ϑ 上的第 F 个球面多边形，设此球面多边形有 n_F 条边，它的 n_F 个内角的弧度数分别为 γ_1，γ_2，…，γ_{n_F}，其面积为 S_F．由球面多边形的内角和公式有

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_{n_F}=n_F\pi-2\pi+S_F. \tag{F}$$

我们将这 F 个式子相加，左边就是球面上 F 个多边形的内角和，也就是围绕每个球面多边形顶点球面多边形内角的和，而每个顶点处球面多边形的内角和为 2π；又由于球面上"网络"的"顶点"数与 η 的顶点数是相同的，均为 V，故这 F 个式子相加后，

$$\text{左边}=2\pi V.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\text{右边}&=n_1\pi-2\pi+S_1+n_2\pi-2\pi+S_2+\cdots+n_F\pi-2\pi+S_F\\&=\pi\sum_{j=1}^{F}n_j-2\pi F+\sum_{j=1}^{F}S_j\\&=\pi\sum_{j=1}^{F}n_j-2\pi F+S,\end{aligned}$$

其中 S 表示球面的面积（F 个球面多边形覆盖整个球面，其面积和为球面的面积），$S=\sum\limits_{j=1}^{F}S_j=4\pi$．我们注意到，$\sum\limits_{j=1}^{F}n_j$ 表示球面上 F 个球面多边形边数总和的 2 倍，这是因为，在这个总和中，每一个球面多边形的每一条边都被计算了 2 次（每一条边恰为某两个球面多边形的公共边），所以

$$\sum_{j=1}^{F}n_j=2E，E \text{ 为简单多面体的棱数}.$$

因此

$$2\pi V=2\pi E-2\pi F+4\pi,$$

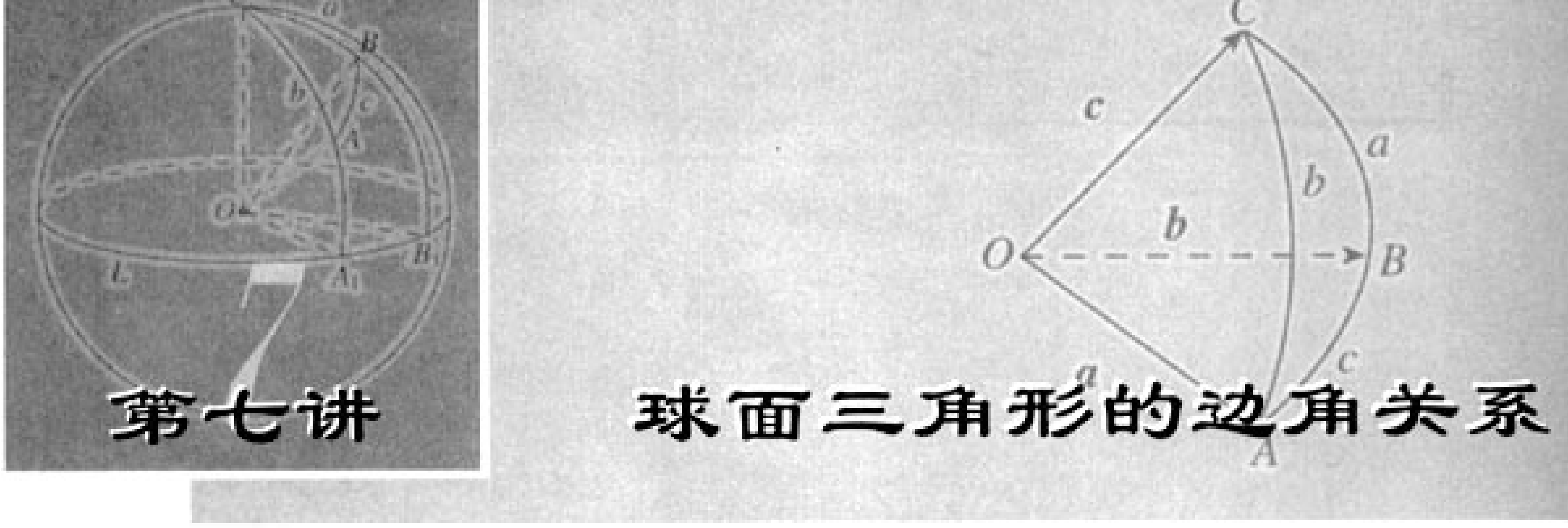
即

$$V-E+F=2.$$

这个证法是法国数学家勒让德（Legendre）首先给出的．简单多面体的欧拉公式是拓扑学中的一个重要公式，上述证明说明，球面几何与拓扑学有着紧密的联系．

思考题

1. 请你构造一个四边相等、四角相等的球面四边形，并研究它的性质.
2. 求证：球面 n 边形的周长小于大圆的周长.
3. 利用欧拉公式证明：由正五边形和正六边形组成的足球图案中有 12 个正五边形、20 个正六边形.



第七讲 球面三角形的边角关系

定性研究和定量研究相结合是研究问题的一般方法. 前面几讲, 我们对球面三角形的边角关系进行了定性研究, 得出了“两边之和大于第三边”“大边对大角”“等边对等角”等结论, 那么球面三角形的边角之间是否存在定量关系呢?

我们知道, 平面三角形的边角之间存在定量的边角关系: 正弦定理、余弦定理. 对于球面三角形, 其边角之间是否有类似平面三角形的正弦定理、余弦定理这种定量关系呢?

为便于类比, 我们首先给出平面上的正弦定理和余弦定理.

如图 7-1, 设平面$\triangle ABC$ 的三内角分别为$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, 三边长分别为 a, b, c, 则有

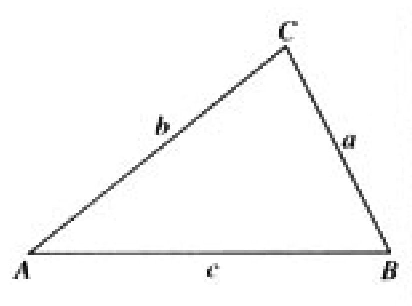


图 7-1

正弦定理: $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$;

余弦定理: $\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{cases}$

一 球面上的正弦定理和余弦定理

实际上, 在球面上, 球面三角形的边角之间也有正弦定理和余弦定理.

为了简便起见, 我们考虑单位球面上的情形.

如图 7-2, 设单位球面上球面$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c, 则

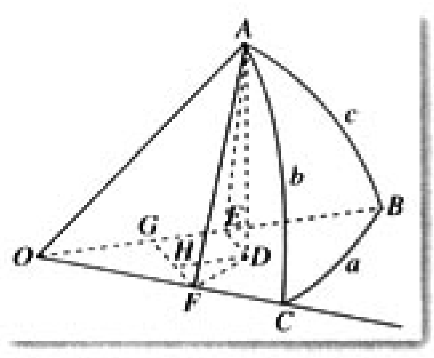


图 7-2

$$a=BC=\angle BOC\text{ (弧度)},$$
$$b=AC=\angle COA\text{ (弧度)},$$
$$c=AB=\angle AOB\text{ (弧度)}.$$

球面$\triangle ABC$ 的三个内角分别为$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, 由球面角的定义, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 分别等于二面角 C-OA-B, A-OB-C, A-OC-B 的大小.

下面, 我们首先看一下二面角 A-OB-C 和二面角 A-OC-B.

如图 7-2, 过点 A 作 $AD\perp$ 平面 OBC, 点 D 为垂足. 再过点 D 分别作 $DE\perp OB$, $DF\perp OC$, E, F 为垂足. 连结 AE, AF.

因为 DE 是 AE 在平面 OBC 内的射影，且 $DE\perp OB$，

所以 $OB\perp AE$.

同理，$OC\perp AF$.

因此，$\angle DEA$ 和 $\angle DFA$ 分别是二面角 $A\text{-}OB\text{-}C$ 和 $A\text{-}OC\text{-}B$ 的平面角.

所以 $\angle DEA=\angle B$，$\angle DFA=\angle C$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，因为

$$AD=AE\sin\angle DEA=OA\sin\angle AOB\sin B=\sin c\sin B,$$
$$AD=AF\sin\angle DFA=OA\sin\angle AOC\sin C=\sin b\sin C,$$

所以

$$\sin c\sin B=\sin b\sin C,$$

即

$$\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

同理，得

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

于是，我们得到：

球面上的正弦定理　设单位球面上球面 $\triangle ABC$ 的三内角分别为 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，三边长分别为 a，b，c，则

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

继续考察图 7-2，可知 $OF=\cos b$，$OE=\cos c$.

过点 F 作 $FG\perp OB$ 于点 G，则

$$OE=OG+GE,$$
$$OG=OF\cos a=\cos b\cos a.$$

过点 D 在平面 OBC 内作 $DH\perp FG$，垂足为 H，则 $DH//OB$，所以 $\angle DFH=\angle BOC=a$，且四边形 $DEGH$ 是矩形，所以

$$\begin{aligned}GE&=DH\\&=DF\sin\angle BOC\\&=AF\cos C\sin a\\&=\sin b\sin a\cos C.\end{aligned}$$

因此

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

同理，得

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$
$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B.$$

于是，我们得到：

球面上的余弦定理　设单位球面上球面 $\triangle ABC$ 的三内角分别为 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，三边长分别为 a，b，c，则

$$\begin{cases}\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,\\ \cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B,\\ \cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.\end{cases}$$

如果球的半径为 r，那么由图 7-2 可知，$\frac{BC}{r}=\frac{a}{r}=\angle BOC$（弧度），$\frac{AC}{r}=\frac{b}{r}=\angle COA$（弧度），$\frac{AB}{r}=\frac{c}{r}=\angle AOB$（弧度）. 因此，在上述推导过程中，分别用$\frac{a}{r}$，$\frac{b}{r}$，$\frac{c}{r}$代替 a，b，c，就得到半径为 r 的球面上的正弦定理：

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}};$$

余弦定理：
$$\begin{cases}\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A,\\ \cos\frac{b}{r}=\cos\frac{c}{r}\cos\frac{a}{r}+\sin\frac{c}{r}\sin\frac{a}{r}\cos B,\\ \cos\frac{c}{r}=\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}+\sin\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r}\cos C.\end{cases}$$

思考

在球面上是否有类似平面上的勾股定理呢?

对于平面三角形，由于 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，若 $C=\frac{\pi}{2}$，则 $c^2=a^2+b^2$，这是勾股定理. 同样，在球面$\triangle ABC$中，若 $C=\frac{\pi}{2}$，我们也称它为球面直角三角形. 由球面上的余弦定理同样可得球面直角三角形中三边之间的关系，我们不妨把它称为球面上的“勾股”定理.

球面上的“勾股”定理　设单位球面上球面$\triangle ABC$的三内角分别为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，其中一个内角$\angle C=\frac{\pi}{2}$，三边长分别为 a，b，c，则

$$\cos c=\cos a\cos b.$$

例 1　设单位球面上，球面$\triangle ABC$的三内角分别为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，三边长分别为 a，b，c，求证：

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,$$
$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b,$$
$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c.$$

分析：要证明的结论，形式上与球面上的余弦定理相似，只不过是球面三角形的角与边互换了. 在第三讲中，我们知道，球面三角形与它的球极三角形之间存在定量的边角关

系，它们之间的边与角可以互相转换．因此，考虑单位球面上球面$\triangle ABC$的球极$\triangle A'B'C'$，结合球面上的余弦定理，以及“单位球面上球面三角形角（边）与其球极三角形的边（角）互补”进行证明．

证明：设单位球面上球面$\triangle ABC$的极对称三角形是球面$\triangle A'B'C'$，其内角与边长分别为$\angle A'$，$\angle B'$，$\angle C'$和a'，b'，c'，则

$$a'=\pi-\angle A,\ b'=\pi-\angle B,\ c'=\pi-\angle C;$$
$$a=\pi-\angle A',\ b=\pi-\angle B',\ c=\pi-\angle C'.$$

在球面$\triangle A'B'C'$中，由余弦定理得

$$\cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A',$$

所以

$$\cos(\pi-A)=\cos(\pi-B)\cos(\pi-C)+\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)\cos(\pi-a),$$

即

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a.$$

同理，得

$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b,$$
$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c.$$

因此

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,$$
$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b,$$
$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c.$$

本例的结论是球面上余弦定理的另一种表达形式．

二　用向量方法证明球面上的余弦定理

1. 向量的向量积

我们知道，用向量方法（向量的数量积及向量的线性运算）可以证明平面上的余弦定理．一个自然的考虑是，我们能否用向量方法证明球面上的余弦定理？事实上，只用我们学习过的向量的数量积及向量的线性运算是不能证明球面上的余弦定理的．为了用向量方法证明球面上的余弦定理，我们引入一种新的运算——向量的向量积．

如图 7-3，设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为θ，我们把大小为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$、方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，且与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 构成右手系的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$．其大小表示为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta.$$

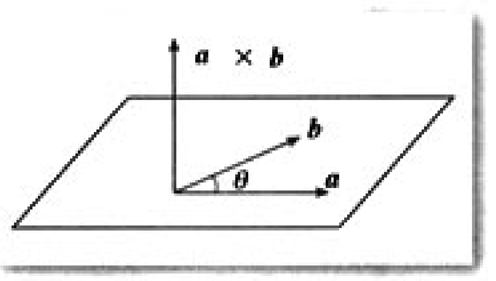


图 7-3

向量的向量积也称叉积或外积．

容易验证，向量积满足以下的运算律：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$（反交换律）；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})(\lambda\in\mathbf{R})$；

(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$（分配律）.

我们知道，在空间直角坐标系中，可以用向量的坐标表示向量的数量积运算．同样，我们也可以用向量的坐标表示向量的向量积运算．

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为空间直角坐标系中的一组单位正交基底，且 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$，容易证明

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2,$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\times(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1).$$

利用向量的向量积和数量积的坐标运算，我们可以得到，向量的向量积与数量积之间满足下面的关系式（证明从略）：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}). \tag{*}$$

下面，我们分析一下关系式（*）中 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$ 的几何意义．

如图 7-4，给定向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 所成平面的法向量．这两个法向量所成的角与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 所成的平面二面角相等或互补．设这两个平面所成的二面角为 θ，则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}|\cos\theta.$$

因此，关系式（*）不但反映了向量的向量积和数量积之间的关系，而且反映了平面与平面所成的二面角与两个向量夹角之间的关系．

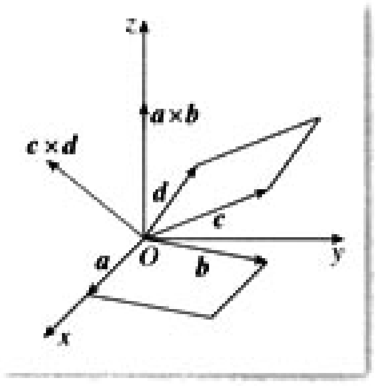


图 7-4

2. 球面上余弦定理的向量证法

下面我们用向量方法证明球面上的余弦定理．

如图 7-5，设单位球面上，球面△ABC 的三边长分别为 a，b，c，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|\cos A\\&=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin c)(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\sin b)\cos A\\&=\sin b\sin c\cos A,\end{aligned}$$

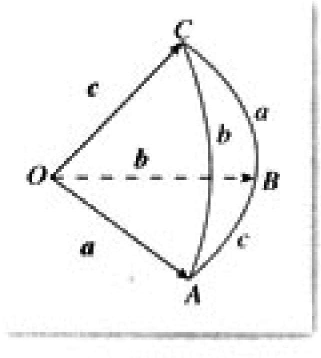


图 7-5

又因为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\\&=\cos a-\cos b\cos c,\end{aligned}$$

所以

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A. \tag{1}$$

同理，得

$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B, \tag{2}$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C. \tag{3}$$

这就得到球面上的余弦定理．由（1）式，可得

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}&=\frac{1-\cos^2 A}{\sin^2 a}\\&=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}\\&=\frac{1-(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.\end{aligned}$$

同理，由（2）（3）式可得

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}&=\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}\\&=\frac{1-(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}=\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}.$$

因为 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 和 $\sin a$，$\sin b$，$\sin c$ 都是正数，所以

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

这就证明了球面上的正弦定理.

三 从球面上的正弦定理看球面与平面

观察平面上的正弦定理和单位球面上的正弦定理：

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c},$$

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

从形式上我们可以发现，这两个定理中对应项的分子相同，分母不同，一个是边长，一个是边长的正弦值．在什么情况下，球面三角形的边长的正弦值可以近似地看作平面三角形的边长呢？

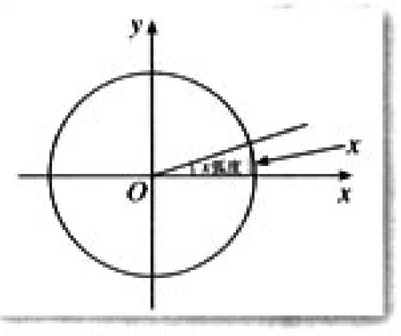


图 7-6

如图 7-6，观察单位圆中的正弦线长与相应的弧长，可以发现，当角 x 越来越小时，其正弦值 $\sin x$ 与弧长 x 接近．也就是说，当角 x 趋近于 0 时，其正弦值 $\sin x$ 可以近似地看作 x．即当 a，b，c 很小时，

$$\sin a\approx a，\sin b\approx b，\sin c\approx c.$$

从另外一个角度看，我们可以利用信息技术工具画出函数 $y=\sin x$ 和$y=x$的图象（图

7-7). 容易看出，当 $0<x<\epsilon$（其中 ϵ 是很小的正数）时，这两个图象十分接近，因此 $\sin x\approx x$. 这相当于半径很大的圆上一段很小的弧可以近似看作这段弧上的弦.

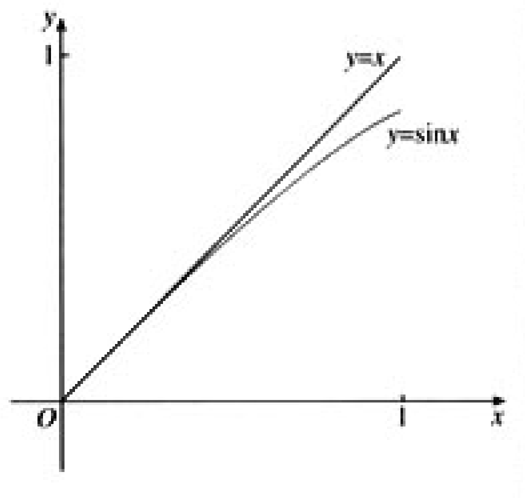


图 7-7

我们回到球面，设球的半径为 r，由于球面上的正弦定理为

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}},$$

当 $\frac{a}{r}$，$\frac{b}{r}$，$\frac{c}{r}$ 很小，即 $\frac{a}{r}\to 0$，$\frac{b}{r}\to 0$，$\frac{c}{r}\to 0$ 时，

$$\sin\frac{a}{r}\approx\frac{a}{r},\ \sin\frac{b}{r}\approx\frac{b}{r},\ \sin\frac{c}{r}\approx\frac{c}{r}.$$

所以

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}\approx\frac{\sin A}{\frac{a}{r}}=\frac{\sin B}{\frac{b}{r}}=\frac{\sin C}{\frac{c}{r}},$$

即

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}\approx\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

这说明，当球面三角形的边长相对于球的半径很小时，球面上的正弦定理就近似为平面上的正弦定理了. 因此，在半径很大的球面上的一个非常小的区域可以近似地看成平面.

四 球面上余弦定理的应用——求地球上两城市间的距离

地球的表面可以近似地看作一个球面，用纬度和经度可以确定这个球面上某一地点的位置，如北京位于北纬 40°，东经 116°，我们记为 (40°，116°).

> 这里，我们规定：北纬度值、东经度值用正数表示，南纬度值、西经度值用负数表示. 如纽约位于北纬 40°，西经 74°，我们记为 (40°，−74°). 这种表示可以为我们下面的运算带来方便.

我们知道，在平面上已知两个点的坐标，可以求出这两个点之间的距离. 在球面上，如果我们已知两个城市的位置，能不能求出它们之间的距离呢？下面，我们就来讨论这个问题.

为了简便，首先考虑单位球面上的情形.

如图 7-8，设单位球面上，点 A，B 的位置分别为 (α_1, β_1)、(α_2, β_2)，点 C 为北极点. 球面 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a，b，c，$\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 分别是过点 A 和点 B 的两条经线上的一段弧，由经度的意义可知，球面角 $\angle ACB=|\beta_1-\beta_2|$.

设 L 为赤道，点 A_1，B_1 分别是点 A 和点 B 所在经线与赤道 L 的交点，由纬度的意义可知 $\angle AOA_1=\alpha_1$，$\angle BOB_1=\alpha_2$.

因为 $\angle BOC=90^\circ-\alpha_2$，$\angle AOC=90^\circ-\alpha_1$，

所以 $a=\frac{\pi}{2}-\alpha_2$，$b=\frac{\pi}{2}-\alpha_1$（此处 α_1，α_2 的单位为弧度）.

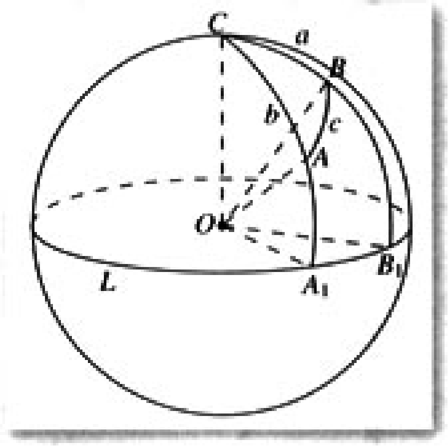


图 7-8

由球面上的余弦定理，得

$$\begin{aligned}\cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\angle ACB\\&=\sin\alpha_2\sin\alpha_1+\cos\alpha_2\cos\alpha_1\cos(\beta_2-\beta_1).\\&=\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos(\beta_2-\beta_1).\end{aligned}$$

所以

$$\overset{\frown}{AB}=c=\arccos\left[\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos(\beta_2-\beta_1)\right].\qquad(*)$$

利用上面的公式（*），我们可以求出单位球面上 A，B 两点之间的距离.

设地球的半径为 R（$R\approx 6\ 400$ km），由于半径不同的同一圆心角所对的弧长与半径成正比，因此我们把单位球面上 A，B 两点之间的距离放大 R 倍，就可以求出地球上两城市之间的距离 Rc.

下面，我们来解决这样一个问题.

例 2 飞机从北京飞行到达纽约的最短路程是多少（精确到 1 km）？

解：通过第二讲的学习，我们已经知道，飞机沿着大圆从北京向北经极地飞行到达纽约，航程最短. 所以，问题转化为求北京与纽约之间的距离.

由于北京位于北纬 40°，东经 116°，所以我们记为(40°，116°)；纽约位于北纬 40°，西经 74°，我们记为(40°，−74°). 设 $\alpha_1=40^\circ$，$\beta_1=116^\circ$；$\alpha_2=40^\circ$，$\beta_2=-74^\circ$，则 $\beta_1-\beta_2=190^\circ$. 根据公式（*），得

$$\begin{aligned}c&=\arccos\left[\sin 40^\circ\sin 40^\circ+\cos 40^\circ\cos 40^\circ\cos 190^\circ\right]\\&\approx\arccos(-0.17)\\&\approx 100\times\frac{\pi}{180}.\end{aligned}$$

所以

$$Rc=6\ 400\times 100\times\frac{\pi}{180}\approx 11\ 170(\text{km})$$

因此，飞机沿着大圆从北京向北经极地飞行到达纽约的路程最短，最短路程约为11 170 km.

思考题

1. 半径为 10 的球面上有一个球面$\triangle ABC$，它的三条边长分别为 2，$\frac{4}{3}$，3，求它的三个内角.
2. 已知北京、纽约都在北纬 40°的纬线上，计算飞机从北京起飞沿北纬 40°飞到纽约的路程（单位：km，地球半径 $R\approx 6\,400$ km，精确到 1 km）.
3. 求证：在单位球面上，球面等边$\triangle ABC$中，若它的一个内角为直角，则它的一条边长为$\frac{\pi}{2}$.
4. 已知单位球面上球面$\triangle ABC$的三内角分别为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，三边长分别为 a，b，c，求证：

(1) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$；

(2) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$；

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

第八讲　欧氏几何与非欧几何

通过前面的学习，我们知道球面几何与平面几何中的许多定理是“相同”的，但也有一些定理是不相同的．在本讲，我们首先通过平面几何与球面几何的比较，追溯某些定理不相同的根源，给出欧氏几何与非欧几何的定义；然后通过对欧氏平行公理的分析，给出非欧几何的一种模型——庞加莱模型；最后简单介绍一下欧氏几何与非欧几何的意义．

一　平面几何与球面几何的比较

下面，我们通过列表比较一下平面几何与球面几何中“相同”的定理与不相同的定理．

	平面几何	球面几何
相同的定理	平面三角形（球面三角形）中两边之和大于第三边．	
	若两个平面三角形（球面三角形）的三对边对应相等，则这两个平面三角形（球面三角形）全等．	
	若两个平面三角形（球面三角形）有两对边对应相等，且它们的夹角对应相等，则这两个平面三角形（球面三角形）全等．	
	若两个平面三角形（球面三角形）有两对角对应相等，且它们的夹边对应相等，则这两个平面三角形（球面三角形）全等．	
	平面等腰三角形（球面“等腰三角形”）的两底角相等，两腰对应相等．	
	……	
不相同的定理	平面三角形内角和等于 180°．	球面三角形内角和大于 180°．
	平面三角形的面积与三角形的内角和无关．	球面三角形的面积与球面三角形的角余①成正比．
	同一平面上存在两个不全等的相似三角形．	同一球面上不存在两个不全等的相似三角形．
	……	……

① 球面三角形内角和减去 180° 或 π 余下的部分，叫做球面三角形的角余．

为什么平面上与球面上会有这些不相同的定理？

追溯其根源，是平面上有这样一个结论：

过直线外一点，有且只有一条直线与该直线不相交.

我们把两条不相交的直线称为平行线，上述结论说明在平面上存在着相互平行的直线. 因为这个结论最早出现在欧几里得所著的《原本》中，所以我们把上述结论称为欧氏平行公理. 在欧氏平行公理成立的情况下，推导出来的所有定理及其他结果所组成的几何体系称为欧氏几何.

球面上的大圆可视为"直线". 在球面上有这样一个结论：任意两条"直线"（大圆）都相交，即过"直线"外一点，没有一条"直线"与该"直线"不相交. 也就是说，对球面上的大圆而言，欧氏平行公理不成立. 于是，在球面上就产生了一些与欧氏平面几何完全不相同的定理. 在欧氏平行公理不成立的情况下，推导出来的所有定理及其他结果所组成的几何体系，我们称之为非欧几何.

二 欧氏平行公理与非欧几何模型——庞加莱模型

在球面上欧氏平行公理不成立的原因，是我们把大圆当作"直线"，因此任意两条"直线"都相交. 但是大圆是弯曲的，并非像直线一样是笔直的；大圆的长度是有限的，而直线的长度是可以无限增大的.

那么，为什么把大圆作为"直线"呢？

在球面上，大圆具有直线在平面上的一些最基本的性质. 例如，过两点有且只有一条直线；两点之间的连线中直线段最短，等等，这些性质球面上的大圆都具备. 所以大圆可以作为直线所具有的基本性质的一种说明或解释，这种解释可以视为一种模型.

现在我们再来分析一下欧氏平行公理："过直线外一点，有且只有一条直线与该直线不相交."在平面上欧氏平行公理是不证自明的. 因为这个结论没有加以证明，我们当然可以怀疑它是否正确. 在球面上，如果我们把大圆作为"直线"，那么这个结论就不正确. 这是一种怀疑方式，即"过直线外一点，没有一条直线与该直线不相交". 我们还可以用另一种方式来怀疑它，即"过直线外一点，不只一条直线与该直线不相交". 我们把这样改变后的结论称为非欧（双曲）平行公理. 由双曲平行公理成立的情况下，推导出来的所有定理所组成的几何体系称为双曲几何.

那么，是否在某个特殊的"平面"上，我们可以把某种曲线作为"直线"，此时上述非欧平行公理是成立的，而这个特殊"平面"就可以作为一种非欧几何模型. 下面，我们给出法国数学家庞加莱（H. Poincare，1854—1912）建立的满足非欧平行公理的一种几何模型.

在欧氏平面上作一条直线 x，以 x 为边缘的上半平面（不包含 x 上的点）记为 λ（图8-1）. 现在只考虑 λ 内部的点，不考虑直线 x 上的点和直线 x 下半平面的点. 我们规定：λ 内部的点称为"非欧点"，圆心在 x 上的半圆或垂直于 x 的射线称为"非欧直线". 那么

当然这三种几何也有许多相同之处，如“三角形中两边之和大于第三边”，“若两个三角形的三对边对应相等，则这两个三角形全等”等在欧氏几何中成立的定理，在椭圆几何和双曲几何中也成立.

三　欧氏几何与非欧几何的意义

欧氏平行公理与非欧平行公理看起来是互相矛盾的．在通常情况下，如果有两个互相矛盾的结论，那么一定是一个正确，另一个错误．问题是，现在我们如何来判断欧氏平行公理和非欧平行公理哪个是正确的，哪个是错误的？也就是说，欧氏几何与非欧几何哪个是正确的，哪个是错误的？

首先，我们要明确，判断一种几何是否正确的标准是什么．这里有两个标准，第一，这种几何在理论上是否成立，这本质上是逻辑问题；第二，这种几何在实际中是否成立，即它是否能刻画我们生活的物理世界．我们应该从这两个方面来考察欧氏几何与非欧几何.

长期以来，人们不愿意承认欧氏平行公理是一个公理，即欧氏平行公理可以作为一个命题来加以证明，有人试图在否定欧氏平行公理的前提下找到两个互相矛盾的结论，以此来证明欧氏平行公理只是一个命题．但是，数学家们非但没有发现任何矛盾，还在严密的推导下得出一系列命题，由此构成了一种新的几何体系，即欧氏平行公理不成立的几何体系，我们称它为非欧几何．如何判断这种新的几何体系在逻辑上是否成立呢？

数学家用迂回的办法（或说用间接的办法），在欧氏几何的内部建立了一个非欧几何的模型（例如庞加莱模型）．在这个模型中，规定了一些（非欧）基本概念（如什么样的图形是非欧直线等）后，全部推理都是依照欧氏几何所遵循的逻辑进行的．因此这个模型可以看作非欧几何与欧氏几何之间的一座“桥梁”.

非欧几何的结论通过模型又可以解释或翻译为欧氏几何中的一个结论．也就是说，非欧几何的一个结论通过模型可以得到欧氏几何中一个相应的结论．这样一来，如果非欧几何在逻辑上是有矛盾的，那么欧氏几何在逻辑上也有相应的矛盾．所以庞加莱模型告诉我们，如果欧氏几何是无矛盾的（或说相容的），那么非欧几何也是无矛盾的.

第二个问题是单纯的一种几何是否能刻画物理世界？爱因斯坦认为，时间和空间是不可分割的．他认为物理空间十分复杂，无论欧氏几何或非欧几何都不能全面、精确地解释物理的时空概念．但是欧氏几何或非欧几何都是物理空间，它们都是对物理空间在不同方面的很好的近似．也就是说，对待不同的实际我们应该采用不同的几何.

因此，欧氏几何与非欧几何对于我们生活的物理世界都具有重要的意义.

阅读与思考

非欧几何简史

在欧几里得所著的《原本》中，共提出了 5 条公设：

(1) 两点可连一直线；

(2) 直线可以向两端无限延伸；

(3) 以任一点为中心，任一长度为半径可作一圆；

(4) 所有直角彼此相等；

(5) 在平面上的两条直线 l_1，l_2 若被第三条直线 l_3 所截，其同侧内角之和小于一平角，则 l_1，l_2 相交于 l_3 该侧的一点（图 1）.

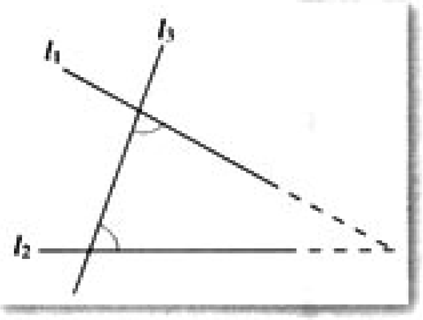


图 1

许多数学家认为第 5 公设（与欧氏平行公理等价）的叙述相对于其他 4 条公设过于复杂，而且对把它作为“不证自明”的公设（或公理）感到不自在. 因此不少数学家试图对它给出一个仅依赖于其他公设的证明.

然而两千多年以来，试图证明第 5 公设的努力都失败了. 因为在他们的每一个所谓“证明”中，都自觉或不自觉，或明或暗地引进了一个新的假设，而这个新假设都是与第 5 公设等价的（与第 5 公设等价是指，在某组公理基础上新假设与第 5 公设可以互相推出），所以本质上他们并没有证明第 5 公设.

17 世纪以后，许多数学家，如意大利的萨凯里（G. Saccheri，1677—1733）、法国的勒让德（A. M. Legendre，1752—1833）、匈牙利的波约（W. Bolyai，1775—1856）等都对第 5 公设做了深入研讨. 他们不用前人尝试过的直接证法，而改用反证法，即从第 5 公设不成立的假设下，追究它能否得出与已知定理相矛盾的结果. 如果得不出矛盾，又会产生怎样的事实？实际上，从第 5 公设不成立这一假设下推导出来的结果，恰恰就是非欧几何学中的定理.

到了 19 世纪，德国数学家高斯（C. F. Gauss，1777—1855）等人已经承认第 5 公设是不可能证明的. 同时，他们已经预感到一种新的几何体系存在的可能性. 但是，高斯关于非欧几何的信件和笔记在他生前没有公开发表，只是在他去世后出版时，才引起人们的注意. 对于非欧几何的全面探讨是由俄国的罗巴切夫斯基（Lobachevsky，1793—1856）和 W. 波约的儿子 J. 波约（J. Bolyai，1802—1860）分别独自公开发表的. 由于他们锲而不舍和勇于创新的治学精神，终于使他们有可能各自独立突破了欧氏几何体系两千年来在人类对空间概念上的垄断性，为人类理性文明开创了新局面.


罗巴切夫斯基

1829 年，罗巴切夫斯基正式发表题为《论几何学基础》的论文，他成功地建立了非欧几何学的体系，并论述了这种新几何存在的合理性. J. 波约的重要著作是作为附录形式附于他父亲 W. 波约的一本书后，此附录于 1832 年正式出版. J. 波约把他的重大创见精炼

学习总结报告

本专题内容主要包括：球面上的距离与角；球面上的基本图形：极与赤道、球面二角形（月形）、球面三角形（含对顶三角形、球极三角形）；球面三角形的周长、内角和及其面积；球面三角形全等的判定定理，特别是球面三角形全等的“角角角”(a. a. a) 判定定理；球面多边形及其内角和定理，用球面多边形的内角和公式证明欧拉公式；球面多边形的边角关系——正弦定理、余弦定理；欧氏几何与非欧几何的联系与区别. 在学习这些知识内容时，同学们应当注意以下10点：

1. 球面上两点间的距离是本专题的核心概念，本专题从球面上两点间的距离逐步展开. 理解这个概念是学习本专题的基础.

2. 类比是学习本专题最重要的思想方法. 类比平面上的直线、角、三角形，我们引入球面上的“直线”（大圆）、球面角、球面三角形等基本图形. 类比研究平面三角形的思路，研究球面三角形的边与角、全等、正弦定理和余弦定理以及球面多边形及其内角和等等. 在学习过程中始终要把球面上的概念、图形与平面上的概念、图形作比较. 球面上的哪些概念、公式、定理和平面上的是相同的，或类似的，球面上的哪些概念、公式、定理与平面上的是完全不同的，它们两者之间的区别是什么.

3. 三面角是研究球面三角形的“脚手架”. 利用这个“脚手架”，我们把球面三角形的有关问题，如边长、夹角，全等等转化为欧氏几何问题.

4. 球面三角形与其球极三角形之间具有定量的边角关系，这种定量的边角关系，在球面三角形全等的“角角角 (a. a. a)”判定定理的证明，球面上余弦定理的另一种表示形式方面具有重要的应用.

5. 球面三角形的内角和大于 π 是球面几何不同于欧氏几何的主要表现之一. 而且球面三角形的内角和与其面积之间有着紧密的联系，正是通过球面三角形的面积，我们证明了球面三角形的内角和大于 π.

6. 可以通过定性观察（直观感受）、定量计算（球面上的正弦定理）得出球面与平面的关系：相对于地球半径很小的球面上的一块非常小的区域，我们可以近似看成平面；同样，半径足够大的球面也可以近似看成平面.

7. 理解在单位球面上研究问题的简洁性，在单位球面上得到的结论可以推广到任意球面.

8. 本专题的学习需要较强的几何直观能力和空间想象能力. 观察、实验，实物模型、信息技术工具等对本专题的学习有很大的帮助.

附录

求证：平面上经过任意两点的劣弧中，半径越大，劣弧越短.

如图，已知经过 B，N 两点的劣弧分别为$\overset{\frown}{BSN}$，$\overset{\frown}{BTN}$，且其圆心分别为 O，O'，求证：$\overset{\frown}{BSN}<\overset{\frown}{BTN}$.

证明：如图，连结 B，N 两点，并取 BN 的中点 C，连结 C，O'，O 三点．设$OB=r$，$O'B=r'$；$\angle BOC=x$ 弧度，$\angle BO'C=x'$弧度；$BC=a$．则

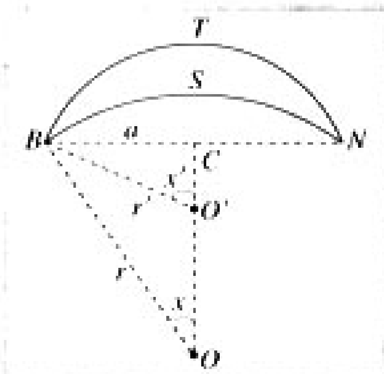
$$\sin x=\frac{a}{r}，\sin x'=\frac{a}{r'}.$$

又

$$\overset{\frown}{BSN}=2xr，\overset{\frown}{BTN}=2x'r'.$$

所以

$$\overset{\frown}{BSN}=2a\frac{x}{\sin x}，\overset{\frown}{BTN}=2a\frac{x'}{\sin x'}.$$



图

现在比较$\frac{x}{\sin x}$与$\frac{x'}{\sin x'}$的大小.

我们考察函数 $f(x)=\frac{x}{\sin x}$，$x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$的单调性.

因为 $f'(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$，令 $g(x)=\sin x-x\cos x$，

所以 $g'(x)=x\sin x>0$，$x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $g(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，$g(x)>g(0)=0$，$x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$.

因此 $f'(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}>0$，所以 $f(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

由于 $x<x'$，所以$\frac{x}{\sin x}<\frac{x'}{\sin x'}$.

因此$\overset{\frown}{BSN}<\overset{\frown}{BTN}$.