普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–4

对称与群

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

A版

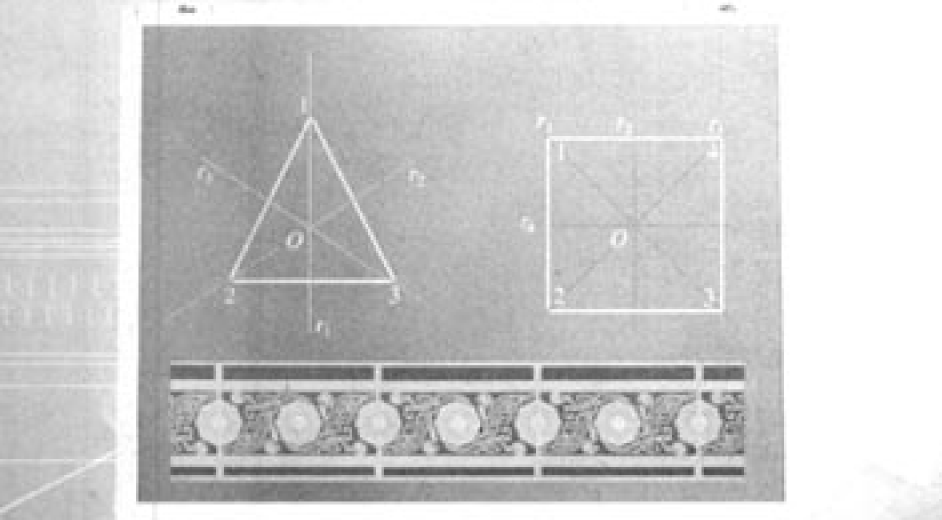
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–4

对称与群

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：张英伯
主要编者：张英伯　宋莉莉
责任编辑：宋莉莉
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

主 编 寄 语

同学们，欢迎大家使用这套普通高中数学教科书，希望它能够成为你们学习数学的好朋友.

作为这套教科书的主编，在大家开始用这套书学习数学之前，对于为什么要学数学，如何才能学好数学等问题，我有一些想法与你们交流.

为什么要学数学呢？我想从以下两个方面谈谈认识.

数学是有用的. 在生活、生产、科学和技术中，在这套教科书中，我们都会看到数学的许多应用. 实际上，“数量关系与空间形式”，在实践中，在理论中，在物质世界中，在精神世界中，处处都有，因而研究“数量关系与空间形式”的数学，处处都有用场. 数学就在我们身边，它是科学的语言，是一切科学和技术的基础，是我们思考和解决问题的工具.

学数学能提高能力. 大家都觉得，数学学得好的人也容易学好其他理论. 实际上，理论之间往往有彼此相通和共同的东西，而“数量关系与空间形式”、逻辑结构及探索思维等正是它们的支架或脉络，因而数学恰在它们的核心处. 这样，在数学中得到的训练和修养会很好地帮助我们学习其他理论，数学素质的提高对于个人能力的发展至关重要.

那么，如何才能学好数学呢？我想首先应当对数学有一个正确的认识.

数学是自然的. 在这套教科书中出现的数学内容，是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础，其中的数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然的. 如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味. 这将有助于大家的学习.

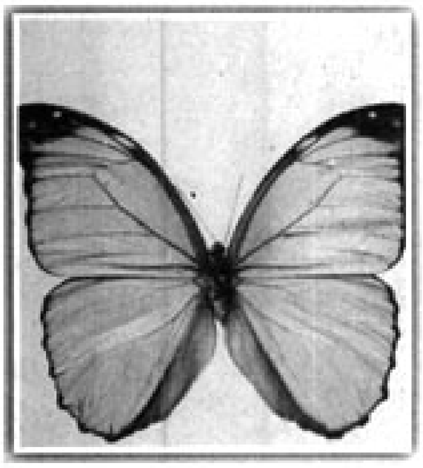
数学是清楚的. 清楚的前提，清楚的推理，得出清楚的结论，数学中的命题，对就是对，错就是错，不存在丝毫的含糊. 我们说，数学是易学的，因为它是清楚的，只要大家按照数学规则，按部就班地学，循序渐进地想，绝对可以学懂；我们又说，数学是难学

的，也因为它是清楚的，如果有人不是按照数学规则去学去想，总想把“想当然”的东西强加给数学，在没有学会加法的时候就想学习乘法，那就要处处碰壁，学不下去了.

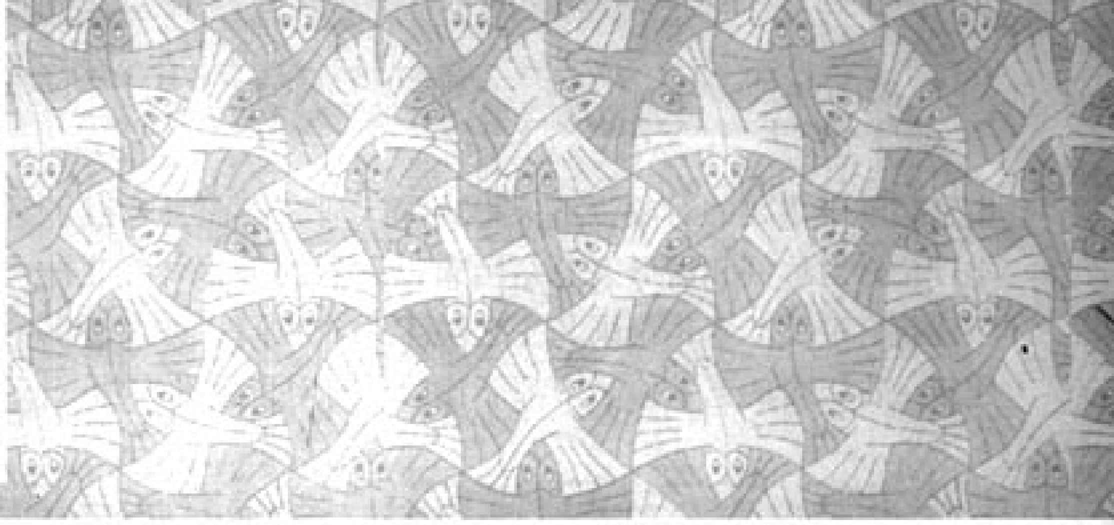
在对数学有一个正确认识的基础上，还需要讲究一点方法.

学数学要摸索自己的学习方法. 学习、掌握并能灵活应用数学的途径有千万条，每个人都可以有与众不同的数学学习方法. 做习题、用数学解决各种问题是必需的，理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法也是必需的，还要充分发挥问题的作用，问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性. 要善于提问，学会提问，“凡事问个为什么”，用自己的问题和别人的问题带动自己的学习. 在这套书中，我们一有机会就提问题，希望“看过问题三百个，不会解题也会问”. 类比地学、联系地学，既要从一般概念中看到它的具体背景，不使概念“空洞”，又要在具体例子中想到它蕴含的一般概念，以使事物有“灵魂”.

同学们，学数学趁年轻. 你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期. 这个时期下点功夫学数学，将会终生受益. 我们构建了这片数学天地，期盼它有益于大家的成长. 你们是这片天地的主人，希望大家在学习的过程中能对它提出宝贵的改进意见. 预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中.



目录



引言

观察我们身边的事物，可以发现，对称是现实世界和日常生活中大量存在的现象. 如图 0-1 中，人体具有轴对称性；蝴蝶的翅膀、昆虫的触角都有轴对称性；飞机、天平、剪纸图案等也具有轴对称性.

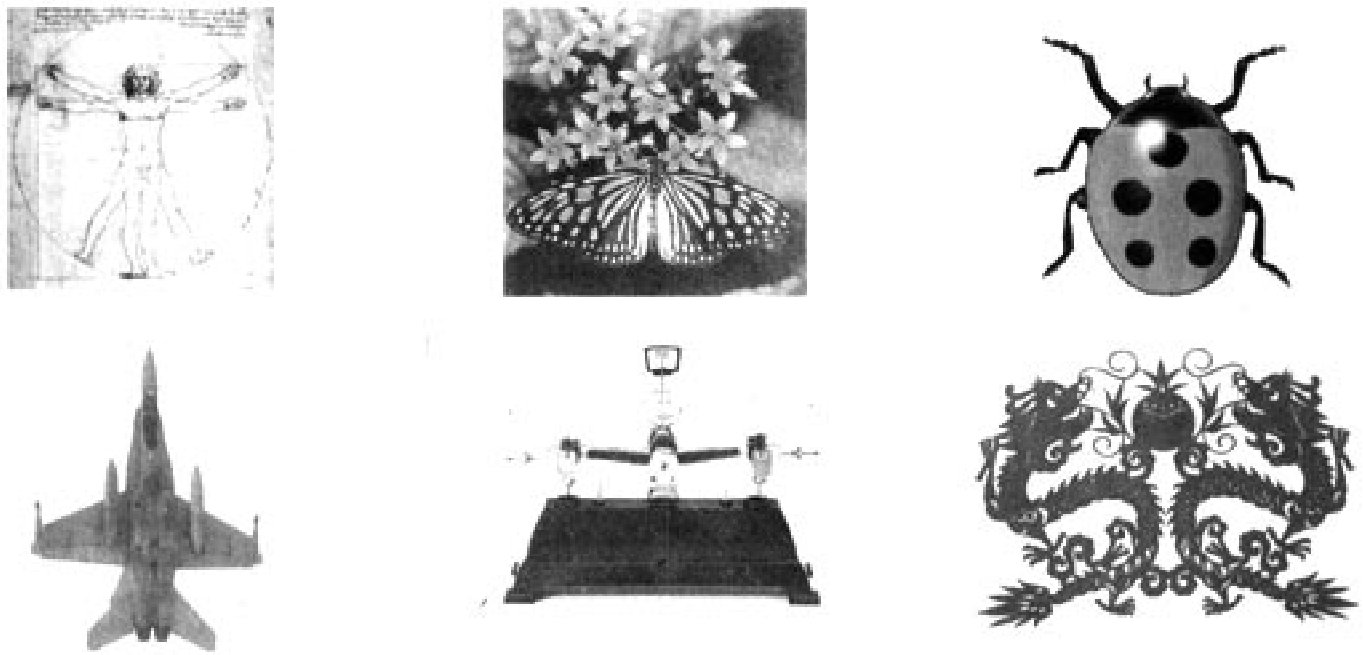


图 0-1

如图 0-2 中，花朵、时钟、雪花、风车、齿轮等具有中心对称性.

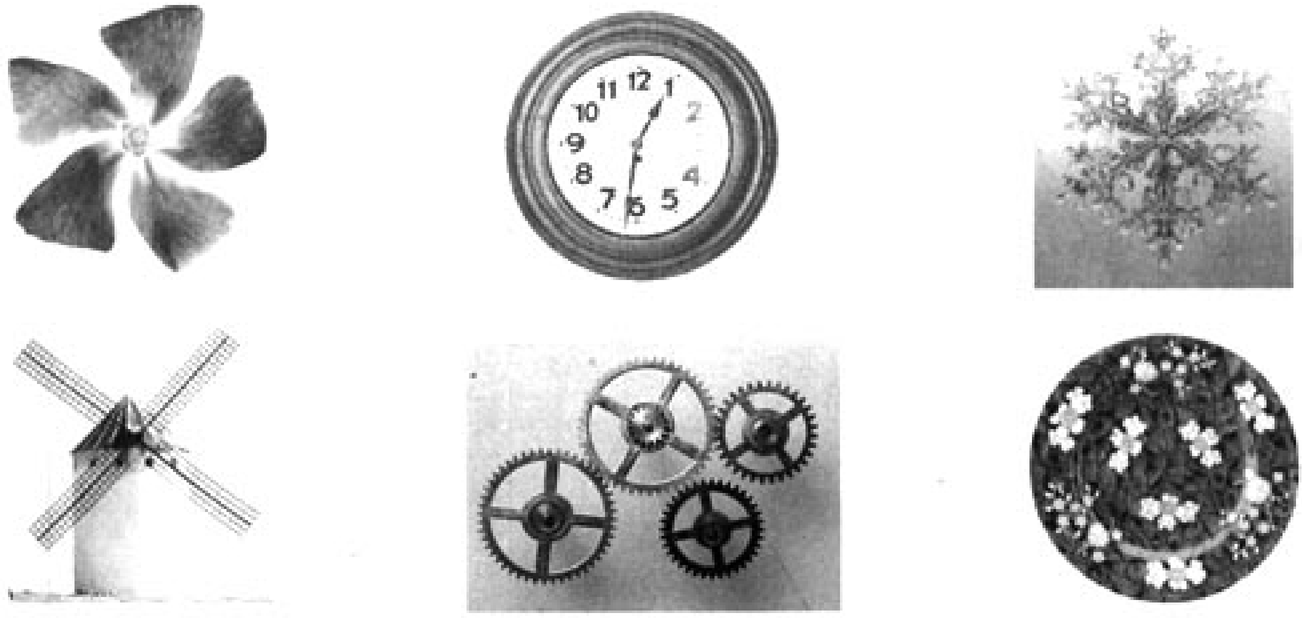


图 0-2

因为“对称”是一种非常普遍的自然现象，因而它在物理学、化学和生命科学中得到广泛的研究和应用；同样地，在数量关系、空间形式中“对称”现象也大量存在，因而它

也是数学中重要的对象，不但得到深入研究，而且形成了系统的数学理论；对称的和谐形态总是给人以强烈的美感，因此被大量应用于建筑、造型艺术、绘画和工艺美术中，我们从许多著名的中、外建筑，古、今的艺术珍品中都能找到具有对称性的事物（图 0-3）.

你能再举出一些具有轴对称、中心对称的事物吗？

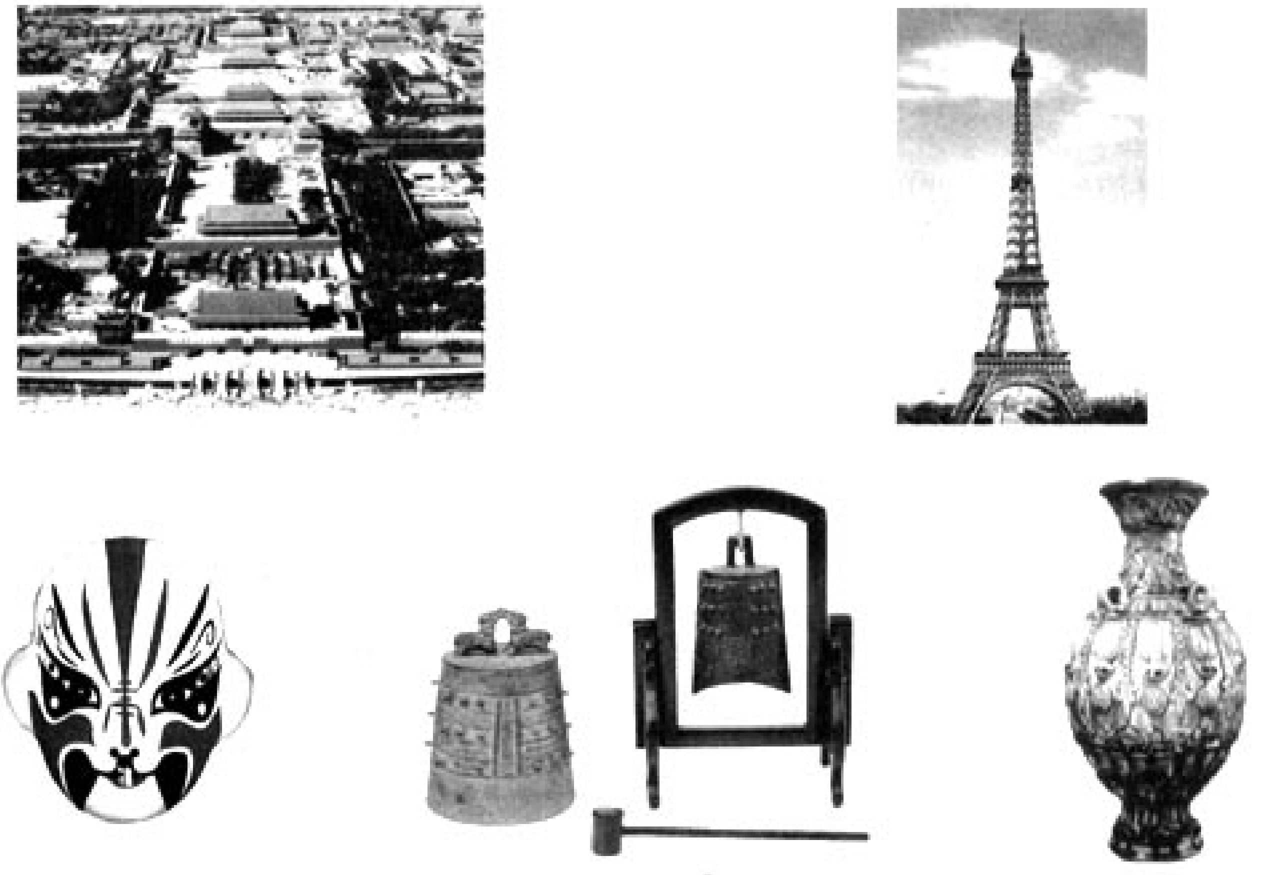


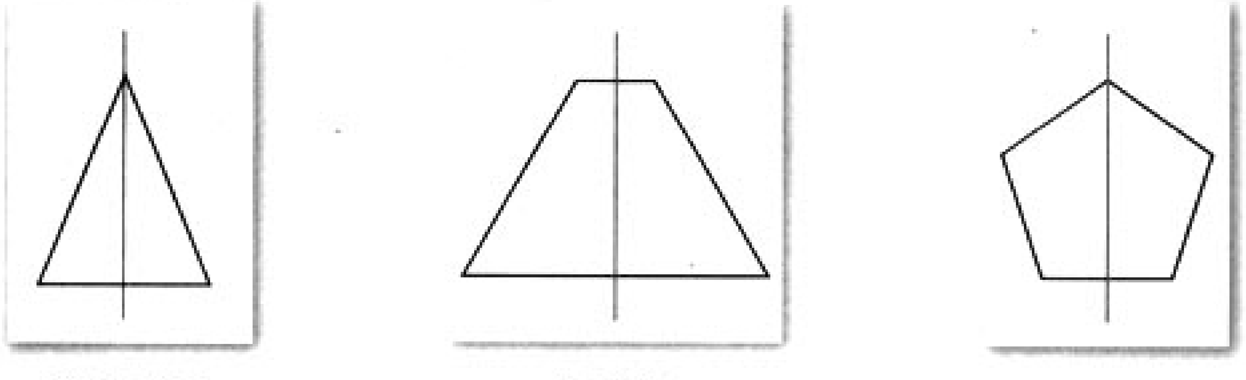
图 0-3

实际上，对称这个概念对我们来说并不陌生，在初中平面几何中，我们就学过下面两个关于对称图形的定义.

定义 1　如果一个平面图形沿着平面上一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线称为它的对称轴.

定义 2　把一个平面图形绕平面上某一个点旋转 180°，如果旋转后的图形能够和原来的图形互相重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点称为它的对称中心.

我们还接触过大量具有轴对称和中心对称的图形. 如图 0-4，等腰三角形、等腰梯形和正五边形等都是轴对称图形.



等腰三角形　　等腰梯形　　正五边形

图 0-4

如图 0-5，平行四边形、正六边形等都是中心对称图形.

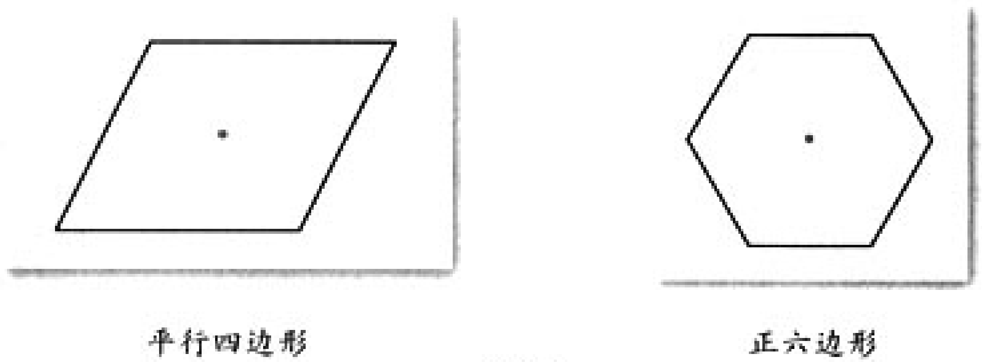


图 0-5

如图 0-6，圆、正方形等既是轴对称图形，又是中心对称图形.

图 0-6

探究

1. 试找出上述 7 个图形的对称轴或对称中心.

2. 将正五边形绕它的中心至少旋转多少度才能与原来的图形重合？正六边形呢？

3. 圆的对称轴有多少条？把圆绕它的圆心旋转多少度就能够与原来的圆重合？

正是根据过圆心的任意直线都是圆的对称轴，绕圆心旋转任意角度都与原来的圆重合，古希腊毕达哥拉斯学派认为，圆是平面上最完美的图形.

对“对称性”的研究常常可以使我们加深对物体性质的认识. 在本专题中，我们将借助数学工具来研究各种各样的“对称性”，介绍关于“对称”的数学理论.

第一讲 平面图形的对称群

一 平面刚体运动

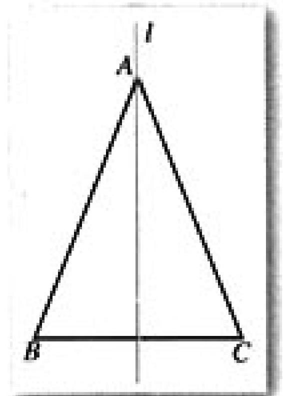


图 1-1

1. 平面刚体运动的定义

现在我们换一个角度来考察引言中的定义 1 和定义 2.

按照定义 1，等腰三角形是一个轴对称图形. 如图 1-1，把一个等腰△*ABC* 沿它的对称轴 *l* 折叠，则直线 *l* 两旁的部分完全重合.

观察

如图 1-2 所示，在一张纸（平面）上画一个等腰△*ABC*，在它的底边的垂直平分线 *AD* 处放一面“双面镜”，并使镜面与纸面垂直. 在镜面的反射下，△*ABC* 被映成了什么图形？这个图形与△*ABC* 有什么关系？

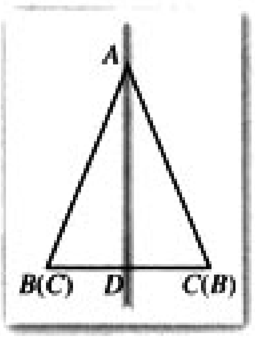


图 1-2

从“双面镜”中可以看到，点 *B* 被映到了点 *C*，点 *C* 被映到了点 *B*，△*ABC* 被映到了△*ACB*，而且△*ACB* 与△*ABC* 是全等的.

由于镜面垂直于纸面，因此上述△*ABC* 关于镜面的反射可以看成是△*ABC* 关于它的底边垂直平分线 *AD* 的反射.

探究

如图 1-3，任意作一个等腰三角形 *ABC*，任取△*ABC* 上一点 *P*，作点 *P* 关于△*ABC* 底边垂直平分线 *AD* 的对称点 *P′*，那么，*A*，*B*，*C* 关于直线 *AD* 的对称点分别是什么？△*ABC* 变成了什么图形？这个图形与△*ABC* 有什么关系？

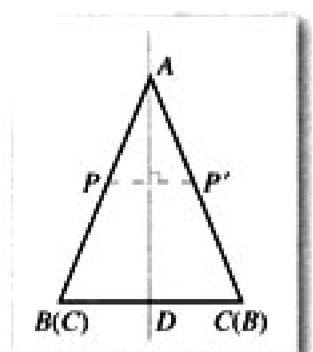


图 1-3

正方形 $CDAB$，显然这两个正方形重合.

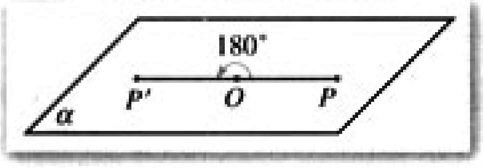


图 1-7

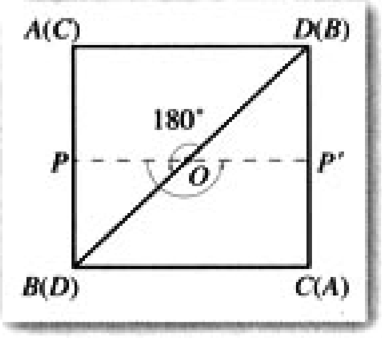


图 1-8

若没有特别说明，旋转的方向都是指逆时针方向.

一般地，如果一个平面图形在映射 ρ（以点 O 为中心转 180°的旋转）的作用下仍与原来的图形重合，我们就称这个平面图形是一个中心对称图形.

思考

按照这个定义，引言中的平行四边形、正六边形、圆都是中心对称图形吗？这个定义与引言中的定义 2 是等价的吗？

我们可以对以点 O 为中心转 180°的旋转进行推广．请同学们自己定义一个映射，表示平面以一个固定点 P 为中心转任意给定角度的旋转．这样定义的映射在数学上称为旋转变换.

旋转角度为 0°的旋转变换把平面上的所有点映到它自身．这个映射使整个平面上的每个点都保持不动，所以称为恒等变换（identity transformation).

探究

设 P，Q 是平面内的任意两点，在旋转（或反射）变换的作用下，它们的对应点分别是 P'，Q'．P' 到 Q' 的距离与 P 到 Q 的距离有什么关系？

可以发现，反射变换和旋转变换有一个共同的特点，即所谓“保距性”．也就是说，对于平面内的任意两点 P 和 Q，在反射（或旋转）变换的作用下的对应点是 P' 和 Q'，那么 P' 到 Q' 的距离等于 P 到 Q 的距离．借用物理学中的一个名词，我们把这类“保持距离不变”的映射称为平面刚体运动.

探索在某种变换下的不变量或不变关系，是数学研究的重要问题.

为了方便，今后我们将不再区分平面 α 和其内的所有点组成的集合 α，即 α 既是一个平面的符号，又是一个平面内所有点组成的集合的符号.

定义 设 α 是一个平面，映射

$$m: 平面\ \alpha \to 平面\ \alpha$$

是一个一一映射❶，若 m 保持平面 α 内任意两点间的距离不变，则称 m 是一个平面刚体运动（the rigid motions of the plane）.

❶ 如果映射 $f: A \to B$ 满足：(1) A 中不同的元素在 B 中有不同的象；(2) B 中任意一个元素，在 A 中有一个原象，那么这个映射就叫做一一映射.

下面我们对上述定义作一个简单的解释. 任意一个平面刚体运动 m：平面 $\alpha \to$ 平面 α，都满足下面四条：

(1) 对于平面 α 内的任意一点 P，在平面 α 内存在唯一的一点 P' 与之对应，记作 $P'=m(P)$，P' 叫做 P 在 m 作用下的象；

(2) 任取平面 α 内的一点 P'，存在平面 α 内的点 P，使得 P' 是 P 在变换 m 作用下的象；

(3) 任取平面 α 内的两点 P_1，P_2，如果 $P_1 \neq P_2$，那么它们的象也是不同的，即 $m(P_1) \neq m(P_2)$；

(4) 任取平面 α 内的两点 P，Q，它们在 m 下的象是 P'，Q'，即 $P'=m(P)$，$Q'=m(Q)$，那么 $|P'Q'|=|PQ|$，即点 P'，Q' 之间的距离与点 P，Q 之间的距离相等.

实际上，我们在过去的学习中碰到过许多平面刚体运动. 例如，我们熟悉的平移（translation）就是一类平面刚体运动.

你能举出一些平面刚体运动的例子吗？

设 α 是一个平面，点 O 是 α 内的一个定点，$\boldsymbol{v}$ 是一个以 O 为起点的定向量，平移是指平面内一个点到点的映射

$$t: P \to P',$$

t 把平面内的任意一点 P 映到点 P'，且满足 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\boldsymbol{v}$（图 1-9）.

这个映射在数学上称为平移变换. 在平移变换 t 的作用下，平面内的所有点沿定向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向，移动了距离 $|\boldsymbol{v}|$.

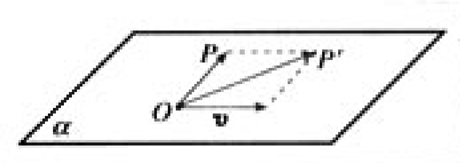


图 1-9

2. 平面刚体运动的性质

平面刚体运动 m：平面 $\alpha \to$ 平面 α 有哪些性质呢？保持距离不变是 m 的一个很强的性质. 可以证明，只要知道不共线的 3 个点 A，B，C 在 m 下的象 A'，B'，C'，m 就完全确定下来了（参见附录一）.

下面我们再来证明：在平面刚体运动 m 的作用下，正 n 边形的大小和形状都保持不变. 为了证明这个结论，我们先来证明下面这个命题.

命题 平面刚体运动

$$m: 平面\ \alpha \to 平面\ \alpha$$

将平面 α 内的直线映成直线，射线映成射线，线段映成等长的线段.

证明：令 l 是平面 α 内的任意一条直线，设 m 把 l 上所有的点映到点集 l'.

在 l 上任取两点 A，B，设 m 把它们分别映到 A'，B'. 下面我们来证明 l' 是过点 A'，B' 的直线.

在 AB 上任取一点 C，设 m 把点 C 映到点 C'.

(1) 如图 1-10，当点 C 在 AB 之间时，由平面刚体运动的定义得

$$\begin{aligned}|A'C'|+|C'B'|&=|AC|+|CB|\\&=|AB|\\&=|A'B'|,\end{aligned}$$

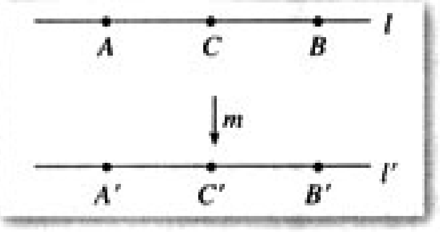


图 1-10

所以点 C' 在线段 $A'B'$ 上.（为什么?）

(2) 如图 1-11，当点 C 在 AB 的延长线上时，我们有

$$\begin{aligned}|A'B'|+|B'C'|&=|AB|+|BC|\\&=|AC|\\&=|A'C'|,\end{aligned}$$

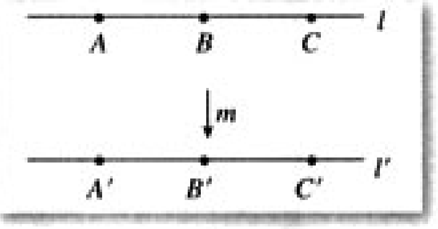


图 1-11

所以 B' 在线段 $A'C'$ 上，即点 C' 在线段 $A'B'$ 的延长线上.

同理可证，当点 C 在 BA 的延长线上时，点 C' 在线段 $B'A'$ 的延长线上.

由点 A，B，C 的任意性可知，l' 是一条直线.

思考

如何证明平面刚体运动 m：平面 $\alpha\to$平面 α 将平面 α 上的射线映成射线，线段映成等长的线段?

下面，我们说明三角形在平面刚体运动的作用下，形状和大小都保持不变.

如图 1-12，设 $\triangle ABC$ 是平面 α 内的任意一个三角形，由已证命题可知，平面刚体运动

$$m：平面\ \alpha\to平面\ \alpha$$

把线段 AB，BC，AC 依次映成线段 $A'B'$，$B'C'$，$A'C'$，

而且

$$AB=A'B',\ BC=B'C',\ AC=A'C'.$$

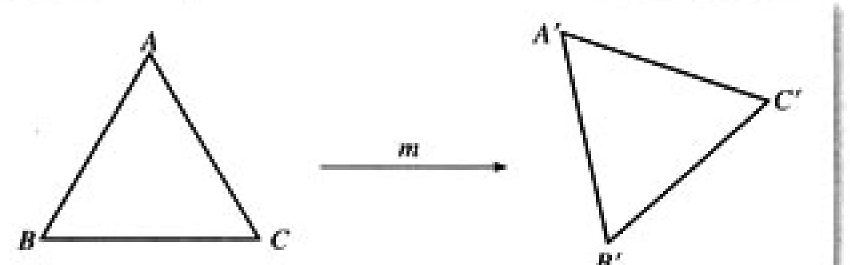


图 1-12

由于

$$AB+BC>AC,$$

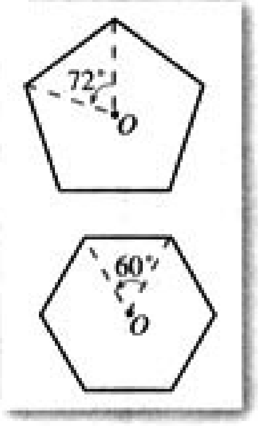
二 对称变换

1. 对称变换的定义

从上面的讨论发现，我们可以利用平面刚体运动来定义平面图形的对称性. 例如，由于等腰三角形在关于其对称轴 l 的反射变换 r 的作用下，仍与原来的图形重合，我们就称等腰三角形具有轴对称性，并把反射变换 r 叫做等腰三角形的对称变换.

下面，我们利用平面刚体运动，将平面图形“对称”的概念推广到一般情形.

定义 若一个平面图形 $\boldsymbol{K}$ 在平面刚体运动 m 的作用下仍与原来的图形重合，就称 $\boldsymbol{K}$ 具有对称性，m 叫做 $\boldsymbol{K}$ 的对称变换（symmetric transformation 或 symmetry）.



按照上述定义，“一个平面图形是对称图形”等价于说“一个平面图形有对称变换”.

显然，任意图形都在恒等变换下变到自身，这时我们也认为这个图形具有对称性. 但是我们真正感兴趣的是那些非恒等变换的对称变换，以及在这样的对称变换下图形的对称性.

这样定义的图形的对称性，比我们熟悉的轴对称性、中心对称性要广泛得多. 例如，图形的中心对称性是指这个图形绕平面上某一个点旋转 180°后仍与原图形重合，而这里的对称性不局限于旋转 180°，即旋转的角度可以是任意角. 这样，由于正五边形绕中心 O 旋转 72°后仍然与原图形重合，因此正五边形具有对称性，而绕正五边形中心 O 旋转 72°的旋转变换就是正五边形的一个对称变换. 同样地，正六边形绕它的中心 O 旋转 60°后不变的性质，是正六边形的一个对称性.

2. 正多边形的对称变换

思考

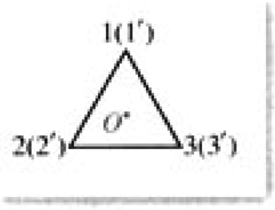
对于一个具有对称性的平面图形，例如正多边形，它的对称变换是唯一的吗？如果不唯一，你能找出它的所有对称变换吗？

下面我们先考察一下正三角形的对称变换.

如图 1-13，画一个正三角形，在它的三个顶点上标上数字 1，2，3，并画出它的三条对称轴 r_1，r_2，r_3 和中心 O.

通过实验，容易发现，正三角形在下列平面刚体运动的作用下保持不变.

（1）恒等变换，记作 I；



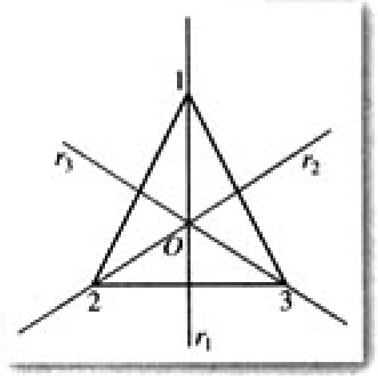
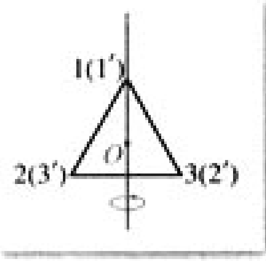
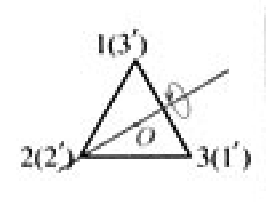


图 1-13

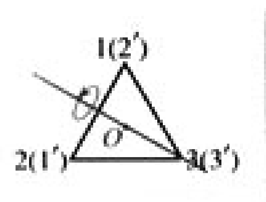
（2）关于对称轴 r_1 所在直线的反射，记作 r_1；



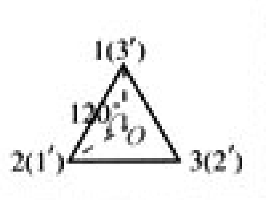
（3）关于对称轴 r_2 所在直线的反射，记作 r_2；



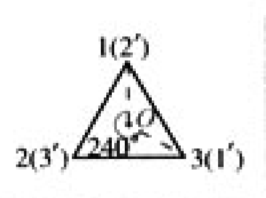
（4）关于对称轴 r_3 所在直线的反射，记作 r_3；



（5）以点 O 为中心转 120°的旋转，记作 ρ_1；



（6）以点 O 为中心转 240°的旋转，记作 ρ_2.



在上述变换中，$1'$，$2'$，$3'$ 表示三角形 123 的顶点在变换下的象所在的位置. 例如，对于（2）中的变换 r_1，我们有

$$1'=r_1(1),\ 2'=r_1(3),\ 3'=r_1(2).$$

这样，我们就找到了正三角形的 6 个对称变换. 习惯上，把它们组成的集合记作

D_3，即

$$D_3=\{I, r_1, r_2, r_3, \rho_1, \rho_2\}.$$

可以发现，在这 6 个变换中，中心 O 都保持不动；在 D_3 中任意一个变换的作用下，三角形的顶点 1，2，3 的象仍然是三角形的顶点，它们按照某种顺序落到三角形的顶点上.

由已有的相关知识可知，正多边形的对称变换由平面上的 3 个不共线的点唯一确定．又由于 D_3 中的 6 个变换都以中心 O 为不动点，因此，D_3 中的对称变换由三角形的两个顶点完全确定．例如，如果在对称变换 m 的作用下，1，2 分别对应于 $3'$，$1'$，那么$m=\rho_1$.

探究

继续作图，你还能找到正三角形其他的对称变换吗？

你找到其他的对称变换了吗？一定没有．事实上，除了上述 6 个对称变换外，正三角形再也没有其他的对称变换了．这是因为，正三角形的对称变换都是以其中心 O 为不动点的平面刚体运动，因此只有两类——或是以 O 为中心的旋转变换，或是关于经过 O 点的直线的反射变换；另一方面，由于三角形的对称变换由它的两个顶点完全确定，除了上述 6 个对称变换外，别的旋转变换和反射变换显然都不是正三角形的对称变换.

为了进一步熟悉正多边形的对称变换，下面，我们再来看一下正方形有哪几个对称变换．与正三角形类似，正方形的对称变换都以其中心 O 为不动点，因此只要在以 O 为中心的旋转和关于经过 O 点的直线的反射中寻找就够了.

如图 1-14，在纸片上画一个正方形，在它的 4 个顶点上标上数字 1，2，3，4，再画出它的 4 条对称轴 r_1，r_2，r_3，r_4.

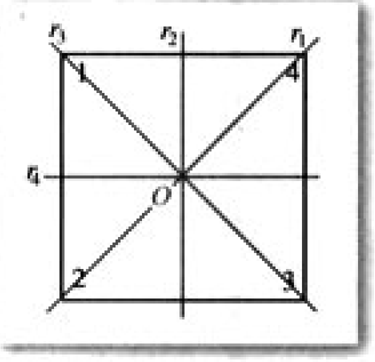
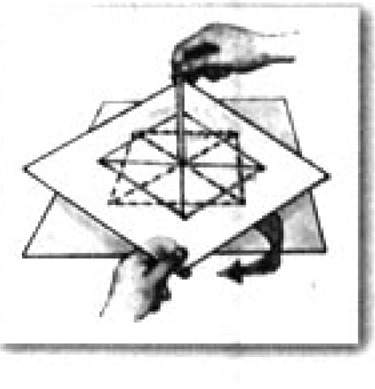


图 1-14

通过操作，我们可以找到下列正方形的对称变换．请同学们根据下列图形，在横线上填上相应的对称变换；或根据下列对称变换，画出相应的图形.

（1）恒等变换，记作 I；



（2）关于对称轴 r_1 所在直线的反射，记作 r_1；

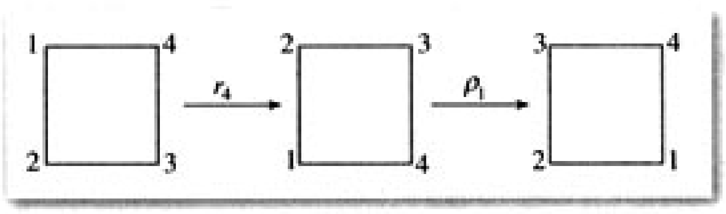
探究

1. 你能给出正五边形、正六边形的对称变换吗？
2. 你能给出等腰（不等边）三角形、平行四边形的对称变换吗？

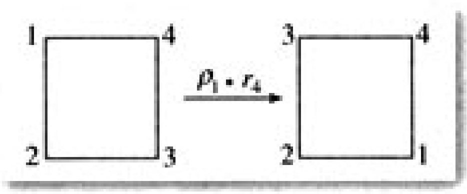
3. 对称变换的合成

上面我们以正三角形、正方形为例，讨论了正多边形的对称变换. 像研究数的性质时要考察数的运算一样，我们想探索的是，对于一个正多边形的对称变换的集合，其中的元素是否也可以“运算”呢？例如，若我们对正 n 边形连续做两次对称变换，结果会怎样？这就是我们下面要讨论的对称变换的合成问题.

所谓一个正多边形的两个对称变换的合成，是指先做一个对称变换，再做另一个对称变换. 以正方形的对称变换的合成为例，先对正方形做变换 r_4，再做变换 ρ_1，用图形表示为：



这样，我们就得到了正方形的一个新的变换，记作 $\rho_1 \cdot r_4$[1]，它对正方形的作用效果是：



[1] 我们熟悉的数字的乘法按从左到右的顺序进行，而对称变换的合成习惯上按从右到左的顺序进行.

当然 $\rho_1 \cdot r_4$ 仍是正方形的一个对称变换.（为什么？）很自然地想知道，它是 D_4 中哪一个对称变换呢？我们发现，$\rho_1 \cdot r_4$ 把顶点 1，2，3，4 依次映到了 3，2，1，4；而 r_1 也把 1，2，3，4 依次映到了 3，2，1，4. 由于正方形的对称变换由其（任意）两个顶点所唯一确定，所以 $\rho_1 \cdot r_4$ 与 r_1 是相同的对称变换，即

$$\rho_1 \cdot r_4 = r_1.$$

也就是说，ρ_1 与 r_4 的合成 $\rho_1 \cdot r_4$ 仍然是正方形的一个对称变换，而且仍然在 D_4 中.

探究

操作模型或画图，验证对于 D_4 中的任意两个对称变换，都有类似的结论.

一般地，由对称变换的定义可以知道，一个平面图形的两个对称变换 a 与 b 的合成（即先做变换 a，再做变换 b）仍然是这个平面图形的一个对称变换，记作 $b \cdot a$.

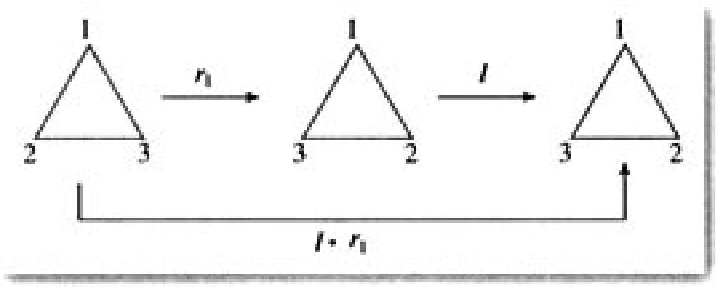
例 对于 D_3，分别求：

（1）$I \cdot r_1$；　　（2）$r_1 \cdot I$；　　（3）$r_3 \cdot r_2$；

（4）$r_2 \cdot r_3$；　　（5）$r_2 \cdot \rho_1$；　　（6）$\rho_1 \cdot r_2$.

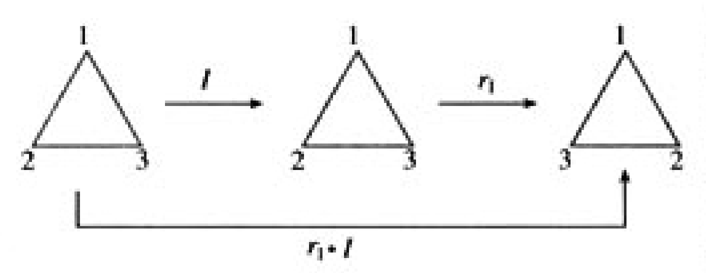
分析：我们只要根据对称变换合成的过程，分步骤完成两个变换即可.

解：（1）因为



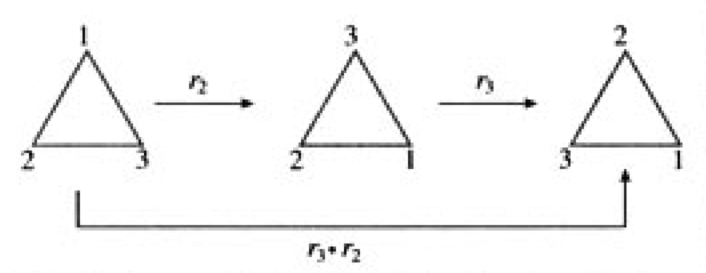
所以 $I \cdot r_1 = r_1$.

（2）因为



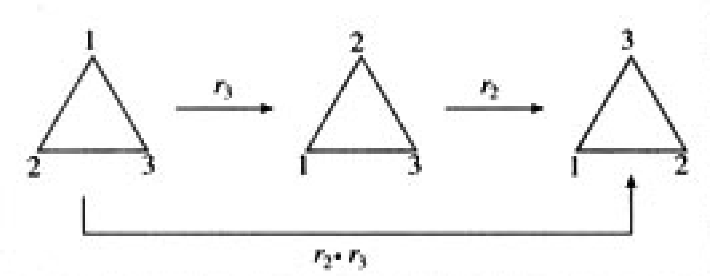
所以 $r_1 \cdot I = r_1$.

（3）因为



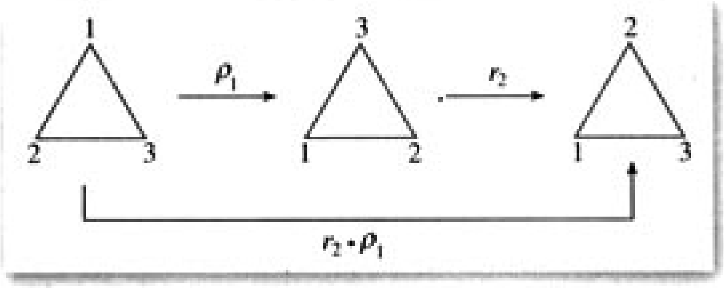
所以 $r_3 \cdot r_2 = \rho_2$.

（4）因为



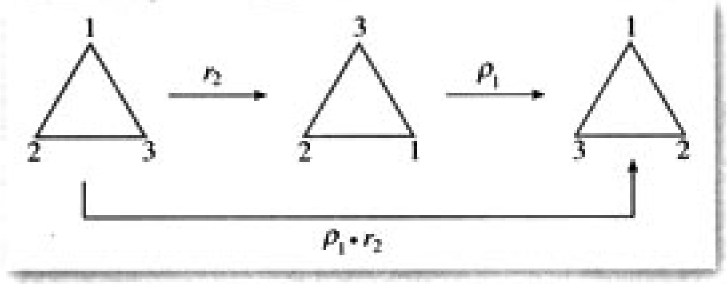
所以 $r_2 \cdot r_3 = \rho_1$.

（5）因为



所以 $r_2 \cdot \rho_1 = r_3$.

（6）因为



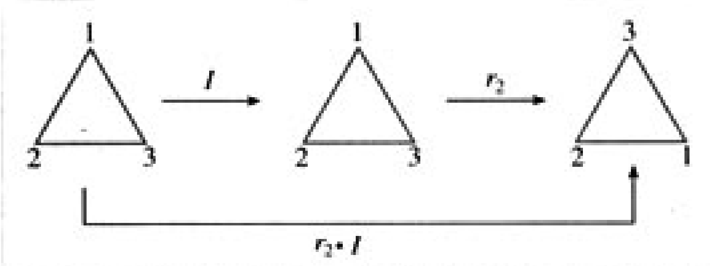
所以 $\rho_1 \cdot r_2 = r_1$.

4. 对称变换的性质

探究

数的乘法满足交换律，对称变换的合成满足交换律吗？

我们以最简单的正三角形的对称变换为例，看一看对称变换的合成是否满足交换律.若对正三角形 123 先做恒等变换 I，再做变换 r_2，即



我们发现 $r_2 \cdot I = r_2$.

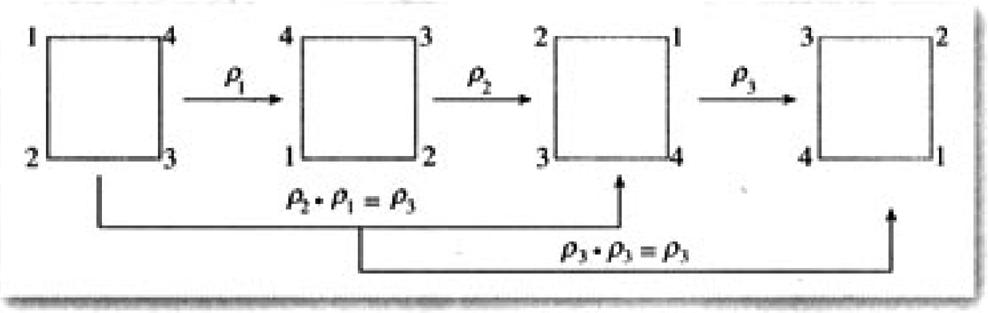
反过来，先做变换 r_2，再做恒等变换 I，即

探究

请你在集合 D_3 中任选三个变换，看看它们的合成是否都满足结合律？

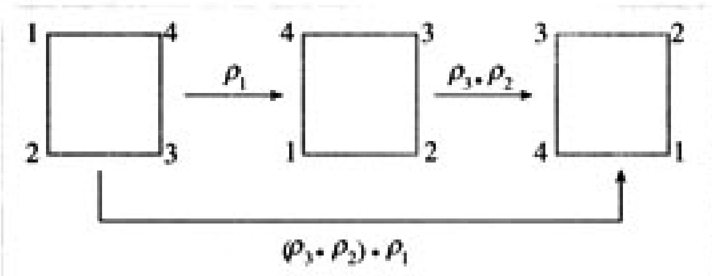
再看正方形的对称变换是否满足结合律.

先对正方形做变换（$\rho_2\cdot\rho_1$），再做变换 ρ_3，则



于是我们得到 $\rho_3\cdot(\rho_2\cdot\rho_1)=\rho_3$.

若先对正方形做变换 ρ_1，再做变换（$\rho_3\cdot\rho_2$），那么



这时我们也得到（$\rho_3\cdot\rho_2$）$\cdot\rho_1=\rho_3$.

所以

$$\rho_3\cdot(\rho_2\cdot\rho_1)=(\rho_3\cdot\rho_2)\cdot\rho_1.$$

探究

请你在集合 D_4 中任选三个变换，看看它们的合成是否都满足结合律？

从上面的讨论，我们已经看到，$\rho_3\cdot(\rho_2\cdot\rho_1)$和$(\rho_3\cdot\rho_2)\cdot\rho_1$ 对一个图形或一个点的作用都是对它先施行 ρ_1，再施行 ρ_2，最后再施行 ρ_3，因而 $\rho_3\cdot(\rho_2\cdot\rho_1)$和$(\rho_3\cdot\rho_2)\cdot\rho_1$ 是完全一样的.

一般地，我们有：若 m_1，m_2，m_3 是平面图形的 3 个对称变换，它们之间的合成满足结合律，即

$$m_3\cdot(m_2\cdot m_1)=(m_3\cdot m_2)\cdot m_1.$$

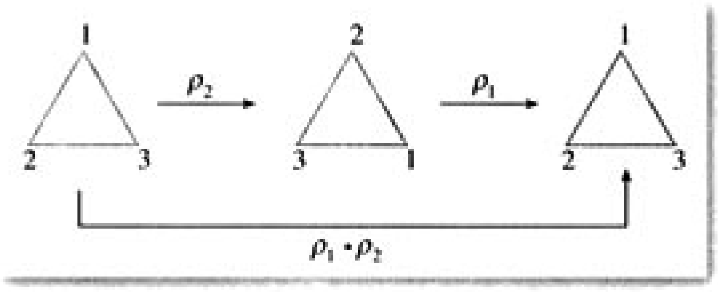
5. 对称变换的逆变换

我们知道，互为倒数的两数之积等于1；对数函数与指数函数互为反函数. 对称变换是否也可以讨论类似的问题呢？

下面我们还是以正三角形的对称变换为例，来考察一下这个问题.

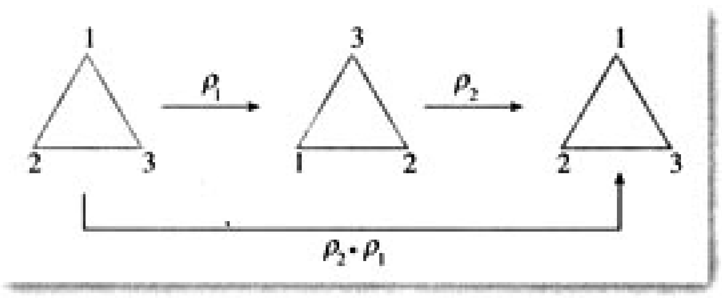
看一个例子. 对正三角形先做变换 ρ_2，再做变换 ρ_1，我们有

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = I.$$



如果对正三角形先做变换 ρ_1，再做变换 ρ_2，仍然有

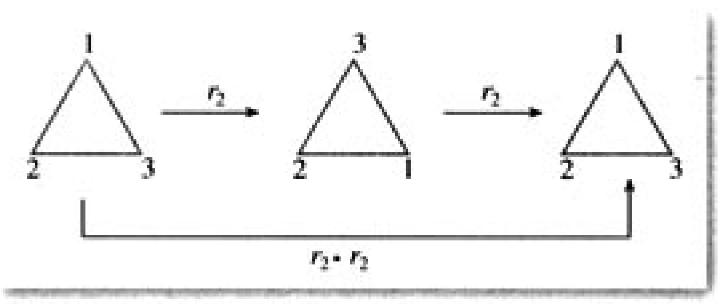
$$\rho_2 \cdot \rho_1 = I.$$



因此我们有

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \rho_2 \cdot \rho_1 = I.$$

再看一个例子. 若对正三角形连续做两次变换 r_2，即



可见对于正三角形，r_2 与 r_2 的合成等于恒等变换 I，即 $r_2 \cdot r_2 = I$.

一般地，如果一个对称变换 a 与另一个对称变换 b 的合成等于恒等变换 I，即

$$b \cdot a = a \cdot b = I,$$

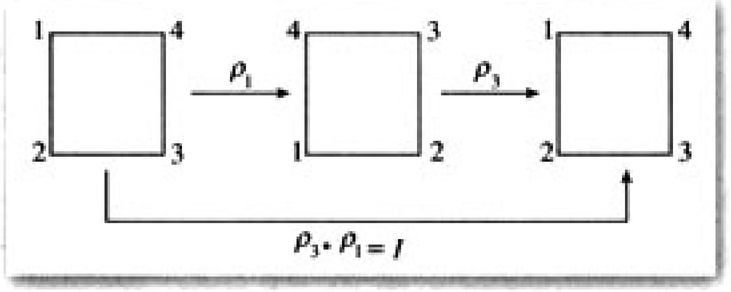
我们就称 b 为 a 的逆变换（或 a 为 b 的逆变换），记作

$$a^{-1} = b \text{（或 } b^{-1} = a\text{）}.$$

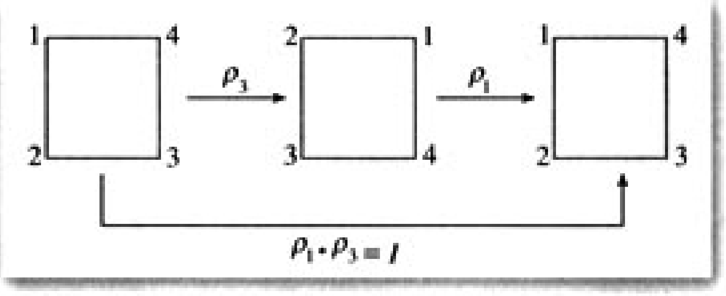
上面的例子说明，正三角形的旋转变换 ρ_1 的逆变换是旋转变换 ρ_2，即 $\rho_1^{-1} = \rho_2$；反射变换 r_2 的逆变换是它本身，即 $r_2^{-1} = r_2$.

现在我们来看看正方形的旋转变换 ρ_1 是否有逆变换.

先把正方形绕其中心旋转 90°，即对它做变换 ρ_1；为了使正方形重新回到原来的位置，再把它绕其中心旋转 270°，即对它做变换 ρ_3.



类似地，我们有



所以 ρ_1 的逆变换就是 ρ_3，即 $\rho_1^{-1}=\rho_3$.

探究

操作模型或画图，探究集合 D_3 和 D_4 中所有的对称变换是否都存在逆变换. 如果存在，这些逆变换也都分别属于 D_3 和 D_4 吗？

我们已经知道，两个对称变换 a，b 的合成 $b \cdot a$ 仍然是一个对称变换. 那么，这个对称变换的逆变换又是怎样的呢？由对称变换满足结合律，我们得到

$$\begin{aligned}(a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (b \cdot a) &= a^{-1} \cdot (b^{-1} \cdot b) \cdot a \\ &= a^{-1} \cdot I \cdot a \\ &= a^{-1} \cdot a \\ &= I.\end{aligned}$$

因此，$b \cdot a$ 的逆变换是对称变换 $a^{-1} \cdot b^{-1}$. 这个规则与我们熟悉的一些规则是类似的，例如在穿衣服时，我们总是先穿衬衣后穿外套；而在脱衣服时，我们会遵循正好相反的顺序，先脱外套后脱衬衣.

表 1-1

$\cdot$	I	ρ_1	ρ_2	r_1	r_2	r_3
I	I	ρ_1	ρ_2	r_1	r_2	r_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	I	r_3	r_1	r_2
ρ_2	ρ_2	I	ρ_1	r_2	r_3	r_1
r_1	r_1	r_2	r_3	I	ρ_1	ρ_2
r_2	r_2	r_3	r_1	ρ_2	I	ρ_1
r_3	r_3	r_1	r_2	ρ_1	ρ_2	I

这个表称为 D_3 的乘法表，这是一种常用的、有力的表示对称变换合成结果的工具．表格的第 1 行和第 1 列列出了 D_3 的全部 6 个元素．除了首行和首列外，表格的其他部分由 6 行和 6 列组成．表格的第（$j+1$）列和第（$i+1$）行交点处的元素是首行第 j 个元素与首列第 i 个元素的乘积．因为对称变换的合成一般是不满足交换律的，我们对于合成的次序必须有一个明确的规定．习惯上，按照先做列变换，再做行变换的次序得到这些合成的结果．例如，表格的第 5 列和第 3 行交点处的元素是 r_3，它是由 r_1 和 ρ_1 合成得到的，即 $\rho_1 \cdot r_1 = r_3$.

恒等变换 I 就像实数中的 1 一样.

探究

根据表 1-1 中元素的特点，回答下面的问题：

(1) 除了首行和首列外，每一行（或每一列）中的元素有什么特点？它们与 D_3 有什么关系？

(2) 第二行和第二列分别与第一行和第一列相等，表明对任意的 $m \in D_3$，$I \cdot m = m$ 且 $m \cdot I = m$. 你能说明原因吗？

(3) 每一行都有且只有一个恒等变换，表明任意给定一个 $m \in D_3$，存在唯一的 m'，使得 $m \cdot m' = I$；每一列都有只且有一个恒等变换，表明任意给定一个 $m \in D_3$，存在唯一的 m''，使得 $m'' \cdot m = I$. m' 与 m'' 相等吗？根据表 1-1，你能求出 D_3 中所有元素的逆变换吗？

乘法表给了我们非常丰富的关于正三角形的对称变换集合 D_3 的信息．实际上，我们在前面学过的 D_3 的许多性质，都可以从这个乘法表中得到.

例如，从表格中可以看到，D_3 中任意两个元素的乘积仍然在 D_3 中，也就是正三角形的任意两个对称变换的合成仍然是 D_3 中的对称变换．我们称 D_3 的这个性质为正三角形的对称变换合成的封闭性.

表格关于主对角线（就是表格所在的长方形从左上到右下的对角线）不对称，说明对

称变换的合成不满足交换律.

表格中每一行（列）的元素两两不同，而且都包含了 D_3 的所有元素. 这说明，任意取 D_3 中的一个元素 m，它与 D_3 中任意两个不同元素分别相乘，所得的积不相等. 换句话说，如果存在 a，$b\in D_3$，使得 $m\cdot a=m\cdot b$ 或 $a\cdot m=b\cdot m$，那么一定有 $a=b$❶.

❶ 这与实数乘法的消去律是类似的.

下面我们来回答上面探究中的问题（2）与问题（3）.

对于（2），由于恒等变换 I 使三角形保持不动，所以对于三角形的任意对称变换 m，$I\cdot m$，$m\cdot I$ 与 m 对三角形的作用效果是一样的，即有

$$I\cdot m=m\cdot I=m.$$

问题（3）中的 m' 与 m'' 是相等的，这是因为

$$\begin{aligned} m' &= I\cdot m' \\ &= (m''\cdot m)\cdot m' \\ &= m''\cdot(m\cdot m') \\ &= m''\cdot I \\ &= m''. \end{aligned}$$

所以 $m'(m'')$ 就是 m 的逆变换，这也说明 D_3 中每个元素的逆变换都是唯一的.

正方形的所有对称变换组成的集合 D_4 的乘法表如表 1-2 所示，请同学们通过画图或操作模型将表格填写完整.

表 1-2

$\cdot$	I	ρ_1	ρ_2	ρ_3	r_1	r_2	r_3	r_4
I								
ρ_1								
ρ_2								
ρ_3								
r_1								
r_2								
r_3								
r_4								

一般地，对于一个平面图形 K 的所有对称变换组成的集合 $S(K)$，如果把变换之间的合成看作 $S(K)$ 上的一种运算，记作 $\cdot$ ，那么这种运算都满足下述 4 条：

1. $S(K)$中任意两个变换合成的结果仍然在 $S(K)$中；
2. $S(K)$中存在恒等变换 I；
3. $S(K)$中任意一个变换的逆变换仍然在 $S(K)$中；
4. $S(K)$中的变换的合成满足结合律.

？ 比较用自然语言和数学语言描述的 4 条性质，想一想为什么它们是等价的？

如果把这 4 条性质用数学的语言表达出来，我们得到：

Ⅰ. 对任意的 m_1，$m_2 \in S(K)$，$m_1 \cdot m_2 \in S(K)$；

Ⅱ. $S(K)$中存在一个变换 I，对任意的 $m \in S(K)$，有 $I \cdot m = m \cdot I = m$；

Ⅲ. 对任意的 $m \in S(K)$，存在变换 $m^{-1} \in S(K)$，使得 $m \cdot m^{-1} = I = m^{-1} \cdot m$；

Ⅳ. 对任意的 m_1，m_2，$m_3 \in S(K)$，$m_3 \cdot (m_2 \cdot m_1) = (m_3 \cdot m_2) \cdot m_1$.

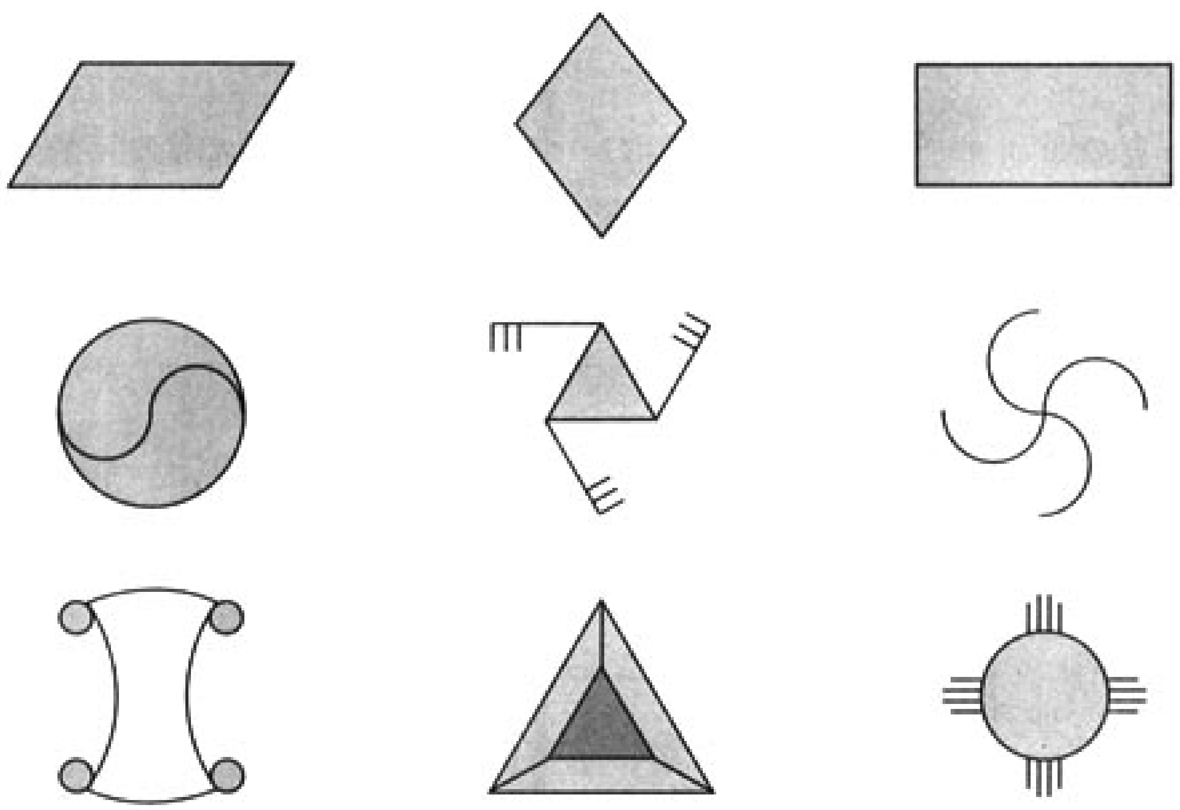
这时，我们把 $S(K)$连同它的运算“·”称为平面图形 K 的对称群，记作$(S(K), \cdot)$.

因此，$(D_3, \cdot)$ 是正三角形的对称群，有 6 个元素；$(D_4, \cdot)$ 是正方形的对称群，有 8 个元素.

一般地，正 n 边形所有的对称变换和对称变换的合成“·”构成它的对称群，称为二面体群，记作 $(D_n, \cdot)$，其中有 $2n$ 个元素.

观察

下面图形的对称群是什么？



对于一个只有有限个对称变换的平面图形 K，人们已经发现其对称群的类型只有下列 4 种：

1. 仅含有恒等变换；
2. 仅含有恒等变换和一个反射变换；
3. 含有 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 个旋转变换，而没有反射变换（这样的对称群称为循环群）；
4. 含有 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 个旋转变换，同时有 n 个反射变换（这样的对称群称为二面体群）.

第二讲 代数学中的对称与抽象群的概念

在第一讲中，我们学习了平面图形的对称群，并用它来刻画平面图形的对称性．对称群也是刻画其他数学对象的对称性的有力工具．这一讲，我们将考察代数学中的对称．

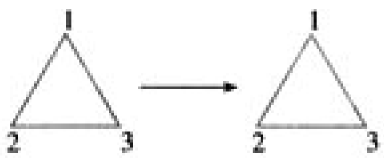
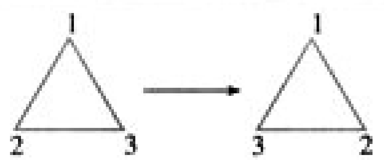
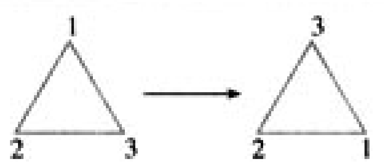
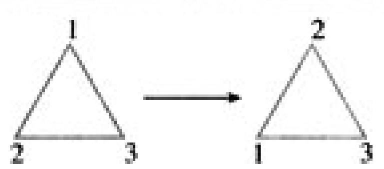
一　n 元对称群 S_n

上一讲，我们通过画图或操作模型的方法，研究了正三角形的对称群（D_3，·），以及正方形的对称群（D_4，·）．那么，有没有其他方法表示正 n 边形的对称变换呢？

前面我们曾经讨论过，正 n 边形的对称变换保持它的对称中心不动，而把它的 n 个顶点仍然映成顶点．所以，正 n 边形的对称变换可以用在对称变换的作用下相应顶点的变换来表示．

例如，表 2-1 列出了正三角形的对称变换、相应图形的变换和相应顶点的变换．

表 2-1

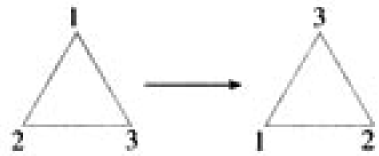
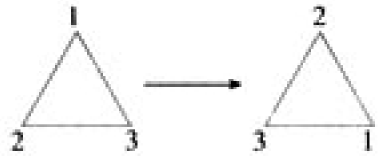
对称变换	图形的变换	顶点的变换
恒等变换 I		$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ ❶
反射变换 r_1		$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$
反射变换 r_2		$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
反射变换 r_3		$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

❶ 表示把三角形的顶点 1，2，3 分别对应到顶点 1，2，3，即

$$\begin{matrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&2&3\end{matrix}$$

这样表示的一一对应在数学上称为置换（permutation）．与对称变换一样，我们通常用字母 a，b，c 等来表示置换．

续表

旋转变换 ρ_1		$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$
旋转变换 ρ_2		$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

类似地，正方形的对称变换 $\{I，r_1，r_2，r_3，r_4，\rho_1，\rho_2，\rho_3\}$ 也可以用数字 1，2，3，4 的相应置换来表示：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$

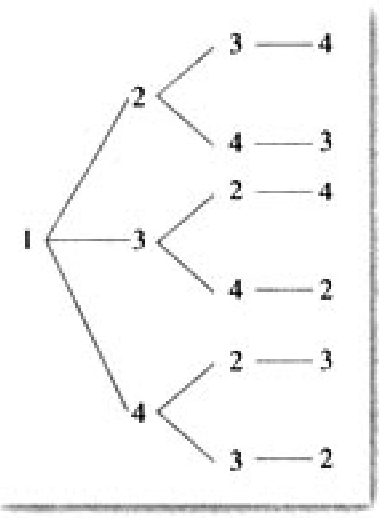
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

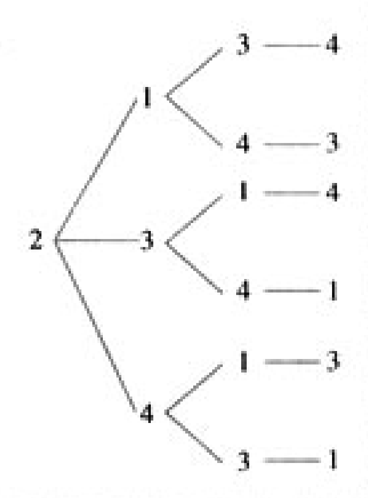
置换这种表示不仅仅是一种符号，实际上定义了集合 $\{1，2，3，\cdots，n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 到自身的一个一一对应．1，2，…，n 这 n 个数的每一个置换都确定了集合 $\{1，2，3，\cdots，n\}$ 到自身的一个一一对应．例如，正三角形的对称变换所对应的置换是集合 $T_3=\{1，2，3\}$ 到其自身的一一对应，它们共有 $2\times3=6$ 个，就是表 2-1 中的 6 个置换，这是 T_3 的全部置换．T_3 的全部置换组成的集合记作 S_3．

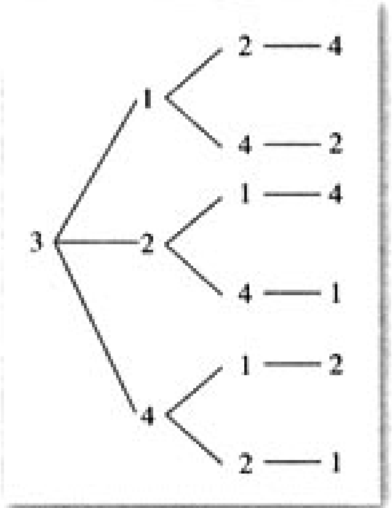
正方形的对称变换所对应的置换是集合 $T_4=\{1，2，3，4\}$ 到其自身的一一对应，它们有 $2\times4=8$ 个，但这只是 T_4 的部分置换．容易知道，T_4 共有 $4!=24$ 个置换．T_4 的全部置换组成的集合记作 S_4．

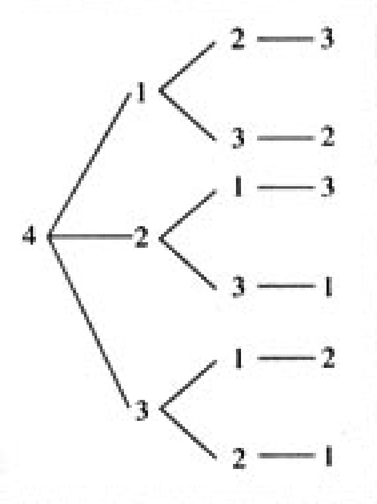
例　写出集合 $T_4=\{1，2，3，4\}$ 的所有置换．

解：我们先用排序的方法写出 T_4 所有的排列：









当置换第一行的顺序固定为 1，2，3，4 的时候，每一个排列就对应了一个置换. 所以这 24 个置换是：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

探究

我们知道，正五边形的对称变换共有 10 个. 你能用 1，2，3，4，5 五个数字的置换表示正五边形的对称变换吗？

与对称变换的合成相对应，我们可以定义置换的合成. 通常两个置换的合成也是按照从右到左的顺序，先做一个置换，再做另一个置换.

例如，$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$的合成记作$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$，由于$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$表示的对应是

$$\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&4&3&2\end{array}$$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$表示的对应是

表 2-2

·	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

想一想，上表能够由表 1-1 直接得到吗？

由表 2-2 容易验证下述 4 条是成立的：

Ⅰ. 对任意的 m_1，$m_2 \in D_3$，$m_1 \cdot m_2 \in D_3$；

Ⅱ. D_3 中存在恒等置换，满足对任意的 $m \in D_3$，$I \cdot m = m \cdot I = m$；

Ⅲ. 对任意的 $m \in D_3$，存在置换 $m' \in D_3$，使得 $m \cdot m' = I = m' \cdot m$；

Ⅳ. 对任意的 m_1，m_2，$m_3 \in D_3$，$m_3 \cdot (m_2 \cdot m_1) = (m_3 \cdot m_2) \cdot m_1$.

我们把置换集合 D_3 连同它上面的运算“·”也称为对称群（D_3，·），这是正三角形的对称群的另外一种表示方式.

类似地，可以用置换表示正方形，正五边形，正六边形……正 n 边形的对称群，从而得到二面体群（D_n，·）($n \geqslant 3$) 的另外一种表示方式.

一般地，$T_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 共有 $n!$ 个置换，它们组成的集合记作 S_n. 如果把置换之间的合成“·”看作 T_n 上的一种运算，可以证明，下述 4 条是成立的：

Ⅰ. S_n 中任意两个置换合成的结果仍然在 S_n 中；

Ⅱ. S_n 中存在恒等置换；

Ⅲ. S_n 中任意一个置换的逆置换仍然在 S_n 中；

Ⅳ. S_n 中置换的合成满足结合律.

因此，$\{S_n, \cdot\}$ 是 T_n 的对称群，称为 n 元对称群.

思考题

1. 利用置换给出正五边形的对称群 $(D_5, \cdot)$.
2. $(S_3, \cdot)$ 与用置换给出的 $(D_3, \cdot)$ 有什么关系？

二　多项式的对称变换

在初中，我们学过各种各样的多项式，几个数与字母的积的和就构成了多项式．例如下面的代数式都是多项式：

$$x+y,\ x^2+3xy+y^2,\ xyz,\ xyz^2,\ x+y^2+z^3.$$

类似于平面图形的对称性，多项式也有对称性．

例如，在多项式 $x+y$ 中，用字母 x 代替字母 y，同时用字母 y 代替字母 x，我们得到一个新的多项式

$$y+x.$$

虽然这个多项式与原来的多项式形式不同，但根据数的加法交换律，我们有

$$x+y=y+x.$$

类似地，调换多项式 $x^2+3xy+y^2$ 中的字母 x，y，可以得到一个新的多项式

$$y^2+3yx+x^2,$$

显然，$x^2+3xy+y^2=y^2+3yx+x^2$.

思考

对于多项式 xyz，怎样替换字母 x，y，z，才能得到与原来的多项式相等的多项式？

类比数字 1，2，3 的置换或正三角形的对称变换，我们可以这样来替换上述多项式中的字母 x，y，z：

（1）x，y，z 保持不变，此时 $xyz \to xyz$；

（2）用 x 代替 y，y 代替 x，z 代替 z，此时 $xyz \to yxz$；

（3）用 x 代替 z，z 代替 x，y 代替 y，此时 $xyz \to zyx$；

（4）用 y 代替 z，z 代替 y，x 代替 x，此时 $xyz \to xzy$；

（5）用 x 代替 y，y 代替 z，z 代替 x，此时 $xyz \to zxy$；

实际上，这里的字母与字母的替换，就是集合 $\{x, y, z\}$ 到其自身的一一对应．

（6）用 x 代替 z，z 代替 y，y 代替 x，此时 $xyz \to yzx$.

这样，我们就得到了 6 个相等的多项式，即

$$\boxed{xyz \quad yxz \quad zyx \quad xzy \quad zxy \quad yzx} \tag{①}$$

思考

还有其他的替换方式，使得到的多项式与多项式 xyz 相等吗？从上面的方框中任选一个多项式，用同样的方法替换它的字母，你能得到什么结果？

对于多项式 xyz^2，用 x 代替 y，用 y 代替 x，用 z 代替 z，得到 $yxz^2=xyz^2$. 而任何涉及到字母 z 的替换都会使原来的多项式改变，如用 x 代替 z，用 z 代替 x，用 y 代替 y，得到 zyx^2，$zyx^2 \neq xyz^2$. 所以用字母替换的办法，我们得到两个相等的多项式

$$\boxed{xyz^2 \quad yxz^2} \tag{②}$$

最后，在多项式 $x+y^2+z^3$ 中，任何字母的替换都会使原多项式改变，因而我们得到唯一的一个多项式

$$\boxed{x+y^2+z^3} \tag{③}$$

与正多边形的对称变换定义类似，我们可以利用对多项式的这种字母替换来定义多项式的对称变换.

如果一个多项式 F 经过字母的替换仍与原来的多项式相等，我们就称多项式 F 具有对称性，上述对多项式中字母的替换叫做多项式的对称变换.

保持字母不动的对称变换就是多项式的恒等变换.

由上面的例子可以看到，有些多项式（如 $x+y$，$x^2+3xy+y^2$）在字母的任意替换下保持不变（我们认为这样的多项式的对称性很好）；有些多项式（如 xyz^2）在字母的某些替换下保持不变；而有些多项式（如 $x+y^2+z^3$）仅在字母不动时才保持不变.

对于较复杂的多项式（如 $xyz+xyw+xzw+yzw$），用替换字母、比较替换后的多项式与原来的多项式是否相等的方法研究它的对称性是比较困难的. 有没有更简便的方法呢？

我们看到，用数字的置换来表示平面图形的对称变换是一种很好的方法. 能否也用置换来表示多项式的对称变换呢？

为了研究的方便，我们用同一个字母，不同的脚标来区分多项式中的不同字母. 例如，我们可以把 $x+y$，xyz 分别表示成

$$x_1+x_2，\ x_1x_2x_3.$$

这样，在多项式 x_1+x_2 中调换 x_1 与 x_2 的位置，可以看做调换脚标 1，2 的位置，得到 x_2+x_1.

x_1+x_2 的对称变换有两个，用图示表示为：

类似地，设 x_1，x_2，x_3 是一元三次方程 $x^3-c_1x^2+c_2x-c_3=0$ 的根，那么有下列关系

$$\begin{cases}c_1=x_1+x_2+x_3,\\ c_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,\\ c_3=x_1\cdot x_2\cdot x_3.\end{cases}$$

请同学们自己验证，S_3 中的任意置换都是 $x_1+x_2+x_3$，$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 和 $x_1\cdot x_2\cdot x_3$ 的对称变换．因此这几个多项式也都是对称多项式．

有兴趣的同学，可以类比平面图形的对称群的定义，试着自己给出多项式的对称群的定义．

思考题

1. 置换 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 是多项式（x_1-x_2）的对称变换吗？
2. S_3 中的哪些置换是多项式 $x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+5x_1x_3-x_3$ 的对称变换？
3. S_3 中的哪些置换是多项式 $-2x_1^2x_2-2x_1x_2^2-2x_2^2x_3-2x_2x_3^2-2x_1^2x_3-2x_1x_3^2+8$ 的对称变换？
4. 验证 S_4 中的置换都是多项式 $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$ 的对称变换．
5. 设 x_1，x_2，x_3，x_4 是 4 次方程 $x^4-c_1x^3+c_2x^2-c_3x+c_4=0$ 的根，那么有下列关系

$$\begin{cases}c_1=x_1+x_2+x_3+x_4,\\ c_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4,\\ c_3=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4.\end{cases}$$

请同学们自己验证上述 3 个多项式都是对称多项式．

三 抽象群的概念

1. 群的一般概念

在前文中，我们已经定义了正 n 边形的对称群（D_n，$\cdot$）和 n 元对称群（S_n，$\cdot$）．虽然它们有着背景完全不同的集合，并且它们的运算的含义也不同，但它们却有如下共同特点：

（1）有一个非空集合；

（2）在这个集合上定义了一个运算；

（3）运算满足性质 Ⅰ～Ⅳ．

这样的结构在数学、物理学、化学和生命科学中大量存在．数学家把它们概括成一个抽象的概念——群．前面学习的对称群就是群的一个具体例子．

为了介绍群的一般概念，我们先来定义集合上的运算．

设 G 是一个非空集合，G 上的一个二元运算是指一个映射“·”，它把 G 中的任意一个有序对 (a, b) 都对应到 G 中的一个元素，我们把这个元素记作 $a \cdot b$. 例如：

D_n 中对称变换的合成是 D_n 上的二元运算；

S_n 中置换的合成是 S_n 上的二元运算；

整数的加法（+）、减法（−）和乘法（×）都是整数集 **Z** 上的二元运算，这是因为两个整数的和、差与积都仍然是整数.

整数的除法是 **Z** 上的二元运算吗？

定义　设非空集合 G 满足下述 4 个条件：

Ⅰ. G 上有一个二元运算“·”，即对任意的 $a, b \in G$，有 $a \cdot b \in G$；

Ⅱ. G 中有单位元 I，对任意的 $a \in G$，$I \cdot a = a = a \cdot I$；

Ⅲ. G 中的每个元素都有逆元，即对任意的 $a \in G$，存在 $a' \in G$，使得 $a \cdot a' = I = a' \cdot a$；

Ⅳ. G 的乘法满足结合律，即对任意的 $a, b, c \in G$，$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$；

则 $(G, \cdot)$ 称为一个群（group）.

习惯上，“·”叫做 G 的乘法.

换句话说，群就是一个非空集合. 这个集合有一个满足结合律的二元运算，集合中有一个单位元，集合中每一个元素都有一个逆元.

群的例子是大量存在的. 例如，正有理数集 $\mathbf{Q}^+$ 连同正有理数的乘法构成一个群，记作 $(\mathbf{Q}^+, \cdot)$. 下面的表格说明了 $\mathbf{Q}^+$ 满足群的 4 个条件.

二元运算	对任意的 $a, b \in \mathbf{Q}^+$，$a \cdot b \in \mathbf{Q}^+$
单位元	$1 \in \mathbf{Q}^+$
逆元	对任意的 $a \in \mathbf{Q}^+$，存在 a 的逆元 $\frac{1}{a} \in \mathbf{Q}^+$
结合律	对任意的 $a, b, c \in \mathbf{Q}^+$，$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

又如整数集 **Z** 连同整数的加法构成一个群，记作 $(\mathbf{Z}, +)$. 下面的表格说明 **Z** 满足群的 4 个条件.

二元运算	对任意的 $a, b \in \mathbf{Z}$，$a + b \in \mathbf{Z}$
单位元	$0 \in \mathbf{Z}$
逆元	对任意的 $a \in \mathbf{Z}$，存在 a 的逆元 $-a \in \mathbf{Z}$
结合律	对任意的 $a, b, c \in \mathbf{Z}$，$(a+b)+c = a+(b+c)$

这些例子告诉我们，群的定义中的乘法的含义很广，它可以是平面图形的对称变换的合成，置换的合成，也可以是数的乘法或加法.

下面，我们来看一个有限群（元素个数是有限的）的例子. 我们知道，所有整数除以 3 得到的余数只有 3 个，即 0，1 和 2. 记

$$\mathbf{Z}_3 = \{0, 1, 2\}❶.$$

❶ 这里的 0，1，2 是借用来的新符号，它们的含义与整数 0，1，2 是完全不同的.

在集合 $\mathbf{Z}_3$ 上定义一个运算，用⊕表示，即对任意的 a，$b\in\mathbf{Z}_3$，使

$$a\oplus b=(a+b)\text{ 除以 3 得到的余数.}$$

按照这个运算，我们可以得到 $\mathbf{Z}_3$ 的乘法表（习惯上也叫加法表）：

⊕	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

例　验证 $\mathbf{Z}_3$ 和运算⊕构成一个群.

分析：只要验证 $\mathbf{Z}_3$ 连同运算⊕满足群的 4 个条件Ⅰ～Ⅳ即可.

解：Ⅰ. 由 $\mathbf{Z}_3$ 的加法表可知，$\mathbf{Z}_3$ 中任意两个元素的和仍然在 $\mathbf{Z}_3$ 中；

Ⅱ. 因为

$$0\oplus 1=1,\ 1\oplus 0=1,\ 0\oplus 2=2,\ 2\oplus 0=2,$$

所以 0 是 $\mathbf{Z}_3$ 的单位元；

Ⅲ. 由 $1\oplus 2=2\oplus 1=0$，$0\oplus 0=0$，知 1 的逆元是 2，2 的逆元是 1，0 的逆元是 0；

Ⅳ. 容易验证，对任意的 a，b，$c\in\mathbf{Z}_3$，$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$，即运算⊕满足结合律（请同学们自己验证）.

综上所述，$\mathbf{Z}_3$ 和运算⊕构成一个群 $(\mathbf{Z}_3,\oplus)$.

探究

用 $\mathbf{Z}_4$ 表示所有的整数除以 4 得到的余数，即

$$\mathbf{Z}_4=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

在这个集合上定义一个运算⊕，即对任意的 a，$b\in\mathbf{Z}_4$，使

$$a\oplus b=(a+b)\text{ 除以 4 得到的余数.}$$

完成下列 $\mathbf{Z}_4$ 的乘法表

⊕	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

并说明 $(\mathbf{Z}_4,\oplus)$ 也是一个群.

用类似的方法我们可以定义 $(\mathbf{Z}_n,\oplus)(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant 2)$.

第三讲 对称与群的故事

“群”这个词是在 1831 年由天才的法国数学家伽罗瓦提出来的．在这之前，人们已经对各种几何图形的对称性、多项式的对称性等进行过系统的研究．在这之后，某种事物的全体对称的集合被提升到一个优美的数学结构——群，开始了现代数学对事物对称性的深层次探讨．

现在，我们从易到难地介绍一些对称与群在日常生活、化学、物理学中具有典型性的应用，最后介绍伽罗瓦其人以及伽罗瓦理论对数学，特别是代数学的划时代贡献．

一 带饰和面饰

同学们，你见过手工艺人剪窗花吗？你留心观察过自己穿的衣服上的图案、建筑物的各种装饰、广告中的图案设计吗？有没有想过它们是怎样被设计出来的？

这些设计与我们现在学习的对称与群的知识有关．学了对称与群的知识，会使我们更加清楚地认识这些设计的本质．

首先，我们研究两类在日常生活和艺术领域中常常见到的对称图形．

在服装、壁画、图书的版面、建筑物等的装饰设计中，常常可以见到类似图 3-1～图 3-8 中的图案．

图 3-1

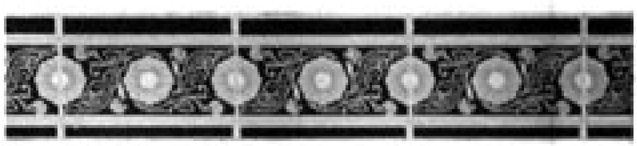


图 3-2

图 3-3

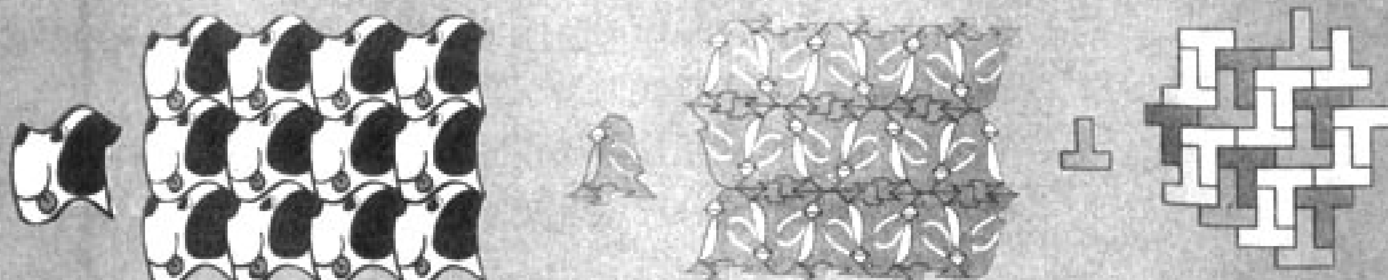
图 3-4

图 3-5

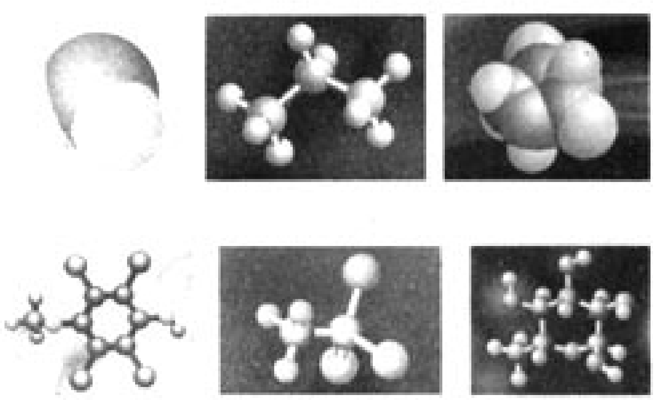
图 3-6

思考题

1. 设计一个你自己认为漂亮的带饰，并说出在你的设计中用到了哪些对称变换.
2. 试把下列的面饰单元平移成面饰.



二　化学分子的对称群



物体的形状往往具有这样那样的"对称性". 由于物体由分子构成，因此可以猜想，分子也会有这样那样的对称性，而且这种对称性往往在很大程度上能够决定分子的性质. 在化学分子的研究中，对于其对称性的研究常常可以使人加深对物体性质的认识.

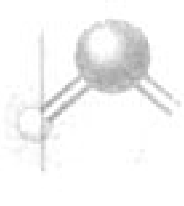


图 3-19

人们有时会说一些分子比另一些分子更对称，或者某些分子具有高度对称性，某些分子具有低对称性. 虽然从直观上看，这些说法都是明确的，但是为了建立严格的分子对称性的概念，科学家们使用了群这一数学工具.

这里，我们以水分子 H_2O 和氨分子 NH_3 为例，介绍化学分子的对称变换和对称群.

请同学们自己制作一个 H_2O 的模型.

水分子 H_2O 由 1 个氧原子 O 和 2 个氢原子 H 构成，并且这 3 个原子在同一个平面内（图 3-19）.

下面，我们就一起来寻找使水分子保持不动的对称变换（习惯上称为对称操作）.

显然，保持空间所有点不动的恒等操作是水分子的一个对称操作（图 3-20）.

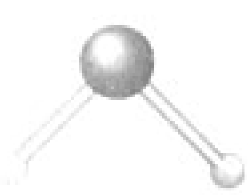
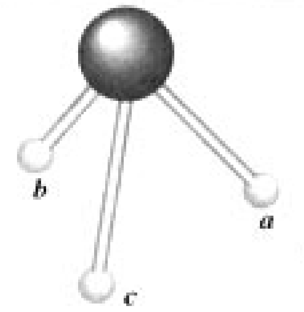
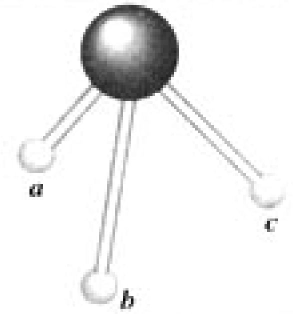
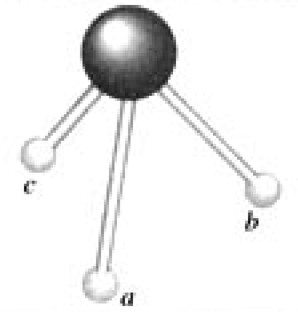
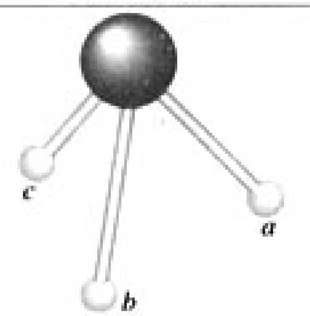
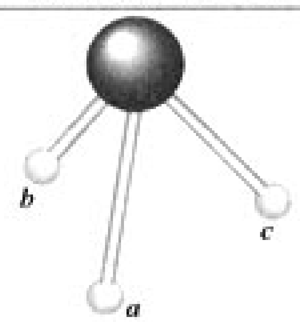
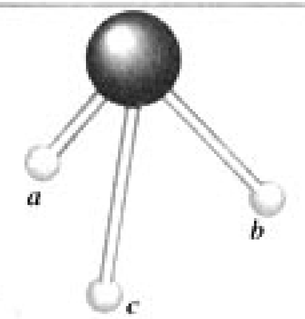


图 3-20

接着考虑水分子的反射变换. 与平面图形不同，这里研究的反射变换总是与对称面联系在一起.

探究

下表中的 NH_3 都是由图 3-26 中的 NH_3 经过对称操作得到的. 请你写出相应的对称操作.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>恒等操作</td>
<td>绕真轴旋转 120°</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>关于对称面 α 的反射</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

这 6 个对称操作就是 NH_3 的全部对称操作，它们组成的集合连同对称操作的合成构成了 NH_3 的对称群（通常记作 C_{3v}）.

数学上对于群的研究，并不关心群中的元素是什么，这些元素有什么物理意义. 但当把群的基本理论与化学分子的具体对称性结合起来之后，群论就成了研究分子运动规律的一种有力的工具. 如化学家利用群论推导出具有各种各样几何构型的化学分子的对称群仅有 32 种；又如在利用群论分析分子对称性如何制约其量子力学解时，常常无需详细计算就能获得一些定性的结论. 有兴趣的同学可以查阅相关的书籍.

三 晶体的分类

在自然界中，几何对称最突出地表现在晶体中. 晶体的对称是极其精巧的，例如下图是食盐（NaCl）晶体中原子排列的模型（白点代表钠原子 Na，黑点代表氯原子 Cl）（图 3-27），二氧化硅（SiO_2）晶体中原子排列的模型（白点代表硅原子 Si，黑点代表氧原子 O）（图3-28）和二氧化钛（TiO_2）晶体中原子排列的模型（白点代表钛原子 Ti，黑点代表氧原子 O）（图 3-29）.

学习总结报告

同学们，前面我们学习了对称与群的一些最基本的知识．从中我们已经看到，尽管群是现代数学中一个非常抽象的概念，但它与我们熟悉的身边事物以及学过的数学知识却有着非常密切的联系．

从“对称”到对称群，再到群，从而得到一个精确的、具有普遍适用性的数学概念，这是一个在错综复杂的现象中寻求共同结构的过程，也是一个对事物认识不断深化的过程，在数学的研究中，这个过程具有代表性．通过前面的学习，你对这个过程是否有所感悟？

群是以高度抽象的形式给出的，或许它已不像最初的“对称”那么形象直观、生动活泼而富有吸引力，但因为它从事物的结构特征刻画了其本质，因此它的功能非常强大，它不仅是数学中的一个核心概念，而且在物理、化学及艺术、建筑等领域都有广泛的应用．

数学学习的过程是一个渐进的过程，对于像群这样抽象的概念，更是需要循序渐进地思考、领悟，并不断地反思、总结，才能逐步领会其中的数学思想方法．

请你写一篇学习总结报告．建议报告包括下列三方面的内容：

1. **知识的总结**　如对本专题整体结构和内容的理解，对对称的数学描述和群的概念的认识等；

2. **拓展**　通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，进一步探讨对称在自然界中的广泛性和群对刻画对称的作用；

3. **学习体会**　通过本专题的学习，谈谈你对数学中研究问题的思想方法的认识．

同学们可以参考下列书籍：

1. 段学复，《对称》，人民教育出版社；
2. 赫尔曼·外尔，《对称》，上海科技教育出版社；
3. 张远达，《运动群》，上海教育出版社．

附录一

给定一个平面刚体运动 m. 设 A, B, C 为 3 个不共线的点，在 m 的作用下，点 A, B, C 依次对应到点 A', B', C'. 有趣的是，点 A, B, C 的运动完全确定了平面刚体运动 m，即在 m 的作用下，平面上任意一点的象由点 A, B, C 的象 A', B', C' 唯一确定.

现在，我们来证明这件事情.

设点 P 是平面上的任意一点，在 m 的作用下，点 P 被对应到了点 P'，我们只需证明点 P' 是由 A', B', C' 唯一确定的.

由于 m 保持平面内任意两点间的距离不变，故有 $|A'P'|=|AP|=a$, $|B'P'|=|BP|=b$, $|C'P'|=|CP|=c$. 所以 P' 必在以 A' 为圆心，以 a 为半径的圆 $\odot A'$ 上. 同样地，P' 必在以 $B'(C')$ 为圆心，以 $b(c)$ 为半径的圆 $\odot B'(\odot C')$ 上. 因此，点 P' 是 3 个圆 $\odot A'$, $\odot B'$, $\odot C'$ 的公共交点.

我们知道，两个不同的圆最多有两个交点，所以 3 个不同的圆最多也只能有两个交点. 如果 $\odot A'$, $\odot B'$, $\odot C'$ 有两个交点，那么 P' 的位置就有两种选择，而不能唯一确定.

假设 $\odot A'$, $\odot B'$, $\odot C'$ 有两个交点 P', P''，如图 1 所示.

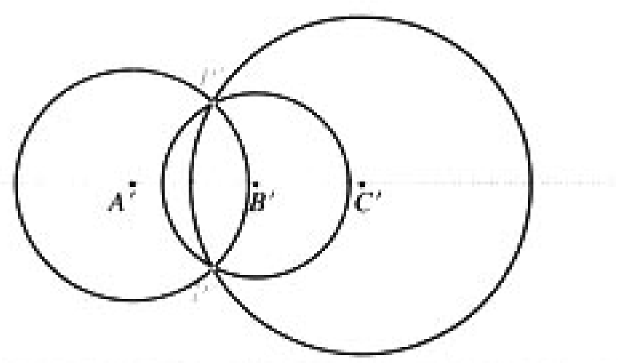


图 1

那么 A', B', C' 都在点 P' 和 P'' 连线的垂直平分线上（为什么?），这与点 A, B, C 不在一条直线上，因而它们的象 A', B', C' 也不在一条直线上相矛盾，这说明 $\odot A'$, $\odot B'$, $\odot C'$ 这 3 个圆只有一个交点 P'，这样点 A', B', C' 就唯一确定了点 P'，至此证明结束.

这个结果很有趣，也很有用. 如果给定两个平面刚体运动 m_1 和 m_2，若我们还知道，对不共线的 3 个点 A, B, C，有

$$m_1(A)=m_2(A),\ m_1(B)=m_2(B),\ m_1(C)=m_2(C),$$

则由上面结果便得平面刚体运动 $m_1=m_2$，即若两个平面刚体运动在不共线的 3 个点上的作用是一样的，则它们必是同一个平面刚体运动，这一点我们在讨论中经常用到.

附录二

定义　设 m：平面 $\alpha \to$ 平面 α 是一个平面刚体运动，若在平面 α 内至少存在一个点 O，点 O 在 m 的作用下保持不动，则称 m 为有不动点的平面刚体运动.

通过前面的学习，我们已经知道旋转变换的对称中心是一个不动点，反射变换的对称轴上所有的点都是不动点.

还有哪些平面刚体运动具有不动点呢？利用平面几何的知识，我们可以对有不动点的平面刚体运动进行分类.

定理　设 m：平面 $\alpha \to$ 平面 α 是一个平面刚体运动，点 O 是 m 的一个不动点，那么 m 或者是一个以点 O 为中心的旋转变换，或者是一个关于过 O 点的直线 l 的反射变换.

证明：任取平面 α 上的两个点 A，B，使得 A，B，O 不共线. 为了叙述方便，不妨设 OB 由 OA 逆时针旋转一个小于 $180°$ 的角得到.

设 m 把 A，B，O 分别映到 A'，B'，O'. 根据附录一，A'，B'，O' 的位置唯一确定了平面 α 上其他点在 m 下的象，即完全确定了 m.

如图 2，如果 A' 已经确定，且 OA' 由 OA 逆时针旋转 θ（$0° \leqslant \theta < 360°$）得到，则 $\triangle A'O'B' \cong \triangle AOB$，所以 B' 的位置只能有 B_1' 与 B_2' 两种情况.

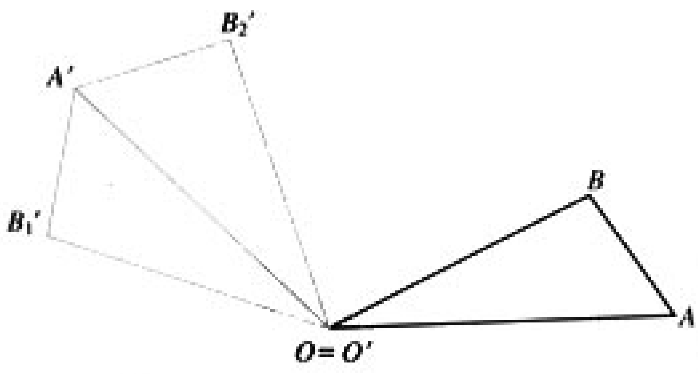


图 2

(1) 如果 $B'=B_1'$，则 $\angle BOB'=\theta$，即 OB' 由 OB 逆时针旋转 θ 得到（图 3）.

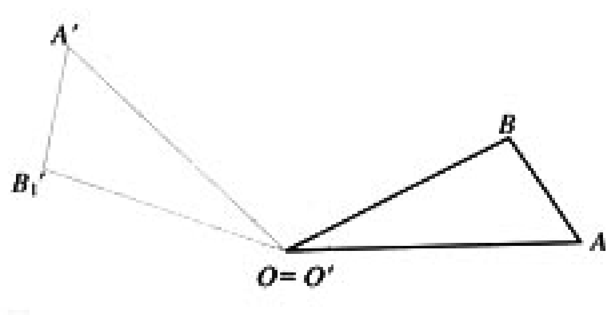


图 3