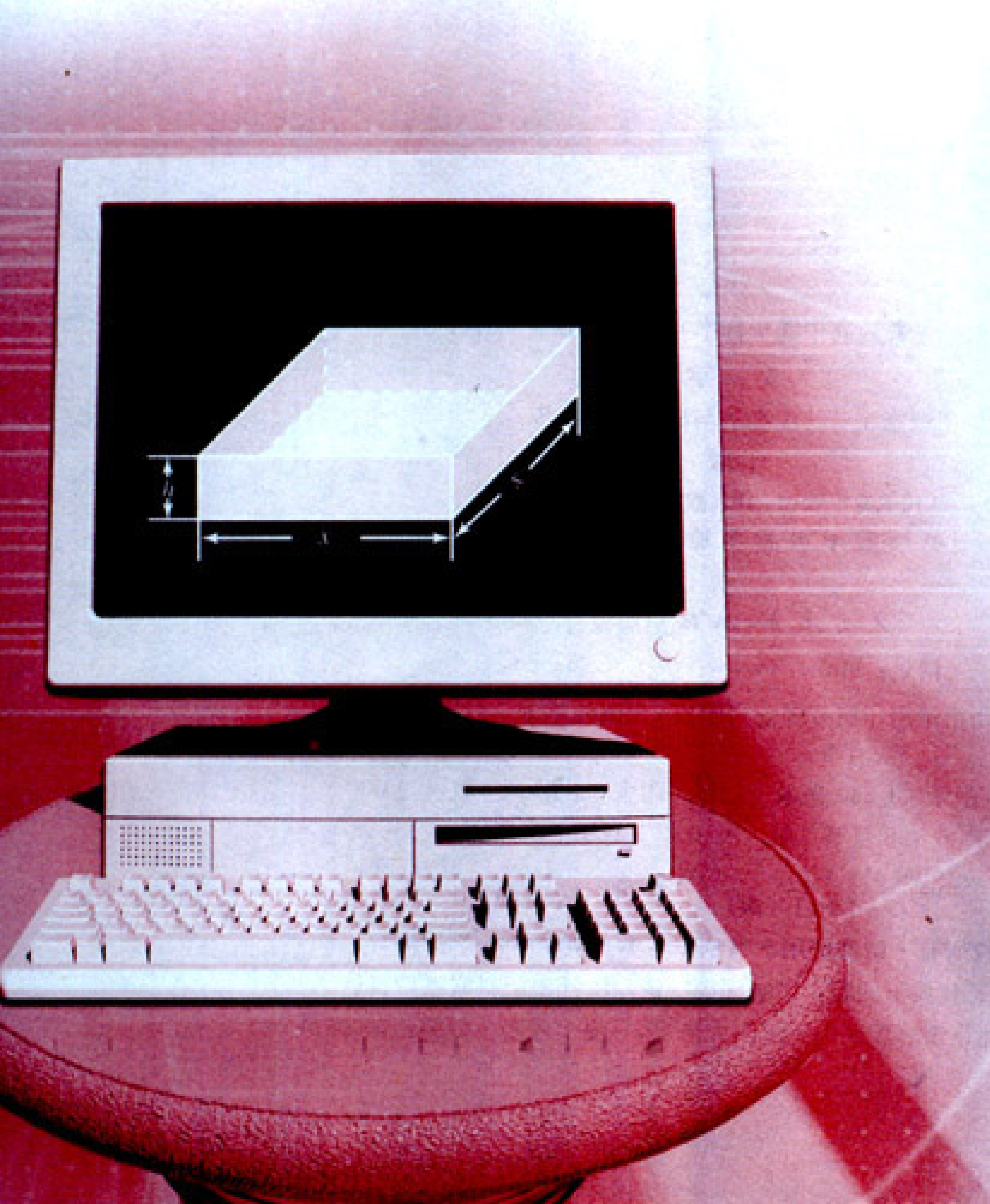
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–7

优选法与试验设计初步

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　张爱和

责任编辑　　张唯一

美术编辑　　李宏庆　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 4－7　优选法与试验设计初步

B版

人民教育出版社　课程教材研究所
中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组　编著

*

人民教育出版社　出版发行

网址：http：//www. pep. com. cn

涿州市星河印刷有限公司印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：4. 25　字数：94 000

2006 年 6 月第 1 版　2010 年 7 月第 5 次印刷

ISBN 978-7-107-19761-1
G・12811（课）　定价：4. 45 元

本册导引

本册共两章，第一章讲述优选法，第二章讲述试验设计. 介绍了优选法和试验设计初步的最基本的内容.

第一章1.1节，讲什么是优选法，介绍了有关优选法的一些基本概念. 如：什么是优选问题，以及在工农业生产中、在科学试验中都普遍存在着优选问题；优选法在数学中属于最优化方法，是最优化方法中通过试验比较来得到最优解的方法，也叫做直接最优化方法.

1.2节，讲单因素优选法. 首先介绍单峰函数，它是优选问题的目标函数. 根据单峰函数的性质，提出了来回调试法. 来回调试法是单因素优选法的前身，也是单因素优选法的基础. 为了使不同方法能进行比较，定义了精确度. 在此基础上，分别介绍了分数法、0.618法、对分法和分批试验法等单因素优选法. 优选法是实践性很强的学科，应在实践中使用来理解和掌握. 由于学校条件的限制，实践起来有困难，因此在各种方法中编进了有数学模型或能用数学公式表示的一些实际例子和习题. 目的是通过这些例子和习题，运用优选法，借助于计算器来求解，从中理解和掌握各种优选的方法.

1.3节，讲斐波那契数列和黄金分割，介绍了与优选法有关的斐波那契数列和黄金分割. 一方面介绍与优选法有关的一些数学知识，同时也导出了分数法与0.618法之间的关系，以加深对优选法的理解. 其中用到一些极限的方法，未学过极限的同学只要知道所叙述的结论就可以了. 本节在斐波那契数列和黄金分割的基础上给出了各种单因素优选法精确度的比较，目的是为了加深对各种方法的认识.

1.4节，讲双因素优选法，介绍了几种双因素方法和它们应用的实例. 这些方法都是在单因素方法的基础上，把双因素化为单因素，从单因素着手，解决双因素的优选问题.

第二章讲试验设计初步. 本章通过实际例子介绍了正交试验设计的一些基本概念和方法、步骤，同时也对正交表作了简单的介绍.

目　录

附录

第一章　优 选 法

1.1　什么是优选法

1.1.1　优选问题

先看例子．煮饭，对一定量的米，水放多了，煮出来是烂饭；水放少了，煮出来的饭太硬，或是“夹生饭”．水应该放多少煮出来的饭既不烂又不硬？再例如，煤气灶的风门大小，风门开得太大，空气混合量太多，出现“离焰”；风门开得太小，混合空气进入量不足，出现“黄焰”．风门开多大合适？

这样的问题有共同的特点．有目标：饭不烂不硬，煤气灶的火焰合适；需要找合适的控制量：煮饭的加水量，煤气灶风门的大小，使达到目标的要求．这样的问题叫做**优选问题**．

优选问题不仅在日常生活中存在，工农业生产中，科学实验中，都普遍存在着大量的优选问题．

例如：在农业生产中，如何选择农药的浓度，如何选择化肥的用量，如何选择催芽的温度等；在工业生产中，如何选择用料的配比，如何选择车床的转速、刀具的角度，如何选择工艺操作条件等；在科学实验中，如何调试仪器、仪表等，这些问题中都有优选问题．

1.1.2　优选问题的分类

常见的优选问题大致有以下几类：

（1）寻找合适的配方配比；

（2）寻找合适的工艺操作条件；

（3）调试仪器和仪表；

（4）工程设计参数的选定；

（5）近似计算．

从数学的角度来看，又可分为两类：

（1）有合适的数学模型，且可用来计算；

（2）没有合适的数学模型，或有数学模型但计算有困难．

例如，有一门大炮和一批炮弹，已知炮弹的射程与发射的角度有关，什么样的角度射程最大？

这是一个优选问题，但炮弹的运动轨迹是有数学模型的.

如果假定炮弹的初速度为 $\boldsymbol{v}$，它的发射角为 α，若不计空气阻力，那么如图 1-1 建立坐标系后，有

$$\begin{cases} y=(v\sin\alpha)t-\dfrac{1}{2}gt^2, \\ x=(v\cos\alpha)t, \end{cases}$$

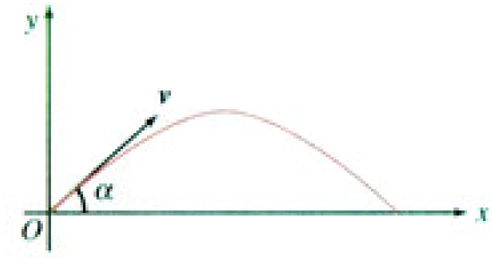


图 1-1

其中 $v=|\boldsymbol{v}|$，g 为重力加速度，t 为时间，消去 t 后得

$$y=x\cdot\tan\alpha-\frac{1}{2}g\cdot\frac{x^2}{v^2\cos^2\alpha}.$$

这是一个二次函数（抛物线），可以写成：

$$y=x\left(\tan\alpha-\frac{1}{2}g\cdot\frac{x}{v^2\cos^2\alpha}\right).$$

令 $y=0$，得抛物线与 x 轴的两个交点：

$$\begin{aligned} x_1=0,\ x_2&=2\tan\alpha\cdot v^2\cos^2\alpha/g \\ &=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot v^2/g \\ &=(\sin 2\alpha)v^2/g. \end{aligned}$$

在初速度的大小 v 一定的情况下，第二个交点 $(x_2, 0)$ 到原点的距离 x_2 就是它的射程. 当 $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，射程达到最大值. 即 $\alpha=45^\circ$ 时，射程最远. 此优选问题的解是通过对数学模型的计算得到的.

但是，实际上的优选问题，大量的是没有合适的数学模型的情况. 对没有合适的数学模型，或有数学模型而计算困难的优选问题的解决，就需通过试验来解决，也就是用试验的方法来取得最优解.

1.1.3 优选法

通过试验来取得优选问题的解，就有一个如何安排试验的问题.

比方说，一个优选问题是要在 0 ℃～100 ℃之间选择一个合适的温度. 一种办法是每隔5 ℃作一次试验，从0 ℃开始，直到100 ℃，共做试验 21 次. 将这些试验的结果进行比较，选择一个效果最好的试验，这就可选取到一个较合适的温度，而且可以说此温度与实际上最好的温度相差不超过 5 ℃.

每做一次试验是需要耗费人力、物力和时间的. 这样每隔 5 ℃做一次试验，一共要做试验 21 次. 如果所做试验较简单，多做一些试验在人力、物力和时间上并无多大问题时，这样安排试验也能解决此优选问题. 但实际情况却是希望耗费较少的人力、物力和时间，而能得到优选问题的解决. 这就有一个如何安排试验，可以用最少的试验次数达到最好效果的问题.

优选法是用尽可能少的试验次数，尽快地找到最优效果的安排试验的方法，也就是现代科学试验方法.

过去总是夸耀某人花了几十年的功夫，做了几百次、甚至几千次试验得到了某一科学

成果. 当然，花几十年搞试验的精神和毅力是令人钦佩的，可是如果用优选法去搞几十年的试验就可以得到更多更好的成果.

研究优选法的优选学，是数学的一个重要分支. 优选问题在数学中属于最优化问题. 在第二次世界大战前，处理最优化问题的数学方法主要是古典的微分法和变分法. 第二次世界大战期间，有些国家由于军事上的需要，提出一些不能用上述古典方法来解决的最优化问题，从而产生了一些新的解决方法，例如运筹学. 后来运筹学转向民用工业又有很多新的进展. 运筹学中提出很多最优化的模型及其解决方法. 除了运筹学中提出的最优化模型外，在其他许多学科和部门也提出了不少最优化问题.

有关最优化的著作出版不少. D. J. Wile，C. S. Beightlei 的著作❶中，对最优化的基础知识与实用算法作了较全面的介绍和统一处理. 我们这里所讲的优选法是在最优化的问题中，其最优化的目标往往不能用数学形式表达出来，或即使表达出来但表达形式很复杂，计算起来很困难的一类最优化问题. 如果这一类问题的目标结果可以通过试验来确定，那么同样可以考虑其最优化问题. 因此，国外有人把优选法称为“试验最优化方法”，或叫做“直接最优化方法”；而通过模型计算的最优化方法则称为“间接最优化方法”.

注

❶ 此书有中译本：尤云程译《优选法基础》，科学出版社，1978 年出版.

1.1.4 通过模型进行计算的优化问题

我们现在要学的优选法都是直接最优化方法，即通过优选法来安排试验，用尽可能少的试验次数迅速求得最优解的方法. 虽然优选法是针对进行实际试验提出的方法，但对有数学模型且可通过模型进行计算的优化问题，也可使用优选法通过计算器或计算机的计算以取得最优解或近似最优解. 由于实际问题的试验需要一定的设备和条件，有条件的学校可以通过实际问题的试验来理解和掌握好优选方法；如果条件不许可时，也可通过数学模型利用计算器或计算机甚至笔算出“试验”结果，从而理解和掌握有关的优选方法.

1.1.5 优选问题的目标和因素

凡是优选问题都有目标和因素. 例如，前面提到的煮饭问题，目标是煮出的饭不烂又不硬，因素就是加水量；煤气灶的火焰问题的目标是火焰合适，而因素就是风门的大小. 有的优选问题的目标是一个，但有时也有两个或更多的目标. 现在我们考虑的是一个目标的优选问题.

影响目标的因素有时往往不止一个，有两个、三个甚至更多. 只有一个因素的优选问题称为单因素问题，有两个因素的问题称为双因素问题，两个或两个以上因素的称为多因素问题.

我们要介绍的是一些常用的单因素和双因素的方法以及分批试验的一些方法.

1.1.6 我国推广应用优选法的简况

在 20 世纪 60 年代，我国著名的数学家华罗庚教授对优选法进行了理论上的推敲、剖

析和研究，然后挑出几种理论上靠得住、又容易推广的有效方法，并编写了几本通俗易懂的小册子，例如《优选法平话》（署名齐念一，科学出版社，1971），《优选法平话及其补充》（国防工业出版社，1971），《优选法话本》（辽宁人民出版社，1973）．这些小册子将优选法简化，使一般的人员都能掌握并运用于自己的生产活动之中．同时，华罗庚亲自组织了推优小分队，跑遍了22个省市、自治区，推广应用优选法．各行各业为提高产量、质量和降低成本应用优选法进行试验，取得了高产、优质、低消耗的喜人成绩．

练习

1. 什么是优选问题？试列举出日常生活中和所了解的工农业生产及经济管理中或科学试验中优选问题的两三个例子．
2. 什么是优选法？它解决的是什么样的最优化问题？
3. 具有较合适的数学模型的优化问题，是否能用优选法借助于计算器或计算机来解？如用优选法来解，其中的试验是指什么？

1.2 单因素优选法

1.2.1 单峰函数

优选问题有共同的特点：

（1）有目标：煮饭中，目标为饭不烂不硬；煤气灶中，目标为火焰正常；发射炮弹中，目标为炮弹的射程；等等．

（2）有可控制的因素：煮饭中，可控制的因素为加水量；煤气灶中，可控制的因素为风门的大小；发射炮弹中，可控制的因素为发射的角度；等等．

对可控制的因素所取的不同值（或不同的水平），经过试验后，就会出现目标的不同的状况．

对优选问题来讲，有两种情况．一种是要求出使目标达到最大（或最小）时可控因素的大小．例如，发射炮弹中，要求出射程最大时的发射角．这种情况称为求最大（或最小）值问题，简称为最值问题．

另一种情况是要求出使目标达到一个所要求的状况，或所要求的值时，可控因素的大小．例如，煮饭问题中，求出一个加水量，使饭不烂不硬．这种情况称为命中目标问题．

如果可控制的因素和相应的目标都能用数值来表示的话，那么目标就是因素的函数．

因此，目标（y）就可以表示为因素（x）的函数：

$$y=f(x),$$

我们称它为**目标函数**.

对于优选问题的目标函数 $y=f(x)$ 来讲，其优选问题的提法就是：问 x 取何值时，$f(x)$ 的取值为最大（或最小）？

例如，函数 $f(x)=-(x-1)^2+2$，$x\in[0,2]$，从函数的图形上看（图 1-2），此时，$f(x)$ 在 $x=1$ 时取最大值，$f(1)=2$. 或者，函数 $f(x)=x^2+2x-1$，$x\in[-2,0]$，如图 1-3 所示，此时，函数在 $x=-1$ 时取最小值，$f(-1)=-2$.

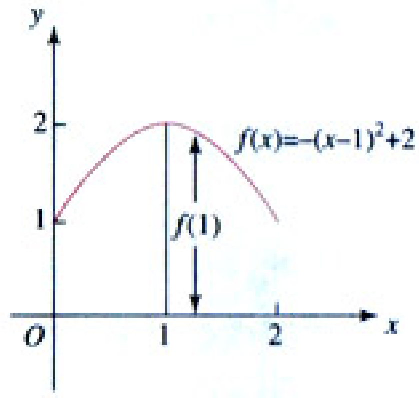


图 1-2

对函数 $f(x)=x^2+2x-1$，$x\in[-2,0]$，可取

$$y^{*}=f^{*}(x)=-f(x)=-x^2-2x+1,\ x\in[-2,0],$$

此时，$f(x)$ 的最小值点就是 $f^{*}(x)=-x^2-2x+1$ 的最大值点了（图 1-4）. 可见，求函数的最大值和最小值可以相互转换. 下面我们仅对 $f(x)$ 在 x 的变化范围内取最大值的情况进行讨论.

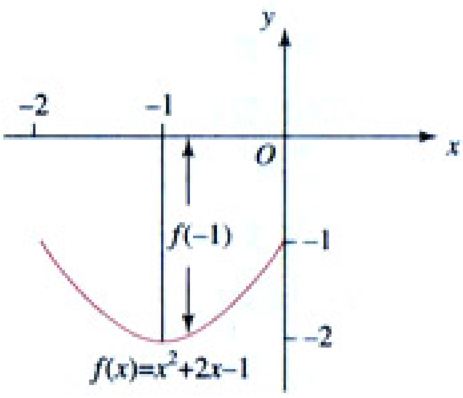


图 1-3

目标函数 $y=f(x)$，在 x 的变化范围内有一点 x_0，使 $f(x_0)$ 取最大值，即

$$f(x_0)\geqslant f(x),\ x\in[a,b].$$

对目标函数 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 来说还有一个特点，若 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值时，则 x_0 将区间 $[a,b]$ 分为两个区间 $[a,x_0]$ 和 $[x_0,b]$，

在 $[a,x_0]$ 上，$f(x)$ 是单调增函数；

在 $[x_0,b]$ 上，$f(x)$ 是单调减函数.

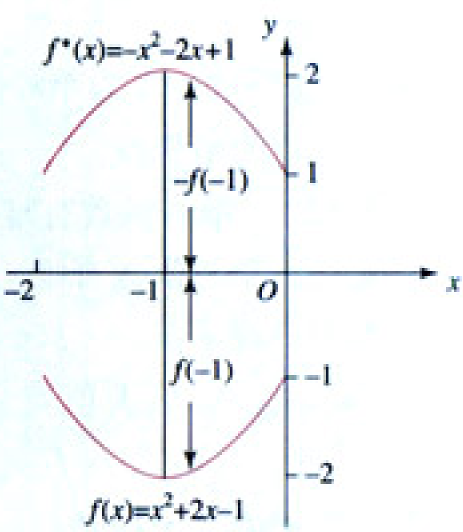


图 1-4

我们称这样的函数为**单峰函数**. 直观地看，单峰函数就是在函数的自变量变化范围内，函数的图形只有一个“峰”的情形. 这里的单峰函数也包括了在整个区间 $[a,b]$ 上是单调增函数和单调减函数，这时的最大值点是 $x_0=b$ 或 $x_0=a$，如图 1-5 或图 1-6 所示.

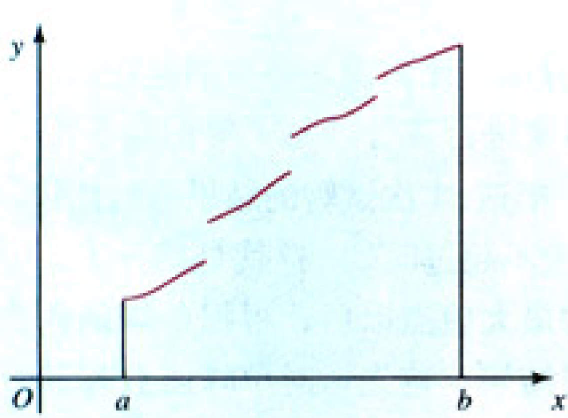


图 1-5

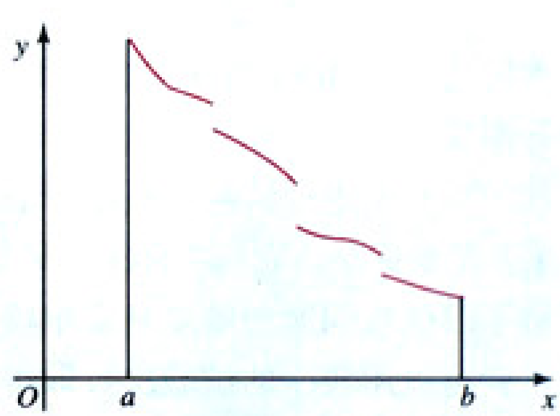


图 1-6

对命中目标的优选问题，一般可控制因素可以取某个区间 $[a,\ b]$，而目标函数在此区间上是单调增函数，或单调减函数. 其图像如图 1-5，或图 1-6 所示.

此外，这里所说的单调增函数是指严格的单调增函数，即当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2);$$

这里所说的单调减函数是指严格的单调减函数，即当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2).$$

因此，从数学上来讲，可把优选问题归结为求单峰函数 $y=f(x)(x\in A)$ 的最值问题和单调增函数（或单调减函数）$y=f(x)(x\in A)$，给出函数的某一值，要求出自变量相应的值，即命中目标问题. 这里的 A 可以是数的某个集合（有限集或无限集），也可以是某个区间 $[a,\ b]$. 但有一点要注意，这里的单峰函数 $y=f(x)$，在一般情况下不一定是用公式表示出来的函数，只是抽象的函数表达，它的函数值是通过实际的试验得出来的.

为以后数学上叙述方便，我们对单峰函数下一较严格的定义.

定义 1 函数 $y=f(x)$，$x\in A$（A 为数集：有限集或无限集，或区间 $[a,\ b]$），存在 $x_0\in A$，使 $y_0=f(x_0)$ 满足：

若对任意的 x_1，$x_2\in A$，$x_1<x_2$ 且 x_1，x_2 在 x_0 的左边，即 $x_1<x_2<x_0$，则有

$$f(x_1)<f(x_2)<f(x_0);$$

若 x_1，$x_2\in A$，且在 x_0 的右边，即 $x_0<x_1<x_2$，则有

$$f(x_0)>f(x_1)>f(x_2).$$

称 $y=f(x)$，$x\in A$ 为单峰函数. $f(x_0)$ 称为单峰函数的最大值，x_0 称为单峰函数的最大值点，或称为最优点.

定理 1 单峰函数有唯一的最大值和唯一的最大值点.

证明： 单峰函数有唯一的最大值是显然的.

如果单峰函数 $y=f(x)$，$x\in A$，有两个最大值点 x_0'，x_0''，则必有 $f(x_0')=f(x_0'')$. 若 $x_0'<x_0''$，对最大值点 x_0' 来讲，x_0'' 在它的右边，由单峰函数的定义，有 $f(x_0')>f(x_0'')$. 这与 $f(x_0')=f(x_0'')$ 相矛盾. 因此，$x_0'<x_0''$ 是不可能的. 同样可证明 $x_0'>x_0''$ 也是不可能的. 于是必有 $x_0'=x_0''$，即最大值点只有一个. 定理证毕.

1.2.2 来回调试法（或称区间消去法）

为了求优选问题的解，最容易的方法就是均分法. 比如说，要找的是在 100 ℃～200 ℃之间的最好温度. 可将 100 ℃～200 ℃之间的温度进行等分，每一等份为 5 ℃，在各分点及 100 ℃和 200 ℃上进行试验，共做 21 次试验. 把这 21 次试验的结果进行比较，最好的一次试验结果就是最优解，它与实际上的最优解相差不超过 5 ℃. 这就是均分法.

在了解了求优选问题的解就是求单峰函数的最大值点以后，根据单峰函数的性质来安排试验点，就可以用较少的试验次数取得较好的结果. 首先，对单峰函数有下面的定理.

定理 2 设单峰函数 $y=f(x)$，$x\in A$（不失一般性，这里取 $A=[a,\ b]$），最大值点为 x_0. 对任意两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，

若 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $x_0\in[x_1,b]$；

若 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $x_0\in[a,x_2]$；

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_0\in[x_1,x_2]$.

证明：用反证法.

对 $f(x_1)<f(x_2)$，假定 $x_0\in[a,\ x_1)$，由于

$$x_0<x_1<x_2,$$

即 x_1，x_2 在最大值点 x_0 的右边，根据单峰函数的定义，有

$$f(x_0)>f(x_1)>f(x_2)$$

这与 $f(x_1)<f(x_2)$ 矛盾．此矛盾的出现是由于假定 $x_0\in[a,x_1)$ 的结果．由此，“假定 $x_0\in[a,\ x_1)$”不成立，从而必有：

$$x_0\in[x_1,\ b].$$

同理可证：若 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $x_0\in[a,\ x_2]$.

对 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，同样可用反证法证明 $x_0\in[x_1,\ x_2]$（此证明留作练习）．定理证毕.

进一步还可证明在 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，$x_0\neq x_1$，$x_0\neq x_2$．因为，如果 $x_0=x_1$，即 x_1 为 $f(x)$ 的最大值点，由于 $f(x_1)=f(x_2)$，从而此单峰函数就有了两个最大值点 x_1，x_2 了．这与单峰函数只有一个最大值点相矛盾.

有了这个定理后，求单峰函数的最大值点的问题，就可先在因素的取值范围内两点 x_1，x_2（对来回调试法来讲，这两点可以是任何两点）进行试验，设 $x_1<x_2$，试验结果为 $f(x_1)$，$f(x_2)$.

若 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $x_0\in[x_1,\ b]$，即可将区间 $[a,\ x_1)$ 消去．由于 $f(x_1)<f(x_2)$，x_1 不是最好点．实际上可消去 $[a_1,\ x_1]$.

若 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $x_0\in[a,\ x_2]$，即可将区间 $(x_2,\ b]$ 消去．实际上可消去 $[x_2,\ b]$.

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_0\in(x_1,\ x_2)$，即可将区间 $[a,\ x_1]$，$[x_2,\ b]$ 消去.

这样，对 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 时，可消去部分区间，并可在剩下的区间再安排一个试验点与原来留下的一个试验点的结果比较后，又可消去留下区间的一部分．这样继续下去，直到接近最大值点为止．这就是**来回调试法**，又称为**区间消去法**.

对命中目标的优选问题，目标函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是单调增函数（或单调减函数），给出的所要求的目标值为 m．若 x 的取值 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，所得目标值为 $f(x_1)$，$f(x_2)$．可将区间 $[a,\ b]$ 分为三个区间：

$$[a,\ x_1),\ [x_1,\ x_2],\ (x_2,\ b].$$

比较 $|f(x_1)-m|$ 和 $|f(x_2)-m|$．如果 $|f(x_1)-m|<|f(x_2)-m|$，则说点 x_1 比点 x_2 “好”，可消去区间 $(x_2,\ b]$；如果 $|f(x_1)-m|>|f(x_2)-m|$，则说点 x_2 比点 x_1 “好”，可消去区间 $[a,\ x_1)$．（证明略）

也就是说，对命中目标问题，区间消去法仍然适用。

练习

1. 什么是单峰函数？
2. 对优选问题来讲，单峰函数的函数值是如何取得的？
3. 证明：单峰函数 $y=f(x)$，$x\in[a, b]$，若 x_1，$x_2\in[a, b]$，$x_1\neq x_2$，$f(x_1)=f(x_2)$，x_0 是它的最大值点，则必有 $x_0\in(x_1, x_2)$.
4. 什么是均分法？
5. 什么是来回调试法？它与均分法相比较有何优点？

1.2.3 精确度

优选法，就是以较少的试验次数取得最好效果的安排试验的方法. 不同的试验方法之间如何进行比较呢？两种试验方法之间的比较，一是要看试验的次数，哪个少？除了试验次数的多少外，还要看最后的结果，哪一种方法所得到的最好点离实际的最好值点近？

例如，某一优选问题，要找的是在 1 000 g～2 000 g 之间的合适的用量. 用均分法，每 50 g 一等份，在等分点上做试验，共做 19 次试验，比较以后，得到一个较好的用量. 可以说此用量与实际上最好的用量之间相差不超过50 g. 但如果用来回调试法来安排试验，为要达到与实际最好用量之间相差不超过 50 g 的效果，肯定用不到 19 次试验. 由此可见，对同样的效果（与实际最好用量之间相差不超过 50 g）来讲，来回调试法比均分法所用的试验次数要少.

以上是对同一优选问题，不同方法之间的比较. 对不同优选问题之间如何比较呢？

例如，优选问题 A 是在 1 000 g～2 000 g 之间找一个最好的用量；优选问题 B 是在 100 g～200 g 之间找一个最好的用量.

如果在使用某一方法进行试验后，优选问题 A 所得的用量与实际最好的用量之间相差不超过 50 g；而对优选问题 B 来讲，只要在 150 g 用量的地方进行一次试验，不管所得结果如何，这一次试验与实际最好的用量之间相差都不会超过 50 g. 你能说，对优选问题 B 所用的方法比对优选问题 A 所用的方法好吗？

问题在于优选问题 A 的因素选择范围是1 000 g～2 000 g，即 A 的因素变化范围所在区间的长度为 1 000 单位长度，而 B 的因素变化范围所在区间的长度为 100 单位长度，二者是不好相比较的.

为使不同的优选问题所用方法之间能进行比较，我们引进精确度的概念.

定义 2 设一优选问题的目标函数为

$$y=f(x),\ x\in[a, b],$$

最大值为 $y_0=f(x_0)$，$x_0\in[a, b]$. 经过一种试验方法安排试验后，取得的最好值点为

x^*，$x^* \in [a, b]$，定义

$$\varepsilon = \frac{|x_0 - x^*|}{b-a}$$

为所用试验方法的精确度.

用此精确度来衡量上面优选问题 A，经试验后所得结果与实际最好用量相差不超过 50 g（在数轴上为 50 单位长），$|x_0 - x^*| \leqslant 50$，其因素所在区间为 $[a, b]$，$a=1\ 000$，$b=2\ 000$，$b-a=2\ 000-1\ 000=1\ 000$，所以所用方法的精确度为

$$\varepsilon \leqslant \frac{50}{1\ 000} = 5\%,$$

而对优选问题 B 来讲，其精确度为

$$\varepsilon \leqslant \frac{50}{100} = 50\%.$$

这样，二者的差别就很明显了.

1.2.4 优选方案

对优选问题的目标函数

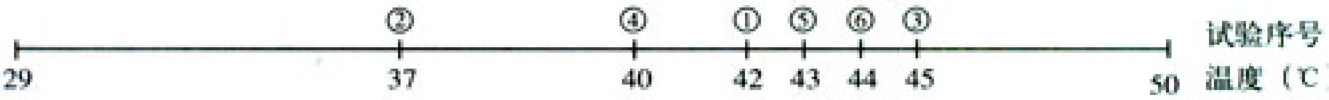
$$y=f(x), x\in[a,b],$$

在求它的优选问题解时，任何一种试验点及其试验先后顺序的安排都叫做一种选优方案. 自然，我们希望从所有可能的选优方案中寻找一种最好的方案，就是要找所得结果的精确度达到要求，并且试验次数又少的一种方案，称为优选方案. 这就是“优选”一词的涵义.

练习

1. 什么叫精确度？精确度是如何定义的？
2. 关于卡那霉素生物测定培养温度的选定①. 当时国内外都规定培养温度为 (37 ± 1)℃，培养时间在 16 h 以上. 某制药厂为缩短时间，决定对培养温度在 29 ℃～50 ℃之间选一合适的温度而进行试验. 第一试验点选在 42 ℃上，第二试验点选在 37 ℃上，结果为 42 ℃为好. 用区间消去法消去 29 ℃～37 ℃的一段. 第三次试验在 45 ℃，与 42 ℃的结果比较，仍是 42 ℃好，消去 45 ℃～50 ℃的一段. 第四次试验在 40 ℃，结果仍为 42 ℃好，消去 37 ℃～40 ℃的一段. 第五次试验在 43 ℃，结果 43 ℃好，消去 40 ℃～42 ℃的一段. 第六次试验在44 ℃，结果 43 ℃好. 于是温度选定在 42 ℃～43 ℃，如图. 培养时间只需 8～9 h.

① 此题选自《优选法》（中国科学院数学研究所运筹室优选法小组，科学出版社，1975）书中的一实例，并经过了适当的改写.



（第 2 题）

这一选优方案用的是来回调试法．问用这一方案选到的温度与实际最好的温度相差不超过几摄氏度？它的精确度是多少？用均分法安排试验，达到现在的精确度需做几次试验？这样安排试验的选优方案与均分法比较，哪个好？

（所得最好温度与实际最好温度相差不超过 1 ℃；精确度$\frac{1}{21}=4.8\%$．用均分法安排试验时，需做 20 次试验才能达到此精确度的要求；此优选方案共经过 6 次试验，比均分法需做 20 次试验要好．）

1.2.5　来回调试法中第一试验点确定后如何选取第二试验点

来回调试法中，设第一、二试验点为 x_1，x_2，它们把区间 $[a,\ b]$ 分为三部分：

$$[a,\ x_1),\ [x_1,\ x_2],\ (x_2,\ b].$$

比较在 x_1，x_2 试验的结果，

若 $f(x_1)<f(x_2)$，则消去区间 $[a,\ x_1)$；
若 $f(x_1)>f(x_2)$，则消去区间 $(x_2,\ b]$；
若 $f(x_1)=f(x_2)$，则消去区间 $[a,\ x_1)$ 和 $(x_2,\ b]$．

虽然每次优选试验都是面对一个特定的单峰函数，而我们考虑优选方法时，却是面对区间 $[a,\ b]$ 上的所有单峰函数．其峰顶在上述三个区间中的哪个区间都是可能的．若 $[a,\ x_1)$ 和 $(x_2,\ b]$ 的长度不一样时，我们都希望消去长度长的区间，而使留下的区间长度尽可能短一些．但是我们面对的是所有的单峰函数，有可能所处理的单峰函数的峰顶正好在所消去的长度长的区间中．如果消去的是长度较短的区间，也同样可能会出现所处理的单峰函数的峰顶正好在其中．但不管怎样，在做了两次试验 x_1，x_2 后，一定会消去一个区间，这一点应是肯定的．只有当 $[a,\ x_1)$ 和 $(x_2,\ b]$ 这两个区间长度相等时，才会得到不管消去哪个区间，留下的区间的长度都是一样的．

根据以上的分析，在第一试验点定了以后，第二试验点应取在使 $x_1-a=b-x_2$ 处，在面对 $[a,\ b]$ 上的所有的单峰函数时才是最好的选择．

由 $x_1-a=b-x_2$ 可知，x_1，x_2 关于区间 $[a,\ b]$ 的中点$\frac{a+b}{2}$是对称的．区间的中点$\frac{a+b}{2}$也就是 $[x_1,\ x_2]$ 的中点$\frac{x_1+x_2}{2}$．

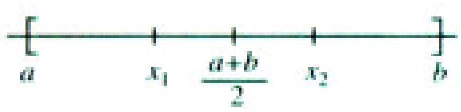


图 1-7

当出现 $f(x_1)=f(x_2)$这样的情况时，就可消去$[a,\ x_1]$和 $[x_2,\ b]$ 两个区间，这将会大大减少试验的次数．但是对于一个特定的单峰函数来讲，当在 x_1 处做了第一次试验而取得

函数值 $f(x_1)$ 后，要取到一点 x_2 使 $f(x_2)=f(x_1)$是一件非常不容易的事情．因此，在做了第一次试验后要选取第二个试验点时，可不去考虑选取 x_2，使 $f(x_2)=f(x_1)$ 的情况．

综上所述，在第一试验点确定后，第二个试验点应选在第一试验点关于区间中点的对称点上．对来回调试法来讲，这是最好的选择．这里应注意：

1．第二试验点取在第一试验点关于区间中点的对称点上，是最好的选择，这是面对 $[a, b]$ 上的所有单峰函数来讲的，而不是对某个特定的单峰函数而讲的．

2．"这是最好的选择"，是由上面的分析而得到的结论，并不是数学上严格的证明．

第一试验点确定后，第二试验点也就确定了，即在第一点关于区间 $[a, b]$ 中点的对称点上；消去部分区间后，剩下的区间中有一个点已做过试验（第一试验点或第二试验点）．这样可根据留下的此试验点取第三个试验点（取留下试验点关于留下区间中点的对称点），从而又可消去一部分区间……

于是，只要第一试验点确定后，此选优方案就已确定了．因此，第一试验点如何选取的问题，也就是优选法中如何选取试验点的问题．

1.2.6 第一试验点确定后各剩余区间的长度

由于第一试验点选定后，第二试验点取第一试验点关于区间中点的对称点，设第一、第二试验点为 x_1，x_2，它们将区间 $[a, b]$ 分为三部分：

$$[a, x_1),\ [x_1, x_2]\ (x_2, b],$$

其中

$$x_1-a=b-x_2,$$

即

$$a+b=x_1+x_2.$$

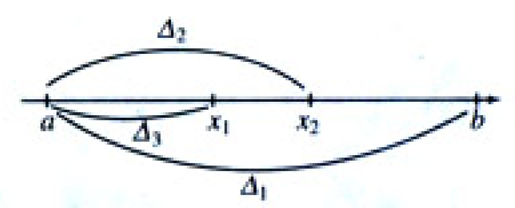


图 1-8

设原区间长为 $\Delta_1$❶，

$$\Delta_1=b-a.$$

经过两次试验后，消去一个小区间，例如，消去区间 $(x_2, b]$，剩下的区间长为 Δ_2，则

$$\Delta_2=x_2-a=b-x_1.$$

注 ❶ 我们用记号 Δ_1，Δ_2 等表示区间的长度，也用它表示该区间．

经过两次试验，剩下的区间中有一个试验点已经取定．于是，第三试验点 x_3 应取在已取定的点 x_1 关于 Δ_2 的中点的对称点上（图1-8）．如果 $x_2-x_1<b-x_2$，由于

$$\Delta_3=x_1-a=b-x_2,$$

因而有

$$\Delta_1=\Delta_2+\Delta_3. \quad (1)$$

如果 $x_2-x_1>b-x_2$，即中间的区间 $[x_1, x_2]$ 比两边的区间长（图 1-9），则 x_1 关于 Δ_2 中点的对称点 x_3 就在 x_1 和 x_2 的中间，即有 $x_3>x_1$．此时有

$$\Delta_1<\Delta_2+\Delta_3. \quad (2)$$

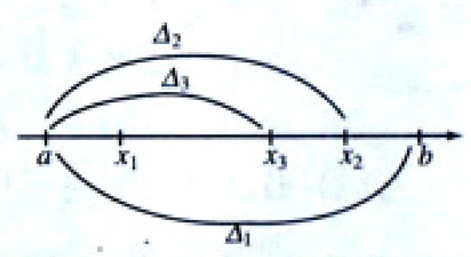


图 1-9

将不等式（1）和（2）合起来，即在任何情况下，都有

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_2 + \Delta_3.$$

因此，第一个试验点取定以后，后面的试验点也就随之而定了，并且有

$$\Delta_k \leqslant \Delta_{k+1} + \Delta_{k+2},$$

其中 Δ_k 是经过 k 次试验消去部分区间后剩下区间的长度. 从而有

$$\begin{aligned}\Delta_1 &\leqslant \Delta_2 + \Delta_3\\ &\leqslant 2\Delta_3 + \Delta_4\\ &\leqslant 3\Delta_4 + 2\Delta_5\\ &\leqslant 5\Delta_5 + 3\Delta_6\\ &\leqslant \cdots\\ &\leqslant F_{n-1}\Delta_n + F_{n-2}\Delta_{n+1}\\ &\leqslant F_n\Delta_{n+1} + F_{n-1}\Delta_{n+2},\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $F_1=1$，$F_2=2$，$F_3=3$，$F_4=5$，$F_5=8$，…，一般地有

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 3.$$

$\{F_n\}$ 称为斐波那契数列.

练习

1. 如何理解优选法考虑的是 $[a, b]$ 上的所有的单峰函数？
2. 有一优选问题，其可控因素为一种物品的用量，其用量的可选范围为 10 g～31 g. 假设最优点为 10 g.
   （1）如果第一试验点取在 23 g 处，用来回调试法进行试验，试写出第二，三，…，六次的试验用量. 问经过六次试验后，所得到的最好的用量与实际最好用量相差多少？这样的安排试验的精确度是多少？
   （2）如果第一试验点取在 22.98 g 处，写出第二～第六各次的试验用量，六次试验后所得最好点与实际最好用量相差多少？这样安排试验的精确度是多少？
   （参看本章 1.3，表 1-1 中 0.618 法与分数法的比较.）
3. 设一优选问题，其可控因素的选择范围为 1 000～2 000，用来回调试法安排试验（假定最优点在 1 000 处）.
   （1）若第一试验点取在 1 618 处，写出第二、三、四试验点的数值；
   （2）若第一试验点取在 1 950 处，写出第二、三、四试验点的数值；
   （3）设原试验区间 [1 000，2 000] 长为 Δ_1，第二、三、四次试验后留下的区间长为 Δ_2、Δ_3、Δ_4，问本题(1)和(2)中 Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4 各区间长的关系如何（写出本节的公式（3））？

1.2.7 分数法

在不等式

$$\Delta_1 \leqslant F_{n-1}\Delta_n + F_{n-2}\Delta_{n+1}，n=3，4，\cdots \tag{1}$$

中，Δ_1 是固定的，$\{F_n\}$ 是斐波那契数列，$\Delta_n(n=3，4，\cdots)$ 都取决于 x_1 的选取．只要 x_1 取定了，那么所有的 Δ_n 就都定了．

随着 x_1 的选取，不等式（1）可能出现两种情况：

一、此不等式中，有时等号成立，有时不等号成立．

二、全部都是等号成立．

我们来讨论全部都是等号成立的情况．全部都是等号成立又有两种情况：

（一）对于某一个 n，有 $\Delta_n=\Delta_{n-1}$；

（二）此等号无限地进行下去：

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_2+\Delta_3=2\Delta_3+\Delta_4=\cdots\\ &=F_{n-1}\Delta_n+F_{n-2}\Delta_{n+1}=\cdots.\end{aligned}$$

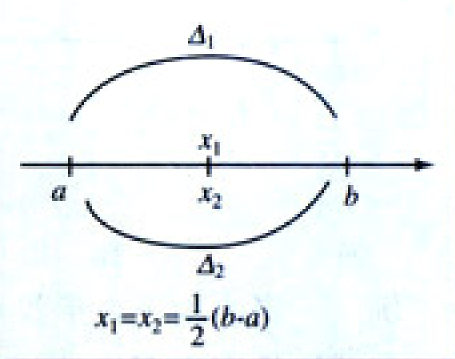


图 1-10

第（一）种情况是存在的．例如取 $x_1=\frac{1}{2}(b-a)$时，x_1 关于区间中点$\frac{1}{2}(b-a)$的对称点仍为 x_1，即 $x_2=x_1$（图 1-10）．此时按来回调试法，是无法消去一个区间的．因为，此时两个试验点 $x_1=x_2$，无法进行比较，因此也无法消去$[a，x_1]$，$[x_2，b]$ 中的哪一个．就是说，经过两次试验后，剩下的区间 Δ_2 仍为 Δ_1．这时便有$\Delta_2=\Delta_1$．

这是 $n=2$ 的情况．

为证明对任何 n(n 为正整数，$n>1$)，都可取到适当的 x_1，使 $\Delta_n=\Delta_{n-1}$．我们把区间 $[a，b]$ 改为 $[0，1]$，设最好点为 $x_0=0$，即最好点在原点．这并不失去它的一般性．

将区间 $[0，1]$ 分为 F_n 等份，取 $x_1=\frac{F_{n-1}}{F_n}$(图1-11)．

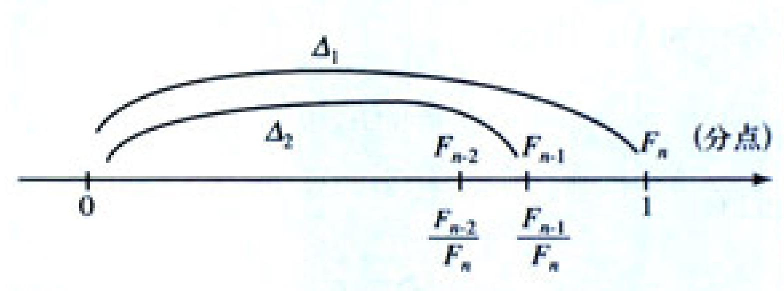


图 1-11

这里的 F_n 为斐波那契数列中的第 n 个数，$\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 关于区间的中点 $\frac{1}{2}$ 的对称点为

$$x_2=1-\frac{F_{n-1}}{F_n}=\frac{F_n-F_{n-1}}{F_n}=\frac{F_{n-2}}{F_n},$$

这表示 x_1 在第 F_{n-1} 个分点上时，x_2 就在第 F_{n-2} 个分点上．第三个分点

$$x_3=\frac{F_{n-1}}{F_n}-\frac{F_{n-2}}{F_n}=\frac{F_{n-3}}{F_n},$$

即第三个试验点 x_3 在第 F_{n-3} 个分点上，…，第 $n-1$ 个试验点 x_{n-1} 在第 $F_{n-(n-1)}=F_1=1$ 个分点上，第 n 个分点也在第$F_1=1$个分点上，从而有 $\Delta_n=\Delta_{n-1}$（图 1-12）．

由此，可以提出分数法优选方案：

将区间分为 F_n 等份，第一试验点取在第 F_{n-1} 分点上．用来回调试法，共做 $(n-1)$ 次试验，得到一个最优点，其精确度为 $\frac{1}{F_n}$.

共做 $(n-1)$ 次试验是因为在最后一次试验点 x_n 处，或是已经做过试验，或是区间 Δ_{n-1} 的起点或终点与 Δ_1 的起点或终点重合（图1-13）．对前一种情形，如图 1-13（1），x_l 在 $[x_j, x_i]$ 的中点，按 x_n 与 x_l 关于区间中点对称的方法，x_n 应与 x_l 重合；对于后一种情形，如图 1-13（2），x_{n-1} 在区间 $[a, x_{n-2}]$ 的中点（或在 $[x_{n-2}, b]$ 的中点），x_n 也应与 x_{n-1} 重合．前一种情形，在 x_j，x_l，x_i 上都已做过试验，x_n 与 x_l 重合，就不必再做了；后一种情形，x_n 与 x_{n-1} 重合，也不必再做试验了，而对于 a，b 两点，做与不做试验，其精确度都是 $\frac{1}{F_n}$，所以在 a，b 两点也不必再做试验了.

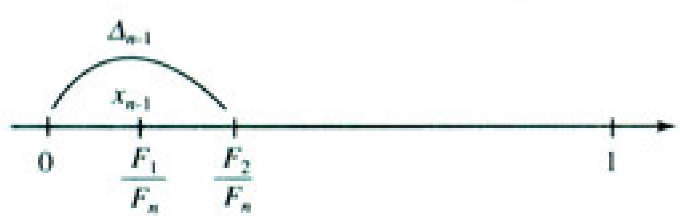


图 1-12

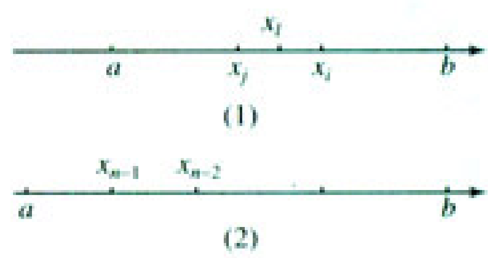


图 1-13

例 一底面为正方形没有顶盖的盒子，体积为32 000 cm³，要使制造盒子所用材料最少，盒子边长应为多少？（要求所得到边长与实际边长相差不超过 2.5 cm.）

对这样的问题可求出所用材料面积 S 与边长 x 的关系式，然后用经典的通过求导数的方法求得其解，求出最少用料时的 x 的值．这里我们用此例子，主要是由于条件限制，要通过实际问题的试验来理解和掌握优选法有些困难，而用此例子，可通过计算器计算进行“试验”，解决此问题，从中理解和掌握优选法.

解：首先把盒子表面 S（指标变量）表示为底面边长 x（可控因素变量）的函数．设高为 h，于是有

$$S=x^2+4xh.$$

若体积为 V，则有

$$V=x^2h,\ h=\frac{V}{x^2},$$

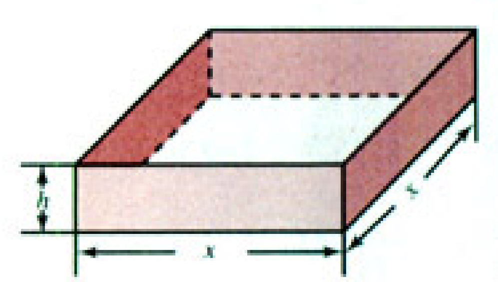


图 1-14

从而有

$$S=x^2+\frac{4V}{x}=x^2+\frac{4\times 32\ 000}{x}=x^2+\frac{128\ 000}{x}.$$

有了面积 S 关于底边长 x 的表示式后，就可对不同的 x 值通过计算（试验）而得到表面积的值．问题就化为因素为 x，目标 S 取最小值的优化问题.

为对 x 的值进行“试验”，首先要确定“试验”范围．为确定试验范围（最小（大）值所在的范围），可先取两点进行试验（计算），如最小值点比所取两点要大，可再取大一点的点再进行试验，直到能确定最小值点所在的范围．为此先取两点，$x_1=45$，$x_2=50$

进行“试验”用计算器计算（精确到 0.01），结果为：

$$S_{45}=45^2+\frac{128\ 000}{45}\approx 2\ 025+2\ 844.44=4\ 869.44\ (\text{cm}^2),$$

$$S_{50}=50^2+\frac{128\ 000}{50}=2\ 500+2\ 560=5\ 060\ (\text{cm}^2).$$

由于 $S_{45}<S_{50}$，由单峰函数的性质知，最小值点在 0～50(cm)之间．可确定优选范围为 $[0,\ 50]$.

由于要求所得边长与实际边长不超过 2.5 cm，可将优选范围 0～50(cm)，按 2.5 cm 一等份，共分为 20 等份（图 1-15）.

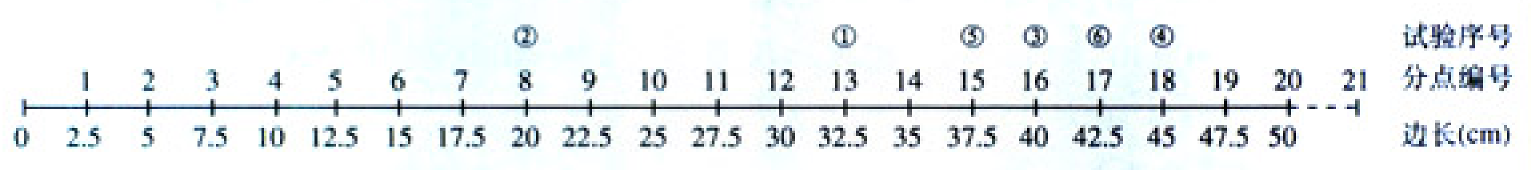


图 1-15

从斐波那契数列中查到 $F_7=21$，与 20 相近，可虚设一个分点，第 21 分点.

第一试验点在 $F_6=13$，即第 13 分点，$x=32.5$ cm，计算得

$$S_{32.5}=32.5^2+\frac{128\ 000}{32.5}\approx 1\ 056.25+3\ 938.46=4\ 994.71(\text{cm}^2)$$

第二试验点在第 8 分点，$x=20$ cm，计算得

$$S_{20}=20^2+\frac{128\ 000}{20}=400+6\ 400=6\ 800\ (\text{cm}^2).$$

比较结果，$S_{32.5}<S_{20}$，$S_{32.5}$（第一试验点）好.

第三试验点为①（图 1-16）关于第 8～第 21 分点中间的对称点，为第 16 分点．$x_3=40$ cm，计算 S_{40}，

$$S_{40}=40^2+\frac{128\ 000}{40}=4\ 800\ (\text{cm}^2).$$

比较①和③的结果，S_{40}好．第四试验点取第 18 分点，$x=45$ cm，计算 S_{45}（此点已经计算过），

$$S_{45}=45^2+\frac{128\ 000}{45}\approx 4\ 869.44\ (\text{cm}^2).$$

比较③和④的结果，S_{40}为好，第五试验点取第 15 分点，$x=37.5$ cm，计算 $S_{37.5}$，

$$S_{37.5}=37.5^2+\frac{128\ 000}{37.5}\approx 4\ 819.58\ (\text{cm}^2).$$

比较③和⑤的结果，S_{40}为好，第六试验点取第 17 分点，$x=42.5$，计算 $S_{42.5}$，

$$S_{42.5}=42.5^2+\frac{128\ 000}{42.5}\approx 4\ 818.02\ (\text{cm}^2).$$

最后结果 S_{40}最好．底面边长 $x=40$ cm 时，用料最省，此边长与实际用料最省的边长相差不超过 2.5 cm.

用微积分求导数的方法，求得精确值为 $x=40$ cm，与优选法所得结果相同．一般情

况下，用优选法求出的值应为近似值，但可估计其误差．这里求出的值 $x=40$ cm，误差不超过 2.5 cm．

练习

1. 根据公式

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}，n\geqslant 3，$$

取 $F_1=1$，$F_2=2$，写出斐波那契数列．

2. 农场主有 2 400 m 长的篱笆，想把一块沿着河的矩形土地围起来，沿河的一面不用围，怎样才能使所围的面积最大？

（已知矩形宽的边长 x 的范围为 500 m$\leqslant x\leqslant$700 m，要求所得值与最好值相差不超过 10 m．）

（精确值：矩形长为 1 200 m，宽为 600 m．）

3. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 上距（1，0）最远的点．

（把椭圆上点到（1，0）的距离表示成 x 的函数，x 的变化范围为 $[-1, 1]$，要求精确度达到 5%．）

$\left(精确值：\left(-\dfrac{1}{3}，\pm\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\right).\right)$

1.2.8　分数法是在试验次数确定后的最好方法

用区间消去法（来回调试法）来安排试验点，只要第一试验点确定，以后的试验点就确定了．如果试验次数确定为 n 次，用分数法来安排试验点时，第一试验点安排在区间的 $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 处，共做 n 次试验，它的精确度为 $\dfrac{1}{F_{n+1}}$．

对于做 n 次试验，不管第一试验点取在何处，如果原试验区间为 Δ_1（代表区间，也代表区间长度），经过 n 次试验，消去部分区间后，剩余的区间为 Δ_n，那么有不等式（1.2.6 节公式(3)）

$$\Delta_1\leqslant F_n\Delta_{n+1}+F_{n-1}\Delta_{n+2}.$$

由于 $\Delta_{n+1}\geqslant\Delta_{n+2}$（经 $n+1$ 次试验剩下的区间长度大于经过 $n+2$ 次试验剩下的区间长度），所以有

$$\Delta_1\leqslant(F_n+F_{n-1})\Delta_{n+1}.$$

将此不等式除以 F_{n+1}，得到

$$\frac{\Delta_1}{F_{n+1}}\leqslant\frac{F_n+F_{n-1}}{F_{n+1}}\Delta_{n+1}=\frac{F_{n+1}}{F_{n+1}}\Delta_{n+1}=\Delta_{n+1}，$$

从而有

$$\frac{1}{F_{n+1}} \leqslant \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_1}.$$

此不等式左边的$\frac{1}{F_{n+1}}$就是用分数法，经过 n 次试验结果的精确度．而右边的$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_1}$为第一试验点不管取在何处，经 n 次试验后得到结果的精确度的估计，即所得好点与实际最好点之差 Δ_{n+1} 与原区间长之比（图 1-16）．

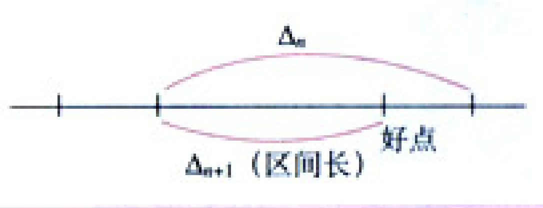


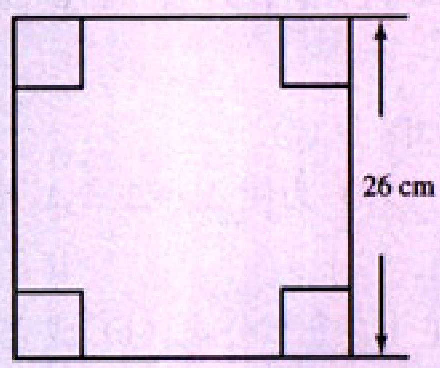
图 1-16

练习

1. 如图，有一方形钢板，边长为 26 cm，在它的每个角上剪去一个正方形，使它能制成无盖的容器．问剪去的小正方形边长为多少时，容器的容积最大？试用分数法安排“试验”，要求求得的小正方形边长与最优值相差不超过 1 cm.

   提示：容积 $V=(26-2x)^2x$，$x\in(0,\ 13)$，对区间 $(0,\ 13)$用分数法安排“试验”，“试验”结果可用计算器算出来．

   （小正方形边长为$\frac{13}{3}$cm 时，容积最大．）



（第 1 题）

2. 从半径为 10 cm 的圆上剪去一扇形（中心角为 α），把剩下的部分制成一无底圆锥体．欲使圆锥体有最大体积，求剪去的中心角 α 应多大？试用分数法安排试验，使求出的角度与实际最好的角度相差不超过 0.025π.

   提示：先写出圆锥体体积的表达式，然后对 α 在 $0\sim\frac{\pi}{2}$之间用分数法安排试验，试验结果可由表达式用计算器算出．

3. 对第 2 题，不写出圆锥体的表达式，也可用分数法对 α 安排试验．就是在 α 的变化范围内，选定一个 α_0，剪去中心角为 α_0 的一个扇形，制成一无底圆锥体，求出它的体积（用计算器）．试用此办法对 α 在 $50^\circ\sim90^\circ$之间用分数法安排试验来解此题．

   $\left[\text{精确值：}\alpha=2\pi-\frac{\sqrt{24}}{3}\pi\text{，或 }\alpha=\left(2-\frac{\sqrt{24}}{3}\right)\times180^\circ\right]$

1.2.9 0.618 法

在来回调试法中，如果初始区间长为 Δ_1，经过两次试验，消去部分区间后，得剩余区间长为 Δ_2；三次试验后得剩余区间长为 Δ_3，…．这些区间长之间有关系式：

$$\begin{aligned}\Delta_1&\leqslant\Delta_2+\Delta_3\\&\leqslant 2\Delta_3+\Delta_4\\&\leqslant 3\Delta_4+2\Delta_5\\&\leqslant\cdots\\&\leqslant F_{n-1}\Delta_n+F_{n-2}\Delta_{n+1}.\end{aligned}$$

这些不等式中都是等式成立时，有两种情况：

1. 存在正整数 n，使 $\Delta_n=\Delta_{n-1}$．这就是分数法的情况．

2. 这些等式会一直持续下去，直至无穷．这种情况也是存在的．

设原区间长为 Δ_1，x_1，x_2 为两个试验点．根据来回调试法，x_1，x_2 试验点的选取，应有：

（1）x_1，x_2 关于区间 $[a, b]$ 的中点对称，即有

$$x_2-a=b-x_1$$

（如图 1-17）．

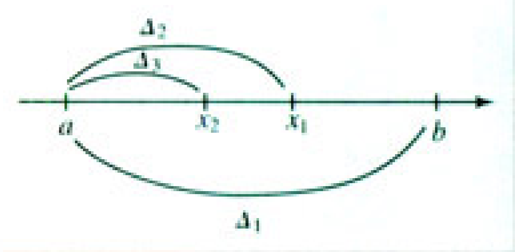


图 1-17

（2）为使 $\Delta_1=\Delta_2+\Delta_3$ 成立，一定有

$$x_1-x_2<b-x_1$$

（见 1.2.6 节公式（1）成立的条件）．

由于第一试验点的选取就决定了所有试验点的选取，为使等式都成立，而且不会中间停止，必须使 x_2 在 $\Delta_2$❶中的位置与 x_1 在 Δ_1 中的位置一样．为简单起见，取 $\Delta_1=[0, 1]$，此时应有

$$\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{x_1}=\frac{1-x_1}{x_1}, \tag{*}$$

注 ❶ 这里的 Δ_1，Δ_2 表示区间的长度，也表示该区间．

如图 1-18．

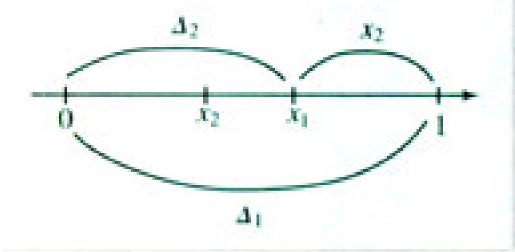


图 1-18

对方程（*）求解，即有

$$x_1^2=1-x_1,$$

移项后得

$$x_1^2+x_1-1=0.$$

解此方程，得：

$$x_1=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

取正根，得

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\ 033\ 988\cdots.$$

令
$$\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$
若因素所在区间为[0，1]，则第一试验点
$$x_1=\omega,\ \Delta_1=1.$$

按来回调试法，第二试验点（图 1-19）
$$x_2=1-\omega,\ \Delta_2=\omega.$$

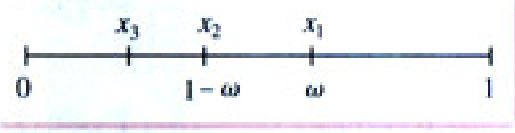


图 1-19

这时有
$$1-\omega=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\omega^2.$$
就是说，第二试验点在 Δ_2 长度的 ω 倍处. 可以验证，按照关于区间中点取对称点确定试验点的方法，如果第一试验点取在原区间 Δ_1 的 ω 处，则第二、三……各试验点都正好在剩下区间的 ω 倍处. 因此，试验点可以一直取下去.

这就是 ω 方法. 若取 ω 的近似值 0.618 作为取第一试验点的位置的数值，即对区间 $[a,b]$，第一试验点取在
$$x_1=a+0.618\times(b-a)$$
处，然后按关于区间中点的对称点取试验点，这就是 **0.618 法**.

0.618 法是比较普遍适用的安排试验点的方法.

在未限定试验次数和精确度，只要求效果达到预定要求（或在实际当中经过试验所得结果使人满意）时，适宜于用 0.618 法.

例 要做一个能容 1 L 的圆柱体金属油罐，若要求金属成本最低，其直径应多大？($\pi=3.14$.)

解： 先写出表面积 S（指标变量）与直径 d（可控因素变量）之间的关系式：
$$S=2\pi\left(\frac{d}{2}\right)\cdot h+2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$
其容积 $V=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot h$，其高 $h=\frac{4V}{\pi d^2}$. 则
$$S=\pi dh+\frac{\pi}{2}d^2=\pi d\,\frac{4V}{\pi d^2}+\frac{\pi}{2}d^2=\frac{4V}{d}+\frac{\pi d^2}{2},$$
$$V=1\ 000\ \text{cm}^3,$$
因此有
$$S=\frac{1}{d}\times 4\ 000+\frac{\pi}{2}d^2=4\ 000\times\frac{1}{d}+1.57\times d^2.$$

先要确定直径 d 的选择范围. 为此，先作两次试验，$x_1=13$ cm，$x_2=15$ cm.
$$S_{13}=\frac{1}{13}\times 4\ 000+1.57\times 13^2\approx 573.02(\text{cm}^2),$$
$$S_{15}=\frac{1}{15}\times 4\ 000+1.57\times 15^2\approx 619.92(\text{cm}^2).$$
$S_{13}<S_{15}$，因而可消去 15 以上的部分. 优选范围定为[0，15]. 用 0.618 法来安排试验（见图1-20).

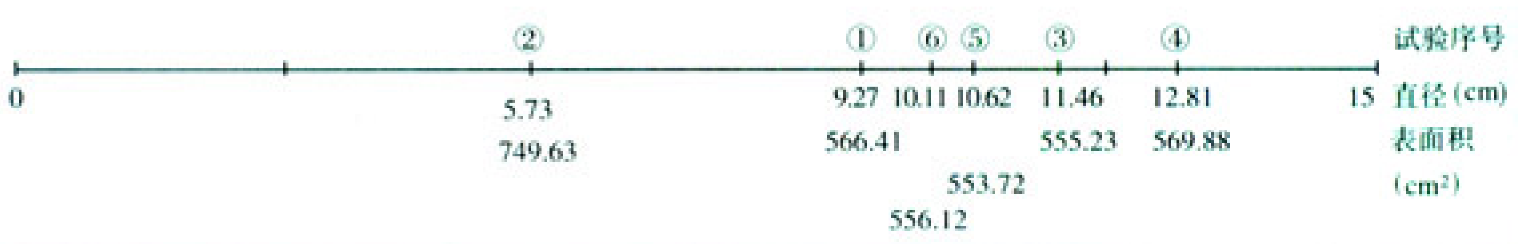


图 1-20

第①点，$x_1=0+(15-0)\times 0.618=9.27(\text{cm})$，

$S_{①}=\dfrac{4\ 000}{9.27}+1.57\times 9.27^2\approx 566.41(\text{cm}^2)$.

第②点，$x_2=0+15-9.27=5.73(\text{cm})$，

$S_{②}=\dfrac{4\ 000}{5.73}+1.57\times 5.73^2\approx 749.63(\text{cm}^3)$.

①比②好．第③点，$x_3=15+5.73-9.27=11.46(\text{cm})$，

$$S_{③}=\frac{4\ 000}{11.46}+1.57\times 11.46^2\approx 555.23(\text{cm}^2).$$

③比①好．第④点，$x_4=15+9.27-11.46=12.81(\text{cm})$，

$S_{④}=\dfrac{4\ 000}{12.81}+1.57\times 12.81^2\approx 569.89(\text{cm}^2)$，

③比④好．第⑤点，

$x_5=12.81+9.27-11.46=10.62(\text{cm})$，

$S_{⑤}=\dfrac{4\ 000}{10.62}+1.57\times 10.62^2\approx 553.72(\text{cm}^2)$，

⑤比③好．第⑥点，$x_6=11.46+9.27-10.62=10.11(\text{cm})$，

$S_{⑥}=\dfrac{4\ 000}{10.11}+1.57\times 10.11^2\approx 556.12(\text{cm}^2)$.

最好点为⑤，$x=10.62(\text{cm})$.

x_5-x_6 为

$$10.62-10.11=0.51(\text{cm})，$$

x_3-x_5 为

$$11.46-10.62=0.84(\text{cm}).$$

因此最好点与实际最好点相差不超过 1 cm.

练习

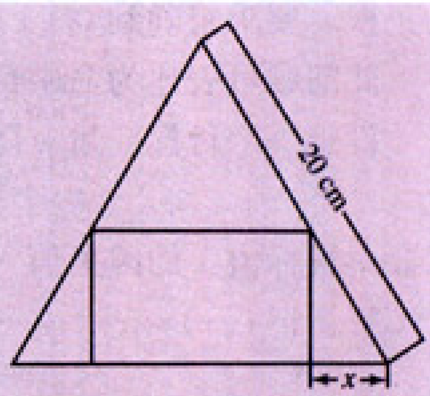
1. 为了提高某产品的质量，对影响质量的一个因素进行优选．已知此因素的变化范围为1 000～2 000，用 0.618 法安排试验，第一点和第二点安排在何处？如果第一点效果比第二点好，第三点试验应在何处？

2. 如图，一正三角形，边长为 20 cm，在它的内部内接一矩形. 问矩形的底边为多少时其面积最大？

提示：先写出矩形面积 S 关于图中 x 的表示式

$S=(20-2x)\sqrt{3}x$，然后用 0.618 法对 x 进行优选.

（矩形底边为 10 cm 时面积最大.）



（第 2 题）

3. 面积为 1 000 m^2 的矩形，要使其周长最小，宽为多少？

提示：先写出周长与宽的关系式，用 0.618 法求解，要求与准确值相差不超过 4 m 即可.

（宽 $x=\sqrt{1\,000}$ m 时，周长最小.）

1.2.10 对分法

用分数法和 0.618 法安排试验都要求用两次试验的结果进行比较后，才能消去区间的一部分. 有时，试验的结果不用比较就可知道其结果的好坏，并且可知道其试验点是大、是小（或是高、是低），这种情况可采用下面介绍的**对分法**.

用数学的语言来讲，目标函数是单调增加函数，或单调减少函数，且一次试验的结果就可判断其好坏时，可用对分法.

对分法：试验区间为$[a, b]$，第一次试验点取区间的中间值，

$$x_1=\frac{1}{2}(b-a)+a=\frac{1}{2}(a+b),$$

一次试验就可以判定 x_1 是大了或小了（高了，低了）. 若 x_1 大了，则消去区间$(x_1, b]$，若 x_1 小了，则消去区间$[a, x_1)$. 如果第一次试验结果知道 x_1 小了，则消去区间$[a, x_1)$.

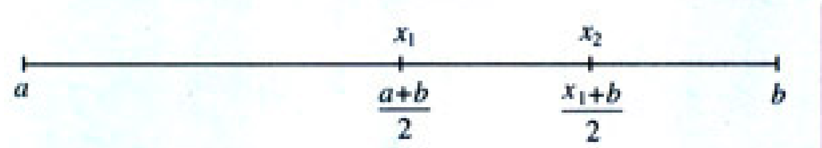


图 1-21

第二次试验取$[x_1, b]$的中点（图 1-21），

$$x_2=\frac{1}{2}(b-x_1)+x_1=\frac{1}{2}(b+x_1).$$

试验以后，可同样消去一半的试验范围. 照此操作，直到达到目的为止.

对分法适用于命中目标问题，即适用的不是所有单峰函数，而是很特殊的单峰函数，如图 1-5，图 1-6 那样的单峰函数. 还有一个条件，就是一次试验就可判断因素的取值大了或小了（偏高或偏低，过多或过少）.

例　求本章 1.2.9 节中方程

$$x^2+x-1=0$$

的正根，要求精确到 0.01（即与精确值相差不超过 0.01）.

此问题可表述为命中目标问题.

设想一个目标变量 y 随因素 x 变化的函数表达式为

$$y=x^2+x.$$

求命中目标值 1 的因素值（与精确值相差不超过 0.01）.

解：记 $f(x)=x^2+x-1$，由于

$$f(0)=-1,\ f(1)=1,$$

所以在 $(0,\ 1)$ 上有一正根. 题意是求一正根的近似值 $\overline{x}$，它与准确值 x_0，有

$$|\overline{x}-x_0|<0.01.$$

函数 $f(x)=x^2+x-1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ 是一个二次函数，它的最小值点 $x=-\dfrac{1}{2}$，于是知 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上是单调增加函数. 对于值 $x\in(0,\ 1)$，$f(x)$ 的值可通过 $f(x)$ 的函数式计算（试验）而得. 如果 $f(x)>0$，则 x 取大了；如果 $f(x)<0$，则 x 取小了. 于是可用对分法来安排试验点.

$$x_1=(1+0)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$f(x_1)=-\frac{1}{4}<0.$$

x_1 取小了，可消去区间 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，剩下区间 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$.

$$x_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{16}>0.$$

x_2 取大了，可消去区间 $\left(\dfrac{3}{4},\ 1\right)$，剩下区间 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$.

$$x_3=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8},$$

$$f(x_3)=f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{64}>0.$$

取

$$x_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)=\frac{9}{16},\quad f\left(\frac{9}{16}\right)=-\frac{31}{256}<0.$$

取

$$x_5=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{9}{16}\right)=\frac{19}{32},\quad f\left(\frac{19}{32}\right)=-\frac{55}{1\ 024}<0.$$

取

$$x_6=\frac{1}{2}\left(\frac{19}{32}+\frac{5}{8}\right)=\frac{39}{64},\quad f\left(\frac{39}{64}\right)=-\frac{79}{4\ 096}<0.$$

取

$$x_7=\frac{1}{2}\left(\frac{39}{64}+\frac{5}{8}\right)=\frac{79}{128},\quad f\left(\frac{79}{128}\right)=-\frac{31}{16\ 384}<0.$$

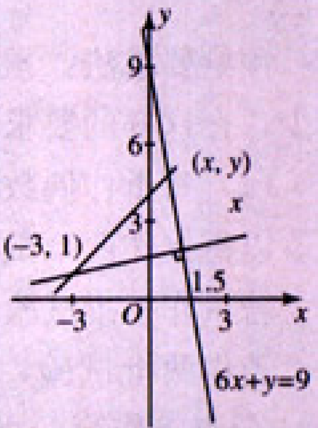
由于 $|x_7-x_0|<\frac{5}{8}-\frac{79}{128}<0.01$，$x_7$ 已满足要求，

$$x_7=\frac{79}{128}=0.617\ 187\ 5,$$

它与精确值 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=0.618\ 033\ 988\cdots$ 相差不超过 0.001.

练习

1. 什么情况下可使用对分法？可用对分法安排试验的目标函数有什么特点？
2. 求直线 $6x+y=9$ 上距 $(-3, 1)$ 最近的点.



(第 2 题)

此题可用两种方法求解：

(1) 先写出点 $(-3, 1)$ 到直线上点 (x, y) 的距离 d：

$$d^2=(x+3)^2+(y-1)^2,\ y=9-6x.$$

将 d^2 表示成 x 的函数后，用分数法或 0.618 法求 d 的最小值点；

(2) 直线 $y=9-6x$ 的斜率 $k_1=-6$，过 $(-3, 1)$ 点的直线的斜率 $k_2=\frac{y-1}{x+3}$，两条直线垂直的条件为

$$k_1k_2=-1,$$

即有

$$-6\times\frac{y-1}{x+3}=-1,$$

这就是过点 $(-3, 1)$ 并垂直于 $y=9-6x$ 的直线方程．此两直线的交点即为直线上距 $(-3, 1)$ 最近的点.

于是，从 $-6\times\frac{y-1}{x+3}=-1$ 及 $y=9-6x$ 中消去 y，得

$$6\times\frac{-6x+8}{x+3}-1=0,$$

$$6\times\frac{-6(x+3)+26}{x+3}-1=0,$$

即

$$\frac{156}{x+3}-37=0,$$

试用对分法求出 $\frac{156}{x+3}-37=0$ 的根，从而得最近点的 x 坐标.

$\left(\text{精确值：} x_0=\frac{45}{37},\ y_0=\frac{63}{37}，\text{或点}\left(\frac{45}{37}, \frac{63}{37}\right).\right)$

1.2.11 分批试验法[1]

前面介绍的分数法、0.618法、对分法，有一个共同的特点，就是试验的安排要根据前面试验的结果来安排后面的试验. 这样安排试验的方法叫序贯试验法. 它的优点是试验次数少，缺点是试验的周期累加起来，可能要用很多的时间. 为加速试验的进行，常常采用一批做几个试验的方法，那就是分批试验法.

注 [1] 这部分内容摘自《优选法》(中国科学院数学研究所运筹学优选法小组，1975) 和《优选法及其应用》(北京市优选法应用推广小组编，1972).

分批试验法有两种，一种是预给要求法，一种是比例分割法. 下面仅介绍预给要求法.

预给要求法：预先给定作几批，一批作几个试验；或一批作几个试验，精度要求达到多少，在这样的要求下如何来安排试验.

(1) 每批作偶数个试验

以每批作两个试验为例，说明方法的基本精神.

若只作一批试验，可把试验范围分为三等份，在两个分点上作试验（图 1-22).

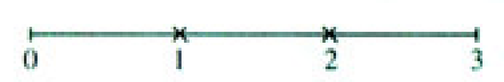


图 1-22

若作两批试验，可把试验范围分为 7 等份，在第 3、4 分点上作第一批试验. 如果第 4 分点好，第二批可在第 5、6 两个分点上做试验；如果第 3 分点好，则第二批可在第 1、2 两个分点上做试验（图 1-23).

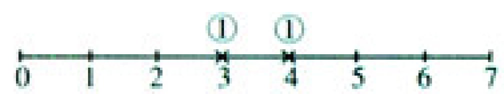


图 1-23

若作三批试验，可把试验范围分为 15 等份，第一批可在第 7、8 两个分点上做试验. 无论是第 7 分点好还是第8 分点好，都可按照作两批试验的方法安排试验（图 1-24).

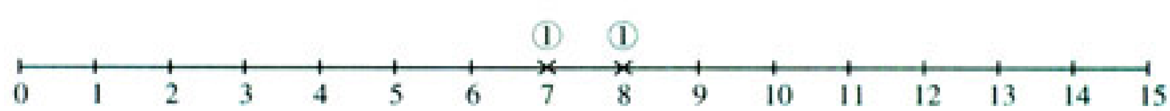


图 1-24

其他每批作 4 个、6 个试验的情况，原理相同. 例如一批作 4 个试验，可做两批试验，作如下安排：把试验范围分为 17 等份. 第一批可安排在第 5、6、11、12 分点上做试验. 无论哪个分点最好，消去部分区间后剩下还有 4 个分点，可在每个分点上作第二批的 4 个试验（图 1-25).

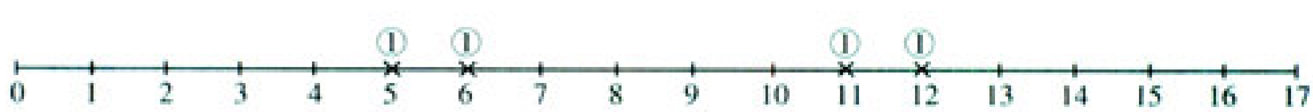


图 1-25

（2）每批作奇数个试验

以每批作三个试验为例.

若只作一批试验，可分试验范围为 4 等份，在中间三个分点上安排三个试验（图 1-26）.

图 1-26

若作两批试验，可把试验范围分为 10 等份．在第 4、5、9 分点或在第 1、5、6 分点安排第一批试验．无论哪个分点最好，消去部分区间后，剩下的部分还有三个分点安排第二批试验（图 1-27）.

图 1-27

若做三批试验，可把试验范围分为 28 等份．分点表示为

○…○①○○○①○…○①○○○

9个分点　　9个分点

或

○○○①○…○①○○○①○…○

9个分点　　9个分点

第一批在第 10、14、24 或第 4、14、18 三个分点上做试验，消去部分区间后，剩下的情况为：

○○○①○…○　或　○…○①○○○.

9个分点　　9个分点

第二批试验可作如下安排：

○○○①②○○○②②○○○，

其中“①”表示第一批的试验点；“②”表示第二批的试验点，○表示未作试验的点．试验结果消去部分区间后，剩下的情况为：

○○○①，或②○○○，或○○○②.

第三批试验可在剩下的三个分点上进行.

例❶　某工厂为提高壬二酸得率，进行试验，使得率从原来的 25%提高到 32%.

壬二酸是由油酸吸收臭氧再经氧化分解而得．试验人员分解各种因素，认为必须摸索出氧化分解的最佳温度．根据以往经验，温度范围在 30 ℃～100 ℃之间，为加快试验步伐，决定每次做两个试验．试验安排如下：

注

❶ 此例选自《优选法》（浙江省优选法统筹法推广小组编，浙江人民出版社，1972）中的实例.

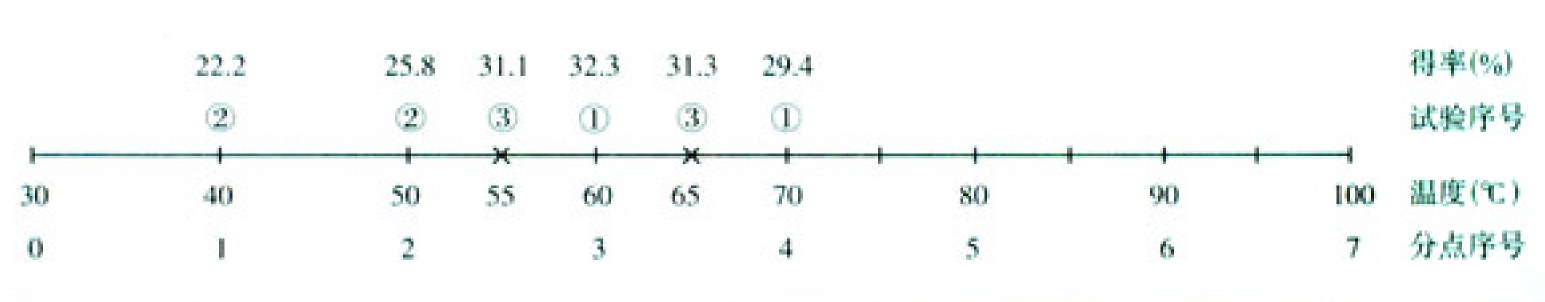


图 1-28

将试验范围分为 7 等份，第一批试验在第 3、4 分点进行，得率分别为 32.3% 和 29.4%．第二批在第 1、2 分点进行，得率分别为 22.2% 和 25.8%．第三批在 55 ℃，65 ℃进行，得率分别为 31.1% 和 31.3%，差别不大．估计再分细没有必要，结束了试验．得最佳温度为 60 ℃．

分批试验可以不同的方法来安排，如每批做四个试验，有下列三种方法：

(1) ○○①○○①○○①○○①○○

(2) ○○○①○①○○○○①○①○○○

(3) ○○○○①①○○○○○①①○○○○○

(1) 可分辨 14 个点；(2) 可分辨 15 个点；(3) 可分辨 16 个点．第 (3) 种方法分辨的点最多，但由于两个试验相距太近，有时可能不易辨别其好坏，甚至会由于观察的误差，好的一段反而会丢掉．第 (1) 种方法，虽然少分辨两个点，但试验点均匀分布，可避免由于难于辨别或出现误差而把好点丢掉．

因此，在分批试验中，要根据实际情况选择合适的方法．

1.3 斐波那契数列和黄金分割

1.3.1 斐波那契数列的由来

斐波那契(Leonardo Fibonacii，约 1170—约 1250) 的《算盘书》(1202 年，1228 年修订)中提出了一个“兔子问题”：

一对大兔子，每个月可生产一对小兔子，而小兔子出生后两个月就有生殖能力．问从一对大兔子开始，一年后能繁殖成多少对兔子？这就导致斐波那契数列：

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \cdots.$$

它的规律是从第 3 项开始，每一项都是前两项之和，即有

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\quad n\geqslant 3.$$

它的每一项与后一项之比，构成斐波那契分数列 $\left\{\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\right\}$：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \cdots.$$

1.3.2 斐波那契数列的一些关系式

斐波那契数列$\{F_n\}$，其通项F_n有下列一些关系式：

（1）$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n\geqslant 3$；

（2）$F_{n+1}F_n-F_{n+2}F_{n-1}=F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}=(-1)^n$；

（3）$\dfrac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$单调减少，$\dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n}}$单调增加.

证明：（1）是斐波那契数列的基本关系式.

（2）由于

$$\begin{aligned}F_{n+1}F_n-F_{n+2}F_{n-1}&=F_{n+1}F_n-(F_{n+1}+F_n)F_{n-1}\\&=F_{n+1}F_n-F_{n+1}F_{n-1}-F_nF_{n-1}\\&=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})-F_{n+1}F_{n-1}\\&=F_n^2-F_{n+1}F_{n-1},\end{aligned}$$

于是，前一等号成立.

由于

$$\begin{aligned}F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}&=F_n(F_{n-1}+F_{n-2})-(F_n+F_{n-1})F_{n-1}\\&=F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2=(-1)(F_{n-1}^2-F_nF_{n-2})\\&=(-1)^2(F_{n-2}^2-F_{n-1}F_{n-3})\\&=\cdots\\&=(-1)^{n-2}(F_{n-(n-2)}^2-F_3F_1)\\&=(-1)^{n-2}(4-3)=(-1)^{n-2}(-1)^2\\&=(-1)^n.\end{aligned}$$

因此，后一等号成立.

（3）在等式

$$F_{n+1}F_n-F_{n+2}F_{n-1}=(-1)^n$$

中，令$n=2m$，得

$$F_{2m+1}F_{2m}-F_{2m+2}F_{2m-1}=(-1)^{2m}=1,$$

即

$$F_{2m+1}F_{2m}=F_{2m+2}F_{2m-1}+1.$$

所以有

$$F_{2m+1}F_{2m}>F_{2m+2}F_{2m-1},$$

即

$$\frac{F_{2m-1}}{F_{2m}}<\frac{F_{2m+1}}{F_{2m+2}},$$

所以$\dfrac{F_{2m-1}}{F_{2m}}$单调增加．同样方法可证$\dfrac{F_{2m}}{F_{2m+1}}$单调减少（留作练习）.

*1.3.3 斐波那契分数列$\left\{\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\right\}$[1]

令

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}=G_n,$$

由于上一节中 F_n 的有关性质及关系式，知$\{G_{2m}\}$为单调减少序列，$\{G_{2m-1}\}$为单调增加序列.

由于

$$G_n<1,$$

有 $G_{2m}<1$，$G_{2m-1}<1$. 即序列$\{G_{2m}\}$和$\{G_{2m-1}\}$都是单调有界序列，根据极限理论，单调有界序列必有极限，从而$\{G_{2m}\}$和$\{G_{2m-1}\}$两个序列，当 $m\to\infty$时都有极限. 由于

$$G_{2m}-G_{2m-1}=\frac{F_{2m}}{F_{2m+1}}-\frac{F_{2m-1}}{F_{2m}}=\frac{F_{2m}^2-F_{2m+1}F_{2m-1}}{F_{2m+1}F_{2m}}$$

$$=\frac{(-1)^{2m}}{F_{2m+1}F_{2m}}=\frac{1}{F_{2m+1}F_{2m}}\to 0(m\to\infty).$$

也由极限理论可以知道$\{G_{2m}\}$和$\{G_{2m-1}\}$有相同的极限. 根据极限理论中的定理，知序列$\{G_n\}$有极限，并且有：

$$\lim_{n\to\infty}G_n=\lim_{m\to\infty}G_{2m}=\lim_{m\to\infty}G_{2m-1}.$$

令$\lim\limits_{n\to\infty}G_n=W$. 用 F_n 除 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，得

$$1=\frac{F_{n-1}}{F_n}+\frac{F_{n-2}}{F_n}=\frac{F_{n-1}}{F_n}+\frac{F_{n-1}}{F_n}\cdot\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}},$$

即有

$$G_{n-1}+G_{n-1}\cdot G_{n-2}=1.$$

两边取当 $n\to\infty$时的极限，即有

$$W^2+W-1=0.$$

解此方程，得

$$W=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

取正数解，有

$$W=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\ 033\ 988\cdots.$$

这就是说，斐波那契分数列$\left\{\dfrac{F_{n-1}}{F_n}\right\}$的极限是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

注

[1] 本段内容涉及极限的知识，不作教学要求，知道$\dfrac{F_{n-1}}{F_n}\to\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $(n\to\infty)$ 这样的结论就可以了.

1.3.4 黄金分割

所谓黄金分割就是将一线段分割成两部分，使其整个线段的长与分割后长的一段之比，等于长的一段与短的一段长之比.

设线段长为 L，分割后的长的一段长为 x，则短的一段长为 $L-x$(图 1-29).

设黄金分割中的比值为 z，于是有

$$\frac{L}{x}=\frac{x}{L-x}=z.$$

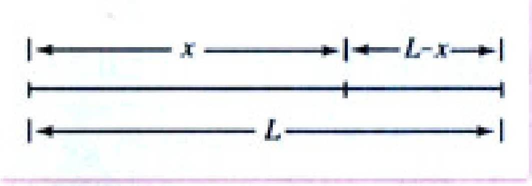


图 1-29

展开后，就是

$$x^2=L^2-Lx,$$

两边除以 x^2，得

$$1=\left(\frac{L}{x}\right)^2-\frac{L}{x}.$$

由于 $\frac{L}{x}=z$，从而有

$$z^2-z-1=0.$$

它的正根为

$$z=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)=1.618\ 033\ 988\cdots.$$

优选法中的第一试验点取在 $\frac{x}{L}=\frac{1}{z}$ 处，即

$$\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\ 033\ 988\cdots.$$

黄金分割的几何作图.

设线段 $AB=L$. 作 $BC\perp AB$，取 $BC=\frac{L}{2}$. 连接 A，C，在 AC 上取 $CD=\frac{L}{2}=BC$.

然后再在 AB 上取 $AE=AD$，则 E 点就是线段 AB 的黄金分割点.

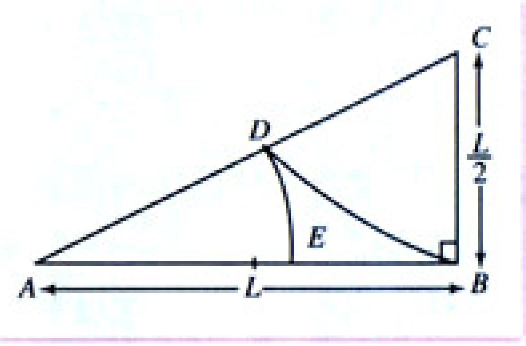


图 1-30

由于　$AC=\frac{1}{2}\sqrt{5}L$，$AD=\frac{1}{2}\sqrt{5}L-\frac{L}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)L$.

因此，

$$AE=AD=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)L,$$

从而

$$\frac{L}{AE}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

黄金分割，也说成将线段分为中末比、中外比、外内比. 最早对此作系统研究的是希腊数学家多克索斯，但更早的毕达哥拉斯可能早已知道. 因为中末比和正五边形、正十边形的作图有密切关系，而毕达哥拉斯对此深有研究.

中世纪以后，中末比被披上神秘的外衣，帕乔利（约 1445—1517，意大利人）称它为神圣的比例. 天文学家开普勒（Kepler，1571—1630）称它为神圣分割，并说："毕达哥拉斯定理（即勾股定理）和中末比是几何中的双宝，前者好比黄金，后者有如珠玉."19 世纪以后，黄金分割之名才逐渐通行起来.

中末比的严格论述最早见于欧几里得的《几何原本》卷 2 第 11 题，卷 6 第 30 题，又

卷 4 第 10 题和卷 13 第9 题，指出了正五边形和正十边形与中末比的关系.

黄金分割的实际应用最著名的例子就是优选学中的黄金分割法或 0.618 法. 它是美国的基弗在 1953 年首先提出来的，1970 年以后在中国推广应用.

1.3.5 各种方法精确度的比较

由于 0.618 是$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$的近似值，应该说，0.618 法与黄金分割法是有区别的.

如果令

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=\omega.$$

则黄金分割法的第一试验点应在 ωL（L 为试验因素的变化区间$[0,\ L]$的长度）处（图 1-31）；第二试验点应在 ωL 关于区间中点的对称点$(1-\omega)L$ 处.

经过两次试验后，留下的区间长度为 ωL.

图 1-31

由于

$$(1-\omega)L:\omega L=\frac{1-\omega}{\omega}=\frac{1}{\omega}-1,$$

即

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}-1=\frac{2}{4}(\sqrt{5}+1)-1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=\omega.$$

所以，经两次试验后，好点在$(1-\omega)L$ 处（若在 ωL 处也有同样的情况），留下两个区间为$((1-\omega)L,\ \omega L)$和$(0,\ (1-\omega)L)$，较长的区间为$(0,\ (1-\omega)L)$.

所以试验所得的好点与实际好点之距离不超过$(1-\omega)L$. 从而其精确度为

$$\frac{(1-\omega)L}{L}=1-\omega=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\omega^2.$$

由于以后试验点的取法与前面完全类似，所以第三次试验后的精确度为 ω^3，…，n 次试验后的精确度为 ω^n.

对 0.618 法，第一次试验点为 $0.618L$，第二次试验点在$(1-0.618)L$ 处（图 1-32），其精确度为

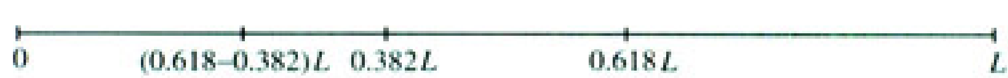


图 1-32

$$\frac{(1-0.618)L}{L}=0.382.$$

第三试验点在$(0.618-0.382)L$ 处. 第三次试验后的精确度为

$$\frac{(0.618-0.382)L}{L}=0.236.$$

由此，可以列一表，将黄金分割法，0.618 法，分数法和对分法的精确度作一比较（取三位小数）.

表 1-1

精确度 方法 试验次数	黄金分割法	0.618 法	分数法	对分法
$n=1$	$\omega\approx0.618$	0.618	$\frac{1}{2}=0.500$	$\frac{1}{2}=0.500$
$n=2$	$\omega^2\approx0.382$	0.382	$\frac{1}{3}\approx0.333$	$\frac{1}{4}=0.250$
$n=3$	$\omega^3\approx0.236$	0.236	$\frac{1}{5}=0.200$	$\frac{1}{8}=0.125$
$n=4$	$\omega^4\approx0.146$	0.146	$\frac{1}{8}=0.125$	$\frac{1}{16}\approx0.063$
$n=5$	$\omega^5\approx0.090$	0.090	$\frac{1}{13}\approx0.077$	$\frac{1}{32}\approx0.031$
$n=6$	$\omega^6\approx0.056$	0.056	$\frac{1}{21}\approx0.048$	$\frac{1}{64}\approx0.016$
$n=7$	$\omega^7\approx0.034$	0.034	$\frac{1}{34}\approx0.029$	$\frac{1}{128}\approx0.008$
$n=8$	$\omega^8\approx0.021$	0.022	$\frac{1}{55}\approx0.018$	$\frac{1}{256}\approx0.004$
$n=9$	$\omega^9\approx0.013$	0.012	$\frac{1}{89}\approx0.011$	$\frac{1}{512}\approx0.002$
$n=10$	$\omega^{10}\approx0.008$	0.010	$\frac{1}{144}\approx0.007$	$\frac{1}{1\,024}\approx0.001$
$n=11$	$\omega^{11}\approx0.005$	0.008	$\frac{1}{233}\approx0.004$	$\frac{1}{2\,048}\approx0.001$
$n=12$	$\omega^{12}\approx0.003$	0.006	$\frac{1}{377}\approx0.003$	$\frac{1}{4\,096}\approx0.000$
$n=13$	$\omega^{13}\approx0.002$	0.004	$\frac{1}{610}\approx0.002$	$\frac{1}{8\,192}$
$n=14$	$\omega^{14}\approx0.001$	0.002	$\frac{1}{987}\approx0.001$	$\frac{1}{16\,384}$

由表中精确度的情况看，黄金分割法、0.618 法、分数法相比较，从 $n=10$ 开始黄金分割法优于 0.618 法；到$n=11$为止，分数法一直优于 0.618 法和黄金分割法．从$n=12$开始，精确到小数后三位时，分数法与黄金分割法不相上下；在 $n\leqslant7$，精确到小数后面三位时，黄金分割法与 0.618 法不相上下；对分法适用于命中目标的优选问题，这时，对分法比 0.618 法等其他方法都“快”．最值问题可用 0.618 法求解，这时用对分法可能达不到最优．

练习

1. 证明数列$\left\{\dfrac{F_{2m}}{F_{2m+1}}\right\}$当 m 增加时，单调减少．
2. 证明五角星对角线互相分割成黄金分割的比例．

3. (1) 设 ω_1，ω_2 是方程

$$\omega^2-\omega-1=0$$

的两个解. 令

$f_n=a\omega_1^n+b\omega_2^n$，$n$ 为正整数，a，b 为任意非零常数，证明 f_n 满足：

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, \quad n\geqslant 3.$$

(2) 令 $f_1=F_1=1$，$f_2=F_2=2$，求出 a，b. 从而证明对斐波那契数列 $\{F_n\}$，有

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1}-\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1}\right\}.$$

*(3) 由 (2) 中 F_n 的表示式，求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$.

*4. 验证斐波那契分数 $\dfrac{F_{n-1}}{F_n}(n\geqslant 2)$ 是连分数

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

的近似分数.

1.4 双因素优选法

1.4.1 网格法

在科学试验和生产实践中碰到的优选问题，大都是多因素问题. 但解决多因素问题要比单因素问题困难得多. 因此，在遇到多因素问题时，首先应对各因素进行分析，找出主要因素，把多因素化为单因素、双因素、三因素等较少的因素问题. 如果能化为单因素问题，就可用前面介绍的单因素优选法解决；如果经过分析，最后还剩下两个或两个以上的因素，就应该用多因素方法了.

单因素时有均分法，就是把优选范围$[a, b]$均分为 n 等份，在每一个分点做试验，然后取最好的点.

类似地，对因素 x，y，

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad c\leqslant y\leqslant d,$$

可将区间$[a, b]$分为n等份，将$[c, d]$分为m等份，这样就将优选区域（此时为一矩形，见图 1-33）分为mn个小的矩形. 在每一个小矩形中取一点作为试验点，共做mn个试验. 然后比较这mn个试验结果的优劣，从而取其最好的一点，这样的工作量比起单因素来大大增加了. 如果说$n=10$，$m=10$，那么就要做$mn=10\times10=100$次试验.

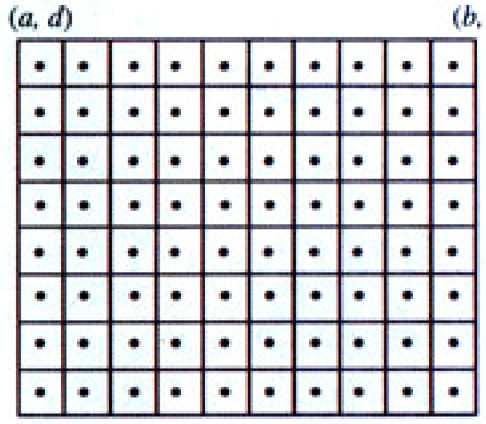


图 1-33

练习

1. 设有双因素（目标函数）函数

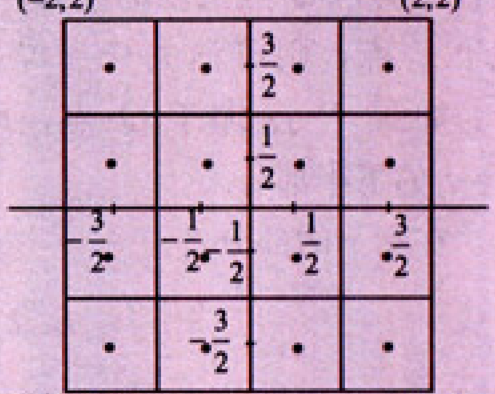
$$z=9-x^2-y^2,\ -2\leqslant x\leqslant2,\ -2\leqslant y\leqslant2.$$

如果用网格法将$-2\leqslant x\leqslant2$，$-2\leqslant y\leqslant2$各分为 4 等份，如图，各分点为：

x：-1，0，1；

y：-1，0，1.

取各小正方形的中心点做试验. 各中心点的坐标为：



（第 1 题）

$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right);$$

$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right);$$

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

共取点 16 个，在此 16 个点上做试验（用计算器求出此 16 个点上的目标函数的值），并比较它们的大小. 如果最大值不止一个，则在相同值的中间点$(0, 0)$再做一次试验，以取得最大值和最大值点.

（最大值$z_{最大}=9$，最大值点$(0, 0)$.）

1.4.2 纵横对折法

在单因素情况下，有区间消去法，两点试验比较后，可以消去部分区间，在双因素情况下，也有类似的方法.

纵横对折法，又称对开法.

设优选范围为：

$$a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d.$$

取因素 x 的中点 $x_1=\frac{a+b}{2}$，如图 1-34，固定 $x=x_1$，对 y 在 $[c,\ d]$ 内用单因素方法进行优选试验，取得 $x=x_1$ 上最好点 P. 再取因素 y 的中点 $y_1=\frac{c+d}{2}$，并固定 $y=y_1$，对 x 在 $[a,\ b]$ 内用单因素法进行试验，取得 $y=y_1$ 上最好点 Q. 比较 P 点和 Q 点试验的结果，如果 Q 点优于 P 点，则可消去 $x=x_1$ 的左半部分；如果 P 点优于 Q 点，则可消去 $y=y_1$ 的下半部分.

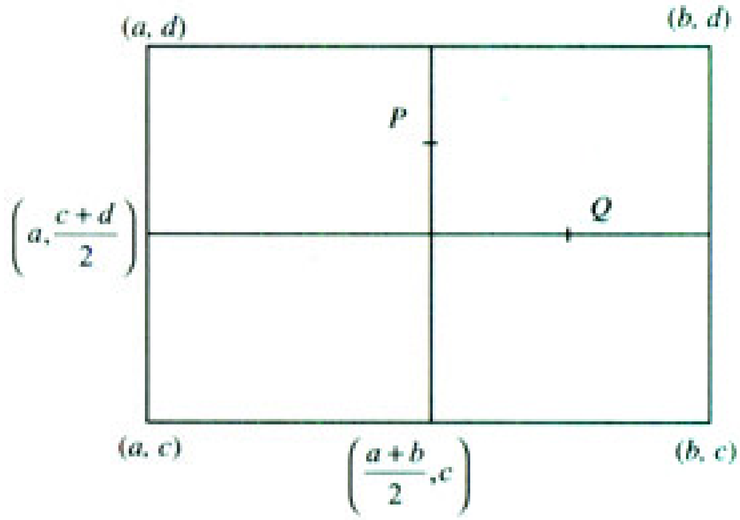


图 1-34

在剩下的部分：

$$\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\ \left(\text{或 } a\leqslant x\leqslant b,\ \frac{c+d}{2}\leqslant y\leqslant d\right),$$

用同样方法安排试验，直到满意为止.

例❶ 某炼油厂试制磺酸钡，其原料磺酸是磺化油经乙醇水溶液萃取出来的. 试验目的是选择乙醇水溶液的合适浓度和用量，使分离出来的白油最多.

注 ❶ 此例选自《优选法》（中国科学院数学研究所运筹室优选法小组，科学出版社，1975）中的实例.

根据经验，乙醇水溶液浓度变化范围为 50%～90%（体积百分比），用量变化范围为 30%～70%（重量百分比），精度要求为 5%.

试验：

1. 固定用量（图 1-35）在 $\frac{1}{2}(30\%+70\%)=50\%$ 处，用 0.618 法对浓度进行优选试验，做 4 次试验，结果“③”最好.

2. 固定溶液浓度为

$$\frac{1}{2}(50\%+90\%)=70\%,$$

做了 4 次试验，结果“⑧”最好. “⑧”与“③”比较，“③”好，消去左半试验范围.

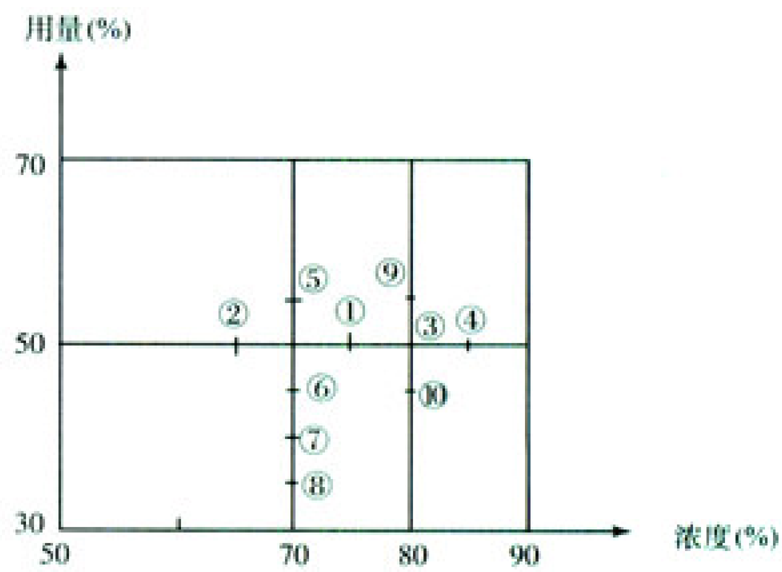


图 1-35

3. 在剩下的范围中，固定浓度为

$$\frac{1}{2}(70\%+90\%)=80\%,$$

经过试验“⑨”“⑩”后，仍为“③”好.

于是找到了好点“③”. 试验结果如下表：

表 1-2

试验序号	18 号磺化油(g)	乙醇水溶液浓度(%)	乙醇水溶液用量(%)	白油(g)	备注
1	200	75	50	187	
2	200	65	50	186	
3	200	80	50	188.4	最好
4	200	85	50	188.7	色深有沉淀
5	200	70	55	185.4	
6	200	70	45	185.9	
7	200	70	40	187.1	
8	200	70	35	187.3	次好
9	200	80	55	185.8	
10	200	80	45	185.7	

1.4.3 坐标轮换法（或称因素轮换法）

设优选范围为

$$a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d.$$

(1) 先在 $x=x_1=\frac{a+b}{2}$ 上求最大值，设求得最优值点为 P_1（图 1-36）.

(2) 设过 P_1 关于 x 轴的平行线 AB. 在 AB 上求最大值点，设所求为 P_2.

比较 P_1，P_2 试验的结果. 设 P_2 比 P_1 好，则可消去优选范围的左边一半.

(3) 过 P_2 作关于 y 轴的平行线 CD. 在 CD 上求最大值点，设所求为 P_3，则可消去 AB 线的上面部分.

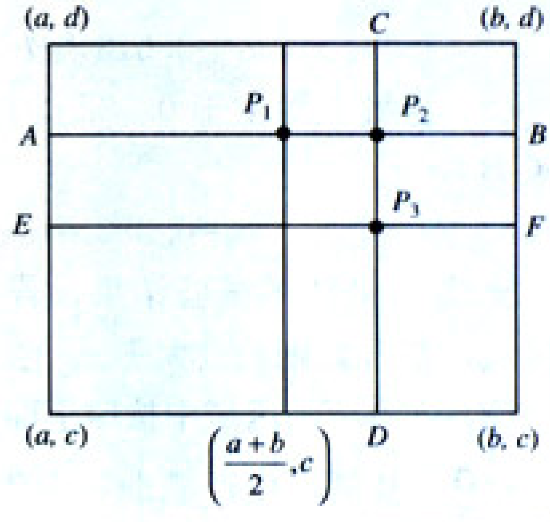


图 1-36

(4) 过 P_3 作关于 x 轴的平行线 EF，在 EF 上做试验……

这样，直到满意为止.

例❶ 某制药厂制阿托品．为提高产量降低成本，利用优选法选择合适的酯化工艺条件．

注 ❶ 此例选自《优选法》（浙江省优选法统筹法推广小组编，浙江人民出版社，1972）中的实例．

据分析，主要因素为温度和时间，其范围为

温度：55 ℃～75 ℃；

时间：30 min～210 min．

（1）参照生产条件，先固定温度为 55 ℃，用单因素方法，优选时间，得最好时间为150 min，其收率为 41.6%．

（2）固定时间为 150 min，用单因素法优选温度，得最优温度为 67 ℃，其收率为 51.59%．

（3）固定温度为 67 ℃，用单因素方法再优选时间，得最优时间为 80 min，其收率为 56.9%．

（4）再固定时间为 80 min，对温度进行优选，结果还是67 ℃好．

到此试验结束，可以认为最好的工艺条件为

温度：67 ℃；

时间：80 min．

收率提高了 15%．

1.4.4 平行线法

在实际问题中，经常会遇到双因素的一个因素容易调整，而另一个因素不易调整，这时可采用下面的平行线法．

设双因素的变化范围为（图 1-37）

$$a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d,$$

并且因素 x 的调整比较困难．

（1）固定 x 于 0.618 处，对 y 进行优选，得好点 A．

$$x_1=a+0.618\times(b-a).$$

（2）再将 x 固定于 0.382 处，对 y 进行优选，得好点 B．

$$x_2=a+0.382\times(b-a).$$

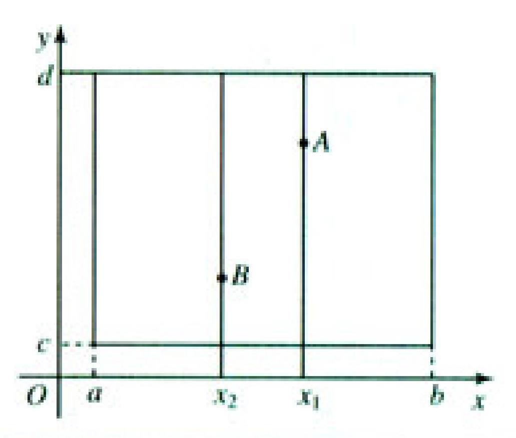


图 1-37

比较 A 和 B 的试验结果，若 A 好则消去小于 x_2 的区域；若 B 好则消去大于 x_1 的区域．

（3）在剩下的区域中按照上面的方法继续下去，直到满意为止．

例❶ 某酒厂生产酒曲，由于对制曲室的温度和湿度掌握得不好，质量不高，糖化率一直在 50 单位（林德纳值）以下，利用双因素平行线法对温度和湿度进行优选，过程如下：

注 ❶ 此例选自《优选法的原理与应用》（谢庭藩，谭国政，浙江人民出版社，1979）中的实例．

由于温度易调，湿度难变，采用平行线法．

优选范围为（图 1-38）：

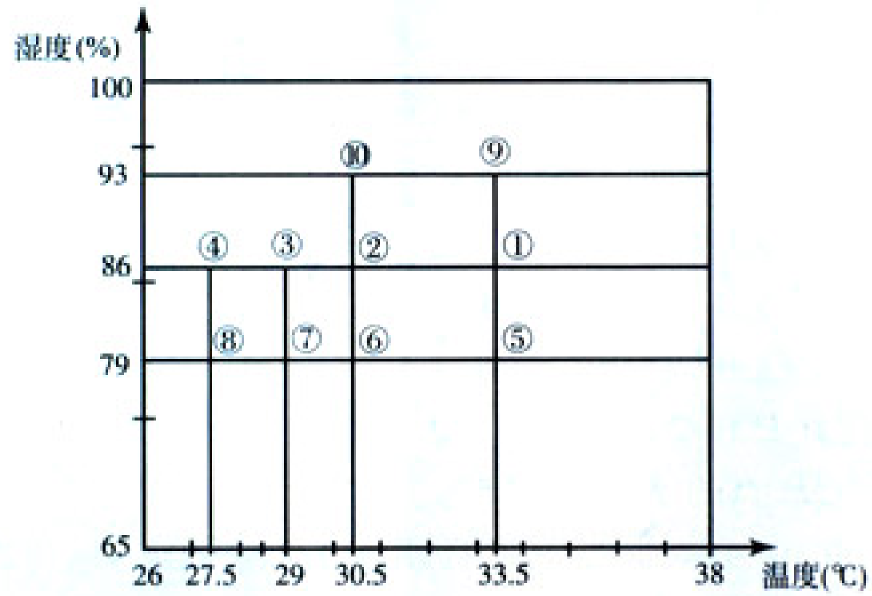


图 1-38

温度：26 ℃～38 ℃；

湿度：65%～100%.

（1）先固定湿度在 0.618 处：

$$65+0.618\times(100-65)=86\ (\%).$$

用 0.618 法优选温度，经过 4 次试验，得好点④27.5 ℃.

（2）再固定湿度于

$$65+100-86=79\ (\%)$$

处，经过 4 次试验，各点均不如④好.

（3）再固定湿度于

$$100+79-86=93\ (\%)$$

处，试验几点都不如④好.

于是定下制曲温度为 28 ℃左右，湿度为 86%. 投入生产后效果很好，糖化率保持在 65～75 个单位.

1.4.5 双因素的离散情形

有时因素是离散的情形. 例如，因素 x 取有限个整数，或有限个点的情形.

像有的车床上的走刀量，是这样分的：

0.3 mm/r，0.33 mm/r，0.35 mm/r，0.40 mm/r，0.45 mm/r，
0.48 mm/r，0.50 mm/r，0.55 mm/r，0.60 mm/r，0.65 mm/r，
0.71 mm/r，0.81 mm/r，0.91 mm/r，

共有 13 个等级. 转速也是分为几档的. 这两个因素都是离散的情形.

当然，离散的情形不仅限于车床上，其他优选问题中也可能会碰到离散的情况. 即使不是离散的情形，在所要求精确度的情况下，也可以分为 F_n 等份，在分点上做试验，这也就相当于离散的情形了.

例如，优选范围是 21×13 的格子．现在不用纵横对折法，也不用其他的如坐标轮换法和平行线法，这些方法首先要固定一个因素在此因素的中间点处，或是在 0.618 处，这样会出现固定点不在格子上．这时可在 $x=13$ 的直线上用分数法做 5 次试验；又在 $y=8$ 的直线上做 $6-1$ 次试验（因在 $y=8$，$x=13$ 的交点上已经做了一次试验）（图1-39）．各得最优点 P 和 Q，比较 P，Q 的结果，如果 Q 点比 P 点的结果好，则可消去一个 13×13 的格子．在剩下的范围中仍用分数法，固定 $x=18$ 或 16 做试验．

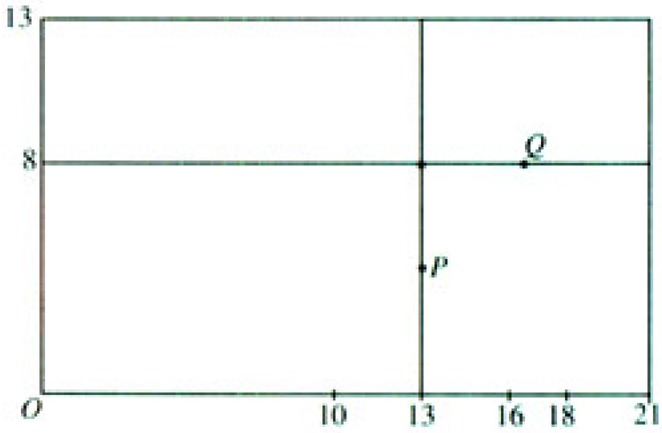


图 1-39

这样继续下去，可得最好点．

注：（1）对离散的情形，若因素 x 的个数、y 的个数不是斐波那契数 F_n 时，可扩大一些或缩小一些，添加几个分点或减少几个分点，使它正好是 F_n 的数．

（2）对格子点的情况，也适用于坐标轮换法和平行线法．在固定一个因素时，不使用 0.618，而使用分数 $\dfrac{F_{n-1}}{F_n}$．

1.4.6 双因素爬山法

如果试验是在生产中进行，并且把因素进行大幅度调整时会影响生产．这时可将因素选定一个方向后，进行小幅度的调整．经试验后，结果好了，就前进了一步；结果较差，就退回来，再找另外的方向进行小幅度调整后进行试验．这样一步一步到达最好的效果．这就是**爬山法**．

比方说，如图 1-40 中所示的试验范围．原生产点在 P 点，可向 P 点的四周取点作试验，找出有利于提高的方向，在这个方向上跨出一步．然后再找有利的方向，再跨出一步．这样边探索边前进，直到找到最好点为止．

一种方法是在 P 的四个方向①，②，③，④做试验，如果③最好，则以③为中心同样再作下一步试验，这样，直到四个方向都不如中心点好时，此中心点就是最好点．

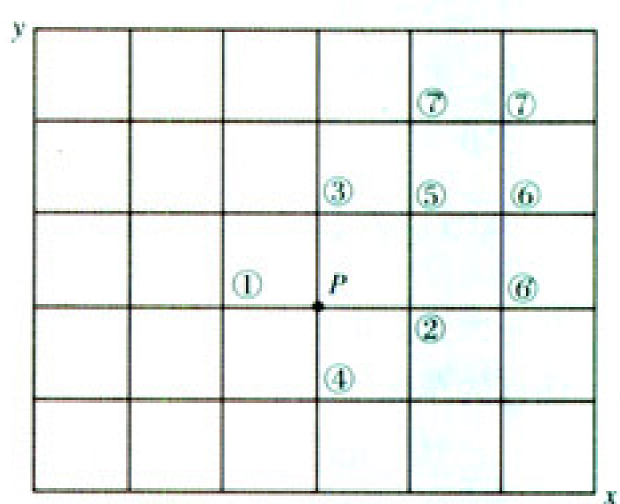


图 1-40

另一种方法：在①，②，③，④四个试验中，②，③两点比其他点都好，则可在⑤处做第五次试验．比较②，③，⑤的结果，如果③最差，⑤最好，第六次试验可在⑥处（如果②最好，则在⑥处）．比较②，⑤，⑥的结果，如果⑥好，则下一次在⑦处做试验．这样就能逐渐靠拢所寻找的目标．

在第六次试验后，比较②，⑤，⑥的结果，如果⑥最差，则在⑦（次差点②的对称点）做下一次试验. 比较⑤，⑥，⑦的结果，按照丢掉最差点（或次差点），代之以对称点的办法继续做试验. 如果⑦最差，这时要缩小矩形，以⑤为起点，按照上面办法做试验，直到找到满意结果为止.

练习

设双因素目标函数

$$z=16-(x-\sqrt{2})^2-(y-\sqrt{3})^2,\ 0\leqslant x\leqslant 3,\ 0\leqslant y\leqslant 3.$$

试用双因素优选法，求 z 的最大值点（精确到 0.1）.

（最大值点为 $(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$.）

第二章　试验设计

2.1　试验为什么要设计

在第一章中，介绍了优选法．除了单因素方法外，还介绍了双因素的几种方法．在实际工作中，经常会遇到多因素的试验．在多因素的情况下，我们还是再三强调抓主要因素，化多因素试验为少因素试验，最好抓住主要因素或一两个重要因素，用单因素方法或双因素方法来安排试验，以达到用较少的试验次数达到较好的效果．

但是，在一些情况下，例如新产品的试制，新的工艺和新的流程的研究等，由于缺少经验，各因素主次一时难以分清，常常要经过多次的试验，才能有所认识．

此外，对于生产和科学实验来讲，除了寻找最优条件外，还希望能认识各因素间哪个是主要因素，哪个是次要因素，哪个因素是单独起作用的，哪些因素搭配后会起综合作用，等等．这些要求能不能用较少的试验次数达到呢？这就要求对试验进行设计．

例如，某化工厂想提高某化工产品的质量和产量，对工艺中的三个因素分三个等级进行试验．各因素所取等级如下：

因素 A，温度：80 ℃，100 ℃，120 ℃；

因素 B，压力：5 kPa，6 kPa，7 kPa；

因素 C，加碱量：2.0 kg，2.5 kg，3.0 kg．

此后称因素的各等级为水平．如因素 A 的三个水平为 A_1（80 ℃），A_2（100 ℃），A_3（120 ℃）；因素 B 的三个水平为 B_1（5 kPa），B_2（6 kPa），B_3（7 kPa）；因素 C 的三个水平为 C_1（2.0 kg），C_2（2.5 kg），C_3（3.0 kg）．

三因素三水平的试验，我们记为 3^3 试验．“底数” 3，表示三个水平，“指数” 3 表示三个因素．

这样，三个因素三个水平的试验，如果全部的搭配都进行试验，例如：

$$A_1B_1C_1,\ A_1B_1C_2,\ A_1B_1C_3,$$
$$A_1B_2C_1,\ A_1B_2C_2,\ A_1B_2C_3,$$
$$A_1B_3C_1,\ A_1B_3C_2,\ A_1B_3C_3,$$

这是对 A_1 的 9 种搭配；对 A_2，A_3 也各有 9 种搭配，全部共有 $3^3=27$ 种，就有 27 个试验．全部的搭配都做试验，叫做全试验．全部试验以后进行比较，可选取到好的搭配．但这样的试验次数较多，现在仅是三个因素，三个水平，如果是四个因素，三个水平的试验，全试验则有 $3^4=81$ 个试验，那就更多了．能不能用部分试验，以取得好的结果呢？

有一种简单的方法：变化一个因素而固定其他因素．如，先固定因素 B，C 于 B_1，C_1 上，变化 A，做三个试验：

$$\begin{array}{ll} & A_1 \\ & / \\ B_1C_1 & \text{—} A_2 \\ & \backslash \\ & A_3 \end{array}$$

比较三个试验的结果．比方说，A_3 最好．然后，固定 A 于 A_3，仍固定 C 于 C_1，让 B 变化：

$$\begin{array}{ll} & B_1 \\ & / \\ A_3C_1 & \text{—} B_2 \\ & \backslash \\ & B_3 \end{array}$$

三个试验结果比较后，若 B_2 最好．最后固定 A 于 A_3，固定 B 于 B_2，让 C 变化：

$$\begin{array}{ll} & C_1 \\ & / \\ A_3B_2 & \text{—} C_2 \\ & \backslash \\ & C_3 \end{array}$$

三个试验结果比较，C_2 最好．于是找到好的工艺条件为 $A_3B_2C_2$．

这种方法一般也能取得一定的效果，试验次数共 7 次（$A_3B_1C_1$，$A_3B_2C_1$ 重复了，可各做一次试验），也不算多．但这样的试验安排有许多缺点．

首先，选点的“代表性”差，如图 2-1 所示，7 个试验点全部在 $A_1A_3B_3$ 和 $A_3C_3B'_3$ 两个面上．而立方体的其他各个面上没有试验点．因此说，这 7 个点的代表性很差．所选的工艺条件 $A_3B_2C_2$ 很难说是 27 个搭配中的最好搭配．

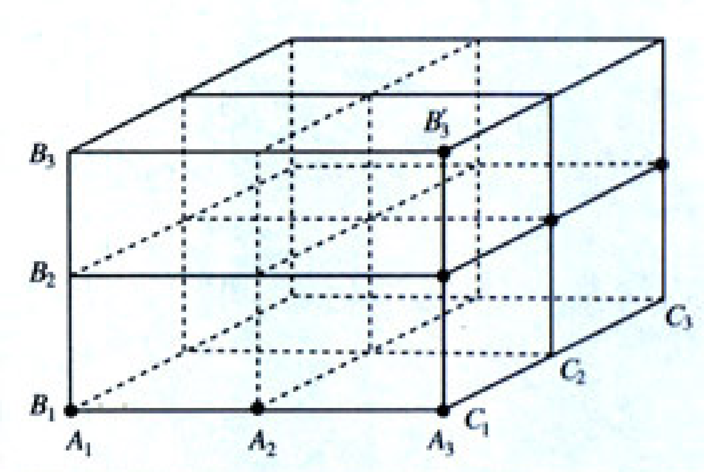


图 2-1

其次，所选点分散很不均匀，其中各因素的各水平所选次数差别很大．例如，7 次试验中，A_1 选了 1 次，A_2 选了 1 次，A_3 选了 5 次；B_1 选了 3 次，B_2 选了 3 次，B_3 选了 1 次；C_1 选了 5 次，C_2 选了 1 次，C_3 选了 1 次．各因素的各水平中，最多的选了 5 次，最少的选了 1 次．

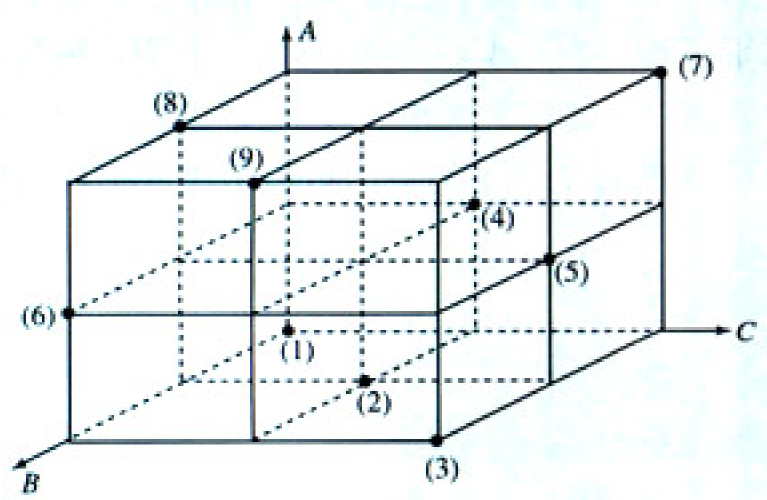


图 2-2

因此，用这种方法所得结果，在比较其好坏时，是单个试验作简单的对比，由于选点分散得很不均匀，很难从单个试验的对比中看出一个因素对结果影响的大小．

如果换一种选法：如图 2-2 所示的 (1)～(9) 九个试验点中（图中的黑点所示），平行于 A 轴的 9 条线，每一条线上

有一个试验点；平行于 B 轴的 9 条线，每一条线上有一个试验点；平行 C 轴的 9 条线，每条线上也有一个试验点．平行于 A 轴、B 轴，A 轴、C 轴，B 轴、C 轴的 9 个面，在每个面上各有 3 个试验点．

这 9 个试验点可以列成如表 2-1．

表 2-1

试验号＼因素	A	B	C	试验结果
1	A_1	B_1	C_1	f_1
2	A_1	B_2	C_2	f_2
3	A_1	B_3	C_3	f_3
4	A_2	B_1	C_2	f_4
5	A_2	B_2	C_3	f_5
6	A_2	B_3	C_1	f_6
7	A_3	B_1	C_3	f_7
8	A_3	B_2	C_1	f_8
9	A_3	B_3	C_2	f_9

表中 f_1，f_2，…，f_9 分别表示 9 次试验结果的指标．

A_1，A_2，A_3 与 B，C 的三个水平搭配情况为：

$$\begin{array}{ll}
 & \quad B \qquad\qquad\qquad\quad C \\
A_1 & \left\{\begin{array}{l} B_1 \text{——————————} C_1 \\ B_2 \text{——————————} C_2 \\ B_3 \text{——————————} C_3 \end{array}\right. \\
A_2 & \left\{\begin{array}{l} B_1 \text{——————————} C_2 \\ B_2 \text{——————————} C_3 \\ B_3 \text{——————————} C_1 \end{array}\right. \\
A_3 & \left\{\begin{array}{l} B_1 \text{——————————} C_3 \\ B_2 \text{——————————} C_1 \\ B_3 \text{——————————} C_2 \end{array}\right.
\end{array}$$

在 9 个试验中，因素 A 的三个水平 A_1，A_2，A_3 都重复了三次；在 A_1 水平的三个试验中，因素 B 的三个水平和因素 C 的三个水平各有一次．A_2，A_3 的三个试验中，也是 B 的三个水平和 C 的三个水平各有一次．也就是说，A 的三个水平 A_1，A_2，A_3，对因素 B 和 C 来讲，处于相似的状态下．大体上说，对 A 的每个水平的三个试验结果的平均值就反映了 A 的这个水平的试验结果．即

对 A_1 来讲，

$$\mathrm{I}_A=f_1+f_2+f_3,\quad \overline{\mathrm{I}}_A=\frac{\mathrm{I}_A}{3};$$

对 A_2 来讲，

$$\mathrm{II}_A=f_4+f_5+f_6,\quad \overline{\mathrm{II}}_A=\frac{\mathrm{II}_A}{3};$$

对 A_3 来讲，

$$\text{Ⅲ}_A=f_7+f_8+f_9,\ \overline{\text{Ⅲ}}_A=\frac{\text{Ⅲ}_A}{3},$$

$\overline{\text{Ⅰ}}_A$，$\overline{\text{Ⅱ}}_A$，$\overline{\text{Ⅲ}}_A$ 就分别反应了水平 A_1，A_2，A_3 对试验结果的影响，也就是说从$\overline{\text{Ⅰ}}_A$，$\overline{\text{Ⅱ}}_A$，$\overline{\text{Ⅲ}}_A$ 的大小就可以选择因素 A 的最优水平．比方说$\overline{\text{Ⅱ}}_A$ 最好，可选 A_2 作为 A 的最优水平．

对因素 B，C 可同样进行分析．比方说，对因素 B 来讲，$\overline{\text{Ⅰ}}_B$，$\overline{\text{Ⅱ}}_B$，$\overline{\text{Ⅲ}}_B$ 中，$\overline{\text{Ⅰ}}_B$ 最好，则可选 B_1 水平作为 B 的最优水平；对因素 C 来讲，$\overline{\text{Ⅰ}}_C$，$\overline{\text{Ⅱ}}_C$，$\overline{\text{Ⅲ}}_C$ 中，$\overline{\text{Ⅲ}}_C$ 最好，则可选 C_3 作为 C 的最优水平．从而就可得到各因素各水平的最优搭配：$A_2B_1C_3$．

此外，对各因素来讲，可看各因素所相应的 $\overline{\text{Ⅰ}}$，$\overline{\text{Ⅱ}}$，$\overline{\text{Ⅲ}}$ 的大小，三个值相差大的，说明该因素对结果的影响就大；相差小的，说明该因素对结果的影响就小．由此可判别该因素是主要因素还是次要因素，或是重要因素．

比方说，对因素 A 来讲，

$$\overline{\text{Ⅰ}}_A,\ \overline{\text{Ⅱ}}_A,\ \overline{\text{Ⅲ}}_A$$

三个值相互间最大的差记为 R_A；对因素 B 来讲有 R_B，对因素 C 来讲有 R_C．比较 R_A，R_B，R_C 的大小，最大的就是主要因素．例如，若

$$R_B>R_A>R_C,$$

则就可以说因素 B 是主要因素．

由此可以知道，用简单比较法，虽然试验的次数比较少，共进行 7 次试验，也能取得一定的效果，但从中得到的信息不多，只能得到一个较好的水平搭配．由于是单个数据的比较，所得到的水平搭配效果不一定是最好的．

用第二种选点的办法，试验点的分散是均匀的，搭配也比较均匀，可以进行综合比较，从而可得到最优水平的搭配，并能分析出因素的主次．

两种办法所得到的信息相差很多，效果也相差很大，这就是试验设计的结果．

试验设计是数理统计的一门重要的分支，它的主要内容是如何合理安排试验，以及试验后的数据分析．

试验设计所追求的目标之一就是用尽量少的部分试验来实现全部试验所要达到的目的．

试验设计作为相对独立的一门学科，既是应用数学的一个新的分支，也是试验优化的一个重要组成部分．20 世纪 20 年代，英国学者 R．A．Fisher 运用均衡排列的拉丁方，解决了长期未能解决的试验条件的不均匀问题，提出了方差分析方法，创立了“试验设计”(Design of Experiments)[1]．在试验设计发展的道路上，Fisher创立的传统试验设计是第一里程碑．正交表的构造和开发是第二里程碑，日本田口式正交试验设计法是突出的代表[2]，而我国研创的正交试验设计法同日本田口式正交表设计法相比，程序更简单，指导理论正确合理，优化效率高，教育推广和普及更为便利[3]，从而使多因素优化从欧美式

注

[1][2][3] 任露泉编著．试验优化设计与分析．第二版．北京：高等教育出版社，2003

的艰深方法中跳出来，演化成简单易行、行之有效的工作．它是试验设计的现代发展，为试验设计开拓了更加广阔的应用领域，为优质产品的设计和开发提供了非常有效的工具．

试验设计的方法很多，如利用拉丁方、正交表、均匀表等作为工具来设计试验方案．我们仅介绍正交试验设计方法．通过一些案例的分析，达到理解运用正交试验设计方法解决简单问题的过程，了解正交试验设计的思想和方法，并希望通过学习能运用这种方法思考和解决一些简单的实际问题．

练习

1. 在多因素情况下进行试验，为什么要进行试验设计？
2. 三因素三水平试验记为 3^3 试验，五因素二水平试验如何记法？三因素二水平试验又如何记法？
3. 3^5 试验是指几个因素几个水平的试验？
4. 对表 2-1 的 9 个试验，为什么 $\bar{\mathrm{I}}_A$，$\bar{\mathrm{II}}_A$，$\bar{\mathrm{III}}_A$ 分别反映了 A_1，A_2，A_3 对试验结果的影响，由此，就可由 $\bar{\mathrm{I}}_A$，$\bar{\mathrm{II}}_A$，$\bar{\mathrm{III}}_A$ 的大小，来选择 A 的最优的水平？你是如何理解的？
5. 对表 2-1 的 9 个试验，为什么从 R_A，R_B，R_C 的大小就能分辨出主要因素和次要因素？你是如何理解的？

2.2 什么是正交试验设计

从 2.1 节的 3^3 试验点的安排来看，表 2-1 中共有 9 行，表示 9 个试验搭配；共有 4 列，前面 3 列表示三个因素所取的各个水平．按照表中的安排，试验是分散均匀的，同时又是综合可比的．经过对试验结果的分析，可以找到各因素各水平的最好的搭配，以及各因素对试验结果影响的主次．

这样安排试验的表有以下两个特点：

1. 每一列中（即每个因素所取的各个水平）不同水平的次数是相同的．

第 1 列，因素 A 所取的各个水平，A_1 水平共 3 次，A_2 水平、A_3 水平也都各为 3 次．

第 2 列，第 3 列，因素 B、C 所取的各个水平，与因素 A 一样，各个水平都各取 3 次．

2. 每两列（不同因素）的各种不同水平搭配出现的次数相同．

如第一、二列，因素 A 和 B，它们的不同搭配有：

$$A_1B_1,\ A_1B_2,\ A_1B_3,$$
$$A_2B_1,\ A_2B_2,\ A_2B_3,$$
$$A_3B_1,\ A_3B_2,\ A_3B_3,$$

共有 9 种搭配，每一种搭配在表中各出现一次.

第一、三列，第二、三列的情况也一样.

具有这样两个特点的试验方案，各因素的各水平是均衡搭配的，也称这样的方案中因素间的各水平的搭配具有正交性.

由于搭配是均衡的，就可从中分析出每个因素对试验结果的影响. 从而就可从 3^3 试验的全部 27 个试验中，选出其一部分共 9 个试验便能够了解到全面的情况. 从这个意义上讲，这 9 个试验就代表了全部 27 个试验.

具有上面两个特点的表称为正交表；按照正交表来安排试验就称为正交试验设计.

正交表是试验设计的一个重要工具，它给出了试验设计的总体安排. 正交表是如何造出来的，我们不作介绍，仅把有关的正交表作一简单的介绍.

我们把表 2-1 中的表头“因素”换成“列号”，表头中的“A，B，C”换成“1，2，3”表示第 1，2，3 列. 把“A_1，A_2，A_3”，“B_1，B_2，B_3”，“C_1，C_2，C_3”都换成“1，2，3”，再增加一列，第 4 列，这样就可列成一张表，见表 2-2.

表 2-2

列号 / 试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

可以验证，这是一张正交表：

1. 每一列中“1”，“2”，“3”各出现 3 次.
2. 任意两列中不同水平的搭配出现的次数相同.

不同水平的搭配共有 9 种：

$$(1,1),(1,2),(1,3);$$
$$(2,1),(2,2),(2,3);$$
$$(3,1),(3,2),(3,3).$$

此 9 种搭配在任意两列中都出现一次.

因此，表 2-2 是一张正交表. 除表头和最左边一列外，它有 9 行，4 列. 每个因素都有三水平（每一列中的数字都是 1，2，3）. 这样的表记为 $L_9(3^4)$，其中 “L” 表示 “正交表”，“3” 表示三水平，“4” 表示最多可安排 4 个因素的试验，“9” 表示进行试验的次数.

一般的正交表在有关正交试验设计的书中都可查到.

常见的正交表有：

二水平：$L_4(2^3)$，$L_8(2^7)$，$L_{16}(2^{15})$，$L_{32}(2^{31})$，…；

三水平：$L_9(3^4)$，$L_{27}(3^{13})$，…；

四水平：$L_{16}(4^5)$，$L_{32}(4^9)$，…；

五水平：$L_{25}(5^6)$，….

本书最后列出了二水平和三水平的部分常用的正交表，供学习和在实践中使用.

在使用正交表安排试验时，正交表中的数字表示因素所取水平，表中最左边一列表示试验序号，最上面的一行的列号表示可安排的因素. 例如 $L_4(2^3)$ 见表 2-3.

表 2-3

列号 / 试验号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

此表可安排三因素二水平的四次试验. 设三因素为 A，B，C；每个因素有两个水平：A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2，按照正交表$L_4(2^3)$，具体安排如表 2-4.

表 2-4

因素 / 试验序号	A	B	C
1	A_1	B_1	C_1
2	A_1	B_2	C_2
3	A_2	B_1	C_2
4	A_2	B_2	C_1

四次试验的各因素各水平的搭配为：

$$A_1B_1C_1,\ A_1B_2C_2,\ A_2B_1C_2,\ A_2B_2C_1.$$

练习

1. 验证下表是否为正交表：

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

提示：(1) 检查每一列中不同的数字出现的次数是否相同；

(2) 检查任意两列中，数字的不同搭配所出现的次数是否相同.

2. 四因素三水平的试验，若要进行全试验共有几次试验？采用 $L_9(3^4)$ 来安排试验，共进行几次试验？

2.3 如何实施正交试验设计

以一个实例来说明如何使用正交表并实施正交试验设计.

例❶ 某五金厂在弹簧生产中，有时发生产品断裂现象，为提高弹簧的弹性指标，要做回火工艺试验.

注 ❶ 此实例选自《正交试验法在冶金工业中的应用》(东北工学院数学师资班编，冶金工业出版社，1977).

第一步，制定因素水平表.

试验项目就是做回火工艺试验，目标是提高弹性. 试验指标为弹性，要求越大越好.

试验项目和指标确定后，要找出影响指标的因素. 经理论和经验分析，要考察的因素有：回火温度 A；保温时间 B；工件质量 C.

考察的因素确定后，要估计各因素使“弹性”得到提高的可选范围. 经分析，各因素的范围是

A：440 ℃～500 ℃；

B：3 min～5 min；

C：7 kg～10.5 kg.

各因素的范围有了以后，要确定每个因素所取的水平．在因素 A 的范围内选三个水平：

$$A_1=440\ ℃,\ A_2=460\ ℃,\ A_3=500\ ℃.$$

其他因素 B 和 C 也选取三个水平：

$$B_1=3\ \text{min},\ B_2=4\ \text{min},\ B_3=5\ \text{min};$$

$$C_1=7.5\ \text{kg},\ C_2=9.0\ \text{kg},\ C_3=10.5\ \text{kg}.$$

制定因素水平表，见表 2-5.

表 2-5 因素水平表

因素 水平	A(℃)	B(min)	C(kg)
1	440	3	7.5
2	460	4	9.0
3	500	5	10.5

第二步，设计试验方案.

根据因素的个数，因数的水平，以及要考察的目标来选取正交表．此例中因素有三个，每个因素有三个水平，目标为弹性指标，可选取正交表 $L_9(3^4)$.

表 2-6 $L_9(3^4)$

列号 试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

此表可安排四因素三水平的试验 9 个．本例是 3^3 试验，可把 A，B，C 放在任意三列上，例如，放在第 1，2，3 列上．这一步叫表头设计，列成表如表 2-7.

表 2-7

列号	1	2	3	4
因素	A	B	C	

有了表头设计后即可列出试验方案．因素 A 安排在第 1 列，把第 1 列中的“1”，“2”，“3”，依次换成 A_1，A_2，A_3．因素 B 在第 2 列，把第 2 列中的“1”，“2”，“3”依次换成

B_1，B_2，B_3；因素 C 在第 3 列，把第 3 列中的“1”，“2”，“3”依次换成 C_1，C_2，C_3．最后加上一列为试验结果列．这样就可作出一个试验方案表．

表 2-8　回火试验方案表

试验号＼因素	回火温度（℃）A（1）	保温时间（min）B（2）	工体质量（kg）C（3）	试验指标（弹性）
1	440（A_1）	3（B_1）	7.5（C_1）	
2	440（A_1）	4（B_2）	9.0（C_2）	
3	440（A_1）	5（B_3）	10.5（C_3）	
4	460（A_2）	3（B_1）	9.0（C_2）	
5	460（A_2）	4（B_2）	10.5（C_3）	
6	460（A_2）	5（B_3）	7.5（C_1）	
7	500（A_3）	3（B_1）	10.5（C_3）	
8	500（A_3）	4（B_2）	7.5（C_1）	
9	500（A_3）	5（B_3）	9.0（C_2）	

第三步，列出试验结果分析计算表．

列出试验方案表后，就可按表中所列各水平搭配的试验进行试验，将各试验的结果填入最后一列相应试验的行中，然后列出试验结果分析计算表（表 2-9）．

表 2-9　试验结果分析计算表

试验号＼因素	A（℃）	B（min）	C（kg）	弹性指标
1	440	3	7.5	377
2	440	4	9.0	391
3	440	5	10.5	362
4	460	3	9.0	350
5	460	4	10.5	330
6	460	5	7.5	320
7	500	3	10.5	326
8	500	4	7.5	302
9	500	5	9.0	318
Ⅰ	$\text{Ⅰ}_A=1\ 130$	$\text{Ⅰ}_B=1\ 053$	$\text{Ⅰ}_C=999$	$T=3\ 076$
Ⅱ	$\text{Ⅱ}_A=1\ 000$	$\text{Ⅱ}_B=1\ 023$	$\text{Ⅱ}_C=1\ 059$	
Ⅲ	$\text{Ⅲ}_A=946$	$\text{Ⅲ}_B=1\ 000$	$\text{Ⅲ}_C=1\ 018$	
$\bar{\text{Ⅰ}}$	$\bar{\text{Ⅰ}}_A\approx377$	$\bar{\text{Ⅰ}}_B=351$	$\bar{\text{Ⅰ}}_C=333$	
$\bar{\text{Ⅱ}}$	$\bar{\text{Ⅱ}}_A\approx333$	$\bar{\text{Ⅱ}}_B=341$	$\bar{\text{Ⅱ}}_C=353$	
$\bar{\text{Ⅲ}}$	$\bar{\text{Ⅲ}}_A\approx315$	$\bar{\text{Ⅲ}}_B\approx333$	$\bar{\text{Ⅲ}}_C\approx339$	
R	$R_A\approx62$	$R_B\approx18$	$R_C=20$	

试验结果分析计算表与试验方案表上半部分相同，下半部分多了Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ；$\overline{\text{Ⅰ}}$，$\overline{\text{Ⅱ}}$，$\overline{\text{Ⅲ}}$；R 共 7 行，此 7 行用来填写经过计算后所得的数据.

通过计算要解决下面两个问题：

1. 三个因素中哪个因素是主要因素，哪个因素是次要因素，就是要找出对试验结果的指标影响大的因素.

2. 找出好的各因素的不同水平搭配，以得到好的工艺条件．就是找出每个因素取什么水平时，试验的指标最好？

从试验结果看，9 个试验中，第 2 号试验的弹性指标（391）最好．即各因素的各水平搭配为 $A_1B_2C_2$ 时，在所选 9 个试验中结果指标是最好的．问题是 $A_1B_2C_2$ 是否是因素 A、B、C 的各水平搭配的最好搭配呢？为寻找最好搭配，还要进行下面的计算和分析.

第四步，对试验结果进行计算.

从表中看，因素 A，取 A_1 水平的试验有 1，2，3 号试验．将这三个试验结果指标之和记为 Ⅰ_A，

$$\text{Ⅰ}_A=377+391+362=1\ 130.$$

同样，对因素 A 的 A_2 水平，A_3 水平可计算出

$$\text{Ⅱ}_A=350+330+320=1\ 000,$$

$$\text{Ⅲ}_A=326+302+318=946.$$

对应 A_1 水平的试验共有 1，2，3 号试验，共 3 个试验，取 Ⅰ_A 的平均值，得（取整数）

$$\overline{\text{Ⅰ}}_A=\frac{\text{Ⅰ}_A}{3}\approx 377.$$

同样，可计算出 $\overline{\text{Ⅱ}}_A$，$\overline{\text{Ⅲ}}_A$，

$$\overline{\text{Ⅱ}}_A\approx 333,$$

$$\overline{\text{Ⅲ}}_A\approx 315.$$

类似地，对因素 B，C，可计算出

$$\text{Ⅰ}_B=1\ 053,\quad \text{Ⅱ}_B=1\ 023,\quad \text{Ⅲ}_B=1\ 000;$$

$$\overline{\text{Ⅰ}}_B=351,\quad \overline{\text{Ⅱ}}_B=341,\quad \overline{\text{Ⅲ}}_B\approx 333.$$

$$\text{Ⅰ}_C=999,\quad \text{Ⅱ}_C=1\ 059,\quad \text{Ⅲ}_C=1\ 018;$$

$$\overline{\text{Ⅰ}}_C=333,\quad \overline{\text{Ⅱ}}_C=353,\quad \overline{\text{Ⅲ}}_C\approx 339.$$

最后，计算 R_A，R_B，R_C：

R_A 为 $\overline{\text{Ⅰ}}_A$，$\overline{\text{Ⅱ}}_A$，$\overline{\text{Ⅲ}}_A$ 两两相差的最大数．即

$$R_A=\max\{|\overline{\text{Ⅰ}}_A-\overline{\text{Ⅱ}}_A|,\ |\overline{\text{Ⅰ}}_A-\overline{\text{Ⅲ}}_A|,\ |\overline{\text{Ⅱ}}_A-\overline{\text{Ⅲ}}_A|\}\approx 62.$$

$$R_B=\max\{|\overline{\text{Ⅰ}}_B-\overline{\text{Ⅱ}}_B|,\ |\overline{\text{Ⅰ}}_B-\overline{\text{Ⅲ}}_B|,\ |\overline{\text{Ⅱ}}_B-\overline{\text{Ⅲ}}_B|\}\approx 18.$$

$$R_C=\max\{|\overline{\text{Ⅰ}}_C-\overline{\text{Ⅱ}}_C|,\ |\overline{\text{Ⅰ}}_C-\overline{\text{Ⅲ}}_C|,\ |\overline{\text{Ⅱ}}_C-\overline{\text{Ⅲ}}_C|\}=20.$$

还要计算 T，即 9 个试验结果指标的总和：

$$T = 377+391+362+350+330+320+326+302+318$$
$$=3\ 076.$$

将计算所得的值填入试验结果分析计算表中.

第五步，作图.

由于正交表的各因素各水平之间是均衡搭配的，从而可进行综合比较. 因此，用试验结果计算出的 $\overline{\mathrm{I}}_A$，$\overline{\mathrm{II}}_A$，$\overline{\mathrm{III}}_A$ 的数值，大体上表示了因素 A 的三个不同水平对结果指标的影响. 同样，$\overline{\mathrm{I}}_B$，$\overline{\mathrm{II}}_B$，$\overline{\mathrm{III}}_B$ 的数值也大体上表示了因素 B 的三个不同水平对结果指标的影响；$\overline{\mathrm{I}}_C$，$\overline{\mathrm{II}}_C$，$\overline{\mathrm{III}}_C$ 的数值也大体上表示了因素 C 的三个不同水平对结果指标的影响. 可用下面的图（图 2-3）将此三个因素对结果指标的影响表示出来.

从图 2-3 中可直观地看出，在各因素所取值的范围内，回火温度越低越好，保温时间越短越好，工件质量以9.0 kg为最好，可以认为最优水平搭配为 $A_1B_1C_2$.

第六步，分析因素的主次.

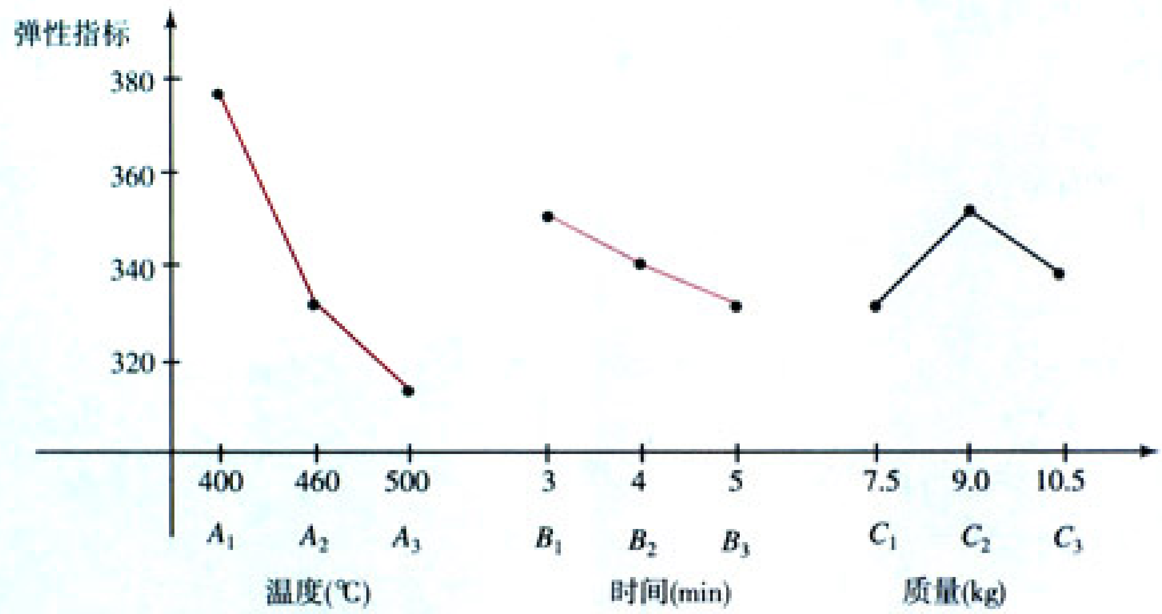


图 2-3

从图 2-3 中看，因素 A，B，C 对指标的影响中，上、下幅度大的就是对指标影响大的因素.

因素 A 对指标影响的幅度 $R_A \approx 377-315=62$，

因素 B 对指标影响的幅度 $R_B \approx 351-333=18$，

因素 C 对指标影响的幅度 $R_C = 353-333=20$.

使弹性指标变化幅度大的因素就是主要因素，变化幅度小的因素就是次要因素.

由于

$$R_A > R_C > R_B,$$

因而因素 A 是主要因素，因素 B 是次要因素.

第七步，选取最优水平的搭配.

由第五步得到最优水平搭配为 $A_1B_1C_2$，但 $A_1B_1C_2$ 并不在所做的 9 个试验之内. 这就是正交试验设计方法的优点，所找出的最优水平搭配不一定在 9 个试验点之中.

第八步，验证试验.

在回火试验的9个试验中，从试验的结果指标看，最好的试验结果是2号试验，其水平搭配为$A_1B_2C_2$，其弹性指标为391，是9个试验中最好的. 而从前面的计算和分析得到的最好水平搭配为$A_1B_1C_2$，这$A_1B_1C_2$不在所做的9个试验之中.

因此，还要对$A_1B_1C_2$进行试验验证. 对$A_1B_1C_2$进行试验，其结果指标为400，高于$A_1B_2C_2$试验结果指标391. 证实了$A_1B_1C_2$是最好的水平搭配.

这就是正交试验设计以及其实施的全过程.

例❶　有机锡合成试验.

某单位在原来经验的基础上对有机锡（一种塑料稳定剂）合成条件做进一步的研究，目的是提高有机锡的产率.

经分析，决定对催化剂种类、用量、配比、溶剂用量及反应时间五个对产率可能有影响的因素进行考察，每一个因素都比较两种不同的条件：

考察的因素	试验比较的条件
A. 催化剂的种类	A_1＝甲，A_2＝乙
B. 催化剂的用量(g)	$B_1=1$，$B_2=1.5$
C. 配比	$C_1=\frac{2.5}{1}$，$C_2=\frac{2.6}{1}$
D. 溶剂用量(mL)	$D_1=10$，$D_2=20$
E. 反应时间(h)	$E_1=2$，$E_2=1.5$

按上面提出的步骤进行设计和计算：

第一步，制定因素水平表.

注　❶ 此例选自《正交设计法》（北京大学数学力学系概率统计组编，石油化学工业出版社，1976）.

表 2-10

因素 / 水平	A	B (g)	C	D (mL)	E (h)
1	甲 (A_1)	1 (B_1)	$\frac{2.5}{1}$ (C_1)	10 (D_1)	2 (E_1)
2	乙 (A_2)	1.5 (B_2)	$\frac{2.6}{1}$ (C_2)	20 (D_2)	1.5 (E_2)

第二步，设计试验方案.

此试验为2^5试验，选正交表，可用$L_8(2^7)$.

表 2-11　$L_8(2^7)$

列号 / 试验号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2

续表

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

此表共有 7 列，可安排 7 个因素．一般地，可以在这 7 列中任选 5 列来安排新考虑的 5 个因素．我们把 5 个因素安排在 1，2，4，5，6 列．因此，可列出表头设计（表 2-12）．

表 2-12　表头设计

列号	1	2	3	4	5	6	7
因素	A	B		C	D	E	

根据表头设计列出试验方案表（表 2-13）．

表 2-13　试验方案表

试验号 \ 因素	1	2	3	4	5	6	7	产率(%)
	A	B		C	D	E		
1	A_1	B_1	1	C_1	D_1	E_1	1	92.3
2	A_1	B_1	1	C_2	D_2	E_2	2	90.4
3	A_1	B_2	2	C_1	D_1	E_2	2	87.3
4	A_1	B_2	2	C_2	D_2	E_1	1	88.0
5	A_2	B_1	2	C_1	D_2	E_1	2	87.3
6	A_2	B_1	2	C_2	D_1	E_2	1	84.8
7	A_2	B_2	1	C_1	D_2	E_2	1	83.4
8	A_2	B_2	1	C_2	D_1	E_1	2	84.0

按试验方案表进行试验，将结果填在最后一列产率相应的行中．

第三、四步，列出试验结果分析计算表并对试验结果进行计算（表 2-14）．

表 2-14　试验结果分析计算表

试验号 \ 因素	1	2	3	4	5	6	7	产率(%)
	A	B		C	D	E		
1	A_1	B_1	1	C_1	D_1	E_1	1	92.3
2	A_1	B_1	1	C_2	D_2	E_2	2	90.4
3	A_1	B_2	2	C_1	D_1	E_2	2	87.3

续表

试验号 \ 因素	1	2	3	4	5	6	7	产率(%)
	A	B		C	D	E		
4	A_1	B_2	2	C_2	D_2	E_1	1	88.0
5	A_2	B_1	2	C_1	D_2	E_1	2	87.3
6	A_2	B_1	2	C_2	D_1	E_2	1	84.8
7	A_2	B_2	1	C_1	D_2	E_2	1	83.4
8	A_2	B_2	1	C_2	D_1	E_1	2	84.0
Ⅰ	358	354.8	350.1	350.3	348.4	351.6	348.5	697.5
Ⅱ	339.5	342.7	347.4	347.2	349.1	345.9	349.0	
$\overline{\text{Ⅰ}}$	89.5	88.7	87.5	87.6	87.1	87.9	87.1	
$\overline{\text{Ⅱ}}$	84.9	85.7	86.9	86.8	87.3	86.5	87.3	
R	4.6	3.0	0.6	0.8	0.2	1.4	0.2	

注：①表中填有因素的列为此因素的两个水平之间的对比，未填因素的列（第 3 列和第 7 列）的对比在初学分析时可以不去管它.

②此表上半部分与表 2-12 相同，这是试验方案表和试验结果分析计算表两表合为一张表.

第五步，作图.

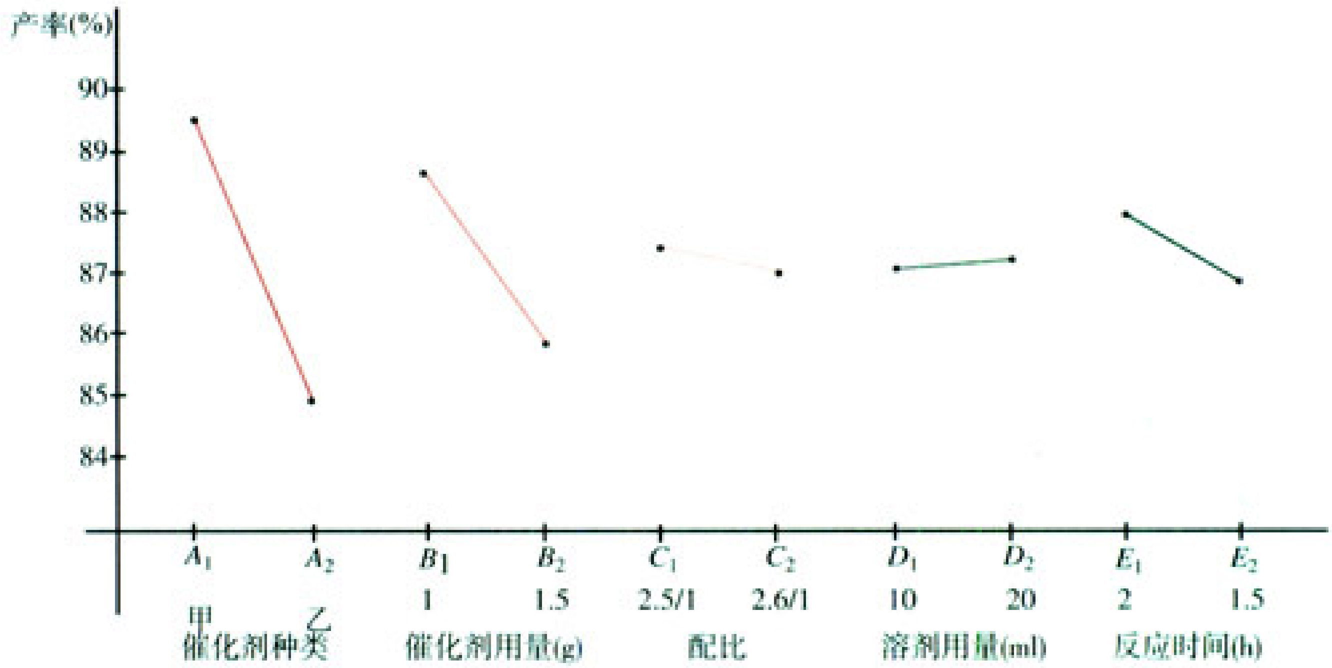


图 2-4

由图 2-4 可看出，A 取 A_1，B 取 B_1，C 取 C_1，D 取 D_2，E 取 E_1 为好. 最好的生产条件为 $A_1B_1C_1D_2E_1$.

第六步，分析因素的主次.

由于 $R_A\approx4.6$，$R_B\approx3.0$，$R_C\approx0.8$，$R_D\approx0.2$，$R_E\approx1.4$，所以有

$$R_A>R_B>R_E>R_C>R_D.$$

A 是主要因素，B，E 是重要因素，C，D 是次要因素.

第七步，选取最好的水平搭配.

经过分析比较，各水平搭配以 $A_1B_1C_1D_2E_1$ 为最好，但由于 D 为次要因素，对产率的影响很小. 若从成本等其他因素来考虑，如果 D_1 比 D_2 成本低，或其他指标为优时，在生产中就可取水平搭配为 $A_1B_1C_1D_1E_1$，这样又照顾到其他指标，同时对产率的影响也很小.

以上就是正交试验设计实施的步骤. 在前面的例中还有第八步，验证试验. 如果取 $A_1B_1C_1D_2E_1$ 作为最好水平搭配，它不在已做过的 8 个试验之中，就应作验证试验.

总之，正交试验设计所达到的目的有两个：

1. 找出因素的主次；
2. 寻找各因素各水平的最好搭配.

练习

1. 实施正交试验设计一般有哪几个步骤？正交试验设计实施后达到哪些目的？
2. 根据下列例中的情况选择正交表，并作出表头设计：

(1) 为了提高粘棉混纺纱的质量——减少棉结粒数，考察如下因素和水平的试验：

因素 水平	A 金属针布	B 产量水平（kg）	C 锡林转速（r/min）
1	日本产	6	238
2	青岛产	10	320

(2) 选择提高活塞外圆光洁度的磨削参数试验中，考察如下因素水平的试验：

因素 水平	A 导轮转速（r/min）	B 导轮倾斜角（度）	C 金钢钻水平偏移（mm）	D 导轮修正器水平（度）
1	25	2.2	9	1.8
2	30	2.5	10	2
3	35	2.8	11	2.2

附录

常用正交表

1. $L_4(2^3)$

列号 / 行号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

2. $L_8(2^7)$

列号 / 行号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

3. $L_{16}(2^{15})$

列号 行号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

4. $L_9(3^4)$

列号 行号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

注：任两列的交互列为另外两列.

5. $L_{27}(3^{13})$

列号 / 行号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	3	2	3	2	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	1	3	1	3	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	2	1	2	1	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	2	3	2	3	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	3	1	3	1	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	1	2	1	2	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	1	2	3	3	2
11	2	1	2	3	2	3	1	2	2	3	1	1	3
12	2	1	2	3	3	1	2	3	3	1	2	2	1
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	3	2	1	1
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	1	3	2	2
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	2	1	3	3
16	2	3	1	2	1	2	3	3	2	1	1	2	3
17	2	3	1	2	2	3	1	1	3	2	2	3	1
18	2	3	1	2	3	1	2	2	1	3	3	1	2
19	3	1	3	2	1	3	2	1	1	3	2	2	3
20	3	1	3	2	2	1	3	2	2	1	3	3	1
21	3	1	3	2	3	2	1	3	3	2	1	1	2
22	3	2	1	3	1	3	2	2	3	1	1	3	2
23	3	2	1	3	2	1	3	3	1	2	2	1	3
24	3	2	1	3	3	2	1	1	2	3	3	2	1
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	2	3	1	1

6. $L_{16}(4^5)$

列号 行号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	1	2	3	4
6	2	2	1	4	3
7	2	3	4	1	2
8	2	4	3	2	1
9	3	1	3	4	2
10	3	2	4	3	1
11	3	3	1	2	4
12	3	4	2	1	3
13	4	1	4	2	3
14	4	2	3	1	4
15	4	3	2	4	1
16	4	4	1	3	2

主要参考书目

1. 华罗庚. 优选学. 北京：科学出版社，1981

2. D. J. 华尔德，C. S. 皮特勒. 优选法基础. 龙云程译. 北京：科学出版社，1978

3. 中国科学院数学研究所运筹室优选法小组. 优选法. 北京：科学出版社，1975

4. 北京市优选法应用推广小组. 优选法及其应用. 北京：北京人民出版社，1972

5. 中国科学院数学研究所统计组. 常用数理统计方法. 北京：科学出版社，1973

6. 北京大学数学力学系概率统计组. 正交设计法. 北京：石油化学工业出版社，1976

7. 东北工学院数学师资班. 正交试验法在冶金工业中的应用. 北京：冶金工业出版社，1977

8. 任露泉. 试验优化设计与分析. 第二版. 北京：高等教育出版社，2003

部分中英文词汇对照表

优选法	optimization
精确度	precision
分数法	fraction method
对分法	bisection method
斐波那契数列	Fibonacci sequence
黄金分割	golden section
网络法	network method
对折法	folio method
平行线法	parallel method
坐标轮换法	coordinate transformation method
爬山法	mountain pass method
试验设计	experimental design
正交表	orthogonal layout

后 记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持。在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志。

本套高中数学实验教科书由丁尔陞教授、李建才教授、陈宏伯编审等组成编写指导委员会，负责指导教科书的编写工作。教科书编写的总指导为丁尔陞教授，主编为高存明编审。参加本套教科书编写的其他成员有：罗声雄、万庆炎、邱万作、郭鸿、韩际清、罗才忠、房艮孙、江守礼、王殿军、黄铎、陈研、高尚华、张爱和、张增喜、张润琦、朱铉道、范登晨、段发善、魏榕彬、徐望根、邵光砚、王人伟、曹惠中、秦静、许玉铭、李亘岸、杨静、刘长明、闫燕南、王旭刚、陈亦飞等。山东省的尹玉柱、秦玉波、王文清、颜长安、杨冠夏、于善胜、田明泉、邵丽云、韩相和、张颉、尚凡青、杨长智、常传洪，广东省的郭伟才、刘会金、梁锡焜、郑其中、何洌、罗建中和上海市的阴洪生等第一线教师审读了书稿，提出了许多宝贵意见。这套教科书是众多专家、学者和教师集体智慧的结晶。在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意。

我们还要感谢使用本套教科书的实验区的师生们，希望你们在使用本套教科书的过程中，能够及时把意见和建议反馈给我们，对此，我们将深表谢意。让我们携起手来，共同完成教材建设工作。我们的联系方式如下：

电话：010－58758333

E-mail：jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社
课程教材研究所　中学数学教材实验研究组