第 11.1 节 反常积分的概念

1. 讨论下列无穷积分是否收敛？若收敛，则求其值：

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$;　(6) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx$;

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \sin x \mathrm{d}x$;　　　(8) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛？若收敛，则求其值：

(1) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$；　　(2) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$；

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$;　　(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(5) $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x - x^2}}$;　　(8) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$.

3. 举例说明：瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛时，$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$不一定收敛.

4. 举例说明：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛且$f$在$[a, +\infty)$上连续时，不一定有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. 证明：若$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，且存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则$A = 0$.

6. 证明:若 f 在 $[a,+\infty)$ 上可导,且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

第 11.2 节 无穷积分的性质和收敛判别

1. 证明定理 11.2 及其推论 1.

2. 设 f 与 g 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，对任何 $u>a$，它们在 $[a,u]$ 上都可积. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g^2(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]^2\,dx$ 也都收敛.

3. 设f,g,h是定义在$[a,+\infty)$上的三个连续函数，且成立不等式$h(x)\leq f(x)\leq g(x)$. 证明：

(1) 若$\int_a^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$都收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

(2) 又若$\int_a^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=A$，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=A$.

4. 讨论下列无穷积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1-e^x}dx$;

(3) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;　　　　(4) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^{3}}dx$;

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$; (6) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x\,(n,m \geqslant 0)$.

5. 讨论下列无穷积分为绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\mathrm{d}x$; (4) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$.

6. 举例说明：$\int_a f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a f^2(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛；$\int_a f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛时，$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 也不一定收敛.

7. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.

8. 证明：若 f 是 $[a,+\infty)$ 上的单调函数，且 $\int^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim f(x)=0$，且 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$，$x\to+\infty$.

9. 证明:若 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

10. 利用狄利克雷判别法证明阿贝尔判别法.

第 11.3 节 瑕积分的性质与收敛判别

1. 写出性质 3 的证明.

2. 写出定理 11.6 及其推论 1 的证明.

3. 讨论下列瑕积分的收敛性：

(1) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$；　　(2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$；

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$;　　　　(4) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$;

(5) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1 - x^3} dx$;　　(6) $\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$;

(7) $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\sin\frac{1}{x}dx$;　　(8) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$.

4. 计算下列瑕积分的值(其中 n 为正整数)：

(1) $\int_0^1 (\ln x)^n dx$；　　(2) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$.

5. 证明瑕积分 $J = \int_0 \ln(\sin x)\,dx$ 收敛，且 $J = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.（提示：利用 $\int_0 \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$，并将它们相加.）

6. 利用上题结果，证明：

(1) $\int_0^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)\,d\theta = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$；

(2) $\int_0^{\pi} \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} d\theta = 2\pi \ln 2.$

7. 写出定理 11.7 和 11.8 的证明.