

第 12.1 节 级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性, 并求其和:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots;$$

$$(2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots;$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

2. 证明:若级数 $\sum u_n$ 发散, $c \neq 0$, 则 $\sum cu_n$ 也发散.

加群:882056847或826633750

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散, 试问 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散吗? 又若 u_n 与 v_n ($n=1, 2, \dots$) 都是非负数, 则能得出什么结论?

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

4. 证明:若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

5. 证明: 若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 则

(1) 级数 $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 发散;

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时, 级数 $\sum \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4,5 题的结果求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)};$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)^2}$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n};$

(2) $\sum \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2+1};$

加群:882056847或826633750。

$$(3) \sum \frac{(-1)^n}{n};$$

$$(4) \sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}.$$

加群:882056847或826633750

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

8. 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是:任给正数 ε , 存在某正整数 N , 对一切 $n > N$ 总有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon.$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

9. 举例说明:若级数 $\sum u_n$ 对每个固定的 p 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = 0,$$

此级数仍可能不收敛.

10. 设级数 $\sum u_n$ 满足:加括号后级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$ 收敛 ($n_1 = 0$), 且在同一括号中的 $u_{n_k+1}, u_{n_k+2}, \cdots, u_{n_{k+1}}$ 符号相同, 证明 $\sum u_n$ 亦收敛.

第 12.2 节 正项级数

1. 应用比较原则判别下列级数的敛散性：

$$(1) \sum \frac{1}{n^2+a^2};$$

$$(2) \sum 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$(3) \sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n};$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(5) \sum \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right);$$

$$(6) \sum \frac{1}{n\sqrt{n}};$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(7) \sum (\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 1);$$

$$(8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(9) \sum (a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2) \quad (a > 0);$$

$$(10) \sum \frac{1}{n^{2n \sin \frac{1}{n}}}.$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

2. 用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!};$$

$$(2) \sum \frac{(n+1)!}{10^n};$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

$$(3) \sum \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n ;$$

$$(4) \sum \frac{n!}{n^n} ;$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(5) \sum \frac{n^2}{2^n};$$

$$(6) \sum \frac{3^n \cdot n!}{n^n};$$

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

(7) $\sum \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ (其中 $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), $a_n, b, a > 0$, 且 $a \neq b$).

私聊群三拉进题目辅导会员群。
加群:882056847或826633750。教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

3. 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 为正项级数, 且存在正数 N_0 , 对一切 $n > N_0$, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

证明: 若级数 $\sum v_n$ 收敛, 则级数 $\sum u_n$ 也收敛; 若 $\sum u_n$ 发散, 则 $\sum v_n$ 也发散.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

4. 设正项级数 $\sum a_n$ 收敛, 证明 $\sum a_n^2$ 亦收敛; 试问反之是否成立?

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

5. 设 $a_n \geq 0, n=1, 2, \dots$. 且 $|na_n|$ 有界, 证明 $\sum a_n^2$ 收敛.

6. 设级数 $\sum a_n^2$ 收敛, 证明 $\sum \frac{a_n}{n}$ ($a_n > 0$) 也收敛.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

7. 设正项级数 $\sum u_n$ 收敛, 证明级数 $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 也收敛.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

私聊群:拉进题目辅导会员群。

8. 利用级数收敛的必要条件,证明下列等式:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{a^{2n}} = 0 \quad (a > 1).$$

9. 用积分判别法讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum \frac{1}{n^2+1};$$

$$(2) \sum \frac{n}{n^2+1};$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)^2}$$

$$(4) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln \ln n)^q}$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

10. 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum \frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$;

(2) $\sum \frac{1}{1+a^n} \ (a>1)$;

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

(3) $\sum \frac{n \ln n}{2^n};$

(4) $\sum \frac{n! 2^n}{n^n};$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466,

加群:882056847或826633750。

博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

$$(5) \sum \frac{n! 3^n}{n^n};$$

$$(6) \sum \frac{1}{3^{n^n}};$$

$$(7) \sum \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \quad (x>0).$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

11. 设 $\{a_n\}$ 为递减正项数列, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

私聊群:拉进题目辅导会员群。

12. 用拉贝判别法判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1};$$

$$(2) \sum \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (x>0).$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

13. 用根式判别法证明级数 $\sum 2^{-n}(-1)^n$ 收敛, 并说明比式判别法对此级数无效.

14. 求下列极限(其中 $p > 1$):

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \right];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{p^{2n}} \right).$$

15. 设 $a_n > 0$, 证明数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum a_n$ 同时收敛或同时发散.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

第 12.3 节 一般项级数

1. 下列级数哪些是绝对收敛, 条件收敛或发散的:

(1) $\sum \frac{\sin nx}{n!};$

(2) $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1};$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(3) \sum \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}};$$

$$(4) \sum (-1)^n \sin \frac{2}{n};$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(5) \sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right);$$

$$(6) \sum \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{n+1};$$

私聊群主拉取题目辅导会员群。
加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(7) \sum (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n;$$

$$(8) \sum n! \left(\frac{x}{n} \right)^n.$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

2. 应用阿贝尔判别法或狄利克雷判别法判断下列级数的收敛性：

$$(1) \sum \frac{(-1)^n x^n}{n(1+x^n)} \quad (x > 0);$$

$$(2) \sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}, x \in (0, 2\pi) \quad (\alpha > 0);$$

$$(3) \sum (-1)^n \frac{\cos^2 n}{n}$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

3. 设 $a_n > 0, a_n > a_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 证明级数

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

是收敛的.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

4. 设 p_n, q_n 如(8)式所定义. 证明:若 $\sum u_n$ 条件收敛, 则级数 $\sum p_n$ 与 $\sum q_n$ 都是发散的.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

5. 写出下列级数的乘积:

$$(1) \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1} \right); \quad (2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

6. 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$ 绝对收敛, 且它们的乘积等于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$ 。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

7. 重排级数 $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, 使它成为发散级数.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

8. 证明: 级数 $\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.