第 2.1 节数列极限概念

1. 设 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$, $n=1,2,\cdots,a=0$.

(1) 对下列 ε 分别求出极限定义中相应的 N：

$$\varepsilon_1=0.1,\quad \varepsilon_2=0.01,\quad \varepsilon_3=0.001;$$

(2) 对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 可找到相应的 N,这是否证明了 a_n 趋于0? 应该怎样做才对;

(3) 对给定的 ε 是否只能找到一个 N?

2. 按 ε–N 定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$　$(a>1)$.

3. 根据例 2，例 4 和例 5 的结果求出下列极限，并指出哪些是无穷小数列：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}$； (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}$； (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

4. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则对任一正整数 k，有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

5. 试用定义 1′证明：

(1) 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 不以 1 为极限；(2) 数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 发散.

6. 证明定理 2.1，并应用它证明数列$\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限是 1.

7. 在下列数列中哪些数列是有界数列、无界数列以及无穷大数列：

(1) $\{[1+(-1)^n]\sqrt{n}\}$；(2) $\{\sin n\}$；(3) $\left\{\dfrac{n^2}{n-\sqrt{5}}\right\}$；(4) $\{2^{(-1)^n n}\}$.

8. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 当且仅当 a 为何值时反之也成立？

9. 按 $\varepsilon-N$ 定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，其中

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, & n\text{ 为偶数},\\[2ex] \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

10. 设 $a_n\neq0$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$.

第 2.2 节收敛数列的性质

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10})$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $a<b$. 证明：存在正数 N，使得当 $n>N$ 时有 $a_n<b_n$.

3. 设 $\{a_n\}$ 为无穷小数列，$\{b_n\}$ 为有界数列，证明：$\{a_nb_n\}$ 为无穷小数列.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

5. 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中一个是收敛数列，另一个是发散数列. 证明$\{a_n\pm b_n\}$是发散数列. 又问$\{a_nb_n\}$和$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}(b_n\neq 0)$是否必为发散数列？

6. 证明以下数列发散：

(1) $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$； (2) $\{n^{(-1)^n}\}$； (3) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{4}\right\}$.

7. 判断以下结论是否成立(若成立,说明理由;若不成立,举出反例)：

(1) 若$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛,则$\{a_n\}$收敛;

(2) 若$\{a_{3k-2}\}$,$\{a_{3k-1}\}$和$\{a_{3k}\}$都收敛,且有相同极限,则$\{a_n\}$收敛.

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]$, $0<\alpha<1$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^{2})\cdots(1+\alpha^{2^{n}})$, $|\alpha|<1$.

9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数,证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

10. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$;

(2) 若 $a>0, a_n>0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

第 2.3 节数列极限存在的条件

1. 利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$；　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

2. 试问下面的解题方法是否正确：

求$\lim\limits_{n\to\infty}2^n$.

解　设$a_n=2^n$及$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 由于$a_n=2a_{n-1}$，两边取极限$(n\to\infty)$得$a=2a$，所以$a=0$.

3. 证明下列数列极限存在并求其值：

(1) 设$a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$，$n=1,2,\cdots$；

(2) 设$a_1=\sqrt{c}$ $(c>0)$，$a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$，$n=1,2,\cdots$；

(3) $a_n=\frac{c^n}{n!}$ $(c>0)$，$n=1,2,\cdots$.

4. 利用$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$为递增数列的结论，证明$\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right\}$为递增数列.

5. 应用柯西收敛准则，证明以下数列$\{a_n\}$收敛：

(1) $a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$;　　(2) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

6. 证明：若单调数列$\{a_n\}$含有一个收敛子列，则$\{a_n\}$收敛.

7. 证明:若 $a_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

8. 证明:若 $\{a_n\}$ 为递增(递减)有界数列,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n\}\ (\inf\{a_n\}).$$

又问逆命题成立否?

9. 利用不等式

$$b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a),\ b>a>0$$

证明:$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 为递减数列,并由此推出 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 为有界数列.

10. 证明：$\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right|<\frac{3}{n}$.

11. 给定两正数 a_1 与 $b_1(a_1>b_1)$，作出其等差中项 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 与等比中项 $b_2=\sqrt{a_1b_1}$，一般地令

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ n=1,2,\cdots.$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 皆存在且相等.

12. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列，记

$$\bar{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\ \underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}.$$

证明：(1) 对任何正整数 n，$\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_n$；

(2) $\{\bar{a}_n\}$ 为递减有界数列，$\{\underline{a}_n\}$ 为递增有界数列，且对任何正整数 n,m 有 $\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_m$；

(3) 设 $\bar{a}$ 和 $\underline{a}$ 分别是 $\{\bar{a}_n\}$ 和 $\{\underline{a}_n\}$ 的极限，则 $\bar{a}\geqslant\underline{a}$；

(4) $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\bar{a}=\underline{a}$.