第 3.1 节函数极限概念

1. 按定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5}{x}=6$;

(2) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-6x+10)=2$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1$;

(4) $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0$;

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

2. 根据定义 2 叙述 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，证明 $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=A$.

4. 证明：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$. 当且仅当$A$为何值时反之也成立？

5. 证明定理 3.1.

6. 讨论下列函数在$x\to 0$时的极限或左、右极限：

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$；　　(2) $f(x)=[x]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x^2, & x<0.\end{cases}$

7. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,证明 $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=A$.

8. 证明：对黎曼函数 $R(x)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0, x_0\in[0,1]$（当 $x_0=0$ 或 1 时,考虑单侧极限).

第 3.2 函数极限的性质

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}2(\sin x-\cos x-x^2)$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-1)^3+(1-3x)}{x^2+2x^3}$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$ (n,m 为正整数)；

(6) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}$ ($a>0$)；

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

2. 利用迫敛性求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\cos x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-4}$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$. 证明：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$（当 $B\neq0$ 时）.

4. 设

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n},\ a_0\neq0,b_0\neq0,m\leqslant n,$$

试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

5. 设 $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 证明

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A},$$

其中 $n\geqslant 2$ 为正整数.

6. 证明 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1\ (0<a<1)$.

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$.

(1) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 上有 $f(x)<g(x)$, 问是否必有 $A<B$? 为什么?

(2) 证明: 若 $A>B$, 则在某 $U^\circ(x_0)$ 上有 $f(x)>g(x)$.

8. 求下列极限(其中 n 皆为正整数):

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\frac{1}{1+x^n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\frac{1}{1+x^n}$;

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{[x]}{x}$ (提示:参照例 1).

9. (1) 证明:若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$ 存在,试问是否成立 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$?

第 3.3 函数极限存在的条件

1. 叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的归结原则，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

2. 设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的增(减)函数. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 f 在 $[a,+\infty)$ 上有上(下)界.

3. (1) 叙述极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 的柯西准则；

(2) 根据柯西准则叙述 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在的充要条件，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 不存在.

4. 设 f 在 $U^\circ(x_0)$ 内有定义. 证明：若对任何数列 $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在，则所有这些极限都相等.

5. 设 f 为 $U^\circ(x_0)$ 上的递增函数. 证明：$f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在，且

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U^\circ_-(x_0)}f(x),\quad f(x_0+0)=\inf_{x\in U^\circ_+(x_0)}f(x).$$

6. 设 $D(x)$ 为狄利克雷函数，$x_0\in\mathbf{R}$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.

7. 证明：若 f 为周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

8. 证明定理 3.9.

第 3.4 两个重要的极限

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^{2}}}{1-\cos x}$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$ （α 为给定实数）；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$（$\alpha,\beta$ 为给定实数）.

3. 证明：$\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right]\right\}=1.$

4. 利用归结原则计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

第 3.5 无穷小量与无穷大量

1. 证明下列各式：

(1) $2x-x^2=O(x)\ (x\to0)$；　　(2) $x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})\ (x\to0^+)$；

(3) $\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to 0)$;

(4) $(1+x)^n=1+nx+o(x)\ (x\to 0)$ (n 为正整数);

(5) $2x^3+x^2=O(x^3)\ (x\to\infty)$;

(6) $o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))\ (x\to x_0)$①;

(7) $o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)g_2(x))\ (x\to x_0)$.

2. 应用定理 3.12 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

3. 证明定理 3.13.

4. 求下列函数所表示曲线的渐近线：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$； (2) $y=\arctan x$； (3) $y=\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}$.

① 这里等式的含义是：两个比 g 高阶的无穷小量的和或差仍是一个比 g 高阶的无穷小量. 后一小题类似.

5. 试确定 α 的值，使下列函数与 x^{α} 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量：

(1) $\sin 2x-2\sin x$；　　(2) $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)$；

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$；　　(4) $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$.

6. 试确定 α 的值，使下列函数与 x^{α} 当 $x\to\infty$ 时为同阶无穷大量：

(1) $\sqrt{x^2+x^5}$；　　(2) $x+x^2(2+\sin x)$；

(3) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$.

7. 证明：若 S 为无上界数集，则存在一递增数列 $\{x_n\}\subset S$，使得 $x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$.

8. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\neq0$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty$.

9. 设 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$，证明：

$$f(x)-g(x)=o(f(x)) \quad 或 \quad f(x)-g(x)=o(g(x)).$$