6.1 拉格朗日定理和函数的单调性

1. 试讨论下列函数在指定区间内是否存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$：

(1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{\pi}, \\ 0, & x=0; \end{cases}$　　(2) $f(x)=|x|,-1\leqslant x\leqslant 1.$

2. 证明：(1) 方程 $x^3-3x+c=0$（这里 c 为常数）在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根；

(2) 方程 $x^n+px+q=0$（n 为正整数，p、q 为实数）当 n 为偶数时至多有两个实根，当 n 为奇数时至多有三个实根.

3. 证明定理 6.2 推论 2.

4. 证明:(1) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'(x)\geqslant m$,则

$$f(b)\geqslant f(a)+m(b-a);$$

(2) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $|f'(x)|\leqslant M$,则

$$|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a);$$

(3) 对任意实数 x_1,x_2,都有 $|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|$.

5. 应用拉格朗日中值定理证明下列不等式：

(1) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$，其中 $0<a<b$；

(2) $\frac{h}{1+h^2}<\arctan h<h$，其中 $h>0$.

6. 确定下列函数的单调区间：

(1) $f(x)=3x-x^2$；

(2) $f(x)=2x^2-\ln x$；

(3) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$；

(4) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$.

7. 应用函数的单调性证明下列不等式：

(1) $\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, x > 0.$

8. 以 $S(x)$ 记由 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$，$(x,f(x))$ 三点组成的三角形面积，试对 $S(x)$ 应用罗尔中值定理证明拉格朗日中值定理.

9. 设 f 为 $[a,b]$ 上二阶可导函数，$f(a)=f(b)=0$，并存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

10. 设函数 f 在 (a,b) 上可导，且 f' 单调. 证明 f' 在 (a,b) 上连续.

11. 设 $p(x)$ 为多项式，α 为 $p(x)=0$ 的 r 重实根. 证明 α 必定是 $p'(x)=0$ 的 $r-1$ 重实根.

12. 证明:设 f 为 n 阶可导函数,若方程 $f(x)=0$ 有 $n+1$ 个相异的实根,则方程 $f^{(n)}(x)=0$ 至少有一个实根.

13. 设 $a>0$. 证明函数 $f(x)=x^3+ax+b$ 存在唯一的零点.

14. 证明:$\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

15. 证明:若函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>g'(x)$，$f(a)=g(a)$，则在 $(a,b]$ 内有 $f(x)>g(x)$.

6.2、柯西中值定理和不定式极限

1. 试问函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^3$ 在区间 $[-1,1]$ 上能否应用柯西中值定理得到相应的结论，为什么？

2. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可导. 证明:存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

3. 设函数f在点a处具有连续的二阶导数. 证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

4. 设$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$. 证明存在$\theta\in(\alpha,\beta)$，使得

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\theta.$$

5. 求下列不定式极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}(\tan x)^{\sin x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$;

(10) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x$;

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;

(12) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

6. 设函数f在点a的某个邻域上具有二阶导数. 证明:对充分小的h,存在θ,$0<\theta<1$,使得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f'(a+\theta h)+f'(a-\theta h)}{2}.$$

7. 求下列不定式极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

8. 设 $f(0)=0$，f' 在原点的某邻域上连续，且 $f'(0)\neq0$. 证明：

$$\lim_{x\to0^+}x^{f(x)}=1.$$

9. 证明定理 6.7 中 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 情形时的洛必达法则.

10. 证明:$f(x)=x^3e^{-x^2}$ 为有界函数.

6.3 泰勒公式

1. 求下列函数带佩亚诺型余项的麦克劳林公式：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$；

(2) $f(x)=\arctan x$ 到含 x^5 的项；

(3) $f(x)=\tan x$ 到含 x^5 的项.

2. 按例 4 的方法求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x-x(1+x)}{x^{3}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466，微博：博硕数学。
加群:882056847或826633750。

3. 求下列函数在指定点处带拉格朗日余项的泰勒公式：

(1) $f(x)=x^3+4x^2+5$，在 $x=1$ 处；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，在 $x=0$ 处.

4. 估计下列近似公式的绝对误差：

(1) $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{6}$，当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$；

(2) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}, x\in[0,1]$.

5. 计算:(1) 数 e 准确到 10^{-9};

(2) lg 2.7 准确到 10^{-5}.

6.4 函数的极值与最大（小）值

1. 求下列函数的极值：

(1) $f(x)=2x^3-x^4$； (2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$；

(3) $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$； (4) $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(1) 证明:$x=0$ 是极小值点;

(2) 说明f在极小值点 $x=0$ 处是否满足极值的第一充分条件或第二充分条件.

3. 证明:若函数f在点 x_0 处有$f'_+(x_0)<0$ (>0),$f'_-(x_0)>0$ (<0),则 x_0 为f的极大(小)值点.

4. 求下列函数在给定区间上的最大、最小值：

(1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1,[-1,2]$；

(2) $y=2\tan x-\tan^2 x,\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $y=\sqrt{x}\ln x,(0,+\infty)$.

5. 设$f(x)$在区间I上连续，并且在I上仅有唯一的极值点x_0. 证明：若x_0是f的极大(小)值点，则x_0必是$f(x)$在I上的最大(小)值点.

6. 把长为l的线段截为两段，问怎样截法能使以这两段线为边所组成的矩形的面积最大？

7. 有一个无盖的圆柱形容器，当给定体积为V时，要使容器的表面积为最小，问底的半径与容器高的比例应该怎样？

8. 设用某仪器进行测量时，读得 n 次实验数据为 $a_1 a_2, \cdots, a_n$. 问以怎样的数值 x 表达所要测量的真值，才能使它与这 n 个数之差的平方和为最小.

9. 求一正数 a，使它与其倒数之和最小.

10. 求下列函数的极值：

10. 求下列函数的极值：

(1) $f(x)=|x(x^2-1)|$;

(2) $f(x)=\dfrac{x(x^2+1)}{x^4-x^2+1}$;

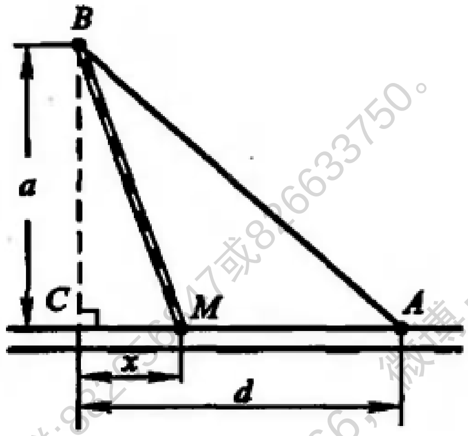
(3) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$.

11. 设$f(x)=a\ln x+bx^2+x$在$x_1=1,x_2=2$处都取得极值,试求a与b;并问这时f在x_1与x_2是取得极大值还是极小值?

12. 在抛物线$y^2=2px$哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短.

13. 要把货物从运河边上 A 城运往与运河相距为 $BC=a\text{km}$ 的 B 城(见图 6-11),轮船运费的单价是 α 元/km,火车运费的单价是 β 元/km($\beta>\alpha$),试求运河边上的一点 M,修建铁路 MB,使得 $A\to M\to B$ 的总运费最省.

图 6-11



6.5 函数的凸性与拐点

1. 确定下列函数的凸性区间与拐点：

(1) $y=2x^3-3x^2-36x+25$；

(2) $y=x+\frac{1}{x}$；

(3) $y=x^2+\frac{1}{x}$；

(4) $y=\ln(x^2+1)$；

(5) $y=\frac{1}{1+x^2}$.

2. 问 a 和 b 为何值时，点$(1,3)$为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

3. 证明：

(1) 若 f 为凸函数，λ 为非负实数，则 λf 为凸函数；

(2) 若 f,g 均为凸函数，则 $f+g$ 为凸函数；

(3) 若 f 为区间 I 上凸函数，g 为 $J\supset f(I)$ 上凸增函数，则 $g\circ f$ 为 I 上凸函数.

4. 设f为区间I上严格凸函数. 证明:若$x_0\in I$为f的极小值点,则x_0为f在I上唯一的极小值点.

5. 应用凸函数概念证明如下不等式:

(1) 对任意实数a,b,有$e^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(e^a+e^b)$;

6. 证明:$\sin\pi x\leqslant\frac{\pi^2}{2}x(1-x)$,其中$x\in[0,1]$.

6. 证明：$\sin \pi x \leqslant \frac{\pi^2}{2} x(1-x)$，其中 $x \in [0,1]$.

7. 证明：若 f, g 均为区间 I 上凸函数，则 $F(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ 也是 I 上凸函数.

8. 证明：(1) f 为区间 I 上凸函数的充要条件是对 I 上任意三点 $x_1<x_2<x_3$，恒有

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geqslant 0;$$

(2) f 为严格凸函数的充要条件是 $\Delta>0$.

9. 应用詹森不等式证明：

(1) 设 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n};$$

(2) 设 $a_i,b_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}，其中\ p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

6.6 函数图像的讨论

按函数作图步骤，作下列函数图像：

(1) $y=x^3+6x^2-15x-20$;

(2) $y=\dfrac{x^2}{2(1+x)^2}$;

(3) $y=x-2\arctan x$;

(4) $y=xe^{-x}$;

(5) $y=3x^5-5x^3$;

(6) $y=e^{-x^2}$;

(7) $y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$;

(8) $y=|x|^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$.

6.7 方程的近似解

1. 求$\frac{x^3}{3}-x^2+2=0$的实根到三位有效数字.

2. 求方程 $x=0.538\sin x+1$ 的根的近似值,精确到 0.001.