1. 求以下数列的上、下极限：

(1) $\{1+(-1)^n\}$；　　(2) $\left\{(-1)^n \frac{n}{2n+1}\right\}$

(3) $\{2n+1\}$；　　(4) $\left\{\frac{2n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$.

(5) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right\}$；　　(6) $\left\{\sqrt[n]{\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|}\right\}$.

2. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为有界数列，证明：

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$；

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$；

(3) 若 $a_n>0, b_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，则

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n b_n,\quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n \varlimsup_{n\to\infty} b_n \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n b_n;$$

(4) 若 $a_n>0$，$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n>0$，则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n}$.

3. 证明:若$\{a_n\}$为递增数列,则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

4. 证明:若$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{a_n}=1$,则数列$\{a_n\}$收敛.

5. 证明定理7.8.

6. 证明定理 7.9.