13.1 一致收敛性

1. 讨论下列函数列在所示区间 D 上是否一致收敛或内闭一致收敛，并说明理由：

(1) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $n=1,2,\cdots$, $D=(-1,1)$;

(2) $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $n=1,2,\cdots$, $D=(-\infty,+\infty)$;

(3) $f_n(x)=\begin{cases}-(n+1)x+1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n+1},\\ 0, & \frac{1}{n+1}<x<1,\end{cases}$ $n=1,2,\cdots$;

(4) $f_n(x)=\dfrac{x}{n}$, $n=1,2,\cdots$, $D=[0,+\infty)$;

(5) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$, $n=1,2,\cdots$, $D=(-\infty,+\infty)$.

2. 证明：设 $f_n(x)\to f(x)$, $x\in D$, $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ $(a_n>0)$. 若对每一个正整数 n 有 $|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n$, $x\in D$, 则 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f.

3. 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性：

(1) $\sum \frac{x^n}{(n-1)!}, x \in [-r, r]$；　(2) $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty, +\infty)$；

(3) $\sum \frac{n}{x^n}, |x| > r \geqslant 1$；　(4) $\sum \frac{x^n}{n^2}, x \in [0,1]$；

(5) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}, x \in (-\infty, +\infty)$；　(6) $\sum \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x \in (-\infty, +\infty)$.

4. 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$，函数 $g(x)$ 在 D 上有界. 证明级数 $\sum g(x)u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $g(x)S(x)$.

5. 若在区间 I 上，对任何正整数 n，

$$|u_n(x)| \leqslant v_n(x),$$

证明当 $\sum v_n(x)$ 在 I 上一致收敛时，级数 $\sum u_n(x)$ 在 I 上也一致收敛.

6. 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，证明：若 $\sum u_n(a)$ 与 $\sum u_n(b)$ 都绝对收敛，则 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

7. 证明：$\{f_n\}$在区间 I 上内闭一致收敛于 f 的充分且必要条件是：对任意 $x_0 \in I$，存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，使得 $\{f_n\}$ 在 $U(x_0)\cap I$ 上一致收敛于 f.

8. 在[0,1]上定义函数列

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{1}{n}, \\ 0, & x \neq \dfrac{1}{n}, \end{cases} \quad n = 1,2,\cdots,$$

证明级数 $\sum u_n(x)$ 在[0,1]上一致收敛，但它不存在优级数.

9. 讨论下列函数列或函数项级数在所示区间 D 上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)[x^2+(n-1)^2]}, D=[-1,1]$；

(2) $\sum 2^n\sin\dfrac{x}{3^n}, D=(0,+\infty)$；

(3) $\sum\dfrac{x^2}{[1+(n-1)x^2](1+nx^2)}, D=(0,+\infty)$；

(4) $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}, D=[-1,0]$;

(5) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, D=(-1,1)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, D=(0,2\pi)$.

10. 证明:级数$\sum(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上绝对收敛并一致收敛,但由其各项绝对值组成的级数在$[0,1]$上却不一致收敛.

11. 设f为定义在区间(a,b)内的任一函数,记

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

证明函数列$\{f_n\}$在(a,b)内一致收敛于f.

12. 设$\{u_n(x)\}$为$[a,b]$上正的递减且收敛于零的函数列，每一个$u_n(x)$都是$[a,b]$上的单调函数，则级数

$$u_1(x) - u_2(x) + u_3(x) - u_4(x) + \cdots$$

在$[a,b]$上不仅收敛，而且一致收敛.

13. 证明：若$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛于0，则存在子列$\{f_{n_i}\}$，使得$\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x)$在$I$上一致收敛.

13.2 一致收敛函数列与函数项级数的性质

1. 讨论下列各函数列$\{f_n\}$在所定义的区间上：

(a) $\{f_n\}$与$\{f'_n\}$的一致收敛性；

(b) $\{f_n\}$是否有定理13.9,13.10,13.11的条件与结论.

(1) $f_n(x)=\dfrac{2x+n}{x+n}, x\in[0,b]$；

(2) $f_n(x)=x-\dfrac{x^n}{n}, x\in[0,1]$；

(3) $f_n(x)=nxe^{-nx^2}, x\in[0,1]$.

2. 证明:若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上满足定理 13.11 的条件,则$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛.

3. 证明定理 13.12 和定理 13.14.

4. 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}, x\in[-1,1]$,计算积分$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t$.

5. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}, x\in(-\infty,+\infty)$，计算积分 $\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t$.

6. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}, x>0$，计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(t)\,\mathrm{d}t$.

7. 证明：函数 $f(x)=\sum\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且有连续的导函数.

8. 证明：定义在$[0,2\pi]$上的函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx$（$0<r<1$）满足定理13.13条件，且$\int_0^{2\pi}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx\right)dx = 2\pi$.

9. 讨论下列函数列在所定义区间上的一致收敛性及极限函数的连续性、可微性和可积性：

(1) $f_n(x)=xe^{-nx^2}$, $n=1,2,\cdots$, $x\in[-l,l]$;

(2) $f_n(x)=\dfrac{nx}{nx+1}$, $n=1,2,\cdots$,

(i) $x\in[0,+\infty)$, (ii) $x\in[a,+\infty)$ $(a>0)$.

10. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任何阶导数，记 $F_n=f^{(n)}$，且在任何有限区间内

$$F_n \rightrightarrows \varphi \quad (n\to\infty),$$

试证 $\varphi(x)=ce^x$（c 为常数）.