15.1 傅里叶级数

1. 在指定区间内把下列函数展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=x$, (i) $-\pi<x<\pi$, (ii) $0<x<2\pi$;

(2) $f(x)=x^2$, (i) $-\pi<x<\pi$, (ii) $0<x<2\pi$;

(3) $f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi<x\leqslant 0, \\ bx, & 0<x<\pi \end{cases}$ $(a\neq b, a\neq 0, b\neq 0)$.

2. 设 f 是以 2π 为周期的可积函数，证明对任何实数 c，有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots.$$

3. 把函数

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0, \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

展开成傅里叶级数，并由它推出

(1) $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$;

(2) $\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}+\cdots$;

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots$.

4. 设函数$f(x)$满足条件$f(x+\pi)=-f(x)$. 问此函数在$(-\pi,\pi)$上的傅里叶级数具有什么特性.

5. 设函数$f(x)$满足条件$f(x+\pi)=f(x)$. 问此函数在$(-\pi,\pi)$上的傅里叶级数具有什么特性.

6. 试证函数系$\cos nx, n=0,1,2,\cdots$和$\sin nx, n=1,2,\cdots$都是$[0,\pi]$上的正交函数系,但它们合起来的(5)式不是$[0,\pi]$上的正交函数系.

7. 求下列函数的傅里叶级数展开式:

(1) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, 0<x<2\pi$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

(3) $f(x)=ax^2+bx+c$, (i) $0<x<2\pi$, (ii) $-\pi<x<\pi$;

(4) $f(x)=\operatorname{ch} x$, $-\pi<x<\pi$;

(5) $f(x)=\operatorname{sh} x, -\pi<x<\pi$.

9. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的光滑函数，且 $f(-\pi)=f(\pi)$. a_n, b_n 为 f 的傅里叶系数，a'_n, b'_n 为 f 的导函数 f' 的傅里叶系数. 证明：

$$a'_0=0,\quad a'_n=nb_n,\quad b'_n=-na_n\quad (n=1,2,\cdots).$$

10. 证明：若三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的系数 a_n, b_n 满足关系

$$\sup_n\{|n^3a_n|,|n^3b_n|\}\leqslant M,$$

M 为常数，则上述三角级数收敛，且其和函数具有连续的导函数.

15.2 以$2l$为周期的函数展开式

1. 求下列周期函数的傅里叶级数展开式：

(1) $f(x)=|\cos x|$（周期 π）；　　(2) $f(x)=x-[x]$（周期 1）；

(3) $f(x)=\sin^4 x$（周期 π）；　　(4) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$（周期 2π）.

2. 求函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & 1<x<2, \\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

的傅里叶级数并讨论其收敛性.

3. 将函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数.

3. 将函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数.

5. 把函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\leqslant 2,\\ x-3, & 2<x<4\end{cases}$$

在 $(0,4)$ 上展开成余弦级数.

6. 把函数$f(x)=(x-1)^2$在$(0,1)$上展开成余弦级数,并推出

$$\pi^2=6\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right).$$

7. 求下列函数的傅里叶级数展开式:

(1) $f(x)=\arcsin(\sin x)$;　　(2) $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

8. 试问如何把定义在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的可积函数$f$延拓到区间$(-\pi,\pi)$内,使它们的傅里叶级数为如下的形式:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

15.3 收敛定理得证明

1. 设f以2π为周期且具有二阶连续的导函数，证明f的傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于f.

2. 设f为$[-\pi,\pi]$上的可积函数. 证明：若f的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于f,则成立帕塞瓦尔(Parseval)等式：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

这里a_n,b_n为f的傅里叶系数.

3. 由于帕塞瓦尔等式对于在$[-\pi,\pi]$上满足收敛定理条件的函数也成立(证略). 请应用这个结果证明下列各式：

(1) $\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ (提示：应用§1习题3的展开式导出)；

(2) $\dfrac{\pi^2}{6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$（提示：应用§1习题1(1)(i)的展开式导出）；

(3) $\dfrac{\pi^4}{90}=\sum\dfrac{1}{n^4}$（提示：应用§1习题1(2)(i)的展开式导出）.

4. 证明：若f,g均为$[-\pi,\pi]$上的可积函数，且它们的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上分别一致收敛于f和g，则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n),$$

其中a_n,b_n为f的傅里叶系数，α_n,β_n为g的傅里叶系数.

5. 证明：若f及其导函数f'均在$[-\pi,\pi]$上可积，$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$，$f(-\pi)=f(\pi)$，且成立帕塞瓦尔等式，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$