16.1 平面点集与多元函数

1. 判断下列平面点集中哪些是开集、闭集、有界集、区域，并分别指出它们的聚点与界点：

(1) $[a,b)\times[c,d)$；　　(2) $\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$；

(3) $\{(x,y)\mid xy=0\}$；　　(4) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；

(5) $\{(x,y)\mid x<2,y<2,x+y>2\}$；

(6) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 或 $y=0, 0\leqslant x\leqslant 1\}$；

(7) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1$ 或 $y=0, 1\leqslant x\leqslant 2\}$；

(8) $\{(x,y)\mid x,y$ 均为整数$\}$； (9) $\{(x,y)\mid y=\sin\frac{1}{x}, x>0\}$

2. 试问集合$\{(x,y)\mid 0<|x-a|<\delta, 0<|y-b|<\delta\}$与集合$\{(x,y)\mid |x-a|<\delta, |y-b|<\delta, (x,y)\neq(a,b)\}$是否相同?

3. 证明:当且仅当存在各点互不相同的点列$\{P_n\}\subset E$, $P_n\neq P_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$时, P_0是E的聚点.

4. 证明:闭域必为闭集.举例说明反之不真.

5. 证明：点列$\{P_n(x_n,y_n)\}$收敛于$P_0(x_0,y_0)$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

6. 求下列各函数的函数值：

(1) $f(x,y)=\left[\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right]^2$，求$f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$；

(2) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求$f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$

(3) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,求 $f(tx,ty)$.

7. 设 $F(x,y)=\ln x\ln y$,证明:若 $u>0,v>0$,则

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

8. 求下列各函数的定义域,画出定义域的图形,并说明是何种点集:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;　　(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$;

(3) $f(x,y)=\sqrt{xy}$;　　(4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(5) $f(x,y)=\ln x+\ln y$;　　(6) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$;

(7) $f(x,y)=\ln(y-x)$;　　(8) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$;

(9) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2+1}$;

(10) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad(R>r)$.

9. 证明:开集与闭集具有对偶性——若 E 为开集,则 E^c 为闭集;若 E 为闭集,则 E^c 为开集.

10. 证明：

(1) 若 F_1, F_2 为闭集，则 $F_1 \cup F_2$ 与 $F_1 \cap F_2$ 都为闭集；

(2) 若 E_1, E_2 为开集，则 $E_1 \cup E_2$ 与 $E_1 \cap E_2$ 都为开集；

(3) 若 F 为闭集，E 为开集，则 $F \setminus E$ 为闭集，$E \setminus F$ 为开集.

11. 试把闭域套定理推广为闭集套定理,并证明之.

12. 证明定理 16.4(有限覆盖定理).

13. 证明:设 $D\subset\mathbb{R}^2$,则 f 在 D 上无界的充要条件是存在 $\{P_k\}\subset D$,使 $\lim\limits_{k\to\infty}f(P_k)=\infty$.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466，微博：博硕数学。
加群:882056847或826633750。

16.2 二元函数的极限

1. 试求下列极限(包括非正常极限):

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1}{x^4+y^4}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{1}{2x-y}$;

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

2. 讨论下列函数在点(0,0)的重极限与累次极限：

(1) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

(2) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(4) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$;

(5) $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$;

(6) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$;

(7) $f(x,y)=\dfrac{e^x-e^y}{\sin xy}$.

3. 证明:若 1° $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$存在且等于 A;

2° y 在 b 的某邻域内,存在有$\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\varphi(y)$,

则$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=A$.

4. 试应用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

5. 叙述并证明：二元函数极限的惟一性定理、局部有界性定理与局部保号性定理.

6. 试写出下列类型极限的精确定义：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}f(x,y)=A$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)}f(x,y)=A$.

7. 试求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x\sin y}$； (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

8. 试作一函数 $f(x,y)$ 使当 $x\to+\infty$，$y\to+\infty$ 时，

(1) 两个累次极限存在而重极限不存在；

(2) 两个累次极限不存在而重极限存在；

(3) 重极限与累次极限都不存在；

(4) 重极限与一个累次极限存在，另一个累次极限不存在.

9. **证明定理 16.5 及其推论 3.**

10. 设$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U^\circ(P_0)$上有定义,且满足:

(i) 在$U^\circ(P_0)$上,对每个$y\neq y_0$,存在极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\psi(y)$;

(ii) 在$U^\circ(P_0)$上,关于x一致地存在极限$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x)$(即对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$0<|y-y_0|<\delta$时,对所有的$x$,只要$(x,y)\in U^\circ(P_0)$,都有$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$成立).

试证明$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$.

16.2 二元函数的连续性

1. 讨论下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\tan(x^2+y^2)$；

(2) $f(x,y)=[x+y]$；

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0;\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(5) $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ y, & x\text{ 为有理数};\end{cases}$

*(6) $f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

2. 叙述并证明二元连续函数的局部保号性.

3. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}\quad (p>0),$$

试讨论它在点(0,0)处的连续性.

4. 设$f(x,y)$定义在闭矩形域$S=[a,b]\times[c,d]$上. 若f对y在$[c,d]$上处处连续,对x在$[a,b]$上(且关于y)为一致连续,证明f在S上处处连续.

4. 设$f(x,y)$定义在闭矩形域$S=[a,b]\times[c,d]$上. 若f对y在$[c,d]$上处处连续,对x在$[a,b]$上(且关于y)为一致连续,证明f在S上处处连续.

5. 证明:若$D\subset\mathbb{R}^2$是有界闭域,f为D上连续函数,且f不是常数函数,则$f(D)$不仅有界(定理16.8),而且是闭区间.

6. 设$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上连续,又有函数列$\{\varphi_k(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛,且

$$c\leqslant\varphi_k(x)\leqslant d,\quad x\in[a,b],\quad k=1,2,\cdots.$$

试证$\{F_k(x)\}=\{f(x,\varphi_k(x))\}$在$[a,b]$上也一致收敛.

7. 设$f(x,y)$在区域$G\subset\mathbb{R}^2$上对x连续，对y满足利普希茨条件：

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中$(x,y'),(x,y'')\in G$，L为常数. 试证明f在G上处处连续.

8. 若一元函数$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，令

$$f(x,y)=\varphi(x),\quad (x,y)\in D=[a,b]\times(-\infty,+\infty).$$

试讨论f在D上是否连续，是否一致连续？

9. 设

$$f(x,y) = \frac{1}{1-xy}, \quad (x,y) \in D = [0,1) \times [0,1),$$

证明:f 在 D 上连续,但不一致连续.

10. 设 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上分别对每一自变量 x 和 y 是连续的,并且每当固定 x 时 f 对 y 是单调的,证明 f 是 $\mathbf{R}^2$ 上的二元连续函数.