

第 19.1 节 含参量正常积分

1. 设 $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ (这个函数在 $x = y$ 时不连续), 试证由含参量积分

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$$

所确定的函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 并作函数 $F(y)$ 的图像.

2. 求下列极限:

(1) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx;$

(2) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx.$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

3. 设 $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-y^2} dy$, 求 $F'(x)$.

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

4. 应用对参量的微分法,求下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx \quad (a^2 + b^2 \neq 0);$$

$$(2) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

5. 应用积分号下的积分法,求下列积分:

$$(1) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0);$$

$$(2) \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0).$$

6. 试求累次积分:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{与} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx,$$

7. 研究函数 $F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx$ 的连续性, 其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上是正连续函数.

加群:882056847或826633750

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

8. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, A]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} [f(t+h) - f(t)] dt = f(a) - f(a) \quad (a < x < A).$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

9. 设

$$F(x, y) = \int_{\frac{x}{y}}^x (x - yz)f(z) dz,$$

其中 $f(x)$ 为可微函数, 求 $F_{xy}(x, y)$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

10. 设

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

其中 $0 < k < 1$ (这两个积分称为完全椭圆积分).

(1) 试求 $E(k)$ 与 $F(k)$ 的导数, 并以 $E(k)$ 与 $F(k)$ 来表示它们;

(2) 证明 $E(k)$ 满足方程

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0.$$

第 19.2 节 含参量反常积分

1. 证明下列各题:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛;

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dy$ 在 $[a, b]$ ($a > 0$) 上一致收敛;

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(3) \int_0^{+\infty} xe^{-xy} dy$$

(i) 在 $[a, b]$ ($a > 0$)上一致收敛,

(ii) 在 $[0, b]$ 上不一致收敛;

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

(4) $\int_0^1 \ln(xy) dy$ 在 $[\frac{1}{b}, b]$ ($b > 1$) 上一致收敛;

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

(5) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 在 $(-\infty, b]$ ($b < 1$) 上一致收敛。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

2. 从等式 $\int_0^1 e^{-xy} dy = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ 出发, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (b > a > 0).$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

3. 证明函数

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dx$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

(提示:证明中可利用公式 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。

4. 求下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{-x^2}}{x^2} dx$ (提示:可利用公式 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$);

加群:882056847或826633750。

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin xt}{t} dt ;$$

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1 - \cos xy}{x^2} dx.$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

5. 回答下列问题:

(1) 对极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} 2xye^{-y^2} dy$ 能否施行极限与积分运算顺序的交换来求解?

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

(2) 对 $\int_0^1 dy \int_0^{+\infty} (2y - 2xy^2) e^{-xy^2} dx$ 能否运用积分顺序交换来求解?

(3) 对 $F(x) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-xy^2} dy$ 能否运用积分与求导运算顺序交换来求解?

加群:882056847或826633750。

6. 应用 $\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{1}{2}}$ ($a > 0$), 证明:

(1) $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-at^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-\frac{3}{2}};$

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
私聊群主拉进题目辅导会员群。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。

$$(2) \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-at^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} a^{-(n+\frac{1}{2})} .$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

7. 应用 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

8. 设 $f(x, y)$ 为 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 上连续非负函数,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dy$$

在 $[a, b]$ 上连续, 证明 $I(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

9. 设在 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 内成立不等式 $|f(x, y)| \leq F(x, y)$. 若 $\int_a^{\infty} F(x, y) dx$ 在 $y \in [c, d]$ 上一致收敛, 证明 $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$ 在 $y \in [c, d]$ 上一致收敛且绝对收敛.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

第 19.3 节 欧拉积分

1. 计算 $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right), \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

2. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u du, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du.$

加群:882056847或826633750。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

3. 证明下列各式:

$$(1) \Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{a-1} dx, a > 0;$$

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \Gamma(a)\Gamma(1-a), \quad 0 < a < 1;$$

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

$$(3) \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{1}{r} B\left(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}\right), \quad p > 0, q > 0, r > 0;$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

4. 证明公式

$$B(p, q) = B(p + 1, q) + B(p, q + 1).$$

5. 已知 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, 试证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

加群:882056847或826633750

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

6. 试将下列积分用欧拉积分表示,并指出参量的取值范围:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx;$

(2) $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。