第 20.1 节 第一型曲线积分

1. 计算下列第一型曲线积分：

(1) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 是以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形；

(2) $\int_L (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s$，其中 L 是以原点为中心，R 为半径的右半圆周；

(3) $\int_L xy\mathrm{d}s$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的部分；

加群:882056847或826633750。微博：博硕数学。教师qq:1374599466，私聊群主拉进题目辅导会员群。

(4) $\int_L |y|\,\mathrm{d}s$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$；

(5) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中 L 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段；

加群:882056847或826633750。微博：博硕数学。
教师qq:1374599466，私聊群主拉进题目辅导会员群。

(6) $\int_L xyz\mathrm{d}s$，其中 L 是曲线 $x=t, y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}, z=\frac{1}{2}t^2\ (0\leqslant t\leqslant 1)$ 的一段；

(7) $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$，其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 相交的圆周.

2. 求曲线 $x=a, y=at, z=\frac{1}{2}at^2\ (0\leqslant t\leqslant 1, a>0)$ 的质量，设其线密度为 $\rho=\sqrt{\frac{2z}{a}}$.

加群:882056847或826633750。微博：博硕数学。教师qq:1374599466，私聊群主拉进题目辅导会员群。

3. 求摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$(0\leqslant t\leqslant \pi)$的质心，设其质量分布是均匀的.

4. 若曲线以极坐标 $\rho=\rho(\theta)$ $(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$表示，试给出计算 $\int_L f(x,y)\,ds$ 的公式，并用此公式计算下列曲线积分：

加群:882056847或826633750。微博：博硕数学。教师qq:1374599466，私聊群主拉进题目辅导会员群。

(1) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $\rho=a\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 的一段；

(2) $\int_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为对数螺线 $\rho=ae^{k\theta}$ $(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的部分.

加群:882056847或826633750。教师qq:1374599466，微博：博硕数学。私聊群主拉进题目辅导会员群。

5. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 $L: x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$ 上连续，则存在点 $(x_0, y_0)\in L$，使得

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = f(x_0,y_0)\Delta L,$$

其中 ΔL 为 L 的弧长.

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。教师qq:1374599466，微博：博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466，微博：博硕数学。
加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466，微博：博硕数学。
加群:882056847或826633750。

第 20.2 节 第二型曲线积分

1. 计算第二型曲线积分：

(1) $\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$，其中 L 为本节例 2 中的三种情况；

加群:882056847或826633750。教师qq:1374599466，微博：博硕数学。私聊群主拉进题目辅导会员群。

(2) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$，其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$沿 t 增加方向的一段；

加群:882056847或826633750。教师qq:1374599466，微博：博硕数学。加群:882056847或826633750。

(3) $\oint_L \frac{-x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 x^2+y^2，依逆时针方向；

(4) $\oint_L y\mathrm{d}x + \sin x\mathrm{d}y$,其中 L 为 $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$ 与 x 轴所围的闭曲线,依顺时针方向;

(5) $\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$,其中 L 为从(1,1,1)到(2,3,4)的直线段.

加群:882056847或826633750。微博：博硕数学。教师qq:1374599466，私聊群主拉进题目辅导会员群

2. 设质点受力作用，力的反方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比. 若质点由$(a,0)$沿椭圆移动到$(0,b)$，求力所作的功.

加群:882056847或826633750。微博：博硕数学。教师qq:1374599466，私聊群主拉进题目辅导会员群。

3. 设一质点受力作用，力的方向指向原点，大小与质点到 xy 平面的距离成反比. 若质点沿直线 $x=at, y=bt, z=ct \ (c\neq 0)$ 从 $M(a,b,c)$ 移动到 $N(2a,2b,2c)$，求力所作的功.

4. 证明曲线积分的估计式：

$$\left|\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| \leqslant LM,$$

其中 L 为 AB 的弧长，$M=\max\limits_{(x,y)\in AB}\sqrt{P^2+Q^2}$.

利用上述不等式估计积分

$$I_R=\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0$.

加群:882056847或826633750。微博：博硕数学。教师qq:1374599466，私聊群主拉进题目辅导会员群。

5. 计算沿空间曲线的第二型曲线积分：

(1) $\int_L xyz\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=z$ 相交的圆，其方向按曲线依次经过 1,2,7,8 卦限；

(2) $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界曲线，其方向按曲线依次经过 xy 平面部分，yz 平面部分和 zx 平面部分.

加群:882056847或826633750。微博：博硕数学。私聊群主拉进题目辅导会员群。教师qq:1374599466，