

第 22.1 节 第一型曲面积分

1. 计算下列第一型曲面积分：

(1) $\iint_S (x + y + z) dS$, 其中 S 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$;

(2) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, 其中 S 为立体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界曲面;

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
私聊群主拉进题目辅导会员群。

(3) $\iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2}$, 其中 S 为柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 被平面 $z = 0, z = H$ 所截取的部分;

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
私聊群主拉进题目辅导会员群。

(4) $\iint_S xyz dS$, 其中 S 为平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限中的部分。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
2. 求均匀曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的质心。
私聊群主拉进题目辅导会员群。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
3. 求密度为 ρ 的均匀球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 对于 z 轴的转动惯量。
加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

4. 计算 $\iint_S z^2 dS$, 其中 S 为圆锥表面的一部分

$$S: \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad D: \begin{cases} 0 \leq r \leq a, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

这里 θ 为常数 $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$.

加群:882056847或826633750

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

第 22.2 节 第二型曲面积分

1. 计算下列第二型曲面积分:

(1) $\iint_S y(x-z) dydz + x^2 dzdx + (y^2 + xz) dx dy$, 其中 S 为由 $x = y = z = 0, x = y = z = a$

六个平面所围的立方体表面并取外侧为正向;

(2) $\iint_S (x+y) dydz + (y+z) dzdx + (z+x) dx dy$, 其中 S 是以原点为中心, 边长为 2 的立方

体表面并取外侧为正向;

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

(3) $\iint_S xydydz + yzdzdx + xzdx dy$, 其中 S 是由平面 $x = y = z = 0$ 和 $x + y + z = 1$ 所围的四面体表面并取外侧为正向;

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

(4) $\iint_S yz dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的上半部分并取外侧为正向;

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

(5) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 是球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 并取外侧为正向。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466

微博:博硕数学。

2. 设某流体的流速为 $\mathbf{v}=(k, y, 0)$, 求单位时间内从球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的内部流过球面的流量.

3. 计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S f(x) dydz + g(y) dzdx + h(z) dx dy,$$

其中 S 是平行六面体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 的表面并取外侧为正向, $f(x), g(y), h(z)$ 为 S 上的连续函数.

4. 设磁场强度为 $E(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, 求从球内出发通过上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ 的磁通量.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

第 22.3 节 高斯公式与斯托克斯公式

1. 应用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\oiint_S yzdydz + xdzdx + xydxdy$, 其中 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧;

(2) $\oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 S 是立方体 $0 \leq x, y, z \leq a$ 表面的外侧;

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

加群:882056847或826633750。

(3) $\oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy$, 其中 S 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = h$ 所围空间区域 $(0 \leq z \leq h)$ 的表面, 方向取外侧;

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

(4) $\oint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy$, 其中 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧;

(5) $\iint_S x dydz + y dzdx + z dx dy$, 其中 S 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的外侧.

2. 应用高斯公式计算三重积分

$$\iiint_V (xy + yz + zx) dx dy dz,$$

其中 V 是由 $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$ 与 $x^2 + y^2 \leq 1$ 所确定的空间区域.

3. 应用斯托克斯公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, 其中 L 为 $x + y + z = 1$ 与三坐标面的交线, 它的走向使所围平面区域上侧在曲线的左侧;

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

(2) $\oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, 其中 L 为 $y^2 + z^2 = 1, x = y$ 所交的椭圆的正向;

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

(3) $\oint_L (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz$, 其中 L 为以 $A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a)$ 为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向。



加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
私聊群主拉进题目辅导会员群。

4. 求下列全微分的原函数:

(1) $yzdx + xzdy + xydz;$

(2) $(x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz.$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。

5. 验证下列线积分与路线无关,并计算其值:

(1) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2 dy - z^3 dz;$

(2) $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$ 其中 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。

6. 证明：由曲面 S 所包围的立体 V 的体积 ΔV 为

$$\Delta V = \frac{1}{3} \oint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线方向余弦.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

7. 证明：若 S 为封闭曲面， l 为任何固定方向，则

$$\oint_S \cos(\widehat{n, l}) dS = 0,$$

其中 n 为曲面 S 的外法线方向。

8. 证明公式

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{r} = \frac{1}{2} \oint_S \cos(\widehat{r, n}) dS,$$

其中 S 是包围 V 的曲面， n 是 S 的外法线方向，

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r = (x, y, z).$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

9. 若 L 是平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ 上的闭曲线, 它所包围区域的面积为 S , 求

$$\oint_L \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中 L 依正向进行.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。