数学奥林匹克小丛书

第三版

初中卷 4

Mathematical Olympiad Series

三角形与四边形

沈文选 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

冯志刚	国家督学、上海中学特级教师、正高级教师、多届IMO中国队副领队
葛　军	博士、中国数学奥林匹克高级教练、南京师范大学兼职教授、江苏省中学数学教学研究会副理事长
孔令志	华东师范大学出版社教辅分社副社长、《数学奥林匹克小丛书》项目编辑
冷岗松	国家集训队教练、上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、浙江大学教授、博士生导师
李伟固	国家集训队教练、北京大学教授、博士生导师
刘鸿坤	第31、32届IMO中国队副领队、华东师范大学教授
刘诗雄	华南师范大学中山附属中学校长、中学数学特级教师、中国数学奥林匹克高级教练
倪　明	华东师范大学出版社教辅分社社长、编审 、《数学奥林匹克小丛书》总策划
瞿振华	第59届IMO中国队领队、国家集训队教练、华东师范大学副教授
单　墫	第30、31届IMO中国队领队、南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普及工作委员会原主任、中国数学奥林匹克委员会原副主席
熊　斌	华东师范大学教授、博士生导师、多届IMO中国队领队
姚一隽	第55、58届IMO中国队领队、复旦大学教授、博士生导师
余红兵	国家集训队教练、苏州大学教授、博士生导师
张景中	中国科学院院士、中国教育数学学会名誉理事长
朱华伟	第50届IMO中国队领队、中国教育数学学会常务副理事长、博士生导师

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 三角形的基本概念和性质

每个三角形都有三条边和三个角，它们是互相联系、互相制约的，这体现在以下方面：

(1) 边与边之间的关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.

(2) 角与角之间的关系：三个内角的和等于 $180°$，即在 $\triangle ABC$ 中有 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. 由此即知三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和.

(3) 边与角之间的关系：在三角形中，大边对大角，小边对小角.

三角形的角平分线 三角形一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线.

三角形的中线 在三角形中，连结一个顶点和它的对边中点的线段叫做三角形的中线.

三角形的高 从三角形一个顶点向它的对边所在直线画垂线，顶点和垂足间的线段叫做三角形的高线，简称三角形的高.

三角形边的中垂线 过三角形一边的中点，且与这条边垂直的线.

三角形的中位线 连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线. 中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

三角形的外角平分线 三角形一个内角的邻补角的平分线与这个角的对边的延长线相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的外角平分线.

三角形的内角平分线上的点到这个角的两边的距离相等. 同一个三角形中，大角的角平分线短于小角的角平分线.

三角形中任何一边上的中线都把三角形分成面积相等的两部分. 同一个三角形中，大边上的中线短于小边上的中线.

三角形的任何一边上的高都垂直于该边. 三角形的三条高未必都在三角形的内部.

三角形的内角平分线、中线、高和边的中垂线又有相同之处：在同一个三角形中，三条中线，或者三条高，或者三条内角平分线，或者三条边的

中垂线，它们分别相交于一点.

三角形顶角的平分线与底边上的高所夹的角等于两底角差的一半.

事实上，如图 1－1，$AB > AC$，AT 为 $\angle BAC$ 的平分线，AH 为 BC 边上的高，令 $\angle TAH$ 为 θ，则 $2\theta = (\angle BAH - \angle BAT) + (\angle CAT - \angle CAH) = \angle BAH - \angle CAH = (90^\circ - \angle B) - (90^\circ - \angle C) = \angle C - \angle B$.

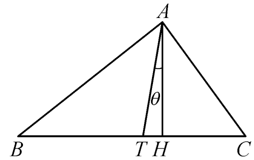


图 1－1

在不混淆的情况下，有时，三角形的角平分线、中线和高也指它们所在的直线.

例 1 设 P 是边长为 1 的正三角形 ABC 内一点，求证

$$\frac{3}{2} < PA + PB + PC < 2.$$

证明 如图 1－2，由三角形两边之和大于第三边，有 $AP + BP > AB$，$BP + CP > BC$，$AP + CP > AC$. 这三式相加，即有

$$\frac{3}{2} < PA + PB + PC.$$

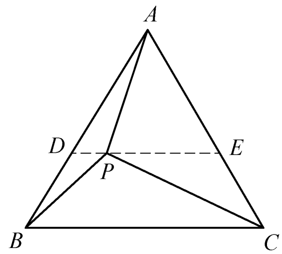


图 1－2

过点 P 作与 BC 平行的直线分别与 AB、AC 交于点 D、E. 由三角形中大角对大边及两边之和大于第三边，有

$$AD > AP,\ BD + DP > BP,\ PE + EC > PC.$$

上述三式相加，并注意 $DE = AE$，有

$$\begin{aligned} AP + BP + CP &< AD + BD + DP + PE + EC \\ &= AB + DE + EC = AB + AC = 2. \end{aligned}$$

故
$$\frac{3}{2} < PA + PB + PC < 2.$$

例 2 设 O 为 $\triangle ABC$ 内任一点. 求证：

$$\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < AO + BO + CO < AB + BC + CA.$$

证明 由三角形两边之和大于第三边，有

$$OA + OB > AB,\ OB + OC > BC,\ OC + OA > AC.$$

上述三式相加，整理，即知 $\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < AO + BO + CO$.

如图 1-3，延长 BO 交 AC 边于点 D，由三角形两边之和大于第三边，有

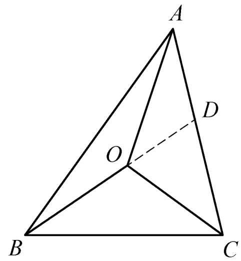


图 1-3

$$AB+AD>BD=BO+OD,\ OD+DC>OC.$$

上述两式相加，整理，有

$$AB+AC>OB+OC.$$

同理，

$$AB+BC>OA+OC,\ BC+CA>OC+OA.$$

这样的三式相加，有 $$AO+BO+CO<AB+BC+CA.$$

故 $\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<AO+BO+CO<AB+BC+CA.$

例 3 已知$\triangle ABC$的三边长分别为 a、b、c. 以下三个结论：

(1) 以$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$为边长的三角形一定存在；

(2) 以 a^2、b^2、c^2 为边长的三角形一定存在；

(3) 以 $|a-b|+1$、$|b-c|+1$、$|c-a|+1$ 为边长的三角形一定存在.

其中，正确结论的个数为(　　).

A. 0　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 3

（2017 年全国初中联赛题）

解 选 C. 理由：不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $b+c>a$.

(1) 因为 $b+c>a$，所以 $b+c+2\sqrt{bc}>a\Rightarrow\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$. 故以$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 为边长的三角形一定存在.

(2) 举反例：以 $a=2$，$b=3$，$c=4$ 为边长可以构成三角形，但以 $a^2=4$，$b^2=9$，$c^2=16$ 为边长的三角形不存在.

(3) 因为 $a\geqslant b\geqslant c$，所以 $|a-b|+1=a-b+1$，

$$|b-c|+1=b-c+1,\ |c-a|+1=a-c+1.$$

而 $|c-a|+1$ 不小于其余两边，且

$$(|a-b|+1)+(|b-c|+1)=|c-a|+1+1>|c-a|+1,$$

故以 $|a-b|+1$、$|b-c|+1$、$|c-a|+1$ 为边长的三角形一定存在.

例 4 如图 1-4，$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6+\angle7$ 的度数为(　　).

A. 450°　　B. 540°　　C. 630°　　D. 720°

（1997 年安徽部分地市初中联赛题）

解　选 B. 理由：记$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$ 的顶点分别为 A、B、C、D、E、F、G，设 AE 交 BG 于 M，AD 交 BG 于 N. 记$\angle EMN=\angle 8$，$\angle DNM=\alpha$，则

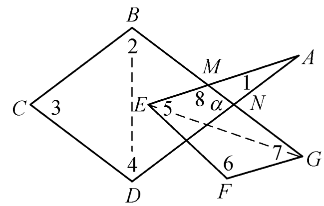


图 1-4

$$\alpha=180^\circ-\angle MNA=180^\circ-\angle 8+\angle 1.$$

即
$$\alpha+\angle 8-\angle 1=180^\circ.$$

连 BD、EG，则

$$\angle 2+\angle 3+\angle 4+\alpha=360^\circ,$$

$$\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=360^\circ.$$

从而
$$\begin{aligned}&\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7\\=&\angle 1+(\angle 2+\angle 3+\angle 4)+(\angle 5+\angle 6+\angle 7)\\=&\angle 1+(360^\circ-\alpha)+(360^\circ-\angle 8)\\=&720^\circ-(\alpha+\angle 8-\angle 1)\\=&720^\circ-180^\circ=540^\circ.\end{aligned}$$

例 5　在$\triangle ABC$中，$\angle B$ 的平分线与$\angle C$ 的外角平分线相交于点 D. 如果$\angle A=27^\circ$，那么，$\angle BDC=$________.（2002 年"我爱数学"夏令营初中竞赛题）

解　填 13.5°. 理由：如图 1-5，因为 $\angle A=27^\circ$，$\angle BCE=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)$，则

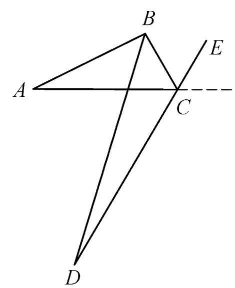


图 1-5

$$\begin{aligned}\angle BDC&=\angle BCE-\angle CBD\\&=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)-\frac{1}{2}\angle ABC\\&=\frac{1}{2}\angle A=13.5^\circ.\end{aligned}$$

例 6　如图 1-6，AA'、BB' 分别是$\angle EAB$、$\angle DBC$ 的平分线. 若 $AA'=BB'=AB$，则$\angle BAC$ 的度数为________.

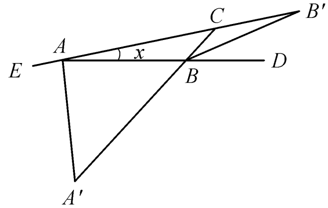


图 1-6

解　填 12°. 理由：设$\angle BAC$ 的度数为 x.

因 $AB=BB'$，故$\angle B'BD=2x$，$\angle CBD=$

$4x$. 又 $AB=AA'$，则

$$\angle AA'B=\angle ABA'=\angle CBD=4x.$$

因为 $\angle A'AB=\frac{1}{2}(180°-x)$，故

$$\frac{1}{2}(180°-x)+4x+4x=180°.$$

解得 $$x=12°.$$

例 7 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 BC 上的高线（分别）不短于边长，试求该三角形的各个角度数.

解 如图 1－7，设 AD、CE 分别是 BC 和 AB 上的高线，则

$$AD\leqslant AB,\ CE\leqslant BC.$$

但由题设，知 $$AD\geqslant BC,\ CE\geqslant AB,$$

所以 $$AD=AB=CE=CB,$$

从而 D、B、E 重合. 如图 1－8.

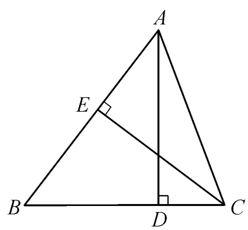


图 1－7

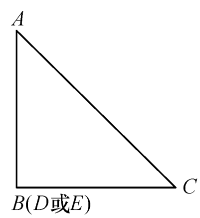


图 1－8

所以$\triangle ABC$是以$\angle B$为直角的等腰直角三角形，因此

$$\angle B=90°,\ \angle A=\angle C=45°.$$

例 8 如图 1－9，AD 是$\triangle ABC$ 的中线，E 是 AD 上的一点，且 $AE=\frac{1}{3}AD$，CE 交 AB 于点 F. 若 $AF=1.2\,\text{cm}$，则 $AB=$ ________cm.

解 填 6. 理由：过点 D 作 $DG\parallel CF$ 交 AB 于 G，则

$$\frac{BG}{GF}=\frac{BD}{DC}=1,$$

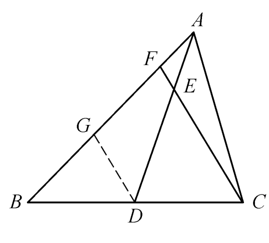


图 1－9

即 $$BG = GF. \qquad ①$$

又由 $GD \parallel FE$，有

$$\frac{AF}{FG} = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{2}, \qquad ②$$

由此，即求得 $FG = 2.4\ \text{cm}$，故 $AB = 6\ \text{cm}$.

注 此例可以推广，设 D 为 BC 边上一点，且 $BD : DC = \lambda$，E 是 AD 上一点，且 $AE = \frac{1}{n}AD$，按此例求解方法，式①②分别变为

$$BG = \lambda GF,$$
$$FG = (n-1)AF,$$

所以 $$AB = [(n-1)(\lambda+1)+1]AF.$$

例 9 在$\triangle ABC$中，P、Q 分别是边 AB 和 AC 上的点，中线 AM 与 PQ 交于 N. 若 $AB : AP = 5 : 2$，$AC : AQ = 4 : 3$，则 $AM : AN =$ ________.

解 填$\frac{23}{12}$. 理由：如图 1－10，过 C 作 $CD \parallel PQ$ 交 AB 于 D，过 M 作 $MK \parallel PQ$ 交 AB 于 K，则 $MK \parallel CD$.

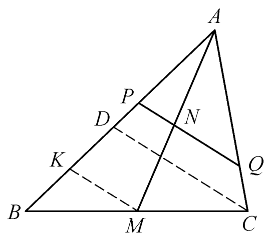


图 1－10

因 $BM = MC$，则 $BK = KD$. 从而

$$AK = \frac{1}{2}(AD + AB).$$

于是 $$\frac{AK}{AP} = \frac{1}{2}\left(\frac{AD}{AP} + \frac{AB}{AP}\right),$$

而 $$\frac{AK}{AP} = \frac{AM}{AN},\ \frac{AD}{AP} = \frac{AC}{AQ},$$

故 $$\frac{AM}{AN} = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{23}{12}.$$

习 题 1

1 有长度为下列数值的几组线段：

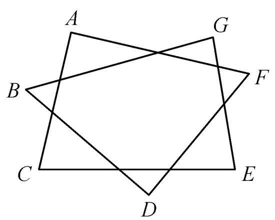
(i)3，4，5；(ii)3^2，4^2，5^2；(iii)$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$；(iv)$\frac{1}{3^2}$，$\frac{1}{4^2}$，$\frac{1}{5^2}$.

其中能组成三角形的有（　　）．

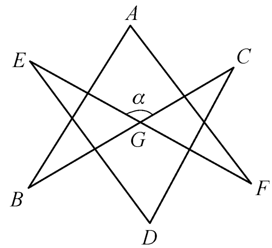
A．1组　　B．2组　　C．3组　　D．4组

2 如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ 的值等于（　　）．

A．360°　　B．450°　　C．540°　　D．720°



（第 2 题）

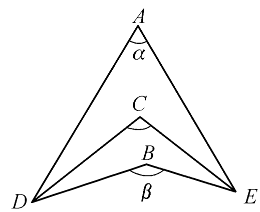


（第 3 题）

3 如图，$\angle CGE=\alpha$，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$（　　）．

A．$360^\circ-\alpha$　　B．$270^\circ-\alpha$　　C．$180^\circ+\alpha$　　D．2α

4 如图，DC 平分 $\angle ADB$，EC 平分 $\angle AEB$，若 $\angle DAE=\alpha$，$\angle DBE=\beta$，则 $\angle DCE=$______（用 α、β 表示）．

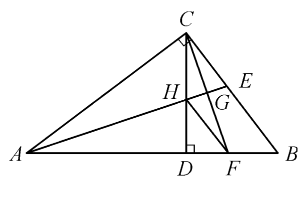


（第 4 题）

5 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB-\angle B=90^\circ$，$\angle C$ 的平分线与 AB 交于 L，$\angle C$ 的外角平分线与 BA 的延长线交于 N. 已知 $CL=3$，则 $CN=$________．

6 在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=100^\circ$，$\angle C$ 的平分线交边 AB 于 E，在边 AC 上取点 D，使得 $\angle CBD=20^\circ$，连结 DE. 则$\angle CED$ 的度数是________．

7 如图，CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，$\angle A$ 的平分线 AE 交 CD 于 H，交$\angle BCD$ 的平分线 CF 于 G. 求证：$HF\parallel BC$.



（第 7 题）

8 已知点 C_1、A_1、B_1 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB、BC 和 CA 上，且满足 $AC_1:C_1B=BA_1:A_1C=CB_1:B_1A=1:3$. 求证：$\triangle ABC$ 的周长 P 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长 P' 之间有不等式：

$$\frac{1}{2}P<P'<\frac{3}{4}P.$$

2 三角形的面积、边角间关系定理

在$\triangle ABC$中，设角A、B、C所对的边长依次为a、b、c，其面积记为$S_{\triangle ABC}$，边长为x的边上的高记为h_x，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c. \tag{2-1}$$

注意到锐角的三角函数定义，知$h_a=c\cdot\sin B$或$h_a=b\cdot\sin C$，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C\text{或}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B. \tag{2-2}$$

由上述(2-1)与(2-2)两式，可推得凸四边形$ABCD$的面积公式：若凸四边形$ABCD$的对角线AC与BD的夹角为α，则

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha. \tag{2-3}$$

特别地，当$AC\perp BD$时，则$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

注　可参见(12-1)式或第13节例9的证明.

若记$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.\text{（海伦公式）} \tag{2-4}$$

由上可知：

等底等高的两个三角形面积相等；

两个等底的三角形的面积比等于底边上对应高的比；

两个等高的三角形的面积比等于它们底边的比.

作为面积公式及上述结论的一个应用，我们来推导三角形的角平分线性质与外角平分线的性质.

如图2-1，在$\triangle ABC$中，AP为$\angle A$的平分线，AQ为$\angle A$的外角平分线.由

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle APC}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AP\cdot\sin\angle BAP}{\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\angle PAC}=\frac{AB}{AC}$$

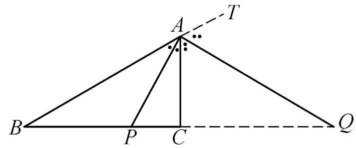


图 2-1

及 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle APC}}=\frac{BP}{PC}$，有

三角形的角平分线性质定理　$\triangle ABC$ 中，若 AP 是$\angle A$ 的平分线，则

$$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}. \tag{2-5}$$

又由 $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AQ\cdot\sin\angle BAQ}{\frac{1}{2}AC\cdot AQ\cdot\sin(180^\circ-\angle BAQ)}=\frac{AB}{AC}$ 及 $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}}=\frac{BQ}{QC}$，有

三角形的外角平分线性质定理　$\triangle ABC$ 中，若 AQ 是$\angle A$ 的外角平分线，则

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{AB}{AC}. \tag{2-6}$$

注　此时点 P 内分边 BC 与点 Q 外分边 BC 所成的比相等，即 $\frac{BP}{PC}=\frac{BQ}{QC}$.

一般地，若点 C、D 内分、外分线段 AB 所成的比相等，即 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$ 时，则称点 C、D 调和分割线段 AB. 或称 A、B，C、D 为调和点列；也称 VA、VB，VC、VD 为调和线束. 如图 2-2.

这里的点 B、C，P、Q（如图 2-1）是一组特殊的调和点列；AB、AC，AP、AQ 为一组特殊的调和线束. 也呈现了调和线束的一条性质：

在调和线束 AB、AC，AP、AQ 中，若 AP 平分$\angle BAC$，则 $AP\perp AQ$；反之，若 $AP\perp AQ$，则 AP 平分 $\angle BAC$ 或 AQ 平分 $\angle BAC$ 的外角（图 2-1）.

在同一个三角形中，相等的边所对的角相等，相等的角所对的边相等；较长的边所对的角较大，较大的角所对的边较长.

将面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\angle C=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}ca\cdot\sin\angle B$ 的各项同除以 $\frac{1}{2}abc$，整理（各项倒过来）便得

正弦定理　在$\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、c，则

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=\frac{abc}{2S_{\triangle ABC}}. \tag{2-7}$$

注 运用正弦定理,可推导调和点列(或调和线束)的角元表示形式:

如图 2-2,若 A、B,C、D 是调和点列(或 VA、VB,VC、VD 为调和线束),则有 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$,即 $AC\cdot BD=CB\cdot AD$ 时,令 $\angle AVC=\alpha$,$\angle CVB=\beta$,$\angle BVD=\gamma$.

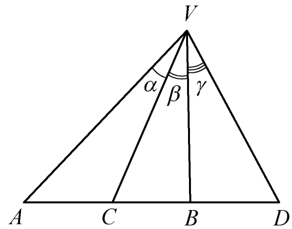


图 2-2

对$\triangle AVC$与$\triangle VCB$分别运用正弦定理,利用$\angle ACV$与$\angle VCB$互补得一等式,又对$\triangle VBD$与$\triangle VAD$运用正弦定理. 利用$\angle D$同一又得一等式,再利用条件

$$\begin{aligned}&AC\cdot DB=CB\cdot AD\\ \Leftrightarrow&\sin\alpha\cdot\sin\gamma=\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma).\end{aligned} \tag{2-8}$$

对$\triangle ABC$绕顶点 C 顺时针方向旋转 90°(这里设$\angle C\geqslant 90°$,对于锐角$\angle C$可同样讨论),如图 2-3,得$\triangle A'B'C$,注意到$\angle BCB'=90°$,$\angle ACA'=90°$,$\angle A'=\angle A$,$\angle 1=\angle 2$,则$\angle A'DA=90°$(D 为 AB 与 $A'B'$ 的交点),且 $A'B'=AB=c$. 于是

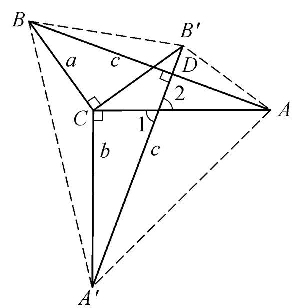


图 2-3

$$\begin{aligned}&S_{\triangle BA'B'}+S_{\triangle AB'A'}=S_{\text{四边形}A'AB'B}\\ =&S_{\triangle BCB'}+S_{\triangle ACA'}+S_{\triangle BCA'}+S_{\triangle ACB'},\end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}c\cdot BD+\frac{1}{2}c\cdot AD\\ =&\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab\cdot\sin[180°-(\angle C-90°)]+\frac{1}{2}ab\cdot\sin(\angle C-90°),\end{aligned}$$

亦即
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\angle C.$$

从而便得

余弦定理 在$\triangle ABC$中,角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、c,则

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\angle C,\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cdot\cos\angle B,\\ a^2&=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\angle A.\end{aligned} \tag{2-9}$$

特别地，当 $\angle C = 90°$ 时，则得

勾股定理　在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，则

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{2-10}$$

注　余弦定理也有这样的变形式，也称为广勾股定理.

对于形式 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle C$ 而言，如图 2-4，在 $\triangle ABC$ 中，作 $AD \perp BC$ 于点 D，则

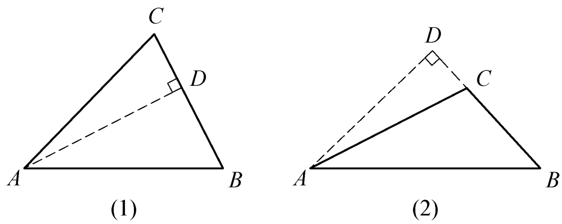


图 2-4

$$\begin{aligned} AB^2 &= CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos\angle C \\ &= CA^2 + CB^2 \mp 2CD \cdot CB. \end{aligned}$$

对直角$\triangle ABD$而言，$\angle ADB = 90°$，点 C 为直角边 BC 所在直线上一点，则有

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 \mp 2CD \cdot CB. \tag{2-11}$$

即为广勾股定理(第 9 节性质 7).

将一个三角形从一个顶点分割为两个三角形，运用面积公式，则得到

张角定理　设 P 为$\triangle ABC$的边 BC 上一点，$\angle BAP = \alpha$，$\angle CAP = \beta$，则

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP} = \frac{\sin\alpha}{AC} + \frac{\sin\beta}{AB}. \tag{2-12}$$

事实上，如图 2-5，由 $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}AB \cdot AP \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AP \cdot AC \cdot \sin\beta$ 两边同除以 $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot AP$ 即得.

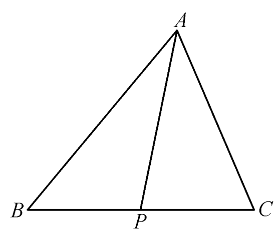


图 2-5

注　张角定理的逆定理为：设 B、P、C 依次是平面内从一点 A 所引三条射线 AB、AP、AC 上的点(AP 在 AB、AC 之间)，$\angle BAP = \alpha$，$\angle CAP =$

β，且 $\alpha+\beta<180^\circ$，若有

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB},$$

则三点 B、P、C 在一条直线上.

事实上，由(2-12)式两边同乘以 $\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot AP$，整理，即得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$. 这便说明点 B、P、C 在一条直线上.

对于图 2-5 中的$\triangle ABP$、$\triangle APC$ 应用余弦定理，则得到

斯特瓦尔特定理 设 P 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，则

$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BC^2\cdot\frac{PC}{BC}\cdot\frac{BP}{BC}. \qquad (2-13)$$

事实上，由

$$\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{2AP\cdot BP}=\cos\angle APB=-\cos\angle APC=-\frac{AP^2+PC^2-AC^2}{2AP\cdot PC}$$

整理即得.

注 若点 P 在边 BC 的延长线上时，则有

$$AP^2=-AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}+BP\cdot PC;$$

若点 P 在边 BC 的反向延长线时，则有

$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}-AC^2\cdot\frac{BP}{BC}+BP\cdot PC.$$

特别地，当 AP 为三角形中的重要线段时，有以下结果.

(1) 当 AP 为边 BC 上的中线时，则

$$AP^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2. \qquad (2-14)$$

(2) 当 AP 为角 A 的内角平分线时，则

$$AP^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC. \qquad (2-15)$$

(3) 当 AP 为角 A 的外角平分线时，则

$$AP^2=-AB\cdot AC+BP\cdot PC. \qquad (2-16)$$

(4) 当$\triangle ABC$ 为等腰三角形，即 $AB=AC$ 时，则

$$AP^2=AB^2-BP\cdot PC. \qquad (2-17)$$

(5) 若 P 分线段 BC 满足 $\frac{BP}{BC}=\lambda$ 时,则

$$AP^2=\lambda(\lambda-1)BC^2+(1-\lambda)\cdot AB^2+\lambda\cdot AC^2. \qquad (2-18)$$

例 1 在$\triangle ABC$中,已知 BD 和 CE 分别是两边上的中线,并且 $BD\perp CE$, $BD=4$, $CE=6$. 那么,$\triangle ABC$ 的面积等于(　　).

A. 12　　B. 14　　C. 16　　D. 18

(1998 年全国初中联赛题)

解 选 C. 理由:连 DE,由 $BD\perp CE$,知

$$S_{四边形BCDE}=\frac{1}{2}BD\cdot CE=12.$$

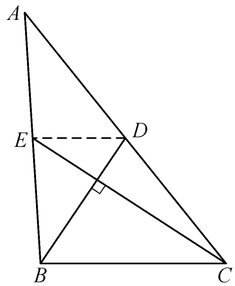


图 2-6

注意到 D、E 是$\triangle ABC$两边 AC、AB 的中点,知 $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADE}$,即 $S_{四边形BCDE}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$. 故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}S_{四边形BCDE}=\frac{4}{3}\cdot 12=16.$$

例 2 如图 2-7,在$\triangle ABC$中,$EF\parallel BC$, $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BCE}$. 若 $S_{\triangle ABC}=1$,则 $S_{\triangle CEF}$ 等于(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $\sqrt{5}-2$　　D. $\sqrt{3}-\frac{3}{2}$

(2003 年四川省初中竞赛题)

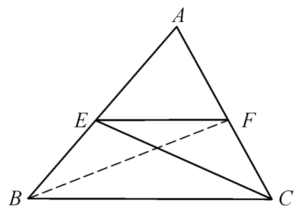


图 2-7

解 选 C. 理由:设 $S_{\triangle CEF}=x$,则

$$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}(1-x),$$

$$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}(1+x).$$

于是,
$$\frac{AF}{AC}=\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{1-x}{1+x}.$$

又因为 $EF\parallel BC$,所以$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$(或者连 BF,则 $S_{\triangle EFB}=S_{\triangle EFC}$,所以 $\frac{AE}{AB}=\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AF}{AC}$),从而

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A}=\frac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}=\left(\frac{AF}{AC}\right)^2=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2,$$

而
$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}(1-x)}{1}=\frac{1}{2}(1-x),$$

故 $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2=\frac{1}{2}(1-x)$. 解得 $x=\sqrt{5}-2$(舍去 $-2-\sqrt{5}$).

例 3 如图 2－8,在 $\triangle ABC$ 中,D、E 分别是 AC、BC 的中点, $BF=\frac{1}{3}AB$, BD 与 FC 相交于 G,连结 EG.

(1) 求证: $GE\parallel AC$;

(2) 求 $\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle BEG}}$ 的值.

(2001 年重庆市初中竞赛题)

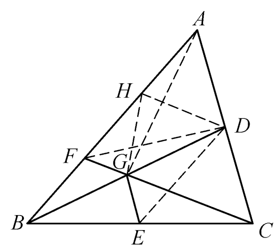


图 2－8

解 (1) 取 AF 的中点 H,连结 HD,则知 HD 为 $\triangle AFC$ 的中位线,即 $DH\parallel FC$.

连 HG、FD. 由 $BF=FH$, $FG\parallel HD$, 知 $S_{\triangle BFG}=S_{\triangle HFG}=S_{\triangle DFG}$, 因此 $BG=GD$, 所以 G 是 BD 的中点. 而 E 是 BC 的中点,故 $GE\parallel AC$.

(2) 连 AG,设 $S_{\triangle BFG}=a$, 则 $S_{\triangle AFG}=2a$,

$$S_{\triangle ADG}=S_{\triangle ABG}=S_{\triangle BFG}+S_{\triangle AFG}=3a,$$

因此
$$S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ABG}=6a,\ S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABD}=12a,$$

亦即
$$S_{\triangle BFG}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}.$$

又连 DE,设 $S_{\triangle BEG}=b$, 则

$$S_{\triangle GDE}=b,\ S_{\triangle ECD}=S_{\triangle BED}=2b,$$

$$S_{\triangle BCD}=2S_{\triangle BED}=4b,\ S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle BCD}=8b.$$

即
$$S_{\triangle BEG}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}.$$

所以
$$\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle BEG}}=\frac{\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{3}.$$

例 4 如图 2-9，P 是$\triangle ABC$ 内的一点，连结 AP、BP、CP 并延长，分别与 BC、AC、AB 交于 D、E、F，已知：$AP=6$，$BP=9$，$PD=6$，$PE=3$，$CF=20$. 求$\triangle ABC$ 的面积.

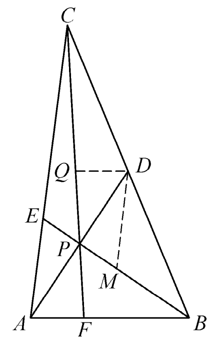


图 2-9

解 由 $AP=6=PD$，知 P 为 AD 的中点. 过点 D 作 EA 的平行线交 PB 于点 M，则知 P 为 EM 的中点，即有 $PM=EP=3$，于是，点 M 为 EB 的中点. 因此，知 D 为 BC 的中点.

过 D 作 $DQ \parallel AB$ 交 CP 于 Q，则 $CQ=QF$，$QP=PF$，由此，即知 $PC=15$.

设 $CD=BD=x$，则

$$\triangle CPD \text{ 的半周长} = \frac{1}{2}(21+x),$$

$$\triangle PDB \text{ 的半周长} = \frac{1}{2}(15+x).$$

由 $S_{\triangle CPD}=S_{\triangle PDB}$ 及海伦公式，得

$$\begin{aligned}&\frac{x+21}{2}\cdot\left(\frac{21+x}{2}-15\right)\left(\frac{21+x}{2}-6\right)\left(\frac{21+x}{2}-x\right)\\=&\frac{x+15}{2}\cdot\left(\frac{15+x}{2}-9\right)\left(\frac{15+x}{2}-6\right)\left(\frac{15+x}{2}-x\right).\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&(21+x)(x-9)(x+9)(21-x)\\=&(15+x)(x-3)(x+3)(15-x),\end{aligned}$$

亦即 $$(21^2-x^2)(x^2-9^2)=(15^2-x^2)(x^2-3^2).$$

由此，解得 $$x^2=13\cdot 9=117.$$

于是

$$S_{\triangle CPD}^2=\frac{1}{16}(21^2-x^2)(x^2-9^2)=18^2\cdot 3^2\cdot\frac{1}{4},$$

从而 $$S_{\triangle CPD}=27.$$

又 $$S_{\triangle PDB}=S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}=S_{\triangle CPD}=27,$$

故 $$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle CPD}=108.$$

例 5 如图 2-10，O 是凸五边形 $ABCDE$ 内一点，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$. 求证：$\angle 9$ 与$\angle 10$ 相等或互补.

证明　由题设，根据正弦定理，得

$$\frac{OA}{\sin\angle 10}=\frac{OE}{\sin\angle 1}=\frac{OE}{\sin\angle 2}$$
$$=\frac{OD}{\sin\angle 3}=\frac{OD}{\sin\angle 4}=\frac{OC}{\sin\angle 5}=\frac{OC}{\sin\angle 6}$$
$$=\frac{OB}{\sin\angle 7}=\frac{OB}{\sin\angle 8}=\frac{OA}{\sin\angle 9},$$

从而 $\sin\angle 9=\sin\angle 10$. 故 $\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补.

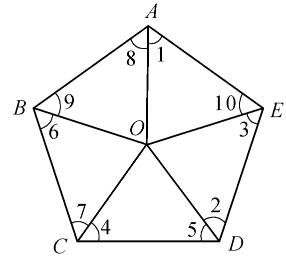


图 2－10

例 6　已知 AD、AE 分别是 $\triangle ABC$ 的角 A 的内、外角平分线，点 D 在边 BC 上，点 E 在边 BC 的延长线上. 求证：$\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{DE}$.

证明　设 $AD=a$，$AE=b$，$\angle BAD=\angle DAC=\alpha$.

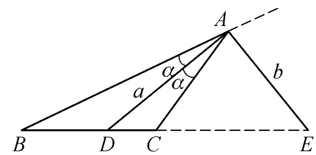


图 2－11

以 A 为视点，分别在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABE$ 中应用张角定理，得

$$\frac{\sin\angle DAE}{AC}=\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{a},$$
$$\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{a}=\frac{\sin\angle DAE}{AB}+\frac{\sin\alpha}{b}.$$

于是 $$AC=\frac{ab}{b\cos\alpha+a\sin\alpha},\ AB=\frac{ab}{b\cos\alpha-a\sin\alpha}.$$

在 $\triangle ABE$ 中，由余弦定理，并注意到 $\cos\alpha>0$，以及 $b\cos\alpha-a\sin\alpha>0$（因 $AB>0$），有

$$BE=\sqrt{AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cdot\cos(90^\circ+\alpha)}$$
$$=\sqrt{\frac{b^2\cdot\cos^2\alpha\cdot(a^2+b^2)}{(b\cos\alpha-a\sin\alpha)^2}}=\frac{b\cos\alpha\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{b\cos\alpha-a\sin\alpha}.$$

同理，在 $\triangle ACE$ 中，有 $CE=\frac{b\cos\alpha\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{b\cos\alpha+a\sin\alpha}$.

又在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，有 $DE=\sqrt{a^2+b^2}$. 故

$$\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2b\cos\alpha}{b\cdot\cos\alpha\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{DE}.$$

注　此例若运用三角形内、外角平分线性后的注，知 D、E 调和分割 BC，

则 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BE}{EC}$,即$\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{DC}{CE}$. 亦即有

$$\frac{BE-DE}{BE}=\frac{DE-CE}{CE}\Rightarrow 2=\frac{DE}{BE}+\frac{DE}{CE}\Rightarrow \frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{DE}.$$

对于 $DE=\dfrac{2}{\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{CE}}$,我们称 DE 为 BE 与 CE 的调和平均.

例 7 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=2\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{2}$, $BC=2$,设 P 为边 BC 上任一点,则(　　).

A. $PA^2<PB\cdot PC$　　　　B. $PA^2=PB\cdot PC$

C. $PA^2>PB\cdot PC$　　　　D. PA^2 与 $PB\cdot PC$ 的大小关系不确定

（1990 年全国初中联赛题）

解 选 C. 理由:由斯特瓦尔特定理,有

$$\begin{aligned}PA^2&=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{PB}{BC}-PB\cdot PC\\&=(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{PC}{2}+(\sqrt{2})^2\cdot\frac{PB}{2}-PB\cdot PC\\&=4PC+PB-PB\cdot PC,\end{aligned}$$

从而

$$PA^2-PB\cdot PC=4PC+PB-2PB\cdot PC.$$

又 $PB=2-PC$,于是

$$\begin{aligned}PA^2-PB\cdot PC&=4PC+2-PC-2(2-PC)\cdot PC\\&=2PC^2-PC+2\\&=2\left(PC-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0.\end{aligned}$$

故

$$PA^2>PB\cdot PC.$$

例 8 在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC=2$,边 BC 上有 100 个不同的点 P_1, P_2,…, P_{100}. 记 $m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC$ ($i=1, 2, \cdots, 100$),则 $m_1+m_2+\cdots+m_{100}=$ ________.（1990 年全国初中联赛题）

解 填 400. 理由:由 $AB=AC$,考虑斯特瓦尔特定理的特殊情形式(2-14),有 $AP_i^2=AB^2-BP_i\cdot P_iC(i=1, 2, \cdots, 100)$.

于是

$$m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC=AB^2=4.$$

故

$$m_1+m_2+\cdots+m_{100}=4\cdot 100=400.$$

习 题 2

1 设$\triangle ABC$的面积是1，D是边BC上一点，且$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{1}{2}$. 若在边$AC$上取一点$E$，使四边形$ABDE$的面积为$\dfrac{4}{5}$，则$\dfrac{AE}{EC}$的值为________.（2003年天津市初中竞赛题）

2 给定面积为1，边长为a、b、c的三角形，已知$a\geqslant b\geqslant c$. 求证：$b\geqslant\sqrt{2}$.（第7届全俄奥林匹克题）

3 已知三角形的两边长a与b满足$a>b$，它们对应的高为h_a与h_b，求证：$a+h_a\geqslant b+h_b$，并确定等号何时成立.

4 直线与$\triangle ABC$的边AB和BC分别相交于点M和K. 又$\triangle MBK$与四边形$AMKC$的面积相等. 求证：$\dfrac{MB+BK}{AM+CA+KC}\geqslant\dfrac{1}{3}$.（第35届莫斯科奥林匹克题）

5 已知：锐角三角形ABC的角平分线AD，中线BM和高线CH交于一点. 求证：$\angle BAC>45^\circ$.（第4届全俄奥林匹克题）

6 设P、Q为线段BC上两定点，且$BP=CQ$，A为BC外一动点，当点A运动到使$\angle BAP=\angle CAQ$时，$\triangle ABC$是什么三角形？试证明你的结论.

7 在$\triangle ABC$中，$\angle A=4\angle C$，$\angle B=2\angle C$. 试证：

$$(BC+CA)\cdot AB=BC\cdot CA.$$

8 自$\triangle ABC$的顶点A引两条射线交BC于X、Y，使$\angle BAX=\angle CAY$. 求证：$\dfrac{BX\cdot BY}{CX\cdot CY}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

9 设点O在$\triangle ABC$的边AB上，且与顶点不重合. 求证：$OC\cdot AB<OA\cdot BC+OB\cdot AC$.（1983年捷克竞赛题）

10 已知$ABCD$为四边形，两组对边延长后得交点E、F，对角线$BD\parallel EF$，AC的延长线交EF于G. 求证：$EG=GF$.（1978年全国高中竞赛题）

11 在$\triangle ABC$中，D是BC边上的点，已知$AB=13$，$AD=12$，$AC=15$，$BD=5$，那么DC等于多少？（第3届“祖冲之”杯邀请赛题）

3 全等三角形

能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形.其中互相重合的顶点叫做对应顶点,互相重合的边叫做对应边,互相重合的角叫做对应角.

实现重合离不开运动,完全重合是运动的结果.至于运动的过程,则有不同的方式.因此,全等三角形的图形归纳起来有以下几种典型形式.

(1)平移全等型,如图 3-1.

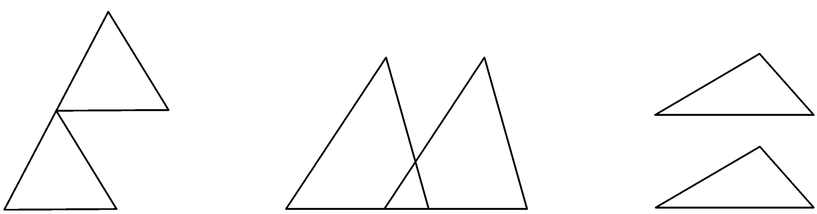


图 3-1

(2)对称全等型,如图 3-2.

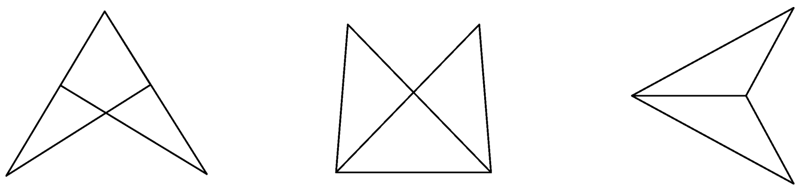


图 3-2

(3)旋转全等型,如图 3-3.

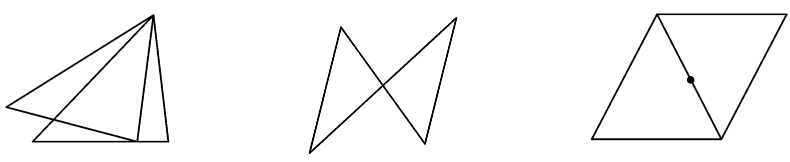


图 3-3

(4) 以上类型的复合型,如图 3 - 4.

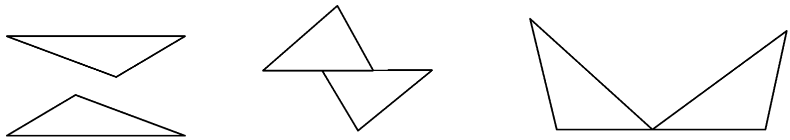


图 3 - 4

全等三角形的对应边相等,对应角相等,三角形中各种对应线段也相等.

寻找对应边和对应角,常用到以下方法:

(1) 全等三角形对应角所对的边是对应边,两个对应角所夹的边是对应边.

(2) 全等三角形对应边所对的角是对应角,两条对应边所夹的角是对应角.

(3) 有公共边的,公共边常是对应边.

(4) 有公共角的,公共角常是对应角.

(5) 有对顶角的,对顶角常是对应角.

(6) 两个全等的不等边三角形中一对最长边(或最大角)是对应边(或对应角),一对最短边(或最小角)是对应边(或对应角).

要想正确表示两个三角形全等,找出对应元素是关键.

边角边定理(SAS) 有两条边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等.

角边角定理(ASA) 有两个角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等.

推论 有两个角和其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等.

边边边定理(SSS) 三边对应相等的两个三角形全等.

注 三角形的三边确定了,那么它的形状、大小就确定了. 三角形的这个性质,就叫做三角形的稳定性.

由于直角三角形的特殊性,直角三角形全等的判定具有特殊的方法. 从理论上讲,不论是“边角边”、“角边角”、“边边边”,还是“角角边”都适用于直角三角形全等的判定. 但直角三角形有如下特殊的判定定理:

斜边、直角边定理(HL) 斜边和直角边对应相等的两个直角三角形全等.

由上可知,如果两个直角三角形中有两条边(不论是两条直角边还是斜边和一条直角边)对应相等,就足以判定它们全等. 所以,对于直角三角形的全等的判定,“边边边”是没有使用价值的. 因此,在两个直角三角形中,如果

除了直角之外，还有两个元素（不都是角）对应相等，那么，这两个直角三角形全等.

例1 如图3－5，在凸五边形 $ABCDE$ 中，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle CAD=\angle ABE+\angle AEB$，$M$ 为 BE 的中点. 证明：$CD=2AM$.（2015年北京市初二竞赛题）

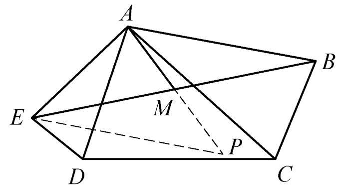


图3－5

证明 如图3－5所示，延长 AM 至 P，使 $MP=AM$，因 M 为 EB 中点，连结 EP，则 $\triangle ABM\cong\triangle PEM$，从而有

$$AB=EP,\ \angle ABE=\angle BEP.$$

于是，

$$\angle CAD=\angle ABE+\angle AEB=\angle BEP+\angle AEB=\angle AEP.$$

又 $AC=AB=EP$，$AD=AE$，则

$$\triangle ACD\cong\triangle EPA.$$

故 $$CD=AP=2AM.$$

例2 设 P 为等腰直角三角形 ACB 的斜边 AB 上任意一点，PE 垂直 AC 于点 E，PF 垂直 BC 于点 F，PG 垂直 EF 于点 G，延长 GP 并在延长线上取一点 D，使得 $PD=PC$. 试证：$BC\perp BD$，且 $BC=BD$.（1997年全国初中联赛题）

证明 如图3－6，因 $\angle EPG=\angle EFP=\angle CPF$，则

$$\begin{aligned}\angle DPB=\angle APG&=45^\circ+\angle EPG=45^\circ+\angle CPF\\&=\angle BPF+\angle CPF=\angle BPC.\end{aligned}$$

又 $PC=PD$，PB 为公共边，则

$$\triangle PDB\cong\triangle PCB.$$

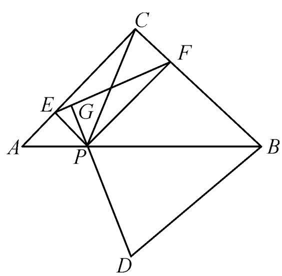


图3－6

从而 $$BC=BD,$$

且 $$\angle PBD=\angle CBP=45^\circ,$$

因此 $$\angle CBD=90^\circ,$$

故 $$BC\perp BD.$$

例 3 已知：BD、CE 是$\triangle ABC$ 的高，点 P 在 BD 的延长线上，$BP=AC$，点 Q 在 CE 上，$CQ=AB$，求证：(1) $AP=AQ$；(2) $AP\perp AQ$.（1996 年河南省初中竞赛题）

证明 如图 3-7，设 CE 交 BD 于 F.

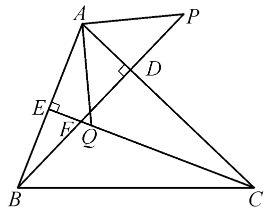


图 3-7

(1) 由 $BD\perp CA$，$CE\perp AB$，知

$$\angle BEF=90^\circ=\angle CDF.$$

而 $$\angle BFE=\angle CFD,$$

故 $$\angle ABP=\angle QCA.$$

由已知，有 $AB=QC$，$BP=CA$，从而

$$\triangle ABP\cong\triangle QCA,$$

即有 $$AP=AQ.$$

(2) 由(1)可得 $\angle AQC=\angle PAB$，而

$$\angle AQC=\angle QEA+\angle QAE=90^\circ+\angle QAE,$$

$$\angle PAB=\angle PAQ+\angle QAE,$$

从而可得 $$\angle PAQ=90^\circ,$$

即 $$AP\perp AQ.$$

例 4 如图 3-8，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是底边 BC 上一点，E 是线段 AD 上一点，且 $\angle BED=2\angle CED=\angle BAC$，求证：$BD=2CD$.（1992 年全国初中联赛题）

证明 作$\angle BED$ 的平分线交 BC 于 F，又过 A 作 $AH\parallel EF$ 交 BE 于 G，交 BC 于 H，则知

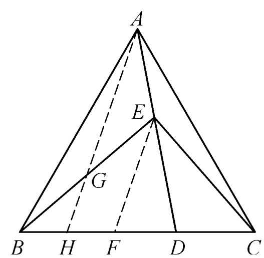


图 3-8

$$\angle EAG=\angle DEF=\angle BEF$$
$$=\angle AGE=\frac{1}{2}\angle BAC,$$

从而 $$GE=AE.$$

又 $\angle AGE=\dfrac{1}{2}\angle BED=\angle CED$，则

$$\angle AGB=\angle CEA.$$

由 $$\angle ABE+\angle BAE=\angle BED=\angle BAC=\angle CAE+\angle BAE,$$

有 $$\angle ABG=\angle CAE.$$

注意到 $AB=CA$，故有

$$\triangle ABG \cong \triangle CAE.$$

从而，$$BG=AE,\ AG=CE.$$

于是 $$BG=GE.$$

又由 $AH \parallel EF$，有 $BH=HF$，$GH=\frac{1}{2}EF$.

且 $$\frac{AH}{EF}=\frac{HD}{FD}.$$

而 $\angle CED=\angle FED$，从而

$$\frac{CD}{FD}=\frac{EC}{EF}=\frac{AG}{EF}=\frac{AH-GH}{EF}=\frac{AH}{EF}-\frac{1}{2}=\frac{HD}{FD}-\frac{1}{2},$$

即 $$CD=HD-\frac{1}{2}FD=HF+\frac{1}{2}FD=\frac{1}{2}BF+\frac{1}{2}FD=\frac{1}{2}BD,$$

故 $$BD=2CD.$$

注 此例有多种证法. 可参见第 4 章例 5.

例 5 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=80^\circ$，$\angle ABC=60^\circ$，D 为三角形内一点，且 $\angle DAB=10^\circ$，$\angle DBA=20^\circ$. 求$\angle ACD$的度数.

解 如图 3－9，延长 BD 交 AC 于 E，则 $\angle AEB=80^\circ=\angle BAE$，$AB=BE$. 在 BC 上截取 $BF=BA$，连 AF，则$\triangle ABF$为等边三角形. 在 AC 上截取 $AG=AB$，连 BG、DG、EF、FG.

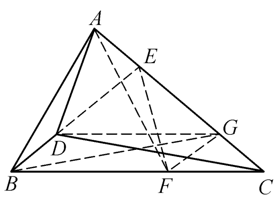


图 3－9

由边角边定理，知等腰$\triangle AFG \cong$等腰$\triangle BAE$.

在$\triangle BEF$中，因 $BE=BF$，$\angle EBF=40^\circ$，则 $\angle BEF=70^\circ$，易得 $\angle FEG=30^\circ=\angle ADE$.

由角边角定理，知 $\triangle FEG \cong \triangle ADE$. 于是 $EG=DE$.

注意到 $\angle EBC=40^\circ=\angle ECB$，故 $EC=EB$.

又由边角边定理，知 $\triangle EDC \cong \triangle EGB$，从而 $\angle ACD=\angle EBG$.

在$\triangle ABG$中，因 $AB=AG$，$\angle BAG=80^\circ$，则 $\angle ABG=50^\circ$，从而 $\angle EBG=30^\circ$. 故 $\angle ACD=30^\circ$.

例 6 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=5.25^\circ$，AD 是$\angle BAC$的平分线，过 A 作 DA 的垂线交直线 BC 于点 M. 若 $BM=BA+AC$，试求$\angle ABC$和$\angle ACB$的度数.（1991 年北京市初中竞赛题）

解　由于点 M 在直线 BC 上，因而应分两种情况讨论计算：

(1) 如图 3－10，过 A 作 AD 的垂线交 BC 延长线于点 M，延长 BA 到 C_1，使 $\angle AMC_1=\angle AMC$.

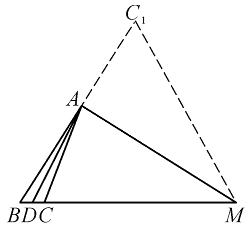


图 3－10

由题设 AD 平分 $\angle BAC$ 知 $\angle CAM=\angle C_1AM$，注意到 AM 为公共边，则由角边角定理得 $\triangle ACM\cong\triangle AC_1M$. 于是，有 $AC_1=AC$. 又由 $BM=BA+AC$，知 $BC_1=BM$. 从而

$$\angle AC_1M=\angle BMC_1.$$

在 $\triangle BC_1M$ 中，

$$\begin{aligned}\angle B&=180^\circ-2\angle AC_1M=180^\circ-2\angle ACM\\&=180^\circ-2(\angle B+5.25^\circ)\\&=180^\circ-2\angle B-10.5^\circ,\end{aligned}$$

因此，
$$\angle ABC=56.5^\circ,$$
$$\angle ACB=180^\circ-5.25^\circ-56.5^\circ=118.25^\circ.$$

(2) 如图 3－11，过 A 作 AD 的垂线交 CB 延长线于点 M，延长 BA 到 C_1，使 $\angle AMC_1=\angle AMC$.

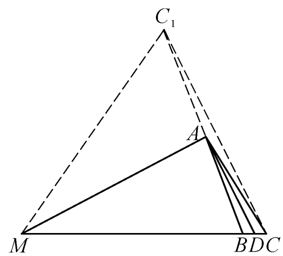


图 3－11

由题设 AD 平分 $\angle BAC$ 知 $\angle CAM=\angle C_1AM$，注意到 AM 为公共边，则 $\triangle ACM\cong\triangle AC_1M$，即有 $\angle ACM=\angle AC_1M$ 且 $AC_1=AC$.

又由 $BM=BA+AC$，知 $BC_1=BM$. 从而

$$\angle AC_1M=\angle BMC_1.$$

于是，在 $\triangle MCC_1$ 中，

$$3\angle ACM+2\angle ACC_1=3\angle ACM+\angle BAC=180^\circ,$$

即有
$$\angle ACM=\frac{1}{3}(180^\circ-\angle BAC)=58.25^\circ.$$

即
$$\angle ACB=58.25^\circ,$$
$$\angle ABC=180^\circ-58.25^\circ-5.25^\circ=116.5^\circ.$$

例 7　求证：如果两个三角形有两条边和第三条边上的中线对应相等，那么这两个三角形全等.

已知：如图 3－12，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，AD、$A'D'$ 分别是边 BC、

$B'C'$上的中线，$AB = A'B'$，$AC = A'C'$，$AD = A'D'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

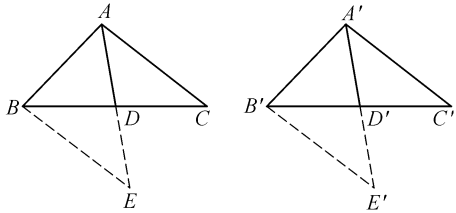


图 3-12

证明 分别延长AD、$A'D'$至E、E'，使$DE = AD$，$D'E' = A'D'$. 连结BE、$B'E'$,则$AE = 2AD$，$A'E' = 2A'D'$.

因为$AD = A'D'$，所以$AE = A'E'$.

在$\triangle ADC$和$\triangle EDB$中，由$AD = DE$，$\angle ADC = \angle EDB$，$BD = DC$，知$\triangle ADC \cong \triangle EDB$，从而$AC = BE$，$\angle E = \angle CAD$.

同理，$\triangle A'D'C' \cong \triangle E'D'B'$，有$A'C' = B'E'$，$\angle E' = \angle C'A'D'$.

因为$AC = A'C'$，所以$BE = B'E'$.

在$\triangle ABE$和$\triangle A'B'E'$中，由$AB = A'B'$，$BE = B'E'$，$AE = A'E'$，所以，有$\triangle ABE \cong \triangle A'B'E'$. 从而$\angle E = \angle E'$，$\angle BAE = \angle B'A'E'$，所以$\angle CAD = \angle E = \angle E' = \angle C'A'D'$，所以$\angle BAC = \angle B'A'C'$.

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，由$AB = A'B'$，$\angle BAC = \angle B'A'C'$，$AC = A'C'$，故$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

例 8 在$\triangle ABC$中，D为AB的中点，分别延长CA、CB到点E、F，使$DE = DF$. 过E、F分别作直线CA、CB的垂线，相交于点P，设线段PA、PB的中点分别为M、N. 求证：

(1) $\triangle DEM \cong \triangle FDN$；

(2) $\angle PAE = \angle PBF$.

(2003 年全国初中联赛题)

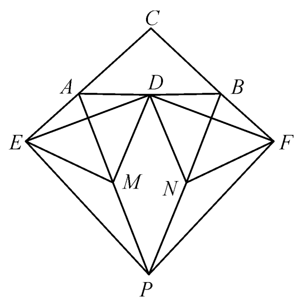


图 3-13

证明 (1) 如图 3-13，根据题设可知，

$$DM \mathrel{\underline{\parallel}} BN,\ DN \mathrel{\underline{\parallel}} AM.$$

所以 $$\angle AMD = \angle APB = \angle BND.$$

因为M、N分别是直角三角形$\triangle AEP$、$\triangle BFP$的斜边的中点，所以

$$EM = AM = DN,$$
$$FN = BN = DM.$$

又已知$DE = DF$，从而

$$\triangle DEM \cong \triangle FDN.$$

(2) 由(1)可知$\angle EMD = \angle FND$，则由$\angle AMD = \angle DNB$可得

$$\angle AME=\angle BNF.$$

而$\triangle AME$、$\triangle BNF$ 均为等腰三角形，所以 $\angle PAE=\angle PBF$.

例 9 试证明：有两条边及一个角的角平分线对应相等的两个三角形全等.

证明 设$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$的三边之长分别记为 a、b、c 和 a'、b'、c'，三条角平分线长分别记为 t_a、t_b、t_c 和 t'_a、t'_b、t'_c，半周长分别记为 p 和 p'.

当有两条边及它们的夹角的平分线对应相等时，不妨设 $b=b'$，$c=c'$，$t_a=t'_a$.

利用角的平分线性质计算得

$$BP\cdot PC=\frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

注意到斯特瓦尔特定理的特殊情形，即式(2-12)，可得到

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

$$t'_a=\frac{2}{b'+c'}\sqrt{b'c'p'(p'-a')}.$$

由 $b=b'$，$c=c'$，$t_a=t'_a$，有

$$\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\cdot(p-a)}=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp'(p'-a')},$$

即有 $$p(p-a)=p'(p'-a'),$$

亦即有 $$(b+c+a)(b+c-a)=(b+c+a')(b+c-a'),$$

从而得 $$a=a',$$

所以 $$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

当有两条边及其中一边的对角的平分线对应相等时，不妨设

$$a=a',\ b=b',\ t_a=t'_a.$$

此时，有

$$\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\cdot\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}}=\frac{2}{b+c'}\sqrt{bc'\cdot\frac{b+c'+a}{2}\cdot\frac{b+c'-a}{2}}$$

两边平方，得

图书在版编目(CIP)数据

三角形与四边形/沈文选编著. —3 版. —上海：华东师范大学出版社，2019
(数学奥林匹克小丛书. 初中卷)
ISBN 978-7-5675-9671-9

Ⅰ. ①三… Ⅱ. ①沈… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 224700 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·初中卷
三角形与四边形(第三版)

编　　著　沈文选
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
责任编辑　陈　震
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　15
字　　数　265 千字
版　　次　2020 年 4 月第三版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—37 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9671-9
定　　价　36.00 元

出 版 人　王　焰

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206

2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422

3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244

4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349

5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454

6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。