数学奥林匹克小丛书

第三版

初中卷 5

Mathematical Olympiad Series

圆

柯新立 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总　　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率. 这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在 IMO 获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家. 例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978 年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990 年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994 年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998 年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998 年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002 年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006 年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006 年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010 年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010 年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010 年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014 年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 圆、扇形、弓形的周长和面积

平面上到定点距离等于定长的点的集合称为圆.

扇形、弓形是两种与圆有关的常见的重要图形. 圆中一段弧及过该弧两端点的半径围成的图形称为扇形;由圆的弦及所对弧围成的图形称为弓形.

设圆的半径为 r,则圆的周长 $C = 2\pi r$, 面积 $S = \pi r^2$.

若扇形的半径为 r,弧所对圆心角为 $n°$,则扇形弧长 $l = \dfrac{n\pi r}{180}$, 扇形周长 $C = \dfrac{n}{180}\pi r + 2r$, 扇形面积 $S = \dfrac{n\pi r^2}{360}$.

弓形面积则需考虑弦所对弧是优弧还是劣弧. 如图 1-1,弓形 ADB 的面积 $S = S_{\text{扇形}ADB} + S_{\triangle AOB}$,弓形 ACB 的面积 $S = S_{\text{扇形}ACB} - S_{\triangle AOB}$,弓形的周长 $C =$ 弦长 $+$ 弧长.

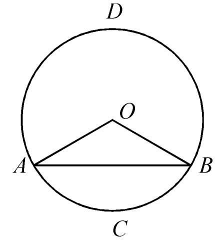


图 1-1

由圆、扇形、弓形等构成的组合图形面积或周长计算通常需一定技巧,常见处理这类问题的手段是分解组合、等积变形等等.

例 1 如图 1-2,AB、CD 是⊙O 的两条互相垂直的直径,且 $AB = 2$,以点 B 为圆心,BA 为半径画弧 $\overset{\frown}{AE}$ 交 CD 延长线于点 E,又四边形 $EFGO$ 为正方形,求阴影部分的面积.

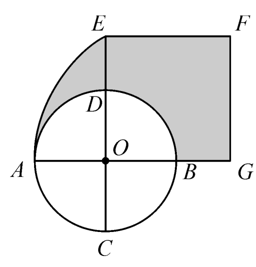


图 1-2

分析 将图形分割为 AED 区域和 $DEFGB$ 区域,其中 AED 区域的面积等于扇形 ABE 的面积减去扇形 AOD 的面积,再减去 $\triangle OBE$ 的面积.

解 注意到 $BA = BE$,且 EO 垂直平分 AB,故 $\triangle ABE$ 为正三角形,$\angle ABE = 60°$, $OE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}$,

所以

$$S_{阴ADE}=S_{扇形ABE}-S_{扇形AOD}-S_{\triangle OBE}$$
$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
$$S_{阴DEFGB}=S_{正方形EFGO}-S_{扇形DOB}$$
$$=(\sqrt{3})^2-\frac{\pi}{4}=3-\frac{\pi}{4}.$$

故 $S_{阴}=3+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例 2 如图 1－3，已知 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，先以 AB 为直径作半圆 $BHCEA$，再分别以 BC、AC 为直径作半圆 BGC、半圆 AFC，求由这三个半圆构成的两个月牙形的面积之和.

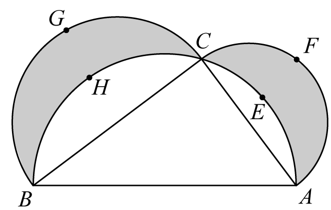


图 1－3

解析 由勾股定理易知 $AB=10$，月牙形面积之和

$$\begin{aligned}S&=S_{BGCH}+S_{CFAE}\\&=S_{半圆BGC}+S_{半圆AFC}-S_{半圆ACB}+S_{\triangle ABC}\\&=\frac{1}{8}\times 8^2\times\pi+\frac{1}{8}\times 6^2\times\pi-\frac{1}{8}\times 10^2\times\pi+\frac{1}{2}\times 6\times 8\\&=24.\end{aligned}$$

说明 这是一个蕴含着厚重数学文化的问题，现在我们站在巨人的肩膀上来看，问题不难，然而从历史角度来看，却是一个伟大的发现. 月牙形是一种边缘为两个圆弧的平面图形. 求月牙面积是公元前 5 世纪古希腊希俄斯的希波克拉底(Hippocrates of Chios)的伟大发现. 威廉·邓纳姆(William Dunham)在他的科普名著《天才引导的历程：数学中的伟大定理》中，讲述了 12 个伟大的定理，其中第一个定理就是希波克拉底的月牙面积定理. 有兴趣的读者可查阅相关资料.

例 3 已知 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=1$，$AB=2$，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 120 度得到 $\triangle A_1BC_1$，求边 AC 扫过部分的面积和周长.

分析 问题的关键是确定边 AC 扫过部分的形状，通过作图不难得到图 1－4. 边 AC 扫过的部分是由弧 AA_1、边 AC、弧 CC_1、边 A_1C_1 构成的曲边四边形.

解 由勾股定理易得：$AC=\sqrt{3}$，且 $S_{\triangle A_1C_1B}=S_{\triangle ACB}$，所以

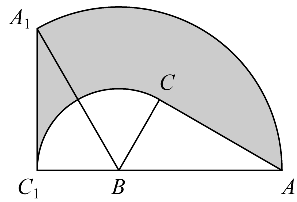


图 1－4

$$\begin{aligned}S_{曲边四边形A_1C_1CA}&=S_{扇形BA_1A}+S_{\triangle A_1C_1B}-S_{扇形BC_1C}-S_{\triangle ACB}\\&=S_{扇形BA_1A}-S_{扇形BC_1C}\\&=\frac{120}{360}\times\pi\times2^2-\frac{120}{360}\times\pi\times1^2=\pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{曲边四边形A_1C_1CA}&=C_{弧AA_1}+C_{弧CC_1}+AC+A_1C_1\\&=\frac{120}{360}\times2\pi\times2+\frac{120}{360}\times2\pi\times1+\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\pi+2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

例 4 如图 1－5，正方形 $ABCD$ 的边长为 a，分别以点 A、B、C、D 为圆心，a 为半径画弧，求四条弧所围成的阴影部分面积.

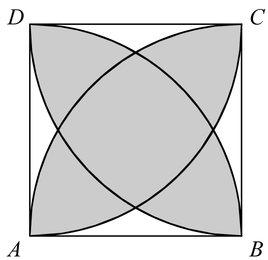


图 1－5

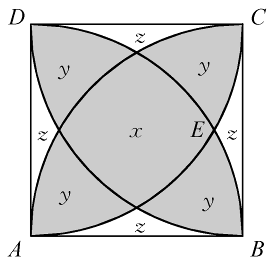


图 1－6

解析 如图 1－6 将正方形进行分割，形状相同面积相等的区域用相同字母表示，于是

$$x+4y+4z=a^2, \tag{①}$$

$$x+3y+2z=\frac{\pi a^2}{4}. \tag{②}$$

另外，设以点 A、D 为圆心的弧交于点 E，则 $AE=DE=AD$，故$\triangle ADE$ 为正三角形. 所以

$$\begin{aligned}x+2y+z&=2\times\frac{\pi a^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\\&=\frac{\pi a^2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.\end{aligned} \tag{③}$$

由①、②、③解得

$$z=\left(1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2.$$

于是

$$S_{阴}=a^2-4z=\left(\sqrt{3}-3+\frac{2}{3}\pi\right)a^2.$$

说明　此题关键是发现$\triangle ADE$为正三角形，因此，请读者在解决问题时宜用心发掘潜在条件.

例 5　如图 1－7，扇形的半径为 20，圆心角为 144°，B、C、D、E、F、G、H 是扇形弧线的八等分点，求阴影部分的面积之和.

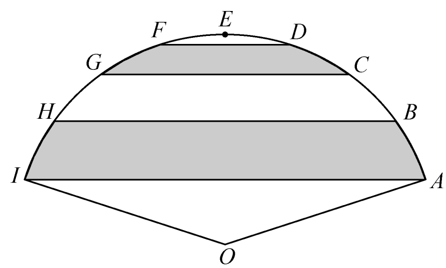


图 1－7

分析　合理分割，小心拼接.

解　如图 1－8，连结 OE 交 DF 于点 M，交 GC 于点 J，交 HB 于点 K，交 AI 于点 N. 连结 OF 交 AI 于点 Q，连结 OG 交 HB 于点 P，连结 OH.

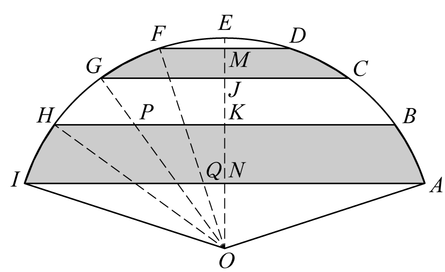


图 1－8

易知$\triangle OFM \cong \triangle ION$，从而 $S_{QNMF}=S_{\triangle IQO}$，而区域 $IHGFQ$ 为公共部分，故 $S_{扇形IOF}=S_{FMNI}$.

又$\triangle GJO \cong \triangle OKH$，所以 $S_{GPKJ}=S_{\triangle OHP}$. 又区域 GHP 为公共部分，故

$S_{GHKJ}=S_{扇形HOG}$.

从而在区域 $FMNI$ 中,

$$S_{阴}=S_{扇形IOF}-S_{扇形HOG}=S_{扇形IOG}=\frac{36}{360}\pi r^2=40\pi.$$

由于对称性,于是在区域 $AIFD$ 中,$S_{阴}=80\pi$.

例 6 如图 1-9,在一个三边长分别为 50、120、130 的三角形内部和外部分别取与三角形边上至少有一点的距离为 2 的所有点,求所有这些点构成的区域的面积.

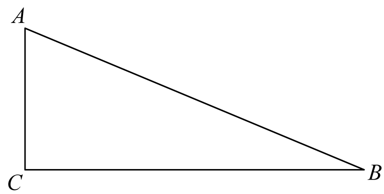


图 1-9

分析 先确定这些点形成的区域,在三角形边上任选一点 O,以该点为圆心,2 为半径画圆,当点 O 遍历三角形上所有点时,圆 O 扫过的区域符合条件. 如图1-10.

解 依题意,所求面积区域为图 1-10 中$\triangle A_1B_1C_1$ 的外围部分面积.

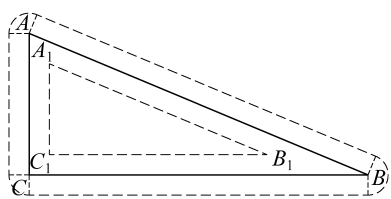


图 1-10

$\triangle ABC$ 的三个顶点处各有一个小扇形,半径均为 2,合在一起恰为一个半径为 2 的圆,故图中$\triangle ACB$ 外部面积 $S_1=\pi\times2^2+(50+120+130)\times2=600+4\pi$.

其次,易知$\triangle A_1C_1B_1\backsim\triangle ACB$,且共内心,内切圆半径相差 2. 由于$\triangle ACB$ 的内切圆半径为 $\frac{50+120-130}{2}=20$,故$\triangle A_1B_1C_1$ 的内切圆半径为 18.

所以
$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{81}{100},$$

从而
$$\begin{aligned}S_{A_1B_1C_1}&=\frac{81}{100}\times S_{ABC}\\&=\frac{81}{100}\times\frac{1}{2}\times 50\times 120\\&=2430,\end{aligned}$$

于是夹在$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle ABC$之间的区域面积S_2为570.

所以符合条件的点构成区域的面积为

$$S_1+S_2=600+4\pi+570=1170+4\pi.$$

例 7 如图 1-11,在边长为 1 的正五边形 $ABCDE$ 内,去掉所有与各顶点距离都小于 1 的点,求余下部分的面积.

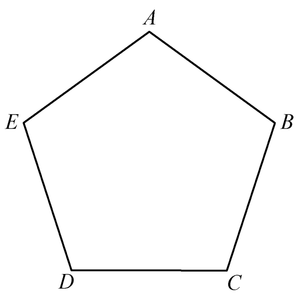


图 1-11

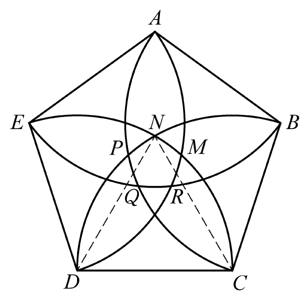


图 1-12

分析 关键是确定余下部分的形状.

解 如图 1-12 所示,分别以点 A、B、C、D、E 为圆心,以 1 为半径画弧,这些弧围成一个"曲边五边形"$MNPQR$,其内部的点到正五边形各顶点的距离都小于 1,余下的部分由五个等积的形如"曲边三角形"NBC 的图形组成.

注意到曲边三角形 NBC 与扇形 NDC 的面积之和等于$\triangle DNC$与扇形 NCB 的面积之和,所以所求余下部分的面积

$$\begin{aligned}S&=5(S_{\triangle DNC}+S_{\text{扇形}NCB}-S_{\text{扇形}NDC})\\&=5\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{108-60}{360}\pi-\frac{60}{360}\pi\right)\\&=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

例 8 已知正方形和三角形都外切于半径为 1 的圆，求证：正方形和三角形重叠部分且在圆外部区域的面积大于 0.34.

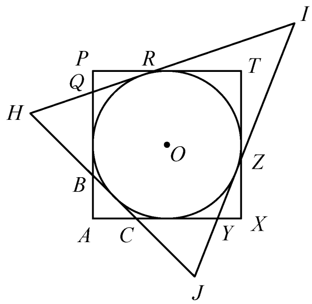


图 1－13

证明 当三角形的边与正方形的边所在直线不重合也不平行时，则三角形的边必将正方形截去一些“角”，如图 1－13，正方形 $APTX$ 与 $\triangle HIJ$ 都与半径为 1 的圆 O 外切，$\triangle ABC$、$\triangle PQR$、$\triangle XYZ$ 这些“角”将被截去. 这些“角”在重叠部分之外，先考虑这部分面积的情况.

如图 1－14，$\odot O$ 分别切正方形 $APTX$ 的边 AP、AX 于点 E、F，切 $\triangle ABC$ 的边 BC 于点 D，连结 OE、OF，则四边形 $OEAF$ 为正方形. 设 $AB=x$，$AC=y$，则 $BD=EB=1-x$，$CD=CF=1-y$，故在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中有 $(1-x+1-y)^2=x^2+y^2$，化简整理得：$2+xy=2(x+y)$，于是 $2+xy=2(x+y)\geqslant 4\sqrt{xy}$（等号当且仅当 $x=y$ 时取到），解得：$\sqrt{xy}\geqslant 2+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{xy}\leqslant 2-\sqrt{2}$，但 $0<x$，$y<1$，从而 $\sqrt{xy}<1$，于是 $\sqrt{xy}\leqslant 2-\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}xy\leqslant(\sqrt{2}-1)^2$，由于三角形的边至多截去正方形三个“角”，若设符合题意的区域面积为 S，则

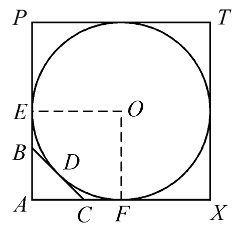


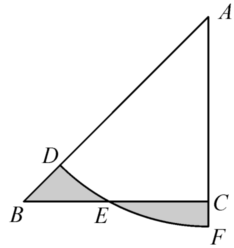
图 1－14

$$
\begin{aligned}
S &\geqslant S_{\text{正方形}APTX}-3(\sqrt{2}-1)^2-S_{\text{圆}}\\
&=2^2-3\times(\sqrt{2}-1)^2-\pi\times 1^2\\
&=6\sqrt{2}-5-\pi>0.34.
\end{aligned}
$$

说明 $S\geqslant S_{\text{正方形}APTX}-3(\sqrt{2}-1)^2-S_{\text{圆}}$ 中等号当且仅当截去的三个“角”即 $\triangle ABC$、$\triangle PQR$、$\triangle XYZ$ 都为等腰直角三角形，如图 1－13，则 $\angle H=\angle J=90^\circ$，这与 $\triangle HIJ$ 的内角和为 180° 矛盾，从而此处等号不能取到. 但 S 可无限接近于 $6\sqrt{2}-5-\pi$.

习 题 1

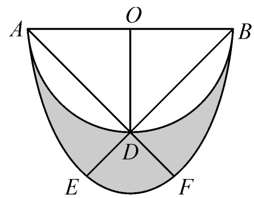
1 如图，$\text{Rt}\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle C=90^\circ$，点D在边AB上，以A为圆心，AD为半径画弧交BC于点E，交AC延长线于点F. 若图中两个阴影部分面积相等，求$AD:DB$.



（第 1 题）

2 在一块周长为500米的三角形草坪周围修筑一条宽1米的小路，且路的任何一处至少与草坪的某处距离为1米，求路的占地面积.

3 如图，AB是半圆O的直径，作$OD\perp AB$交半圆O于点D，分别以点A、B为圆心，AB为半径画弧交AD、BD延长线于F、E，再以点D为圆心，DE为半径画弧，连结E、F，若$AB=2$，求图中阴影部分的面积.



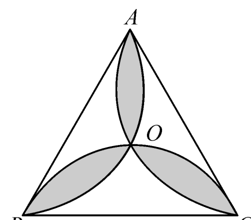
（第 3 题）

4 直角三角形ACB中，$AC=CB=2$，$\angle C=90^\circ$，将$\triangle ACB$绕C顺时针转90°，求边AB扫过的区域面积.

5 将一枚半径为1 cm的硬币置于正n边形内，硬币可在里面任意移动，但不可超越边界，求正n边形内硬币不能接触到的部分面积.

6 如图，正三角形的边长为a，过每两个顶点及中心O在三角形内作弧，求阴影部分的面积$S_{阴}$.

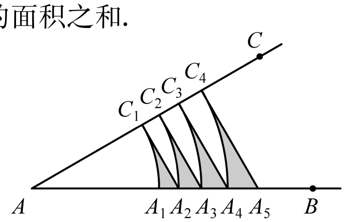
7 正三角形的边长为$2a$，以各顶点为圆心，$\sqrt{2}a$为半径画圆，求这三个圆的公共部分面积.



（第 6 题）

8 $\triangle ABC$的三条边$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，作$\triangle ABC$的内切圆，再作此内切圆的三条切线分别平行AB、BC、CA，又得到三个小三角形，再作这三个小三角形的内切圆，求这四个圆的面积之和.

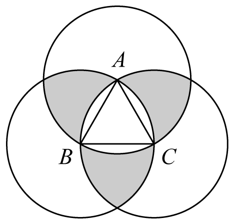
9 如图，已知$\angle CAB=30^\circ$，点A_1在AB上且$AA_1=1$，以AA_1为半径画弧交AC于点C_1，作$C_1A_2\perp AC$交AB于A_2，以AA_2为半径画弧交AC于点C_2，作$C_2A_3\perp AC$交AB于A_3…… 一直重复下去，记以弧



（第 9 题）

C_iA_i、线段 A_iA_{i+1} 和线段 C_iA_{i+1} 围成的图形面积为 S_i，($i=1$，2，3，…，)，求 $S_1+S_2+\cdots+S_{2018}$.

10 如图，分别以边长为 2 的正三角形 $\triangle ABC$ 的顶点为圆心，2 为半径画圆，求图中阴影部分的周长和面积.



(第 10 题)

2 圆的对称性

平面上到定点距离等于定长的点的集合称为圆.圆既是轴对称图形,又是中心对称图形.圆的任意一条直径所在直线是圆的对称轴,圆心是圆的对称中心.圆绕圆心旋转任何角度,都能够与原来的图形重合,因此圆还具有旋转不变性.对称性是圆的最基本性质,垂径定理是圆的轴对称性的集中体现.

垂径定理 垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的两条弧.

如图 2-1 所示,直径 CD 垂直于弦 AB,垂足为点 H,我们可以得到:$AH=HB$;$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$;$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$.

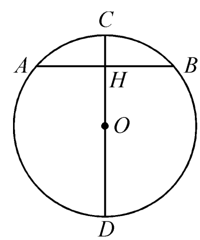


图 2-1

事实上,垂径定理中五个要素:①直径(CD),②平分弦 AB,③垂直于弦 AB,④平分弧$\overset{\frown}{ACB}$,⑤平分弧$\overset{\frown}{ADB}$中,除①②$\nRightarrow$③④⑤外,任意两个作为条件都可推出另外三个结论(请读者自证).

直径 CD 垂直弦 AB 于点 H 时,圆心 O 到垂足 H 的距离称为弦心距,这里$\triangle OAH$ 是一个重要三角形,它联系着半弦长、半径、弦心距之间的数量关系,是处理这类问题的重要工具,而且我们利用这个特殊的直角三角形不难发现:

在同圆(或等圆)中,弦相等$\Leftrightarrow$弦心距相等.

在同圆(或等圆)中,弦越长$\Leftrightarrow$弦心距越短.

结合圆中角的性质,我们可以得到:在同圆或等圆中,弦心距相等$\Leftrightarrow$对应的弦相等$\Leftrightarrow$所对的圆心角相等$\Leftrightarrow$对应的圆周角相等$\Leftrightarrow$所对的弧相等.

圆中两条平行的弦所夹的弧相等.

例 1 如图 2-2 所示,AB 与 CD 是$\odot O$ 的两条互相垂直的弦,它们将圆 O 分成四个部分,若弦 AB 的弦心距为 a,弦 CD 的弦心距为 b,求最大与最小两部分之和减去其他两部分之和的差.

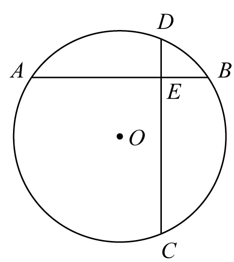


图 2-2

分析 考虑到各部分形状,不便直接计算各部分面

积，可利用圆的对称性合理分割.

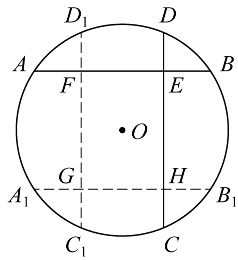


图 2 - 3

解　如图 2 - 3 所示，作弦 $A_1B_1 \underline{\underline{\parallel}}$ 弦 AB，弦 $C_1D_1 \underline{\underline{\parallel}}$ 弦 CD，则⊙O 被分割为 9 块，易知四个“”型全等，四个“”型中，上、下两个全等，左、右两个全等，从而所求面积恰好等于中间的矩形 $EFGH$ 的面积. 依题意不难得到 $EF = 2b$，$FG = 2a$，所以最大与最小部分之和与其他两部分之和的差为 $4ab$.

说明　本题是巧用圆的对称性的很好范例.

例 2　如图 2 - 4，已知 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = 3$，$BC = 4$，点 D 为 BC 中点，E 为边 AB 上一点，将 $\triangle BDE$ 沿 DE 翻折得到 $\triangle DEF$，求 AF 的最小值.

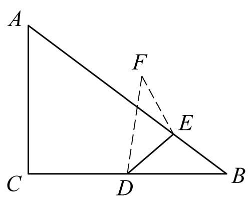


图 2 - 4

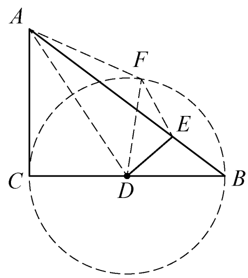


图 2 - 5

分析　DF 为定值，值得注意.

解　注意到 $DF = DB = 2$，所以点 F 在以 D 为圆心，2 为半径的圆上运动，如图 2 - 5 所示，而 $AF + FD \geqslant AD$，当且仅当 A、F、D 三点共线时取等号，所以 $AF \geqslant AD - FD = \sqrt{13} - 2$，当点 F 是⊙D 与线段 AD 的交点时，取到等号，即 AF 的最小值为 $\sqrt{13} - 2$.

说明　一般地，半径为 r 的圆 O 所在平面上一点 P 到圆 O 上一点 A 距离的最大值为 $OP + r$，最小值为 $|OP - r|$，当且仅当 P、O、A 共线时取等号. 这是圆的对称性另一种表现.

例 3　如图 2 - 6 所示，⊙O 的直径 AB 为 20 cm，G 是直径 AB 上一点，CD 是过 G 的一条弦，$CD = 16$ cm，过 A、B 分别作 $AE \perp CD$ 于点 E，$BF \perp CD$ 于点 F，求 AE 与 BF 的长度之差.

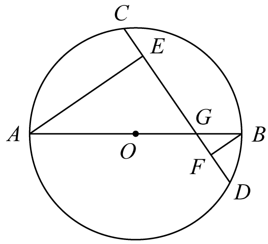


图 2-6

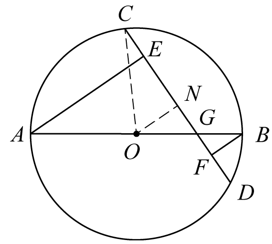


图 2-7

分析 作 $ON \perp CD$ 于点 N，连结 CO，如图 2-7. 首先，通过Rt$\triangle CON$可联系 AB、CD 之长；其次，可利用$\triangle GON$，$\triangle GAE$，$\triangle GBF$ 之间相似找到 AE、BF 的数量关系.

解 作 $ON \perp CD$ 于点 N，连结 OC，则

$$ON = \sqrt{OC^2 - CN^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2}$$
$$= 6(\text{cm}),$$

易知 $$\triangle GON \backsim \triangle GAE \backsim \triangle GBF,$$

所以$\dfrac{ON}{AE} = \dfrac{OG}{GA}$，$\dfrac{ON}{BF} = \dfrac{OG}{BG}$，从而

$$\begin{aligned} AE - BF &= \frac{ON}{OG} \cdot GA - \frac{ON}{OG} \cdot BG \\ &= \frac{ON}{OG}[OA + OG - (OB - OG)] \\ &= \frac{ON}{OG} \times 2OG = 2ON = 12(\text{cm}). \end{aligned}$$

例 4 如图 2-8 所示，EF 是$\odot O$ 的直径，B、C 在直径 EF 上且 $EB = BC = CF$，点 A 在$\odot O$ 上. 求证：$AB + AC \leqslant \dfrac{\sqrt{10}}{3}EF$.

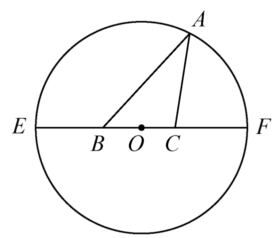


图 2-8

分析 注意到点 O 是 BC 的中点及圆的中心对称性，延长 AO 交$\odot O$ 于点 D，则四边形 $ABDC$ 为平行四边形，可建立 AB、AC 及直径的数量关系.

解 延长 AO 交$\odot O$ 于点 D，连结 BD、CD（如图 2-9 所示），又易知 O 为 BC 中点，所以四边形 $ABDC$ 为平行四边形，从而

$$2(AB^2+AC^2)=AD^2+BC^2=EF^2+\left(\frac{1}{3}EF\right)^2$$
$$=\frac{10}{9}EF^2.$$

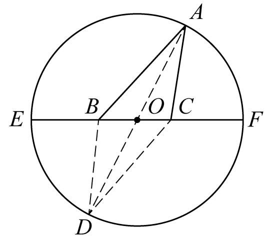


图 2－9

又 $\quad 2(AB^2+AC^2)-(AB+AC)^2=(AB-AC)^2\geqslant 0$，

所以$\frac{10}{9}EF^2=2(AB^2+AC^2)\geqslant(AB+AC)^2$，

即 $\qquad AB+AC\leqslant\frac{\sqrt{10}}{3}EF.$

说明　本题解法中，延长 AO，实现直径与 AB、AC 统一于一个平行四边形之中，是圆的中心对称性的体现.

例 5　如图 2－10 所示，已知$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 交于 P、Q 两点，过点 P 作割线 APB 交$\odot O_1$ 于点 A，交$\odot O_2$ 于点 B，且 $AB\parallel O_1O_2$；过点 P 另作割线 CPD 交$\odot O_1$ 于点 C，交$\odot O_2$ 于点 D. 请比较 AB 与 CD 的大小.

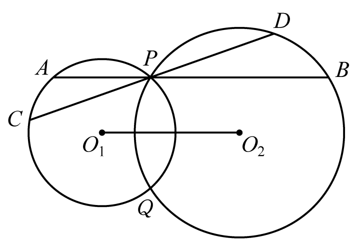


图 2－10

分析　如图 2－11，作 $O_1E\perp AB$ 于点 E，$O_2F\perp AB$ 于点 F，则 $O_1O_2=\frac{1}{2}AB$，实现 AB 长度与 O_1O_2 长度的转化. 同样地，作 $O_1G\perp CD$ 于点 G，$O_2H\perp CD$ 于点 H，再作 $O_1M\perp O_2H$ 于点 M，则 $O_1M=\frac{1}{2}CD$. 从而将 AB、CD 的长度统一于 $\mathrm{Rt}\triangle MO_1O_2$ 中，问题可解.

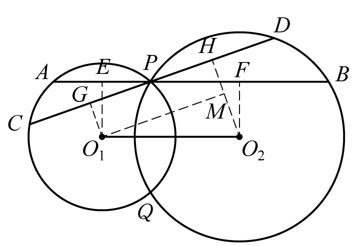


图 2－11

解　作 $O_1E \perp AB$ 于 E，$O_2F \perp AB$ 于 F，则 $O_1O_2 = \dfrac{1}{2}AB$，作 $O_1G \perp CD$ 于 G，$O_2H \perp CD$ 于 H，作 $O_1M \perp O_2H$ 于 M，则 $O_1M = \dfrac{1}{2}CD$，如图 2－11 所示．在 Rt$\triangle O_1O_2M$ 中，$O_1M < O_1O_2$，所以 $\dfrac{1}{2}CD < \dfrac{1}{2}AB$，即 $CD < AB$．

例 6　如图 2－12 所示，在⊙O 中任意作两条半径 OA、OB，过点 A 作 $AC \perp OB$ 于点 C，过点 C 作 $CP \perp AB$ 于点 P，连结 OP．求证：$OP^2 + CP^2 = R^2$（这里 R 是⊙O 的半径）．

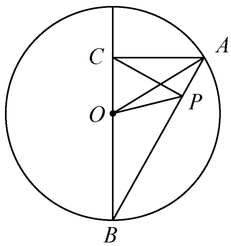


图 2－12

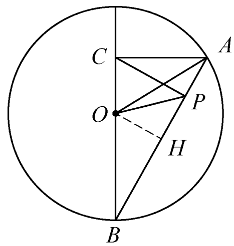


图 2－13

分析　结论的形式提示应作 $OH \perp AB$ 于点 H，利用勾股定理．

解　作 $OH \perp AB$ 于点 H，如图 2－13 所示，则

$$\begin{aligned} OP^2 &= OH^2 + HP^2 \\ &= OB^2 - HB^2 + HP^2 \\ &= R^2 - \frac{1}{4}AB^2 + HP^2. \end{aligned} \qquad ①$$

在 Rt$\triangle ACB$ 中，$CP \perp AB$ 于点 P，故 $AC^2 = AP \cdot AB$（射影定理），从而，

$$\begin{aligned} CP^2 &= AC^2 - AP^2 \\ &= AP \cdot AB - AP^2 \\ &= AP(AB - AP) = AP \cdot PB \\ &= (AH - HP)(HB + HP) \\ &= \frac{1}{4}AB^2 - HP^2, \end{aligned} \qquad ②$$

①＋②得：$$OP^2 + CP^2 = R^2.$$

说明　$CP^2 = AP \cdot PB$ 可由 $\triangle ACP \backsim \triangle CBP$ 得到．

例 7 如图 2－14，已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，直线 l 过线段 BC 的中点 M 且垂直于 $\angle BAC$ 的平分线于 H，若 l 过线段 AO 的中点 N，求 $\angle BAC$ 的大小.

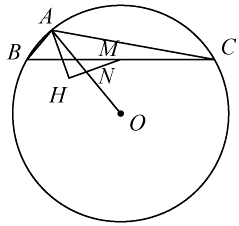


图 2－14

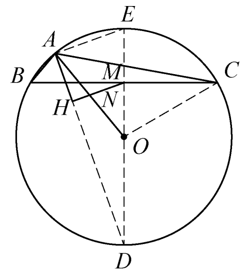


图 2－15

分析 连结 OM 并延长交 $\odot O$ 于 D、E，则 ED 为 $\odot O$ 的直径，$\angle EAD = 90°$，而 $MH \perp AH$，这是问题的突破口.

解 连结 OM 并延长交 $\odot O$ 于点 D、E，如图 2－15 所示，则 $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$，从而 $\angle BAD = \angle CAD$，即 AD 平分 $\angle BAC$，又 AH 平分 $\angle BAC$，于是 A、H、D 共线.

由于 DE 为直径，故 $\angle EAD = 90°$，又 $MH \perp AH$，故 $\angle MHD = 90°$，所以 $HM \parallel AE$，$\dfrac{OM}{ME} = \dfrac{ON}{NA} = 1$，于是在 $\mathrm{Rt}\triangle OMC$ 中有 $OM = \dfrac{1}{2}OE = \dfrac{1}{2}OC$，这说明 $\angle EOC = 60°$，由于对称性，$\angle EOB = 60°$，从而 $\angle BDC = 60°$，所以 $\angle BAC = 120°$.

例 8 如图 2－16 所示，已知 AB 是 $\odot O$ 的弦，将劣弧 AB 沿直线 AB 翻折，得到如图所示的虚线弧，若 $\angle OBA$ 的角平分线交虚线弧 AB 于 D，交 $\odot O$ 于另一点 E，且 $\dfrac{DE}{DB} = \sqrt{2}$，求 $\angle AOB$ 的度数.

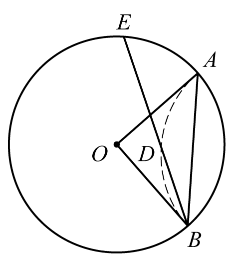


图 2－16

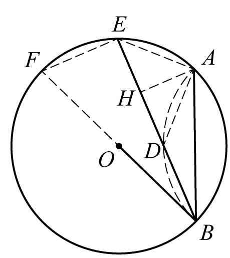


图 2－17

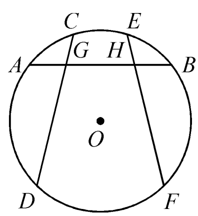
分析 关键是翻折后不变量的寻找与运用.

解　连结 AE、AD，延长 BO 交⊙O 于另一点 F，连结 EF，作 $AH \perp BE$ 于 H，如图 2-17 所示. 由于 $\angle EBA = \angle DBA$，且弧 AE 与弧 AD 所在圆是等圆，所以 $AE = AD$，从而 $EH = HD$，设 $BD = a$，则 $DH = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，于是 $BH = BD + DH = \frac{2+\sqrt{2}}{2}a$，$BE = (\sqrt{2}+1)a$，由于 BF 为直径，故 $\angle FEB = 90^\circ = \angle AHB$，又 BE 平分 $\angle FBA$，从而 $\angle FBE = \angle ABH$，于是 $\triangle EBF \backsim \triangle HBA$，所以 $\frac{AB}{FB} = \frac{HB}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，设 $BF = 2R$，则 $AB = \sqrt{2}R$，于是在 $\triangle AOB$ 中易得：$\angle AOB = 90^\circ$.

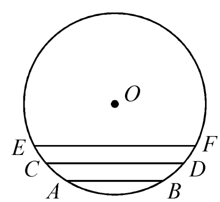
习　题　2

1　直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90^\circ$，$AC = 8$，$CB = 15$，以点 C 为圆心、半径为 8 的圆交 AB 于异于点 A 的点 D，求 BD 之长.

2　如图，AB 为⊙O 的弦，点 G、H 都在 AB 上，且 $AG = BH$，分别过点 G、H 作弦 CD、EF，若 $\angle DGB = \angle FHA$，求证：$CD = EF$.



(第 2 题)



(第 3 题)

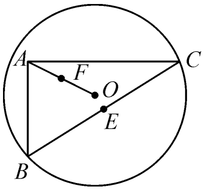
3　如图，AB、CD、EF 是⊙O 的三条互相平行的弦，且 EF 与 CD 之间的距离等于 CD 与 AB 之间的距离. 若 $AB = 6$，$CD = 8$，$EF = 2\sqrt{21}$，求⊙O 的半径.

4　已知 AB 为⊙O 的直径，P 为 AB 上一点，过点 P 作弦 CD，若 $\angle DPB = 45^\circ$，求证：$PC^2 + PD^2 = 2OA^2$.

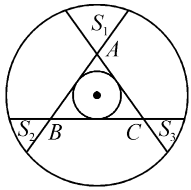
5　已知⊙O 的半径 $r = 5$，AB、CD 为⊙O 的两条弦，AB、CD 的半长分别是方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的两根，其中 $AB > CD$，且 $AB \parallel CD$. 求 AB 与 CD 间的距离.

6　如图，A 是半径为 R 的⊙O 内一个定点，$OA = m$，过点 A 作 AC 交⊙O 于点

C,作 AB 交$\odot O$于点 B 且$\angle BAC = 90^\circ$,已知 E 为 BC 中点,F 为 AO 中点,求 EF.



(第 6 题)

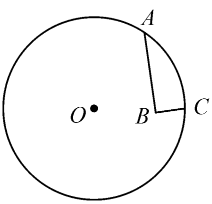


(第 7 题)

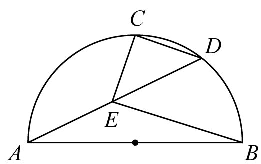
7 如图,半径给定的两圆同心,对小圆作三条切线,两两分别交于 A、B、C 三点,记以 A、B、C 为顶点的像扇形的区域面积分别为 S_1、S_2、S_3,$\triangle ABC$ 的面积为 S. 求证:$S_1+S_2+S_3-S$ 为定值.

8 如图,$\odot O$ 中有两点 A、C,点 B 在$\odot O$ 内,若 $AB = 6$, $BC = 2$, $AB \perp BC$,$\odot O$ 的半径为 $5\sqrt{2}$,求 OB.

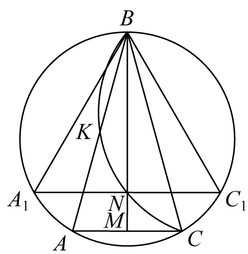
9 如图,已知点 C 为半圆弧 AB 的中点,D 为弧 BC 上任意一点,$CE \perp CD$ 交 AD 于点 E,连结 BE,若 $AB = 2$,求 BE 的最小值.



(第 8 题)



(第 9 题)



(第 10 题)

10 如图,在等腰$\triangle ABC$ 中,$AB = BC$,K、M 分别为 AB、AC 中点,$\triangle CKB$ 的外接圆与直线 BM 的另一交点为 N,过点 N 且与 AC 平行的直线与$\triangle ABC$ 的外接圆交于点 A_1、C_1,证明:$\triangle A_1BC_1$ 为正三角形.

3 与圆有关的角

圆的半径、直径、弦、割线、切线相交都会形成角，圆的许多问题都涉及到这些与圆有关的角，本节我们来谈谈这些角.

圆外角：顶点在圆外，两边和圆相交或相切的角称为圆外角.

弦切角：顶点在圆上，一条边和圆相交，另一边和圆相切的角称为弦切角.

圆周角：顶点在圆上，两条边都和圆相交的角称为圆周角.

圆内角：顶点在圆内，两边和圆相交的角称为圆内角. 特别地，顶点在圆心的圆内角又称作圆心角.

关于这些角我们有如下结论：

(1) 圆心角的度数等于它所对弧的度数；

(2) 圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半；

(3) 同弧所对圆心角是所对圆周角的两倍；

(4) 同弧或等弧所对圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对弧也相等；

(5) 半圆(或直径)所对圆周角为直角；圆周角为直角时所对弦为直径；

(6) 弦切角等于它所夹弧所对的圆周角.

例 1 如图 3-1 所示，已知$\triangle ABC$的外接圆为$\odot O$，$\odot O_1$经过A、B、O且分别交BC、AC于E、D(异于B、A的点)，求证：$CO \perp DE$.

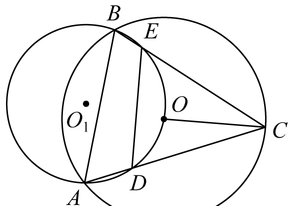


图 3-1

证明 因为A、B、E、D共于$\odot O_1$，故$\angle DEC = \angle BAC$(四点共圆的性质).

如图 3-2 所示，连结OB，则$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle DEC$，且

$$\angle OCB = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC$$

$$= 90^\circ - \angle DEC,$$

即 $\angle OCB + \angle DEC = 90^\circ$，故 $CO \perp DE$.

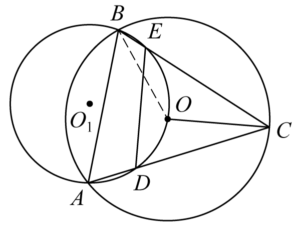


图 3－2

说明 本题中，(1) 点 O 为 $\triangle CDE$ 垂心. (2)若 $DE = DC$，则 $\angle C = 45^\circ$. 有兴趣的读者可自行证明这两个结论.

例 2 如图 3－3 所示，已知 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，点 I_1 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 一侧的旁心，连结 AI 交 $\triangle ABC$ 外接圆于 D，连结 DI_1，求证：(1) $DB = DI = DC$. (2) $DI = DI_1$.

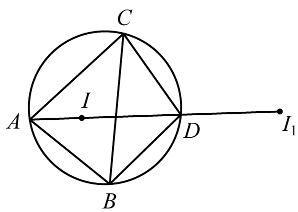


图 3－3

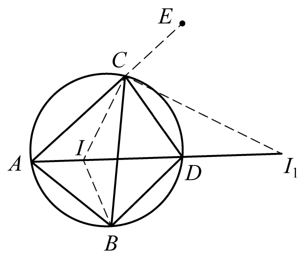


图 3－4

分析 从结论来看，$\triangle DIB$、$\triangle DBI_1$、$\triangle DIC$ 都是等腰三角形，可从角相等方面考虑，从条件来看，也比较适合考虑角的数量关系.

证明 (1) 如图 3－4 所示，连结 BI，则 $\angle BID = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC$，又

$$\begin{aligned}\angle IBD &= \angle IBC + \angle CBD \\ &= \frac{1}{2}\angle ABC + \angle DAC \\ &= \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC,\end{aligned}$$

所以 $\angle BID = \angle IBD$，从而 $BD = ID$，注意到 AI 平分 $\angle BAC$，从而 $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$，故 $BD = CD$，于是 $DB = DI = CD$.

(2) 如图 3－4 所示，延长 AC 至 E，连结 CI_1、CI，因为点 I_1 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 一侧的旁心，I_1 到直线 AB、AC、BC 的距离都相等，又点 I_1 在 $\angle CAB$ 的内部，从而 AI_1 平分 $\angle BAC$，又 AI 平分 $\angle BAC$，故 A、I、I_1 共线.

因 $\angle ICI_1 = \angle ICB + \angle BCI_1 = \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle BCE = 90^\circ$，由(1) 知 $DC = DI$，所以 $\angle DIC = \angle ICD$，从而 $\angle DCI_1 = 90^\circ - \angle DCI = 90^\circ -$

$\angle DIC = \angle CI_1D$，于是 $DC = DI_1$，故 $DI = DI_1$.

说明 本例(1)虽易，但它是三角形内心的一个有趣性质，有人戏称“鸡爪子定理”，应用也较多. 事实上，四边形 $ABDC$ 内接于圆，点 I 在对角线 AD 上. 若 $DI = DB = DC$，则 I 为三角形 ABC 内心，读者可自行证明.

例 3 如图 3-5 所示，已知四边形 $ABCD$ 内接于圆，直线 AB 与直线 CD 交于 E，点 B、D、线段 AC 中点 M、线段 CE 的中点 F 四点共圆，求 $\angle ADC$ 的度数.

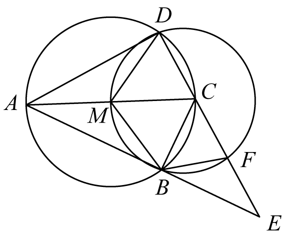


图 3-5

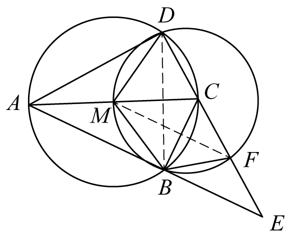


图 3-6

分析 结合 $MF \parallel AE$ 寻找角的数量关系.

解 如图 3-6 所示，连结 MF、BD，由于 M、F 分别为 AC、CE 的中点，故 $MF \parallel AE$，于是 $\angle FMB = \angle MBA$，注意到 A、B、C、D 共圆，故 $\angle BDC = \angle BAC$；D、M、B、F 共圆，故 $\angle BDC = \angle BDF = \angle BMF$，从而 $\angle BAC = \angle BDC = \angle BMF = \angle MBA$，所以 $MA = MB$，又 $MA = MC$，即点 M 为 $\triangle ABC$ 的外心，从而 AC 为直径，于是 $\angle ADC = 90°$.

例 4 $\odot O$ 是六边形 $AGBHCK$ 的外接圆，$\odot I$ 内切于 $\triangle ABC$，点 D、E、F 为切点(如图 3-7)，若 $\angle DEF = 55°$，$\angle DFE = 60°$，求 $\angle G$、$\angle H$、$\angle K$.

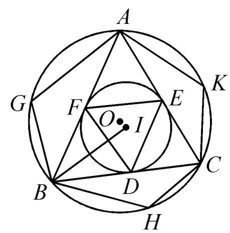


图 3-7

分析 由于 AB、AC 切 $\odot I$，故 $\angle AFE = \angle AEF = \angle FDE = 180° - \angle DEF - \angle DFE = 65°$，从而 $\angle BAC$ 可求，又 $\angle BAC + \angle BHC = 180°$，故 $\angle H$ 可求.

解 因为 AB、AC 切 $\odot I$ 于点 F、E，故 $\angle AFE = \angle AEF = \angle EDF$.

因为 $\angle FDE = 180° - \angle DEF - \angle DFE = 180° - 55° - 60° = 65°$，

所以 $$\angle AFE = \angle AEF = 65°,$$

从而 $$\angle BAC = 180° - \angle AFE - \angle AEF = 50°.$$

由于 $$\angle BAC + \angle BHC \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BHC} = 180°,$$

所以$\angle BHC = 130°$.

同理$\angle AGB = 120°$, $\angle AKC = 110°$.

即$\angle G$、$\angle H$、$\angle K$ 分别为 $120°$、$130°$、$110°$.

例 5 如图 3－8 所示,四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$,且对角线 AC 与对角线 BD 垂直,垂足为点 F,过点 O 作 $OH \perp AD$ 于 H. 求证:$OH = \frac{1}{2}BC$.

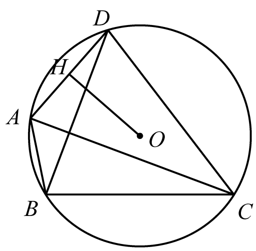


图 3－8

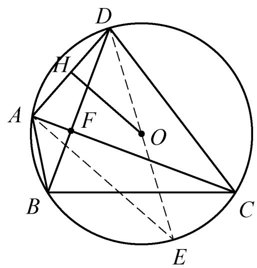


图 3－9

证明 如图 3－9 所示,连结 DO 并延长交$\odot O$ 于点 E,连结 AE,由于 DE 为直径,故 $AE \perp AD$,又 $OH \perp AD$,故 $OH \parallel AE$,注意到 O 是 DE 中点,从而

$$OH = \frac{1}{2}AE. \quad ①$$

又 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AE}) \overset{m}{=} 90°$, 由于 $AC \perp BD$,故

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}) &\overset{m}{=} \angle ACD + \angle BDC = \angle FCD + \angle FDC \\ &= \angle AFD = 90°.\end{aligned}$$

从而$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BC}$,即有

$$AE = BC, \quad ②$$

由①、②知 $OH = \frac{1}{2}BC$.

例 6 如图 3－10 所示,在凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle ABD = 29°$, $\angle ADB = 41°$, $\angle ACB = 82°$, $\angle ACD = 58°$,求四边形的各内角.

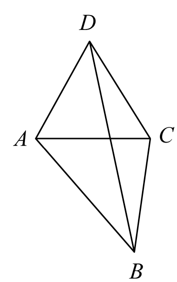


图 3－10

分析 $\angle ACB = 2\angle ADB$, $\angle ACD = 2\angle ABD$,容易想到圆心角与圆周角的关系,故考虑作 $\triangle ABD$ 的外接圆.

解 如图 3－11 所示,延长 AC 至 E 使得 $CE = CB$,连结 BE, DE,因为 $\angle ACB = 82°$,故 $\angle BEA = 41° = \angle ADB$,于是

A、B、E、D 四点共圆，所以 $\angle DEA = \angle ABD = 29°$，由于 $\angle ACD = 58°$，故 $\angle CDE = 29°$，即有 $DC = CE = CB$，这说明点 C 为过点 A、B、E、D 的圆之圆心，AE 为直径，从而 $\angle ADE = \angle ABE = 90°$，所以 $\angle ADC = 90° - 29° = 61°$，$\angle ABC = 90° - 41° = 49°$，$\angle BCD = 82° + 58° = 140°$，$\angle BAD = 110°$.

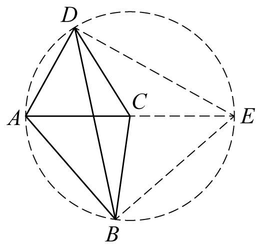


图 3－11

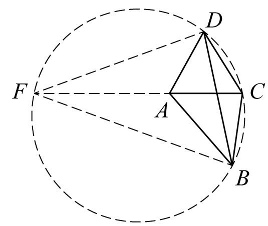


图 3－12

另解　如图 3－12 所示，延长 CA 交 $\triangle BCD$ 的外接圆于点 F.

由于 $\angle BAD + \angle BCD = 110° + 140° > 180°$，故点 A 在圆内，

于是 $\angle FBD = \angle ACD = 58° = 2\angle ABD$；$\angle FDB = \angle FCB = 82° = 2\angle ADB$，从而点 A 为 $\triangle FBD$ 的内心，$\angle AFB = \angle AFD = 20°$，于是 $\angle BDC = \angle CBD = 20°$，所以 $\angle ADC = 61°$，$\angle ABC = 49°$，$\angle BAD = 110°$，$\angle BCD = 140°$.

例 7　如图 3－13，已知凸四边形 $ABCD$ 中，$AB = AC$，BD 平分 $\angle ADC$，$\angle BCD = 150°$，求 $\angle ABD$ 的度数.

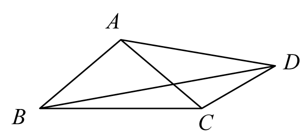


图 3－13

分析　从圆周角与圆心角的关系考虑，发现 BD 所对的圆心角为 60 度，从而出现正三角形，为问题得解创造了条件.

解　如图 3－14 所示，作 $\triangle BCD$ 外接圆，圆心为 O，连结 OB、OC、OD、OA，则 $\angle BOD = 2(180° - 150°) = 60°$，且 $OB = OD$，$\triangle BOD$ 为正三角形. 注意到 $OB = OC$，$AB = AC$，$OA = OA$，从而 $\triangle OBA \cong \triangle OCA$，所以 $\angle BOA = \angle COA = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BDC = \angle BDA$，从而 $\angle AOD = \angle ADO$，故 $OA = DA$，结合 $AB = AB$，$OB = DB$ 可得：$\triangle OBA \cong \triangle DBA$，从而 $\angle ABD = \angle ABO = \frac{1}{2}\angle DBO = 30°$.

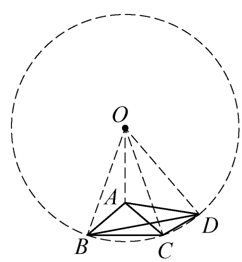


图 3－14

例 8 如图 3 - 15，在$\odot O$中，弦 AB 与弦 CD 交于点 Q，弦 CF // 弦 AP，弦 BF 与弦 PD 交于点 E，求证：QE // AP.

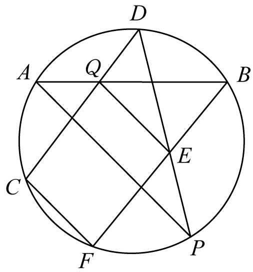


图 3 - 15

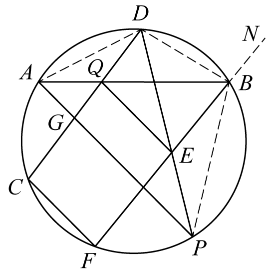


图 3 - 16

分析 可考虑证线段成比例达到目的.

解 如图 3 - 16，连结 PB、BD、AD，并延长 FB 到点 N，设 CD 与 AP 交于点 G，由于 AP // CF，故$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{PF}$，所以$\angle ADC=\angle FBP$，又$\angle DAQ=\angle BPD$，从而$\triangle AQD\backsim\triangle PEB$，故$\dfrac{BE}{EP}=\dfrac{DQ}{AQ}$①，注意到$\angle DBN=\angle C=\angle DGP$，

所以$\angle DBE=\angle AGQ$，$\angle GAQ=\angle EDB$，从而$\triangle AGQ\backsim\triangle DBE$，所以$\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{AQ}{GQ}$②，

从而由①、②得：$\dfrac{BE}{EP}\cdot\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{AQ}{GQ}\cdot\dfrac{DQ}{AQ}$，即$\dfrac{DE}{EP}=\dfrac{DQ}{GQ}$，于是 QE // AP.

例 9 如图 3 - 17 所示，已知 M、N 为$\odot O$中劣弧$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，E、F 为弦 AB 的三等分点，连结 ME、NF 并延长交于点 P，连结 AP、BP，求证：$\angle AOB=3\angle APB$.

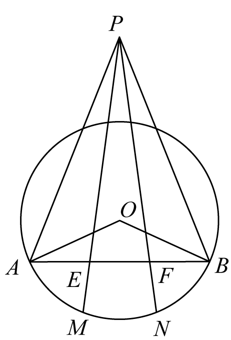


图 3 - 17

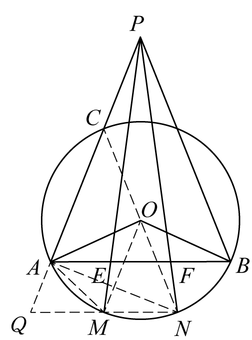


图 3 - 18

分析 易知 $\angle AOB = 3\angle MON$，从而只需证 $\angle APB = \angle MON$，从而只需证 $OM \parallel AP$，$ON \parallel BP$.

解 如图 3－18 所示，连结 CN、AN、ON、OM，连结 NM 并延长与 PA 的延长线交于点 Q，由于 M、N 三等分$\overset{\frown}{AB}$，故 $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BN}$，故 $MN \parallel AB$，$\dfrac{AE}{QM} = \dfrac{PE}{PM} = \dfrac{EF}{MN}$ 结合$AE = EF$，可得：$QM = MN$，由$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN}$ 得 $AM = MN$，从而 $AM = MN = QM$，于是不难得到 $\angle QAN$ 为直角，从而 $\angle CAN$ 也为直角，故 CN 为直径，点 O 在 CN 上，所以 $\angle AON = \angle ACO + \angle OAC = 2\angle ACN$，又 $\angle AON = 2\angle MON$，故 $\angle ACN = \angle MON$，所以 $OM \parallel AP$，同理可证：$ON \parallel AB$，从而 $\angle MON = \angle APB$.

于是 $\angle AOB = 3\angle MON = 3\angle APB$.

例 10 如图 3－19 所示，已知$\odot O$ 为$\triangle ABC$ 的外接圆，AD，BE 为$\triangle ABC$ 的两条高线，直线 DE 与$\odot O$ 交于 P、Q 两点，$\angle APQ$、$\angle PQB$、$\angle ACB$ 的平分线分别交$\odot O$ 于点 K、L、M，证明：$CM \perp KL$.

分析 图形较复杂，但角平分线、高线这些条件提示比较适合计算角度.

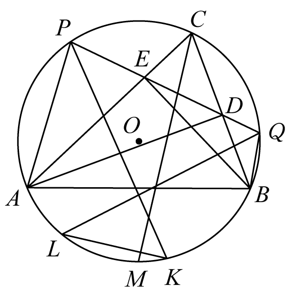


图 3－19

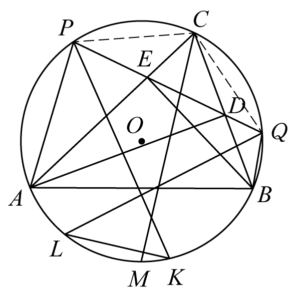


图 3－20

证明 连结 PC、CQ，因为 L、K、M 分别为$\overset{\frown}{PAB}$、$\overset{\frown}{ABQ}$、$\overset{\frown}{AB}$的中点，所以

$$\begin{aligned}\angle LKM + \angle CMK &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{LM} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CK} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{LB} - \overset{\frown}{BM}\right) + \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CQ} + \overset{\frown}{QK}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\overset{\frown}{PAB} - \overset{\frown}{AB}\right) + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CQ} + \frac{1}{4}\overset{\frown}{AQ}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{AQ}\right)+\frac{1}{2}\overset{\frown}{CQ}$$
$$=\frac{1}{2}\angle PCQ+\angle CPQ.$$

注意到

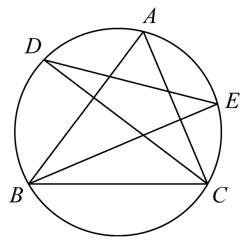
$$\begin{aligned}\angle OCE+\angle CEQ &= \angle OCA+\angle CBA\\ &= \frac{180^\circ-\angle COA}{2}+\angle CBA\\ &= 90^\circ-\frac{\angle COA}{2}+\angle CBA\\ &= 90^\circ-\frac{2\angle CBA}{2}+\angle CBA\\ &= 90^\circ,\end{aligned}$$

所以 $OC \perp PQ$，从而点 C 在线段 PQ 的中垂线上.

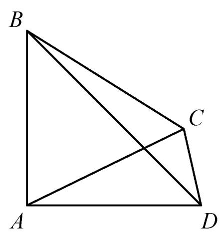
故 $\frac{1}{2}\angle PCQ+\angle CPQ=90^\circ$,从而 $\angle LKM+\angle CMK=90^\circ$,即 $LK\perp CM$.

习 题 3

1 如图,在锐角$\triangle ABC$ 中,过点 C 作 AB 的垂线,与$\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D,过点 B 作 AC 的垂线,与$\triangle ABC$ 的外接圆交于点 E. 若 $DE=BC$,求 $\angle A$ 的度数.



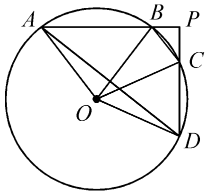
(第 1 题)



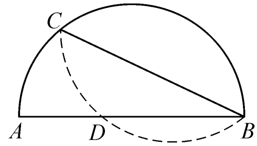
(第 2 题)

2 如图,已知凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=90^\circ$,$\angle BAC=2\angle BDC$,$\angle DBA+\angle DCB=180^\circ$,求 $\angle DBA$ 的度数.

3 如图,$\odot O$ 的两条弦 AB、DC 的延长线相交于点 P,且 $\angle P = 90^\circ$,连结 OA、OB、OC、OD、AD、BC,求证:$S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC}$.



(第 3 题)



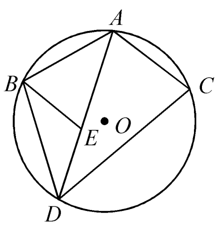
(第 4 题)

4 如图,C 是半圆上一点,AB 是直径,将弓形沿 BC 翻折交 AB 于点 D,若 $AD = 4$, $DB = 5$,求 BC 之长.

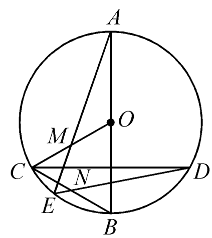
5 如图,四边形 $ABDC$ 内接于$\odot O$,E 在 AD 上,且 $AB = AE = AC$,求证:

(1) $\angle CAD = 2\angle DBE$;

(2) $AD^2 - AB^2 = BD \cdot DC$.



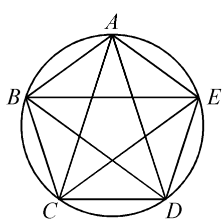
(第 5 题)



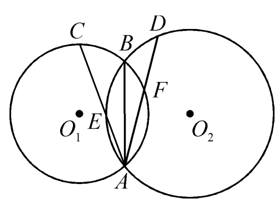
(第 6 题)

6 如图,$\odot O$ 中弦 CD 垂直于直径 AB,M 是 OC 中点,延长 AM 交$\odot O$ 于点 E,BC 交 ED 于点 N. 求证:$BN = CN$.

7 如图,五边形 $ABCDE$ 内接于圆,且 $AC \parallel DE$, $BD \parallel AE$, $CE \parallel AB$, $DA \parallel BC$, $EB \parallel CD$,求证:五边形 $ABCDE$ 为正五边形.



(第 7 题)



(第 8 题)

8 如图,$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 交于点 A、B,$\odot O_1$ 的弦 AC 交$\odot O_2$ 于点 E,$\odot O_2$ 的弦 AD 交$\odot O_1$ 于点 F,求证:$CE = DF$ 的充要条件是 AB 平分$\angle CAD$.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 初中卷. 圆/柯新立编著. —3版. —上海:华东师范大学出版社,2019
ISBN 978-7-5675-9537-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①柯… Ⅲ.①几何课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第194860号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·初中卷
圆(第二版)

编　　著　柯新立
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　董立民
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　9.25
字　　数　156千字
版　　次　2020年4月第二版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—35 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9537-8
定　　价　24.00元

出 版 人　王　焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

华东师大社主办的QQ群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练2群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师2群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。