数学奥林匹克小丛书

第三版

初中卷 8

Mathematical Olympiad Series

初中数学竞赛中的解题方法与策略

冯志刚 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

数学竞赛问题的解决往往不是由拥有的知识量决定的，而需要透彻地理解问题的本质，充分发挥创造性，找到合适的方法才能一蹴而就. 正是由于具有这样的特性，数学竞赛问题让许许多多聪明的中小学生着迷，数学竞赛活动受到广大学生的喜爱.

读小学的时候我们经常比谁“算得快”，后来又以能帮助其他同学解决一些数学难题感到快乐，与“高手”们在一起讨论数学题非常开心，这都是数学本身的魅力带给我们的. 数学问题的挑战性激发了很大的好奇心，这种源自内心的兴趣驱动，让很多学子爱上了数学、迷上了数学.

对比较聪明的那部分学生而言，更注重普适性的统编教材的内容很难让他们“吃饱”，一些数学“难题”就成为了这些聪明学生乐于挑战的对象，他们从各种数学教辅书、问题集、大学教材、研究文章等资料中去寻找有味道的“食物”，老师们也经常从这些“难题”中挑选一些作为考题来甄别学生. 我想这就是数学竞赛活动长期存在的源动力.

作为数学教育中不可或缺的重要部分，数学竞赛是中学生展示自己数学才华的最重要的平台，打开一张试卷、利用几张草稿纸和一支笔就能区分出学生数学水平之间的不同，这是最具公平性、有效性的方法，它是对人类智力最尊重也是成本最低的一项智力活动，国际数学奥林匹克活动吸引越来越多的国家或地区参加就是这个原因.

解题方法与策略在数学竞赛的学习中占有重要的地位，编写一本这样的小册子是希望起到“抛砖引玉”的作用. 第二版沿用了第一版的基本架构，但为保持内容与风格一致性，进行了重写. 鉴于作者水平有限，其中错误难免，敬请读者批评指正.

冯志刚

2020 年 3 月

符号说明

$[x]$　表示不超过实数 x 的最大整数

$\{x\}$　表示实数 x 的小数部分，即 $\{x\}=x-[x]$

$\sum$　表示求和运算

$n!$　表示 $1\times2\times3\times\cdots\times n$

$n!!$　若正整数 n 为奇数，则 $n!!$ 表示 $n(n-2)(n-4)\cdots3\cdot1$

若正整数 n 为偶数，则 $n!!$ 表示 $n(n-2)(n-4)\cdots4\cdot2$

$a|b$　表示整数 a 整除整数 b 或者整数 b 能够被整数 a 整除

$a\nmid b$　表示整数 a 不整除整数 b 或者整数 b 不能被整数 a 整除

$d(m)$　表示正整数 m 的正因数的个数

$a\equiv b\pmod m$　表示整数 a 与 b 对模 m 同余

$a\not\equiv b\pmod m$　表示整数 a 与 b 对模 m 不同余

(a,b)　表示正整数 a 与 b 的最大公约数

$[a,b]$　表示正整数 a 与 b 的最小公倍数

$\max\{a,b\}$　表示实数 a 与 b 中较大的一个数

$\min\{a,b\}$　表示实数 a 与 b 中较小的一个数

目　录

第三部分 数论篇

第四部分 组合篇

第一部分　代数篇

代数是数学的基础分支，研究的是事物的结构，表现为各种变形和技巧，重在培养运算能力，锻炼“代数功夫”. 在几何、数论、组合等各数学分支之中，都会出现代数式变形，需要这种“功夫”. 我们在追求结论正确的同时，也希望透过表象看到问题的本质，打下良好的数学基础.

1.1 巧用平方差

我们把公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$称为乘法运算中的平方差公式；反过来，把$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$称之为因式分解中的平方差公式. 在一定条件下，把一个代数式变换成另一个与它恒等的代数式，这个过程称为恒等变形. 平方差公式是代数式的恒等变形中最重要的公式之一，它在数值运算、代数式的化简与求值、不定方程(组)的解法、不等式的证明、一元二次方程的解法等方面都有广泛的运用.

例 1 已知 $7^{12}-1$ 可被 40 至 50 之间的一个素数整除，则这个素数是(　　).

A. 41　　B. 43　　C. 47　　D. 49

解析 用平方差公式作因式分解：

$$\begin{aligned}7^{12}-1&=(7^6+1)(7^6-1)=(7^2+1)(7^4-7^2+1)(7^3+1)(7^3-1)\\&=50(7^4-7^2+1)(7+1)(7^2-7+1)(7-1)(7^2+7+1)\\&=43\cdot 48\cdot 50\cdot 57(7^4-7^2+1),\end{aligned}$$

而 $7^4-7^2+1=48\cdot 49+1$ 不能被 41，47 整除(注意:49 不是素数)，故答案选 B.

说明 也可先用立方差公式分解 7^6-1，即 $7^6-1=(7^2-1)(7^4+7^2+1)=48(7^4+7^2+1)$，而 7^4+7^2+1 的分解可以通过拆项完成，具体分解如下：

$$\begin{aligned}7^4+7^2+1&=7^4+2\cdot 7^2+1-7^2\\&=(7^2+1)^2-7^2\\&=(7^2+7+1)(7^2-7+1).\end{aligned}$$

例 2 已知对任意大于 2 的正整数 n，n^5-5n^3+4n 都是正整数 m 的倍数，求 m 的最大值.

解析 $$\begin{aligned}n^5-5n^3+4n&=n(n^4-5n^2+4)=n(n^2-4)(n^2-1)\\&=n(n-2)(n+2)(n-1)(n+1).\end{aligned}$$

因为$n(n-2)(n+2)(n-1)(n+1)$是五个连续正整数的乘积，所以它是$5!$的倍数. 又当$n=3$时，原式$=120$，故m的最大值是120.

说明 这里用到了一个数论中的结论：连续的5个正整数的乘积是$5!$的倍数. 事实上，连续的5个正整数中必有1个5的倍数，2个2的倍数（其中一个为4的倍数），1个3的倍数.

顺便提一句，也可以利用组合数为正整数这一性质来证明：连续n个正整数的乘积是$n!$的倍数. 这是因为由$C_m^n=\dfrac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}$可知，连续的$n$正整数乘积$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)=n!\,C_m^n$，从而结论成立.

例3 计算：$\dfrac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\left(8^4+\frac{1}{4}\right)\left(10^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\left(7^4+\frac{1}{4}\right)\left(9^4+\frac{1}{4}\right)}$.

分析 由于括号内的每一个式子代数结构都相同，因此考虑用$x^4+\frac{1}{4}$来代替，再进行因式分解后找出规律.

解析 因为
$$\begin{aligned}x^4+\frac{1}{4}&=x^4+x^2+\frac{1}{4}-x^2=\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-x^2\\&=\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\\&=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right],\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}\text{原式}=&\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(\frac{9}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\cdots\right.\\&\left.\left[\left(\frac{19}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(\frac{21}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\right\}\cdot\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\cdot\right.\\&\left.\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\cdots\left[\left(\frac{17}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(\frac{19}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\right\}^{-1}\\=&\frac{\left(\frac{21}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\\=&221.\end{aligned}$$

例4 求证：若n是正整数，则存在无穷多个正整数k，使得n^4+k是合数.

证明 令$k=4a^4$（a为正整数），则

$$
\begin{aligned}
n^4+k &= n^4+4a^2n^2+4a^4-4a^2n^2=(n^2+2a^2)^2-(2an)^2 \\
&= (n^2+2an+2a^2)(n^2-2an+2a^2).
\end{aligned}
$$

当 $a\geqslant 2$ 时，$n^2+2an+2a^2$ 与 $n^2-2an+2a^2(=(n-a)^2+a^2)$ 都是大于 1 的正整数. 因为 a 有无穷多个，故存在无穷多个正整数 k，使得 n^4+k 是合数 .

说明　本题的关键在于取 $k=4a^4$，转化代数形式.

例 5　设 n 是一个不超过 50 的正整数，满足：恰有一对非负整数 (a, b)，使得 $a^2-b^2=n$，求满足条件的 n 的个数.

解析　由于 $n=(a+b)(a-b)$，且 $a+b$ 与 $a-b$ 同奇偶，所以 $n\not\equiv 2\pmod 4$.

(1) 当 n 为奇素数时，要求 $a-b=1$，此时仅有一对 $(a, b)=\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ 满足条件；

(2) 当 n 为奇合数时，不妨设 $n=uv$ $(u\geqslant v>1$，u，v 为奇数)，那么至少有 2 组非负整数解 $(a, b)=\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$，不满足题意. 因此奇数中满足题意的共有：

$$1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,$$

共计 15 个.

(3) 当 $4\mid n$ 时，如果 $\frac{n}{4}$ 为合数，同上类似，可知至少有 2 组非负整数解，也不满足题意. 因此偶数中满足题意的有 4，8，12，20，28，44，共 6 个.

综上所述，一共有 21 个正整数 n 满足题意.

说明　本题如果一开始直接枚举容易产生错误（主要是不能给出完整的证明），约束适当的范围再进行枚举是关键.

例 6　设 n 是一个正整数. 证明：存在整数 a，b，使得 $n\mid 4a^2+9b^2-1$.

证明　若 n 为奇数，则可设 $n=2k+1$，取 $a=k$，$b=0$，就有

$$
\begin{aligned}
4a^2+9b^2-1 &= 4a^2-1=(2a-1)(2a+1) \\
&= (2k-1)(2k+1),
\end{aligned}
$$

故 $n\mid 4a^2+9b^2-1$；

若 n 不是 3 的倍数，则可设 $n=3k+1$ 或 $3k-1$，取 $a=0$，$b=k$，就有

$$
\begin{aligned}
4a^2+9b^2-1 &= 9b^2-1=(3b-1)(3b+1) \\
&= (3k-1)(3k+1),
\end{aligned}
$$

故 $n \mid 4a^2+9b^2-1$；

下面讨论：$6 \mid n$ 的情形. 此时，可设 $n=2^r \cdot 3^s \cdot m$，这里 r, s, m 为正整数，且 $(6, m)=1$.

由于 $(2^r, 3^s \cdot m)=1$，可知存在整数 x, y（裴蜀定理），使得

$$2^r \cdot x+3^s \cdot m \cdot y=1.$$

将此式两边平方，得 $2^{2r} \cdot x^2+2^{r+1} \cdot 3^s \cdot m \cdot xy+3^{2s} \cdot m^2 \cdot y^2=1$，也就是有

$$-2nxy=4(2^{r-1}x)^2+9(3^{s-1}my)^2-1.$$

取 $a=2^{r-1}x$, $b=3^{s-1}my$，就有 $n \mid 4a^2+9b^2-1$.

综上可知，命题成立.

1.2 恰当换元

一些看上去很复杂的代数式，通过观察与比较，如果可以发现相同或相似之处，那么可以用另一个变量来代替较复杂的代数式，从而起到简化计算的目的，这种方法叫做换元法. 它大量运用于计算、化简、解方程、证明题中.

例 1 比较$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$与$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$的大小.

解析 令$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}=M$，$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}=N$，则$M=\sqrt{1+M}$，$N=1+\dfrac{1}{N}$，所以，$M^2-M-1=0$，$N^2-N-1=0$. 因为$M>0$，$N>0$，所以$M=N=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

说明 在循环算式的计算和化简中经常采用本例中的处理方法.

例 2 解方程组$\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}-\sqrt{x+y-3}=\sqrt{3},\\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=6.\end{cases}$

解析 令$\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=u$，$\sqrt{x+y-3}=v$（$u>0$，$v\geqslant 0$，且$u>v$），则原方程组可化为$\begin{cases}u-v=\sqrt{3},\\ u^2+v^2=3,\end{cases}$解之得$\begin{cases}u=\sqrt{3},\\ v=0,\end{cases}$代入原方程组可得$\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=3,\\ x+y-3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\ y=-1.\end{cases}$经检验，原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\ y=-1.\end{cases}$

说明 分式方程(组)和无理方程(组)的解最后要检验是否为增根.

例 3 证明：$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ 是一个有理数.

证明 令 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$，$y=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$，则 $x^3+y^3=4$，且 $xy=-1$，从而

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4,$$

进而

$$(x+y)^3-1+3(x+y)-3=0,$$

即 $(x+y-1)[(x+y)^2+(x+y)+4]=0$. 又由于

$$(x+y)^2+(x+y)+4=\left(x+y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0,$$

所以 $x+y-1=0$，即 $x+y=1$.

命题获证.

说明 此题运用换元法，结合 $x^3+y^3=4$，且 $xy=-1$，可以比较方便地进行等式的变形，以达到计算 $x+y$ 的目的.

例 4 解方程 $\sqrt[3]{45+x}+\sqrt[3]{16-x}=1$.

解析 令 $u=\sqrt[3]{45+x}$，$v=\sqrt[3]{16-x}$，则 $\begin{cases}u+v=1,\\u^3+v^3=61.\end{cases}$

又因为 $u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)$，所以 $61=1-3uv$，得 $uv=-20$. 因此，u，v 是方程 $y^2-y-20=0$ 的两根，解得 $y_1=5$，$y_2=-4$，即 $\sqrt[3]{45+x}=5$ 或 -4，解得 $x_1=-109$，$x_2=80$，经检验，$x_1=-109$，$x_2=80$ 都是原方程的根.

说明 此题的另一种解法如下：

令 $a=\sqrt[3]{45+x}$，$b=\sqrt[3]{16-x}$，$c=\sqrt[3]{-1}$，则 $a+b+c=0$. 故

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0,$$

即 $$45+x+16-x-1+3\sqrt[3]{45+x}\cdot\sqrt[3]{16-x}=0,$$

化简得 $\sqrt[3]{(45+x)(16-x)}=-20$，解得 $x_1=-109$，$x_2=80$.

经检验，$x_1=-109$，$x_2=80$ 都是原方程的根.

换元法经常需要和一些公式合起来用，所以考察代数式经过换元后可以适用哪个公式成为解题的关键，这需要对公式十分熟练地运用.

例 5 求正实数 k 的取值范围，使得对满足：$x+y=k$ 的正实数 x，y 都有

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geqslant\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{k}\right)^2. \qquad ①$$

解析 注意到，当 $x=y$ 时，① 式成为等式. 下面考虑 $x\neq y$ 的情形.

不妨设 $x>y$，作换元：令 $m=\frac{k}{2}$，$x=m+t$，$y=m-t$，由 $0<t<m$，则 ① 式等价于

$$\begin{aligned}
&\left(m+t+\frac{1}{m+t}\right)\left(m-t+\frac{1}{m-t}\right)\geqslant\left(m+\frac{1}{m}\right)^2\\
\Leftrightarrow&\frac{m^2+1+t^2+2mt}{m+t}\cdot\frac{m^2+1+t^2-2mt}{m-t}\geqslant\frac{(m^2+1)^2}{m^2}\\
\Leftrightarrow&m^2((m^2+1+t^2)^2-4m^2t^2)\geqslant(m^2+1)^2(m^2-t^2) \qquad ②\\
\Leftrightarrow&m^2(t^4+2(m^2+1)t^2-4m^2t^2)\geqslant-(m^2+1)^2t^2\\
\Leftrightarrow&m^2(t^2+2(m^2+1)-4m^2)\geqslant-(m^2+1)^2\\
\Leftrightarrow&m^2t^2\geqslant4m^4-2m^2(m^2+1)-(m^2+1)^2=m^4-4m^2-1\\
\Leftrightarrow&t^2\geqslant\frac{1}{m^2}(m^4-4m^2-1).
\end{aligned}$$

由于上式对 $0<t<m$ 都成立，这要求$\frac{1}{m^2}(m^4-4m^2-1)\leqslant0$(当然，若此式成立，则 ② 对 $0<t<m$ 都成立). 所以，等价于求 $m^4-4m^2-1\leqslant0$ 的解，得 $0<m\leqslant\sqrt{2+\sqrt{5}}$(用到 $m=\frac{k}{2}$ 为正实数).

综上可知，k 的取值范围是：$0<k\leqslant2\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

说明 换元在关注“简化”的同时，应兼顾“对称性”. 这里将视角放在 x，y 离开中点$\frac{k}{2}$的距离，看上去式子变“复杂”了，但抓住了本质，使问题迎刃而解.

例 6 求所有的非负实数 x，使得数

$$A=\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}$$

是一个整数.

解析 作换元，令 $a=\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}$，$b=\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}$，则有 $a^3+b^3=26$，即有

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=26. \qquad ①$$

由题意可知，$A=a+b$ 是一个整数，而

$$\begin{aligned} a^2-ab+b^2 &= \frac{3}{4}a^2+\left(\frac{a}{2}-b\right)^2 \\ &\geqslant \frac{3}{4}a^2 \geqslant \frac{3}{4}(\sqrt[3]{13})^2 \\ &> \frac{3}{4}\times 5=\frac{15}{4}. \end{aligned}$$

结合①式可知，$A>0$，并且 $A<26\times\frac{4}{15}=\frac{104}{15}<7$. 所以，$A$ 为正整数，并且 $A\leqslant 6$.

分别将 $A=1, 2, \cdots, 6$ 代入 ① 式可得 $a+b$ 与 ab 的对应值

$$\begin{cases} a+b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \\ ab=-\frac{25}{3},\ -3,\ \frac{1}{9},\ \frac{19}{6},\ \frac{33}{5},\ \frac{95}{9}, \end{cases}$$

要求对应的一元二次方程有实数解，即要求 $\Delta=(a+b)^2-4ab\geqslant 0$，依此可知，$ab=-\frac{25}{3}, -3, \frac{1}{9}, \frac{19}{6}$. 而 $ab=\sqrt[3]{169-x}$，对应可求得 $x=747\frac{19}{27}, 196, 168\frac{728}{729}, 137\frac{53}{216}$. 它们就是所有符合条件的非负实数.

1.3 判别式的应用

形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程为一元二次方程，对其作配方处理，可变形为

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}, \qquad ①$$

即有 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. 基于 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$，可知当且仅当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，方程有实数解. 于是，$\Delta=b^2-4ac$ 被称为该一元二次方程的“判别式”.

由①可知，当 $\Delta>0$ 时，方程有两个相异实根；当 $\Delta=0$ 时，方程的两实根相等，而当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根. 这个性质给出了判别式的第一个用途：讨论一元二次方程实根的情况.

例 1 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+4ax-4a+3=0$ 和 $2x^2-(4a+1)x+2a^2-1=0$ 中至少有一个方程有实数解，求 a 的取值范围.

解析 第一个方程有实数解的条件是

$$\Delta_1=(4a)^2-4(-4a+3)\geqslant 0,$$

解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 或者 $a\leqslant-\frac{3}{2}$.

第二个方程有实数解的条件是

$$\Delta_2=[-(4a+1)]^2-8(2a^2-1)\geqslant 0,$$

解得 $a\geqslant-\frac{9}{8}$.

两者取“并集”，可知 a 的取值范围是 $a\geqslant-\frac{9}{8}$ 或者 $a\leqslant-\frac{3}{2}$.

另解 先讨论两个方程都没有实数解的情形，这要求

$$\begin{cases}\Delta_1=(4a)^2-4(-4a+3)<0,\\ \Delta_2=[-(4a+1)]^2-8(2a^2-1)<0,\end{cases}$$

解得 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{9}{8}$.

然后,取"补集",可知 a 的取值范围是 $a\geqslant-\frac{9}{8}$ 或者 $a\leqslant-\frac{3}{2}$.

说明 取"并集"还是取"补集"都是好的思路,只有喜好之分,没有好坏之分. 在处理数学问题时,正面不行,反过来思考的想法是正常的,有时正面可行,反过来思考也很有趣.

例 2 求满足下述条件的最小正实数 k:对任意不小于 k 的 4 个互不相同的实数 a, b, c, d,都存在 (a, b, c, d) 的一个排列 (p, q, r, s),使得方程

$$(x^2+px+q)(x^2+rx+s)=0 \quad ①$$

有 4 个互不相同的实数解.

解析 所求最小正实数 $k=4$.

一方面,若 $0<k<4$,则 $k<\sqrt{4k}$,于是可取 4 个互不相同的实数 a, b, c, d,使得 $k\leqslant a, b, c, d<\sqrt{4k}$. 此时,对 (a, b, c, d) 的任意一个排列 (p, q, r, s),方程 $x^2+px+q=0$ 的判别式

$$\Delta=p^2-4q<4k-4q\leqslant 4k-4k=0,$$

即此方程没有实数解,这时 ① 不会有 4 个互不相同的实数解,故 $k\geqslant 4$.

另一方面,设 a, b, c, d 是不小于 4 的 4 个不同实数,不妨设 $4\leqslant a<b<c<d$,考虑下面的两个方程:

$$x^2+dx+a=0 \text{ 和 } x^2+cx+b=0.$$

由于 $\Delta_1=d^2-4a>4d-4a=4(d-a)>0$, $\Delta_2=c^2-4b>4c-4b=4(c-b)>0$,可知这两个一元二次方程分别有两个不同的实数解. 因此,取 $(p, q, r, s)=(d, a, c, b)$ 可能符合要求,唯一的"担忧"是这两个方程有公共的实数解 β,下证:这会导致矛盾.

事实上,若这两个方程有公共解 β,即有

$$\begin{cases}\beta^2+d\beta+a=0,\\ \beta^2+c\beta+b=0.\end{cases}$$

两式相减,得 $\beta=\frac{b-a}{d-c}>0$,导致 $\beta^2+d\beta+a>0$,矛盾(即 β 不是第一个方程的解).

综上可知,问题的答案为 4.

例 3 设$\overline{abc}$是一个十进制表示下的三位数，并且它是一个素数．证明：b^2-4ac 不是一个完全平方数．

证明 由于三位数素数个数众多(共 139 个)，逐个验证不可取(用机器证明当然很快)．

故采用反证法处理．设有一个素数 $p=\overline{abc}$，使得b^2-4ac 是一个完全平方数．考虑二次函数

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

方程 $f(x)=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 是一个完全平方数，故其有两个实数解 x_1，x_2，并且它们都是有理数，进一步还可知 $2ax_1$ 与 $2ax_2$ 都是整数(由求根公式可得)．

利用 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 可知，

$$p=f(10)=a(10-x_1)(10-x_2).$$

于是，$4ap=(20a-2ax_1)(20a-2ax_2)$，此式右边两个数都是整数．

由于 a，b，c 是十进制数码，它们都是非负数，从而 x_1，$x_2\leqslant 0$．故 $20a-2ax_1\geqslant 20a$，$20a-2ax_2\geqslant 20a$，但$(20a-2ax_1)(20a-2ax_2)=4ap$ 中 p 为素数，要求 p 是 $20a-2ax_1$ 与 $20a-2ax_2$ 中某一个的约数，导致另一个需满足 $\leqslant 4a$，矛盾．

所以，命题成立．

例 4 求所有的整数对(a, b)，使得方程组

$$\begin{cases}x^2+2ax-3a-1=0, & ①\\ y^2-2by+x=0 & ②\end{cases}$$

恰有 3 组不同的实数解．

解析 设(a, b)是一组满足条件的整数对，则方程①的判别式 $\Delta_1=4a^2+12a+4=4(a^2+3a+1)>0$，方程①有两个不相等的实数解 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$．

在方程②中，视 x 为常数，判别式 $\Delta_2=4b^2-4x=4(b^2-x)$ 应满足 $b^2-x_2=0$(因为只有这样，对应于 x_2 的 y 恰有一个，而对应于 x_1 的 y 有两个，保证方程组恰有 3 组不同的实数解)．所以，(a, b) 应为满足下述条件的整数对

$$\begin{cases}a^2+3a+1>0,\\ b^2=-a+\sqrt{a^2+3a+1}.\end{cases}$$

这里要求 a^2+3a+1 是一个完全平方数．可设 $a^2+3a+1=c^2$，c 为非负整数．

对此式两边先乘 4 后配方，可得

$$(2a+3)^2-(2c)^2=5,$$

即 $(2a-2c+3)(2a+2c+3)=5$. 于是，

$$(2a-2c+3,\ 2a+2c+3)=(1,\ 5)\text{ 或}(-5,\ -1),$$

解得 $a=0$ 或 -3.

对应地，可求得 $(a,\ b)=(0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (-3,\ 2)$ 或 $(-3,\ -2)$，代入检验可知均符合要求，它们即为所求.

例 5 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+7x+14}$，求解下述问题：

(1) 求 $f(x)$的最大值；

(2) 设 $g(x)=\dfrac{x^2-5x+10}{x^2+5x+20}$，求 $g(x)^{f(x)}$ 的最大值.

解析 (1) 由于 $x^2+7x+14=0$ 的判别式 $\Delta_1=7^2-56<0$，故对任意实数 x，都有 $x^2+7x+14>0$，即函数 $f(x)$ 的定义域是全体实数.

现在记 $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+7x+14}$，则有

$$(y-1)x^2+(7y-4)x+14y-3=0.$$

当 $y\neq 1$ 时，上述关于 x 的一元二次方程有实数解，知

$$\Delta=(7y-4)^2-4(y-1)(14y-3)\geqslant 0,$$

解得 $-\dfrac{2}{7}\leqslant y\leqslant 2$，并且当 $x=-5$ 时，有 $y=2$.

综上可知，函数 $f(x)$的最大值为 2.

(2) 由于 $x^2+5x+20=0$ 的判别式 $\Delta_2=5^2-80<0$，故对任意实数 x，都有 $x^2+5x+20>0$. 同上可得 $g(x)$ 的最大值为 3，等号在 $x=-5$ 时取到.

进一步，由于 $x^2-5x+10=0$ 的判别式 $\Delta_3=5^2-40<0$，故对任意实数 x，有 $x^2-5x+10>0$，这表明函数 $g(x)^{f(x)}$ 定义域为全体实数.

现在由 $x^2+4x+3=0$ 的两个解分别为 -3 和 -1，因此，当 $x<-3$ 或 $x>-1$ 时，有 $f(x)>0$，此时，$g(x)^{f(x)}\leqslant 3^{f(x)}\leqslant 3^2=9$(等号在 $x=-5$ 时可取到)；当 $-3\leqslant x\leqslant -1$ 时，有 $f(x)\leqslant 0$，此时，$g(x)\geqslant 1$(因为当 $-3\leqslant x\leqslant -1$ 时，有 $x^2-5x+10\geqslant x^2+5x+20$)，故有 $g(x)^{f(x)}\leqslant 1$.

综上可知，$g(x)^{f(x)}$ 的最大值为 9.

说明 在求一个分式函数的最值问题时，经常会用到此例中的“判别式”

处理方法.

例 6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是实数. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2. \quad ①$$

证明 这是著名的柯西(Cauchy)不等式,有一个构造二次函数,然后用判别式处理的“妙证”.

若 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$,则 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$,不等式 ① 显然成立.

下面考虑 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$ 的情形,构造二次函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2,$$

则对任意实数 x,都有 $f(x) \geqslant 0$. 由此可知,

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

是一个开口向上的二次函数,并且其图象落在 x 轴的上方,与 x 轴至多有一个交点. 这要求其判别式 $\Delta \leqslant 0$,即

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0.$$

所以,①成立.

说明 进一步可讨论①中等号成立的条件,这要求存在实数 x,使得 $a_1 x - b_1 = a_2 x - b_2 = \cdots = a_n x - b_n$,也就是 $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$(其中若某个 $a_i = 0$,则要求 $b_i = 0$).

1.4 试试韦达定理

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根分别为 x_1, x_2,则有

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

比较两边的系数可得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

这个性质揭示了一元二次方程的根与系数之间的关系,它被称为韦达定理.

例 1 讨论关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+x=a-1, \\ \dfrac{x}{x+y}=a-2, \end{cases} \qquad ①$$

求解下述问题:

(1) 求所有的实数 a,使得方程组①恰有一组实数解;

(2) 对满足:$2<a<3$ 的每一个 a,可得 ① 的一组解(x, y),然后计算 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ 的值.求此值取最小值时,a 的值.

解析 由韦达定理可知,数 x 与 $\dfrac{1}{x+y}$ 是关于 t 的一元二次方程

$$t^2-(a-1)t+a-2=0$$

的两个解(其解为 $t=1$ 或 $a-2$).因此,有

$$\begin{cases} x=1, \\ \dfrac{1}{x+y}=a-2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=a-2, \\ \dfrac{1}{x+y}=1. \end{cases}$$

当 $a\neq 2$ 时，两个方程组都有解，分别是 $(x, y)=\left(1, \dfrac{3-a}{a-2}\right)$ 和 $(a-2, 3-a)$；当 $a=2$ 时，只有后一个方程有解，为 $(x, y)=(a-2, 3-a)=(0, 1)$.

(1) 由上述讨论可知当 $a=2$ 时，关于 x，y 的方程组 ① 恰有一组解；当 $a\neq 2$ 时，当且仅当 $\left(1, \dfrac{3-a}{a-2}\right)=(a-2, 3-a)$，即 $a=3$ 时，方程组 ① 恰有一组解. 因此，$a=2$ 或 3.

(2) 注意到，当 $2<a<3$ 时，方程组①的解 (x, y) 中 $x>0$，$y>0$，此时，有 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$(此不等式可由 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 或者通分后移项得到)，等号当且仅当 $x=y$ 时取到，这要求 $a-2=3-a$，即 $a=\dfrac{5}{2}$.

说明 韦达定理的应用中最妙的是：反用，也就是反过去写出一元二次方程. 本题中反写出的方程的根很容易求出，因而能步步推进.

例 2 求所有的有理数 r，使得方程

$$rx^2+(r+2)x+r-1=0 \qquad ①$$

有两个整数解(可以相同).

解析 由题意得，$r\neq 0$. 设 ① 的两个整数解分别是 x_1，x_2，并不妨设 $x_1\leqslant x_2$. 由韦达定理可知，有

$$\begin{cases} x_1+x_3=-\dfrac{r+2}{r}, \\ x_1x_2=\dfrac{r-1}{r}. \end{cases}$$

于是，$2x_1x_2-(x_1+x_2)=2\left(1-\dfrac{1}{r}\right)+\left(1+\dfrac{2}{r}\right)=3$，进而有

$$4x_1x_2-2(x_1+x_2)=6,$$

从而，

$$(2x_1-1)(2x_2-1)=7.$$

利用 $x_1\leqslant x_2$ 及 x_1，x_2 均为整数，可得到 $(2x_1-1, 2x_2-1)=(-7, -1)$ 或 $(1, 7)$，解得 $(x_1, x_2)=(-3, 0)$ 或 $(1, 4)$. 然后，有 $\dfrac{r-1}{r}=x_1x_2=0$ 或 4，得 $r=1$ 或 $-\dfrac{1}{3}$.

直接验证可知，当 $r=1$ 或 $-\frac{1}{3}$ 时，方程 ① 都恰有两个整数解. 所以，$r=1$ 或 $-\frac{1}{3}$.

说明 利用韦达定理有时可以先求出解(针对特殊性质的解，本题方程的解都为整数)，再求出方程来. 如果直接用求根公式，反倒会陷入带根号的困境.

例 3 设 a, b, c, d 是四个不同实数，已知 a, b 是方程 $x^2-10cx-11d=0$ 的两个解，而 c, d 是方程 $x^2-10ax-11b=0$ 的两个解. 求 $a+b+c+d$ 的值.

解析 由韦达定理可知，

$$\begin{cases}a+b=10c,\\ c+d=10a.\end{cases}$$

两式相加，得 $a+b+c+d=10(a+c)$，转为求 $a+c$ 的值.

由 a 是方程 $x^2-10cx-11d=0$ 的解及 $d=10a-c$，可得

$$\begin{aligned}0&=a^2-10ca-11(10a-c)\\&=a^2-10ac-110a+11c.\end{aligned}$$

同理可得，$0=c^2-10ac-110c+11a$. 两式相减，有

$$(a-c)(a+c-121)=0.$$

而 $a\neq c$，故 $a+c=121$. 所以，$a+b+c+d=10(a+c)=1210$.

说明 作为一个完整的解答还需要说明这样的 a, b, c, d 是存在的，它可以这样来得到：由韦达定理，可知 $ab=-11d$, $cd=-11b$. 两式相乘，约去 bd(注意 $bd\neq 0$，否则，例如 $d=0$，则 a, b 中有一个为 0，与 a, b, c, d 是四个不同实数矛盾)，得 $ac=121$，结合 $a+c=121$，可知 a, c 是方程 $x^2-121x+121=0$ 的两个解，然后可确定 b, d.

例 4 已知实数 x_1, x_2, $x_3(x_1<x_2<x_3)$ 是方程 $x^3-3x^2+(a+2)x-a=0$ 的解. 求 $4x_1-x_1^2+x_3^2$ 的所有可能值.

解析 涉及三次方程求解问题，先要观察是否有一个明显的解. 此题中，1 是方程的一个解 (将 $x=1$ 代入左边可知). 于是，方程变为

$$(x-1)(x^2-2x+a)=0.$$

另外两个是方程

$$x^2-2x+a=0 \qquad ①$$

的解.由韦达定理知,它们的和为 2.因此,必有一个大于 1,而另一个小于 1,故 $x_2=1$,而 x_1, x_3 是 ① 的两个解,进而有

$$\begin{aligned}4x_1-x_1^2+x_3^2&=(x_3-x_1)(x_3+x_1)+4x_1\\&=2(x_3-x_1)+4x_1=2(x_1+x_3)\\&=4.\end{aligned}$$

综上可知,所求代数式的值等于 4.

例 5 设 a, b 是给定的实数 ($a\neq b$),解关于 x, y, z 的方程组

$$\begin{cases}3x+z=2y+a+b,\\3x^2+3xz=y^2+2(a+b)y+ab,\\x^3+3x^2z=y^2(a+b)+2yab.\end{cases}$$

解析 由前两个方程可得

$$\begin{cases}a+b=3x+z-2y,\\ab=3x^2+3y^2-6xy+3xz-2yz,\end{cases} \qquad ①$$

代入第三个方程,得

$$x^3-4y^3-6x^2y+3x^2z+9xy^2-6xyz+3y^2z=0.$$

对左边作因式分解 (左边当 $x=y$ 时成立,故含有因式($x-y$),除以($x-y$) 后再作分解),得

$$(x-y)^2(x-4y+3z)=0.$$

情形一: $x=y$,此时方程组 ① 变为

$$\begin{cases}a+b=x+z,\\ab=xz.\end{cases}$$

由韦达定理可知,a, b 与 x, z 是同一个一元二次方程的实数解,故 $(x,y,z)=(a,a,b)$ 或(b,b,a).

情形二: $x=4y-3z$,此时方程组 ① 变为

$$\begin{cases}a+b=10y-8z,\\ab=27y^2-44yz+18z^2.\end{cases}$$

由韦达定理可知,a, b 是方程(关于 t 的)

$$t^2-(10y-8z)t+(27y^2-44yz+18z^2)=0 \qquad ②$$

的两个实数解. 但方程②的判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= (10y-8z)^2-4(27y^2-44yz+18z^2)\\ &=-8y^2+16yz-8z^2\\ &=-8(y-z)^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

故要求 $y=z$，但这导致 $a=b$，矛盾.

综上可知，方程组的解为 $(x, y, z)=(a, a, b)$ 或 (b, b, a).

例 6 给定了 n $(n>1)$ 个二次三项式 $x^2-a_1x+b_1$, …, $x^2-a_nx+b_n$，其中 $2n$ 个实数 a_1, …, a_n, b_1, …, b_n 互不相同. 试问：是否可能多项式的所有解恰好是 a_1, …, a_n, b_1, …, b_n 的一个排列？

解析 假设有这样的可能性，由于 a_1, …, a_n, b_1, …, b_n 这 $2n$ 个实数互不相同，它们构成了 n 个二次三项式的所有解的全体，则每个二次三项式都有两个不同的解. 设 α_i, β_i 是一元二次方程 $x^2-a_ix+b_i=0$ 的两个解，由韦达定理知，$a_i=\alpha_i+\beta_i$, $b_i=\alpha_i\beta_i$. 因为 n 个二次三项式的所有解的全体就是 a_1, …, a_n, b_1, …, b_n，所以就有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

因此 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=0$.

另一方面，有

$$\alpha_i^2+\beta_i^2=(\alpha_i+\beta_i)^2-2\alpha_i\beta_i=a_i^2-2b_i.$$

故 $$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\beta_i^2)=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-2b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,$$

这表明：$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2=0$，于是所有的 b_i 都为 0，与题意相矛盾.

从而本题的结论是否定的.

说明 这里通过韦达定理的过渡，实现了总体和与部分和之间的相互连结.

1.5 主元素方法

当一个代数式中含有两个或两个以上变量时，通常采取适当的变形，确定其中的一个变量为主变量，从主变量的角度来解决问题，这种方法就称为主元素方法.

例 1　求方程 $2x^2+y^2-2xy-4x-30=0$ 的正整数解.

解析　原方程视为关于 y 的二次方程：

$$y^2-2xy+(2x^2-4x-30)=0,$$

则 $\Delta=4x^2-4(2x^2-4x-30)=4[34-(x-2)^2]$ 是一个完全平方数，经枚举知 $(x-2)^2=9$ 或 25，由于 x 为正整数，故 $x=5$ 或 7.

当 $x=5$ 时，原方程化为 $y^2-10y=0$，解得 $y_1=10$，$y_2=0$；

当 $x=7$ 时，原方程化为 $y^2-14y+40=0$，解得 $y_1=10$，$y_2=4$.

所以，原方程的正整数解 (x, y) 为 $(5, 10)$，$(7, 10)$，$(7, 4)$.

说明　本题也可以 x 为主元，过程几乎是一样的. 读者不妨一试.

例 2　若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2(2a-1)x+4(a-3)=0$ 至少有一个整数解，求正整数 a 的值.

分析　本题是关于 x 的一元二次方程，根据判别式与求根公式，能求出正整数 a 的值. 换一个角度看，若以 a 为主元，把它变形为关于 a 的一元一次方程，是不是也能解呢？

解法一　由题意得，$\Delta=4(8a+1)$ 是一个完全平方数. 因为 $8a+1$ 是奇数，所以它一定是奇数的平方. 设 $8a+1=(2m+1)^2$（m 为正整数），解得 $a=\frac{1}{2}m(m+1)$，将 a 的值代入原方程得 $x_1=-2+\frac{4}{m}$，$x_2=-2-\frac{4}{m+1}$. 由于 x_1，x_2 中至少有一个为整数，故 $m\mid 4$ 或 $(m+1)\mid 4$. 又因为 m 为正整数，因此，$m=1, 2, 3, 4$，解得 $a=1, 3, 6, 10$. 直接验证可知，它们都符合要求.

解法二　将原方程整理成关于 a 的方程：$a=\frac{2x+12}{(x+2)^2}$（注意，当 $x=-2$

时，原方程左边 $=-8\neq 0$，故 $x\neq -2$）. 因 a 为正整数，故 $a=\dfrac{2x+12}{(x+2)^2}\geqslant 1$. 于是，$x^2+2x-8\leqslant 0$，解得 $-4\leqslant x\leqslant 2$. 又因为 x 是整数，故 $x=-4,-3,0,1,2$ 分别代入得 $a=1,6,3,\dfrac{14}{9},1$，所以，a 的值为 $1,3,6,10$.

例 3 解方程 $x^4-2\sqrt{3}x^2-x+3-\sqrt{3}=0$.

分析 本题属于解高次方程，并且系数 $\sqrt{3}$ 是无理数，用因式分解方法很困难. 仔细观察系数 $\sqrt{3}$ 和 3，发现 $3=(\sqrt{3})^2$，这就给我们一个思路：把 $\sqrt{3}$ 看作一个元.

解析 设 $\sqrt{3}=a$，则原方程化为 $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$，整理为关于 a 的方程，得 $a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0$，因式分解，得

$$[a-(x^2-x)][a-(x^2+x+1)]=0,$$

故 $a=x^2-x$ 或 $a=x^2+x+1$，即 $x^2-x-\sqrt{3}=0$ 或 $x^2+x+1-\sqrt{3}=0$，

解得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$ 或 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

说明 这里我们突破了常规思维，把 $\sqrt{3}=a$ 看作一个主元，这种把某个常数作为主元的方法虽然不常用，但有时却非常有效.

例 4 已知 $y=(2x^5+2x^4-53x^3-57x+54)^{2019}$，求当 $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{111}-1)$ 时的函数值.

解析 若直接将 $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{111}-1)$ 代入，会很繁琐，适当变形，得 $2x+1=\sqrt{111}$，则 $2x^2+2x-55=0$，将 $t=2x^2+2x-55$ 作为主元，并将原式化为 t 的形式，然后计算，将会使计算简化.

因为 $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{111}-1)$，所以 $2x+1=\sqrt{111}$，则 $2x^2+2x-55=0$，而 $(2x^5+2x^4-53x^3-57x+54)$ 除以 $(2x^2+2x-55)$ 后所得的商式是 x^3+x-1，余式为 -1，故 $y=[(2x^2+2x-55)(x^3+x-1)-1]^{2019}=-1$.

例 5 求使不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 对满足 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的实数 p 都成立的 x 的取值范围.

解析 将不等式看作关于 x 的函数 $f(x)=x^2+(p-4)x-p+3>0$ 来解，由于已经知道 p 的取值范围去求 x 的取值范围，而非已知 x 的取值范围

去求 p 的值，问题陷入僵局. 换一个角度，以 p 为主元呢?

原不等式即 $x^2+(x-1)p-4x+3>0$，令 $f(p)=(x-1)p+x^2-4x+3$，这是 f 关于 p 的一次函数，由一次函数的性质，$f(p)>0$ 在 $0\leqslant p\leqslant 4$ 时恒成立的条件是:

$$\begin{cases} f(0)>0, \\ f(4)>0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-1>0, \end{cases}$$

解得 $x>3$ 或 $x<-1$.

例 6 求方程组

$$\begin{cases} (x^2-6x+13)y=20, \\ (y^2-6y+13)z=20, \\ (z^2-6z+13)x=20 \end{cases}$$

的实数解(x, y, z).

解析 此方程组关于 x, y, z 是轮换对称的，而且容易发现方程组的一组解：$x=y=z=4$. 但是，并不能排除没有其余的实数解.

一条可行之路是盯住其中的一个变量来分析，利用二次函数的图象与性质来处理.

原方程组可变形为

$$\begin{cases} y=\dfrac{20}{(x-3)^2+4}, & ① \\ z=\dfrac{20}{(y-3)^2+4}, & ② \\ x=\dfrac{20}{(z-3)^2+4}. & ③ \end{cases}$$

由③可知，$0<x\leqslant 5$，对 x 分段讨论.

如果 $4<x\leqslant 5$，那么 $5<(x-3)^2+4\leqslant 8$，由 ① 可得 $\dfrac{5}{2}\leqslant y<4$，从而，$4\leqslant (y-3)^2+4<5$，由 ② 可得 $4<z\leqslant 5$，进而有 $5<(z-3)^2+4\leqslant 8$，由 ③ 可得 $\dfrac{5}{2}\leqslant x<4$，矛盾.

如果 $2\leqslant x<4$，那么 $4\leqslant (x-3)^2+4\leqslant 5$，由 ① 可得 $4\leqslant y\leqslant 5$，同上分析，由 ② 可得 $\dfrac{5}{2}\leqslant z\leqslant 4$，再由 ③ 得到 $4\leqslant x\leqslant 5$，亦矛盾.

如果 $0<x<2$，那么由 ① 可得 $1<y<4$ $\Big($事实上，有 $\dfrac{20}{13}<y<4$，但

只需 $1 < y < 4$ 即可$\Big)$，再由 ② 可得 $\frac{5}{2} < z \leqslant 5$，进而，由 ③ 得 $\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 5$，矛盾.

上述讨论表明，x 只能等于 4，进而可求得 $y = z = 4$. 所以，方程只有一组解 $(x, y, z) = (4, 4, 4)$.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 初中卷. 初中数学竞赛中的解题方法与策略/冯志刚编著. —3 版. —上海:华东师范大学出版社,2019

ISBN 978-7-5675-9503-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 194822 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·初中卷

初中数学竞赛中的解题方法与策略(第二版)

编　　著　冯志刚
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　周文娟
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　12.5
字　　数　210 千字
版　　次　2020 年 4 月第二版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—35 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9503-3
定　　价　29.00 元

出 版 人　王　焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。