数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 1

Mathematical Olympiad Series

集 合

刘诗雄 编著

华东师范大学出版社

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家. 例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 元素与集合

一、集合的概念

虽然集合是一个原始的概念，但对一个具体的集合而言，很多情况下我们还是可以采用列举法或描述法给出它的一个准确而清晰的表示.

用描述法表示一个集合基于下面的概括原则：

概括原则 对任给的一个性质 P，存在一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 P 的所有对象，即

$$S=\{x \mid P(x)\},$$

其中 $P(x)$ 表示"x 具有性质 P".

由此，我们知道集合的元素是完全确定的，同时它的元素之间具有互异性和无序性.

集合的元素个数为有限数的集合称为有限集，元素个数为无限数的集合称为无限集. 如果有限集 A 的元素个数为 n，则称 A 为 n 元集，记作 $|A|=n$. 空集不含任何元素.

例 1 设集合 $M=\left\{x\left|\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0,\ x\in\mathbf{R}\right.\right\}$. 若 $3\in M$，且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

解 由 $3\in M$，得 $\dfrac{3a-5}{3^2-a}<0$，即

$$\left(a-\frac{5}{3}\right)(a-9)>0,$$

所以
$$a<\frac{5}{3} \text{ 或 } a>9. \qquad ①$$

由 $5\notin M$ 得，$\dfrac{5a-5}{5^2-a}\geqslant 0$ 或 $5^2-a=0$，所以

$$1 \leqslant a \leqslant 25. \qquad ②$$

由 ①、② 得，$a \in \left[1, \frac{5}{3}\right) \cup (9, 25]$.

说明　$5 \notin M$ 隐含了条件 $5^2 - a = 0$，这是容易被忽视的.

例 2　设集合 $M = \{a \mid a = x^2 - y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$，$n$ 为整数. 分别判断数 $4n$、$4n+1$、$4n+2$、$4n+3$ 与集合 M 的关系.

分析　当 $n=1$ 时，易知 $4 = 2^2 - 0^2$，$5 = 3^2 - 2^2$，$7 = 4^2 - 3^2$；而对任何整数 x、y，由于 $x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶，故 $(x+y)(x-y) \neq 2 \times 3 = 6 \times 1 = 6$. 于是，我们尝试将 $4n$、$4n+1$、$4n+3$ 分别表示成 $x^2 - y^2$ 的形式，并证明不存在 $x, y \in \mathbf{Z}$，使 $4n+2 = x^2 - y^2$.

解　因为对任意的整数 n，有

$$4n = (n+1)^2 - (n-1)^2 (n+1, n-1 \in \mathbf{Z}),$$
$$4n+1 = (2n+1)^2 - (2n)^2 (2n+1, 2n \in \mathbf{Z}),$$
$$4n+3 = (2n+2)^2 - (2n+1)^2 (2n+2, 2n+1 \in \mathbf{Z}),$$

所以 $4n, 4n+1, 4n+3 \in M$.

若 $4n+2$ 是 M 的元素，则存在 $x, y \in \mathbf{Z}$ 满足 $4n+2 = x^2 - y^2$. 注意到 $x+y$ 与 $x-y$ 奇偶性相同，若同为奇数，则 $4n+2 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ 不成立；若同为偶数，则 $(x+y)(x-y)$ 为 4 的倍数，但 $4n+2$ 不是 4 的倍数，故 $4n+2 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ 不成立. 所以 $4n+2$ 不是 M 的元素.

说明　由概括原则我们知道，判断一个对象 x 是否为集合 S 的元素，等价于判断 x 是否具有性质 P.

例 3　设集合

$$S = \left\{ \frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}} \,\middle|\, m, n \in \mathbf{N}, m^2+n^2 \neq 0 \right\}.$$

证明：对一切 $x, y \in S$，且 $x < y$，总存在 $z \in S$，使得 $x < z < y$.

证明　因 $\left(\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)^2 = 1 + 2 \times \frac{mn}{m^2+n^2}$，所以，原命题等价于：设

$$S' = \left\{ \frac{mn}{m^2+n^2} \,\middle|\, m, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

则对一切 $x, y \in S'$ 且 $x < y$，总存在 $z \in S'$ 使得 $x < z < y$.

记 $x = \frac{mn}{m^2+n^2}$，$y = \frac{ab}{a^2+b^2}(x < y)$. 不妨设 $m \leqslant n$，$a \leqslant b$.

考虑函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$. 易证，$f(x)$在$[0,1]$上严格递增. 所以，对所有 $c,d\in[0,1]$，有

$$f(c)<f(d)\Leftrightarrow c<d.$$

又 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{mn}{m^2+n^2}<\dfrac{ab}{a^2+b^2}=f\left(\dfrac{a}{b}\right)$，则$\dfrac{m}{n}<\dfrac{a}{b}$.

因此，可以选择有理数 $\dfrac{p}{q}$ ($p,q\in\mathbf{N},q\neq 0$)，使得 $\dfrac{m}{n}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{a}{b}$ $\left(\text{如取}\dfrac{p}{q}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{a}{b}\right)\right)$. 故

$$f\left(\frac{m}{n}\right)<f\left(\frac{p}{q}\right)<f\left(\frac{a}{b}\right).$$

令 $z=f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{pq}{p^2+q^2}$ 即可.

说明 上述解法用等价命题代替原命题，避免了根式运算，使解答过程变得简洁.

二、集合与集合的关系

在两个集合的关系中，子集是一个重要的概念，它的两个特例是真子集和集合相等. 从下面“充分必要条件”的角度来理解子集、真子集和集合相等的概念无疑是十分有益的：

子集：$A\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，恒有 $x\in B$；

真子集：$A\subsetneqq B\Leftrightarrow\begin{cases}A\subseteq B,\\ \text{且存在 } x'\in B\text{，但 } x'\notin A;\end{cases}$

集合相等：$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

容易证明两个集合之间关系的如下性质：

1. $\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\subsetneqq A$ ($A\neq\varnothing$)；
2. $A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$；
3. n 元集 A 总共有 2^n 个不同的子集.

例 4 若集合$\{1,2,\cdots,50\}$的子集中不包含形如$\{x,3x\}$的子集，则称该子集为“特殊子集”，含元素个数最多的特殊子集称为“超特殊子集”. 求超特殊子集含有多少个元素，且存在多少个不同的超特殊子集？

分析 一个自然的想法是，先列出集合$\{1,2,\cdots,50\}$的所有仅包含形如$\{x,3^kx\}$ ($k\in\mathbf{N}^*$) 的二元子集且元素尽可能多的子集，以及$\{1,2,\cdots,50\}$

除去上述复合元素后余下元素构成的子集，然后考虑如何从这些子集中选取元素组成超"特殊子集".

解　作集合$\{1, 2, \cdots, 50\}$的子集：

$E_1 = \{1, 3, 9, 27\}$； $E_2 = \{2, 6, 18\}$， $E_3 = \{4, 12, 36\}$，
$E_4 = \{5, 15, 45\}$； $E_5 = \{7, 21\}$， $E_6 = \{8, 24\}$，
$E_7 = \{10, 30\}$， $E_8 = \{11, 33\}$， $E_9 = \{13, 39\}$，
$E_{10} = \{14, 42\}$， $E_{11} = \{16, 48\}$；
$E_{12} = \{17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 40, 41, 43, 44, 46, 47, 49, 50\}$.

显然，这些集合两两的交集为空集，它们的并集恰为集合$\{1, 2, \cdots, 50\}$.

超特殊子集可以从集合E_1、E_2、E_3、E_4中各选两个元素，同一个集合中选取的两个数没有一个是另一个的3倍；从E_5，E_6，$\cdots$，E_{11}中各取一个元素；取集合E_{12}的全部元素. 故超特殊子集最多含有$2\times4+7+23=38$(个)元素.

因为从E_1中选取两个元素的方法有3种；从E_2、E_3、E_4中各选取两个元素的方法和从E_{12}中选取全部元素的方法各只有1种；从E_5，E_6，$\cdots$，E_{11}中各选取一个元素的方法各有2种，所以，共有$3\times2^7=384$(个)不同的超特殊子集.

如果A、B是两个相等的数集，那么可以得到$A=B$的两个非常有用的必要条件：

(1) 两个集合的元素之和相等；

(2) 两个集合的元素之积相等.

例5　设a、b、c是互不相同的正整数，n为正整数. 若集合

$$\{a+b, b+c, c+a\}=\{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2\},$$

求$a^2+b^2+c^2$的最小值.

解　由题设，显然$n>1$. 由于

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=2(a+b+c),$$

这是一个偶数，故n、$n+1$、$n+2$中有两个奇数，一个偶数，所以n为奇数.

不妨设$a<b<c$.

当$n=3$时，由$a+b=9$，$a+c=16$，$b+c=25$得$a+b+c=25$，从而$a=0$，与题设矛盾. 所以$n\geqslant5$.

当 $n=5$ 时,由 $a+b=25$, $a+c=36$, $b+c=49$ 解得 $a=6$, $b=19$, $c=30$. 这时, $a^2+b^2+c^2=1297$.

综上,所求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值为 1297.

说明 元素之和(积)相等只是两个集合相等的必要条件,以此求解集合时一般还要检查集合的元素是否互异.

例 6 对于非空数集 S、T,定义

$$S+T=\{s+t \mid s\in S, t\in T\}, 2S=\{2s \mid s\in S\}.$$

设 n 为正整数,A、B 均为$\{1, 2, \cdots, n\}$的非空子集,证明:存在 $A+B$ 的子集 D,使得

$$D+D\subseteq 2(A+B), \text{且} |D|\geqslant\frac{|A|\cdot|B|}{2n},$$

这里$|X|$表示有限集 X 的元素个数.

证明 令 $S_y=\{(a, b) \mid a-b=y, a\in A, b\in B\}$.

由于 $\sum\limits_{y=1-n}^{n-1}|S_y|=|A|\cdot|B|$,故存在 y_0, $1-n\leqslant y_0\leqslant n-1$, 使

$$|S_{y_0}|\geqslant\frac{|A|\cdot|B|}{2n-1}>\frac{|A|\cdot|B|}{2n}.$$

取 $D=\{2b+y_0 \mid (a, b)\in S_{y_0}\}$, 由于对所有的 $(a, b)\in S_{y_0}$, 相应的 b 值两两不等,进而 $2b+y_0$ 两两不同,故

$$|D|=|S_{y_0}|>\frac{|A|\cdot|B|}{2n}.$$

由 S_{y_0} 的定义知,对 D 中的每个元素 d,存在 $(a, b)\in S_{y_0}$ 使得

$$d=2b+y_0=a+b\in A+B,$$

故 $D\subseteq A+B$.

对 d_1, $d_2\in D$,设 $d_1=2b_1+y_0=2a_1-y_0$, $d_2=2b_2+y_0$(b_1, $b_2\in B$, $a_1\in A$), 则

$$\begin{aligned} d_1+d_2&=2a_1-y_0+2b_2+y_0\\ &=2(a_1+b_2)\in 2(A+B). \end{aligned}$$

综上可知集合 D 满足要求.

说明 例 6 定义了一种新的集合运算,正确理解这个定义是顺利解题的关键.

例 7 用 $\sigma(S)$ 表示非空的整数集合 S 的所有元素的和. 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}$ 是正整数的集合,且 $a_1<a_2<\cdots<a_{11}$;又设对每个正整数 $n\leqslant 1500$,都存在 A 的子集 S,使得 $\sigma(S)=n$. 求 a_{10} 的最小可能值.

分析 要求 a_{10} 的最小值,显然应使 $\sigma(A)=1500$. 又由题设,应使 a_{11} 尽可能大,且前 10 个数之和不小于 750,故取 $a_{11}=750$. 考虑整数的二进制表示,由 $1+2+\cdots+2^7=255$ 知,前 8 个数应依次为 1、2、4、8、16、32、64、128. 这时 $a_9+a_{10}=495$,从而有 $a_{10}=248$.

解 取 $A_0=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 247, 248, 750\}$,易知 A_0 满足题目要求,且 $a_{10}=248$. 故 a_{10} 的最小可能值不超过 248.

另一方面,a_{10} 不可能比 248 更小. 这是因为前 10 个数之和不能小于 750,否则设 $\sum_{i=1}^{10} a_i=m$, $m<750$,则 $a_{11}=1500-m$,对 $n\in(m, 1500-m)$,显然不存在 A 的子集 S,使 $\sigma(S)=n$. 因 $1+2+\cdots+2^7=255$,由整数的二进制表示知,其前 8 个数之和最大为 255. 故 a_9+a_{10} 的最小可能值为 495,从而 a_{10} 至少为 248.

综上知,a_{10} 的最小可能值为 248.

说明 本例采用了构造法. 直接构造一个符合题设的 A_0,然后证明 A_0 具有所要求的性质. 这种方法在解有关集合和组合的问题中经常用到.

例 8 设 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 是一列集合,满足:对任意正整数 j,只有有限多个正整数 i,使得 $A_i\subseteq A_j$. 证明:存在一列正整数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$,使得对任意正整数 i、j, $a_i \mid a_j$ 当且仅当 $A_i\subseteq A_j$.

证明 设 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 是全体素数从小到大排列. 对 $i\in\mathbf{N}^*$,记 $S_i=\{j\in\mathbf{N}^* \mid A_j\subseteq A_i\}$,由题设知 S_i 是有限集,且 $i\in S_i$. 令 $a_i=\prod_{j\in S_i} p_j$,下面证明数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足条件.

对任意正整数 i、j,若 $A_i\subseteq A_j$,则 $S_i\subseteq S_j$,从而 $a_i \mid a_j$;若 $a_i \mid a_j$,则 $S_i\subseteq S_j$,由 $i\in S_i$ 可知 $i\in S_j$,故 $A_i\subseteq A_j$. 因此 $a_i \mid a_j$ 当且仅当 $A_i\subseteq A_j$.

三、集合语言与集合方法

集合不仅是一个独立的数学分支,而且还为其他数学领域提供了基本的语言和重要的方法.

例 9 某地区网球俱乐部的 20 名成员举行 14 场单打比赛,每人至少上场一次. 求证: 必有六场比赛,其 12 个参赛者各不相同.

证明 记参加第 j 场比赛的选手为 (a_j, b_j),并记

$$S=\{(a_j,\ b_j)\mid j=1,\ 2,\ \cdots,\ 14\}.$$

设 M 为 S 的一个子集. 如果 M 中所含选手对中出现的选手互不相同，则称 M 为 S 的一个“好”子集.

显然，这样的“好”子集只有有限个，其中必有一个元素最多的，设这个元素最多的“好”子集为 M_0，它的元素个数为 r，显然只需证明 $r\geqslant 6$.

如果 $r\leqslant 5$，由于 M_0 是元素个数最多的“好”子集，所以在 M_0 中未出现过的 $20-2r$ 名选手之间互相没有比赛，否则与 M_0 的最大性矛盾. 这就意味着，这 $20-2r$ 名选手所参加的比赛一定是同前 $2r$ 名选手进行的.

由于每名选手至少参加一场比赛，所以除了 M_0 中的 r 场比赛之外，至少还要进行 $20-2r$ 场比赛.

因此，总比赛场数至少为

$$r+20-2r=20-r\geqslant 15,$$

与总比赛场次为 14 场矛盾.

于是 $r\geqslant 6$. 问题得证.

例 10 设 S 是由 $2n$ 个人组成的集合. 求证：其中必定有两个人，他们的公共朋友的个数为偶数.

证明 用反证法：设 S 为一个由 $2n$ 个人组成的集合，S 中每两个人的公共朋友数为奇数.

对 S 中的任意一个人 A，记 $M=\{F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_k\}$ 为 A 的朋友集，可以证明：对每个 A，k 都为偶数.

事实上，对每个 $F_i\in M$，考虑他在 M 中的朋友数，所有这 k 个 F_i 的这些朋友数之和为偶数(因为朋友是相互的)，而对 A、F_i 而言，其公共朋友数为奇数，故每个 F_i 的这样的朋友数为奇数，故 k 为偶数.

设 $k=2m$，现在考虑每个 $F_i\in M$，他的所有朋友集不包括 A，但不局限于 M 中，他的这样的朋友数为奇数(因为 F_i 的朋友数为偶数，而 A 不算在内). 因此，所有 $2m$ 个这样的朋友集的元素个数之和为偶数. 从而在 $2n-1$ 个人(A 除外)中，必有一个人在偶数个这样的朋友集中出现，他与 A 的公共朋友数为偶数.

这个矛盾表明：有两个 S 中的人，他们的公共朋友数为偶数.

说明 上述解法采用了奇偶性分析来“制造”矛盾.

习 题 1

1 已知集合 $\{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}=\{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$，则角 $\alpha=$ ________.

2 集合 $M=\{u \mid u=12m+8n+4l, m,n,l\in\mathbf{Z}\}$ 与 $N=\{u \mid u=20p+16q+12r, p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为________.

3 设 $a\in\mathbf{R}_+$，$A=\left\{(x, y)\,\middle|\,(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant\frac{4}{5}\right\}$ 与 $B=\left\{(x, y)\,\middle|\,|x-1|+2|y-2|\leqslant a\right\}$ 是直角坐标平面 xOy 内的点集，则 $A\subseteq B$ 的充要条件是________.

4 设由模为 1 的 n（$2<n<6$）个复数组成的集合 S 满足下面两条：

(1) $1\in S$；

(2) 若 $z_1\in S$，$z_2\in S$，则 $z_1-2z_2\cos\theta\in S$，其中 $\theta=\arg\frac{z_1}{z_2}$.

则集合 $S=$________.

5 集合 $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，计算 A 中的二元子集两元素之和组成集合 $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$. 则 $A=$ ________.

6 记集合 $T=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$M=\left\{\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}\,\middle|\,a_i\in T, i=1, 2, 3, 4\right\}$，将 M 中的元素按从大到小顺序排列，则第 2015 个数是________.

7 设 A 是两个整数平方差的集合，即 $A=\{x \mid x=m^2-n^2, m, n\in\mathbf{Z}\}$. 证明：

(1) 若 $s, t\in A$，则 $st\in A$.

(2) 若 $s, t\in A$，$t\neq 0$，则 $\frac{s}{t}=p^2-q^2$，其中 p、q 是有理数.

8 设 a_1、a_2、a_3、a_4 是 4 个有理数，使得

$$\{a_ia_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant 4\}=\left\{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\right\},$$

求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值.

9 已知数集 A 具有以下性质：

(1) $0\in A$，$1\in A$；

(2) 若 $x, y \in A$,则 $x-y \in A$;

(3) 若 $x \in A, x \neq 0$,则 $\frac{1}{x} \in A$.

考虑 $x, y \in A$ 时,判断 $xy \in A$ 是否成立? 并说明理由.

10 设 $E=\{1, 2, 3, \cdots, 200\}$, $G=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{100}\} \subseteq E$,且 G 具有下列两条性质:

(1) 对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant 100$,恒有 $a_i + a_j \neq 201$;

(2) $\sum_{i=1}^{100} a_i = 10\,080$.

试证明: G 中的奇数的个数是 4 的倍数,且 G 中所有数字的平方和为一个定数.

11 称有限集 S 的所有元素的乘积为 S 的"积数",给定数集 $M=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{100}\right\}$. 求集 M 的所有含偶数个元素的子集的"积数"之和.

12 设 S 为非空数集,且满足: (i) $2 \notin S$; (ii) 若 $a \in S$,则 $\frac{1}{2-a} \in S$. 证明:

(1) 对一切 $n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 3$,有 $\frac{n}{n-1} \notin S$;

(2) S 或者是单元素集,或者是无限集.

13 设 n 是大于 1 的正整数,证明:存在一个集合 $A \subsetneqq \{1, 2, \cdots, n\}$,使得

(1) $|A| \leqslant 2[\sqrt{n}]+1$;

(2) $\{|x-y| \mid x, y \in A, x \neq y\}=\{1, 2, \cdots, n-1\}$.

14 考虑实数 x 在 3 进制中的表达式. K 是区间 $[0, 1]$ 内所有这样的数 x 的集合,并且 x 的每位数字是 0 或 2. 如果 $S=\{x+y \mid x, y \in K\}$,求证: $S=\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 2\}=[0, 2]$.

15 设 $S=\{1, 2, 3, 4\}$, n 项的数列: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 有如下性质:对于 S 的任何一个非空子集 B(B 的元素个数记为 $|B|$),在该数列中有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B. 求 n 的最小值.

16 设集合 $M=\{1, 2, 3, \cdots, 1\,000\}$,现对 M 的任一非空子集 X,令 α_X 表示 X 中最大数与最小数之和. 求所有这样的 α_X 的算术平均值.

17 设 S 为满足下列条件的有理数集合:

(1) 若 $a \in S, b \in S$,则 $a+b \in S, ab \in S$;

(2) 对任一个有理数 r, 3 个关系 $r \in S, -r \in S, r=0$ 中有且仅有一个成立.

证明: S 是由全体正有理数组成的集合.

18 已知 $0<b<a$，设

$$A=\left\{r \,\middle|\, r=\frac{a}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+b\sqrt[3]{xyz},\ x,\ y,\ z\in\left[1,\ \frac{a}{b}\right]\right\},$$

$$B=[2\sqrt{ab},\ a+b].$$

证明：$A=B$.

2 集合的运算

一、集合的交集、并集、补集

集合的交集、并集、补集三种基本运算是通过元素与集合的关系来定义的：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\},$$

$$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\},$$

$$\complement_U A=\{x\mid A\subseteq U,\ x\in U,\text{且 } x\notin A\}.$$

请注意这里的逻辑关联词“且”、“或”，它们在集合运算的定义中起了决定性的作用.

记 U 为全集，容易证明集合的运算满足如下法则：

（1）**等幂律**　$A\cap A=A$，$A\cup A=A$；

（2）**同一律**　$A\cap U=A$，$A\cup U=U$，

$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$；

（3）**互补律**　$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U$；

（4）**交换律**　$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

（5）**结合律**　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

（6）**分配律**　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

（7）**吸收律**　$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$；

（8）**反演律(摩根律)**　$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$，

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

二、集合的差集、对称差

定义 1　由属于集合 A 且不属于集合 B 的全体元素组成的集合叫做集合 A 对 B 的差集，记作 $A\backslash B$(或 $A-B$)，即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \notin B\}.$$

由这个定义可以看出,补集只是差集的一种特殊情况.

记 U 为全集,集合的差集满足如下法则:

(1) $A - A = \varnothing$, $A - \varnothing = A$;

(2) $A - U = \varnothing$, $U - A = \complement_U A$;

(3) $A - B \subseteq A$, $A - B = A - (A \cap B)$;

(4) $A \cup (B - A) = A \cup B$, $A \cap (B - C) = A \cap B - C$.

定义 2 由属于集合 A 且不属于集合 B,或属于集合 B 且不属于集合 A 的全体元素组成的集合叫做集合 A 和 B 的对称差,记作 $A \triangle B$,即

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B, \text{或 } x \in B \text{ 且 } x \notin A\}. \end{aligned}$$

集合的对称差满足如下法则:

(1) $A \triangle \varnothing = A$, $A \triangle A = \varnothing$;

(2) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$;

(3) 交换律:$A \triangle B = B \triangle A$;

(4) 结合律:$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;

(5) 交集对对称差的分配律:$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

(6) 若 $A \triangle B = A \triangle C$,则 $B = C$.

三、集合的笛卡尔积

定义 3 设 A、B 为两个集合,以 A 中元素为第一元素,B 中元素为第二元素构成有序对,所有这样的有序对组成的集合叫做集合 A 与 B 的笛卡尔积(又称直积),记作 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

集合的笛卡尔积满足如下运算法则:

(1) $A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times A = \varnothing$;

(2) 笛卡尔积对并集和交集的分配律:

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$;

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,

$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$.

一般地说,笛卡尔积运算不满足交换律、结合律.

利用维恩图可以清晰地理解集合的交、并、补、差运算及其运算律. 维恩图为集合问题的解决提供了一个直观的工具.

例 1 设 A、B 都是不超过 9 的正整数组成的全集 U 的子集，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\}$，求 $A\backslash B$.

分析 直接进行集合间的运算和推理似乎较难入手，但我们可从维恩图 2-1 中得到解题思路的提示.

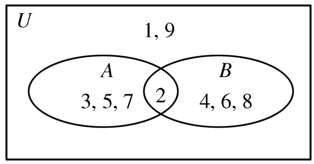

图 2-1

解 因为 $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$，所以 $A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$.

又 $$A\cap B=\{2\},$$
$$(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\},$$

所以 $$\begin{aligned}B&=U\cap B=(A\cup\complement_U A)\cap B\\&=(A\cap B)\cup((\complement_U A)\cap B)\\&=\{2,4,6,8\}.\end{aligned}$$

所以，$A\backslash B=(A\cup B)\backslash B=\{3,5,7\}$.

例 2 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$. 问：

(1) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合？

(2) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有三个元素的集合？

分析 因为 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，故可从解 $A\cap C$ 及 $B\cap C$ 对应的方程组入手.

解 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

(i) $\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$ (ii) $\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1\end{cases}$

的解集.

由(i)解得 $(x,y)=(0,1)$，$\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$；

由(ii)解得 $(x,y)=(1,0)$，$\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2},\dfrac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1) 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能：

① $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1;\end{cases}$ ② $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$

由①得 $a=0$；由②得 $a=1$.

故当 $a=0$ 或 1 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素.

(2) 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素的情况是

$$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2},$$

解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素.

例 3 设 $n\in\mathbf{N}$，且 $n\geqslant 15$，A、B 都是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的真子集，$A\cap B=\varnothing$，且 $\{1, 2, \cdots, n\}=A\cup B$. 证明：$A$ 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

证明 由题设，$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任何元素必属于且只属于它的真子集 A、B 之一. 假设结论不真，则存在如题设的 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的真子集 A、B，使得无论是 A 还是 B 中的任何两个不同的数的和都不是完全平方数.

不妨设 $1\in A$，则 $3\notin A$. 否则 $1+3=2^2$，与假设矛盾，所以 $3\in B$. 同样，$6\notin B$，所以 $6\in A$. 这时 $10\notin A$，即 $10\in B$. 因 $n\geqslant 15$，而 15 或者在 A 中，或者在 B 中，但当 $15\in A$ 时，因 $1\in A$，$1+15=4^2$，矛盾；当 $15\in B$ 时，因 $10\in B$，$10+15=5^2$，仍然矛盾. 因此假设不真，即 A 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

说明 由 A、B 地位对称，在上面的解法中我们采用了“不妨设 $1\in A$”这种技巧，有效简化了解题过程.

例 3 实际上给出了一个关于集合的方程组：

$$\begin{cases}A\cup B=\{1, 2, \cdots, n\},\\ A\cap B=\varnothing.\end{cases}$$

如果交换 A、B 算两组解(有序解)，那么这个方程组有多少组有序解呢？

设 $U=\{1, 2, \cdots, n\}$，由 $A\cup B=U$，$A\cap B=\varnothing$，知 A 与 B 互补，对于 $A\subseteq U$，可取 $B=\complement_U A$. 故上述集合方程的有序解的个数为 2^n.

例 4 设集合 S 含有 n 个元素，A_1，A_2，$\cdots$，A_k 是 S 的不同子集，它们两两的交集非空，而 S 的其他子集不能与 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 都相交. 求证：$k=2^{n-1}$.

分析 S 有 2^n 个子集，将两个互为补集的子集作为一组，则可将 2^n 个子集分成 2^{n-1} 个组，记为 $\{A_i', B_i'\}$，$i=1, 2, \cdots, 2^{n-1}$，显然 A_i 只能选取每组中的一个子集.

证明 设 $a\in S$. 因为 $|S|=n$，故 S 的子集中含 a 的子集有 2^{n-1} 个. 显然

它们两两的交非空. 所以,$k \geqslant 2^{n-1}$.

又可将 S 的 2^n 个子集分成 2^{n-1} 组,每组有两个集合,它们互为补集. 若 $k > 2^{n-1}$,则必有两个集合 A_i、A_j $(i \neq j)$ 来自上述同一组,但 $A_i \cap A_j = \varnothing$,与题意不符. 所以,$k = 2^{n-1}$.

例 5 已知集合 A 中包含 2016 个点且无四点共线. 证明:在集合 A 中存在一个至少有 63 个点的子集 B,使得 B 中无三点共线.

分析 自然,我们应该考虑集合 A 中无三点共线的元素个数最多的子集,设 B 就是一个这样的子集,那么集合 $A \backslash B$ 中任何一点都与集合 B 中某两点构成三点共线,即 $A \backslash B$ 中任何一点对应集合 B 中一个与之组成三点共线的二元子集,且 $A \backslash B$ 中不同点对应 B 中不同二元子集,故 B 中二元子集的数量不少于 $A \backslash B$ 中元素的数量.

证明 令 $B \subseteq A$ 且 B 为无三点共线的最大的子集.

由于 B 为满足条件的最大集合,于是,集合 $A \backslash B$ 中任意一点与集合 B 中的某两个点共线.

又集合 A 中无四点共线,则过集合 B 中的两个点的每条直线最多包含集合 $A \backslash B$ 中的一个点.

故集合 $A \backslash B$ 中的点的数目不大于集合 B 中的点对的数目.

记 $|B| = k$,则集合 $A \backslash B$ 中点的数目为 $2016 - k$,集合 B 中点对的数目为 $\dfrac{k(k-1)}{2}$. 所以

$$2016 - k \leqslant \frac{(k-1)k}{2}.$$

解得 $k \geqslant 63$ 或 $k \leqslant -64$ (负值舍去).

因此,集合 B 中至少有 63 个点.

例 6 令 $S = \{1, 2, \cdots, 2014\}$. 对于每个非空子集 $T \subseteq S$,可选择 T 的一个元素作为该集合的代表元. 求将集合 S 的每个非空子集选取一个代表元的不同方式种数,每种方式须满足对于每个子集 $D \subseteq S$,若 D 为非空子集 A, B, $C \subseteq S$ 的无交并(即子集 A、B、C 两两不交且并集为 D),则集合 D 的代表元至少为 A、B、C 中的一个代表元.

解 选取方式有 $108 \times 2014!$ 种.

用 $r(A)$ 表示集合 A 的代表元,a_n 表示当 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 时符合题意的安排方式的种数.

先计算四元集的情形.

记 $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. 则有四种不同方式选出 $r(Y)$，不妨设 $y_1=r(Y)$.

由 $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}=\{y_1, y_2\}\cup\{y_3\}\cup\{y_4\}$，则只能 $r(\{y_1, y_2\})=y_1$.

类似地，$r(\{y_1, y_3\})=r(\{y_1, y_4\})=y_1$.

此时，只有

$$\{y_1, y_2, y_3\}、\{y_1, y_2, y_4\}、\{y_1, y_3, y_4\}、$$
$$\{y_2, y_3, y_4\}、\{y_2, y_3\}、\{y_2, y_4\}、\{y_3, y_4\}$$

的代表元无法确定，且可以为集合内的任意一个元素，故有 $3^4\times 2^3$ 种.

从而，$a_4=4\times 3^4\times 2^3=108\times 4!$.

对于 $n\geqslant 5$，只要证明 $a_n=na_{n-1}$.

记全集 S 的代表元 $r(S)=k$，则 k 有 n 种选择方式.

若 T 为含 k 的元素个数至多为 $n-2$ 的子集，则集合 S 可写成 T 与另两个非空子集的无交并.

故 $r(T)=k$.

设 T 为含 k 的 $n-1$ 元子集.

若 $r(T)=m\neq k$，则 T 可写成 $\{m, k\}$ 与另两个子集的无交并.

从而，$r(\{m, k\})=m$，这与之前的含 k 的元素个数至多是 $n-2$ 的子集的代表元为 k 的结论矛盾.

故含 k 的所有子集代表元必为 k.

从而，将 n 降为了 $n-1$ 的情形可得递推式 $a_n=na_{n-1}$.

说明 正确理解集合 D 的代表元的特殊性是解本例的关键. 设 $D=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$，$A=\{y_1, y_2\}$，$B=\{y_3\}$，$C=\{y_4\}$，且 $r(A)=y_1$，则 D 的代表元不能为 y_2；当然，若 $r(A)=y_2$，则 D 的代表元不能为 y_1.

例 7 有 1987 个集合，每个集合有 45 个元素，任意两个集合的并集有 89 个元素，问此 1987 个集合的并集有多少个元素？

分析 由每个集合有 45 个元素，且任意两个集合的并集有 89 个元素知，任意两个集合有且只有一个公共元素.

解 显然可以由题设找到这样的 1987 个集合，它们都含有一个公共元素 a，而且每两个集合不含 a 以外的公共元素.

下面，我们来排除其他可能性.

由任意两个集合的并集有 89 个元素可知，1987 个集合中的任意两个集合有且只有一个公共元素，则容易证明这 1987 个集合中必有一个集合 A 中

的元素 a 出现在 A 以外的 45 个集合中，设为 A_1，A_2，…，A_{45}，其余的设为 A_{46}，A_{47}，…，A_{1986}.

设 B 为 A_{46}，A_{47}，…，A_{1986} 中的任一个集合，且 $a \notin B$，由题设 B 和 A，A_1，A_2，…，A_{45} 都有一个公共元素，且此 46 个元素各不相同，故 B 中有 46 个元素，与题设矛盾. 所以这 1987 个集合中均含有 a.

故所求结果为 $1987 \times 44 + 1 = 87\,429$，即这1987个集合的并集有87 429个元素.

说明 在这里我们先设计一种符合题设的特殊情形，然后再排除其他可能的情形，从而达到解题目的. 这是一种“先猜后证”的解题策略.

例 8 将集合 $M = \{1, 2, \cdots, 100\}$ 中任意 67 个数染成红色，另 33 个数染成蓝色. 若集合 M 存在形如

$$A_{i,k} = \{i, i+1, \cdots, i+3k-1\} \ (1 \leqslant k \leqslant 33, 1 \leqslant i \leqslant 101-3k)$$

的子集恰有 $2k$ 个数被染成红色，另 k 个数被染成蓝色，求 k 的最大值.

解 首先，若将集合 M 中从 18～84 这 67 个数染成红色，其他的数染成蓝色，则当 $17 < k \leqslant 33$ 时，显然，不存在满足题设条件的子集 $A_{i,k}$. 故 $k_{\max} \leqslant 17$.

下面证明：$k_{\max} = 17$.

事实上，当 $1 \leqslant i \leqslant 49$ 时，集合

$$A_{i,17} = \{i, i+1, \cdots, i+50\} \text{ 与 } A_{i+1,17} = \{i+1, i+2, \cdots, i+51\}$$

中红色数的个数至多相差 1.

(i) i 与 $i+51$ 同色.

则集合 $A_{i,17}$、$A_{i+1,17}$ 的红色数个数相等；

(ii) i 为红、$i+51$ 为蓝.

则集合 $A_{i,17}$ 的红色数个数比集合 $A_{i+1,17}$ 的红色数个数多 1；

(iii) i 为蓝、$i+51$ 为红.

则集合 $A_{i,17}$ 的红色数个数比集合 $A_{i+1,17}$ 的红色数个数少 1.

考虑下面两个集合

$$A_{1,17} = \{1, 2, \cdots, 51\},$$
$$A_{50,17} = \{50, 51, \cdots, 100\}.$$

若 $A_{1,17}$、$A_{50,17}$ 中至少有一个集合恰好有 34 个数染成红色，则结论成立.

设集合 $A_{1,17}$、$A_{50,17}$ 的红色数个数不是 34.

记 $A=A_{1,17}\cap A_{50,17}=\{50,51\}$.

下面分三种情形讨论.

(1) 当集合 A 中两个数均为红色时,由抽屉原则,知集合

$$A_{1,17}\backslash A=\{1,2,\cdots,49\}\text{ 与 }A_{50,17}\backslash A=\{52,53,\cdots,100\}$$

中必有一个的红色数个数不少于 33.

由对称性,不妨设集合 $A_{1,17}\backslash A$ 中的红色数个数不少于 33,则集合 $A_{1,17}$ 中的红色数个数不少于 35,集合 $A_{50,17}$ 中的红色数个数不多于 33.

由前面证明,知集合 $A_{1,17}$, $A_{2,17}$, $\cdots$, $A_{50,17}$ 中至少有一个其红色数的个数恰为 33.

(2) 当集合 A 中两个数为 1 红 1 蓝时,则集合 $A_{1,17}\backslash A$ 与 $A_{50,17}\backslash A$ 中红色数的个数一个多于 33,一个少于 33. 同上可证.

(3) 当集合 A 中两个数都为蓝色时,则集合 $A_{1,17}\backslash A$ 与 $A_{50,17}\backslash A$ 中红色数的个数一个不少于 35,一个不多于 33. 同上可证.

综上,$k_{\max}=17$.

例 9 设 m, $n\in\mathbf{Z}_+$,已知有 n 堆金币,第 i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 堆中含有 $a_i(a_i>0)$ 枚. 鲍勃和爱丽丝按照如下步骤进行游戏:

【第一步】鲍勃选择集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的非空子集 B_1, B_2, $\cdots$, B_n;

【第二步】在得知鲍勃第一步选择的集合 B_1, B_2, $\cdots$, B_n 后,爱丽丝选择集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个非空子集 S;

【第三步】若 $B_i\cap S$ 的元素个数为偶数,则第 i 堆的金币就归鲍勃所有,否则,归爱丽丝所有.

证明:无论鲍勃如何选择集合 B_1, B_2, $\cdots$, B_n,爱丽丝总能选择一个集合使得她得到的金币总数比鲍勃多.

证明 游戏结束时,爱丽丝获得的金币数多于鲍勃获得的金币数当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i<0.$$

否则,对任意的非空集合 S 有

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i>0.$$

显然,当 $S=\varnothing$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i \cap S|}a_i = \sum_{i=1}^{n}a_i > 0.$$

故
$$\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,m\}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i \cap S|}a_i > 0. \qquad ①$$

当 B 是$\{1, 2, \cdots, m\}$的非空子集时,考虑 $\sum\limits_{S\subseteq\{1,2,\cdots,m\}}(-1)^{|B\cap S|}$.

记 $S = C \cup D$,其中,$C = S\backslash B$, $D = S \cap B$, $C \cap D = \varnothing$. 则

$$\begin{aligned}&\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,m\}}(-1)^{|B\cap S|}\\ =&\sum_{C\subseteq\{1,2,\cdots,m\}\backslash B}\ \sum_{D\subseteq B}(-1)^{|B\cap(C\cup D)|}\\ =&\sum_{C\subseteq\{1,2,\cdots,m\}\backslash B}\ \sum_{D\subseteq B}(-1)^{|D|}.\end{aligned}$$

因为 $|B| > 0$,所以,

$$\sum_{D\subseteq B}(-1)^{|D|} = \sum_{r=0}^{|B|}(-1)^{r}\mathrm{C}_{|B|}^{r} = 0.$$

则对每个非空子集 $B \subseteq \{1, 2, \cdots, m\}$ 有

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,m\}}(-1)^{|B\cap S|} = 0.$$

故

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,m\}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i = \sum_{i=1}^{n}\Big[a_i\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,m\}}(-1)^{|B_i\cap S|}\Big] = 0.$$

与式①矛盾.

例 10 设 A 是集合 $S = \{1, 2, \cdots, 1\,000\,000\}$ 的一个恰有 101 个元素的子集. 证明:在 S 中存在数 t_1, t_2, $\cdots$, t_{100},使得集合

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\},\ j = 1, 2, \cdots, 100$$

中,每两个的交集为空集.

分析 先弄清楚在什么情况下 $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. 设 $a \in A_i \cap A_j$,则 $a = x + t_i = y + t_j$, x, $y \in A$. 于是 $t_i - t_j = y - x$. 这说明选取 t_1, t_2, $\cdots$, t_{100}时,只要保证其中任意两个之差不等于 A 中任二元素之差即可.

证明 考虑集合 $D = \{x - y \mid x, y \in A\}$,则

$$|D| \leqslant 101 \times 100 + 1 = 10\,101.$$

若 $A_i \cap A_j \neq \varnothing$，设 $a \in A_i \cap A_j$，则 $a = x + t_i$，$a = y + t_j$，其中 x，$y \in A$，则 $t_i - t_j = y - x \in D$.

若 $t_i - t_j \in D$，即存在 x，$y \in A$，使得 $t_i - t_j = y - x$，从而 $x + t_i = y + t_j$，即 $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.

所以，$A_i \cap A_j \neq \varnothing$ 的充要条件是 $t_i - t_j \in D$. 于是，我们只需在集 S 中取出 100 个元素，使得其中任意两个的差都不属于 D.

下面用递推方法来取出这 100 个元素.

先在 S 中任取一个元素 t_1，再从 S 中取一个 t_2，使得 $t_1 \notin t_2 + D = \{t_2 + x \mid x \in D\}$，这是因为取定 t_1 后，至多有 10 101 个 S 中的元素不能作为 t_2，从而在 S 中存在这样的 t_2，若已有 $k(\leqslant 99)$ 个 S 中的元素 t_1，t_2，…，t_k 满足要求，再取 t_{k+1}，使得 t_1，t_2，…，t_k 都不属于 $t_{k+1} + D = \{t_{k+1} + x \mid x \in D\}$. 这是因为 t_1，t_2，…，t_k 取定后，至多有 $10\,101k \leqslant 999\,999$ 个 S 中的数不能作为 t_{k+1}，故在 S 中存在满足条件的 t_{k+1}. 所以，在 S 中存在 t_1，t_2，…，t_{100}，其中任意两个的差都不属于 D.

综上所述，命题得证.

说明　条件 $|S| = 10^6$ 可以改小一些. 一般地，我们有如下更强的结论：

若 A 是 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个 k 元子集，m 为正整数，且 m 满足条件 $n > (m-1)(C_k^2 + 1)$，则存在 S 中的元素 t_1，t_2，…，t_m，使得 $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$，$j = 1, 2, \cdots, m$ 中任意两个的交集为空集.

有兴趣者可自己证明.

习　题　2

1 已知全集 $I = \mathbf{Z}$，$M = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$，$S = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbf{Z}\}$，则 $M \cap \complement_{\mathbf{Z}} S =$________.

2 已知两个复数集合 $M = \{z \mid z = \cos\alpha + (4 - \cos^2\alpha)\mathrm{i}, \alpha \in \mathbf{R}\}$，$N = \{z \mid z = \cos\beta + (\lambda + \sin\beta)\mathrm{i}, \beta \in \mathbf{R}\}$. 当 $M \cap N \neq \varnothing$ 时，实数 λ 的取值范围是________.

3 设 m，$n \in \mathbf{N}^*$，且 $m > n$，集合 $A = \{1, 2, \cdots, m\}$，$B = \{1, 2, \cdots, n\}$，又 $C \subset A$，$B \cap C \neq \varnothing$. 则这样的集合 C 的个数是________.

4 定义集合 $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$. 若 $M = \{1, 2, \cdots, 2017\}$，$A$，$B \subseteq M$，且 $(A - B) \cup (B - A) = M$，则满足条件的不同的集合对 (A, B) 共有________个.

5 集合 $\{[x]+[2x]+[3x] \mid x \in \mathbf{R}\} \cap \{1, 2, \cdots, 100\}$ 共有________个元素,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

6 已知 $A \cup B \cup C=\{a, b, c, d, e\}$, $A \cap B=\{a, b, c\}$, $c \in A \cap B \cap C$,则符合上述条件的$\{A, B, C\}$共有________组.

7 将集合 $M=\{1, 2, \cdots, 12\}$ 的元素分成不相交的三个子集:$M=A \cup B \cup C$,其中 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C=\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $c_1<c_2<c_3<c_4$,且 $a_k+b_k=c_k$, $k=1, 2, 3, 4$,则集合 C 为________.

8 构造一系列数集,使得每个集合中有五个不同的数,一个数可同时在多个集合中. 对于任意两个集合,均恰有四个公共元素.

(1) 能否写出满足要求的 2015 个集合?

(2) 若所有集合中共含有六个不同的数,求集合个数的最大值;

(3) 若所有集合中共含有七个不同的数,求集合个数的最大值.

9 已知 $A=\{(x, y) \mid x=n, y=na+b, n \in \mathbf{Z}\}$, $B=\{(x, y) \mid x=m, y=3m^2+15, m \in \mathbf{Z}\}$, $C=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 144\}$ 是坐标平面内的三个点集. 试问,是否存在实数 a、b,使得 $A \cap B \neq \varnothing$、点$(a, b) \in C$ 同时成立? 若存在,请求出 a、b 的值;若不存在,请说明理由.

10 给定自然数 $a \geqslant 2$,集合 $A=\{y \mid y=a^x, x \in \mathbf{N}\}$, $B=\{y \mid y=(a+1)x+b, x \in \mathbf{N}\}$. 在区间$[1, a]$上是否存在 b,使得 $C=A \cap B \neq \varnothing$? 如果存在,试求 b 的一切可能值及相应的集合 C;如果不存在,试说明理由.

11 设 $\mathbf{Z}$ 表示所有整数的集合. 对于固定的 $A, B, C \in \mathbf{Z}$,令

$$M_1=\{x^2+Ax+B \mid x \in \mathbf{Z}\},$$

$$M_2=\{2x^2+2x+C \mid x \in \mathbf{Z}\},$$

求证:对任何 $A, B \in \mathbf{Z}$,都可选取 $C \in \mathbf{Z}$,使得集合 M_1 与 M_2 互不相交.

12 设集合 $S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$,若 Z 是 S_n 的子集,把 Z 中的所有数的和称为 Z 的"容量"(规定空集的容量为 0). 若 Z 的容量为奇(偶)数,则称 Z 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1) 求证:S_n 的奇子集与偶子集个数相等;

(2) 求证:当 $n \geqslant 3$ 时,S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等;

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时,求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

13 设 S 是集合$\{1, 2, \cdots, 2015\}$的一个 68 元子集.

证明:存在 S 的三个互不相交的非空子集 A、B、C,满足 $|A|=|B|=$

$|C|$，且 $\sum\limits_{a\in A}a=\sum\limits_{b\in B}b=\sum\limits_{c\in C}c$.

14 给定整数 $n\geqslant 2$. 对平面直角坐标系中的整点集 $A=\{(a, b)\mid a, b\in\{1, 2, \cdots, n\}\}$ 中的每个点染红、黄、蓝三种颜色之一，且满足：对任意 $a, b\in\{1, 2, \cdots, n-1\}$，若 (a, b) 与 $(a+1, b)$ 两点同色，则 $(a, b+1)$ 与 $(a+1, b+1)$ 两点亦同色. 求不同的染色方式的总数.

15 给定整数 $n\geqslant 2$. 黑板上写着 n 个集合，然后进行如下操作：选取黑板上两个互相不包含的集合 A、B，擦掉它们，然后写上 $A\cap B$ 和 $A\cup B$. 这称为一次操作. 如此操作下去，直到任意两个集合中都有一个包含另一个为止. 对所有的初始状态和操作方式，求操作次数的最大可能值.

16 试确定，有多少种不同的方法将集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中的元素归入 A、B、C 三个(有序)集合，使得满足：每个元素至少含于其中一个集合之中，这三个集合的交是空集，而其中任两个集合的交都不是空集？(即 $A\cup B\cup C=M$, $A\cap B\cap C=\varnothing$，而 $A\cap B\neq\varnothing$, $B\cap C\neq\varnothing$, $C\cap A\neq\varnothing$)

17 设 $M=\{1, 2, \cdots, 20\}$，对于 M 的任一 9 元子集 S，函数 $f(S)$ 取 1～20 之间的整数值. 求证：不论 f 是怎样的一个函数，总存在 M 的一个 10 元子集 T，使得对所有的 $k\in T$，都有

$$f(T-\{k\})\neq k\quad(T-\{k\}\text{ 为 }T\text{ 对}\{k\}\text{ 的差集}).$$

18 设 $k\geqslant 6$ 为自然数，$n=2k-1$. T 为所有 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合，其中 $x_i\in\{0, 1\}$, $i=1, 2, \cdots, n$. 对于 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in T$，定义

$$d(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

特别地有 $d(x, x)=0$. 设有一个由 T 的 2^k 个元素组成的子集 S，使对任何 $x\in T$，都存在惟一的 $y\in S$，使得 $d(x, y)\leqslant 3$. 求证：$n=23$.

3 有限集的阶

我们知道集合可以分为有限集和无限集两类. 研究无限集元素的"数目"是一个困难而有趣的问题，最出名的就是所谓"连续统假设"，但它不是我们的话题. 我们要讨论的问题仅与有限集有关.

一、有限集的阶

有限集 A 的元素的数目叫做这个集合的阶，记作 $|A|$（或 $n(A)$）.

例 1　设集合 $A=\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 2000,\ a=4k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{b\mid 1\leqslant b\leqslant 3000,\ b=3k-1,\ k\in\mathbf{Z}\}$. 求 $|A\cap B|$.

分析　令 $4k+1=3m-1$，得 $m=\dfrac{4k+2}{3}=k+1+\dfrac{k-1}{3}$. 因 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $3\mid k-1$. 令 $k-1=3r$，$r\in\mathbf{Z}$，得 $m=4r+2$. 这时 $b=12r+5$，故 $A\cap B$ 的元素是形如 $12r+5$ 的整数.

解　形如 $4k+1$ 的数可分为 3 类：

$$12l+1,\ 12l+5,\ 12l+9\ (l\in\mathbf{Z}),$$

其中只有形如 $12l+5$ 的数是形如 $3k-1$ 的数. 令

$$1\leqslant 12l+5\leqslant 2000\ (l\in\mathbf{Z}),$$

得 $0\leqslant l\leqslant 166$. 所以，$A\cap B=\{5,17,\cdots,1997\}$.

所以，$|A\cap B|=167$.

说明　上例，我们是采用列举出集合的全部元素的办法来求其元素的数目. 对于一些较为复杂的集合，这种方法是很难奏效的，这时必须另辟蹊径.

例 2　给定正整数 $n(n\geqslant 2)$. 称集合 $S(|S|=n)$ 的三个互不相同的子集 S_i、S_j、S_k 为一个"三角形". 定义

$$|(S_i\cap S_j)\cup(S_j\cap S_k)\cup(S_k\cap S_i)|$$

为这个三角形的"周长". 试求周长为 n 的三角形的个数.

分析 命题等价于集合 S 有多少组三个互不相同的子集 S_i、S_j、S_k，使

$$(S_i \cap S_j) \cup (S_j \cap S_k) \cup (S_k \cap S_i) = S.$$

解 令 $T_1 = (S_i \cap S_j) \backslash S_k$，$T_2 = (S_i \cap S_j) \backslash S_i$，$T_3 = (S_k \cap S_i) \backslash S_j$，$T_4 = S_i \cap S_j \cap S_k$.

本题等价于求有多少种方式将数 1，2，…，n 放入集合 T_1、T_2、T_3、T_4 中，使得 S_i、S_j、S_k互不相同.

首先，将 1，2，…，n 放入集合 T_1、T_2、T_3、T_4中，共有 4^n种方法.

其次，若 $S_i = S_j$，则 $S_i = S_i \cap S_j = S_j$. 从而，将 1，2，…，n 放入集合 T_1、T_4中，共有 2^n种方法，这不满足条件.

类似地，$S_j = S_k$，$S_k = S_i$ 都有 2^n种方式不满足条件.

但是 $S_i = S_j = S_k$ 被多减了两次.

最后，再考虑 S_i、S_j、S_k的次序.

故所求的周长为 n 的三角形的个数为 $\frac{1}{6}(4^n - 3 \times 2^n + 2)$.

例 3 设 a_1，a_2，…，a_n为 1，2，…，n 的一个排列，$f_k = |\{a_i \mid a_i < a_k, i > k\}|$，$g_k = |\{a_i \mid a_i > a_k, i < k\}|$，其中 $k = 1, 2, \cdots, n$. 证明：

$$\sum_{k=1}^{n} g_k = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

分析 一般来说 $f_k \neq g_k$，且分别计算 f_k、g_k 是困难的. 令 $A_k = \{a_i \mid a_i < a_k, i > k\}$，对 A_k 换一种写法：$A_k = \{(a_i, a_k) \mid a_i < a_k, i > k\}$，显然是合理的. 易知 $k \neq k'$ 时，$A_k \cap A_k{}' = \varnothing$. 所以，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f_k &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= |\{(a_i, a_j) \mid a_i < a_j, i > j\}|.\end{aligned}$$

证明 考虑集合 $A = \{(a_i, a_j) \mid a_i < a_j, i > j\}$ 的元素的数目 $|A|$.

一方面，固定 a_j时，a_i的个数为 f_j. 所以 $|A| = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j$.

另一方面，固定 a_i时，a_j的个数为 g_i，所以 $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$.

所以，$\sum\limits_{k=1}^{n} g_k = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$.

说明 在这里，我们没有直接证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} g_k = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$，而是引入一个中间量 $|A| = |\{(a_i, a_j) \mid a_i < a_j, i > j\}|$ 来过渡.

例 4 在集合$\{1, 2, \cdots, 2n\}$中选取其中 n 个数，记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n(a_1 < a_2 < \cdots < a_n)$，剩下 n 个数记为 $b_1, b_2, \cdots, b_n(b_1 > b_2 > \cdots > b_n)$. 证明：

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2.$$

分析 观察如下刻意排序的两组数：

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_j < \cdots < a_n,$$
$$b_1 > b_2 > \cdots > b_j > \cdots > b_n,$$

不难发现 a_j、b_j不能同时属于或不属于集合$\{1, 2, \cdots, n\}$. 否则，不妨设 a_j，$b_j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，这时便有 $n+1$ 个不同的数属于集合$\{1, 2, \cdots, n\}$，这是不可能的.

证明 记 $L = \{1, 2, \cdots, n\}$，$H = \{n+1, n+2, \cdots, 2n\}$. 则 a_i、$b_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 不能同在集合 L 中，也不能同在集合 H 中.

否则，设 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$a_j \in L$，$b_j \in L$. 因为 a_i是按照从小到大的顺序排列，b_i是按照从大到小的顺序排列，所以，当 $i \leqslant j$ 时，$a_i \in L$；当 $i \geqslant j$ 时，$b_i \in L$. 又所有的数均不相同，则集合 L 包含 j 个 a_i和 $n-j+1$ 个 b_i. 于是，集合 L 中的总元素有 $j+(n-j+1) = n+1$ (个). 矛盾.

同理，假设 a_i、b_i同在集合 H 中时，也导出矛盾.

因此，对于每一个 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 均有

$$|a_i - b_i| = (h_i - l_i)(h_i \in H, l_i \in L).$$

故

$$\begin{aligned}
&|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| \\
=& (h_1 - l_1) + (h_2 - l_2) + \cdots + (h_n - l_n) \\
=& (h_1 + h_2 + \cdots + h_n) - (l_1 + l_2 + \cdots + l_n) \\
=& (n+1+n+2+\cdots+2n) - (1+2+\cdots+n) \\
=& n^2.
\end{aligned}$$

说明 上例看似与集合没有太多联系，但蕴涵在题设条件中的关键事实：a_j、b_j不能同时属于或不属于集合$\{1, 2, \cdots, n\}$，它是由集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的阶决定的.

例 5 某国家有 N 座城市，它们中的某些城市有双向的航班连接. 每个航班恰连接两座城市，没有城市直接连接每个其他城市，且对于任意两座城市 A、B，恰有一种至多存在两个航班从城市 A 到城市 B 的方式飞行. 证明：$N-1$ 为完全平方数.

证明 设 a 为任意一座城市，与它连接的城市为 x_1，x_2，…，x_k.

令 $B_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 为异于城市 a 且连接 x_i 的所有城市的集合.

因为从城市 x_i 至城市 x_j 恰有一种方式飞行至多存在两个航班，所以，集合 B_1，B_2，…，B_k 两两无交集.

考虑两个角标 i、j 和任意的城市 $y \in B_i$，由于从城市 y 至 x_j 只有一种飞行方式至多存在两个航班且无直飞航班，则存在唯一的城市 $z \in B_j$，使得城市 y 与 z 有航班连接.

故每个集合 B_i 中的每个元素恰有 k 种上述连接方式，且所有集合 B_i 的元素的个数相同.

令 m 为集合 B_i 中元素的个数，则 $N=1+k+km$.

此外，考虑某座城市 $b \in B_1$，它与 x_1 相连，恰有一座城市 $c_i \in B_i(i=2, 3, \cdots, k)$ 与之相连.

注意到，对于 $i=2, 3, \cdots, k$，城市 x_i 与城市 c_i 相连.

用同样的方法(用 a 替换 b)，知城市 $x_i(i=2, 3, \cdots, k)$ 有 k 种连接方式，但已知城市 x_i 有 $m+1$ 种连接方式，因此，

$$k=m+1,\ N-1=k+km=k^2.$$

说明 本例我们是通过引入集合语言，讨论有限集的阶来达到证明的目的的.

二、有关集合阶的不等式

有些集合虽然不能准确求出其元素的数目，但是我们可以利用不等式来估计其阶的范围.

例 6 设 $p \geqslant 5$ 是一个素数，$S=\{1, 2, \cdots, p-1\}$，$A=\{a \mid a \in S, a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}\}$. 证明：$|A| \geqslant \dfrac{p-1}{2}$.

分析 如果 $1 \leqslant a \leqslant p-1$，显然 $1 \leqslant p-a \leqslant p-1$. 将 a 与 $p-a$ 配对，如果 a^{p-1} 与 $(p-a)^{p-1}$ 模 p^2 不同余，则结论成立.

证明 设 $a \in S$，则 $p-a \in S$. 由二项式定理，有

$$(p-a)^{p-1}-a^{p-1} \equiv -(p-1)a^{p-2} \cdot p \not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

于是，a 和 $p-a$ 中至少有一个在 A 中，从而有

$$|A| \geqslant \frac{p-1}{2}.$$

图书在版编目(CIP)数据

集合/刘诗雄编著.—3版.—上海：华东师范大学出版社，2019
（数学奥林匹克小丛书.高中卷）
ISBN 978-7-5675-9560-6

Ⅰ.①集… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第242173号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷
集合(第三版)

编　　著　刘诗雄
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　王小双
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　13.5
字　　数　235千字
版　　次　2020年4月第三版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9560-6
定　　价　34.00元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。