数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 10

Mathematical Olympiad Series

几何不等式

冷岗松 著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有扎实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在 IMO 获得奖牌的学生中，日后有不少成为大数学家. 例如，获菲尔兹奖的数学家有：玛古利斯(G. Margulis，俄罗斯，1978 年)、德里费尔德(V. Drinfeld，乌克兰，1990 年)、约克兹(J. G. Yoccoz，法国，1994 年)、博切尔兹(R. Borcherds，英国，1998 年)、高尔斯(T. Gowers，英国，1998 年)、拉福格(L. Lafforgue，法国，2002 年)、佩雷尔曼(G. Perelman，俄罗斯，2006 年)、陶哲轩(Terence Tao，澳大利亚，2006 年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo，越南，2010 年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss，以色列，2010 年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov，俄罗斯，2010 年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani，女，伊朗，2014 年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

"上帝总是在做几何"(God is always doing geometry — Plato). 但几何不等式作为数学中一个独立的方向被深入研究和广泛关注却是现代的事情.

不少几何不等式既是数学审美的典范,又是应用的工具. 著名的 Brunn-Minkowski 不等式就是一个典型的例子,"它像一只大章鱼,它的触角几乎伸及数学的各领域,它不但与代数几何的 Hodge 指标定理等高深的数学相关联,也在一些应用学科如体视学、统计力学和信息理论中扮演着重要的角色".

迄今,以几何不等式为主题的著作多达数十种. 其中 Yu. D. Burago 和 V. A. Zalgaller 的 *Geometric Inequalities* (Springer-Verlag 出版社,1988)是国际上被广泛引用的专著. 国内单墫先生的《几何不等式》(上海教育出版社,1980)则是一本十分优秀的入门书.

本人写作的这本小册子,主要是向参加数学奥林匹克的中学生和中学教师介绍几何不等式,选材是初等的. 在写作过程中,力求做到:第一,精选近年来研究中出现的新成果、新方法和新技巧;第二,介绍的范例应有简单而不平凡的结论、有趣而深刻的背景;第三,尽量展现学生的优秀解法. 当然,书中也融入了作者自己的一些研究成果和体会. 现惶恐着将它呈现在读者面前,祈望批评指正.

谨以此书奉献给裘宗沪先生,祝贺他的七十寿辰,并纪念他为中国数学奥林匹克事业作出的巨大贡献.

最后,我要感谢倪明先生,他的信任和耐心促成了本书的出版. 我还要感谢我的博士研究生司林,他热心地帮我打字、绘图.

作者最大的心愿就是读者喜欢他的作品.

冷岗松

2004 年 12 月于上海

目　录

1	距离不等式中的化直法	001
2	Ptolemy 不等式及其应用	009
3	圆内接四边形中的不等式	017
4	特殊多边形的面积不等式	028
5	线性几何不等式	040
6	代数方法	049
7	等周极值问题	057
8	嵌入不等式与惯性矩不等式	063
9	Tsintsifas 的不等式轨迹问题	074
10	Shum 的最小圆问题	079
11	四面体中的不等式	084
12	几何不等式问题新补	092
	习题解答	104

1 距离不等式中的化直法

在几何量(长度、角度、面积、体积等)的大小比较中，线段长度的比较是最基本的. 我们把仅涉及到线段长度的几何不等式叫做距离不等式.

欧氏几何中一些简单的不等公理和定理常常是解决距离不等式的出发点，其中最常用的工具有：

命题 1 连结 A、B 两点的最短线是线段 AB.

这个命题的一个直接推论就是：

命题 2 (三角不等式)如果 A、B、C 为任意三点，则 $AB \leqslant AC+CB$，当且仅当 C 位于线段 AB 上时等号成立.

由这个命题还可产生下面一些常用的推论.

命题 3 三角形中大边对大角，大角对大边.

命题 4 三角形中线的长度小于夹它的两边长度之和的一半.

命题 5 如果一个凸多边形位于另一个凸多边形的内部，则外面的凸多边形的周长大于里面凸多边形的周长.

命题 6 凸多边形内的线段长度，或者不超过凸多边形的最大边长，或者不超过凸多边形的最大对角线长.

下面看一些例题.

例 1 设 a、b、c 是$\triangle ABC$ 的边长，求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

证明 由三角不等式 $a<b+c$ 可得

$$\frac{a}{b+c}=\frac{2a}{2(b+c)}<\frac{2a}{a+b+c}.$$

同理

$$\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c},$$

$$\frac{c}{b+a}<\frac{2c}{a+b+c}.$$

将上面三个不等式相加即得所求证的不等式. □

例 2 在$\triangle ABC$中,AB是最长边,P是三角形内一点,证明:

$$PA+PB>PC.$$

证明 如图 1－1,延长CP交AB于点D,则$\angle ADC$和$\angle BDC$有一个不是锐角,不妨设$\angle ADC$不是锐角,则在$\triangle ADC$中,由命题 3 得

$$AC>CD,$$

因此

$$AB\geqslant AC>CD\geqslant PC, \quad ①$$

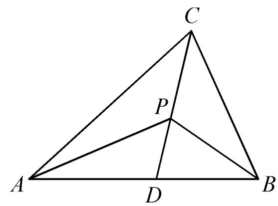

图 1－1

又在$\triangle PAB$中,由三角不等式

$$PA+PB>AB, \quad ②$$

由①、②即得求证的不等式. □

注 (1) 若去掉条件"AB是最长边",则结论不一定成立.

(2) 当P是正三角形ABC所在平面上一点,且P不在这个正三角形的外接圆上,则PA、PB、PC中任意两个之和大于第三个,即它们构成某个三角形的三边.

例 3 设一条平面闭折线的周长为 1,证明:可以用一个半径是$\frac{1}{4}$的圆完全盖住这条折线.

分析 解决问题的关键是确定一个点(圆心),使得折线上的每一点到这个点的距离不超过$\frac{1}{4}$.

证明 如图 1－2,设A为闭折线上任意取定的一点,在闭折线上取点B,使折线AB(不论哪一段)的长恰为$\frac{1}{2}$. 连结AB,取AB的中点O,则折线上任一点

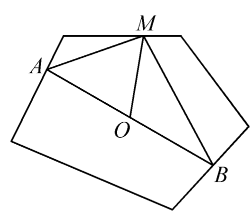

图 1－2

到 O 的距离不超过$\frac{1}{4}$.

事实上，设 M 为折线上任一点，则由命题 4 可得

$$OM < \frac{1}{2}(AM + MB) \leqslant \frac{1}{2}(\text{折线 } AM + \text{折线 } BM) = \frac{1}{2}\text{ 折线 } AB = \frac{1}{4}.$$

现以 O 为圆心，$\frac{1}{4}$为半径作圆，则这个圆完全盖住了这条闭折线，证毕. □

上面几个例题的证明方法实际上都体现了一种"化直"的思想，我们称其为"化直法". 具体地说，化直法是以命题 1 或它的推论为理论依据，采用把曲线段化为折线段，再把折线段化为直线段来处理的方法. 化直法是证明几何不等式，特别是距离不等式最为常用的方法之一.

下面再看几个例子.

首先，我们介绍经典的波利亚(Pólya)问题.

例 4 求证：两端点在一圆周上且将此圆分成等面积的两部分的所有曲线中，以此圆的直径具有最短的长度.

证明 设$\overset{\frown}{AB}$是一条满足题设条件的曲线.

如果 A、B 两点正好是某一条直径的两个端点，那么显然$\overset{\frown}{AB}$的长度不会小于圆的直径.

如果弦 AB 不是直径，如图 1-3，那么令与弦 AB 平行的直径为 CD，曲线$\overset{\frown}{AB}$至少与 CD 交于不同的两点，设不是圆心的那个交点为 E，则

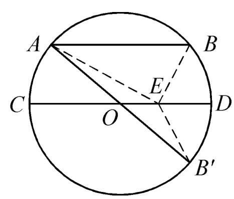

图 1-3

$$\begin{aligned}\text{曲线}\overset{\frown}{AB}\text{ 的长} &= \text{曲线}\overset{\frown}{AE}\text{ 的长} + \text{曲线}\overset{\frown}{EB}\text{ 的长} \\ &\geqslant AE + EB.\text{（这样将曲线化为了折线）}\end{aligned}$$

下面再证折线($AE+EB$)>圆的直径. 为此，作 B 关于 CD 的对称点 B'，则易证 AB'是圆的直径. 于是

$$AE + EB = AE + EB' > AB' = \text{圆的直径}.$$

综上便知所证结论成立. □

下面的例题源于我们对垂足三角形极值性质的研究.

例 5 设 P 是$\triangle ABC$ 内一点，P 在三边 BC、CA、AB 上的射影分别为 A'、B'、C'，直线 AP、BP、CP 与三条对边的交点分别为 A''、B''、C''. 已知$\triangle A''B''C''$的周长$=1$，求证：

$$\text{折线 } A'B''C'A'' + \text{折线 } A'C''B'A'' \leqslant 2.$$

证明　所求证的不等式等价于

$$A'B''+B''C'+C'A''+A'C''+C''B'+B'A''\leqslant 2. \qquad ①$$

要证①，只需证明局部不等式

$$A''B''+A''C''\geqslant A'B''+A'C''. \qquad ②$$

事实上，把②和类似的两个不等式

$$B''A''+B''C''\geqslant B'A''+B'C'',$$
$$C''A''+C''B''\geqslant C'A''+C'B'',$$

相加便得①.

下面是②的证明.

为证②，我们需要下面的引理.

引理：如图 1－4，设 P 是 $\triangle ABC$ 的高 AD 上的一点，直线 BP 交 AC 于 E，直线 CP 交 AB 于 F，则

$$\angle FDA=\angle EDA.$$

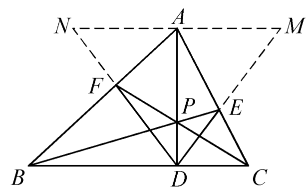

图 1－4

引理的证明：过 A 作 BC 的平行线，与直线 DE、DF 交于 M、N，则

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AN}{BD},\ \frac{CE}{AE}=\frac{CD}{AM}.$$

由塞瓦(Ceva)定理得

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

即 $$AM=AN.$$

又由 $$AD\perp MN,$$

所以 $$DM=DN,$$

故 $$\angle EDA=\angle ADM=\angle ADN=\angle FDA.$$

下面回转来证明②：

(1) 若 P 位于 $\triangle ABC$ 的高 AD 上，则 $A'=A''$，②显然成立.

(2) 若 P 不位于 $\triangle ABC$ 的高 AD 上，如图 1－5，不妨设 P、B 位于 AD 同侧，连结并延长 $A'P$ 交 AB 于 M，连结 MC 交 BB'' 于 M'，则由引理知

$$\angle B''A'P > \angle M'A'P = \angle C''A'P. \qquad ③$$

作 B''关于 BC 的对称点 N，则

$$\angle NA'C = \angle CA'B'',$$

又由③可得

$$\begin{aligned} &\angle NA'C + \angle C''A'C \\ = &\angle NA'C + \angle C''A'P + \angle PA'C \\ < &\angle PA'B'' + \angle PA'N \\ = &\pi, \end{aligned}$$

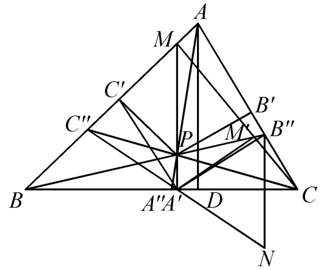

图 1 - 5

所以 A'、A''在 $C''N$ 同侧，即 A'在$\triangle C''A''N$ 内，因此由命题 5 有

$$A''C'' + A''N > A'C'' + A'N.$$

注意到 $A''B'' = A''N$，$A'B'' = A'N$. 上式即是

$$A''B'' + A''C'' > A'B'' + A'C''.$$

②得证. □

注 （1）本例所用的反射对称方法是一种常用的化直手段.

（2）利用不等式②，袁俊博士证明了刘健先生提出的一个猜想：

$$\triangle A'B'C' \text{ 的周长} \leqslant \triangle A''B''C'' \text{ 的周长}.$$

下面的例题是一个很有难度的问题.

例 6 设 P 为$\triangle ABC$ 内一点，证明：

$$\sqrt{PA} + \sqrt{PB} + \sqrt{PC} < \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{BC} + \sqrt{CA} + \sqrt{AB}). \qquad ①$$

证明 下面的引理可由命题 5 直接得到.

引理：设 P 是凸四边形 $ABCD$ 的一个内点，则

$$PB + PC < BA + AD + DC.$$

下面证明①.

为简单计，设 $BC = a$，$AC = b$，$BA = c$，$PA = x$，$PB = y$，$PC = z$.

如图 1 - 6，作出$\triangle ABC$ 三边的中点 A'、B'、C'，则 P 必位于平行四边形 $A'B'AC'$、$C'B'CA'$、$B'A'BC'$ 某一个之中. 不妨设 P 位于平行四边形 $A'B'AC'$内，则对凸四边形 $ABA'B'$应用引理有

$$PA + PB < BA' + A'B' + B'A,$$

即

$$x+y<\frac{1}{2}(a+b+c). \quad ②$$

同理由凸四边形 $ACA'C'$ 可得

$$PA+PC<AC'+C'A'+A'C,$$

即 $$x+z<\frac{1}{2}(a+b+c). \quad ③$$

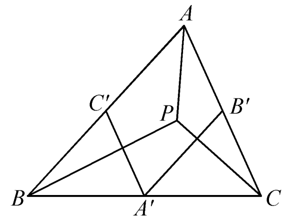

图 1-6

将②、③两式相加可得

$$2x+y+z<a+b+c. \quad ④$$

现注意到原不等式等价于

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2<\frac{5}{4}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2,$$

即 $$\begin{aligned}&x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}\\&<\frac{5}{4}(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}).\end{aligned} \quad ⑤$$

因此我们仅需证明⑤.

由平均值不等式可得

$$2\sqrt{xy}\leqslant 2x+\frac{1}{2}y,$$

$$2\sqrt{xz}\leqslant 2x+\frac{1}{2}z,$$

$$2\sqrt{yz}\leqslant y+z.$$

利用这三个不等式和不等式④可得

$$\begin{aligned}⑤\text{ 的 左边}&\leqslant x+y+z+2x+\frac{1}{2}y+2x+\frac{1}{2}z+y+z\\&=\frac{5}{2}(2x+y+z)<\frac{5}{2}(a+b+c).\end{aligned}$$

因此要证⑤,只需证明

$$\frac{5}{2}(a+b+c)\leqslant\frac{5}{4}(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}). \quad ⑥$$

而式⑥化简后等价于

$$a+b+c\leqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}), \quad ⑦$$

这是一个简单的不等式. 事实上，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则

$$⑦\text{的右端}\geqslant 2(b+c+c)>2\left(\frac{a}{2}+\frac{b+c}{2}+c\right)>a+b+c=⑦\text{的左端}.$$

综上，①被证明. □

注 (1) 不等式①右边的常数$\frac{\sqrt{5}}{2}$是最优的，这留给读者考虑.

(2) 上面漂亮的证法由朱庆三同学(原华南师大附中学生，曾获 2004 年第 45 届 IMO 金牌)给出，巧妙的划分点 P 的位置和处理好变量的非完全对称性是这个解法的关键.

当然，上面的例 6 还可用等高线方法来证明. 所谓等高线就是在讨论极值问题时引进的特殊平面曲线，如圆、椭圆等. 这里用的等高线是椭圆.

例 6 的另证 设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$，且不妨设 $a\leqslant b$, c.

现过 P 点作一个以 B、C 为焦点的椭圆，与 AB、AC 分别交于 E 和 F，如图 1－7，则

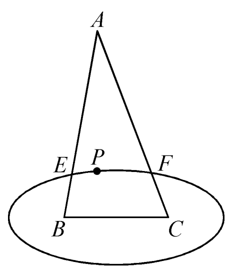

图 1－7

$$PA\leqslant \max(EA,\ FA).$$

不妨设 $EA\geqslant FA$，则 $PA\leqslant EA$. 又

$$\begin{aligned}\sqrt{PB}+\sqrt{PC}&\leqslant\sqrt{2(PB+PC)}\\&=\sqrt{2(EB+EC)},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\sqrt{PA}+\sqrt{PB}+\sqrt{PC}\\<&\sqrt{EA}+\sqrt{2(EB+EC)}\\\leqslant&\left[5EA+\frac{5}{2}(EB+EC)\right]^{\frac{1}{2}}\\=&\left[5(EA+EB)+\frac{5}{2}(EC-EB)\right]^{\frac{1}{2}}\\<&\sqrt{5}\left(a+\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\<&\frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}),\end{aligned}$$

得证. □

习题 1

1 设 A' 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线 AT 上的任意一点，试证：

$$A'B + A'C \geqslant AB + AC.$$

2 给定边长为 $a > b > c$ 的 $\triangle ABC$ 及其任意内点 O. 设直线 AO、BO、CO 与 $\triangle ABC$ 的边交于点 P、Q、R. 证明：

$$OP + OQ + OR < a.$$

3 设点 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的点，Δ、R 分别为 $\triangle ABC$ 的面积和外接圆半径. 求证：

$$DE + EF + FD \geqslant \frac{2\Delta}{R}.$$

4 设 E、F 分别是 $\triangle ABC$ 中以 A 为端点的射线 AC、AB 上的点，则

$$| AB - AC | + | AE - AF | \geqslant | BE - CF |,$$

当且仅当 $AB = AC$ 且 $AE = AF$ 时等号成立.

5 在六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 内存在一点 O，使得 $\angle A_iOA_{i+1} = \frac{\pi}{3}$（$i = 1$，2，3，4，5，6）(约定 $A_7 = A_1$). 如果 $OA_1 > OA_3 > OA_5$，$OA_2 > OA_4 > OA_6$，则

$$A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 < A_2A_3 + A_4A_5 + A_6A_1.$$

2 Ptolemy 不等式及其应用

著名的托勒密(Ptolemy)不等式是关于任意四边形的一个距离不等式，它可表述为

定理 (托勒密不等式) 在四边形 $ABCD$ 中有

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD,$$

等号成立当且仅当 A、B、C、D 四点共圆.

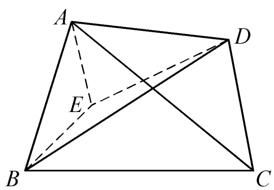

图 2-1

证明 如图 2-1，在四边形 $ABCD$ 内取点 E，使 $\angle BAE=\angle CAD$，$\angle ABE=\angle ACD$，则 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$. 因此 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$. 又 $\angle BAC = \angle EAD$，且 $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AD}$，所以 $\triangle ABC \backsim \triangle AED$，则 $AD \cdot BC = AC \cdot DE$. 故

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE+DE) \geqslant AC \cdot BD,$$

等号成立当且仅当点 E 在 BD 上，此时 $\angle ABD = \angle ACD$，故四边形 $ABCD$ 内接于圆. □

应用托勒密不等式，我们可给出一些距离不等式的简洁证明.

例 1 (Klamkin 对偶不等式) 设$\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c，已知边 b、c 上的中线分别为 m_b、m_c，求证：

$$4m_bm_c \leqslant 2a^2+bc. \qquad ①$$

下面的证明简直无需文字说明便知其意.

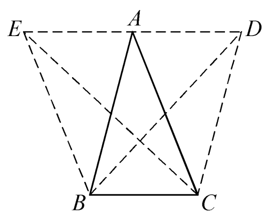

图 2-2

证明 如图 2-2，作平行四边形 $ABCD$ 和平行四边形 $ACBE$，连结 BD、CE. 注意到 $DE=2a$，$BD=2m_b$，$CE=2m_c$，对四边形 $BCDE$ 应用托勒密不等式立得

$$BC \cdot DE + BE \cdot CD \geqslant BD \cdot EC,$$

这就是①. □

例 2 设△ABC 的三边分别为 a、b、c,三边上的中线分别为 m_a、m_b、m_c,求证:

$$m_a(bc-a^2)+m_b(ac-b^2)+m_c(ab-c^2)\geqslant 0. \quad ①$$

下面的证法的关键在于寻找一个特殊的四边形.

证明 如图 2-3,设△ABC 的三条中线分别为 AD、BE、CF,重心为 G.

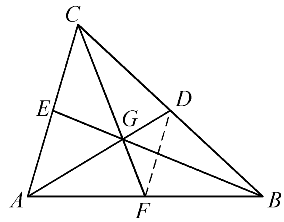

图 2-3

现对四边形 $BDGF$ 应用托勒密不等式可得

$$BG\cdot DF\leqslant GF\cdot DB+DG\cdot BF. \quad ②$$

注意到 $BG=\dfrac{2}{3}m_b$, $DG=\dfrac{1}{3}m_a$, $GF=\dfrac{1}{3}m_c$ 及 $DF=\dfrac{1}{2}b$, 因此②可改写为

$$2bm_b\leqslant am_c+cm_a.$$

因此 $$2b^2m_b\leqslant abm_c+cbm_a. \quad ③$$

同理有 $$2c^2m_c\leqslant acm_b+bcm_a, \quad ④$$

$$2a^2m_a\leqslant abm_c+acm_b. \quad ⑤$$

③、④、⑤相加可得

$$2(m_abc+m_bca+m_cab)\geqslant 2(m_aa^2+m_bb^2+m_cc^2),$$

整理就得①. □

下面看一个用托勒密定理产生几何线性不等式的例子. 实际上,上例也是用托勒密定理先得到线性不等式.

例 3 已知 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个正 n 边形,M_1, M_2, $\cdots$, M_n 是相应边的中点. 设 P 是这个 n 边形所在平面上的任意一点. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}PM_i\geqslant\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}PA_i. \quad ①$$

证明 如图 2-4, M_{i-1}、M_i 分别是这个正 n 边形第 $i-1$ 条边和第 i 条边的中点. 对四边形 $PM_{i-1}A_iM_i$ 应用托勒密不等式可得局部不等式

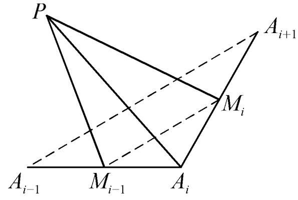

图 2-4

$$A_iM_{i-1}\cdot PM_i+PM_{i-1}\cdot A_iM_i\geqslant PA_i\cdot M_{i-1}M_i,$$

由此可得

$$PM_i + PM_{i-1} \geqslant 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \cdot PA_i, \quad ②$$

这里 $i = 1, 2, \cdots, n$, 并约定 $A_0 = A_n$, $M_0 = M_n$.

现对②求和可得

$$\sum_{i=1}^{n}(PM_i + PM_{i-1}) \geqslant 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} PA_i,$$

这就是①. □

下面两例分别介绍利用托勒密定理处理有关四边形和三角形内(或所在平面上的)动点的不等式的基本构形技巧.

例 4 设 P 为平行四边形 $ABCD$ 内一点,求证:

$$PA \cdot PC + PB \cdot PD \geqslant AB \cdot BC, \quad ①$$

并指出等号成立的条件.

证明 如图 2-5,作 PQ 平行并等于 CD,连结 CQ、BQ,则 $CDPQ$ 与 $ABQP$ 均是平行四边形,所以

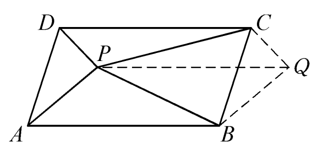

图 2-5

$$CQ = PD, BQ = PA, PQ = AB.$$

在四边形 $PBQC$ 中由托勒密不等式有

$$BQ \cdot PC + PB \cdot CQ \geqslant PQ \cdot BC,$$

即

$$PA \cdot PC + PB \cdot PD \geqslant AB \cdot BC,$$

等号成立当且仅当 P、B、Q、C 四点共圆,即 $\angle CPB + \angle CQB = \pi$,而 $\angle CQB = \angle APD$,所以式①等号成立的条件为

$$\angle APD + \angle CPB = \pi. \quad □$$

例 5 在$\triangle ABC$ 中,$\angle A = 60°$,P 为$\triangle ABC$ 所在平面上一点,且使得 $PA = 6$,$PB = 7$,$PC = 10$,求$\triangle ABC$ 面积的最大值.

解法 1 先证引理.

引理:在凸四边形 $XYZU$ 中,对角线 XZ 和 YU 交于点 O,$\angle XOY = \theta$,则

$$YZ^2 + UX^2 - XY^2 - ZU^2 = 2XZ \cdot YU \cdot \cos\theta.$$

引理的证明：如图 2－6，在$\triangle OYZ$、$\triangle OUX$、$\triangle OXY$及$\triangle OZU$中分别应用余弦定理可得

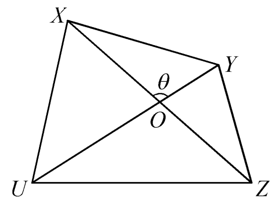

图 2－6

$$YZ^2=OY^2+OZ^2+2OY\cdot OZ\cdot\cos\theta,$$
$$UX^2=OU^2+OX^2+2OU\cdot OX\cdot\cos\theta,$$
$$XY^2=OX^2+OY^2-2OX\cdot OY\cdot\cos\theta,$$
$$ZU^2=OZ^2+OU^2-2OZ\cdot OU\cdot\cos\theta,$$

由这四个等式相加便可立得引理中的等式.

下面求解原问题.

如图 2－7，在$\triangle ABC$中，过P作AB的平行线，过A作PB的平行线，两条直线交于D. 设PD交AC于E，则$\angle CEP=60°$.

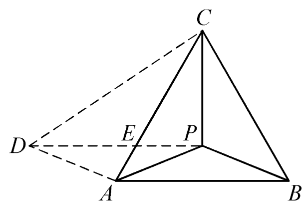

图 2－7

设$AC=x$，$AB=PD=y$，$CD=t$. 对四边形$APCD$应用引理可得

$$t^2+6^2-10^2-7^2=2\cos 60°\cdot xy,$$

即
$$xy=t^2-113. \quad ①$$

另一方面，对四边形$APCD$应用托勒密不等式可得

$$xy\leqslant 6t+70. \quad ②$$

由①、②有
$$t^2-6t-183\leqslant 0,$$

所以
$$0\leqslant t\leqslant 3+8\sqrt{3}. \quad ③$$

将③代入②可得$xy\leqslant 88+48\sqrt{3}$，故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}xy\leqslant 36+22\sqrt{3},$$

等号成立当且仅当D、A、P、C四点共圆，即$\angle PBA=\angle PCA$. 故$S_{\triangle ABC}$的最大值为$36+22\sqrt{3}$. □

解法 2 先证引理.

引理：设P为一个平行四边形$ABCD$所在平面上的一点，则

$$PA^2+PC^2-PB^2-PD^2=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

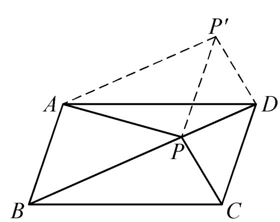

图 2－8

引理的证明：如图 2－8 所示，平移$\triangle BPC$至$\triangle ADP'$. 设$\overrightarrow{AP}=\alpha$，$\overrightarrow{PD}=\beta$，$\overrightarrow{DP'}=\gamma$，则

$$PA^2+PC^2=PA^2+P'D^2=\alpha^2+\gamma^2,$$

$$\begin{aligned}PD^2+PB^2&=PD^2+P'A^2\\&=\beta^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2\\&=2\beta^2+\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\cdot\beta+2\alpha\cdot\gamma+2\gamma\cdot\beta,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&PA^2+PC^2-PD^2-PB^2\\=&-2\beta^2-2\alpha\cdot\beta-2\gamma\cdot\beta-2\gamma\cdot\alpha\\=&-2(\alpha+\beta)\cdot(\beta+\gamma)\\=&\ 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{P'P}\\=&\ 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

下面求解原问题.

如图 2-9,平移$\triangle APB$至$\triangle CP'D$,则$P'C=6$,$P'D=7$,$CD=AB$,$PP'=AC$.

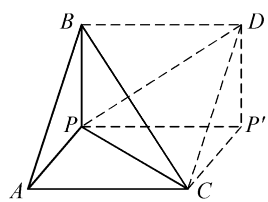

图 2-9

设$PD=d$,对四边形$CP'DP$应用托勒密不等式可得

$$70+6d\geqslant AB\cdot AC. \quad ①$$

再对平行四边形$ABDC$应用引理可得

$$7^2+10^2-6^2-d^2=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-AB\cdot AC. \quad ②$$

由①、②可得

$$d^2-113\leqslant 6d+70,$$

所以
$$0\leqslant d\leqslant 3+8\sqrt{3}.$$

故由①可得$AB\cdot AC\leqslant 88+48\sqrt{3}$,进而得$S_{\triangle ABC}\leqslant 36+22\sqrt{3}$,等号成立当且仅当$\angle ACP=\angle APB$,故$S_{\triangle ABC}$的最大值为$36+22\sqrt{3}$. □

上例的解法 1 由李先颖同学(原湖南师大附中学生,曾获 2004 年第 45 届 IMO 金牌)给出,解法 2 由朱庆三同学给出,两种方法构形上有相似点,都是漂亮的解法.

下面的例子是著名的几何学家 Bottema 的一个不等式.注意到托勒密不等式实际上对于空间四边形也是成立的,因此我们讨论的是关于空间任意点的 Bottema 不等式.

例 6 （Bottema 不等式） 设 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3 分别是位于同一平面上的两个三角形$\triangle A_1A_2A_3$ 和$\triangle B_1B_2B_3$ 的三边，F、F'分别是它们的面积，x_1、x_2、x_3 分别是空间任一点 P 到$\triangle A_1A_2A_3$ 三顶点的距离，记

$$M=b_1^2(-a_1^2+a_2^2+a_3^2)+b_2^2(a_1^2-a_2^2+a_3^2)+b_3^2(a_1^2+a_2^2-a_3^2).$$

求证：

$$\sum_{i=1}^{3}b_ix_i\geqslant\left(\frac{M}{2}+8FF'\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{①}$$

证明 如图 2－10，设 $A_1A_2=a_3$，在直线 A_1A_2 位于$\triangle A_1A_2A_3$ 的异侧作$\triangle A_1A_2C$，使得$\triangle A_1A_2C\backsim\triangle B_1B_2B_3$，则

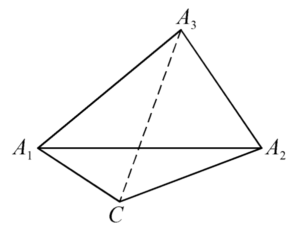

图 2－10

$$A_1C=\frac{a_3b_2}{b_3},$$

$$A_2C=\frac{a_3b_1}{b_3}.$$

对空间四边形 PA_1CA_2 应用托勒密不等式可得

$$x_1\frac{a_3b_1}{b_3}+x_2\frac{a_3b_2}{b_3}\geqslant a_3\cdot PC,$$

即

$$b_1x_1+b_2x_2\geqslant b_3\cdot PC.$$

因此

$$\begin{aligned}b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3&\geqslant b_3\cdot PC+b_3x_3\\&=b_3(PC+x_3)\\&\geqslant b_3\cdot A_3C,\end{aligned}$$

即有

$$2(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\geqslant 2b_3^2\cdot A_3C^2. \tag{②}$$

另一方面，在$\triangle A_1A_3C$ 中应用余弦定理可得

$$A_3C^2=a_2^2+\left(\frac{a_3b_2}{b_3}\right)^2-2a_2\cdot\frac{a_3b_2}{b_3}\cdot\cos(\angle A_3A_1A_2+\angle A_2A_1C).$$

因此

$$\begin{aligned}
2b_3^2 \cdot A_3C^2 &= 2a_2^2b_3^2 + 2a_3^2b_2^2 - 4a_2a_3b_2b_3\cos(\angle A_3A_1A_2 + \angle A_2A_1C) \\
&= 2a_2^2b_3^2 + 2a_3^2b_2^2 - 4a_2a_3b_2b_3 \cdot (\cos\angle A_3A_1A_2 \cdot \cos\angle A_2A_1C - \\
&\quad \sin\angle A_3A_1A_2 \cdot \sin\angle A_2A_1C) \\
&= 2a_2^2b_3^2 + 2a_3^2b_2^2 - 4a_2a_3b_2b_3 \cdot \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{2a_2a_3} \cdot \frac{b_2^2 + b_3^2 - b_1^2}{2b_2b_3} + \\
&\quad 4(a_2a_3\sin\angle A_3A_1A_2)(b_2b_3\sin\angle A_2A_1C) \\
&= 2a_2^2b_3^2 + 2a_3^2b_2^2 - (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)(b_2^2 + b_3^2 - b_1^2) + 16FF' \\
&= b_1^2(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + b_2^2(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) + b_3^2(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) + \\
&\quad 16FF' \\
&= M + 16FF'. \qquad ③
\end{aligned}$$

由②、③，式①得证. □

注 由著名的 Neuberg-Pedoe 不等式：$M \geqslant 16FF'$，从 Bottema 不等式可推出关于两个三角形的如下不等式

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \geqslant 4\sqrt{FF'}.$$

在这个不等式中取$\triangle B_1B_2B_3$ 为正三角形，则可得关于一个三角形内点到顶点距离的费马不等式

$$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}F}.$$

当然，在 Bottema 不等式中取$\triangle B_1B_2B_3$ 为正三角形，则可得费马不等式的如下加强形式

$$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant \left(\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}F\right)^{\frac{1}{2}}.$$

习 题 2

1 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，且 $AB = BC$，$CD = DE$，$EF = FA$，证明：

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{3}{2},$$

并指出等号成立的条件.

2 $\triangle ABC$ 的边 BC 和边 AC 分别取定长 a 和 b，而边 AB 的长度可变动. 以边 AB 作为正方形的一边向三角形外作正方形. 设 O 是所作正方形的中心，并设 BC 和 AC 的中点分别为 M 和 N. 试求 $OM+ON$ 的最大值.

3 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，且 $AB = BC = CD$，$DE = EF = FA$，$\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$. 设 G 和 H 是这个六边形内部的两点，使得 $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$. 试证：

$$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF.$$

（第 36 届 IMO 试题）

4 已知$\triangle ABC$内接于$\odot O$，P 为$\triangle ABC$内任意一点，过点 P 引 AB、AC、BC 的平行线，分别交 BC、AC 于 F、E，交 AB、BC 于 K、I，交 AB、AC 于 G、H. AD 为$\odot O$过点 P 的弦，试证：

$$EF^2 + KI^2 + GH^2 \geqslant 4PA \cdot PD.$$

5 设在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$ 与$\angle C$ 的角平分线分别交$\triangle ABC$的外接圆于 A_1、B_1、C_1，求证：

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + CA.$$

（1982 年澳大利亚竞赛题）

3 圆内接四边形中的不等式

圆内接四边形不仅有着丰富的几何等量关系，也有很多有趣的极值性质. 因为圆内接四边形的边可用对应的圆心角的三角函数表示，这就使得三角方法在处理圆内接四边形的几何不等式时能派上用场. 下面就是这样的一个例子.

例 1 已知四边形 $ABCD$ 是圆的内接四边形，证明：

$$|AB-CD|+|AD-BC|\geqslant 2|AC-BD|.$$

（第 28 届美国数学奥林匹克试题）

证明 如图 3-1，设四边形 $ABCD$ 外接圆的圆心为 O，该外接圆的半径为 1，$\angle AOB=2\alpha$，$\angle BOC=2\beta$，$\angle COD=2\gamma$，$\angle DOA=2\delta$，则

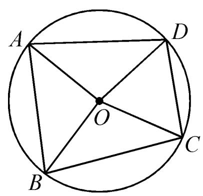

图 3-1

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi.$$

不妨设 $\alpha\geqslant\gamma$，$\beta\geqslant\delta$，则

$$\begin{aligned}|AB-CD|&=2|\sin\alpha-\sin\gamma|\\&=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|\\&=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\delta}{2}\right|.\end{aligned}$$

同理

$$|AD-BC|=4\left|\sin\frac{\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|,$$

$$|AC-BD|=4\left|\sin\frac{\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|.$$

因此

$$|AB-CD|-|AC-BD|=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\left(\left|\sin\frac{\beta+\delta}{2}\right|-\left|\sin\frac{\beta-\delta}{2}\right|\right)$$

$$= 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\left(\sin\frac{\beta+\delta}{2}-\sin\frac{\beta-\delta}{2}\right)$$

$$= 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\cdot\left(2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\geqslant 0.$$

故 $$|AB-CD|\geqslant|AC-BD|.$$

同理 $$|AD-BC|\geqslant|AC-BD|.$$

将这两个不等式相加即得求证结果. □

圆内接四边形中又有一种更特殊的四边形叫双圆四边形. 所谓双圆四边形是既有外接圆又有内切圆的四边形.

下面的例子就是关于双圆四边形的一个不等式,这个不等式是陈计先生发现的. 这里介绍的证明 1 和证明 2 分别由龙云同学(原长沙市雅礼中学学生,1999 年入选全国数学冬令营)和朱庆三同学提供.

例 2 凸四边形 $ABCD$ 既有内切圆又有外接圆,已知它的外接圆半径为 R,面积为 S,四边形的边长分别为 a、b、c、d,证明:

$$abc+abd+acd+bcd\leqslant 2\sqrt{S}(S+2R^2). \qquad ①$$

证明 1 如图 3-2,设四边形 $ABCD$ 的外接圆和内切圆的圆心分别为 O 和 I. 内切圆与边 $AB=a$、$BC=b$、$CD=c$、$DA=d$ 的切点分别为 K、L、M、N. 设 $\angle AIN=\angle 1$, $\angle BIK=\angle 2$, $\angle CIL=\angle 3$, $\angle DIM=\angle 4$,并记 $AK=AN=a'$, $BL=BK=b'$, $CL=CM=c'$, $DM=DN=d'$.

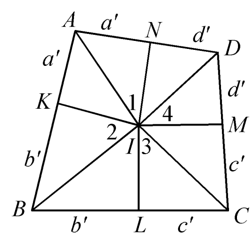

图 3-2

不妨设内切圆 I 的半径 r 为 1. 由 $ABCD$ 有内切圆知

$$a+c=b+d.$$

这时若记①的左边为 H,则

$$H=(a+c)bd+(b+d)ac=\frac{1}{2}(a+b+c+d)(ac+bd). \qquad ②$$

又 $$a=a'+b',\ b=b'+c',\ c=c'+d',\ d=d'+a',$$

将这些表达式代入②的右边便得

$$H=(a'+b'+c'+d')[(a'+b')(c'+d')+(b'+c')(d'+a')]. \qquad ③$$

又由 $\angle A+\angle C=180^{\circ}$，可得 $\angle 1+\angle 3=90^{\circ}$.

因此 $\triangle AIN \backsim \triangle ICL$，由此得

$$a'c'=AN\cdot CL=NI\cdot IL=1. \tag{④}$$

同理 $$b'd'=1. \tag{⑤}$$

又注意到

$$S=\frac{a+b+c+d}{2}\cdot r=a'+b'+c'+d', \tag{⑥}$$

因此由④、⑤、⑥可得

$$H=S[4+(a'+c')(b'+d')]. \tag{⑦}$$

另一方面，由正弦定理并注意到 $\angle B+2\angle 2=180^{\circ}$，有

$$\begin{aligned}R&=\frac{AC}{2\sin\angle B}=\frac{AC}{2\sin 2\angle 2}\\&=\frac{AC}{4}\left(\tan\angle 2+\frac{1}{\tan\angle 2}\right)\\&=\frac{1}{4}AC(\tan\angle 2+\tan\angle 4)\\&=\frac{1}{4}AC\cdot(b'+d').\end{aligned}$$

同理 $$R=\frac{1}{4}BD\cdot(a'+c').$$

因此 $$R^2=\frac{1}{16}AC\cdot BD(a'+c')(b'+d'),$$

但是 $$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BD,$$

这里 α 为对角线 AC 与 BD 夹角. 因此

$$R^2\geqslant\frac{1}{8}S(a'+c')(b'+d').$$

由上可知

$$\begin{aligned}\text{① 的右边}&\geqslant 2\sqrt{S}\left(S+\frac{S}{4}(a'+c')(b'+d')\right)\\&=\frac{S^{\frac{3}{2}}}{2}[4+(a'+c')(b'+d')].\end{aligned} \tag{⑧}$$

因此由⑦、⑧知，要证式①，只需证明 $\frac{1}{2}S^{\frac{1}{2}} \geqslant 1$，这等价于

$$\sqrt{a'+b'+c'+d'} \geqslant 2. \tag{⑨}$$

而由 $a'c'=1$，$b'd'=1$ 可知

$$a'+b'+c'+d' \geqslant 2\sqrt{a'c'}+2\sqrt{b'd'}=4,$$

⑨得证. □

上面的证明 1 采用精细的三角方法，步步推进，自然流畅. 此方法得到了不少奥林匹克高手们的赞赏.

证明 2 先证引理.

引理：设$\triangle ABC$ 中，$\angle A \geqslant 90°$，则$\frac{b+c}{a} \leqslant \sqrt{2}$.

引理的证明：

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=2\frac{\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin A}$$

$$\leqslant \frac{2\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \leqslant \sqrt{2}.$$

下面证明原题中的不等式.

如图 3－3，设四边形 $ABCD$ 的四边 AB、BC、CD、DA 的长分别为 a、b、c、d，再设 $ABCD$ 的内切圆的半径为 1. 注意到

$$a+c=b+d=\frac{1}{2}(a+b+c+d)\cdot 1=S,$$

可得

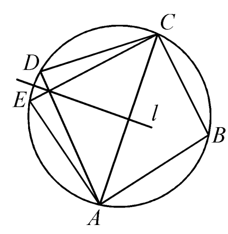

图 3－3

$$\begin{aligned} H &= abc+abd+acd+bcd \\ &= ac(b+d)+bd(a+c)=(ac+bd)S. \end{aligned} \tag{①}$$

现设 AC 的中垂线为 l，D 关于 l 的对称点为 E，则

$$\triangle ACD \cong \triangle CAE.$$

因此 $AE=c$，$CE=d$，且 $\angle E=\angle D=\pi-\angle B$，由此可知 A、E、C、B 四

点共圆，故

$$S=\frac{1}{2}(ac+bd)\sin\alpha, \quad ②$$

其中 $\alpha=\angle EAB$.

由①、②知原不等式等价于

$$\frac{2S}{\sin\alpha}\cdot S\leqslant 2\sqrt{S}(S+2R^2). \quad ③$$

注意到 $R=\dfrac{BE}{2\sin\alpha}$，因此③进一步等价于

$$S^{\frac{3}{2}}\leqslant S\sin\alpha+\frac{BE^2}{2\sin\alpha}, \quad ④$$

但由平均值不等式知 ④ 的右端 $\geqslant 2\sqrt{\dfrac{S\cdot BE^2}{2}}$.

因此要证④，只需证明 $\sqrt{2}BE\geqslant S.$ ⑤

事实上，由 $\angle EAB+\angle ECB=180^\circ$，不妨设 $\angle EAB\geqslant 90^\circ$. 对$\triangle ABE$ 应用引理可知 $\dfrac{a+c}{BE}\leqslant\sqrt{2}$，故

$$\sqrt{2}BE\geqslant a+c=S,$$

⑤式得证. □

上面的证法综合运用三角、几何的技巧，构造了一个新的共圆四边形，实现了问题的转化.

圆内接四边形有一个著名的极值性质：四条边给定的四边形中，内接于圆的四边形面积最大.

一个给定边长的圆内接四边形的面积有很好的解析公式，这就是下面的定理.

定理 设一个圆的内接凸四边形的边长依次为 a、b、c、d，又设 s 为该四边形周长的一半，则四边形的面积 F 为

$$F=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

这个定理是三角形熟知结果的推广. 如果取 $d=0$，我们便得到通常的三角形面积的海伦公式.

下面将介绍的证明引自 Roger A. Johnson 的书《近代欧氏几何学》(Modern Geometry，中译本：单墫译，上海教育出版社，1999).

证明 设定理中的四边形为 $ABCD$，如图 3-4，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$.

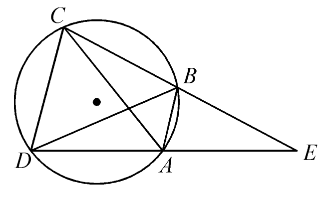

图 3-4

如果 $ABCD$ 是长方形，证明立即得出.

如果 $ABCD$ 不是长方形，设 BC 与 AD 相交于圆外的点 E. 记 $CE=x$，$DE=y$，则由三角形面积公式有

$$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(x+y-c)(x-y+c)(-x+y+c)}. \qquad ①$$

但 $\triangle ABE \backsim \triangle CDE$，所以

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CDE}}=\frac{a^2}{c^2},$$

由此推得

$$\frac{F}{S_{\triangle CDE}}=\frac{c^2-a^2}{c^2}, \qquad ②$$

又由比例式

$$\frac{x}{c}=\frac{y-d}{a},\ \frac{y}{c}=\frac{x-b}{a},$$

相加解出 $x+y$，得

$$x+y+c=\frac{c}{c-a}(-a+b+c+d),$$

$x+y-c$ 等等的类似表达式，都可以立即得到. 将它们代入①并化简，得

$$S_{\triangle CDE}=\frac{c^2}{c^2-a^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

代入式②，便知结论成立. □

推广 可以证明任一边长为 a、b、c、d，一对对角的和为 $2u$ 的凸四边形，面积 F 可由下式给出

$$F^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2 u.$$

由于证明包含长而乏味的三角化简，我们不在这里给出. 由这个公式立即看出：四条边给定的四边形中，内接于圆的面积最大.

下面的例子用到了圆内接四边形面积的这种极值性质.

例3 （Popa 不等式） 如果一个凸四边形的四边满足 $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$，面积为 F，求证：

$$F \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4} c^2. \tag{①}$$

证明 由于边长给定的四边形中，圆内接四边形的面积最大，因此我们仅需对圆内接四边形证明①便可. 这时

$$F^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. 但是 $s-d = (a+b+c)-s$，因此由算术几何平均值不等式可得

$$\begin{aligned} F^2 &= 3^3\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}c\right)(a+b+c-s) \\ &\leqslant 3^3\left[\frac{\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}a\right)+\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}b\right)+\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}c\right)+(a+b+c-s)}{4}\right]^4 \\ &= 3^3\left(\frac{a+b+c}{3\cdot 2}\right)^4 \\ &\leqslant 3^3\left(\frac{c}{2}\right)^4. \end{aligned}$$

最后一步用了 $a \leqslant b \leqslant c$.

两边开方，由此便得

$$F \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4} c^2,$$

得证. □

再看一个典型问题.

例4 （高灵不等式） 设凸四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 的四边分别为 a、b、c、d 和 a'、b'、c'、d'，它们的面积分别为 F、F'. 令

$$K = 4(ad+bc)(a'd'+b'c')-(a^2-b^2-c^2+d^2)(a'^2-b'^2-c'^2+d'^2).$$

求证：

$$K \geqslant 16FF'.$$

证明 由于给定边长的四边形以圆的内接四边形具有最大面积，因此仅需考虑 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 均为圆内接四边形的情况.

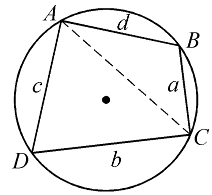

图 3-5

如图 3-5,因为 $\angle B+\angle D=180^\circ$,所以

$$2F=(ad+bc)\sin B, \quad ①$$

类似的有

$$2F'=(a'd'+b'c')\sin B'. \quad ②$$

另一方面,由余弦定理

$$\begin{aligned}AC^2&=b^2+c^2+2bc\cos B\\&=a^2+d^2-2ad\cos B,\end{aligned}$$

因此 $$a^2-b^2-c^2+d^2=2(ad+bc)\cos B, \quad ③$$

类似的有 $$a'^2-b'^2-c'^2+d'^2=2(a'd'+b'c')\cos B'. \quad ④$$

由①、④可得

$$K-16FF'=4(ad+bc)(a'd'+b'c')(1-\cos(B-B'))\geqslant 0,$$

故原不等式成立. □

注 由上面的证法,实际上可把高灵不等式写的更一般一些:

$$0\leqslant K-16FF'\leqslant 8(ad+bc)(a'd'+b'c'),$$

左边的不等式即为高灵不等式.

高灵不等式可看作著名的 Neuberg-Pedoe 不等式在四边形中的推广.

在这一节的最后,我们研究一个难度较大的关于双圆四边形的极值问题,这里要介绍的解法由向振同学(原长沙市一中学生,曾获 2003 年第 44 届 IMO 金牌)给出.

例 5 给定外接圆半径 R 和面积 S 不变的双圆四边形 $ABCD$(这里 $S\leqslant 2R^2$),求 plm 的最大值,其中 p 是四边形 $ABCD$ 的半周长,l、m 分别为它的两条对角线长.

解 如图 3-6,我们可以用三个参数 r、α、$\beta\left(r\in(0,+\infty),\ \alpha,\ \beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$来确定一个双圆四边形 $ABCD$,这里的 r 是四边形 $ABCD$ 的内切圆半径,$\alpha=\angle AIK$,$\beta=\angle BIK$,其中 I 是四边形 $ABCD$ 的内切圆的圆心,K 是圆 I 与边 AB 的切点.

下面证明:

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 几何不等式/冷岗松著.
—3版. —上海:华东师范大学出版社,2020
ISBN 978-7-5760-0008-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①冷… Ⅲ. ①几何课-高中-教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第034883号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷
几何不等式(第三版)

著　　者　冷岗松
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
责任校对　陈　易
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　8
字　　数　131千字
版　　次　2020年4月第三版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—30100
书　　号　ISBN 978-7-5760-0008-5
定　　价　25.00元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206

2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422

3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244

4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349

5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454

6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。