数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 13

Mathematical Olympiad Series

复数与几何

林天齐 编著

华东师范大学出版社

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有扎实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在IMO获得奖牌的学生中，日后有不少成为大数学家．例如，获菲尔兹奖的数学家有：玛古利斯(G. Margulis，俄罗斯，1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld，乌克兰，1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz，法国，1994年)、博切尔兹(R. Borcherds，英国，1998年)、高尔斯(T. Gowers，英国，1998年)、拉福格(L. Lafforgue，法国，2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman，俄罗斯，2006年)、陶哲轩(Terence Tao，澳大利亚，2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo，越南，2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss，以色列，2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov，俄罗斯，2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani，女，伊朗，2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

平面几何是一门古老的学科,她的魅力不仅让无数爱好者趋之若鹜,而且也在各项数学竞赛中占据着重要的地位.解决平面几何问题的方法层出不穷,有纯几何方法,三角方法,解析方法、复数方法等等.在我看来,后面列举的几种计算类方法也是平面几何的重要解题方法.纯平面几何方法非常美观,但是面对复杂问题时往往难以发掘,而且方法本身的复杂度也会大大提升,此时计算类方法的优势就会体现出来.

提到计算类方法,有的人的脑海中往往浮现出几张满满当当写着各种代数式的草稿纸,丝毫看不出这是在解平面几何题.实际上,这是不可取的.换而言之,解答这道题的人没有真正理解"计算类方法"的真正含义.计算类方法并不是在面对平面几何问题时直接将其"粗暴"地变成代数问题,而应该作为解题的辅助手段出现,辅佐解题者尽快通向彼岸.一个正确使用计算类方法的过程应当是在充分地挖掘图形的几何性质,整理清楚几何对象之间的联系之后,采取三角、解析、复数等方法合理切入,进而解决问题.因此,计算类方法是解决平面几何问题时的"利剑",而并非将解题者拖入计算泥潭的"幽灵".

本书所介绍的复数方法解平面几何问题,就是计算类方法的一种.因为复数本身具有良好的运算性质,所以复数法兼具解析法、三角法的优势,但其在处理带有相似及旋转结构的问题时又具备独特优势,这是其他计算类方法无法比拟的.

本书在创作时的定位是面向平面几何初学者、爱好者与数学竞赛教练员.其目的是力图拓宽读者的视野,给读者另辟一条解决平面几何问题的路.书中较为详尽地介绍了用复数法解平面几何题时所需的重要知识及解题策略,列举了一定数量的例题展现复数方法在实际解题过程中的使用,配备了一些习题帮助读者加以巩固.在书中各种结论的推导过程中,难免用到一些高等代数(如行列式,矩阵)的知识,故本书设置了附录来普及这些基本概念与知识,以方便后续展开.

因为笔者水平有限,见识浅显,故书中难免会出现纰漏,如书写错误或

考虑不周的地方,在此向读者致歉,希望读者不吝指正,并渴望与你们一同进步.

林天齐

2019 年 10 月于上海

目　录

第一章　复数的概念、运算及预备知识

1.1　复数及复平面的概念

我们知道，方程

$$x^2=-1$$

在实数范围内无解. 人们引入一个特别的数“i”作为这个方程的解. 简而言之，我们假设一个新数“i”满足 $i^2=-1$. 将 i 添加到实数集 $\mathbf{R}$ 中去并加以扩张，就得到了复数：

$$z=a+bi,$$

其中 $a, b\in\mathbf{R}$. a，b 分别叫做复数 z 的实部与虚部，记作：

$$a=\operatorname{Re} z,\ b=\operatorname{Im} z.$$

复数全体构成的集合记作 $\mathbf{C}$.

对于复数 $z=a+bi(a, b\in\mathbf{R})$，当 $b=0$ 时，z 表示一个实数；当 $b\neq0$ 时，称 z 为虚数；当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时，称 z 为纯虚数.

每一个复数 $z=a+bi(a, b\in\mathbf{R})$ 唯一对应了平面直角坐标系上的一个点 (a, b)，我们称这个平面为复平面. 实数在复平面上所对应的点都在 x 轴上，故也称 x 轴为实轴. 纯虚数在复平面上所对应的点都在 y 轴上，故也称 y 轴为虚轴.

两个复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di(a, b, c, d\in\mathbf{R})$ 相等的充分必要条件是：

$$a=c,\ b=d,$$

即它们的实部与虚部对应相等. 两个复数相等当且仅当它们在复平面上对应的点重合. 两个复数能够比较大小当且仅当它们均为实数.

复数有如下的表示形式：代数形式，几何形式，三角形式，指数形式.

我们熟悉的 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$,称为复数 z 的代数形式.

复数的代数形式 $z=a+b\mathrm{i}$ 可与复平面上的位置向量 $\overrightarrow{OZ}=(a, b)$ 一一对应. 这称为复数 z 的几何形式.

复数代数形式与几何形式的联系,直观地由图 1-1 表示.

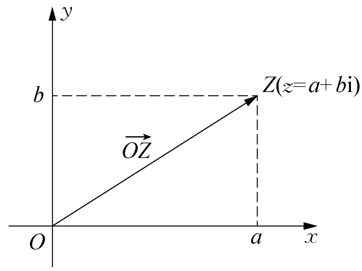

图 1-1

复数的几何形式将复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 对应于复平面上的一点 $Z(a, b)$.

现设点 Z 的极坐标为 (r, θ),那么就有 $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$,因而复数 $Z(a, b)$ 也可以表示为 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$. 其中 $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 就是复数 z 的模,θ 称为复数 z 的辐角,记作 $\theta=\mathrm{Arg}\,z$. 这称为复数 z 的三角形式. 如图 1-2 所示.

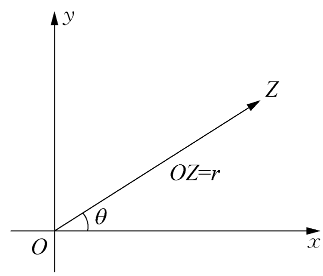

图 1-2

如果我们记 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\exp(\mathrm{i}\theta)=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ $(\theta\in\mathbf{R})$,则复数的三角形式还可以表示为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,这称为复数 z 的指数形式. 实际上,当我们学习了复变函数之后,就知道对于复数 z, e^z 定义如下:

$$\mathrm{e}^z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots.$$

这与复数的指数形式在数学上是等价的.

由基本的三角函数知识,如果 θ 为 z 的一个辐角,那么 $\theta+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 也是 z 的一个辐角. 因此 z 的辐角有无穷多个. 在 z 的全部辐角中,有且只有一个满足 $0\leqslant\theta<2\pi$,称为 z 的辐角主值,记作 $\arg z$.

例 1 若复数 z 满足 $|z-\bar{z}|=2\sqrt{3}$,且 $\dfrac{z}{(\bar{z})^2}$ 是实数,求 $|z|$ 的值.

解析 设 $z=a+b\mathrm{i}$,其中 $a, b\in\mathbf{R}$. 则

$$\begin{aligned}|z-\bar{z}|&=|(a+b\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})|\\&=2|b|=2\sqrt{3},\end{aligned}$$

得到 $b=\pm\sqrt{3}$. 而:

$$\frac{z}{(\bar{z})^2}=\frac{z^3}{|z|^4}=\frac{1}{|z|^4}(a+bi)^3$$
$$=\frac{1}{|z|^4}[(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i]\in\mathbf{R},$$

所以 $3a^2b-b^3=0$. 这说明 $a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}b=\pm 1$. 故 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

例 2 设 x, y 是实数, $z_1=y+(x^2-2x)i$, $z_2=x+(y^2+y-2)i$. 如果 $z_1>z_2$,试求所有可能的实数对(x, y).

解析 由于 z_1, z_2 可以比较大小,所以 $\mathrm{Im}\, z_1=\mathrm{Im}\, z_2=0$,即

$$x^2-2x=y^2+y-2=0.$$

得到 $x=0$ 或 2, $y=1$ 或 -2. 结合 $z_1=y>z_2=x$,所有可能的实数对 (x, y) 为$(0, 1)$.

注 两个复数可以比较大小当且仅当它们都是实数,这里"$z_1>z_2$"提供了隐含的条件.

例 3 已知 $\frac{z}{\bar{z}-2}$ 是纯虚数,求复数 z 在复平面内对应点的轨迹方程,并描述轨迹曲线的类型.

解析 设 $z=x+yi$,其中 x, $y\in\mathbf{R}$. 则

$$\frac{z}{\bar{z}-2}=\frac{x+yi}{x-yi-2}=\frac{(x+yi)(x-2+yi)}{(x-2-yi)(x-2+yi)}$$
$$=\frac{[x(x-2)-y^2]+(2xy-2y)i}{(x-2)^2+y^2}.$$

于是有

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{\bar{z}-2}\right)=\dfrac{x(x-2)-y^2}{(x-2)^2+y^2}=0,\\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\bar{z}-2}\right)=\dfrac{2xy-2y}{(x-2)^2+y^2}\neq 0,\end{cases}$$

故 z 在复平面内对应点的轨迹是等轴双曲线 $(x-1)^2-y^2=1$ 上除去两个点 $(0, 0)$, $(2, 0)$.

注 要注意 0 不是纯虚数.

1.2 复数的运算

复数的四则运算都遵循代数式的运算规则. 涉及虚数单位 i 乘方的运算只需用 $\mathrm{i}^2=-1$ 代入.

一、复数的四则运算

对于 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}(a, b, c, d\in\mathbf{R})$，

复数 z_1，z_2 的加法运算 z_1+z_2 定义为：

$$z_1+z_2=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i};$$

减法运算 z_1-z_2 定义为：

$$z_1-z_2=(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i};$$

乘法运算 $z_1\cdot z_2$ 定义为：

$$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i};$$

除法运算 $\frac{z_1}{z_2}$ 定义为：

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}\left(=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}\right)\\&=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\mathrm{i}}{c^2+d^2},\end{aligned}$$

这里 c，d 不全为 0，即 $z_2\neq 0$.

如果我们将 z_1，z_2 表示为复数的指数形式，即 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，其中 r_1，$r_2\geqslant 0$，θ_1，$\theta_2\in\mathbf{R}$. 由两角和的正余弦公式，有

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)\mathrm{i}]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\\&=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\end{aligned}$$

即

$$r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}.$$

据此，我们也有复数乘方运算的指数形式：

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta},$$

这里 $n \in \mathbf{Z}$. 该结论称之为“棣莫弗定理”.

定理 1-1 (棣莫弗(De Moivre)定理)设 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, 这里 $k=1, 2$, $r_k \geqslant 0$, $\theta_k \in \mathbf{R}$,则

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

注 棣莫弗定理也可以推广到 n 个复数相乘的情况.

二、复数的乘方与开方运算

所谓复数的开方运算,就是对复数 z_0 与正整数 $n \geqslant 2$,求关于 z 的方程 $z^n = z_0$ 的根. 考虑到复数乘法的指数形式十分简洁明了,我们假设 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, 这里 $r > 0$ 是 z_0 的模(不考虑 $r=0$ 的平凡情况), $\theta_0 \in \mathbf{R}$ 是 z_0 的辐角. 设未知元 $z = re^{i\theta}$,则由棣莫弗定理,方程化为:

$$r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}.$$

比较等式两边的模,就有 $r^n = r_0$. 所以 $r = \sqrt[n]{r_0}$. 比较它们的辐角可以知道:

$$n\theta = \theta_0 + 2k\pi,$$

这里 $k \in \mathbf{Z}$. 所以 $\theta = \dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n}$. 那么

$$z = \sqrt[n]{r_0}\, e^{\frac{\theta_0+2k\pi}{n} i}, \ k \in \mathbf{Z}.$$

由于 $e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+2k\pi)}$,所以我们不妨取 $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. 故 z_0 的 n 次单位根共有 n 个,分别为

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\, e^{\frac{\theta_0+2k\pi}{n} i}, \ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

在复平面上, $z_0 \neq 0$ 的 n 个单位根均匀分布在圆周 $|z| = \sqrt[n]{|z_0|}$ 上.

三、复数四则运算的运算规律

复数的加法运算满足交换律与结合律,即对任意复数 z_1, z_2, z_3,成立

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

复数的乘法运算满足交换律与结合律,即对任意复数 z_1, z_2, z_3,成立

$$z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$$

复数的乘法对加法成立分配律. 即对任意复数 z_1, z_2, z_3,成立

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

四、共轭复数的概念及运算性质

对复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$,定义其共轭复数为 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$. 容易证明关于共轭复数有如下的代数运算性质:

1. $\bar{\bar{z}}=z$;
2. $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$;
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;
4. $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$, n 为任意整数;
5. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$;
6. $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$, $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im}z$;
7. $z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$, $z\in\{b\mathrm{i}\mid b\in\mathbf{R}\}\Leftrightarrow\bar{z}=-z$.

注　第 7 条性质是证明一个复数是实数或者纯虚数的有效方法.

五、复数的模及运算性质

从几何上说,复数 z 的模指复平面上 z 的对应点 Z 与原点 O 的距离. 若 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$,则

$$|z|=|\overrightarrow{OZ}|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

容易证明关于复数的模有如下的代数运算性质:

1. $|\bar{z}|=|z|$, $z\cdot\bar{z}=|z|^2$;
2. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$;
3. $|z^n|=|z|^n$, n 为任意整数;
4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$;
5. $|z|\geqslant|\operatorname{Re}z|$, $|z|\geqslant|\operatorname{Im}z|$;
6. 三角不等式

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant||z_1|+|z_2||,$$

其中左侧等号成立$\Leftrightarrow\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 反向;右侧等号成立$\Leftrightarrow\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 同向. 这里 Z_1, Z_2 指复数 z_1, z_2 在复平面上的对应点.

例 4 已知复数列$\{z_n\}$的通项公式是：

$$z_n=(1+\mathrm{i})\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\right),$$

求$|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+\cdots+|z_{2019}-z_{2020}|$的值.

解析 对任意正整数k,有

$$\begin{aligned}|z_k-z_{k+1}|&=\left|(1+\mathrm{i})\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)-(1+\mathrm{i})\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k+1}}\right)\right|\\&=\left|(1+\mathrm{i})\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)\left(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k+1}}\right)\right|\\&=|1+\mathrm{i}|\cdot\left|1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right|\cdots\left|1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right|\cdot\left|-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k+1}}\right|\\&=\sqrt{2}\times\sqrt{1+\frac{1}{2}}\times\cdots\times\sqrt{1+\frac{1}{k}}\times\frac{1}{\sqrt{k+1}}=1.\end{aligned}$$

所以$|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+\cdots+|z_{2019}-z_{2020}|=2019$.

例 5 求值：$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}$.

解析 考虑复数$z_1=3+\mathrm{i}$，$z_2=5+\mathrm{i}$，$z_3=7+\mathrm{i}$，$z_4=8+\mathrm{i}$.

它们的辐角主值分别是$\arctan\frac{1}{3}$，$\arctan\frac{1}{5}$，$\arctan\frac{1}{7}$，$\arctan\frac{1}{8}$.要计算这些辐角的和,只需计算$z_1z_2z_3z_4$的辐角.由

$$\begin{aligned}z_1z_2z_3z_4&=(3+\mathrm{i})(5+\mathrm{i})(7+\mathrm{i})(8+\mathrm{i})\\&=(14+8\mathrm{i})(55+15\mathrm{i})\\&=2\times5\times(7+4\mathrm{i})(11+3\mathrm{i})\\&=10(65+65\mathrm{i})=650(1+\mathrm{i}),\end{aligned}$$

可见$\arg(z_1z_2z_3z_4)=\frac{\pi}{4}$.显然所求表达式的值属于$(0,\pi)$,故

$$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

注 充分利用复数相乘的几何意义,在计算有关三角函数的式子时可以免去使用三角公式,而只需要进行简单的复数运算.

例 6 求 $A=\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$ 的值.

解析 记 $\varepsilon=e^{\frac{\pi}{14}i}$,则 $\varepsilon^7=i$, $\varepsilon^{14}=-1$. 故对 $k\in\mathbf{Z}$,有

$$\sin\frac{k\pi}{14}=\operatorname{Im}\varepsilon^k=\frac{\varepsilon^k-\overline{\varepsilon^k}}{2i}=\frac{\varepsilon^k+\varepsilon^{14-k}}{2i},$$

故

$$A=\frac{(\varepsilon+\varepsilon^{13})(\varepsilon^3+\varepsilon^{11})(\varepsilon^5+\varepsilon^9)}{(2i)^3}=\frac{\varepsilon\cdot\varepsilon^3\cdot\varepsilon^5(1+\varepsilon^{12})(1+\varepsilon^8)(1+\varepsilon^4)}{-8i}$$

$$=\frac{\varepsilon^9(1+\varepsilon^4+\varepsilon^8+2\varepsilon^{12}+\varepsilon^{20}+\varepsilon^{16}+\varepsilon^{24})}{-8i}=\frac{\varepsilon^9\left(\sum\limits_{k=0}^{6}\varepsilon^{4k}+\varepsilon^{12}\right)}{-8i}$$

$$=\frac{\varepsilon^9(0+\varepsilon^{12})}{-8i}=\frac{(\varepsilon^7)^3}{-8i}=\frac{i^3}{-8i}=\frac{1}{8}.$$

其中用到了等比数列的求和公式

$$\sum_{k=0}^{6}\varepsilon^{4k}=\frac{1-(\varepsilon^4)^7}{1-\varepsilon^4}=\frac{1-(\varepsilon^{14})^2}{1-\varepsilon^4}=0.$$

注 本题中我们将三角函数的值与复数关联,目的是为了使用复数良好的运算性质进行计算.

例 7 设复数 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi}{2n+1}i}$ 是一个 $2n+1$ 次单位根. 试将 $1-\varepsilon^k(1\leqslant k\leqslant 2n)$ 化为三角形式,并求 $A=\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{2n\pi}{2n+1}$ 的值.

解析 先将 $1-\varepsilon^k$ 化为三角形式

$$\begin{aligned}1-\varepsilon^k&=1-e^{\frac{2k\pi}{2n+1}i}=\left(1-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)-i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}\\&=2\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}-2i\sin\frac{k\pi}{2n+1}\cos\frac{k\pi}{2n+1}\\&=2\sin\frac{k\pi}{2n+1}\left(\sin\frac{k\pi}{2n+1}-i\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\&=2\sin\frac{k\pi}{2n+1}\left(\cos\left(\frac{k}{2n+1}-\frac{1}{2}\right)\pi+i\sin\left(\frac{k}{2n+1}-\frac{1}{2}\right)\pi\right).\end{aligned}$$

两边取模得到 $|1-\varepsilon^k|=2\sin\frac{k\pi}{2n+1}$. 注意到恒等式:

$$(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{2n})=n+1,$$

两边取模就得到了 $\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(2\sin\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)=n+1$,故 $A=\prod\limits_{k=1}^{2n}\sin\dfrac{k\pi}{2n+1}=\dfrac{2n+1}{2^{2n}}$.

注 我们也可以将 $\sin\dfrac{2k\pi}{2n+1}$ 写成$\dfrac{\varepsilon^k-\overline{\varepsilon^k}}{2\mathrm{i}}$ 然后再进行计算,读者不妨一试.

1.3 复数运算的几何意义

一、复数加减法的几何意义

设复数 z_1, z_2 分别对应于复平面上的位置向量为:$\overrightarrow{OZ_1}=(a, b)$,$\overrightarrow{OZ_2}=(c, d)$. 由

$$z_1\pm z_2=(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$$

可知,$z_1\pm z_2$ 在复平面上的对应点 Z 的坐标是$(a\pm c, b\pm d)$. 即有如下向量等式:

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OZ_1}\pm\overrightarrow{OZ_2}.$$

代数形式与几何形式加减法的统一性,直观地由图 1-3 所示.

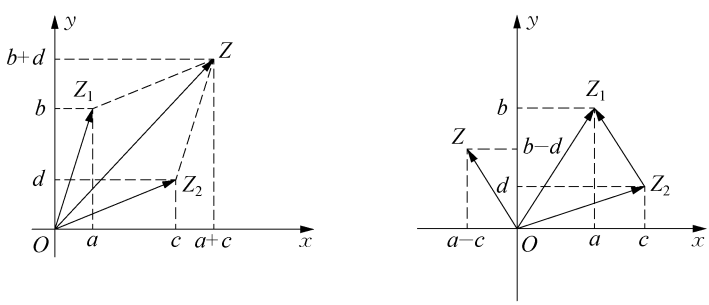

图 1-3

二、复数乘除法的几何意义

将 z_1, z_2 表示为指数形式 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$,则有

$$z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}.$$

由此,复数 z_1z_2 对应的向量就是把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 逆时针旋转角 θ_2(这里当 $\theta_2<0$ 时,逆时针旋转角 θ_2 应当理解为顺时针旋转角 $|\theta_2|$),在将它的长度变

为原来的 r_2 倍.

根据复数的除法运算是乘法运算的逆运算,可以得到当 $z_2 \neq 0$ 时,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

故当 $z_2 \neq 0$ 时,$\dfrac{z_1}{z_2}$ 对应的向量就是把$\overrightarrow{OZ_2}$绕点 O 顺时针旋转角 θ_2,再将它的模变为原来的$\dfrac{1}{r_2}$ 倍.

我们将上述运算规律做一总结,即"两复数相乘,模长相乘,辐角相加;两复数相除,模长相除,辐角相减."由此可以导出关于辐角运算的等式:

1. $\operatorname{Arg}(z_1 z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2$;

2. $\operatorname{Arg}(z^n)=n\operatorname{Arg} z$;

3. $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2$.

这里的记号"$\operatorname{Arg} z$"应在相差 2π 整数倍的意义下理解.

现在我们用相似三角形给出复数乘法的另一种几何意义.

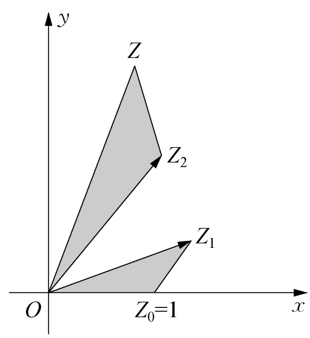

图 1-4

如图 1-4 所示,记 O:$0=0+0\mathrm{i}$ 是复平面的原点. Z_0:$z_0=1=1+0\mathrm{i}$ 为实轴上一点. 作 $\triangle OZ_2Z \backsim \triangle OZ_0Z_1$ 顺相似(三角形顶点对应排列,即 Z_2 与 Z_0 对应,Z 与 Z_1 对应). 可以证明,点 Z 所对应的复数 z 就是 $z_1 \cdot z_2$,其中 z_1, z_2 分别为点 Z_1, Z_2 所对应的复数.

事实上,由于 z_1, z_2 的辐角分别为 θ_1, θ_2,因此 $\operatorname{Arg} z=\theta_1+\theta_2$. 又由 $\triangle OZ_2Z \backsim \triangle OZ_0Z_1$,得

$$\frac{|\overrightarrow{OZ_2}|}{|\overrightarrow{OZ_0}|}=\frac{|\overrightarrow{OZ}|}{|\overrightarrow{OZ_1}|}\Rightarrow |\overrightarrow{OZ}|=\frac{|\overrightarrow{OZ_2}|\cdot|\overrightarrow{OZ_1}|}{|\overrightarrow{OZ_0}|}=\frac{r_2\cdot r_1}{1}=r_1 r_2.$$

因此 $z=r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}=z_1 z_2$. 这就证明了点 Z 所对应的复数就是 $z_1 z_2$.

三、共轭复数的几何意义

若复数 $z=a+b\mathrm{i}(a, b \in \mathbf{R})$,定义其共轭复数 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$. 容易得到对于指数形式的 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(r \geqslant 0, \theta \in \mathbf{R})$,其共轭复数 $\bar{z}=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. 共轭复数的几何意义是:复数 $\bar{z}$ 对应的点与 z 对应的点关于实轴对称,它们的模等长,辐角互为

相反数,如图 1-5 所示.

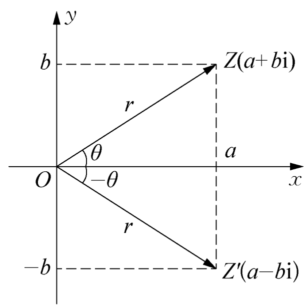

图 1-5

四、一些常用的几何意义

设复数 z_0, z_1, z_2 在复平面上对应的点分别为 Z_0, Z_1, Z_2.

1. $|z_1-z_2|$ 表示点 Z_1, Z_2 之间的距离;

2. 满足 $|z-z_1|=|z-z_2|$ 的复数 z 所对应的点的轨迹为线段 Z_1Z_2 的垂直平分线;

3. 满足 $|z-z_0|=r(r>0)$ 的复数 z 所对应的点的轨迹为以 Z_0 为圆心,r 为半径的圆;

4. 满足 $\mathrm{Arg}(z-z_1)=\theta$ 的复数 z 所对应的点的轨迹为以 Z_1 为端点的一条射线,其方向同实正半轴逆时针旋转角 θ;

5. 复数方程组的解是方程组中的方程在复平面上对应的轨迹的交点所对应的复数. 如图 1-6 所示.

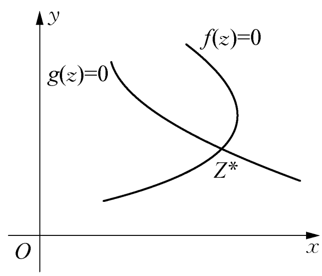

图 1-6

例 8 已知凸四边形 $ABCD$ 的周长为 1,边 AB, BC, CD, DA 的中点分别是 M, N, P, Q. 称 MP, NQ 为四边形 $ABCD$ 的两条中位线. 试求 $MP+NQ$ 的最大值,并求取到最大值时四边形 $ABCD$ 的形状.

解析 设四边形 $ABCD$ 的四个顶点,以及 M, N, P, Q 所对应的复数分别为 a, b, c, d 与 m, n, p, q. 由中点的坐标公式知

$$m=\frac{a+b}{2},\ n=\frac{b+c}{2},\ p=\frac{c+d}{2},\ q=\frac{d+a}{2}.$$

这样

$$\begin{aligned}MN+PQ&=|m-n|+|p-q|=\left|\frac{a+b}{2}-\frac{c+d}{2}\right|+\left|\frac{b+c}{2}-\frac{d+a}{2}\right|\\&=\frac{1}{2}(|(a-c)+(b-d)|+|(b-a)+(c-d)|)\\&\leqslant\frac{1}{2}(|b-c|+|a-d|+|b-a|+|c-d|)\\&=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\overrightarrow{AD}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}\,/\!/\,\overrightarrow{CD}$,即四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

例 9　求证：四边形四边平方和减去两对角线平方和，等于对角线中点连线平方的 4 倍，从而可得，一凸四边形是平行四边形的充要条件是：四边平方和等于对角线平方和.

证明　假设复平面上四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 的中点分别为 M，N.

A，B，C，D，M，N 所对应的复数分别为 a，b，c，d，m，n. 于是

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+|\overrightarrow{DA}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2\\
&=|a-b|^2+|b-c|^2+|c-d|^2+|d-a|^2-|a-c|^2+|b-d|^2\\
&=(a-b)(\bar{a}-\bar{b})+(b-c)(\bar{b}-\bar{c})+(c-d)(\bar{c}-\bar{d})+(d-a)(\bar{d}-\bar{a})\\
&\quad-(a-c)(\bar{a}-\bar{c})-(b-d)(\bar{b}-\bar{d})\\
&=(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)-\Big[\sum_{\text{cyc}}(a\bar{b}+\bar{a}b)\Big]+(a\bar{c}+\bar{a}c+b\bar{d}+\bar{b}d)\\
&=(a+c-b-d)(\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d})=|a+c-b-d|^2\\
&=4\left|\frac{a+c}{2}-\frac{b+d}{2}\right|^2=4|m-n|^2=4|\overrightarrow{MN}|^2.
\end{aligned}$$

结论成立！

注　$|z|^2=z\bar{z}$ 在处理线段平方的时候是一个重要的性质.

例 10　设正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内接于$\odot O$，P 为$\odot O$ 上一动点. 求证：$S=\sum\limits_{k=1}^{n}PA_k^2$ 的值与动点 P 的位置无关.

证明　我们不妨设在复平面上，A_k 对应的复数为 $z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}(k=1,2,\cdots,n)$，于是 $\odot O$ 的方程为 $|z|=1$，动点 P 所对应的复数 p 满足 $|p|=1$. 故

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{PA_k}|^2=\sum_{k=1}^{n}|p-z_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(p-z_k)(\bar{p}-\overline{z_k})\\
&=\sum_{k=1}^{n}(p\bar{p}-p\overline{z_k}-\bar{p}z_k+z_k\overline{z_k})=\sum_{k=1}^{n}(2-p\overline{z_k}-\bar{p}z_k)\\
&=2n-p\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}-\bar{p}\sum_{k=1}^{n}z_k.
\end{aligned}$$

注意到 $$\sum_{k=1}^{n}z_k=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}=0,$$

同时将上式两边取共轭，也有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{z_k}=0$，所以 $S=2n$.

不难得到，当正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆半径为 R 时，$S=2nR^2$.

注　这是一个非常经典的问题，充分反映了单位根性质的妙处. 实际上，也可以使用三角来解决它，读者也可以试试.

例 11　设 α，$\beta\in\mathbf{R}$，已知复数 $z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$，$u=\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta$ 满足 $z+u=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$.（1）证明：$z^2+zu+u^2=0$；（2）求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

解析　（1）如果我们纯粹使用三角函数的工具去解决，会发现过程繁琐. 我们不妨先画出复平面上 z，u 的大致位置，探究其几何性质.

如图 1－7 所示，假设 u，z，$z+u$ 在复平面上对应的点是 U，Z，S，显然它们都是单位圆周 $|z|=1$ 上的点，并且由复数加法的几何意义，有 $\overrightarrow{OU}+\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OS}$，故四边形 $OUSZ$ 是平行四边形. 加上 $OU=OZ$，故它是菱形. 又注意到 $OU=OS=1$，故 $\triangle OUS$ 是等边三角形，从而 $\angle UOS=\dfrac{\pi}{3}$. 于是 $\angle UOZ=2\angle UOS=\dfrac{2\pi}{3}$. 利用复数除法的几何意义，$\dfrac{u}{z}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\triangleq\omega$ 是一个三次单位根. 由三次单位根的性质，有

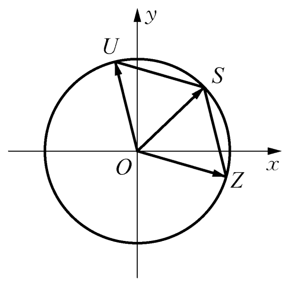

图 1－7

$$z^2+zu+u^2=z^2+z(\omega z)+(\omega z)^2=z^2(\omega^2+\omega+1)=0.$$

（2）注意到 $zu=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$，故 $\tan(\alpha+\beta)=\tan(\arg(zu))$，下面计算 zu. 由（1）的结论知，

$$\begin{aligned}zu&=zu+(z^2+zu+u^2)\\&=(z+u)^2=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}\right)^2\\&=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

故 $\arg(zu)=\arctan\dfrac{24}{7}$，即 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{24}{7}$.

注　本题中，$|z+u|=1$ 提供了隐含的几何条件. 如果在解决本题时不考察几何意义，而是直接使用三角函数进行计算，会比较麻烦.

本章习题

1 设 A_1, A_2, …, A_n 是平面上给定的 n 个点, c_1, c_2, …, c_n 是 n 个给定的复数. 现在在平面上给定一个坐标系 Λ,设复数 $w_\Lambda=\sum_{i=1}^{n}c_i z_\Lambda(A_i)$,这里 $z_\Lambda(A_i)$ 表示点 A_i 在复平面 Λ 下所对应的复数. 证明:w_Λ 在复平面 Λ 下所对应的点与坐标系 Λ 无关的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n}c_i=1.$$

2 在 $\triangle ABC$ 中,用 A, B, C 分别表示它的三个内角. 不用三角恒等式,请用复数的运算来证明如下三角恒等式:

(1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

(2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

3 设点 P 是 $\odot O$ 外一定点. $\odot O$ 的半径是 r, $OP=d>r$. 给定正整数 $n(n\geqslant 3)$,设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是 $\odot O$ 的内接正 n 边形. 试问: $\sum_{i=1}^{n}PA_i^2$ 的值与正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的位置有关吗? 如果有关,请说明理由;如果无关,请用 r, d 来表示这个值.

4 设 α_1, α_2, α_3, $\alpha_4\in[0, 2\pi)$,并且满足如下条件:

1) $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$;

2) $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4=0$;

3) $\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4=0$.

求: $(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_1+\alpha_2)$ 的所有可能值.

5 证明:对任意的复数 z_1, z_2, z_3,有如下的不等式成立:

$$|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_1+z_2+z_3|\geqslant|z_1+z_2|+|z_1+z_3|+|z_2+z_3|.$$

第二章　复数与向量的基本运算

在本章节中，除了特殊说明之外，我们一般使用标记点的字母直接标记该点所对应的复数.

2.1　复数视角下向量的加减法与数乘

一、向量的加减法、数乘与复数的关系

对于复平面上的向量 $\overrightarrow{AB}$，将它平移之后使得始点 A 与原点 O 重合，新得到的向量 $\overrightarrow{OB'}$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的位置向量. 显然复数等式 $B'=B-A$ 成立. 我们称 $B'=B-A$ 是复平面上向量 $\overrightarrow{AB}$ 所对应的复数，记作 $z(\overrightarrow{AB})$. 显然，相等的向量对应相同的复数.

通过向量加法的几何意义，我们知道复平面上的向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\pm\vec{b}=\vec{c}$ 的充分必要条件是 $z(\vec{a})\pm z(\vec{b})=z(\vec{c})$. 这样可以得到

定理 2-1　平面凸四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充分必要条件是 $A+C=B+D$.

证明　四边形 $ABCD$ 为平行四边形

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow z(\overrightarrow{AB})=z(\overrightarrow{DC})$$
$$\Leftrightarrow B-A=C-D\Leftrightarrow A+C=B+D.$$

证毕.

给定复平面上的向量 $\vec{a}$ 与实数 λ，我们有数乘运算 $\lambda\vec{a}$. 在平面直角坐标系中，设 $\vec{a}$ 的坐标为 $(x,\ y)$，则 $\lambda\vec{a}$ 的坐标为 $(\lambda x,\ \lambda y)$，这样就有

$$z(\lambda\vec{a})=(\lambda x)+(\lambda y)\mathrm{i}=\lambda(x+y\mathrm{i})=\lambda z(\vec{a}).$$

下面介绍复数形式的定比分点公式. 设复平面上的直线 AB 上有一点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，这里 $\lambda\in\mathbf{R}$. 则有 $P-A=\lambda(B-P)$，解得 $P=\dfrac{A+\lambda B}{1+\lambda}$. 这就是复数形式的定比分点公式. 如果取 $\lambda=1$，即得线段 AB 的中点 M 对应的

复数为$M=\dfrac{A+B}{2}$. 为了消除P与B重合(即$\lambda=\infty$)的情况,可以引入参数μ,将定比分点公式写作:

定理 2-2 设复平面上有两个不重合的点A, B, P为直线AB上一点,满足$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PB}=\lambda:\mu$($\lambda$, μ不全为零). 则

$$P=\frac{\mu A+\lambda B}{\mu+\lambda}.$$

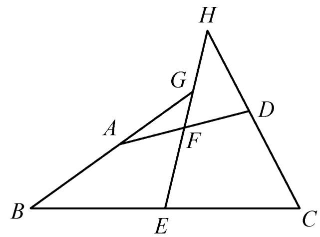

图 2-1

例 1 如图 2-1 所示,在四边形$ABCD$中,$AB=CD$. E, F分别是边BC, AD的中点. 直线AB, CD分别与直线EF相交于点G, H. 证明:$\angle BGE=\angle CHE$.

证明 不妨设$E=0$, $F=1$. 记$z_1=A-B$, $z_2=D-C$,于是

$$z_1+z_2=(A-B)+(D-C)=(A+D)-(B+C)=2F-2E=2.$$

由此可知$\operatorname{Im} z_1+\operatorname{Im} z_2=0$. 再结合$|z_1|=|z_2|$可知$|\operatorname{Re} z_1|=|\operatorname{Re} z_2|$. 但是$z_1+z_2=2\neq 0$,故只能$\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2$. 因此$z_1=\overline{z_2}$. 因此直线$AB$, CD与EF的夹角相等,命题证毕.

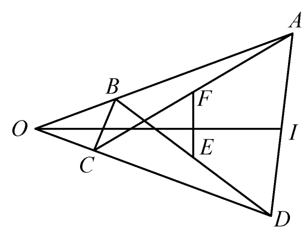

图 2-2

例 2 如图 2-2 所示,在四边形$ABCD$中,$AB=CD$,且直线AB, CD交于点O. E, F分别是BD, CA的中点,证明:$\angle BOC$的角平分线$OI\perp EF$.

证明 不妨假设复平面的原点是点O,实正半轴是$\overrightarrow{OI}$. 注意到$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$,且$OI$平分$\angle AOD$,所以$A-B$, $D-C$的辐角相反,模相等,从而是共轭复数. 我们可以假设$A-B=z$, $D-C=\bar{z}$. 这样就存在实数λ, μ,使得$B=\lambda z$, $C=\mu\bar{z}$. 因此$A=B+z=(1+\lambda)z$, $D=C+\bar{z}=(1+\mu)\bar{z}$. 这样就有

$$F=\frac{A+C}{2}=\frac{(1+\lambda)z+\mu\bar{z}}{2},$$

$$E=\frac{B+D}{2}=\frac{\lambda z+(1+\mu)\bar{z}}{2},$$

因此$F-E=\dfrac{1}{2}(z-\bar{z})$,这说明$\operatorname{Re}(F-E)=0$,从而$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{OI}$.

注　这里如何去表示“$AB=CD$，OI 平分 $\angle AOD$”？如果将 OI 放置到实轴上，那么两复数 $A-B$，$D-C$ 的关系就是非常明显了.

2.2　复数视角下向量的内积与旋转

一、向量的内积与复数的关系

我们知道，对平面直角坐标系中的向量 $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$，它们的内积为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2,$$

这里 θ 是向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角. 记 $z_1=z(\vec{a})$，$z_2=z(\vec{b})$，通过计算 $z_1\overline{z_2}$ 可知：

$$z_1\overline{z_2}=(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})=(x_1x_2+y_1y_2)+(-x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}.$$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2=\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$. 又 $\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=\overline{z_1}\cdot z_2$，因此

$$\mathrm{Re}(\overline{z_1}\cdot z_2)=\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})=x_1x_2+y_1y_2.$$

故有结论：

定理 2－3　设复平面上两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所对应的复数分别为 z_1，z_2，则它们的内积

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathrm{Re}(\overline{z_1}\cdot z_2)=\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2}).$$

由此，向量 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充分必要条件是 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathrm{Re}(\overline{z_1}\cdot z_2)=0$. 注意到当 $\vec{a}\neq\vec{0}$，即 $z_1\neq 0$ 时，有

$$\overline{z_1}\cdot z_2=\frac{(z_1\overline{z_1})z_2}{z_1}=|z_1|^2\frac{z_2}{z_1}.$$

故我们有推论：

推论 2－1　设复平面上两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}(\vec{a}\neq\vec{0})$ 所对应的复数分别为 z_1，z_2，则 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充分必要条件是 $\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=0$，即 $\frac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数或 0.

接下来我们来推导线段投影长度与点到直线距离公式的复数形式. 设复平面上的直线 l 通过点 A，它的一个方向向量 $\vec{\alpha}$ 所对应的复数为 $z(\vec{\alpha})=z\neq 0$. UV 是平面上的线段，P 是平面上的某点. 于是 $\frac{z}{|z|}$ 所对应的向量 $\vec{e}$ 就是 l 的一个单位向量. 故 UV 在直线 AB 上的投影长度 x 是：

$$x=|\overrightarrow{UV}\cdot\vec{e}\,|=|\,\mathrm{Re}(z(\overrightarrow{UV})\cdot\overline{z(\vec{e})})\,|=\left|\mathrm{Re}\left[(V-U)\left(\frac{\bar{z}}{|\,z\,|}\right)\right]\right|$$

$$=\frac{1}{|\,z\,|}\,|\,\mathrm{Re}[(V-U)\bar{z}]\,|.$$

取 $\mathrm{i}\,\dfrac{z}{|z|}$所对应的向量 $\vec{n}$,它就是直线 l 的一个单位法向量. 故点 P 到直线 l 的距离 d 为:

$$d=|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}\,|=|\,\mathrm{Re}[z(\overrightarrow{PA})\cdot\overline{z(\vec{n})}]\,|=\left|\mathrm{Re}\left[(A-P)\left(-\mathrm{i}\,\frac{\bar{z}}{|\,z\,|}\right)\right]\right|$$

$$=\left|\mathrm{Im}\left[(A-P)\left(\frac{\bar{z}}{|\,z\,|}\right)\right]\right|$$

$$=\frac{1}{|\,z\,|}\,|\,\mathrm{Im}[(A-P)\bar{z}]\,|.$$

定理 2-4 设直线 l 通过点 A,其方向向量 $\vec{\alpha}$ 所对应的复数为 $z(\vec{\alpha})=z\neq 0$. UV 是平面上的线段,P 是平面上的某点. 则 UV 在直线 l 上的投影长度 x 是:

$$x=\frac{1}{|\,z\,|}\,|\,\mathrm{Re}[(V-U)\bar{z}]\,|,$$

点 P 到直线 l 的距离为:

$$d=\frac{1}{|\,z\,|}\,|\,\mathrm{Im}[(A-P)\bar{z}]\,|.$$

二、复数与向量夹角的关系

证明向量之间的垂直关系,可归结为证明向量间的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. 下面利用复数乘除法的几何意义给予它一个复数的表示.

如图 2-3 所示,假设在复平面上的非零向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 所对应的复数为 z_1, z_2,并且 $\overrightarrow{OZ_2}$ 可由 $\overrightarrow{OZ_1}$ 逆时针旋转角 θ 得到. 则由复数乘法的几何意义得到

$$z_2=z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

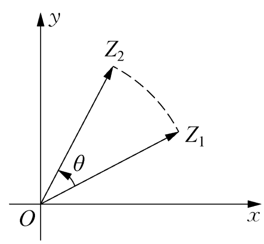

图 2-3

如果 $\overrightarrow{OZ_1}$ 逆时针旋转角 θ 后得到的向量 $\overrightarrow{OZ_1'}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 同向,其充分必要条件是:存在正数 λ,使得 $z_2=$

$\lambda z(\overrightarrow{OZ'_1})=\lambda z_1 e^{i\theta}$，由此得到

定理 2－5 复平面上两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$ 满足 $\vec{a}$ 逆时针旋转角 θ 后与 $\vec{b}$ 同向，则

$$\theta=\operatorname{Arg}\frac{z(\vec{b})}{z(\vec{a})}.$$

下面给出一个定理用于判断三角形是否为正三角形.

定理 2－6 复平面上的三角形 $\triangle ABC$（顶点按逆时针排列）是正三角形的充分必要条件是

$$A+B\omega+C\omega^2=0,$$

这里 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

证明 先证明必要性. 如图 2－4 所示，不妨设正 $\triangle ABC$ 的顶点按逆时针排列. 易发现 $\overrightarrow{BC}$ 绕点 B 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 后与 $\overrightarrow{CA}$ 重合，用复数表示即为

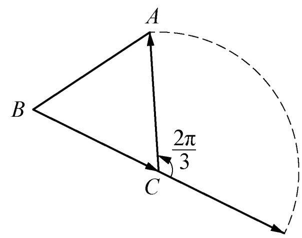

图 2－4

$$A-C=(C-B)\cdot e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

记 $\omega=e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ 为 1 的一个三次单位根. 则上式亦可写为 $A-C=\omega(C-B)$. 利用三次单位根的性质 $\omega^2+\omega+1=0$. 从而有

$$\begin{aligned}A-C=\omega(C-B)&\Leftrightarrow A+B\omega+C(-1-\omega)=0\\&\Leftrightarrow A+B\omega+C\omega^2=0.\end{aligned}$$

注意到以上的推导步步可逆，故成立充分必要条件.

现在我们来思考一下如果 A，B，C 三点顺时针排列的话，结论又会怎么样呢？实际上只需注意到 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ 三点逆时针排列. 于是 $\triangle ABC$ 是等边三角形就等价于 $\overline{A}+\overline{B}\omega+\overline{C}\omega^2=0$，取共轭就有：

推论 2－2 （1）复平面上的三角形 $\triangle ABC$（顶点按顺时针排列）是正三角形的充分必要条件是

$$A+B\omega^2+C\omega=0,$$

这里 ω 的意义同上.

（2）复平面上的三角形 $\triangle ABC$ 是正三角形的充分必要条件是

$$A^2+B^2+C^2=AB+AC+BC.$$

证明 这里只证明(2)不论顶点排列是逆时针还是顺时针，$\triangle ABC$ 是等边三角形总等价于

$$(A+B\omega+C\omega^2)(A+B\omega^2+C\omega)=0.$$

展开化简，并利用三次单位根的性质，则上式就是

$$A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC=0,$$

证毕.

例3 如图 2－5 所示，已知正三角形 ABC 内有一条定长为 a 的动线段，它在$\triangle ABC$ 三边上的射影长度分别为 l，m，n，求证：$l^2+m^2+n^2=\dfrac{3}{2}a^2$.

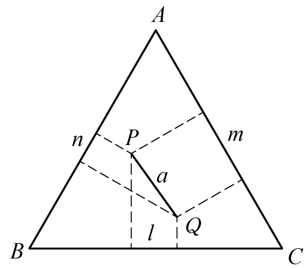

图 2－5

解析 我们设 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AB}$ 的单位方向向量分别为$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$. 注意到$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ 两两的夹角是$\dfrac{2\pi}{3}$，所以不妨假设它们对应的复数为 1，ω，ω^2，这里 $\omega=e^{\frac{2\pi}{3}i}$. 假设

$$z(\overrightarrow{PQ})=Q-P=z,$$

则有：

$$l=|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{e_1}|=|\operatorname{Re}(\bar{z}\cdot 1)|=\frac{1}{2}|z+\bar{z}|;$$

$$m=|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{e_2}|=|\operatorname{Re}(\bar{z}\cdot\omega)|=\frac{1}{2}|z\omega^2+\bar{z}\omega|,$$

$$n=|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{e_3}|=|\operatorname{Re}(\bar{z}\cdot\omega^2)|=\frac{1}{2}|z\omega+\bar{z}\omega^2|.$$

所以得到：

$$\begin{aligned}
l^2+m^2+n^2&=\frac{1}{4}[|z+\bar{z}|^2+|z\omega^2+\bar{z}\omega|^2+|z\omega+\bar{z}\omega^2|^2]\\
&=\frac{1}{4}[(z+\bar{z})^2+(z\omega^2+\bar{z}\omega)^2+(z\omega+\bar{z}\omega^2)^2]\\
&=\frac{1}{4}[(z^2+2|z|^2+\bar{z}^2)+(z^2\omega+2|z|^2+\bar{z}^2\omega^2)\\
&\quad+(z^2\omega^2+2|z|^2+\bar{z}^2\omega)]
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}[6\,|\,z\,|^2+(z^2+\bar{z}^2)(1+\omega+\omega^2)]$$

$$=\frac{3}{2}\,|\,z\,|^2=\frac{3}{2}a^2.$$

这里利用到了关于三次单位根 ω 的性质：$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$.

注 本题也可以利用三角函数解决，当然会用到一些三角函数的公式. 不过使用复数与向量的意义十分简洁明了. 借助复数，我们往往可以省去一些三角恒等变形.

例 4 如图 2－6 所示，已知动直线 l 经过正多边形的中心 O，自正多边形的各个顶点作动直线 l 的垂线，证明：这些垂线段的平方和是与直线 l 方向无关的定值.

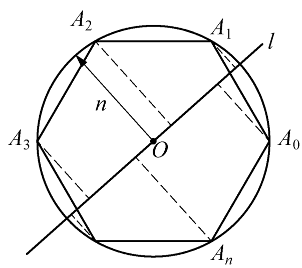

图 2－6

证明 不妨假设正 n 边形 $A_0A_1\cdots A_n$ 的外接圆方程为 $|z|=1$，它的 n 个顶点所对应的复数为：$A_k: z_k=\varepsilon^k$，其中 $\varepsilon=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$，$0\leqslant k\leqslant n-1$.

设直线 l 的某个单位法向量 $\vec{n}$ 所对应的复数为 $z(\vec{n})=t$，则点 A_k 到直线 l 的距离 d_k 为

$$d_k=|\overrightarrow{OA_k}\cdot\vec{n}\,|=|\,\mathrm{Re}(z_k\bar{t})\,|=\frac{1}{2}\,|\,z_k\bar{t}+\overline{z_k}t\,|.$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}d_k^2&=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}(z_k\bar{t}+\overline{z_k}t)^2\\&=\frac{1}{4}\left[\bar{t}^2\sum_{k=0}^{n-1}z_k^2+t^2\sum_{i=0}^{n-1}\overline{z_k}^2+2\sum_{k=0}^{n-1}|\,z_k\,|^2\,|\,t\,|^2\right]\\&=\frac{1}{4}\left[\bar{t}^2\sum_{k=0}^{n-1}z_k^2+t^2\sum_{i=0}^{n-1}\overline{z_k}^2+2n\right].\end{aligned}$$

用等比数列求和公式得到：

$$\sum_{k=0}^{n-1}z_k^2=\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{2k}=\frac{1\cdot[1-(\varepsilon^2)^n]}{1-\varepsilon^2}=0.$$

同时再取共轭得到 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\overline{z_k}^2=0$，所以 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}d_k^2=\dfrac{n}{2}$ 是定值，证毕.

注 在解决与正多边形有关的问题时，单位根显得尤其重要.

例 5 如图 2－7 所示，A，B 是两个定点，P 是动点，四边形 $PAXY$，$PBZW$ 均为正方形. 证明：XZ 的中点 M 不依赖点 P 的选取.

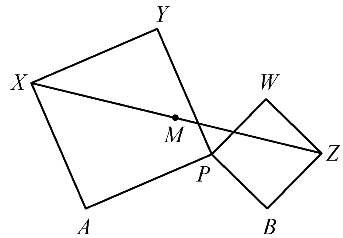

图 2－7

证明 由于 $\overrightarrow{AX}$ 是由向量 $\overrightarrow{AP}$ 绕着点 A 逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到，所以

$$X-A=(P-A)\cdot\exp\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right)=\mathrm{i}(P-A),$$

解得

$$X=A+\mathrm{i}(P-A)=\mathrm{i}P+(1-\mathrm{i})A.$$

同理可以得到 $Z=-\mathrm{i}P+(1+\mathrm{i})B$. 由中点公式，

$$M=\frac{X+Z}{2}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}A+\frac{1+\mathrm{i}}{2}B$$

与点 P 的位置无关，命题成立.

注 再深究点 M 与 A，B 之间的几何关系，可以计算

$$\frac{B-M}{A-M}=\frac{B-\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}A+\frac{1+\mathrm{i}}{2}B\right)}{A-\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}A+\frac{1+\mathrm{i}}{2}B\right)}=\frac{\frac{1-\mathrm{i}}{2}(-A+B)}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}(A-B)}=\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i},$$

由此可见，$\overrightarrow{MA}$ 逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$后与 $\overrightarrow{MB}$ 重合，故点 M 使得$\triangle MAB$ 为等腰直角三角形，这里顶点按照逆时针排列，AB 是斜边.

我们实际上可以做得再“聪明”一些. 由于整个图形在进行平移，旋转，放缩下的相对位置关系不变，故可不妨假设 $A=-1$，$B=1$，那么直接就可以得到 $M=\mathrm{i}$. 这样 M，A，B 三者之间的几何关系就很明朗了. 这种手段在后面的解题过程中不断出现，即有减少计算量的作用，有能突显几何意义. 但是前提是必须明白自己的假设是否不失一般性.

例 6 如图 2－8 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，分别以两腰 AB，CD 为边向外作正方形 $ABGE$ 和正方形 $DCHF$，联结 EF，该线段中点为 M，求证：$MA=MD$.

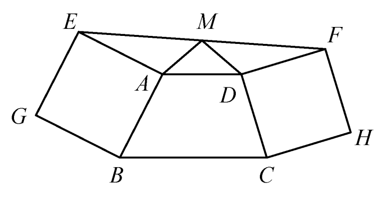

图 2－8

解析 不妨设 $A=0$，$D=1$，$C=B+$

$\lambda(\lambda\in\mathbf{R})$,欲证 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MD}|$,则只需证明 $\operatorname{Re}M=\frac{1}{2}$. 由正方形的意义以及复数与向量旋转之间的关系,有

$$E=A+(E-A)=A-\mathrm{i}(B-A)=-\mathrm{i}B;$$

$$\begin{aligned}F&=D+(F-D)=D+\mathrm{i}(C-D)=(1-\mathrm{i})D+\mathrm{i}C\\&=(1-\mathrm{i})+\mathrm{i}(B+\lambda).\end{aligned}$$

故

$$M=\frac{E+F}{2}=\frac{1+(\lambda-1)\mathrm{i}}{2},\ \operatorname{Re}M=\frac{1}{2},$$

故 $MA=MD$. 证毕.

注 实际上本题是一个非常简单的问题. 只需要证明 M 在 AD 上的投影是中点即可,可以过 E, F 作直线 AD 的垂线,用全等三角形证之.

本例题的复数法清新脱俗,给了我们这样的启发:在处理梯形这个问题的时候,我们借用了实轴这个工具. 将 A, D 放置到点 0, 1,那么 $C-B\in\mathbf{R}$,表示十分简洁.

例 7 如图 2-9 所示,以任意三角形 ABC 各边向外作正方形 $ABMH$, $ACNG$, $BCDE$,再分别以 BM, BE 和 CN, CD 为邻边向外作平行四边形 $BMPE$, $CNQD$. 求证:$\triangle PAQ$ 是等腰直角三角形.

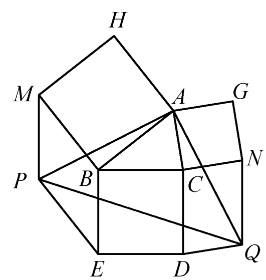

图 2-9

证明 不妨假设 $A=0$. 由正方形的意义以及复数与向量旋转之间的关系

$$\begin{cases}M-B=\mathrm{i}(0-B),\\0-C=\mathrm{i}(N-C),\\C-B=\mathrm{i}(E-B),\\D-C=\mathrm{i}(B-C),\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}M=(1-\mathrm{i})B,\\N=(1+\mathrm{i})C,\\E=(1+\mathrm{i})B-\mathrm{i}C,\\D=\mathrm{i}B+(1-\mathrm{i})C.\end{cases}$$

由平行四边形的复数表示,

$$P=M+E-B=B-\mathrm{i}C,\ Q=N+D-C=C+\mathrm{i}B.$$

显然有 $Q=\mathrm{i}P$. 故$\overrightarrow{AP}$绕点 A 逆时针旋转可得$\overrightarrow{AQ}$,从而 $\triangle PAQ$ 是等腰直角三角形.

注 这里选择 $A=0$ 为复平面原点是由于这样我们只需要证明 $Q=\mathrm{i}P$,而且在其余点的计算中起到了一定的化简作用.

例 8 如图 2-10 所示,已知四边形 $ABCD$ 内存在一点 P,使得$\triangle PAB$ 与$\triangle PCD$ 是以 P 为顶点的等腰直角三角形,证明:还存在一点 Q,使得$\triangle QBC$ 与$\triangle QAD$ 是以 Q 为顶点的等腰直角三角形.

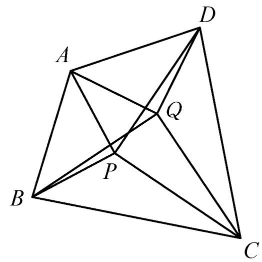

图 2-10

证明 首先描绘出点 A, B, C, D 的位置关系. 不妨假设 $P=0$,则 $B=\mathrm{i}A$, $D=\mathrm{i}C$. 下面先构造点 Q,使得 $\triangle QAD$ 是以 Q 为顶点的等腰直角三角形. 则

$$\frac{A-Q}{D-Q}=\mathrm{i},$$

解得 $Q=\dfrac{A-\mathrm{i}D}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}B+C}{1-\mathrm{i}}$. 下面要证明 $\triangle QBC$ 也是以 Q 为顶点的等腰直角三角形,为此计算

$$\frac{C-Q}{B-Q}=\frac{C-\dfrac{-\mathrm{i}B+C}{1-\mathrm{i}}}{B-\dfrac{-\mathrm{i}B+C}{1-\mathrm{i}}}=\frac{(1-\mathrm{i})C-(-\mathrm{i}B+C)}{(1-\mathrm{i})B-(-\mathrm{i}B+C)}=\frac{\mathrm{i}B-\mathrm{i}C}{B-C}=\mathrm{i},$$

从而$\triangle QBC$ 也是以 Q 为顶点的等腰直角三角形. 证毕!

例 9 (艾可尔斯定理)如图 2-11 所示,若$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 为正三角形(顶点按逆时针排列),则 AD, BE, CF 的中点 M, N, P 也构成正三角形的顶点.

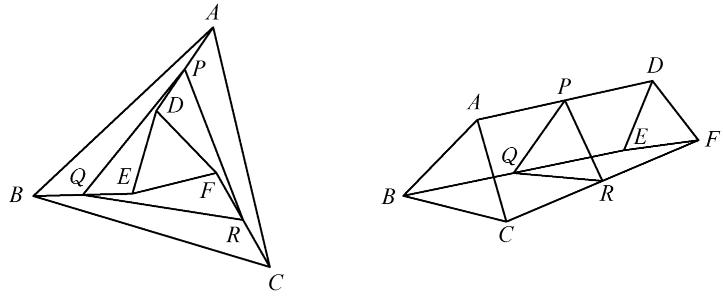

图 2-11

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书.高中卷.复数与几何/林天齐编著.—3版.—上海:华东师范大学出版社,2020

ISBN 978-7-5760-0031-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①林… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第037995号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷

复数与几何

编　　著　林天齐
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　徐惟简
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　9
字　　数　154千字
版　　次　2020年4月第一版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5760-0031-3
定　　价　25.00元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师一小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师一初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师一中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师一高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师一初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师一高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。