数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 14

Mathematical Olympiad Series

点几何解题

张景中 彭翕成 著

华东师范大学出版社

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

自《几何原本》算起，初等几何已有二千多年历史. 学习的难点，是构造千变万化的辅助线，使得图形中出现全等或相似图形. 让学生掌握辅助线的添加，需要花费大量时间，即便如此，遇到一道新题，也常会感到无从下手，而且辅助线的掌握，对进一步数学学习的作用好像并不明显.

我们尝试走一条新路，建立一种新的几何体系：点几何，能够兼有坐标方法、向量方法和质点几何方法三者的长处而避免其缺点. 本书详细论述用点几何解决常见几何问题的方法，从点几何的基本概念和运算法则入手，由易至难，以简御繁，不仅列出点几何解题要领，还论及点几何与向量法、解析法、质点法等的联系. 特别是作者原创的恒等式方法，可用一行等式证明难度颇大的几何竞赛题，并发现原题中多余条件，同时能举一反三，从一个命题扩展得到多个命题. 相信读者能从本书中享受到"一招制敌、一剑封喉"的解题快感.

对于应试学生而言，考分至关重要. 然而生活不止眼前的苟且，偶尔也要抬头看看远方. 数学的天地广阔，初等几何早已不是现代数学研究的主流，多解出几题，或少解出几题，何足道哉. 我们真正希望的是：

当你日后学习线性代数时，感觉似曾相识. 再回忆起本书，你能用一句话概括，"这本书不就是讲向量表示和线性相关吗"？

当你了解了一些人工智能的知识，就能明白，我们提出点几何体系，并不是为了标新立异，而是在寻找一种比较简洁而几何意义丰富的知识表示形式，以及一种简单的推理方式. 从我们的常识来说，题干由若干条件和结论组成，条件看起来是零散的，条件之间存在隐藏的逻辑关系，而解答正是要把这些隐藏的逻辑关系找出来，隐藏关系显现化的过程常常需要引入其他定理来说明，这样才能将零散的条件(每个条件至少要用一次)串成一个完整的逻辑链，完成证明. 这"必然"使得解答比题干要长，甚至有的要长几倍，甚至十几倍. 一个两三行的几何题，证明花费一两页的，并不少见. 这真的是必然的吗？本书的研究就否定了这一看法. 推而广之，如何使得知识表示简单而意义丰富，推理简明容易实现，效率高且易于理解，这是一项很有研究意义又任重道

远的工作.若能成功,即使是某一领域的部分成功,也能使得现有的推理体系大大简化,人们对事物之间关系看得更加清楚,大大减轻教与学的负担,也有助于新知识的发现,人工智能也会更加丰富多彩,更快地向前发展.

感谢李有贵、曹亚云两位老师的精心校对.

欢迎来信批评指正.通常在3个工作日内,您可以得到回复.

张景中　彭翕成

(zjz2271@163.com　pxc417@126.com)

2019-10-1

目　　录

1 点几何概览

1.1 引　　言

用坐标法处理几何问题，好处是可以用比较有章可循的代数方法. 但用坐标表示几何点，写起来和看起来都要复杂些，直观性也变差，且代数方法在计算过程中很难看出几何意义. 于是，莱布尼兹提出一个问题——能否直接对几何对象作计算？

向量几何的出现，可以看作是对莱布尼兹提出的这一问题的初步回答. 沿着这一方向，数学家们开辟了“几何代数”的领域，做了深入的研究. 这方面近期的代表性工作是李洪波关于共形几何代数的出色成果.

为了克服向量几何的某些缺点并保持其优势，著名数理逻辑学家莫绍揆提出了更具物理意义的质点几何的理论和方法，类似的研究还有杨学枝提出的点量. 这些研究丰富了几何代数的理论和方法，其概念、记号和运算形式更直观更简单，更容易学习掌握.

本书引入的“点几何”，力图用更简明更平常的方式、借助代数运算的形式来描述几何对象之间的关系. “点几何”保持了质点几何简易直观的好处，需要的预备知识更少，对运算条件的限制更少，但适用的范围更为广泛.

1.2 点加点和数乘点

以下用大写拉丁字母表示点，小写希腊字母或拉丁字母表示实数.

初中就讲了数轴，进一步讲了直角坐标系，把点和数或数组对应起来. 这时自然出现一个问题：数能够相加，点能相加吗？

在数轴上，若 $A=2$，$B=5$，$C=7$，能不能说 $A+B=C$ 呢？

初看好像没错，细想有问题：如果把原点向右移动一个单位，则 $A=1$，$B=4$，$C=6$，这时 $A+B=C$ 就不成立了.

但如果 $A=2$，$B=4$，$C=6$，则有等式 $A-B=B-C$，即 $A+C=2B$. 对这种情形，无论如何移动原点，总有 $A+C=2B$—— 这个等式描述了"B 是线段 AC 中点" 的几何事实，它与坐标无关.

一般说来，把点的坐标之间的线性等式关系表示为点之间的同样关系时，所得到的等式有两类：一类在坐标变换下保持不变，另一类则会改变. 显然，在坐标变换下保持不变的等式，其特点是等式两端系数之和相等. 在质点几何或点量的研究中，只讨论这类等式关系.

但是，当 $A=2$，$B=5$，$C=7$，等式 $A+B=C$ 毕竟描述了一个数学事实，如果在讨论问题的过程中不改变原点，它总是对的.

进一步思考，等式 $A+B=C$ 实际上描述了包括原点 O 在内的 4 个点之间的几何关系，即 $A+B=C+O$，其几何意义是"两线段 AB、OC 中点重合". 质点几何认为它的缺点是依赖原点，不是坐标变换下的不变式，因而不承认它也不讨论它.

如果从另一个角度看，等式 $A+B=C$ 用 3 个字母描述了 4 个点之间的关系，是不是也有可资利用的以简御繁的优点呢？

部分地基于上述思考，引入平面点几何的下列基本运算：

【定义 1】点加点：若 $A=(x_A,\ y_A)$，$B=(x_B,\ y_B)$，而 $C=(x_A+x_B,\ y_A+y_B)$，则记为 $A+B=C$.

【定义 2】数乘点：若 $A=(x,\ y)$，而 $B=(\lambda x,\ \lambda y)$，则记为 $B=\lambda A$.

显然，上述运算依赖于坐标原点 O 的选择. 这里本质上没有新概念，不过是给点的坐标之间的计算约定了简单的记录表示方法. 用 A 表示 $(x_A,\ y_A)$，其好处不仅在于点的书写工作量仅仅是坐标书写工作量的七分之一，而且视觉方面的简化更有利于几何直观和逻辑思考.

显然，这两条运算满足的诸运算律可以继承实数运算律的有关部分. 对于 3 维和更高维空间，其推广是平凡的.

由上述约定的记号，可马上推出如下的基本运算式的几何意义：

【性质 1】若 $B=\lambda A$，则 O、A、B 共线，且 $\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}$.

【性质 2】若 $A+B=\lambda P$，则当 λ 取不同的值时，点 P 有不同的位置，如图 1-2-1 所示：

(1) 若 $A+B=C$，则 $AOBC$ 为平行四边形；

(2) 若 $A+B=2M$，则 M 为 AB 中点；

(3) 若 $A+B=3P$，则 P 为 $\triangle OAB$ 之重心.

【注】在质点几何中，只有 $A+B=2M$ 一种可能.

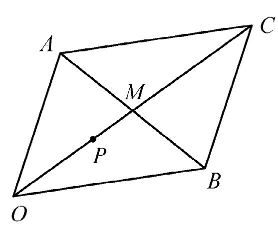

图 1-2-1

【性质 3】两点差为向量,即 $B-A=tP=\overrightarrow{AB}$.

当 $t=1$ 时,$OABP$ 为平行四边形.

【性质 4】两点线性组合 $uA+vB=tP$ 的意义:

(1) 当 $t=u+v$ 时,令 $uA+vB=(u+v)F$,可改写成 $u(A-F)=v(F-B)$,可见此时 F 在直线 AB 上,且$\dfrac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\dfrac{v}{u}$,其几何意义与质点几何中相同;

(2) 一般说来,P 是直线 OF 上的点.

【注】尽管等式 $uA+vB=(u+v)F$ 所描述的几何事实与质点几何中相同,但 uA、vB 和 $(u+v)F$ 等项在这里的意义和质点几何中却不一样:在质点几何中,当 $u\neq 1$ 时,uA 和 A 是位置相同但被赋予了不同质量的点;而在点几何中,若 $u\neq 1$ 且 A 非原点时,它们是位置不同的两个点.

例如,等式 $2A+3B=5F$ 的几何意义如图 1-2-2 所示,图中 $C=2A$, $D=3B$,且 $E=5F$,而 $OCED$ 是平行四边形. 也可以说,若在平行四边形 $CODE$ 中,连结 CO 的中点 A 和 OD 的三分点 B 的线段 AB 与对角线 OE 交于 F,则 $OE=5OF$,且 $2AF=3FB$. 可见,同一个等式在点几何中的几何意义更为丰富.

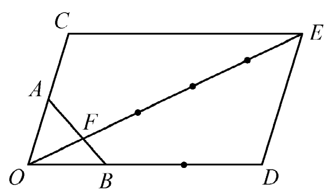

图 1-2-2

【性质 5】两线相交 $uA+vB=rC+sD$ 的表示:

(1) 当 $u+v=r+s\neq 0$ 时,令

$$(u+v)F=uA+vB=rC+sD=(r+s)G,$$

则等式表示 $F=G$ 为直线 AB、CD 之交点(这和质点几何一样);

(2) 一般情形表示 O、G、F 共线;

(3) 特别地,若 D 为原点,AB、CD 交于 F 可表示为 $(u+v)F=uA+vB=rC$,这里 r 可以是任意非零实数.

点几何的好处在于,用含义简明的少量符号比较忠实地描绘几何事实,从而减少人的思维劳动. 对此,下面的例子可见一斑.

例 1 求证:三角形 ABC 的三条中线 AM、BN、CP 共点(图 1-2-3).

证明 取 A 为原点,令 G 为 BN、CP 交点,由条件得 $B=2P$, $C=2N$,则

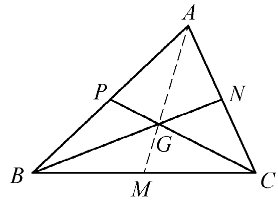

图 1-2-3

$$2M=B+C=2P+C=2N+B=3G,$$

此式表明 G 在 AM 上，且 $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AM}$.

例 2　设平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 中点为 M，连 DM 交对角线 AC 于 P. 求证：$AC=3AP$（图 1-2-4）.

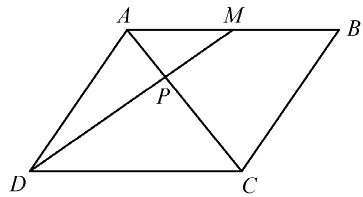

图 1-2-4

证明　取 A 为原点，由条件得 $2M=B=C-D$，即 $C=2M+D=3P$，故 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AP}$.

上述解法容易转化为向量方法：由 $2M=B=C-D$ 知 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，即 $2(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM})=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PC}$，根据平面向量基本定理，得 $2\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PC}$，即 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AP}$.

例 3　如图 1-2-5，已知 $AC=3AP$，$3AB=5AQ$，求 $\dfrac{PD}{BD}$，$\dfrac{QD}{CD}$，$\dfrac{PQ}{RQ}$，$\dfrac{BR}{CR}$ 的值.

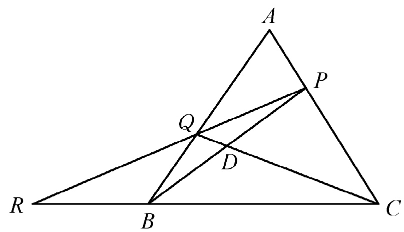

图 1-2-5

解　取 A 为原点，由条件得 $C=3P$ 和 $5Q=3B$.

两式相加得 $C+5Q=3P+3B=6D$，可得 $\dfrac{\overrightarrow{PD}}{\overrightarrow{DB}}=1$，$\dfrac{\overrightarrow{QD}}{\overrightarrow{DC}}=\dfrac{1}{5}$.

两式换位相减得 $3B-C=5Q-3P=2R$，可得 $\dfrac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{CR}}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{QR}}=\dfrac{5}{3}$，即 $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{QR}}=\dfrac{2}{3}$.

1.3　点的数量积

通常，积是乘的结果，而乘法是指对加法有分配律的运算. 对点几何中的加法而言，有分配律的运算不止一个，最基本的是内积.

【定义 3】数量积：若在笛卡尔坐标系中，$A=(x,\ y)$，$B=(u,\ v)$，则定义

$$A\cdot B=ux+vy.$$

可见两点的数量积是与坐标原点有关的一个实数.

根据点的数量积定义，显然有

【性质 6】 $A \cdot B = B \cdot A$，且数量积对加法有分配律.

容易验证

【性质 7】 $(A-B)\cdot(C-D)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

记 $A^2=A\cdot A$，则 $(A-B)^2=|AB|^2$，而 A^2 为点 A 到原点距离的平方.

当 A 和 B 都不是原点时，$A\cdot B=0$ 表示 $\angle AOB$ 为直角；$(A-B)\cdot(C-D)=0$ 表示 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$.

例 1 求证：三角形 ABC 的三条高线 AD、BE、CF 共点.

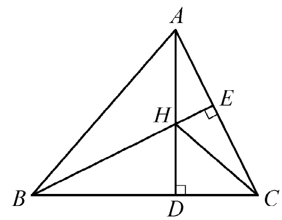

图 1-3-1

证明 如图 1-3-1，取 AD、BE 交点 H 为原点，则已知条件为 $(B-C)\cdot A=0$，$(A-C)\cdot B=0$，两式相减得 $(B-A)\cdot C=0$，即证明了 $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$.

例 2 已知 $\triangle ABC$ 三边 a、b、c，求中线 AD 和角平分线 AE.

解 (1) 求中线 AD：取 A 为原点，则中线 AD 的平方即 D^2.

由 $B+C=2D$ 平方得 $B^2+C^2+2B\cdot C=4D^2$.

为消去 $B\cdot C$ 项，利用等式 $(B+C)^2-(B-C)^2=4B\cdot C$，即

$$2B\cdot C=\frac{(B+C)^2}{2}-\frac{(B-C)^2}{2}=2D^2-\frac{a^2}{2},$$

代入前式，得 $c^2+b^2+2D^2-\frac{a^2}{2}=4D^2$，解得

$$|AD|=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}.$$

(2) 求角平分线 AE：取 A 为原点，则角平分线 AE 的平方即 E^2.

由 $\frac{|BE|}{|CE|}=\frac{c}{b}$，有 $cC+bB=(b+c)E$，平方得

$$c^2C^2+b^2B^2+2bcB\cdot C=(b+c)^2E^2.$$

为消去 $B\cdot C$ 项，利用前面关于中线的等式有

$$2B\cdot C=\frac{(B+C)^2}{2}-\frac{(B-C)^2}{2}=2D^2-\frac{a^2}{2}=b^2+c^2-a^2,$$

代入前式，得 $2b^2c^2+bc(b^2+c^2-a^2)=(b+c)^2E^2$，解得

$$|AE|=\sqrt{bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}.$$

例 3 求证:分别过三角形的三顶点且垂直于连结对边中点与垂心的连线的直线交对边所得的三点共线,且该线与欧拉线垂直.

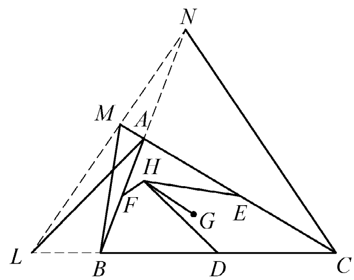

图 1-3-2

解 如图 1-3-2,取$\triangle ABC$ 的垂心 H 为原点,则

$$A\cdot(B-C)=B\cdot(A-C)=C\cdot(A-B)=0,$$

记$\triangle ABC$ 的重心为 G,三边 BC、CA、AB 中点顺次为 D、E、F. 则

$$A+B+C=3G,\ B+C=2D,\ C+A=2E,\ A+B=2F;$$

L 在 BC 上,满足条件 $AL\perp DH$, M 在 AC 上,满足条件 $BM\perp EH$,即:

$$L=uB+(1-u)C,\ M=vA+(1-v)C,$$
$$(A-L)\cdot D=0,\ (B-M)\cdot E=0.$$

只要证明 $ML\perp GH$,即$(M-L)\cdot G=0$ 即可.

由 $(A-L)\cdot D=0$ 得

$$\begin{aligned}0&=(A-uB-(1-u)C)\cdot(B+C)\\&=(A-C-u(B-C))\cdot(B+C)\\&=(A-C)\cdot C-u(B-C)\cdot(3G-A)\\&=(A-C)\cdot C-3u(B-C)\cdot G.\text{(消去了 }D\text{)}\end{aligned}$$

同理由 $(B-M)\cdot E=0$ 得

$$\begin{aligned}0&=(B-vA-(1-v)C)\cdot(A+C)\\&=(B-C)\cdot C-3v(A-C)\cdot G,\text{(消去了 }E\text{)}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}3(M-L)\cdot G&=3(v(A-C)-u(B-C))\cdot G\\&=(B-C)\cdot C-(A-C)\cdot C\\&=(B-A)\cdot C=0.\end{aligned}$$

证毕.

说明:此处使用计算方法过程较长,参看 4.2 节例 28 的简证.

1.4 点的外积

1.4.1 两点的外积

【定义 4】两点的外积：约定两点 A、B 的**外积**为 $AB=B-A$.

可见两点的**外积**就是两点之差，也就是个向量.

这似乎有点奇怪，为何把差叫做积？难道仅仅是为了节省一个减号？

进一步探讨两点**外积**的运算规律，就会发现这样定义的好处.

根据定义，显然有

【性质 8】 $AB=-BA$.

【性质 9】若 $uA+vB=(u+v)C$，则有

$$uAP+vBP=(u+v)CP,$$
$$uPA+vPB=(u+v)PC.$$

这两个等式的正确性可以按定义展开验证.

这可以看作是外积对加法的分配律. 按此规律，等式 $uA+vB=(u+v)C$ 两端同用 B 做外积，则得 $uAB=(u+v)CB$；同用 C 做外积，则得 $uAC+vBC=0$，即 $uAC=vCB$.

但是一般来说，当等式两端系数之和不等时，分配律不一定成立，而要添加一个修正项.

【性质 10】若 $uA+vB=rC$，因原点 O 坐标为零，故 $uA+vB=rC+(u+v-r)O$，这时可以用分配律，注意到 $P=OP=-PO$，得

$$uAP+vBP=rCP+(u+v-r)P,$$
$$uPA+vPB=rPC-(u+v-r)P.$$

这两个等式的正确性也可以按定义展开验证.

这也可以看作是外积对加法的分配律的推广：当 $u+v=r$ 时，得到性质 9；作为特款，还可得：

(1) 若 $A=rC$，则 $AP=rCP+(1-r)P$ 且 $PA=rPC-(1-r)P$；

(2) 若 $uA=rC$，则 $uAP=rCP+(u-r)P$ 且 $uPA=rPC-(u-r)P$.

【注】上述运算律可以推广到多项之和的情形，仍用下列思路处理：两端系数和相等时直接使用分配律，否者加上一个原点项平衡两端系数之和，再

用分配律.

例1 设 $ABCD$ 为平行四边形，E 为其对角线交点，P 为任意一点. 已知 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$，求 $\overrightarrow{PD}$、$\overrightarrow{PE}$.

解 取 B 为原点，则由条件得 $A+C=2E=D$. 于是，

$$PA+PC=2PE=PD-P,$$

即 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{BP}$. 下略.

1.4.2 三点的外积

【定义5】三点的外积: 三点 A、B、C 的外积，记作 ABC，它就是 $\triangle ABC$ 的带号面积.

具体地，若 $A=(x_A,\ y_A)$，$B=(x_B,\ y_B)$，$C=(x_C,\ y_C)$，则

$$ABC=\frac{1}{2}(x_Ay_B+x_By_C+x_Cy_A-x_Ay_C-x_By_A-x_Cy_B).$$

由定义，不难推得

【性质11】 $ABC=BCA=CAB=-ACB=-BAC=-CBA$.

其直观的几何意义是：在右手坐标系中，三角形三顶点 A、B、C 顺序为反时针方向则 $ABC>0$，否者 $ABC<0$；若 A、B、C 共线则 $ABC=0$.

【性质12】 若 $uA+vB=(u+v)C$，则有 $uAPQ+vBPQ=(u+v)CPQ$；因而易知，

$$uPAQ+vPBQ=(u+v)PCQ,$$
$$uPQA+vPQB=(u+v)PQC.$$

等式的正确性可以直接验证. 也就是说，当等式两端系数之和相等时，三点外积满足分配律.

如前所述，当 $u+v=r+s\neq 0$ 时，等式 $(u+v)F=uA+vB=rC+sD$ 表示 F 为直线 AB、CD 的交点. 同用 CD 做外积得 $uACD+vBCD=0$，即 $\frac{ACD}{BCD}=-\frac{v}{u}=\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}}$，这就是共边定理.

【注】 当问题中涉及较多可变参数时，使用共边定理有助于减少参数个数，简化计算，详见后面例3的证法3.

【性质13】 若 $uA+vB=rC$，原点为 O，则有

$$uAPQ+vBPQ=rCPQ+(u+v-r)OPQ.$$

也就是说,等式两端系数之和不相等时,可以加上一个原点项平衡两端系数之和,再用分配律.一个有用的特款是:若原点在直线 PQ 上,则附加的配平项为 0,相当于分配律成立.

例 2 在 $\triangle ABC$ 的三边上分别取点 P、Q、R 使 $BP=PC$, $CQ=2QA$, $AR=3RB$.三线 AP、BQ、CR 构成 $\triangle LMN$,如图 1-4-1 所示,求 $\frac{S_{\triangle LMN}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值.

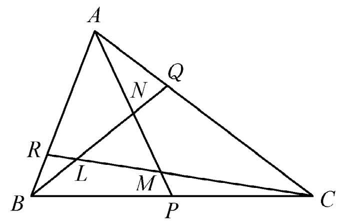

图 1-4-1

解 取 A 为原点,则由条件得

$$B+C=2P, \quad ①$$

$$C=3Q, \quad ②$$

$$3B=4R. \quad ③$$

②代入①得 $2P=B+3Q=4N$,③代入①得 $6P=4R+3C=7M$,③×2 换位加②得

$$C+8R=3Q+6B=9L,$$

将 L、M、N 表为 A、B、C 的组合并配平系数得

$$9L=3Q+6B=C+6B=2A+6B+C,$$
$$7M=4R+3C=3B+3C=A+3B+3C,$$
$$4N=B+3Q=B+C=2A+B+C.$$

将三式作外积并略去零值项,得

$$\begin{aligned}252LMN&=6ABC+6ACB+6BAC+36BCA+CAB+6CBA\\&=25ABC,\end{aligned}$$

所以
$$\frac{S_{\triangle LMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{25}{252}.$$

例 3 (Pappus 定理)设 A、B、C 共线,D、E、F 共线,直线 AE、BD 交于 P, AF、CD 交于 Q, CE、BF 交于 R,则 P、Q、R 共线,如图 1-4-2.

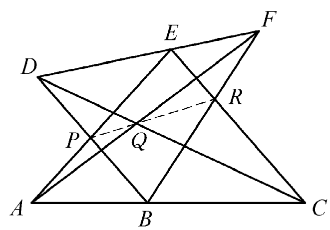

图 1-4-2

证法 1 取 P 为原点,设

$$E=uA,\ B=vD, \quad ①$$

$$rA+(1-r)B=C, \quad ②$$

$$sD+(1-s)E=F. \quad ③$$

为得到交点 Q 和 R 的表示，取待定参数 t 和 x，作②×t+③得：

$$trA+t(1-r)B+sD+(1-s)E=tC+F; \quad ④$$

作②×x+③得：

$$xrA+x(1-r)B+sD+(1-s)E=xC+F; \quad ⑤$$

用①，在④中消去 B 和 E，在⑤中消去 A 和 D，分别得

$$trA+tv(1-r)D+sD+u(1-s)A=tC+F; \quad ⑥$$

$$\frac{xr}{u}E+x(1-r)B+\frac{s}{v}B+(1-s)E=xC+F; \quad ⑦$$

改写⑥和⑦分别获得 Q 和 R 的表示：

$$\begin{aligned}(tr+u(1-s))A-F&=tC-(tv(1-r)+s)D\\&=(tr+u(1-s)-1)Q;\end{aligned} \quad ⑧$$

$$\begin{aligned}v(xr+u-us)E-xuvC&=uvF-u(xv(1-r)+s)B\\&=v(xr+u-us-xu)R;\end{aligned} \quad ⑨$$

这里应有 $tr+u(1-s)-1=t-(tv(1-r)+s)$，解得

$$t=\frac{(1-s)(1-u)}{(v-1)(1-r)};$$

同理，应有 $v(xr+u-us)-xuv=uv-u(xv(1-r)+s)$，解得

$$x=\frac{us(v-1)}{vr(1-u)}.$$

用①②③将⑧和⑨的左端分别都表成 A 和 D 的组合得：

$$u^2(1-s)A-xuv(1-r)D=(xr+u-us-xu)R; \quad ⑩$$

$$trA-sD=(tr+u(1-s)-1)Q; \quad ⑪$$

容易验算 $\dfrac{u^2(1-s)}{tr}=\dfrac{u^2(v-1)(1-r)}{r(1-u)}=\dfrac{xuv(1-r)}{s}$，即 Q、R 和原点 P 共线.

证法 2 取 P 为原点，设

$$E=uA,\ B=vD, \tag{①}$$

$$rA+(u-1)B=(r+u-1)C, \tag{②}$$

$$mD+(1-v)E=(m+1-v)F \tag{③}$$

（这样设置是经过试算后，知道进一步计算能够实现系数平衡）.

作②+③并用①消去 B、E 得：

$$rA+(u-1)vD+mD+(1-v)uA=(r+u-1)C+(m+1-v)F; \tag{④}$$

整理重组得到交点 Q 的表示：

$$\begin{aligned}&(r+u-uv)A+(v-m-1)F\\&=(r+u-1)C+(v-uv-m)D\\&=(r+u+v-m-uv-1)Q;\end{aligned} \tag{⑤}$$

用①③将⑤中的 A 替换为 B、F，用①②将⑤中的 D 替换为 C、E 得：

$$\begin{aligned}&\frac{rv(m+1-v)F-(rm+um-uvm)B}{uv(1-v)}\\&=\frac{(rvu-rv+mr)E-mu(r+u-1)C}{uv(u-1)}\\&=(r+u+v-m-uv-1)Q;\end{aligned} \tag{⑥}$$

注意到⑥的左端和中部系数和相等：

$$\begin{aligned}&\frac{rv(m+1-v)-(rm+um-uvm)}{uv(1-v)}\\&=\frac{(rvu-rv+mr)-mu(r+u-1)}{uv(u-1)}\\&=\frac{rv-m(r+u)}{uv},\end{aligned}$$

故⑥给出了 BF、CD 的交点 R 的表示，即得

$$\frac{rv-m(r+u)}{uv}R=(r+u+v-m-uv-1)Q,$$

这表明 Q、R 和原点 P 三点共线.

【**注**】上述证法 1 是常规方法，较繁；证法 2 略用技巧，简单些，但很难看出其几何意义. 若使用面积计算，则可得较为简洁且直观的证法.

证法 3 取 P 为原点,设 $E=uA$, $B=vD$.

为证明直线 QR 过点 P,只要证明 $\frac{ERQ}{ARQ}=\frac{EP}{AP}=u$. 注意到

$$ERQ=\frac{ERQ}{ECQ}\cdot\frac{ECQ}{ECD}\cdot ECD=\frac{ER}{EC}\cdot\frac{CQ}{CD}\cdot ECD$$

$$=\frac{EBF}{EBF+BCF}\cdot\frac{ACF}{ACF+AFD}\cdot ECD.$$

$$ARQ=\frac{ARQ}{ARF}\cdot\frac{ARF}{ABF}\cdot ABF=\frac{AQ}{AF}\cdot\frac{RF}{BF}\cdot ABF$$

$$=\frac{ACD}{ACD+DCF}\cdot\frac{CFE}{BCE+CFE}\cdot ABF.$$

注意到 $EBF+BCF=BCE+CFE$ 和 $ACF+AFD=ACD+DCF$,相比得

$$\frac{ERQ}{ARQ}=\frac{ECD}{CFE}\cdot\frac{ACF}{ABF}\cdot\frac{EBF}{ACD}=\frac{DE}{FE}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{EBF}{ACD}.$$

再用 $EBF=\frac{EF}{ED}EBD$, $ACD=\frac{AC}{AB}ABD$ 代入得

$$\frac{ERQ}{ARQ}=\frac{EBD}{ABD}=\frac{EP}{AP}=u.$$

证毕.

【注】这样处理基本上不用参数计算.

1.5 复数乘点

用复数与点相乘有助简化涉及角度的问题.

【定义 6】虚数 i 乘点:若在笛卡尔坐标系中 $A=(x, y)$,则定义 $\mathrm{i}A=(-y, x)$,此处字母 i 为保留专用符号.

从几何上看,$\mathrm{i}A$ 是 A 反时针旋转 $90°$得到的点. 显然有:

【性质 14】 $\mathrm{i}(\mathrm{i}A)=-A$.

做内积时有:

【性质 15】 $\mathrm{i}A\cdot A=0$.

【性质 16】当 $B=(u, v)$ 时,有

$$\mathrm{i}A \cdot B=(-y,\ x)\cdot(u,\ v)=vx-uy=-A\cdot \mathrm{i}B.$$

【定义 7】复数乘点:若在笛卡尔坐标系中 $A=(x,\ y)$ 而复数 $\alpha=u+v\mathrm{i}$，则定义 $\alpha A=uA+\mathrm{i}(vA)$，显然有 $\alpha A=uA+v(\mathrm{i}A)$.

在平面上取定了笛卡尔坐标系，可以建立点到复数集的一一对应. 具体地，若 $A=(x,\ y)$，则令 $f(A)=x+y\mathrm{i}$，而其逆映射为 $p(x+y\mathrm{i})=(x,\ y)=A$，于是有 $p(f(A))=A$ 和 $f(p(x+y\mathrm{i}))=x+y\mathrm{i}$. 这样把平面上的点与复数对应后，容易检验上面定义的点与复数的乘法与复数之间的乘法是一致的. 也就是说，若在笛卡尔坐标系中 $A=(x,\ y)$ 而复数 $\alpha=u+v\mathrm{i}$，则必有 $\alpha A=p(\alpha f(A))$.

事实上，按复数乘点的定义有

$$\alpha A=uA+v(\mathrm{i}A)=(ux,\ uy)+v(-y,\ x)=(ux-vy,\ uy+vx);$$

而将点 $A=(x,\ y)$ 写成复数与 $\alpha=u+v\mathrm{i}$ 相乘后再化为坐标，则为

$$\begin{aligned}p(\alpha f(A))&=p((u+v\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}))\\&=p(ux-vy+(uy+vx)\mathrm{i})\\&=(ux-vy,\ uy+vx),\end{aligned}$$

两者结果相等. 由此可得：

【性质 17】复数乘点的几何意义:若在笛卡尔坐标系中，$A=(x,\ y)$ 而复数 $\alpha=u+v\mathrm{i}$. 记 $r=|\alpha|=\sqrt{u^2+v^2}$ 且 θ 为 $\alpha=u+v\mathrm{i}$ 的幅角主值，即满足 $\alpha=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta$ 且 $0\leqslant\theta<2\pi$，则按复数乘法的几何意义，将点 rA 绕原点反时针旋转 θ 弧度即得 αA.

通常记 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则 $A=(x,\ y)$ 绕原点反时针旋转 θ 弧度得到的点可简单地记作 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A$，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ y\cos\theta+x\sin\theta)$.

一般地，容易验证

【性质 18】A 绕点 B 反时针旋转 θ 弧度得到的点为 $B+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(A-B)$.

【性质 19】复数乘点的运算法则: $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$，$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$，$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$（$\alpha$、$\beta$ 为复数）.

【性质 20】复数乘点的 ASA 公式:若已知三角形一边 AB 及两夹角 $\alpha=\angle CAB$ 和 $\beta=\angle CBA$，当三顶点 A-B-C 呈反时针旋转方向时有下列 ASA 公式：

$$C=A+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}(B-A)=A+\frac{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta}}{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(\alpha+\beta)}}(B-A).$$

事实上，一方面，

$$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}=\frac{e^{-i\alpha}(1-e^{-2i\beta})}{1-e^{-2i(\alpha+\beta)}};$$

另一方面，$C-A=\dfrac{|AC|\cdot e^{i\alpha}(B-A)}{|AB|}$，消去$\dfrac{|AC|}{|AB|}$后整理即得.

下面利用 ASA 公式证明莫勒定理.

例 1 （莫勒定理）在$\triangle ABC$中，P、Q、R分别为三内角中两角的三分线的交点，如图 1-5-2 所示，则$\triangle PQR$为正三角形.

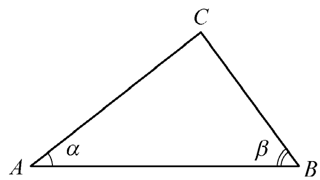

图 1-5-1

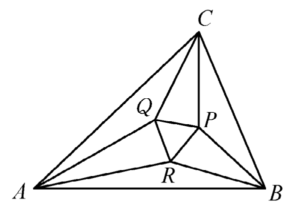

图 1-5-2

证法 1 要证结论为 $e^{\frac{i\pi}{3}}(Q-P)=R-P$，即

$$e^{\frac{i\pi}{3}}Q-R=(e^{\frac{i\pi}{3}}-1)P.$$

记 $e^{\frac{i\pi}{3}}=\omega$，则 $\omega^3=-1$，$\omega^2=-\dfrac{1}{\omega}=\omega-1$；要证的等式为

$$\omega Q-R=\omega^2P.$$

设α、β、γ分别是$\triangle ABC$的各角的三分之一. 不妨取A为原点，简记 $e^{-2i\alpha}=u$，$e^{-2i\beta}=v$，由上面的 ASA 公式得

$$R=\frac{1-e^{-2i\beta}}{1-e^{-2i(\alpha+\beta)}}B=\frac{1-v}{1-uv}B,$$

$$C=\frac{1-v^3}{1-u^3v^3}B,$$

$$C=\frac{1-e^{-2i(\pi-\alpha-\gamma)}}{1-e^{-2i(\pi-\gamma)}}Q=\frac{1-e^{2i\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}}{1-e^{2i\left(\frac{\pi}{3}-\alpha-\beta\right)}}Q=\frac{1-\omega^2v}{1-\omega^2uv}Q,$$

$$P=B+\frac{1-e^{-2i\gamma}}{1-e^{-2i(\gamma+\beta)}}(C-B),$$

则

$$Q=\frac{1-\omega^2uv}{1-\omega^2v}C=\frac{(1-\omega^2uv)(1-v^3)}{(1-\omega^2v)(1-u^3v^3)}B,$$

$$C-B=\left(\frac{1-v^3}{1-u^3v^3}-1\right)B=\frac{v^3(u^3-1)}{1-u^3v^3}B,$$

$$\begin{aligned}P&=\left(1+\frac{v^3(1-\omega^{-2}u^{-1}v^{-1})(u^3-1)}{(1-\omega^{-2}u^{-1})(1-u^3v^3)}\right)B\\&=\left(1+\frac{v^2(\omega^2uv-1)(u^3-1)}{(\omega^2u-1)(1-u^3v^3)}\right)B.\end{aligned}$$

代入要证明的等式两端得

$$\omega Q-R=\left(\frac{(\omega+uv)(1-v^3)}{(1-\omega^2v)(1-u^3v^3)}-\frac{1-v}{1-uv}\right)B,$$

$$\omega^2P=\left(\omega^2+\frac{\omega v^2(uv+\omega)(1-u^3)}{(\omega^2u-1)(1-u^3v^3)}\right)B.$$

整理后,要证明的等式即为

$$\begin{aligned}&((\omega+uv)(1-v^3)-(1-v)(1-\omega^2v)(1+uv+u^2v^2))(\omega^2u-1)\\=&(-\omega(u+\omega)(1-u^3v^3)+\omega v^2(uv+\omega)(1-u^3))(1-\omega^2v).\end{aligned}$$

两端展开,用关系式 $\omega^3=-1$ 和 $\omega^2=\omega-1$ 消去 ω 的高次项后结果都是

$$\begin{aligned}&\omega(u^3v^4-u^3v^2+uv^3-u+v^3+v^2-v-1)\\&-u^3v^3+u^3v^2+uv^4-uv-v^2+1,\end{aligned}$$

结论获证.

【注】上述证法是直接计算. 用同一法,计算要简单一些.

证法 2 用同一法. 设$\triangle PQR$ 为正三角形;若能构造出$\triangle ABC$,使得 P、Q、R 分别为三内角中两角的三分线的交点如图 1-5-1,则命题真.

取 R 为原点,则 $Q=e^{\frac{i\pi}{3}}P=\omega P$;令

$$\angle BRP=\angle CQP=\frac{\pi}{3}+\alpha,$$

$$\angle ARQ=\angle CPQ=\frac{\pi}{3}+\beta,$$

$$\angle AQR=\angle BPR=\frac{\pi}{3}+\gamma,$$

且 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{3}$,则有

$\angle RAQ=\alpha$，$\angle PBR=\beta$，$\angle PCQ=\gamma$，$\angle ARB=\pi-\alpha-\beta$.

要证明

$$\angle RAB=\angle QAC=\alpha,$$
$$\angle RBA=\angle PBC=\beta,$$
$$\angle PCB=\angle QCA=\gamma.$$

只要证明 $\angle RAB=\alpha$ 和 $\angle RBA=\beta$ 即可,其他同理.

由 ASA 公式得

$$A=R+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}{\sin\alpha}(Q-R)$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}{\sin\alpha}Q,$$
$$B=R+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}{\sin\beta}(P-R)$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}{\sin\beta}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}Q$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}{\sin\beta}Q;$$

要证明的结论可写作 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\alpha-\beta)}A=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}B$,即

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\alpha-\beta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}{\sin\alpha}Q=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}{\sin\beta}Q.$$

整理化简后成为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$,显然成立.

1.6 结　　语

本章先后介绍了点加点、数乘点、点的数量积、点的外积及复数乘点等点几何中的基本概念,导出了近 20 条有关点运算的基本性质或基本公式,这些构成了点几何的基本纲要. 相关的定义、性质、公式和具体解题实例说明,点

几何不仅符合数学直观，能更方便地表达基本几何事实，而且有助于几何推理的简捷化.

限于篇幅以及考虑中学教学大纲和竞赛的范围，本书后续章节只会针对部分性质展开论述.

2 计算方法

2.1 计算交点和几何构造

几何题能否像代数题一样，按部就班的操作？

基于点几何，我们提出两种方案. 方案一就是本章，思路是将一个个点求出来，再考虑几何关系. 与解析法相比，无需将点转化为坐标，只需求出点与点之间的关系，这样一来，点几何计算要相对简明，几何意义也更明确. 方案二则是后续章节，思路是基于点几何，表示出已知条件和结论，并建立恒等式获得已知条件和结论之间的关系.

对于直线 AB 上的点 P，用向量表示是 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$ 或 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}}{x+y}$（在线性代数中，称 $\overrightarrow{OP}$ 为 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的线性组合），这两者实质一样，$\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的系数和为1. 由于 P、A、B 三点的关系与原点 O 的位置无关，为简便，省写为 $P=tA+(1-t)B$ 或 $P=\dfrac{xA+yB}{x+y}$. 推而广之，不共线三点 A、B、C 确定一平面，平面上一点 $P=tA+sB+(1-t-s)C$ 或 $P=\dfrac{xA+yB+zC}{x+y+z}$. 点的加减法和向量加减法基本一致，设 O 为原点（记为 $O=0$），$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，简记为 $B-A$；向量的内积在省略原点后，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 简记为 $A\cdot B$，甚至省写为 AB（请根据上下文理解，切莫与线段混淆）. 看似简单的省写，好像并没有新的东西，但实践发现，有意想不到的功效.

如图 2-1-1，若设 $P=\dfrac{xA+yB+zC}{x+y+z}$，如何求 D、E、F？

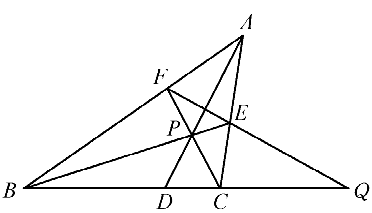

图 2-1-1

考虑到 D 是 AP 和 BC 的交点，就有 $(x+y+z)P-xA=yB+zC=(y+z)D$，

立刻得到 $D=\dfrac{yB+zC}{y+z}$；同理 $E=\dfrac{xA+zC}{x+z}$，$F=\dfrac{xA+yB}{x+y}$；

计算点 Q，介绍三种方法.

方法 1：设 $Q=tF+(1-t)E=sB+(1-s)C$，即

$$t\,\frac{xA+yB}{x+y}+(1-t)\,\frac{xA+zC}{x+z}=sB+(1-s)C,$$

解关于 A、B、C 系数方程组

$$\begin{cases} t\,\dfrac{x}{x+y}+(1-t)\,\dfrac{x}{x+z}=0, \\ t\,\dfrac{y}{x+y}=s, \\ (1-t)\,\dfrac{z}{x+z}=1-s, \end{cases}\quad \text{得}\begin{cases} t=\dfrac{x+y}{y-z}, \\ s=\dfrac{y}{y-z}, \end{cases}$$

$$Q=sB+(1-s)C=\frac{yB-zC}{y-z}.$$

方法 2：设 $Q=tF+(1-t)E$，即

$$\begin{aligned} &t\,\frac{xA+yB}{x+y}+(1-t)\,\frac{xA+zC}{x+z} \\ =&x\left(\frac{t}{x+y}+\frac{1-t}{x+z}\right)A+\frac{ty}{x+y}B+\frac{(1-t)z}{x+z}C, \end{aligned}$$

因为 Q 在 BC 上，所以 $x\left(\dfrac{t}{x+y}+\dfrac{1-t}{x+z}\right)=0$，解得 $t=\dfrac{x+y}{y-z}$，

$$Q=tF+(1-t)E=\frac{yB-zC}{y-z}.$$

方法 3：因为 Q 是 EF 和 BC 的交点，将等式 $(x+z)E=xA+zC$ 与 $(x+y)F=xA+yB$ 相减就得到

$$(x+z)E-(x+y)F=zC-yB=(z-y)Q,$$

从而 $Q=\dfrac{zC-yB}{z-y}$.

E、F 原本用 A、B、C 来表示，而证法 3 轻松消去 A，得到 BC 和 EF 的交点 Q，这种技巧很重要. 方法 2 只需设一个参数 t，解一个方程，显然比方法 1 简便. 但方法 1 是求交点的通法，也需要掌握.

有了上面点的坐标，就可轻松做很多事情.

证明塞瓦定理：$\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|}\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{z}{y}\frac{x}{z}\frac{y}{x}=1$.

证明梅涅劳斯定理：$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BQ|}{|QC|}\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{y}{x}\frac{z}{y}\frac{x}{z}=1$.

证明射影定理性质：$\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|BQ|}{|CQ|}=\frac{z}{y}$.

将等式 $P=\frac{xA+yB+zC}{x+y+z}$ 与 AB 做外积得 $PAB=\frac{zCAB}{x+y+z}$，同理有 $PBC=\frac{xABC}{x+y+z}$ 和 $PCA=\frac{yBCA}{x+y+z}$，可见系数 $x:y:z=S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}$，三角形的五心以及一些巧合点就可以利用这一性质确定.

如图 2-1-1，下面证明：$S_{\triangle BPC}\overrightarrow{PA}+S_{\triangle CPA}\overrightarrow{PB}+S_{\triangle APB}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

为此，只要注意到

$$\begin{aligned}&x(A-P)+y(B-P)+z(C-P)\\&=xA+yB+zC-(x+y+z)P=0,\end{aligned}$$

所以 $$S_{\triangle BPC}(A-P)+S_{\triangle CPA}(B-P)+S_{\triangle APB}(C-P)=0,$$

即

$$S_{\triangle BPC}\overrightarrow{PA}+S_{\triangle CPA}\overrightarrow{PB}+S_{\triangle APB}\overrightarrow{PC}=\vec{0}.$$

还有结论：

$$P=\frac{S_{\triangle BPC}A+S_{\triangle CPA}B+S_{\triangle APB}C}{S_{\triangle BPC}+S_{\triangle CPA}+S_{\triangle APB}}.$$

也可使用向量法和面积法来证明：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\frac{AP}{AD}\overrightarrow{AD}=\frac{AP}{AD}\frac{DC}{BC}\overrightarrow{AB}+\frac{AP}{AD}\frac{BD}{BC}\overrightarrow{AC}.\\&=\frac{S_{\triangle CPA}}{S_{\triangle ACD}}\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}\overrightarrow{AB}+\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABD}}\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{S_{\triangle CPA}}{S_{\triangle ABC}}\overrightarrow{AB}+\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{S_{\triangle CPA}}{S_{\triangle ABC}}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}),\end{aligned}$$

所以

$$S_{\triangle BPC}\overrightarrow{PA}+S_{\triangle CPA}\overrightarrow{PB}+S_{\triangle APB}\overrightarrow{PC}=\vec{0}.$$

容易推得以下性质：

(1) 若点 P 为重心，则

$$S_{\triangle BPC}=S_{\triangle CPA}=S_{\triangle APB}, \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}, P=\frac{A+B+C}{3}.$$

(2) 若点 P 为内心，则 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，或写作

$$(\sin A)\overrightarrow{PA}+(\sin B)\overrightarrow{PB}+(\sin C)\overrightarrow{PC}=\vec{0},$$

$$P=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}.$$

(3) 若点 P 为点 A 所对旁心，则

$$-a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}, P=\frac{-aA+bB+cC}{-a+b+c}.$$

(4) 若点 P 为外心，则

$$\overrightarrow{PA}\sin 2A+\overrightarrow{PB}\sin 2B+\overrightarrow{PC}\sin 2C=\vec{0},$$

$$P=\frac{\sin 2A\cdot A+\sin 2B\cdot B+\sin 2C\cdot C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}.$$

(5) 若点 P 为非直角三角形垂心，则

$$\overrightarrow{PA}\tan A+\overrightarrow{PB}\tan B+\overrightarrow{PC}\tan C=\vec{0},$$

$$P=\frac{\tan A\cdot A+\tan B\cdot B+\tan C\cdot C}{\tan A+\tan B+\tan C}.$$

直线 AD 上的任意点 $K=kA+(1-k)\dfrac{yB+zC}{y+z}$，不管 k 如何变化，K 在哪个位置，B 和 C 的系数比总是定值 $y:z$，可联想共边定理：$\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{|S_{\triangle AKB}|}{|S_{\triangle AKC}|}$.

千百年的几何研究，尺规作图的研究取得了丰富的成果，人们发现相当多的看似千变万化的几何图形，都可以由少量的几何基本构图组合而成. 反其道而行之，也可将复杂图形分解，从而化繁为简. 最基本的几何构造包括作线段的定比分点、过某点作某直线的垂线，作某线段等于已知线段等. 除此之外，为解题方便，也可对最原始的几何基本构造作一些扩充，建立高一层次的几何构造，譬如已知三点构造平行四边形，则是由两次构造平行直线、一次构造直线交点组合而成. 下表给出一些基本构造. 也可根据需要进一步添加.

点几何表达式	几何意义
$(A-B)^2=(C-D)^2$	线段相等:$AB=CD$
$(A-B)^2=(A-C)^2$,或$\left(A-\frac{B+C}{2}\right)(B-C)=0$	线段相等:$AB=AC$
$C=tA+(1-t)B$	C 是直线 AB 上的点,$\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BA}$
隐性表示 $2C-A-B=0$,显性表示 $C=\frac{A+B}{2}$	C 是 AB 中点
$(A-B)(C-D)=0$	$AB\perp CD$
$C-D=t(A-B)$	作点 D,使得 $CD\,/\!/\,AB$
$OA^2=OB^2$(等价于$\left(O-\frac{A+B}{2}\right)(A-B)=0$)、$OB^2=OC^2$、$OA^2=OC^2$ 三个等式至少用两个.	O 是 $\triangle ABC$ 的外心
$(A-H)(B-C)=0$,$(B-H)(C-A)=0$,$(C-H)(A-B)=0$ 中三个等式用两个	H 是 $\triangle ABC$ 的垂心
$H=A+B+C$	若设 $\triangle ABC$ 外心 O 为原点, H 是 $\triangle ABC$ 的垂心
$K=\frac{A+B+C}{2}$	若设 $\triangle ABC$ 外心 O 为原点, K 是 $\triangle ABC$ 的九点圆心
$G=\frac{A+B+C}{3}$	G 是 $\triangle ABC$ 的重心
$B-A=C-D$ 及其等价式 $A+C=B+D$ 等	平行四边形 $ABCD$
$(A-D)^2-(B-D)(D-C)=0$ 或 $(A-B)^2-(B-D)(B-C)=0$	直角三角形射影定理:$\triangle ABC$ 中,$AB\perp AC$,$AD\perp BC$
$(P-A)(P-B)-(P-C)(P-D)=0$ 或 $(P-A)(P-B)=(P-O)^2-R^2$	圆幂定理:四边形 $ABCD$ 内接圆 O,直线 AB 交 CD 于 P,其中 R 为圆半径

以上性质请熟记,会经常用到,有助于解题的简化.

2.2 点线位置问题

例1 已知点 P、Q 在△ABC 内，且

$$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{QA}+3\overrightarrow{QB}+5\overrightarrow{QC}=\vec{0},$$

求 $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|}$.（2018 年全国高中数学联赛辽宁省预赛）

解
$$P=\frac{A+2B+3C}{6},\ Q=\frac{2A+3B+5C}{10},$$
$$P-Q=\frac{1}{30}(-A+B),\ \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{30}.$$

说明 从证明可得 $PQ\parallel AB$.

例2 如图 2-2-1，在△ABC 中，H 是垂心，O 是外心，A_1 是 BC 中点，S 与 H 关于 A 对称，L 与 A 关于 A_1 对称，求证：S 与 L 关于 O 对称.

证明 设 $O=0$，$H=A+B+C$，$L=B+C-A$，$S=2A-(A+B+C)$，得 $L+S=0$.

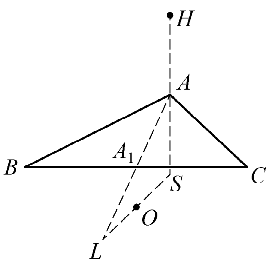

图 2-2-1

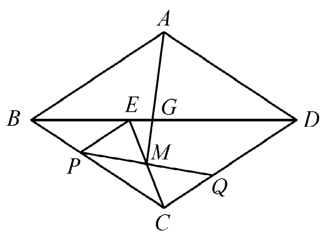

图 2-2-2

例3 如图 2-2-2，在平行四边形 $ABCD$ 中，P、Q 分别在 BC、CD 上，且 $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{CQ}{QD}$，求证：△$APQ$ 的重心在 BD 上.

证明 设 $P=tB+(1-t)C$，$Q=tC+(1-t)D$，

$$\frac{(B+D-C)+P+Q}{3}=\frac{1}{3}(B+2D+tB-tD).$$

例4 如图 2-2-3，在平行四边形 $ABCD$ 中，M 与 P 关于 A 对称，N 与 M 关于 D 对称，Q 与 N 关于 C 对称，求证：P 与 Q 关于 B 对称.

题目翻译:已知 $M+P=2A$, $N+M=2D$, $Q+N=2C$, $A+C=B+D$,求证:$P+Q=2B$.

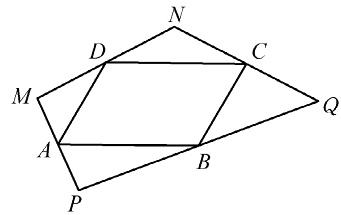

图 2-2-3

证明

$$\begin{aligned}P+Q&=(2A-M)+(2C-N)\\&=(2A+2C)-(M+N)\\&=2A+2C-2D=2B.\end{aligned}$$

说明 此问题可看作是“依次连结四边形中点的四边形是平行四边形”的逆命题,难度要大一些,注意 P 不一定在平面 $ABCD$ 上.

例 5 如图 2-2-4,在△ABC 中,在射线 BA 上取点 A_1,使得 $BA_1=BC$,在射线 CA 上取点 A_2,使得 $CA_2=BC$,类似定义 B_1、B_2、C_1、C_2,证明:$A_1A_2\ /\!/\ B_1B_2\ /\!/\ C_1C_2$.

(2008 年沙雷金几何奥林匹克)

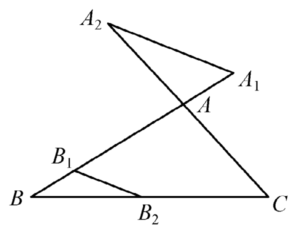

图 2-2-4

证明 设 $A=0$, $A_1=-\dfrac{a-c}{c}B$, $A_2=-\dfrac{a-b}{b}C$,

$$B_1=\frac{b}{c}B,\ B_2=\frac{bB+(a-b)C}{a},$$

$$A_2-A_1=\frac{b(a-c)B-(a-b)cC}{bc},$$

$$B_1-B_2=\frac{b(a-c)B-(a-b)cC}{ac},$$

因此 $A_1A_2\ /\!/\ B_1B_2$. 同理可证 $B_1B_2\ /\!/\ C_1C_2$.

说明 从证明可得 $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}=\dfrac{a}{b}$.

例 6 求证:三角形的三边长度成等差数列的充要条件是其重心和内心的连线平行于三角形的一边.

证明

$$\begin{aligned}I-G&=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}-\frac{A+B+C}{3}\\&=\frac{(2a-b-c)A+(2b-c-a)B+(2c-a-b)C}{3(a+b+c)},\end{aligned}$$

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 点几何解题/张景中,彭翕成著. —3 版. —上海:华东师范大学出版社,2020
ISBN 978-7-5760-0032-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张…②彭… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 037993 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷

点几何解题

著　　者　张景中　彭翕成
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　张丽玉
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　12.25
字　　数　214 千字
版　　次　2020 年 4 月第一版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5760-0032-0
定　　价　30.00 元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。