数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 17

Mathematical Olympiad Series

图论

熊 斌 郑仲义 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书,规模大、专题细. 据我所知,这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　　录

1 图的定义

我们经常遇到这样一些现象或问题：

在一群人中，有的两个人之间互相认识，有的互不相识；

一次足球锦标赛有若干个队参加，其中有的两个队之间比赛过，有的没有比赛过；

有若干个大城市，有的两个城市之间有航线相通，有的没有航线相通；

平面上的一个点集中，其中任意两点之间，有的距离为1，有的距离不为1.

在上面这些现象或问题中都包含两方面的内容：其一是一些"对象"，如人群、足球队、城市、点等等；其二是这些对象两两之间的某种特定关系，如"互相认识"、"比赛过"、"通航"、"距离为1"等. 为了表示这些对象和他们之间的关系，我们可以用一个点表示一个对象，称这些点为顶点，如果两个对象之间有所讨论的关系，就在相应的两点之间连上一条线，称这些线为边，这样就构成了一个图形.

这个用来表示某类对象及它们间特定关系的，由若干个顶点与连接某些顶点的边构成的图形，我们直观地称之为图*.

图论是以图作为研究对象的一个数学分支.

例如图 1-1 中给出了 3 个图 G_1、G_2、G_3，其中顶点由小圆圈表示.

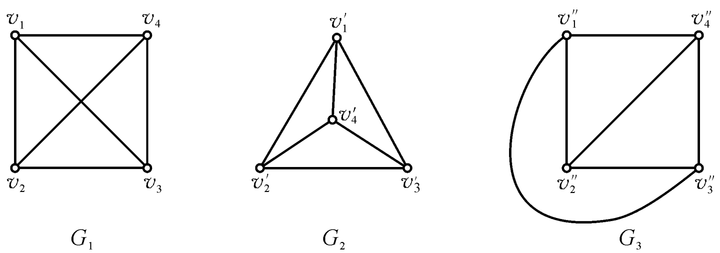


图 1-1

* 图的一般数学定义为：一个图 G 是一个三元组 (V, E, ϕ)，其中 V 和 E 是两个不相交的集合，V 非空，ϕ 是 E 到 V 的一个映射，V、E、ϕ 分别称为图 G 的顶点集、边集和关联函数.

我们注意到，在直观地叙述图的定义中，并没有规定这些顶点的位置以及边的曲直长短，也没有规定这些顶点、边都要在同一平面中，不过，连结两点的边不能通过第三个顶点，也不能与自己相交. 在图论中，如果两个图 G 与 G' 的顶点之间可以建立起一一对应，并且 G 中连接顶点 v_i 与 v_j 之间的边数 $k(k=0, 1, 2, \cdots)$ 与连接 G' 中相应的顶点 v_i' 与 v_j' 的边数相同时，便称图 G 与 G' 是同构的，认为 G 与 G' 是相同的图.

例如，图 1-1 中的三个图 G_1、G_2、G_3 是同构的.

如果对图 $G=(V, E)$ 与 $G'=(V', E')$ 有 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$，即图 G' 的顶点都是图 G 的顶点，图 G' 的边也都是图 G 的边，则称 G' 是 G 的子图，例如图1-2 中的 G_1、G_2 都是 G 的子图.

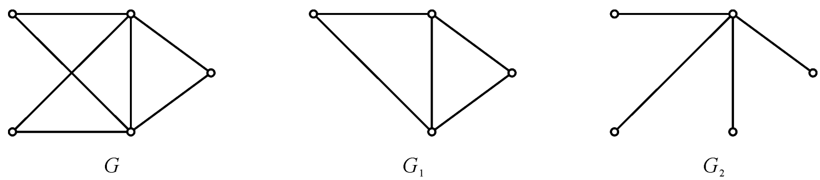


图 1-2

若在一个图 G 中的两个顶点 v_i 与 v_j 之间有边 e 相连，则称点 v_i 与 v_j 是相邻的，否则就称点 v_i 与 v_j 是不相邻的. 如果顶点 v 是边 e 的一个端点，称点 v 与边 e 是关联的. 在图 1-3 中，顶点 v_1 与 v_2 是相邻的，而顶点 v_2 与顶点 v_5 是不相邻的. 顶点 v_3 与边 e_4 是关联的.

有些顶点本身也有边相连，这样的边称为环. 如图 1-3 所示的边 e_6 是环.

连结两个顶点的边有时可能不止一条，若两个顶点之间有 $k(k\geqslant 2)$ 条边相连，则称这些边为平行边. 例如，图 1-3 中的边 e_1、e_2 是平行边.

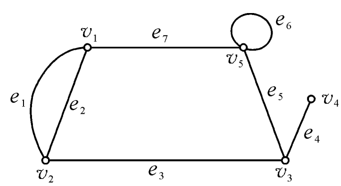
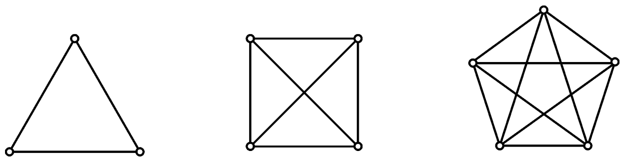


图 1-3

如果一个图没有环，并且没有平行边，这样的图称为简单图. 图 1-1 中的 G_1、G_2、G_3 都是简单图，而图 1-3 所示的就不是一个简单图. 在简单图中，连结顶点 v_i 与 v_j 之间的边可用 (v_i, v_j) 表示. 当然，(v_i, v_j) 与 (v_j, v_i) 表示的是同一条边.

如果一个简单图中，每两个顶点之间都有一条边，这样的图称为完全图. 通常将有 n 个顶点的完全图记为 K_n. 图 1-4 中是完全图 K_3、K_4、K_5. 完全图 K_n 的边的数目是 $C_n^2=\dfrac{1}{2}n(n-1)$.



K_3　　K_4　　K_5

图 1-4

在图 $G=(V,\ E)$ 中,若顶点个数 $|V|$($|V|$ 也称为 G 的阶)和边数 $|E|$ 都是有限的,则称图 G 是有限图. 如果 $|V|$ 或 $|E|$ 是无限的,则称 G 为无限图.

本篇中,除非特别说明,我们所说的图都是指有限简单图.

利用上述的这些基本概念可以帮助我们思考并解决一些问题.

本书中的例题和习题包括图论问题和利用图论方法解决的问题.

例 1　某聚会有 605 个人参加,已知每个人至少和其余的一个人握过手. 证明:必有一个人至少和其中的两个人握过手.

证明　将 605 个人用 605 个点 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{605}$ 表示,如果其中两个人握过手,就在相应的顶点之间连一条边.

本例要证明:必有一个人至少和其中的两个人握过手. 倘若不然,则每个人至多和其中一个人握过手,再从题设的每个人至少和其中一个人握过手,于是便有,每个人恰与其他一个人握过手. 这样就得出,图 G 恰由若干个两点间连一条边的图形构成(图 1-5).

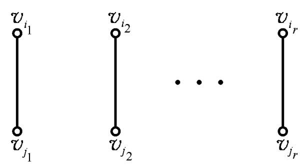


图 1-5

设图 G 有 r 条边,则 G 便有 $2r$(偶数)个顶点,这与 G 的顶点数为 605(奇数)矛盾.

例 2　能否让马跳动几次,将图 1-6 所示的阵势变为如图 1-7 所示的阵势?("马"按照国际象棋规则跳动)

白马		白马
黑马		黑马

图 1-6

白马		黑马
黑马		白马

图 1-7

1	4	7
2	5	8
3	6	9

图 1-8

解析　如图 1-8 所示,将九个方格编号. 再把每个方格对应为平面上一点. 若马能从一个方格跳往另一个方格,则在相应两点之间连一条边,如图

1 - 9.

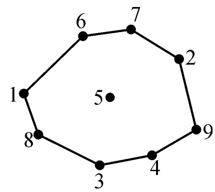


图 1 - 9

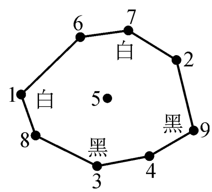


图 1 - 10

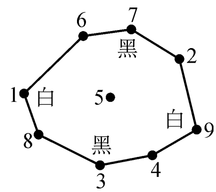


图 1 - 11

于是由图 1 - 6 所示的开始的阵势以及图 1 - 7 所示的要求变成的阵势分别变成了图 1 - 10、图 1 - 11 中的两个图形. 显然，马在一个圆上的前后跟随顺序是不变的，所以不能按要求改变阵势.

例 3 有 $n(n>3)$ 个人，他们之间有些人互相认识，有些人互相不认识，而且至少有一个人没有与其他人都认识. 问：与其他人都认识的人数的最大值是多少？（美国数学竞赛）

解析 作图 G：用 n 个点表示这 n 个人，两顶点相邻当且仅当相应的两个人互相认识.

由于至少有一个人没有与其他人都认识，所以图 G 中至少有两点不相邻，设 v_1、v_2 之间没有边 $e=(v_1, v_2)$. 则图 G 的边数最多时的图形为 K_n-e，即从完全图 K_n 中去掉边 e 后所得的图. 从而与其他顶点都相邻的顶点个数的最大值为 $n-2$. 故与其他人都认识的人数的最大值是 $n-2$.

例 4 九名数学家在一次国际数学会议上相遇，发现他们中的任意三个人中，至少有两个人可以用同一种语言对话. 如果每个数学家至多可说三种语言，证明至少有三名数学家可以用同一种语言对话.（1978 年美国数学奥林匹克）

证明 用九个点 $v_1, v_2, \cdots, v_9$ 表示这九名数学家，如果某两个数学家能用第 i 种语言对话，则在它们相应的顶点之间连一条边并涂以相应的第 i 种颜色，这样就得到了一个有九个顶点的简单图 G，它的边涂上了颜色，每三点之间至少有一条边，每个顶点引出的边至多有三种不同的颜色. 要证明的是：图 G 中存在三个点，它们两两相邻，且这三条边具有相同的颜色（这种三角形称为同色三角形）.

如果边 (v_i, v_j)、(v_i, v_k) 具有相同的第 i 种颜色，则按边涂色的意义，点 v_j 与 v_k 也相邻，且边 (v_j, v_k) 也具有第 i 种颜色. 所以对顶点 v_1 来说，有两种情形：

（1）点 v_1 与点 $v_2, \cdots, v_9$ 都相邻，根据抽屉原理知，至少有两条边，不妨

设为 (v_1, v_2)、(v_1, v_3)，具有相同的颜色，从而 $\triangle v_1v_2v_3$ 是同色三角形.

(2) 点 v_1 与点 $v_2, \cdots, v_9$ 中的至少一个点不相邻，不妨设点 v_1 与点 v_2 不相邻. 由于每三点之间至少有一条边，所以从 $v_3, v_4, \cdots, v_9$ 发出的，另一个端点是 v_1 或 v_2 的边至少有 7 条，由此可知，点 $v_3, v_4, \cdots, v_9$ 中至少有 4 个点与点 v_1 或 v_2 相邻，不妨设点 v_3, v_4, v_5, v_6 与点 v_1 相邻，如图 1－12 所示. 于是边 (v_1, v_3)、(v_1, v_4)、(v_1, v_5)、(v_1, v_6) 中必定有两条具有相同的颜色，设 (v_1, v_3)、(v_1, v_4) 同色，则 $\triangle v_1v_3v_4$ 是同色三角形.

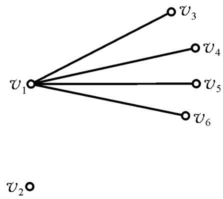


图 1－12

注 若把题中的九改成八，命题就不成立了. 图 1－13 给出的是一个反例. $v_1, v_2, \cdots, v_8$ 表示 8 个顶点，1，2，…，12 表示 12 种颜色，则图中无同色三角形.

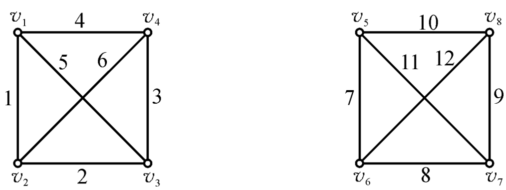


图 1－13

例 5 有 n 名选手 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 参加数学竞赛，其中有些选手是互相认识的，而且任何两个不相识的选手都恰好有两个共同的熟人. 若已知选手 A_1 与 A_2 互相认识，但他俩没有共同的熟人，证明他俩的熟人一样多.

证明 用 n 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 表示这 n 名选手 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果两个选手互相认识，那么就在相应的两个点之间连一条边，这样就得到一个简单图 G. 图 G 中的顶点满足：任意两个不相邻的顶点都恰好有两个共同相邻的顶点. 要证明的是相邻的两个顶点 v_1 与 v_2 各自引出的边的条数一样多.

如果记与 v_1 相邻的顶点集合为 $N(v_1)$，与 v_2 相邻的顶点集合为 $N(v_2)$. 若在 $N(v_1)$ 中除 v_2 外还有点 v_i，则 $v_i \notin N(v_2)$. 否则 A_1 与 A_2 有共同熟人 A_i. 于是 v_2 与 v_i 除 v_1 外还应有一个与它们共同相邻的点 v_j，则 $v_j \in N(v_2)$. 如图 1－14 所示. 对于 $N(v_1)$ 中不同于 v_2 的点 v_i、v_k，它们不可能与 $N(v_2)$ 中除 v_1 外的一个点 v_j 都相邻（否则，两个不相邻的顶点 v_1、v_j 有三个共同相邻的顶点 v_2、v_i、v_k）. 因而，对于

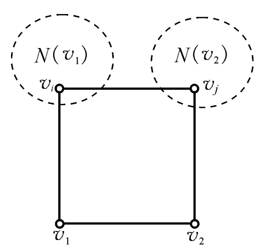


图 1－14

$N(v_1)$中不同于 v_i 的 v_k，必在 $N(v_2)$中存在不同于 v_j 的相邻点 v_l. 由此可得 $N(v_1)$中的顶点个数不大于 $N(v_2)$中的顶点个数. 同样地，$N(v_2)$中的顶点个数不大于 $N(v_1)$中的顶点个数. 于是，从点 v_1 与 v_2 引出的边的条数是相等的.

下面这个例子是 2000 年全国高中数学联赛加试第 3 题.

例 6 有 n 个人，已知他们中的任意两人至多通电话一次，他们中的任意 $n-2$ 个人之间通电话的总次数相等，都是 3^m 次，其中 m 是自然数. 求 n 的所有可能值.

解析 显然 $n \geqslant 5$. 记 n 个人为几个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 若 A_i、A_j 之间通电话，则连(A_i, A_j). 因此这 n 个点中必有边相连，不妨设为(A_1, A_2).

倘若设 A_1 与 A_3 之间无边，分别考虑 $n-2$ 个点 $A_1, A_4, A_5, \cdots, A_n$；$A_2, A_4, A_5, \cdots, A_n$；及 $A_3, A_4, A_5, \cdots, A_n$. 由题意知 A_1, A_2, A_3 分别与 $A_4, A_5, \cdots, A_n$ 之间所连边的总数相等，记为 k.

将 A_2 加入到 $A_1, A_4, A_5, \cdots, A_n$ 中，则这 $n-1$ 个点之间边的总数 $S = 3^m + k + 1$. 从这 $n-1$ 点中任意去掉一点剩下的 $n-2$ 个点所连边数都是 3^m，故每个点都与其余 $n-2$ 个点连 $k+1$ 条边. 从而

$$S = \frac{1}{2}(n-1)(k+1).$$

同理，考虑 A_3 加入 $A_1, A_4, A_5, \cdots, A_n$ 中所得的 $n-1$ 个点的情况可知边的总数为 $t = 3^m + k = \frac{1}{2}(n-1)k$.

因为 $S = t + 1$，得

$$\frac{1}{2}(n-1)(k+1) = \frac{1}{2}(n-1)k + 1,$$

即 $n = 3$，矛盾. 所以 A_1、A_3 之间有边.

同理 A_2、A_3 之间也有边. 进而 A_1、A_2 与所有 $A_i(i = 3, 4, \cdots, n)$ 之间有边.

对于 A_i、$A_j(i \neq j)$，因为 A_i 与 A_1 之间有边，可知 A_i 与 A_j 之间有边. 因此这 n 个点构成一个完全图. 所以

$$3^m = \frac{1}{2}(n-2)(n-3).$$

故 $n = 5$.

下面这个例子是 1988 年第 29 届国际数学奥林匹克试题.

例 7 设 n 为一正整数，且 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 是某个集合 B 的子集. 设

(1) 每一个 A_i 恰含有 $2n$ 个元素；

(2) 每一个 $A_i \cap A_j (1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ 恰含有一个元素；

(3) B 的每个元素至少属于 A_i 中的两个.

问对怎样的 n，可以将 B 中元素各标上数 0 或 1，使得每个 A_i 恰含有 n 个标上了 0 的元素？

解析 首先，(3)中的“至少”实际上也可以改成“恰”. 因为如果有一个元素 $a_1 \in A_1 \cap A_{2n} \cap A_{2n+1}$，那么剩下的 $2n-2$ 个子集 $A_2, A_3, \cdots, A_{2n-1}$ 每个至多含 A_1 中一个元素，从而 A_1 中至少有一个元素不属于 $A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{2n-1} \cup A_{2n} \cup A_{2n+1}$，这与(3)矛盾.

于是作完全图 K_{2n+1}，每一个顶点 v_i 表示一个子集 A_i，每一条边 $(v_i, v_j) = b_{ij} (1 \leqslant i, j \leqslant 2n+1, i \neq j)$ 表示集 A_i 与 A_j 所共有的那个元素. 于是题目就转化为：对怎样的 n，可以给 K_{2n+1} 的每条边贴一个 0 或 1 的标签，使得从图中任一点 v_i 出发的 $2n$ 条边中恰有 n 条边贴有 0 的标签.

因为 K_{2n+1} 有 $n(2n+1)$ 条边，如果上述贴标签的要求能够满足，则贴 0 的边共有 $\frac{1}{2}n(2n+1)$ 条，于是 n 必须是偶数.

反之，若 $n = 2m$ 是偶数，我们把 K_{2n+1} 中的边 $(v_i, v_{i-m}), (v_i, v_{i-m+1}), \cdots, (v_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i+1}), \cdots, (v_i, v_{i+m}), i = 1, 2, \cdots, 2n+1$，全标上 0，其余的标上 1，则得本题所要求的贴标签方法(要注意的是，顶点的下标的加法是按模 $2n+1$ 进行的，即 $v_{(2n+1)+i} = v_i$).

所以，当且仅当 n 为偶数时，可以满足题目要求.

下面这道题是 1995 年 IMO 预选题.

例 8 有 $12k$ 人参加会议，每人都恰好与 $3k+6$ 人握过手，并且对其中任意两人，与这两个人都握过手的人数皆相同. 问有多少人参加会议？

解析 设对任意两人，与他们都握过手的有 n 人. 考虑某个 a，与 a 握过手的全体记为 A，与 a 没有握过手的全体记为 B. 由题设 $|A| = 3k+6$，$|B| = 9k-7$.

再考虑 $b \in A$，与 a、b 都握过手的 n 个人都在 A 中，因此，b 与 A 中 n 个人握手，与 B 中 $3k+5-n$ 人握手.

考虑 $c \in B$，与 a、c 都握过手的 n 人都在 A 中.

于是 A 与 B 之间握手总数为

$$(3k+6)(3k+5-n)=(9k-7)n,$$
$$n=\frac{(3k+6)(3k+5)}{12k-1}.$$

从而
$$16n=\frac{(12k-1+25)(12k-1+21)}{12k-1}.$$

显然 $(3, 12k-1)=1$，所以 $(12k-1)\mid 25\times 7$. 由于 $12k-1$ 除以 4 余 3,所以 $12k-1=7$, 5×7, $5^2\times 7$. 经检验只有 $12k-1=5\times 7$ 产生整数解 $k=3$, $n=6$.

下面构造一个由 36 点组成的图,图中每点引出 15 条边,且对每一对点与它们相连的点均为 6 个.

自然地,我们可用 6 个完全图 K_6. 把 36 个点分成六组,同组的六人编号,排成一个 6×6 方阵

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1
\end{array}$$

对方阵中的每个点,它与同行、同列、同编号的 15 个点相连,与其余点不相连. 易见,与任意两位代表都握过手的恰好有 6 人.

例 9 给定整数 $m\geqslant 2$. 一次会议共有 $3m$ 人出席,每两人之间或者握手一次,或者不握手. 对正整数 $n(n\leqslant 3m-1)$,若存在其中的 n 个人,他们握过手的次数分别为 1, 2, …, n,则称这次会议是“n-有趣的”. 若对一切可能发生的 n-有趣的会议,总存在 3 名参会者两两握过手,求 n 的最小值. (2018 年中国东南地区数学奥林匹克)

解析 将 $3m$ 人分别记为 A_1, A_2, …, A_{3m}.

当 $1\leqslant n\leqslant 2m$ 时,我们构造如下 n-有趣的会议:对 $i=1, 2, \cdots, m$,令 A_{3m+1-i} 与 A_i, A_{i+1}, …, A_{2m} 握手(如图 1-15).

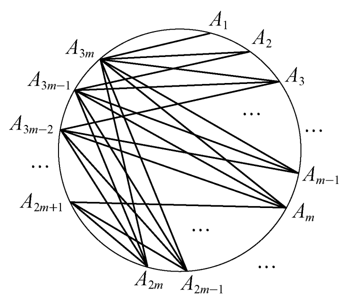


图 1-15

此时, A_1, A_2, …, A_m, A_{2m+1}, A_{2m+2}, …, A_{3m} 握过手的次数分别是 1, 2, …, $2m$,注意到 $2m\geqslant n$,这是一个 n-有趣的会议. 对任意 3

名参会者，必存在两人同时属于 $S_1=\{A_1, A_2, \cdots, A_{2m}\}$ 或同时属于 $S_2=\{A_{2m+1}, A_{2m+2}, \cdots, A_{3m}\}$，由图的构造知，他们两人未握过手. 从而不存在 3 名参会者两两握过手.

由此可知，$n\geqslant 2m+1$.

另一方面，当 $n=2m+1$ 时，考虑任意$(2m+1)-$有趣的会议. 该会议中存在一人恰好握过 $2m+1$ 次手，不妨设 A_{3m} 恰与 $A_1, A_2, \cdots, A_{2m+1}$ 这 $2m+1$ 人握过手.

记 $T_1=\{A_1, A_2, \cdots, A_{2m+1}\}$，$T_2=\{A_{2m+2}, A_{2m+3}, \cdots, A_{3m}\}$.

由于 T_2 中的人的握手次数至多取到 $\{m, m+1, \cdots, 2m+1\}$ 中的 $m-1$ 个不同值，故存在一个数 $k\in\{m, m+1, \cdots, 2m+1\}$，不是 T_2 中任何一人的握手次数. 这意味着 T_1 中必有一人的握手次数为 k，设他为 A_i. 由于 A_i 与 T_2 中的人的握手次数不超过 $m-1$，故 T_1 中存在一人 $A_j(\neq A_i)$，与 A_i 握过手，这样 A_{3m}、A_i、A_j 两两握过手.

从而，在任意一个$(2m+1)-$有趣的会议中，总存在 3 名参会者两两握过手.

综上可知，n 的最小值为 $2m+1$.

习 题 1

1 设图
$$G=(V, E), V=\{v_1, v_2, \cdots, v_5\},$$
$$E=\{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_1, v_3)\}.$$
画出 G 的图形.

2 设图 $G=(V, E)$ 是简单图，$|V|=n$，$|E|=e$，则有 $e\leqslant\dfrac{n(n-1)}{2}$.

3 说明下面两个图是同构的.

(1)　　　　(2)

(第 3 题)

4 有 n 个药箱，每两个药箱里有一种相同的药，每种药恰好在两个药箱里出

现，问有多少种药？

5 一次会议有 n 名教授 A_1，A_2，…，A_n 参加，证明可以将这 n 个人分为两组，使得每一个人 A_i 在另一组中认识的人数 d_i 不少于他在同一组中认识的人数 d'_i $(i=1, 2, \cdots, n)$.

6 18 个队进行比赛，每一轮中每个队与另一个队比赛一场，并且在其他轮比赛中这两个已赛过的队彼此不再比赛，现在比赛已进行完 8 轮. 证明一定有三个队在前 8 轮比赛中，彼此之间尚未比赛过.

7 某次会议有 n 名代表出席，已知任意的四名代表中都有一个人与其余的三个人握过手，证明任意的四名代表中必有一个人与其余的 $n-1$ 名代表都握过手.

8 有三所中学，每所有学生 n 名. 每名学生都认识其他两所中学的 $n+1$ 名学生. 证明：从每所中学可以选出一名学生，使选出来的 3 名学生互相认识.

9 一个很大的棋盘上有 $2n$ 个红色的方格，对任何两个红色方格可从其中一个出发，每步横或竖走到相邻的红色方格而到另一个方格中. 证明：所有的红色方格可以分为 n 个长方形.

10 某参观团有 2000 个人，其中任意 4 个人中一定有某一个人认识其他三人. 问：认识该参观团所有成员的人数最少是多少？

11 在一个车厢里，任何 m $(m \geqslant 3)$ 个旅客都有唯一的公共朋友（当甲是乙的朋友时，乙也是甲的朋友. 任何人不作为他自己的朋友）. 问：在这个车厢里，有多少人？

12 平面上给定五点 A、B、C、D、E，其中任三点不共线，试证：任意用线段连接某些点（这些线段称为边），若所得图形中不出现以这五点中任三点为顶点的三角形，则此图不可能有 7 条或更多的边.

2 顶点的度

图 G 中与顶点 v 关联的边数(约定环计两次)称为图 G 中顶点 v 的度(或次数),记作 $d_G(v)$. 在不致混淆的时候,简记为 $d(v)$. 我们用 $\delta(G)$ 与 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中顶点的最小度和最大度,分别简记为 δ 和 Δ.

在图 2-1 中, $d(v_1)=1$, $d(v_2)=3$, $d(v_3)=d(v_4)=2$, $\delta=1$, $\Delta=3$.

图 G 中,若顶点 v 的度是奇数,则称点 v 为奇顶点;若顶点 v 的度是偶数,则称点 v 为偶顶点. 图 2-1 中,点 v_1、v_2 是奇顶点,点 v_3、v_4 是偶顶点.

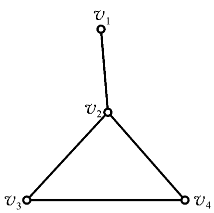


图 2-1

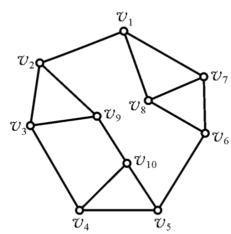


图 2-2

在图 $G=(V, E)$ 中,如果对任意的 $v\in V$,均有 $d(v)=k$,则称图 G 是 k 正则的. 完全图 K_n 是 $(n-1)$ 正则图. 图 2-2 中是一个 3 正则图.

关于图 G 中所有顶点的度之和与边数之间有如下结论.

定理一 设 G 是 n 阶图,则 G 中 n 个顶点的度之和等于边数的两倍.

记 G 中 n 个顶点为 v_1, v_2, …, v_n, 边数为 e,则

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)=2e.$$

证明 所有顶点的度的和 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)$ 表示以顶点 v_1, v_2, …, v_n 中某个顶点为一个端点的边的总数. 由于一条边有两个端点,因此图 G 的每条边在和 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)$ 中被计入两次. 所以所有顶点的度的和为边数的两倍.

例如在图 2-1 中, $e=4$,

$$d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4)=1+3+2+2=8=2e.$$

定理一通常称为握手引理，在二百多年前欧拉就给出了这样一个著名的结论：如果许多人在见面时握了手，那么握手的次数为偶数. 进而推得：握过奇数次手的人有偶数个. 这个推论就是

定理二 对于任意的图 G，奇顶点的个数一定是偶数.

证明 设 G 中的顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，且 $v_1, \cdots, v_t$ 是奇顶点，$v_{t+1}, \cdots, v_n$ 是偶顶点. 由定理一，

$$d(v_1)+\cdots+d(v_t)+d(v_{t+1})+\cdots+d(v_n)=2e,$$
$$d(v_1)+\cdots+d(v_t)=2e-d(v_{t+1})-\cdots-d(v_n).$$

因为 $d(v_{t+1}), \cdots, d(v_n)$ 都是偶数，故上式右边是偶数，而 $d(v_1), \cdots, d(v_t)$ 都是奇数，要使它们的和为偶数，t 必须是偶数. 即 G 中奇顶点个数为偶数.

例 1 是否存在这样的多面体，它有奇数个面，每个面有奇数条棱？

解析 不存在这样的多面体. 事实上，如果这样的多面体存在，那么用顶点表示这个多面体的面，并且仅当 v_i、v_j 所代表的两个面有公共棱时，在图 G 相应的两顶点之间连一条边，依题意 $d(v)$ 是奇数，于是奇数个奇数也是奇数. 与定理相违. 证毕.

例 2 如图所示，大三角形的三个顶点分别涂以 A、B、C 三种颜色. 在大三角形内取若干个点，将它分为若干个小三角形，每两个小三角形或者有一条公共边，或者有一个公共点，或者完全没有公共点. 将每个小三角形的顶点也分别涂以 A、B、C 三种颜色之一，证明不管怎样涂色，都有一个小三角形，它的三个顶点的颜色全不相同.

证明 在大三角形外及小三角形内部各取一点作顶点，当两个面有一条公共边 AB 时，就在相应的两个顶点之间连一条边，得图 G'，如图 2－3 所示.

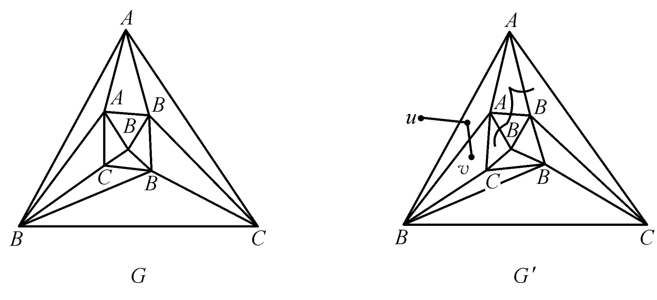


图 2－3

一个具有颜色 A、B、C 顶点的小三角形对应于 G' 中的度为 1 的顶点. 其余的小三角形均对应于 G' 中度为 0 或 2 的顶点. 由于大三角形外部的一个顶点 u 的度是 1,且奇顶点的个数为偶数,所以 G' 中除了 u 外,至少还有一个奇顶点 v. 这就是说在图 2-3 中至少有一个小三角形,它的三个顶点分别为 A、B、C 三种颜色.

注 本题常见的做法是赋值法,结合奇偶分析来解决. 这里的解法有图论的独到之处,非常简洁.

例 3 某地区网球俱乐部的 20 名成员举行 14 场单打比赛,每人至少上场一次. 证明:必有六场比赛,其中 12 个参赛者各不相同. (1989 年美国数学奥林匹克)

证明 用 20 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{20}$ 代表 20 名成员,两名选手比赛过,则在相应的顶点之间连一条边,得图 G.

图 G 中有 14 条边,设各顶点的度为 d_i, $i = 1, 2, \cdots, 20$.

由题意知 $d_i \geqslant 1$. 根据定理一

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{20} = 2 \times 14 = 28.$$

在每个顶点 v_i 处抹去 $d_i - 1$ 条边,由于一条边可能同时被其两端点抹去,所以抹去的边数不超过

$$(d_1 - 1) + (d_2 - 1) + \cdots + (d_{20} - 1) = 28 - 20 = 8.$$

故抹去了这些边后所得的图 G' 中至少还有 $14 - 8 = 6$ 条边,并且 G' 中每个顶点的度至多是 1. 从而这 6 条边所相邻的 12 个顶点是各不相同的. 即这 6 条边所对应的 6 场比赛的参赛者各不相同.

例 4 设 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面上的点集,其中任意两点之间的距离至少是 1,证明:最多有 $3n$ 对点,每对点的距离恰好是 1.

证明 取这 n 个点作为顶点,两顶点相邻当且仅当两点之间的距离为 1,得一个图 G. G 中的边数记为 e.

显然图 G 中和顶点 x_i 相邻的点是在以 x_i 为圆心,半径为 1 的圆周上. 由于集 S 中任意两点之间的距离 $\geqslant 1$,故圆周上至多含有 S 中的 6 个点,所以 $d(x_i) \leqslant 6$.

对图 G 用定理一,有

$$d(x_1) + d(x_2) + \cdots + d(x_n) = 2e,$$
$$6n \geqslant 2e,$$

即 $e \leqslant 3n$. 就是说图 G 中的边数 e 不超过 $3n$. 所以这 n 个点中至多有 $3n$ 对点，每对点的距离恰好是 1.

例 5 有一个团体会议，有 100 人参加. 其中任意四个人都至少有一个人认识其他三人. 问：该团体中认识其他所有人的成员最少有多少？

解析 先把问题翻译成图论语言. 把该团体的成员视为顶点，其顶点全体记做 V. 对于任意两个顶点 u、v 所代表的成员，当且仅当彼此认识，则在 u、v 之间连一条边. 得到一个含 100 个顶点的简单图 G. 已知条件是，图 G 中任意四个顶点中都至少有一顶点和其他三个顶点相邻. 要求图 G 中度为 99 的顶点个数的最小值 m.

当图 G 是完全图时，每个顶点的度都是 99，所以有 100 个度为 99 的顶点.

当图 G 是非完全图时，图 G 中必有两个不相邻的顶点 u 和 v. 显然 $d(u) \leqslant 98$, $d(v) \leqslant 98$. 因此图 G 中度为 99 的点的个数 $l \leqslant 98$.

如果 G 中除 u 和 v 外另有两个顶点 x、y 不相邻，则 u、v、x 和 y 中不存在和其他三个顶点都相邻的顶点，与题意矛盾（与图 G 的性质矛盾）. 因此 G 中除 u、v 外任意两个顶点相邻. 这说明对 G 中除 u、v 外的任意点 x，均有 $d(x) \geqslant 97$.

如果 G 中除 u、v 外的任何 x 都和 u、v 相邻，则 $d(x)=99$. 此时 G 中度为 99 的顶点个数为 98.

设 G 中除 u、v 外有个顶点 x 和 u、v 不都相邻，则有 G 的性质知，G 中除 u、v、x 外的任意顶点 y 和 u、v、x 都相邻. 因此 $d(u) \leqslant 98$, $d(v) \leqslant 98$, $d(x) \leqslant 98$, $d(y)=99$. 所以 G 中度为 99 的顶点个数为 97.

这表明含 100 个顶点的简单图 G 中，如果任意四个顶点中必有一个顶点和其他三个顶点都相邻，那么 G 中至少有 97 个度为 99 的顶点.

回到原问题，即得：该团体中认识其他所有人的成员最少是 97 个.

注 例题中的成员数 100 改为任意的 n，其他条件不变，则结论为该团体至少有 $n-3$ 人认识其他所有人.

例 6 国际乒乓球男女混合双打大奖赛有 24 对选手参加，赛前一些选手握了手，但同一对选手之间不握手. 赛后某个男选手问每个选手的握手次数，各人的回答各不相同，问这名男选手的女搭档和多少人握了手？

解析 48 名选手用 48 个顶点 v, v_0, v_1, …, v_{46} 表示，其中 v 代表那名男选手. 两人握过手就在他们相应的顶点之间连一条边，得图 G. 在 G 中，$d(v_i) \leqslant 46$, $i=0, 1, 2, \cdots, 46$. 并且当 $i \neq j$ 时，$d(v_i) \neq d(v_j)$. 所以除顶

点 v 外，其他顶点的度分别为

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45,\ 46.$$

不妨设 $d(v_i)=i$, $i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 46$. 对顶点 v_{46} 来说，它只和顶点 v_0 不相邻，故 v_{46} 和 v_0 是搭档. 在 G 中去掉顶点 v_0、v_{46} 以及与它们相邻的边，得图 G_1，在 G_1 中除 v 外，各顶点的度仍然不同，且度都减小 1，同样道理，v_{45} 和 v_1 是搭档. 依次可得 v_{44} 和 v_2，$\cdots$，v_{24} 和 v_{22} 是搭档. 于是 v_{23} 和 v 是搭档. 所以那个男选手的女搭档握了 23 次手.

注 1　本题中的 24 改为 34，“男女搭档”改为“正副领队”便是第 26 届国际数学奥林匹克预选题. 将 24 改为 16，“男女搭档”改为“甲、乙两个足球队”，就是 1985 年全国高中数学联赛第二试第 3 题.

注 2　本题证明中，将 G 的顶点编号，按度的非降次序 $(d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n)$ 排列，得到 $(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n)$ 称为图 G 的度序列. 利用度序列解题是一种重要方法.

例 7　某俱乐部共有 99 名成员，每一个成员都声称只愿意和自己认识的人一起打桥牌. 已知每个成员都至少认识 67 名成员. 证明一定有 4 名成员，他们可以在一起打桥牌.（1966 年波兰数学竞赛）

证法一　作一个图 G：用 99 个点表示 99 名成员，如果两名成员相互认识，就在相应的两个顶点之间连一条边. 所给已知条件是：对任意顶点 v，$d(v)\geqslant 67$. 欲证 G 中含有一个 4 阶完全图 K_4.

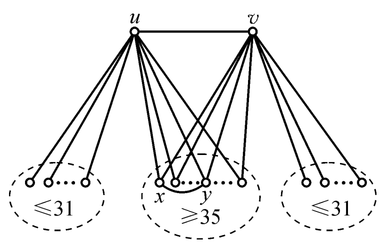


图 2 - 4

在 G 中任取一个顶点 u，由于 $d(u)\geqslant 67$，所以存在顶点 v，使得与 v 相邻且与 u 不相邻的顶点至多为 $(99-1-67=)31$ 个. 同样，与 v 不相邻且与 u 相邻的顶点也至多 31 个. 于是图 G 中至少有 $(99-31-31-2=)35$ 个顶点和 u、v 均相邻. 如图 2 - 4 所示，设顶点 x 和顶点 u、v 均相邻. 由于 $d(x)\geqslant 67$，并且 G 中至多只有 $(31+31+2=)64$ 个不同时和 u、v 均相邻的顶点，因此顶点 x 至少还和一个与 u、v 均相邻的顶点 y 相邻. 从而 u、v、x、y 是 4 个两两相邻的顶点. 于是命题得证.

证法二　用顶点表示成员，如果两个人不认识就在相应的顶点之间连一条边，得图 G'. 由于每个人认识的人数不少于 67，所以对每个顶点 v，都有 $d(v)\leqslant 99-1-67=31$. 要证明的是：G' 中存在四个点，两两之间不相邻.

对于顶点 u，取一个不与它相邻的顶点 v，则剩下的 97 个顶点中与 u 或 v

相邻的顶点个数不超过

$$d(u)+d(v)\leqslant 31+31=62,$$

因而存在与 u、v 均不相邻的顶点 x，与顶点 u、v、x 中至少有一个相邻的顶点个数不超过

$$d(u)+d(v)+d(x)\leqslant 3\times 31=93,$$

所以在剩下的 96 个点中，必有一个点 y 与 u、v、x 均不相邻，于是 u、v、x、y 所代表的 4 个人是互相认识的，他们可以在一起打桥牌.

注 1 若将题中的 67 人改为 66 人，则不一定能找出 4 个互相认识的人来. 反例如图 2-5 所示. 将顶点集 V 分成三个子集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{33}\}$，$\{v_{34}, v_{35}, \cdots, v_{66}\}$，$\{v_{67}, v_{68}, \cdots, v_{99}\}$. 同一个子集中任意两顶点均不相邻，不同子集中的任意两点均相邻. 显然每个顶点的度都是 66，任意 4 点中，至少有 2 点属于同一子集，从而它们不相邻. 也就是说图中不存在两两相邻的 4 顶点.

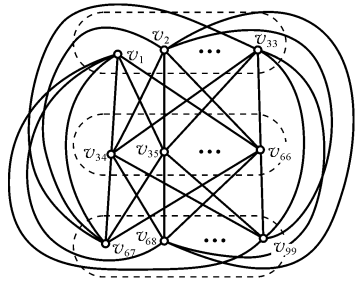


图 2-5

注 2 本题可推广为：

俱乐部有 n $(n\geqslant 4)$ 人，其中每人都至少认识其中的 $\left[\dfrac{2n}{3}\right]+1$ 个人，则在这 n 个人中必定可以找到 4 个人，他们是两两认识的.

注 3 如果 G 是 n 阶简单图，从完全图 K_n 中把属于 G 的边全部去掉后，得到的图称为 G 的补图，通常记为 $\overline{G}$. 证法一中的图 G 与证法二中的图 G'，互为补图.

注 4 利用容斥原理可得本题另一巧妙解法，请读者试一试. 在第 8 章我们给出了一个利用染色方法的解法. 供读者参考.

例 8 一次会议共有 24 人参加，每两人之间或者握手一次，或者不握手. 会议结束后发现，总共出现了 216 次握手，且对任意相互握过手的两人 P、Q，在剩下的 22 人中，恰与 P、Q 之一握过手的人不超过 10 人. 一个“朋友圈”指的是会议中 3 个两两之间握过手的人所构成的集合. 求这 24 人中朋友圈个数的最小可能值.（2018 年中国东南地区数学奥林匹克）

解法一 设这 24 个人为 $v_1, v_2, \cdots, v_{24}$，其中对 $i=1, 2, \cdots, 24$，v_i 共与 d_i 个人握过手. 定义集合

$$E=\{\{v_i,\ v_j\}\mid v_i \text{ 与 } v_j \text{ 握过手}\}.$$

对任意 $e=\{v_i,\ v_j)\in E$，记 $t(e)$ 为包含集合 e 的朋友圈的数目，由已知条件可知

$$(d_i-1)+(d_j-1)\leqslant 2t(e)+10.$$

于是

$$\sum_{e=\{v_i,\ v_j\}\in E}(d_i+d_j)\leqslant\sum_{e\in E}(2t(e)+12). \qquad ①$$

在 $\sum\limits_{e=\{v_i,\ v_j\}\in E}(d_i+d_j)$ 中，每个人 v_i 的握手次数 d_i 共被计算了 d_i 次，故 ① 式的左边等于 $\sum\limits_{i=1}^{24}d_i^2$. 又记朋友圈的个数是 T，则 ① 式的右边等于 $6T+12\times 216$. 因此

$$\sum_{i=1}^{24}d_i^2\leqslant 6T+12\times 216.$$

而
$$\sum_{i=1}^{24}d_i^2\geqslant\frac{1}{24}\Big(\sum_{i=1}^{24}d_i\Big)^2=\frac{(2\times 216)^2}{24},$$

所以
$$T\geqslant\frac{1}{6}\left[\frac{(2\times 216)^2}{24}-12\times 216\right]=864.$$

另一方面，将 24 个人平均分为 4 组，每组 6 个人. 让不同组的任意两人握手一次，而同组的任意两人不握手. 计算可知握手的总次数为 $\frac{1}{2}\times 24\times 18=216$. 对任意相互握过手的两人 P、Q，在剩下的 22 人中，恰与 P、Q 之一握过手的人实际上是 P、Q 所在两组的其余 10 人，符合题意. 此时朋友圈的个数是 $\mathrm{C}_4^3\times 6^3=864$.

综上可知，这 24 人中朋友圈个数的最小可能值是 864.

解法二 设这 24 个人对应于 24 个点为 A_1，A_2，…，A_{24}. 若某两个人握过手，则在它们对应的点之间连一条边. 构造一个简单图. 如果 A_i 与 A_j、A_k 均连有边，则称 $\angle A_jA_iA_k$ 是一个"角"(其中 $\angle A_jA_iA_k$ 与 $\angle A_kA_iA_j$ 视作同一个角). 进一步，若 A_j、A_k 也连有边，则称 $\angle A_jA_iA_k$ 是"一类角"，否则称之为"二类角".

设点 A_i 的度数是 $d_i(1\leqslant i\leqslant 23)$，一类角、二类角的个数分别为 m_1、m_2，朋友圈的个数是 T. 如果 A_i、A_j 之间连有边，则包含 A_iA_j 的二类角的个数不大于 10. 因此

$$m_2 \leqslant \frac{1}{2} \times 10 \times 216 = 1080.$$

而所有角的个数是

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= \sum_{i=1}^{24} \mathrm{C}_{d_i}^2 = \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{24} d_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{24} d_i\Big)\Big] \\ &\geqslant \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{24}\Big(\sum_{i=1}^{24} d_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{24} d_i\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{24} d_i\Big) \cdot \Big[\frac{1}{24}\Big(\sum_{i=1}^{24} d_i\Big) - 1\Big] \\ &= 216 \times \left(\frac{1}{24} \times 2 \times 216 - 1\right) \\ &= 216 \times 17. \end{aligned}$$

又 $m_1 = 3T$，故

$$T = \frac{1}{3} m_1 \geqslant \frac{1}{3} \times (216 \times 17 - 1080) = 864.$$

下同解法一.

例 9 某次会议共有 30 人参加，其中每个人在其余人中至多有 5 个熟人；任意 5 个人中，至少有两人不是熟人. 求最大的正整数 k，使得在满足上述条件的 30 个人中总存在 k 个人，两两不是熟人.（2014 年中国数学奥林匹克）

解析 所求 k 的值为 6.

我们用 30 个点表示 30 个人，如果两个人是熟人，则在他们对应的点之间连一条边，这样得到了一个以这 30 个点为顶点集的满足下面条件的简单图 G：

(i) G 中每一个顶点的度不超过 5；

(ii) G 的顶点集中的任何 5 点中都有两点没有连边.

用 V 表示 G 的顶点集. 如果 $A \subseteq V$ 且 A 中任何两点没有连边，则称 A 为 G 的一个“独立集”，并称元素个数最多的独立集为 G 的一个“最大独立集”.

(1) 首先证明满足条件的 G 中最大独立集的元素个数不小于 6.

事实上，设 X 是 G 的一个最大独立集，由 $|X|$ 的最大性知，$V \backslash X$ 中的任一点都有一个邻点在 X 中，否则，若 $a \in V \backslash X$ 在 X 中没有邻点，则可将 a 加入到 X 中形成一个更大的独立集，矛盾！这样在 $V \backslash X$ 和 X 之间至少有 $|V \backslash X| = 30 - |X|$ 条边. 又注意到 X 中每个点的度不超过 5，故有

$$30-|X|\leqslant 5|X|, \quad ①$$

因此 $|X|\geqslant 5$.

若 $|X|=5$,则由①取得等号知,上述的 $30-|X|=25$ 条边分布在 X 的 5 个顶点上,即 X 中每点的邻点集均是 $V\backslash X$ 中 5 个构成的点集. 因为 $|V\backslash X|=25$,故 X 中任两点的邻点集不相交. 记 $X=\{a, b, c, d, e\}$,现考虑 a 的邻点集,记为 $Y_a=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$. 由上述条件(ii)知 Y_a 中有两点不连边,设为 y_1、y_2. 由于 X 中任意两点的邻点集不相交,故特别地,y_1、y_2 不能是 b、c、d、e 中任一点的邻点,从而 $\{y_1, y_2, b, c, d, e\}$ 是 G 的独立集且元素个数大于 5,矛盾!这就证明了 $|X|\geqslant 6$.

(2) 下面证明存在一个满足条件的图 G,其最大独立集的元素个数不超过 6. 将 V 分拆成 3 个点集 V_1、V_2、V_3,使得 $|V_i|=10$, $i=1, 2, 3$.

设 $V_1=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$,将 V_1 中的点按以下方式连边(如图 2-6).

(i) A_iA_{i+1} 连边,$i=1, 2, 3, 4, 5$;

(ii) B_iB_{i+1} 连边,$i=1, 2, 3, 4, 5$;

(iii) A_iB_i, A_iB_{i+1}, A_iB_{i-1} 连边,$i=1, 2, 3, 4, 5$,其中 $A_6=A_1$, $B_6=B_1$, $B_0=B_5$.

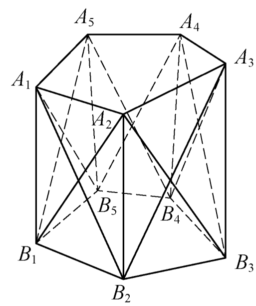


图 2-6

点集 V_2, V_3 连边的方式与 V_1 的完全一样,且对任意 $1\leqslant i<j\leqslant 3$, V_i 与 V_j 之间不连边. 则 G 的任意顶点的度均等于 5,且 G 中任何 5 点中总存在两点不连边.

现任取 G 的一个最大独立集 X,下证 $|V_1\cap X|\leqslant 2$. 事实上,由于 A_i、A_{i+1} 相邻($i=1, 2, 3, 4, 5$),所以 $A_1, \cdots, A_5$ 中至多有两个属于 X. 同理,$B_1, \cdots, B_5$ 中属于 X 的也至多两个. 若 $A_1, \cdots, A_5$ 中恰有两个属于 X,不妨设为 $\{A_1, A_3\}$. 注意到 A_1 的邻点集与 A_3 的邻点集的并集恰好等于 $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$,故 $B_1, \cdots, B_5$ 均不属于 X. 同理,若 $B_1, \cdots, B_5$ 中恰有两个属于 X,则 $A_1, \cdots, A_5$ 均不属于 X,这就证明了 $|V_1\cap X|\leqslant 2$.

同理可得 $|V_2\cap X|\leqslant 2$, $|V_3\cap X|\leqslant 2$. 故

$$|X|=|V\cap X|=|V_1\cap X|+|V_2\cap X|+|V_3\cap X|\leqslant 6,$$

因此 G 符合要求.

综合(1)、(2)的结果,可知所求的 k 值为 6.

我们把例 2 结论的改进作为本节的结束.

例 10 设在平面上有 n 个给定的点. 求证其中距离为 1 的点的对数不超过 $\frac{n}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{3}{2}}$.

证明 把 n 个点视为图 G 的顶点,记 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为图 G 的顶点集,在距离为 1 的两点之间连一边,则由定理一,

$$2e=d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n).$$

用 C_i 表示以 v_i 为圆心、半径为 1 的圆,这 n 个圆两两交点总数不超过 $2\mathrm{C}_n^2=n(n-1)$ 个.

另一方面,若 v_k、v_j 与 v_i 相邻,则 $v_i\in C_k\cap C_j$,因此,v_i 作为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 中两圆的交点恰好被计数了 $\mathrm{C}_{d(v_i)}^2$ 次,故

$$\mathrm{C}_{d(v_1)}^2+\mathrm{C}_{d(v_2)}^2+\cdots+\mathrm{C}_{d(v_n)}^2\leqslant 2\mathrm{C}_n^2=n(n-1). \quad ①$$

由柯西(Cauchy)不等式,有

$$\mathrm{C}_{d(v_1)}^2+\mathrm{C}_{d(v_2)}^2+\cdots+\mathrm{C}_{d(v_n)}^2\geqslant\frac{2}{n}e^2-e. \quad ②$$

由①、②式得
$$\frac{2}{n}e^2-e\leqslant n(n-1),$$

即
$$2e^2-ne-n^2(n-1)\leqslant 0.$$

解得
$$e\leqslant\frac{n}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$

习 题 2

1 设图 $G=(V, E)$, $|V|=n$, $|E|=e$,证明:$\delta\leqslant\frac{2e}{n}\leqslant\Delta$.

2 证明任何一群人(多于两个人)中,至少有两个人,他们的朋友数目相同.

3 n 名选手进行对抗赛,每名选手至少赛一场,每场两名选手参加,已赛完 $n+1$ 场. 证明:至少有一名选手赛过三次.

4 有一个参观团,其中任意四个成员中总有一名成员原先见过其他三名成员. 证明:在任意四名成员中,总有一名成员原先见过所有成员.

5 小城共有 15 部电话,能否用电线连接它们,使得每部电话恰好与 5 部别的电话相连?

6 参加某次学术讨论会共有 123 个人，已知每个人至少和 5 位与会者讨论过问题. 证明：至少有一个人和 5 位以上的与会者讨论过问题.

7 在一次会议中，已知每个议员至多与三人不相识，证明：一定可以把所有议员分为两组，使每一组中，每个议员至多与一人不相识.

8 有 $2n$ 个人在一起聚会，其中每个人至少同其中的 n 个人认识，证明这 $2n$ 个人中总可以找出 4 个人来，这 4 个人可以围着圆桌坐下，使得每个人旁边都是认识的人 $(n \geqslant 2)$.

9 已知 9 个人 v_1，v_2，…，v_9 中 v_1 和 2 个人握过手，v_2、v_3 各和 4 个人握过手，v_4、v_5、v_6、v_7 各和 5 个人握过手，v_8、v_9 各和 6 个人握过手，证明这 9 个人中一定可以找出 3 个人，他们互相握过手.

10 一个旅行团中共 14 人，在山上休息时，他们想打桥牌，而其中每个人都曾和其中的 5 个人合作过. 现规定只有 4 个人中任两个人都未合作过，才能在一起打一局牌. 这样，打了三局就没法再打下去了. 这时，来了另一位旅游者，他当然没有与该旅行团中的任何人合作过. 如果他也参加打牌，证明一定可以再打一局桥牌.

11 对于平面上任意 n 个点构成的点集 P，如果其中任意两点之间的距离均已确定，那么就称这个点集是“稳定的”. 求证：在 $n\ (n \geqslant 4)$ 个点的平面点集 P 中，无三点共线，且其中的 $\frac{1}{2}n(n-3)+4$ 个两点之间的距离已被确定，那么点集 P 就是“稳定的”.（1999 年上海市高中数学竞赛）

12 棱长为 n(自然数)的立方体被平行于它的侧面的平面切成 n^3 个单位立方体，其中有多少对公共顶点不多于 2 的单位立方体？

13 某国首都有 21 条航线连接其他城市，而 A 城只有一条航线与某个城市连接，其他各城市中的每个城市都有 20 条航线连接别处. 证明：由首都可以飞抵 A 城.

1941 年，匈牙利数学家托兰(Turán)为了回答这样的问题："n 个顶点的图 G 不包含 m 个顶点的完全图 K_m，则图 G 的最大边数是多少?"而提出了他的著名定理，从而开创了图论研究的一个新方向"极图理论"，极图理论是近年来图论中比较活跃的分支之一. 匈牙利数学家波洛巴斯(B. Bollobás)在 1978 年专门写了一本《极图理论》，是这方面最具权威的著作.

下面先从 k 部图的定义谈起.

如果图 G 的顶点集 V 可以分解为 k 个两两不交非空子集的并，即

$$V=\bigcup_{i=1}^{k}V_i,\ V_i\cap V_j=\varnothing,\ i\neq j.$$

并且没有一条边，其两个端点都在上述同一子集内，我们称这样的图 G 为 k 部图. 记作 $G=(V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_k;\ E)$.

图 3－1 所示的是一个 2 部图，2 部图又称偶图. 图 3－2 所示的是一个 3 部图.

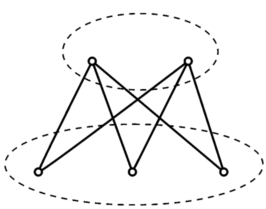


图 3－1

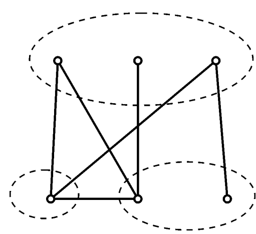


图 3－2

显然任何 n 阶图是一个 n 部图.

如果在一个 k 部图 $G=(V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_k;\ E)$ 中，$|V_i|=m_i$. 任何两点 $u\in V_i$，$v\in V_j$，$i\neq j$，$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，均有 u 和 v 相邻，则称 G 是完全 k 部图，记作 $K_{m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k}$. 图 3－1 所示的是完全偶图 $K_{2,\ 3}$.

完全偶图 $K_{m,\ m}$ 和 $K_{m,\ m+1}$ 中分别有 m^2 和 $m(m+1)$ 条边，于是图中边

数 $=\left[\frac{n^2}{4}\right]$（此处$[x]$表示不超过 x 的最大整数，n 是图的阶），完全偶图 $K_{m,m}$ 和$K_{m,m+1}$中显然不含三角形，下面的定理一表明，在不含三角形的图中，这两类图中边的数目最多.

定理一 有 n 个顶点且不含三角形的图G 的最大边数为$\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

证明 设 v_1 是 G 中具有最大度数的顶点，$d(v_1)=d$. 又设与 v_1 相邻的 d 个顶点为

$$v_n,\ v_{n-1},\ \cdots,\ v_{n-d+1}.$$

由于 G 不含三角形. 所以 v_n，v_{n-1}，$\cdots$，v_{n-d+1} 中任意两点都不相邻，故 G 的边数 e 满足

$$\begin{aligned}e&\leqslant d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_{n-d})\\&\leqslant(n-d)\cdot d\leqslant\left(\frac{n-d+d}{2}\right)^2\\&=\frac{n^2}{4}.\end{aligned}$$

因为边数 e 为整数，所以 $e\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

最大值是可以达到的，当 $n=2m$ 时，取 $G=K_{m,m}$；当 $n=2m+1$ 时，取 $G=K_{m,m+1}$.

定理一的证明，用数学归纳法也可完成，留给读者作为习题.

例 1 设图 G 有 20 个顶点，101 条边. 证明 G 中一定有两个具有公共边的三角形.

证明 可将 20 改为更一般的自然数 $2n$ $(n\geqslant 2)$，用数学归纳法证明：图 G 有 $2n(n\geqslant 2)$个顶点，n^2+1 条边，则 G 中一定有两个具有公共边的三角形.

当 $n=2$ 时，G 有 4 个顶点，5 条边，作完全图 K_4，K_4 有 $C_4^2=6$ 条边，容易验证不论在 K_4 中去掉哪条边，总有两个具有公共边的三角形，即命题在 $n=2$ 时成立.

假设命题在 $n=k$ $(k\geqslant 2)$ 时成立. 设 G 有 $2(k+1)$ 个顶点 v_1，v_2，$\cdots$，v_{2k+2}，$(k+1)^2+1=k^2+2k+2$ 条边. 因为

$$\left[\frac{(2k+2)^2}{4}\right]=[k^2+2k+1]<k^2+2k+2,$$

根据定理一，G 中一定有一个三角形，不妨设是$\triangle v_1v_2v_3$，且

$$d(v_1)\leqslant d(v_2)\leqslant d(v_3).$$

如果 $v_4, v_5, \cdots, v_{2k+2}$ 中有一点与 v_1、v_2、v_3 中的两个点都相邻，那么就得到了两个有公共边的三角形.

如果 $v_4, v_5, \cdots, v_{2k+2}$ 中的每一点，至多只和 v_1、v_2、v_3 中的一个点相邻，则由顶点集 $\{v_4, v_5, \cdots, v_{2k+2}\}$ 引向顶点集 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 的边数不超过

$$(2k+2)-3=2k-1.$$

那么由 $\{v_1, v_2\}$ 引向 $\{v_4, v_5, \cdots, v_{2k+2}\}$ 的边数 $\leqslant \frac{2}{3}(2k-1)$，从 G 中去掉顶点 v_1，v_2 以及与它们相邻的边，得图 G'，G' 的顶点个数是 $2k$，且边的数目

$$\begin{aligned} e' &\geqslant k^2+2k+2-3-\frac{2}{3}(2k-1) \\ &= k^2+\frac{2}{3}k-\frac{1}{3} \\ &\geqslant k^2+1.\text{（因为 } k\geqslant 2\text{）} \end{aligned}$$

由归纳假设，G'中有两个有公共边的三角形，这两个有公共边的三角形也是 G 中的三角形.

从而命题得证.

例 2 S 为 m 个正整数对 $(a, b)(1\leqslant a, b\leqslant n, a\neq b)$ 所组成的集合（(a, b)与(b, a)被认为是相同的）. 证明：至少有 $\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right)$ 个三元数组(a, b, c)，适合：(a, b)，(a, c)及(b, c)都属于 S.（1989 年亚太地区数学奥林匹克）

证明 作一个图 G：用点 v_i 表示数 i，$i=1, 2, \cdots, n$. 当且仅当 $(i, j)\in S$ 时，点 v_i 与点 v_j 相邻. 于是图 G 有 n 个顶点，m 条边. 要证明的问题就是：G 中至少有 $\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right)$ 个三角形.

令顶点 v_i 的度为 d_i，G 中边的集合为 E. 设 $(v_i, v_j)\in E$，则它的两个端点 v_i、v_j 向其余 $n-2$ 个顶点共引出 d_i+d_j-2 条边，故至少有 d_i+d_j-n 对分别由 v_i、v_j 引向同一顶点的边，它们与边(v_i, v_j)构成三角形，因此 G 中至少有 d_i+d_j-n 个三角形包含边(v_i, v_j). 又因为 G 中每个三角形被计算了三次，故 G 中至少有

$$k=\frac{1}{3}\sum_{(v_i, v_j)\in E}(d_i+d_j-n)$$

个三角形. 由于顶点 v_i 的度 d_i 的上述和式中出现 d_i 次,边的条数为 m,故

$$k=\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i^2-mn\right). \qquad ①$$

因为 $\sum_{i=1}^{n}d_i=2m$, 对①式用柯西不等式,得

$$\begin{aligned}k&\geqslant\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2-mn\right]\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{4m^2}{n}-mn\right)\\&=\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right).\end{aligned}$$

注 本题是根据图论中这样的问题:"设 G 是有 m 条边的 n 阶图,则 G 中的三角形个数一定不小于 $\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right)$"改编而成的.

设 $n=mk+r$ $(k\geqslant1,\ 0\leqslant r<m)$. 我们以 $T_m(n)$ 记完全 m 部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$,这里 $n_1=n_2=\cdots=n_r=k+1$, $n_{r+1}=\cdots=n_m=k$. 令 $e_m(n)$表示 $T_m(n)$的边数. 如图 3-3 所示的是 $T_3(5)$, $e_3(5)=8$. $e_m(n)$ 的计算公式如下,证明留作习题.

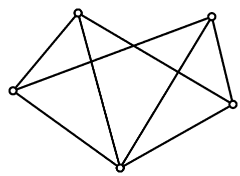


图 3-3

$$e_m(n)=\mathrm{C}_{n-k}^2+(m-1)\mathrm{C}_{k+1}^2,\text{其中 } k=\left[\frac{n}{m}\right].$$

若 $G=(V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m;\ E)$ 是任一 n 阶 m 部图,令 $p_i=|V_i|$ $\left(\sum_{i=1}^{m}p_i=n\right)$,可以验证 G 的边数 $\leqslant e_m(n)$,并且当等号成立时必有 G 与 $T_m(n)$同构(证明留作习题). 换句话说,$T_m(n)$是包含边数最多的 n 阶 m 部图,并且是唯一的这样的图.

显然任意一个 m 部图不含 K_{m+1}. 托兰进一步证明了 $T_m(n)$ 是边数最多的、不含 K_{m+1} 的 n 阶图,并且是唯一的这样的图.

定理二 设 n 阶图 G 不含 K_{m+1},则 G 的边数 $e(G)\leqslant e_m(n)$;当且仅当 G 和 $T_m(n)$同构时等号成立.

这便是托兰定理,证明这里略去. 有兴趣的读者可参阅 J · A · 邦迪和 U · S · R · 默蒂著的《图论及其应用》.

例 3 设 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 是平面上的 6 点,其中任意三点不共线.

(1) 如果这些点之间任意连接 13 条线段，证明：必存在 4 点，它们每两点之间都有线段连接；

(2) 如果这些点之间只有 12 条线段，请你画一个图形，说明(1)的结论不成立(不必用文字说明)；

(3) 结论(1)能否加强为：必存在 4 个 4 阶完全图？给出反例或证明.

解析 (1) 把题目转化成图论语言就是：图 G 有 6 个顶点，13 条边，证明 G 中含有 K_4. 容易算得 $e_4(6)=12<13$，根据定理二，G 中必含有 K_4.

(2) 构造完全 3 部图 $K_{2,2,2}$，如图 3-4 所示. 因从 $K_{2,2,2}$ 中任取 4 点，总有两点属于同一部分，而这两点是不相邻的，因此任取 4 点均不构成 K_4.

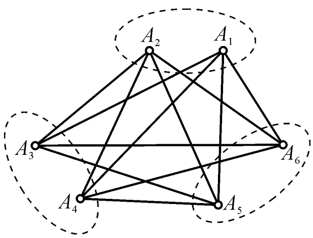


图 3-4

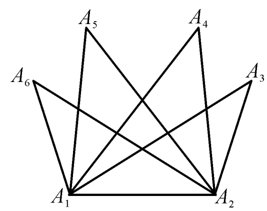


图 3-5

注 对于(1)，不用定理二当然也能证明，而且方法很多，这里仅举两种.

(i) 因为 6 个点的度数之和 $=2\times13=26$，所以这 6 个点中至少有两个点的度数为 5(否则，度数之和 $\leqslant 5+5\times4=25<26$)，不妨设 $d(A_1)=d(A_2)=5$. 与 A_1 或 A_2 关联的边共 9 条，如图 3-5 所示. 于是在 A_3、A_4、A_5、A_6 之间还有 $13-9=4$ 条边. 这 4 条边的任一条的两个端点与 A_1、A_2 这 4 点构成 K_4.

(ii) 因为 6 阶完全图有 15 条边，所以图 G 就是在 K_6 中去掉两条边. 分两种情况讨论：

① 两边有公共点，如图 3-6，则四点组 A_2、A_4、A_5、A_6 组成 K_4；

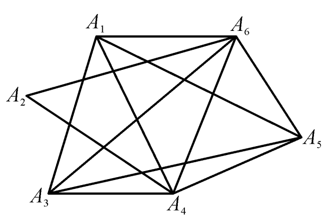


图 3-6

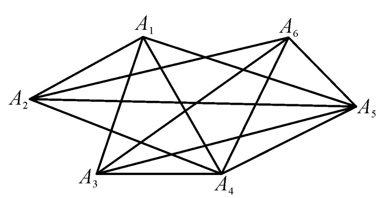


图 3-7

② 两边无公共点，如图 3-7，则四点组 A_1、A_3、A_5、A_6 组成 K_4.

图书在版编目(CIP)数据

图论/熊斌,郑仲义编著. —3版. —上海:华东师范大学出版社,2019
(数学奥林匹克小丛书. 高中卷)
ISBN 978-7-5675-9500-2

Ⅰ. ①图… Ⅱ. ①熊…②郑… Ⅲ. ①图论-高中-教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第191575号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷

图论(第三版)

编　　著　熊　斌　郑仲义
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　徐惟简
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　8
字　　数　137千字
版　　次　2020年4月第三版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9500-2
定　　价　22.00元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师一小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师一初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师一中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师一高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师一初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师一高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。