数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 4

Mathematical Olympiad Series

平均值不等式与柯西不等式

李胜宏 边红平 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有扎实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在 IMO 获得奖牌的学生中，日后有不少成为大数学家. 例如，获菲尔兹奖的数学家有：玛古利斯(G. Margulis，俄罗斯，1978 年)、德里费尔德(V. Drinfeld，乌克兰，1990 年)、约克兹(J. G. Yoccoz，法国，1994 年)、博切尔兹(R. Borcherds，英国，1998 年)、高尔斯(T. Gowers，英国，1998 年)、拉福格(L. Lafforgue，法国，2002 年)、佩雷尔曼(G. Perelman，俄罗斯，2006 年)、陶哲轩(Terence Tao，澳大利亚，2006 年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo，越南，2010 年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss，以色列，2010 年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov，俄罗斯，2010 年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani，女，伊朗，2014 年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 平均值不等式及其证明

平均值不等式是最基本的重要不等式之一,在不等式理论研究和证明中占有重要的位置.平均值不等式的证明有许多种方法.这里,我们选了部分具有代表意义的证明方法,其中用来证明平均值不等式的许多结论,其本身又具有重要的意义.特别是,在许多竞赛的书籍中,都有专门的章节介绍和讨论,如数学归纳法、变量替换、恒等变形和分析综合方法等,这些也是证明不等式的常用方法和技巧.希望大家能认真思考和好好掌握,熟悉不等式的证明.

1.1 平均值不等式

对任意非负实数 a、b,有

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

于是,得

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

一般地,假设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个非负实数,它们的算术平均值记为

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

几何平均值记为

$$G_n = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

算术平均值与几何平均值之间有如下的关系

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

即
$$A_n \geqslant G_n,$$
当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时,等号成立.

上述不等式称为**平均值不等式**,或简称为**均值不等式**.

平均值不等式的表达形式简单,容易记住,但它的证明和应用非常灵活、广泛,其证明有多种不同的方法.为使大家理解和掌握,这里我们选择了其中的几种典型的证明方法.当然,有些方法是几个知识点的结合,很难将它们归类,有些大体相同或相似,但选择的变量不同,或处理的方式不同,导致证明的难易不同,所以,我们将它们看作是不同的方法.

1.2 平均值不等式的证明

证法一(归纳法)

(1) 当 $n = 2$ 时,已知结论成立.

(2) 假设对 $n = k$(正整数 $k \geqslant 2$)时命题成立,即对于 $a_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$,有
$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

那么,当 $n = k + 1$ 时,由于
$$A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1},\ G_{k+1} = \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}},$$
关于 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$ 是对称的,任意对调 a_i 与 $a_j (i \neq j)$,即将 a_i 写成 a_j, a_j 写成 a_i, A_{k+1} 和 G_{k+1} 的值不改变,因此不妨设 $a_1 = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$, $a_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$,显然 $a_1 \leqslant A_{k+1} \leqslant a_{k+1}$,以及
$$A_{k+1}(a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) - a_1 a_{k+1} = (a_1 - A_{k+1})(A_{k+1} - a_{k+1}) \geqslant 0,$$
即
$$A_{k+1}(a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) \geqslant a_1 a_{k+1}.$$

对 k 个正数 $a_2, a_3, \cdots, a_k, a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}$,由归纳假设,得
$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_k + (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}.$$

而
$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_k + (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}{k} = \frac{(k+1)A_{k+1} - A_{k+1}}{k} = A_{k+1},$$

于是 $$A_{k+1}^{k} \geqslant a_2a_3\cdots a_k(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}).$$

两边乘以 A_{k+1}，得

$$\begin{aligned} A_{k+1}^{k+1} &\geqslant a_2a_3\cdots a_kA_{k+1}(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}) \\ &\geqslant a_2a_3\cdots a_k(a_1a_{k+1})=G_{k+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

从而，有 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$.

直接验证可知，当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立，故命题成立.

说明 这里，利用了证明与正整数有关的命题的常用方法，即数学归纳法. 数学归纳法证题技巧的应用，可以说是五彩缤纷，千姿百态. 应用数学归纳法，除了需要验证当 $n=1$ 或 $n=n_0$（这里 n_0 为某个固定的正整数）外，其关键是要在 $n=k$ 时成立的假设之下，导出当 $n=k+1$ 时命题也成立，要完成这一步，需要一定的技巧和处理问题的能力，只有通过多做练习来实现理解和掌握.

证法二（归纳法，与证法一的不同处理）

(1) 当 $n=2$ 时，已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$（正整数 $k\geqslant 2$）时命题成立，即对于 $a_i>0$，$i=1$，2，…，k，有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，由归纳假设得

$$\begin{aligned}
& a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} && ① \\
&= a_1+a_2+\cdots+a_k+(a_{k+1}+\overbrace{G_{k+1}+\cdots+G_{k+1}}^{(k-1)\text{个}G_{k+1}})-(k-1)G_{k+1} && ② \\
&\geqslant k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\sqrt[k]{a_{k+1}G_{k+1}^{k-1}}-(k-1)G_{k+1} && ③ \\
&\geqslant 2k\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}G_{k+1}^{k-1}}}-(k-1)G_{k+1} && ④ \\
&= 2k\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{k+1}G_{k+1}^{k-1}}-(k-1)G_{k+1} && ⑤ \\
&= 2k\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1}G_{k+1}^{k-1}}-(k-1)G_{k+1} && ⑥ \\
&= (k+1)G_{k+1}, && ⑦
\end{aligned}$$

于是 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$.

不难看出，当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立，故命题成立.

说明 在这个证明中，为了利用归纳假设，将①写成②的形式. 由归纳假设，从②得到③，由于当 $n=2$ 时，不等式成立，则由③得到了④.

证法三(归纳法,另一种处理方式)

(1) 当 $n=2$ 时,已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$(正整数 $k\geqslant 2$)时命题成立,即对于 $a_i>0$, $i=1$, 2, $\cdots$, k, 有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

那么,当 $n=k+1$ 时,由归纳假设得

$$\begin{aligned}A_{k+1}&=\frac{1}{2k}[(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}]\\&=\frac{1}{2k}(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+\underbrace{A_{k+1}+A_{k+1}+\cdots+A_{k+1}}_{\text{共}k-1\text{个}})\\&\geqslant\frac{1}{2k}(k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}})\\&\geqslant\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}.\end{aligned}$$

所以 $A_{k+1}^{2k}\geqslant a_1a_2\cdots a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}$, 故得 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$.

说明 (1) 在上面的证明中,将 A_{k+1} 表示为 $A_{k+1}=\frac{1}{2k}[(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}]$ 是一步较为关键和重要的变形技巧.

(2) 我们也可以从 G_{n+1} 出发进行处理,由归纳假设,得到

$$\begin{aligned}G_{n+1}&=[(G_{n+1})^{\frac{n+1}{n}}(G_{n+1})^{\frac{n-1}{n}}]^{\frac{1}{2}}\\&=[(a_1\cdots a_na_{n+1})^{\frac{1}{n}}(G_{n+1})^{\frac{n-1}{n}}]^{\frac{1}{2}}\\&=G_n^{\frac{1}{2}}(a_{n+1}^{\frac{1}{n}}G_{n+1}^{\frac{n-1}{n}})^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(G_n+a_{n+1}^{\frac{1}{n}}G_{n+1}^{\frac{n-1}{n}})\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(G_n+\frac{a_{n+1}+(n-1)G_n}{n}\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(A_n+\frac{a_{n+1}+(n-1)G_n}{n}\right)\\&=\frac{nA_n+a_{n+1}}{2n}+\frac{(n-1)G_{n+1}}{2n}\\&=\frac{(n+1)A_{n+1}}{2n}+\frac{(n-1)G_{n+1}}{2n},\end{aligned}$$

即
$$\frac{(n+1)A_{n+1}}{2n}\geqslant\frac{(n+1)G_{n+1}}{2n}.$$

故 $A_{n+1}\geqslant G_{n+1}$.

证法四(归纳法和变换)

在证明原命题之前,首先令

$$y_1=\frac{a_1}{G_n},\ y_2=\frac{a_2}{G_n},\ \cdots,\ y_n=\frac{a_n}{G_n},$$

其中 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,则 $y_1y_2\cdots y_n=1(y_i>0)$,且平均值不等式等价于

$$y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n.$$

即在条件 $y_1y_2\cdots y_n=1\ (y_i>0)$ 之下,证明 $y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n$.

我们用归纳法证明上述不等式.

(1) 当 $n=1$ 时,$y_1=1\geqslant 1$,显然成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时不等式成立,则对于 $n=k+1$,由于 $y_1y_2\cdots y_n=1$ $(y_i>0)$,那么 y_i 中必有大于或等于 1 者,也有小于或等于 1 者,不妨设 $y_k\geqslant 1$,$y_{k+1}\leqslant 1$,并令 $y=y_ky_{k+1}$,则 $y_1y_2\cdots y_{k-1}y=1$,从而由归纳假设,得

$$y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y\geqslant k.$$

于是

$$\begin{aligned}&y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y_k+y_{k+1}\\ \geqslant\ &k+y_k+y_{k+1}-y_ky_{k+1}\\ =\ &k+1+(y_k-1)(1-y_{k+1})\\ \geqslant\ &k+1.\end{aligned}$$

不难看出,当且仅当 $y_1=y_2=\cdots=y_n=1$,从而 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时,等号成立.

故当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

说明 通过变量替换,将原问题化为一个与正整数有关的形式简单的不等式,在证明中运用了我们比较熟悉的手段和技巧.

证法五(归纳法和二项展开式)

(1) 当 $n=2$ 时,已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$ (正整数 $k\geqslant 2$) 时命题成立,即对于 $a_i>0$,$i=1, 2, \cdots, k$,有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

那么,当 $n=k+1$ 时,不妨假设 $a_{k+1}=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$,于是由归纳假设,得

$$a_{k+1} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} = A_k \geqslant G_k = \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}.$$

从而,得

$$\begin{aligned} A_{k+1}^{k+1} &= \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{kA_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = \left(A_k+\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)^{k+1} &⑧ \\ &= A_k^{k+1}+(k+1)A_k^k\left(\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)^{k+1} &⑨ \\ &\geqslant A_k^{k+1}+(k+1)A_k^k\left(\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right) = A_k^{k+1}+A_k^k(a_{k+1}-A_k) &⑩ \\ &= A_k^k a_{k+1} \geqslant G_k^k a_{k+1} = a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} &⑪ \\ &= G_{k+1}^{k+1}. &⑫ \end{aligned}$$

所以　$A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

不难看出,当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立,故命题成立.

说明　在证明过程中,考虑 A_{k+1}^{k+1},并通过一定的处理和运算,导出所需要的结果.有时候可能利用到其他的有用结论.

证法六(归纳法和函数)

(1) 当 $n=2$ 时,易知结论成立.

(2) 假设 $n=k$(正整数 $k \geqslant 2$)时命题成立,即 $A_k \geqslant G_k$.那么,当 $n=k+1$ 时,作函数 $f(x)=\left(\frac{a_1+\cdots+a_n+x}{n+1}\right)^{n+1}-a_1\cdots a_n x$, $x \in \mathbf{R}$,并令

$$f'(x)=\left(\frac{a_1+\cdots+a_n+x}{n+1}\right)^n - a_1\cdots a_n = 0,$$

解之得 $x_0 = -(a_1+\cdots+a_n)+(n+1)\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$
$= -nA_n+(n+1)G_n$.

不难验证,x_0 为 $f(x)$的唯一极小值点,且为最小值点,以及

$$f(x_0)=n(G_n)^n(A_n-G_n).$$

由归纳假设,得 $f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant 0$,即

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n+x}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant a_1\cdots a_n x.$$

令 $x=a_{n+1} \geqslant 0$,则 $A_{n+1}^{n+1} \geqslant G_{n+1}^{n+1}$.

故 $A_{n+1} \geqslant G_{n+1}$.

证法七(归纳法与 Jacobsthai 不等式)

为了证明平均值不等式,需要证明一个引理.

引理 1　假设 x、y 为正实数,n 为正整数,则

$$x^{n+1} + ny^{n+1} \geqslant (n+1)y^n x.$$

引理的证明:由于 x、y 与 x^k、$y^k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 同序,所以

$$(x-y)(x^k - y^k) \geqslant 0.$$

于是

$$\begin{aligned} & x^{n+1} + ny^{n+1} - (n+1)xy^n \\ = {} & x(x^n - y^n) - ny^n(x-y) \\ = {} & (x-y)[x(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) - ny^n] \\ = {} & (x-y)[(x^n - y^n) + (x^{n-1} - y^{n-1})y + \cdots + (x-y)y^{n-1}] \\ \geqslant {} & 0. \end{aligned}$$

故引理 1 成立. 现在,我们利用引理 1 和数学归纳法证明平均值不等式.

(1) 当 $n=2$ 时,已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$(正整数 $k \geqslant 2$) 时命题成立. 那么,当 $n=k+1$ 时,令 $a_1a_2\cdots a_k = y^{k(k+1)}$, $a_{k+1} = x^{k+1}$, x, $y \geqslant 0$,则由归纳假设和引理 1,得

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} \\ \geqslant {} & k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k} + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} \\ = {} & ky^{k+1} + x^{k+1} - (k+1)y^k x \geqslant 0. \end{aligned}$$

不难看出,当且仅当所有的 a_i 相等时等式成立,故命题成立.

说明　(1) 引理 1 中的不等式称为 Jacobsthai 不等式.

(2) 在 Jacobsthai 不等式中,取 $y=1$,得到

伯努利不等式　$x^n \geqslant 1 + n(x-1)$, $x > 0$, $n \geqslant 1$.

关于伯努利(Bernoulli)不等式和平均值不等式,我们有如下的结论.

定理　伯努利不等式与平均值不等式等价.

事实上,如果假设伯努利不等式成立,则对 $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} > 0$,有

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geqslant 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) = \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}},\ n \geqslant 2.$$

于是

$$A_n^n \geqslant a_n A_{n-1}^{n-1},\ n \geqslant 2.$$

从而,$A_n^n \geqslant a_n A_{n-1}^{n-1} \geqslant a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geqslant \cdots \geqslant a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 = G_n^n$.

故 $A_n \geqslant G_n$.

反之,如果平均值不等式成立,则当 $n=1$ 时,伯努利不等式成立.

当 $n\geqslant 2$ 时,若 $0<x\leqslant 1-\dfrac{1}{n}$,则伯努利不等式成立.

若 $x>1-\dfrac{1}{n}$,则 $1+n(x-1)>0$,由平均值不等式,得

$$\begin{aligned} x^n &= \left(\frac{(1+n(x-1))+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1\text{个}1}}{n}\right)^n \\ &\geqslant (1+n(x-1))\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1=1+n(x-1), \end{aligned}$$

从而,伯努利不等式成立.

注 伯努利不等式的一般形式:

设 $x>-1$,则实数 $r\leqslant 0$ 或 $r\geqslant 1$ 时,$(1+x)^r\geqslant 1+rx$;

若 $0\leqslant r\leqslant 1$,则$(1+x)^r\leqslant 1+rx$;

设 $x_i\geqslant -1$, $1\leqslant i\leqslant n$,且 x_i 与 x_j 同号,$1\leqslant i$, $j\leqslant n$,则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+\cdots+x_n.$$

证法八(数列与 Jacobsthai 不等式)

令 $f(n)=n\left(\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$,如果能证明 $f(n)$ 关于 n 单调不减,即 $f(n)\leqslant f(n+1)$, $n\geqslant 2$. 那么,由 $f(2)\geqslant 0$,得到 $f(n)\geqslant f(2)\geqslant 0$,则平均值不等式成立.

下面利用 Jacobsthai 不等式证明 $f(n)$的单调性.

令 $a_1a_2\cdots a_n=y^{n(n+1)}$, $a_{n+1}=x^{n+1}$, x, $y\geqslant 0$,则由引理 1,得

$$\begin{aligned} &f(n+1)-f(n) \\ &=(n+1)\left(\frac{a_1+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_{n+1}}\right) \\ &\quad -n\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\right) \\ &=a_{n+1}-(n+1)\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_{n+1}}+n\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \\ &=x^{n+1}-(n+1)y^nx+ny^{n+1}\geqslant 0. \end{aligned}$$

这表明 $f(n+1)\geqslant f(n)$.

另外,由于 $f(2)\geqslant 0$,则对任意 $n\geqslant 2$,得

$$f(n)\geqslant f(n-1)\geqslant\cdots\geqslant f(2)\geqslant 0.$$

不难看出,当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立,故平均值不等式成立.

证法九(倒向归纳法)

倒向归纳法,也称"留空回填"法.基本思想是先对自然数的一个子列$\{n_m\}$证明命题成立,然后再回过来证明$\{n\}\backslash\{n_m\}$相应的命题成立.

首先证明当$n=2^m$(m为正整数)时,平均值不等式成立.为此,对m用数学归纳法.

当$m=1$时,显然有$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}$.

假设$m=k$时命题成立,则当$m=k+1$时,

$$\begin{aligned}&\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\\=&\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}\ \sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}}\\\leqslant&\frac{1}{2}(\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}})\\\leqslant&\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\\=&\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

所以对于具有$n=2^m$形式的正整数n,平均值不等式成立,即对无穷多个正整数2,4,8,…,2^m,…,平均值不等式成立.

现假设$n=k+1$时,平均值不等式成立.

当$n=k$时,$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$,则由假设,得

$$\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_kA_k}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+A_k}{k+1}=\frac{kA_k+A_k}{k+1}=A_k,$$

所以$G_k\leqslant A_k$,也就是说当$n=k$时命题也成立.

综上可知,对一切正整数n,平均值不等式成立.不难看出,当且仅当所有的a_i相等时等号成立,故命题成立.

注 由上述证明知,对任意整数$n\geqslant1$,有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}\geqslant\sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_{2^n}}.$$

如果取a_1,a_2,…,a_n,$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{2^n}=A_n$,则

$$\begin{aligned}A_n=\frac{nA_n+(2^n-n)A_n}{2^n}&\geqslant\sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_nA_n^{2^n-n}}\\&=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{2^n}}\cdot A_n^{1-\frac{n}{2^n}},\end{aligned}$$

从而 $A_n \geqslant G_n$. 故平均值不等式成立.

证法十(利用排序不等式)

为了利用与上面不同的方法证明平均值不等式,我们首先介绍和证明另一个重要的结论,即排序不等式.

引理 2(排序不等式) 设两个实数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,满足

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n;\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n,$$

则

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n(\text{同序乘积之和}) \\ \geqslant\ & a_1b_{j_1} + a_2b_{j_2} + \cdots + a_nb_{j_n}(\text{乱序乘积之和}) \\ \geqslant\ & a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1(\text{反序乘积之和}) \end{aligned}$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,并且等号同时成立的充分必要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 成立.

引理的证明:令 $A = a_1b_{j_1} + a_2b_{j_2} + \cdots + a_nb_{j_n}$. 如果 $j_n \neq n$,且假设此时 b_n 所在的项是 $a_{j_m}b_n$,则由 $(b_n - b_{j_n})(a_n - a_{j_m}) \geqslant 0$,得

$$a_nb_n + a_{j_m}b_{j_n} \geqslant a_{j_m}b_n + a_nb_{j_n},$$

也就是说,$j_n \neq n$ 时,调换 A 中 b_n 与 b_{j_n} 的位置,其余都不动,则得到 a_nb_n 项,并使 A 变为 A_1,且 $A_1 \geqslant A$. 用同样的方法,可以再得到 $a_{n-1}b_{n-1}$ 项,并使 A_1 变为 A_2,且 $A_2 \geqslant A_1$.

继续这个过程,至多经过 $n-1$ 次调换,得 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$,故

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant A.$$

同样可以证明 $A \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$.

显然当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时,两个等号同时成立. 反之,如果$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$及$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$中的数都不全相同时,则必有 $a_1 \neq a_n$, $b_1 \neq b_n$. 于是 $a_1b_1 + a_nb_n > a_1b_n + a_nb_1$,且

$$a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} \geqslant a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2,$$

从而有

$$a_1b_n + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

故这两个等式中至少有一个不成立.

现在,利用引理 2 证明平均值不等式.

令 $y_k = \dfrac{a_1a_2\cdots a_k}{G_n^k}$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 由排序不等式,得

$$\begin{aligned}
&y_1\times\frac{1}{y_1}+y_2\times\frac{1}{y_2}+\cdots+y_n\times\frac{1}{y_n}\\
\leqslant\ &y_1\times\frac{1}{y_n}+y_2\times\frac{1}{y_1}+\cdots+y_n\times\frac{1}{y_{n-1}}\\
=\ &\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{G_n},
\end{aligned}$$

所以 $A_n\geqslant G_n$.

显然当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，$A_n=G_n$. 如果 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 不全相等，不妨设 $a_1\neq a_2$，令 $b=\dfrac{a_1+a_2}{2}$，则 $a_1a_2<b^2$，且 $b+b=a_1+a_2$，

$$G_n<\sqrt[n]{b\cdot b\cdot a_3\cdots a_n}\leqslant\frac{b+b+a_3+\cdots+a_n}{n}=A_n.$$

故当 $A_n=G_n$ 时必有 $a_1=a_2=\cdots=a_n$. 反之亦然.

注 (1) 我们可以类似于证法四，由 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，令

$$y_1=\frac{a_1}{G_n},\ y_2=\frac{a_2}{G_n},\ \cdots,\ y_n=\frac{a_n}{G_n},$$

则 $y_1y_2\cdots y_n=1$ ($y_i>0$)，且平均值不等式等价于

$$y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n.$$

下面利用排序不等式证明这个不等式.

任取 $x_1>0$，再取 $x_2>0$，使得 $y_1=\dfrac{x_1}{x_2}$，再取 $x_3>0$，使得 $y_2=\dfrac{x_2}{x_3}$，$\cdots$，最后取 $x_n>0$，使得 $y_{n-1}=\dfrac{x_{n-1}}{x_n}$. 所以

$$y_n=\frac{1}{y_1y_2\cdots y_{n-1}}=\frac{1}{\dfrac{x_1}{x_2}\,\dfrac{x_2}{x_3}\cdots\dfrac{x_{n-1}}{x_n}}=\frac{x_n}{x_1}.$$

由引理 2，得

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n.$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立，从而当且仅当 $y_1=y_2=\cdots=y_n$ 时等号成立，所以当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

(2) 排序不等式是一个重要的基本的不等式，可以利用排序不等式直接证明许多其他有关的不等式. 例如：

切比雪夫(Chebyshev)不等式 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时等号成立.

证明 显然

$$\begin{aligned}
& n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \\
= & \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_k b_k - a_k b_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_j b_j - a_j b_k) \\
= & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_k b_k + a_j b_j - a_k b_j - a_j b_k) \\
= & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_k - a_j)(b_k - b_j) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

故命题成立.

证法十一（调整法）

(1) 首先，如果 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，那么必有 $A_n = G_n$. 下设这些数不全等，不妨设 $a_1 = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $a_2 = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则 $a_1 < A_n < a_2$, $a_1 < G_n < a_2$. 令 $b_1 = A_n$, $b_2 = a_1 + a_2 - A_n$, $b_i = a_i$, $i \geqslant 3$. 并记 $A_n^1 = \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$，则 $A_n^1 = A_n$，且由于

$$\begin{aligned}
b_1 b_2 - a_1 a_2 &= A_n(a_1 + a_2 - A_n) - a_1 a_2 \\
&= (A_n - a_1)(a_2 - A_n) > 0,
\end{aligned}$$

则 $G_n \leqslant G_n^1 = \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}$.

(2) 如果 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$，则命题成立. 若不全等，则必有最大和最小者，而且它们都不等于 A_n，仿照上面作法，可以得到 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，这组数中，有两个数为 A_n，且 $A_n^2 = \dfrac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} = \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = A_n^1 = A_n$, $G_n^2 = \sqrt[n]{c_1 c_2 \cdots c_n} \geqslant G_n^1 \geqslant G_n$. 如果 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n$，那么 $A_n^2 = G_n^2$，从而 $A_n = A_n^2 \geqslant G_n$. 如果 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 仍然不全相等，再按上述方法，进行第三次变换，所得到的新的数组中必有 3 个数都为 A_n. 这样下去，一定存在某个数 $m(2 \leqslant m \leqslant n)$ 使得

$$A_n = A_n^1 = \cdots = A_n^m,\ G_n \leqslant G_n^1 \leqslant G_n^2 \leqslant \cdots \leqslant G_n^m,\ A_n^m = G_n^m,$$

从而得 $A_n \geqslant G_n$，且只要 a_1，a_2，…，a_n 不全相等，必有 $A_n > G_n$. 故命题成立.

注 调整法是证明不等式或求最值的一种有效方法，特别是对那些当变量相等时取等号或取到最值的有关问题.

证法十二（利用辅助命题）

为了证明平均值不等式，首先证明另一个不等式，即

引理 3 如果 $x_k \geqslant 0$，且 $x_k \geqslant x_{k-1}(k = 2, 3, \cdots, n)$，则

$$x_n^n \geqslant x_1(2x_2 - x_1)(3x_3 - 2x_2)\cdots[nx_n - (n-1)x_{n-1}],$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时等号成立.

引理的证明：因为 $x_k \geqslant x_{k-1}$，则

$$x_k^{k-1} + x_k^{k-2}x_{k-1} + \cdots + x_{k-1}^{k-1} \geqslant kx_{k-1}^{k-1},$$

所以

$$\begin{aligned} x_k^k - x_{k-1}^k &= (x_k - x_{k-1})(x_k^{k-1} + x_k^{k-2}x_{k-1} + \cdots + x_{k-1}^{k-1}) \\ &\geqslant kx_{k-1}^{k-1}(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

即

$$x_k^k \geqslant x_{k-1}^{k-1}[kx_k - (k-1)x_{k-1}]\ (k = 1, 2, \cdots, n),$$

当且仅当 $x_k = x_{k-1}$ 时等号成立.

所以

$$x_n^n = x_1 \frac{x_2^2}{x_1} \frac{x_3^3}{x_2^2} \cdots \frac{x_n^n}{x_{n-1}^{n-1}} \geqslant x_1(2x_2 - x_1)(3x_3 - 2x_2)\cdots[nx_n - (n-1)x_{n-1}].$$

现在利用引理 3 证明平均值不等式.

不妨假设 $a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_2 \geqslant a_1 > 0$. 由 $A_k = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$，则 $A_k \geqslant A_{k-1} > 0\ (k = 2, 3, \cdots, n)$，且 $kA_k - (k-1)A_{k-1} = a_k$. 由引理 3，得

$$A_n^n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n,$$

即 $A_n \geqslant G_n$. 当且仅当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$，即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

证法十三（函数方法）

引理 4 如果函数 $f(x): (a, b) \to \mathbf{R}$ 满足

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x) + f(y)}{2},\ x, y \in (a, b), \qquad ⑬$$

那么

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},\tag{14}$$

其中 $x_i\in(a, b)$.

引理的证明:对 n 用归纳法.

当 $n=1, 2$ 时,结论显然成立.

设当 $n=k$ 时结论成立.对于 $n=k+1$,有

$$A_{k+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{2k}+\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k},$$

并记
$$B=\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k},$$

则
$$\begin{aligned}f(A_{k+1})&=f\left(\frac{A_k+B}{2}\right)\\&\geqslant\frac{1}{2}[f(A_k)+f(B)]\\&\geqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k}[f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_k)]\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{k}[f(a_{k+1})+(k-1)f(A_{k+1})]\right\}.\end{aligned}$$

所以

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right)\geqslant\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{k+1})}{k+1}.$$

我们称满足⑬式的函数为凹函数(可以证明,如果函数 f 二阶可导,则当 $f''(x)\leqslant 0$ 时,f 为凹函数).特别的,不难验证函数 $f(x)=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凹函数,于是,对 $a_i\in(0, +\infty)$, $i=1, 2, \cdots, n$,我们有

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\geqslant\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n},$$

从而
$$\ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

由对数函数的单调性,得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}},$$

故命题成立.

下面验证 $\ln x$ 为凹函数. 对任意 x, y, 要使得:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

即

$$\ln\frac{x+y}{2}\geqslant\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$

等价于

$$\ln\frac{x+y}{2}\geqslant\ln(xy)^{\frac{1}{2}}.$$

由函数的单调性,等价于

$$\frac{x+y}{2}\geqslant(xy)^{\frac{1}{2}},$$

这个可以由 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2>0$ 直接导出.

另外,设 $p>0$, $q>0$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 由于函数 $f(x)=\ln x$, $x\in\mathbf{R}_+$ 为凹函数,则对 x, $y>0$, 有

$$\frac{1}{p}\ln x+\frac{1}{q}\ln y\leqslant\ln\left(\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y\right),$$

即

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y.$$

等号成立的充分必要条件是 $x=y$.

这个不等式称为 Young 不等式.

注 引理 4 中的不等式⑭,称为琴生(Jensen)不等式,它的一般形式为

设 $y=f(x)$, $x\in(a, b)$ 为凹函数,则对任意 $x_i\in(a, b)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 我们有加权的琴生不等式

$$\frac{1}{p_1}f(x_1)+\frac{1}{p_2}f(x_2)+\cdots+\frac{1}{p_n}f(x_n)\leqslant f\left(\frac{x_1}{p_1}+\frac{x_2}{p_2}+\cdots+\frac{x_n}{p_n}\right),$$

其中 $p_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=1$.

证法十四(平均值不等式与函数不等式)

利用函数 $f(x)=e^x-1-x$ 的性质,不难得到

引理 5　$e^x \geqslant 1+x,\ x\in\mathbf{R}$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立.

设 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\geqslant 0$. 令 $a_k=(1+x_k)A_n$,其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$.
由引理 5,$e^{x_k}\geqslant 1+x_k$,于是

$$\begin{aligned}G_n&=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)A_n\Big)^{\frac{1}{n}}\\&=A_n\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\Big)^{\frac{1}{n}}\leqslant A_n\Big(\prod_{k=1}^{n}e^{x_k}\Big)^{\frac{1}{n}}\\&=A_ne^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}=A_n,\end{aligned}$$

从而 $A_n\geqslant G_n$,故平均值不等式成立.

证法十五(几何方法)

作函数 $y=e^{\frac{x}{G_n}}$ 的图象,并过点$(G_n,\ e)$作该曲线的切线 $y=\frac{e}{G_n}x$. 易知

$$e^{\frac{x}{G_n}}\geqslant\frac{e}{G_n}x,\ x\geqslant 0.$$

当且仅当 $x=G_n$ 时,等号成立.

对 $a_i\geqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant n$,有 $e^{\frac{a_i}{G_n}}\geqslant\frac{e}{G_n}a_i,\ 1\leqslant i\leqslant n$,将这 n 个不等式相乘,
得 $e^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{G_n}}\geqslant\frac{e^n}{G_n^n}a_1a_2\cdots a_n$,即 $e^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{G_n}}\geqslant e^n$.

由函数 $y=e^x$ 的单调性,得$\frac{a_1+\cdots+a_n}{G_n}\geqslant n$.

从而 $A_n\geqslant G_n$,且当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时等号成立. 故平均值不等式成立.

在这部分,我们利用不同的方法证明了平均值不等式成立. 在证明过程中,利用了各种技巧和方法.

习　题　1

1 设 $a,\ b,\ c>0,\ abc=1$. 求证:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

2 设 $a,\ b,\ c\geqslant 0,\ a+b+c>0$,求证:$\frac{(a+b)^3(b+c)^2(c+a)}{(a+b+c)^6}\leqslant\frac{4}{27}$,并指

出等号成立的条件.

3 已知 $0<a,b,c<1$，并且 $ab+bc+ca=1$. 证明：

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4 设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}_+$ 满足 $abcd=1$，$a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$.

求证：$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$.

5 设 $a_i>0$，$1\leqslant i\leqslant n$. 求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^3+a_{i+1}^3}{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2}\geqslant\frac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，其中，$a_{n+1}=a_1$.

6 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. 求证：

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)\geqslant(n^2-1)^n.$$

7 设 $a,b,c,d>0$，满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. 求证：

$$a+b+c+d+\frac{1}{abcd}\geqslant 18.$$

8 设 $x_i\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant n$，$n\geqslant 3$ 满足 $x_1+\cdots+x_n=1$，求证：

$$\frac{3}{4}\leqslant\frac{x_1^2+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n^2}\leqslant\frac{4}{3}.$$

9 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，且 $x_1x_2\cdots x_n=1$. 求证：

$$\frac{1}{x_1(1+x_1)}+\frac{1}{x_2(1+x_2)}+\cdots+\frac{1}{x_n(1+x_n)}\geqslant\frac{n}{2}.$$

10 设 $a,b,c>0$ 且 $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leqslant 4$. 求证：

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3.$$

11 已知 a、b、c 为正实数，且 $abc=8$，求证：

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\geqslant\frac{4}{3}.$$

12 设 $a,b\in\mathbf{R}$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. 求证：对一切正整数 n，有

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

13 设 $a, b \in \mathbf{R}_+$，求证：$\sqrt{a}+1>\sqrt{b}$ 成立的充要条件是对任意 $x>1$，有 $ax+\frac{x}{x-1}>b$.

14 设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，且 $x_1^2+x_2^2 \leqslant 1$. 求证：对任意 $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$，有

$$(x_1y_1+x_2y_2-1)^2 \geqslant (x_1^2+x_2^2-1)(y_1^2+y_2^2-1).$$

15 设 a、b、c 为正实数，求证：

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

16 设 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}_+$，证明：

$$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3} \leqslant \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2+\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2.$$

17 设 a、b、c 为正实数，且 $a+b+c=1$. 求证：

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

18 设 x、y、z 为正实数，且 $x \geqslant y \geqslant z$. 求证：

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geqslant x^2+y^2+z^2.$$

19 设 a、b、c 为正实数，满足 $a^2+b^2+c^2=1$. 求证：

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geqslant \sqrt{3}.$$

20 设 a、b、c、d 是非负实数，满足 $ab+bc+cd+da=1$. 求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+d+b}+\frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}.$$

21 设 n 为给定的自然数，$n \geqslant 3$，对于 n 个给定的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，记 $|a_i-a_j|$ $(1 \leqslant i<j \leqslant n)$ 的最小值为 m，求在 $a_1^2+\cdots+a_n^2=1$ 时，m 的最大值.

22 设 $x, y \in \mathbf{R}_+$，$x+y^{2016}>1$，求证：

$$x^{2016}+y>1-\frac{1}{100}.$$

23 设 $x_i>0$，$1 \leqslant i \leqslant n$，$x_1x_2\cdots x_n=1$. 求证：

$$\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{2}+x_i) \geqslant (1+\sqrt{2})^n.$$

24 设 a, b, c, $d>0$. 求证:

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd+4(a-b)^2\sqrt{abcd}.$$

25 设 a, b, c, $d>0$ 满足 $a+b+c+d=3$. 求证:

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\leqslant\frac{1}{(abcd)^3}$$

26 设 $x_i\in\mathbf{R}$,满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$, $h\geqslant 2$. 求证:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{n}ix_i^2}\right)^2\frac{x_k^2}{k}\leqslant\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k},$$

并确定等式成立的条件.

2.1 平均值不等式在不等式证明中的应用

下面举例说明平均值不等式在证明各种竞赛问题中的应用.在证明过程中,应用灵活,具有较高的技巧性.

例 1 设 $f(x)=\dfrac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})$ $(a>0,a\neq1)$,证明:对正整数 $n\geqslant2$,有

$$f(n)>n.$$

证明 当 $n\geqslant2$ 时,由平均值不等式,得

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{a}{a^2-1}(a^n-a^{-n})=\frac{a}{a^2-1}\left(a^n-\frac{1}{a^n}\right)\\&=\frac{a}{a^2-1}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}\frac{1}{a}+a^{n-3}\frac{1}{a^2}+\cdots+a\frac{1}{a^{n-2}}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)\\&\geqslant\frac{a}{a^2-1}\left(a-\frac{1}{a}\right)n\sqrt[n]{a^{n-1}a^{n-2}\cdots a^2a\frac{1}{a}\frac{1}{a^2}\cdots\frac{1}{a^{n-1}}}=n,\end{aligned}$$

当且仅当 $a=1$ 时等号成立,故命题成立.

例 2 设 $x>0$,证明:$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant2\cdot2^{\sqrt[6]{x}}$.

证明 由该不等式的外形,很容易想到平均值不等式.由平均值不等式,得

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant2\cdot\sqrt{2^{\sqrt[12]{x}}2^{\sqrt[4]{x}}}=2\cdot2^{\frac{\sqrt[12]{x}+\sqrt[4]{x}}{2}}.$$

又

$$\frac{\sqrt[12]{x}+\sqrt[4]{x}}{2}\geqslant(x^{\frac{1}{12}}x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{6}}.$$

所以

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant2\cdot2^{\sqrt[6]{x}}.$$

例 3 设 $a_i>0$, $i=1, 2, \cdots, n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$. 证明:

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n.$$

证明 由于对任意的 i,

$$2+a_i=1+1+a_i\geqslant 3\sqrt[3]{a_i}.$$

故 $$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n\sqrt[3]{a_1a_2\cdots a_n}=3^n.$$

注 此题也可以用归纳法证明.

当 $n=1$ 时,则 $a_1=1$, 显然成立. 假定当 $n=k$ 时成立,那么,对于 $n=k+1$, 由于 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1$, 如果有某个 $a_i=1$, 则由归纳假设,命题成立. 如果 a_i 都不为 1,则必有大于 1 的,且必有小于 1 的,不妨设 $a_k>1$, $a_{k+1}<1$. 则由归纳假设,得

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_{k-1})(2+a_ka_{k+1})\geqslant 3^k.$$

于是,为了证明命题,只要证明

$$(2+a_k)(2+a_{k+1})\geqslant 3(2+a_ka_{k+1})$$

便可.

因为 $$(2+a_k)(2+a_{k+1})\geqslant 3(2+a_ka_{k+1}),$$

等价于 $$4+2a_k+2a_{k+1}+a_ka_{k+1}\geqslant 6+3a_ka_{k+1},$$

等价于 $$a_k+a_{k+1}-a_ka_{k+1}-1\geqslant 0,$$

等价于 $$(a_k-1)(1-a_{k+1})\geqslant 0.$$

由假设最后不等式成立,故命题成立.

注 这里,选取 $a_k>1$, $a_{k+1}<1$, 在平均值不等式的证明方法四中有过类似的考虑.

例 4 设 $a>b>0$, 求证: $\sqrt{2}a^3+\dfrac{3}{ab-b^2}\geqslant 10$.

证明 因为 $ab-b^2=b(a-b)\leqslant\dfrac{[b+(a-b)]^2}{4}=\dfrac{a^2}{4}$, 所以

$$\begin{aligned}\sqrt{2}a^3+\frac{3}{ab-b^2}&\geqslant\sqrt{2}a^3+\frac{12}{a^2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}a^3+\frac{\sqrt{2}}{2}a^3+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}\\&\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{2}a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a^3\cdot\frac{4}{a^2}\cdot\frac{4}{a^2}\cdot\frac{4}{a^2}}=10,\end{aligned}$$

即命题成立.

注 为了消去 a,将 $\sqrt{2}a^3$ 写成两项,$\frac{12}{a^2}$写成三项.这样,利用平均值不等式,它们的乘积为一个常数.

例 5 设 a, b, $c\in\mathbf{R}_+$.证明:

$$\frac{1+a^2}{1+b}+\frac{1+b^2}{1+c}+\frac{1+c^2}{1+a}\geqslant 6(\sqrt{2}-1).$$

解 由平均值不等式得

$$\frac{1+a^2}{1+b}+\frac{1+b^2}{1+c}+\frac{1+c^2}{1+a}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1+a^2}{1+a}\cdot\frac{1+b^2}{1+b}\cdot\frac{1+c^2}{1+c}}. \qquad ①$$

首先证明:对任意 $x\in\mathbf{R}_+$,有

$$\frac{1+x^2}{1+x}\geqslant 2(\sqrt{2}-1). \qquad ②$$

事实上,

$$\begin{aligned}② &\Leftrightarrow x^2-2(\sqrt{2}-1)x+1-(2\sqrt{2}-2)\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x^2-2(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}-1)^2\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow (x-(\sqrt{2}-1))^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

即②成立.

由①、②,得到

$$\frac{1+a^2}{1+b}+\frac{1+b^2}{1+c}+\frac{1+c^2}{1+a}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{8(\sqrt{2}-1)^3}=6(\sqrt{2}-1).$$

从而命题成立.

注 (1) 不难验证,当且仅当 $a=b=c=\sqrt{2}-1$ 时,等式成立.

(2) 由于 $(1+a^2,\ 1+b^2,\ 1+c^2)$ 与 $\left(\frac{1}{1+a},\ \frac{1}{1+b},\ \frac{1}{1+c}\right)$为反序三元组.所以,由排序不等式和不等式②,得到

$$\frac{1+a^2}{1+b}+\frac{1+b^2}{1+c}+\frac{1+c^2}{1+a}\geqslant\frac{1+a^2}{1+a}+\frac{1+b^2}{1+b}+\frac{1+c^2}{1+c}\geqslant 6(\sqrt{2}-1).$$

即命题成立.

例 6 设 n 为正整数,$x_i\in\mathbf{R}_+$, $1\leqslant i\leqslant n$,满足 $x_1\cdots x_n=1$.求证:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\sqrt{x_1^2+\cdots+x_i^2}\geqslant\frac{n+1}{2}\sqrt{n}.$$

证明 由平均值不等式,得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} x_i \sqrt{x_1^2+\cdots+x_i^2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{x_1+\cdots+x_i}{\sqrt{i}} \\
=&\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{x_i x_j}{\sqrt{i}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} x_i x_j \\
=&\frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} 2 x_i x_j \\
=&\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) \\
\geqslant&\frac{1}{2\sqrt{n}}\left[n \cdot \sqrt[n]{x_1^2 \cdots x_n^2}+\left(n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right)^2\right] \\
=&\frac{n+n^2}{2\sqrt{n}}=\frac{n+1}{2}\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

即命题成立.

注 这里用到了双求和符号及有关性质.

例 7 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}_+$, $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 求证:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leqslant 1+S+\frac{S^2}{2!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}.$$

证明 由于 $G_n \leqslant A_n$, 得

$$\begin{aligned}
&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \\
\leqslant&\left(\frac{n+a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{S}{n}\right)^n \\
=&1+\mathrm{C}_n^1\left(\frac{S}{n}\right)+\mathrm{C}_n^2\left(\frac{S}{n}\right)^2+\cdots+\mathrm{C}_n^m\left(\frac{S}{n}\right)^m+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(\frac{S}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

因为 $n!=(n-m)!(n-m+1)\cdots n \leqslant (n-m)!n^m$,

所以 $$\mathrm{C}_n^m\left(\frac{S}{n}\right)^m=\frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{1}{n^m} S^m \leqslant \frac{S^m}{m!},$$

从而命题成立.

例 8 设 k、n 为正整数,且 $1 \leqslant k \leqslant n$, $a_i \in \mathbf{R}_+$, 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_k=a_1 a_2 \cdots a_k$. 求证:

$$a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\cdots+a_k^{n-1} \geqslant kn,$$

并确定等号成立的充要条件.

证明 令 $a=a_1+a_2+\cdots+a_k=a_1a_2\cdots a_k$. 由平均值不等式,得

$$a\geqslant ka^{\frac{1}{k}},\text{即 } a\geqslant k^{\frac{k}{k-1}}.$$

又因为

$$a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\cdots+a_k^{n-1}\geqslant k(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{n-1}{k}}=ka^{\frac{n-1}{k}}\geqslant k\cdot k^{\frac{n-1}{k-1}},$$

于是只需证明

$$k^{\frac{n-1}{k-1}}\geqslant n.$$

再由平均值不等式,得

$$k=\frac{(k-1)n+(n-k)\times 1}{n-1}\geqslant n^{\frac{k-1}{n-1}},$$

从而不等式成立.

不难看出,当 $k=n$ 且 $a_1=a_2=\cdots=a_k$ 时等号成立.

例 9 设 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,求证:

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k\leqslant\frac{n(n-1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^k.$$

证明 因为 $\dfrac{n(n-1)}{2}=\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)$,所以由平均值不等式,得

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^k&=\sum_{k=1}^{n}[(k-1)+a_k^k]\\&=\sum_{k=1}^{n}(1+1+\cdots+1+a_k^k)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n}k\sqrt[k]{1^{k-1}\cdot a_k^k}=\sum_{k=1}^{n}ka_k,\end{aligned}$$

故命题成立.

注 应用平均值不等式时,通常要将乘幂看作连乘积,有时还要巧妙地添上数 1.

例 10 设 $a_i>0,b_i>0$ 且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 1,b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant n$. 求证:

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}\right)\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)\geqslant(n+1)^n.$$

证明 由已知条件和平均值不等式,得

$$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n\leqslant\frac{1}{n^n},$$

$$b_1b_2\cdots b_n\leqslant\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)^n\leqslant 1.$$

又 $$\frac{1}{a_i}+\frac{1}{b_i}=\frac{1}{na_i}+\cdots+\frac{1}{na_i}+\frac{1}{b_i}\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{\left(\frac{1}{na_i}\right)^n\left(\frac{1}{b_i}\right)},$$

从而 $$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}\right)\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)\\ \geqslant&(n+1)^n\sqrt[n+1]{\frac{1}{(n^n)^n}\frac{1}{(a_1a_2\cdots a_n)^n}\frac{1}{b_1b_2\cdots b_n}}\\ \geqslant&(n+1)^n.\end{aligned}$$

故命题成立.

注 此题证明的关键是将$\frac{1}{a_i}$写成$\frac{1}{na_i}+\cdots+\frac{1}{na_i}$.

例 11 假设 a、b、c 都是正数,证明:

$$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

证明 如果 $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ 中有负数,不妨设 $a+b-c<0$,则 $c>a+b$. 故 $b+c-a$ 与 $c+a-b$ 均为正数,则结论显然成立.

若 $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ 均非负,则由平均值不等式,得

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\leqslant\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}=b.$$

同理可得

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\leqslant\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}=c,$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\leqslant\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}=a.$$

将三式相乘,即得到我们要证明的问题,故命题成立.

注 通过对部分变量应用平均值不等式,而且轮换使用,从而得到结论的证明.

例 12 设整数 $n\geqslant 2$, $x_i\in\mathbf{R}_+$, $1\leqslant i\leqslant n$,满足$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$.

求证：$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\right)\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right)\leqslant\frac{n}{2}$.

证明 首先证局部不等式，即对每个 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$\left(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right)\frac{1}{1-x_k}\leqslant 2x_k+\frac{n-2}{n-1}\sum_{i\neq k}x_i. \qquad ①$$

事实上，由平均值不等式

$$\sum_{i\neq k}x_i^2\geqslant\frac{2}{n-2}\sum_{i,\ j\neq k}x_ix_j.$$

从而，

$$2\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}}x_ix_j\leqslant\frac{n-2}{n-1}\left(\sum_{i\neq k}x_i\right)^2.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right)\frac{1}{1-x_k}\\ =&\left(2x_k(1-x_k)+2\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}}x_ix_j\right)\frac{1}{1-x_k}\\ =&\,2x_k+\frac{2\sum\limits_{i\neq j\neq k}x_ix_j}{\sum\limits_{i\neq k}x_i}\\ \leqslant&\,2x_k+\frac{n-2}{n-1}\sum_{i\neq k}x_i.\end{aligned}$$

所以①成立.

由不等式①关于 $1\leqslant k\leqslant n$ 求和，得到

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_k}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{n-2}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\neq k}x_i=n.$$

即

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\leqslant\frac{n}{2},$$

故命题成立.

另外，我们也可以用切比雪夫不等式证明.

由于 $$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_j=\sum_{i=1}^{n}x_i(1-x_i),$$

所以，原不等式等价于

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(1-x_i)\right)\leqslant n. \qquad ②$$

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 平均值不等式与柯西不等式/李胜宏,边红平编著. —3 版. —上海:华东师范大学出版社,2019

ISBN 978 - 7 - 5675 - 9813 - 3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李…②边… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 281476 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷

平均值不等式与柯西不等式(第三版)

编　　著　李胜宏　边红平
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　徐惟简
责任校对　陈　易
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021 - 60821666　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537　门市(邮购)电话 021 - 62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　14.75
字　　数　264 千字
版　　次　2020 年 4 月第三版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5675 - 9813 - 3
定　　价　34.00 元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师一小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师一初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师一中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师一高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师一初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师一高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。