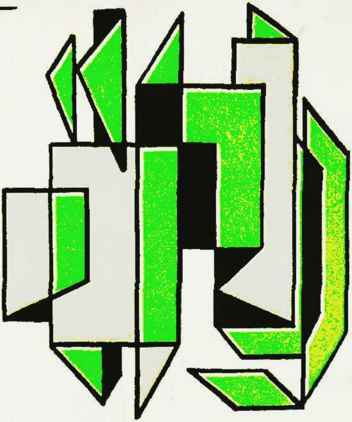
3



数学奥林匹克辅导丛书

从反面考虑问题

反例·反证·反推及其他

严镇军　陈吉范

中国科学技术大学出版社

《数学奥林匹克辅导丛书》之三

从反面考虑问题

反例·反证·反推及其他

严镇军　　陈吉范

中国科学技术大学出版社

1 9 8 9 . 合肥

内 容 简 介

从反面考虑问题，这是数学解题的一个重要思想方法。本书通过大量生动有趣并且涉及到初等数学各个方面的例题(其中包括许多数学竞赛题)，讲述从反面考虑问题的思想方法和技巧。这包括：反例、反证、从结论入手、解选择题、抽屉原则、错在哪里等等。每一节配备有一定数量的习题，供读者练习。

系统地讲述从反面考虑问题的小册子，在国内尚属少见，本书填补了这个空白。书中特别注意培养学生的思维方法，文字生动、浅显。是一本很好的中学生课外读物，还可作为中学教师及其他数学工作者培训数学竞赛选手的教材和讲座材料。

《数学奥林匹克辅导丛书》之三

从 反 面 考 虑 问 题

反例·反证·反推及其他

严镇军　陈吉范

责任编辑：伍传平　　封面设计：罗　洪

*

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路96号)

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：787×1092/32　印张：4.625　字数：103 千

1989 年 4 月第 1 版　　1989年 4 月第1次印刷

印数：1—20000册

ISBN 7-312-00046-0/O·19 定价：1.30元

序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则“天下文章一大抄”，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌。写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言：“居高才能临下，深入才能浅出”，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也可堪称是这方面的范本。

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学与科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座，出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色。

最近，他们编写了《数学奥林匹克辅导丛书》，我看了几本原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐为之序。

龚　昇

1988年6月28日

于中国科学技术大学

前　言

本书是一本专讲从问题的反面（这包括反例、反证、反推、排除法等）出发，来考虑问题的数学解题思想方法为目的的书．多年来我们参加过各级中学生数学竞赛工作，在与学生的接触中，发现他们不习惯于运用逆向思维，从反面出发来考虑问题，或者在运用中有这样或那样的错误，这促使我们写成了这本小书．

任何事物都有其正反两个方面，解数学题也是如此．确实许多数学问题可以从题设条件入手进行正面的推导或计算以获得其解答，但有些题（请见书中的许多例题）从正面的考虑就不那么容易，甚至无法解决．当代美国著名数学家和教育家波利亚（G. Polya）在一本名著《怎样解题》中论述“归谬法和间接证明”（他对归谬法和间接证明所下的定义都属反证法，见科学出版社出版的该书中译本 161 页）中写到：“……当所有其他手段看来已用尽时，这种手段会自然而然地涌现出来…….”他还说：“归谬法和间接证明都是发明创造的有效工具．”在本书第一节“从草船借箭谈起”中举了大量的事实说明从反面出发来考虑问题对推动数学发展所起的作用．其实何止是数学如此，在其他自然科学和社会科学中也都能举出这种事实．

本书在编排上各节基本上是独立的，但又注意了各节之间的联系．书中配有大量的例题，这些例题大多选自近年来国内外各种数学竞赛，许多题目采取边叙边议的方式，逐步引导读者深入．书中还配有相当数量的习题，供读者练习，

有些题目还是作为正文的补充而选入的。对较难的题目还作了提示。

如果读者通过对本书学习，能提高逆向思维能力，在学习、工作中自觉地运用逆向思维从反面出发来考虑问题，我们将是很高兴的。由于我们的能力和水平有限，书中难免挂一漏万，我们将愉快地接受读者的批评指正。

严镇军　陈吉范

1988年6月于合肥

目　次

1 从“草船借箭”谈起

在社会实践和学习过程中，人们都有这样一个经验：当你对某一问题冥思苦想而不得其解时，从反面去想一想，常能顿开茅塞，获得意外的成功。我们先来讲一个脍炙人口的历史故事。三国时代吴国的周瑜限令诸葛亮在十天之内造出20万支箭，根据当时的实际情况，这个任务是不可能完成的。嫉贤妒能的周瑜是想找一个借口杀掉诸葛亮。聪明的诸葛亮接受任务后，分析了情况，得出了从“造箭”上想办法无论如何也不可能成功的结论，于是他从“不造”上想办法，利用大雾锁江的凌晨，用轻舟载草人从水路佯攻曹操大营，曹不敢出兵反击，而只是令箭手向草船放箭。这就是“草船借箭”的千古佳话。

“草船借箭”中从“不造”来达到“造”就是通过“逆向思维”，从问题的反面出发，来解决用直接方法很难或无法解决的问题。在数学发展的历史长河中，也有很多例证说明了：用逆向思维方法从问题的反面出发来考虑问题不仅是解决问题的有力手段，而且推动了数学的发展，开辟了数学领域的新天地。

先来回顾一下非欧几何的由来。我们知道，欧氏平面几何是建立在五条公设基础上的，而其他的定理是从这五条公设推出来的。自欧几里德（Euclid，约公元前三世纪）的《几何原本》问世以来，许多数学家认为第五公设（平行公设——通过不在已知直线上的一点，只可引一条直线与此直

线平行）是多余的，想从前面四条公设出发来证明第五公设这一难题，在两千多年的时间里，数学家们费尽了心血，但都一无所获.直到十八世纪,天才的俄罗斯数学家罗巴切夫斯基（ПобачеВский）从前辈数学家和他自己的失败中，看到了把欧氏第五公设作为定理来证明也许是不可能的。这样，就促使他从欧氏第五公设的反面去考虑，他大胆地引进了与欧氏第五公设完全相反的命题：过平面上直线外一点至少可以作两条直线与原直线平行。试图通过证明此命题不成立，来达到间接地证明欧氏第五公设的目的，但是，他从欧氏的其他公设出发进行推理始终未发现矛盾。罗巴切夫斯基敏感地觉察到了他已经发现了新几何理论，他沿着这条与"传统"的思维方法截然相反的路子走下去，终于创建了崭新的非欧几何学——罗氏几何。

再来看一门兴起不久，但日渐崭露头角的数学分支——模糊数学。大家知道，经典数学就是以"精确"著称，来不得半点"模糊"的。但是，客观世界中的很多现象和过程，如快、慢，冷、热，软、硬，高、矮，健康与病态……等等，彼此界限并不分明，因而无法用精确的数学语言来加以描述，最多只能做极为粗略的近似处理。这样就与客观实际相距甚远。然而，现代自然科学以及管理科学的发展，越来越需要人们细致地研究和定量地描述这些不确定、不分明的模糊现象和过程。于是，就促使人们从经典数学精确性的反面——模糊来探求、来思索，从而引起了现代数学理论和方法上的一场革命，产生了模糊数学。模糊数学的方法已经深入到很多数学分支，并在信息论、控制论以及医学、气象、经济乃至文史、考古等各个领域都得到了广泛的应用，显示出其强大的生命力。

大家知道，用综合法证明，其基本思路是由题设条件出发，根据已知的定理与事实进行逻辑推理，最后推导出要证的结论。但是综合法从题设条件出发可用的定理很多，推出的结论往往也很多，要从众多的结论中找到我们所需要的结论，有时确实是很困难的。这就启发人们，能否从综合法的反面来考虑，从要证的结论出发往回追朔题设条件。由于在一般情况下，每个结论所需要的前提总是为数不多的几个，比较容易逐步回朔找到通向题设条件的途径，再反过来依此途径便可提供一个由条件到结论的相应证明。这就是通过“逆向思维”原则产生的“分析法”的精神实质。“分析法”在解决一些比较复杂的综合题时以及在证明中都发挥过巨大的作用。最重要的事实是，古希腊数学之精华、欧氏几何的基础——《几何原本》就是古希腊数学家欧几里德在宏观范畴内拓广了分析法而产生的。他把庞杂的在欧几里德以前就有了的一些定理和命题作了系统地整理，使它们按照逻辑关系的先后顺序统一建立在为数不多的几条公理之上。而这项工作，在某种意义上也是“逆向思维”的产物。这是由于欧几里德必须去寻找众多的定理和命题的逻辑关系，并沿着这种关系反过去追朔，一直到他们的共同的最初来源。

大家知道，毕达哥拉斯（Pythagoras）学派自以为整数与整数之比已穷尽世界之数。但希腊数学家海帕修斯关于$\sqrt{2}$无理性的发现，就是反证法为数学所建树的不可磨灭的功勋，使人们对数的认识从有理数域扩大到实数域。

仅从上面举出的这些事实（它们远不是全部），已可看出从反面考虑问题，对推动数学发展所起的作用。近年来，教育界的许多有识之士，提出了教学中的“逆向思维”原则，就是为了培养学生学会并注意从反面来考虑问题。

从反面出发考虑问题是解题策略的重要组成部分，也是学习数学必须具备的逻辑思维能力之一。它包括：反证法；反例；反推法（即分析法）以及各种数学公式、定理的逆用等等，还要认识似真实假的“解法”究竟错在哪里（包括你自己习题上的错误）。本书就是通过大量的例题，讲述从反面考虑问题的一些思想方法和技巧。

2 反　　例

2.1 什么是反例

当一个数学问题（它常是用命题的形式）被提出来后，它面临着两个前途：一是根据已知的公理、定义、定理等经过一系列的正确推理，对该命题作出证明；一是从一些迹象判断该命题不成立，然后寻求出一个（就足够了）满足该命题的条件，但使结论不成立的例证，否定这个命题。这样的例证，就是通常所说的反例。关于反例，香港大学肖文强先生在文章中曾指出："当问及如何识别人才时，一位教授回答：告诉学生一个命题……谁人马上试图找出一个反例来驳斥它，他就是个数学人才"。

费尔马(Fermart) 是十七世纪法国杰出的数学家，他对于数学发展作出了很多杰出的贡献，特别是关于数论和概率论方面的贡献更为人瞩目。他还提出了很多猜想，其中最著名的是费尔马大定理：设 n 是大于 2 的正整数，则不存在正整数 x，y，z 使得 $x^n+y^n=z^n$。虽然这条定理至今还没有人能证明，也没有人能否定，但对它的研究却推动了数论的发展。他还就形如

$$A_n=2^{2^n}+1$$

的数进行了探讨。当 $n=0,1,2,3,4$ 时，它们分别是质数：3，5，17，257，66537。因而他提出猜测：n 是所有自然数时 A_n 都是质数。过了半个多世纪，到十八世纪时，欧拉(Euler) 首先找到了一个反例，计算出当 $n=5$ 时，A_n 不

是质数，即

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\times 6700417$$

是一个合数，从而否定了费尔马的这个猜想。

几何学中曾经盛传着限用直尺圆规作图的三大难题：

1）三等分角问题：任给一个角，将它三等分；

2）立方倍积问题：求作一个立方体，使它的体积等于已给立方体的体积的二倍；

3）化圆为方问题：求作一个正方形，使它的面积等于一已知圆的面积。

这三个问题足足流传了两千多年，使不少数学家费尽心机、绞尽脑汁，经过无数次尝试，但结果都失败了。从而启发人们转向从反面来考虑，试图用反例来否定它的可能性。但由于数学工具的局限，一直到1637年笛卡尔发明了解析几何，开辟了用代数方法研究几何问题的新途径，同时也为构设反例增添了新手段。两百年后，万芝尔（Wantzel）举出反例，证明了用尺规三等分任意角及立方倍积的不可能性；林德曼（Lindemann）证明了π是一个超越数，只这样一个反例就足以证明了化圆为方用尺规作图的不可能性。至此，尺规作图的三大难题被彻底揭开了。1895年克莱因（Klein）在总结了过去的研究后，给出了"三大难题"不可能用尺规作图的简单而明晰的证法，彻底地解决了两千多年的"悬案"。然而，可悲的是至今还有一些爱好数学的青年，以为自己能够独步古今中外找到用尺规来解决"三大难题"的钥匙，因而不惜浪费时间作无效的劳动。

重要的反例往往也会成为数学殿堂的基石，微积分学刚刚建立的时候，数学界曾长期错误地认为：连续函数除了个别点外总是处处可导的。但是，1872年德国数学家维尔斯特

拉斯（Weiestrass）构造了一个“处处连续却处处不可导的函数”．这个反例震惊了数学界，促成了影响深远的“分析基础严密化”的数学运动；1979年南京大学数学系王明淑找到了一个反例，从而否定了苏联数学家的“二次微分系统在奇点附近最多只有三个极限环”的结论，解决了多年来的纷争，对微分方程的发展起到了一定的推动作用；1956年米尔诺以7维球面为例，说明它不止有一种微分结构震惊了世界，开拓了微分拓扑这个新领域．

从上面举出的事实我们可以认识到，反例它不仅在培养发散性思维及创造性思维能力中占有重要地位，我们还必须看到它在纠正错误结论、澄清概念、开拓数学新领域中也起到了非常重要的作用．正如美国数学家盖尔鲍姆曾概括地指出反例在数学推理中的地位和作用：“冒着过于简单化的风险，我们可以说（撇开定义、陈述以及艰苦的工作不谈）数学由两大类——证明和反例组成，而数学的发现也是朝着这两个主要目标——提出证明和构造反例”．由此可见，反例之重要．

学会构造反例是数学爱好者必须掌握的技能，最近几年，我国数学界已开始重视这方面能力的培养，在全国各省、市、自治区数学联赛中也多次出现这类题目．

2.2 如何寻求反例

1984年全国各省、市、自治区数学联赛有这样一道题：

下列命题是否正确？若正确请予证明，否则，举出反例．

命题 1 若 P,Q 是直线 l 同侧的两个不同点，则必存在两个不同的圆，通过 P,Q 且和直线 l 相切．

命题 2 若 $a>0,b>0$ 且 $a\neq1,b\neq1$，则 $\log_a^b+\log_b^a\geq2$。

命题 3 设A,B是坐标平面上的两个点集，$C_r=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}$。若$C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$,则必有$A\subseteq B$。

事实上，这三个命题都似真实假。问题都归结为寻求相应的反例。那么如何寻求反例呢？下面介绍几种寻求反例的思考方法。

1）二分法 所谓寻求反例，就是要找出满足题设又使题断不成立的情况。为此，应当把满足题设的所有情况，采用“二分法”恰当地进行分类。所谓“二分法”就是把满足题设的所有情况分为两类，使其中一类具有某种属性，而另一类不具有这种属性。如果第一类情况能使题断成立，则考察第二类情况。必要时，可继续采用“二分法”把第二类情况再次分类进行考察，直至找出反例为止（有时也不一定能找出反例）。以前面三个命题为例。

先看命题1，如（图1）在假设条件下，P,Q两点与直线l的位置关系可以分为两类：i）P,Q连线与l相交；ii）P,Q连线与l平行。分别考察在这两类情况下题断是否成立。容易发现,在后一类情况下,即$P/\!/l$时，通过P,Q且与l相切的圆只有一个。于是，便得到反例。

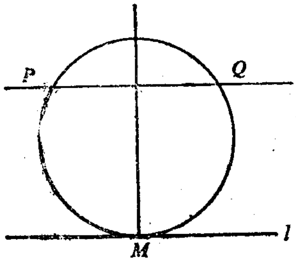


图 1

再看命题2，为了便于分析问题，利用对数底换公式先将题断不等式改写为

$$\log_a^b+\frac{1}{\log_a^b}\geqslant 2.$$

在题设条件下，$\log_a^b$的取值情况可以分为两类：i）$\log_a^b>0$；ii）$\log_a^b<0$。显然，在后一类情况下，恒有

$$\log_a^b+\frac{1}{\log_a^b}<0<2.$$

即$\log_a^b<0$时题断不成立。于是，容易举出反例：当 $a=3$，$b=\frac{1}{3}$时，有：

$$\log_3^{\frac{1}{3}}+\log_{\frac{1}{3}}^3=\log_3^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\log_3^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\log_3^1-\log_3^3+\frac{1}{\log_3^1-\log_3^3}$$

$$=-2<2.$$

最后再考虑命题 3，在题设条件下，点集 A 可分为两类：　i）$A\cap C_r=\phi$（空集）；

ii）$A\cap C_r\neq\phi$

若$A\cap C_r=\phi$，则当$C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$时，必有 $A\subseteq B$，如图 2 所示。

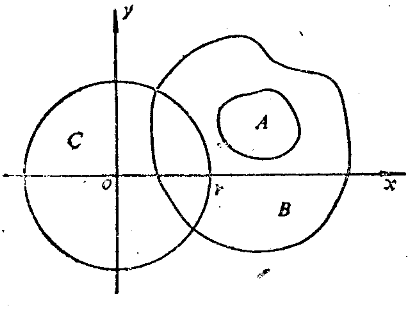


图　2

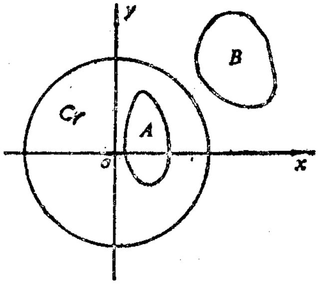


图　3

事实上，若点$M\in A$，因 $A\cap C_r=\phi$，故 $M\notin C_r$，再由$M\in C_r\cup B$ 知 $M\in B$。

若$A\cap C_r\neq\phi$，这时，由$C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，就不一定有$A\subseteq B$。例如，任取集$A\subset C_r$，而$B\cap C_r=\phi$（图3），这时，有$C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，但$A\nsubseteq B$。

2）考察特例法 有些似真实假的命题，在满足题设的一般情况下，题断都能成立。但在满足题设的个别特殊情况下，题断可能不成立。因此，在寻求反例时，若注意考察题设的特例，则有时会起到事半功倍的作用，能很简捷地发现反例。

例如，试求下列命题的反例：

若$P(a,b)$为圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$内部的任意一点，则在此圆中以P点为中点的弦所在直线的方程为

$$a(x-a)+b(y-b)=0。$$

在寻求这类命题的反例时，首先考虑题设的特殊情况：若P是圆心时（即$a=b=0$），过圆心的任一条弦，圆心都是其中点，过$P(0,0)$的任一条弦的方程都能用$0(x-0)+0(y-0)=0$表示。于是，得出反例：

设P为已知圆的圆心（0，0），则以P为中点的水平方向的弦其所在直线的方程为：$y=0$，不是$0(x-0)+0(y-0)=0$。

3）题设数量关系讨论法 有些似真实假的数学命题，其题设规定了某些数量之间的关系或隐含着某些数量关系，在这些数量关系满足题设关系的一部分情况下题断成立，而在这些数量关系满足题设另一部分的情况下题断不成立。因此，注意讨论题设的数量关系往往能较简捷地发现反例。

例如，试求下列命题的反例：

过圆锥的两条母线所作的一切截面中，以轴截面的面积为最大。

如图 4 所示，$\triangle PAC$ 为圆锥的轴截面，$\triangle PAB$是过母线 PA，PB 所作的截面，从题设知隐含着下述数量关系：

$$\pi > \angle APC \geqslant \angle APB > 0.$$

由题断知，$S_{\triangle PAC} \geqslant S_{\triangle PAB}$，即

$$\frac{1}{2}PA \cdot PC \cdot \sin\angle APC \geqslant \frac{1}{2}PA \cdot PB \cdot \sin\angle APB. \quad (2.1)$$

由 $PA = PB = PC$，可把 (2.1) 式化简为

$$\sin\angle APC \geqslant \sin\angle APB. \quad (2.2)$$

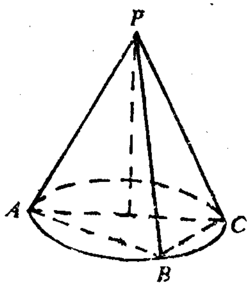


图 4

易知，当 $\angle APC \leqslant \frac{\pi}{2}$时，(2.2) 必成立，当 $\angle APC > \frac{\pi}{2}$ 时，(2.2) 就不一定成立。于是，有反例，当 $\angle APC = 120°$ 时，$\angle APB = 90°$ 时，就有：

$$S_{\triangle PAC} < S_{\triangle PAB}.$$

又如，试求下列命题的反例：

设$\triangle ABC$ 的三边长分别是 a，b，c，且

$$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c},$$

则三角形必定是正三角形。

依题设知 $$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b},$$

即 $$a^2b + b = ab^2 + a.$$

$$(a-b)(ab-1) = 0,$$

即 $$a = b \text{ 或 } a = \frac{1}{b}.$$

显然，以上各式均可逆推。当$a=\frac{1}{b}\neq 1$时，即有$a\neq b$。这时a,b满足题设而使题断不成立。于是，容易找出反例：$a=3$，$b=\frac{1}{3}$，$c=3$时满足题设，即有$a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{c}$但$\triangle ABC$不是正三角形。

2.3 进一步讨论和例题

对于一个命题来说，它的反例必须能足以否定这个命题。一个命题，如果没有找到反例，又虽经多方面进行了严密的论证仍没有证明命题是正确的，很可能反例是存在的。构造一个命题的反例，对于判断此命题的真伪以及判断此命题的逆命题的真伪是一个极好的方法

1) **借助构造性证明创设反例** 例如，对于下述命题：

两个非周期函数的和、差、积、商一定是非周期函数。

我们就可以借助构造性证明创设反例。

显然，$\sin x+x, x, \frac{\sin x}{1+x^2}$，$1+x^2$等函数不是周期函数。而$(\sin x+x)-x=\sin x$；$\frac{\sin x}{1+x^2}\cdot(1+x^2)=\sin x$是周期函数。这样，既简洁明快，又一目了然地得到了反例。

又如，对于命题“素数有有限多个”，我们也可以借助构造性证明创设反例。

如果素数仅有有限多个，那么就可以把它们全部写出来，并记为$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$，此外再没有其他的素数了。然而，现在考虑数：

$$A=p_1\cdot p_2\cdots p_n+1,$$

式中，A 或者是一个素数，它显然比一切 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 都要大；A 或者是一个合数，又显然

$$p_i \nmid A \quad (i=1,2,\cdots n),$$

所以A还有其他的素因子。不论哪种情况，总有其他的素数存在。这个反例表明："素数有有限多个"是错误的。

2）借助运动性思维构造反例 能动的思维能力表现在能够进行由此及彼、由表及里的思考，使思维朝着正向，逆向、纵向、横向等各个方向运动。能动的思维能力包着思维的运动性因素。运动性思维可以探明事物发展的原因和事物发展的规律，从而能正确地认识客观事物。对于一个命题，如果不仅知道它的正面，而且能够善于考虑其反面，借此来构造出反例；就能否定一个命题。

1979年全国中学数学竞赛中有如下的试题：

"一对对边相等及一对对角相等的四边形，必为平行四边形"对吗？如果对，请证明；如果不对，请作一四边形满足已知条件，但它不是平行四边形，并证明你的作法。

这道题，就是要用运动性思维方法，设法构造出一个"一对对边相等及一对对角相等的四边形"（但不是平行四边形）来否定命题。

它的思考方法是：由一个等腰三角形，用顶点和底边上一点的连线将其分成两个不相等的三角形，其中一个三角形不动，将另一个三角形倒置过来所成的四边形即为所求。

其具体作法是：任作一个等腰三角形 ABC，在底边BC上任取一点 D，使 $BD>DC$，连结 AD，分别以 A, D 为圆心，以 DC，AC 为半径画弧交于 E，连结 AE，DE，则四边形 $ABDE$即为"一对对边相等及一对对角相等的四边形"，但不是平行四边形（图5）。

证明从略（由 $\triangle ADC\equiv\triangle ADE$即得证）．

综上所述，对于“反例”的重要性，读者已有所了解，在这里还要说明的是“反例”还是加深记忆和理解定义、定理或公式等的重要手段，也是纠正错误的常用方法．例如，常有学生认为：“圆锥过两条母线的截面中，以轴截面的面积为最大”．前面我们已用反例说明了这个命题是错误的．不仅如此，从前面的讨论中还启迪我们得出正确的命题：“若圆锥角不大于90°，则圆锥过两条母线的截面中，以轴截面的面积为最大”．

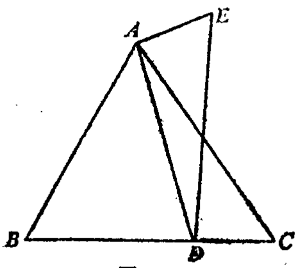


图 5

下面，通过举一些反例来否定命题，供读者参考．

例1 “已知 l_1, l_2 是平面上的两条直线，若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $K_1=K_2$（K_1, K_2分别为两直线的斜率）” 命题是否正确？试举反例．

解 这个命题成立的前提条件是两直线的斜率都必须存在．知道了这一点就可以马上举出反例来否定命题：当直线 l_1，l_2 垂直于 x 轴时（l_1, l_2 不重合），虽然 $l_1 /\!/ l_2$，但两直线的斜率都不存在．因此，更谈不上它们相等，故原命题不真．

例 2 “若 a^2，b^2，c^2 成等差数列，则$\frac{1}{b+c}$，$\frac{1}{c+a}$，$\frac{1}{a+b}$也成等差数列”此命题是否正确？

解 由于分式分母不能为零，所以可构造出反例：当 $a=-b$，$c=-b$ 时，虽然 a^2, b^2, c^2 成等差数列，但结论不

成立。故命题不真。

例 3 设a,b是两个不相等的正数，试判断下列两个不等式那一个成立：

1） $$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\leqslant\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2;$$

2） $$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2.$$

解 这两个不等式都不正确。我们先来作一个较粗糙的估计，设n是一个很大的自然数，令$a=n$，则

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\approx n\left(b+\frac{1}{b}\right),$$

$$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2=\left(\frac{n+b}{2}+\frac{2}{n+b}\right)^2>\frac{1}{4}n^2$$

$$=n\cdot\frac{n}{4}>n\left(b+\frac{1}{b}\right)\approx\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right).$$

上式中第二个不等式当$\frac{n}{4}>b+\frac{1}{b}$时成立。从上述分析可见，不等式2）的具体反例如下：

令 $a=10$，$b=1$，

则 $$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=20.2.$$

$$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2=\left(\frac{11}{2}+\frac{2}{11}\right)^2>\left(\frac{10}{2}\right)^2=25.$$

同样，令$a=\frac{1}{10}$，$b=1$可知不等式1）不成立。

例 4 "任意三角形ABC，则复盖此三角形的最**小圆是它的外接圆**"此命题是否正确？

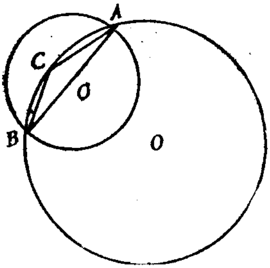


图 6

解 所给命题对直角三角形及锐角三角形都成立（证明从略），但对于钝角三角形不成立。我们可以通过"逆向思维"来构造反例：先作一个圆O，再在此圆上取很接近的三点A,B,C（图6），显然，$\odot O$就是$\triangle ABC$的外接圆，但复盖$\triangle ABC$的圆要比外接圆小。

一般地，可以证明：复盖钝角$\triangle ABC$的最小圆是以其最大边AB为直径的$\odot O'$，而且此圆比$\triangle ABC$的外接圆小。

事实上，由于$\angle C$是钝角，故对属于$\triangle ABC$的任一点C'，有$\angle BC'A \geqslant \angle C > 90°$，所以$C'$在$\odot O$内；另一方面，复盖$\triangle ABC$的圆的直径不会小于$AB$，所以复盖$\triangle ABC$的最小圆是$\odot O'$。

因$\angle BCA > 90°$，所以$\triangle ABC$的外接圆圆心O不可能在直线AB上，所以$AO+BO>AB$即外接圆直径大于AB。

例 5 三边长和面积的数值都是整数的三角形叫海伦（Heron）三角形，"任何海伦三角形都有一条高长为整数"这个命题是否正确？

解 这个命题不正确。例如，设三边长为$a=13, b=40, c=45$，则$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=49$，于是，由海伦公式得三角形面积

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{49\times 36\times 9\times 4}=252.$$

而三边上的高分别为

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{504}{13};\ h_b=\frac{504}{40};\ h_c=\frac{504}{45},$$

它们都不是整数.

注　曾经有人认为这个命题是正确的，甚至由此出发，错误地推断出：任何一个海伦三角形都能从两个商高三角形（即三边都是整数的直角三角形）导出.

在高等数学中，用构造反例来加深理解命题成立的条件，是牢固掌握概念学好高等数学的一个重要手段. 美国B. R.盖尔鲍姆、J. M. H. 奥姆斯特德曾合写了专著《分析中的反例》，较系统地介绍了微积分中的反例. 为了不超出现行中学教材的范围，在这里只举几个数列的例子.

例 6　试举反例说明下列命题不正确："数列$\{a_n\}$，当n无限增大时，a_n越来越接近A，则A是$\{a_n\}$的极限"

解　我们知道，数列$0.9,\ 0.99, \cdots, 0.\overbrace{99\cdots9}^{n}, \cdots$它的极限是1. 但当此数列的项数无限增加时，$a_n$越来越靠近1.1或2或3…，但1.1，2或3都不是它的极限.

例 7　数列$\{a_n\}$及$\{b_n\}$都没有极限，数列$\{a_n+b_n\}$及$\{a_n\cdot b_n\}$是否也一定没有极限.

解　数列$\{a_n+b_n\}$及$\{a_n\cdot b_n\}$都可能有极限. 例如，取数列$\{a_n\}$及$\{b_n\}$分别为

$$\{a_n\}:\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,$$
$$\{b_n\}:\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,$$

$a_n=(-1)^{n-1}$，$b_n=(-1)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 则数列

$$\{a_n+b_n\}:\ 0,0\cdots,$$
$$\{a_n\cdot b_n\}:\ -1,-1,\cdots,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=-1$.

例 8 数列极限的存在性有如下的判别法：单调有界数列一定有极限。如果把数列的单调性或者有界性条件去掉，结论能否成立？

解 都不能成立。例如，数列

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$$

是有界数列，但却无极限。又如，数列

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots$$

是单数列（单调增加），但它也没有极限。

练　　习　　题

试举反例说明，下列命题都不正确。

1. 四边形两对角线的交点一定在形内。

2. 设 x,y 都是无理数，则 x^y 一定是无理数。

3. 设 ab 及 $a+b$ 都是整数，则 a,b 必是整数。

4. 与一条曲线只有一个交点的直线一定是这条曲线的切线。

5. 对于方程 $x|x|+px+q=0$，

1）仅当 $p^2-4q\geqslant 0$ 时，才有实根。

2）当 $p<0$ 且 $q>0$ 时，有三个实根。

6. 在正方形 $ABCD$ 所在平面上有点 P，使 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCD$，$\triangle PDA$ 都是等腰三角形，则具有这样性质的 P 点有且只有一个。

7. 设有一个四边形 $ABCD$。

1）如果在 $ABCD$ 中有一组对角相等，且这一组对角的顶点所连结的对角线被另一条对角线平分，则 $ABCD$ 是平行四边形。

2）如果在 $ABCD$ 中有一组对边相等，且一条对角线

平分另一条对角线，则 $ABCD$ 是平行四边形。

8. 如果四面体的每一个面都不是等腰三角形，则其长度不等的棱数至少有四条。

9. 平面上有一个点M集和七个不同的圆$C_1, C_2, \cdots, C_7$，其中圆C_7恰好经过M中的7个点，圆C_6恰好经过M中的6个点，……圆C_1恰好经过M中的1个点，则M中至少有13个点。

10. 在平面直角坐标系中，纵横坐标都是有理数的点称为有理点。若a为无理数，则过$(a,0)$点每条直线，至多通过一个有理点。

11. 不存在这样的多面体，它恰有奇数个面，而且每面的棱数是偶数。

3 反　　证

3.1 什么是反证法

我们知道，每一个数学命题从结构上讲都由假设条件和结论两部分组成，通常写成下面的形式：若 A（假设条件）则 B。即

$$A \Rightarrow B.$$

如果从假设条件出发，经过推理结论得到证明，这就是所谓直接证法。但，对于某些命题用直接证法比较困难，就转而考虑去证明与原命题等效的命题，这就是间接证法。反证法是属于间接证法的一种，它是从结论的反面出发来考虑的。这里要指出的是，反证法的重要性虽然是众所周知的，但是到目前为止各文献和著作中对反证法的认识并不完全一致。关于反证法，法国数学家 J. 阿达玛（J. Hadamade）曾概括为："这证法在于表明：若肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾"；有的书指出：反证法不是直接证明求证的结论，而是先提出与待证的结论相反（相排斥）的假定，然后推导出和公理、定义、已经证明的定理或题设相矛盾的结果，这样，就证明了与待证的结论相反的假定不能成立，从而肯定了原来求证的结论成立；有的文章指出：反证法是命题的一种证明方法，它不是去证明这个命题本身，而是证明和它等价的逆否命题；还有的书指出：通过证明论题的否定论题不真实，从而肯定论题真实的方法叫做反证法等等。我们认为各文章和著作中对反证法的提法虽有所不同，但它们共同之处都是从"否定命题的结论"出发，通过正确

的逻辑推理“导致矛盾”，达到“推倒了结论的反面”，从而“肯定这个命题真实”。

用反证法完成一个命题的证明，大体上有三个步骤：

1）反设——即假设待证的结论不成立，也就是肯定原结论的反面；

2）归谬——把反设作为辅助条件，添加到题设中去，然后从这些条件出发，通过一系列正确的逻辑推理，最终得出矛盾；

3）结论——由所得矛盾说明原命题成立。

下面举几个例子具体说明。

例 1 函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上有意义，且 $f(0)=f(1)$，如果对于不同的 x_1，$x_2 \in [0,\ 1]$ 都有 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$，求证：

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}.$$

分析 这是1983年全国各省、市、自治区高中联合数学竞赛第二试的一道题。笔者们曾参加了当年的命题和阅卷工作，发现许多同学用反证法做这题，但大多数同学都是一开始就作如下的反设：“假定 $|f(x_2)-f(x_1)|\geqslant\frac{1}{2}$”，然后即进行推导。这个反设错了。因为此题的结论是：“对于任意不同的 x_1，$x_2\in[0,\ 1]$ 都有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$”，因此，题断的反面应该这样考虑：“对于任意的 x_1，$x_2\in[0,\ 1]$”的反面应该是：“至少存在一组不同的 x_1，$x_2\in[0,\ 1]$”；“$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$”的反面应该是：“$|f(x_2)-f(x_1)|$

$\geqslant\frac{1}{2}$”．这样，此题的反设应是："假定至少存在一组不同的 x_1，$x_2\in[0, 1]$ 使得 $|f(x_2)-f(x_1)|\geqslant\frac{1}{2}$”．

证 设至少存在一组不同的 x_1，$x_2\in[0, 1]$（不妨设 $x_1<x_2$），使得 $|f(x_2)-f(x_1)|\geqslant\frac{1}{2}$。由已知条件得：

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)|&=|f(x_2)-f(x_1)+f(0)-f(1)|\\&<|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|\\&<|x_2-1|+|0-x_1|=1-x_2+x_1\\&=1-|x_2-x_1|<1-|f(x_2)-f(x_1)|,\end{aligned}$$

即 $2|f(x_2)-f(x_1)|<1$,

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}.$$

这与反设 $|f(x_2)-f(x_1)|\geqslant\frac{1}{2}$ 相矛盾。因而我们所作反设不能成立，也就是说，原命题成立。

由于反证法是“反设”后通过“归谬”使命题得证，所以反证法通常也叫**归谬法**．有些命题，它的结论的反面可能有多种情况，则应将各种情形穷举出来，并将它们一一驳倒后，才能推断原结论成立．通常又把结论的反面多于一种情况的反证法称为**穷举归谬法**．

例 2 如果对于任意的正数 p，方程

$$ax^2+bx+c+p=0\ (a,\ b,\ c\in R)$$

有且只有正实根，求证 $a=0$。

证 反设 $a\neq0$，则有 $a>0$ 或 $a<0$。

1）若 $a>0$，则二次函数 $y=ax^2+bx+c+p$ 的图象是

开口向上的抛物线。y的最小值是：

$$y_{min}=\frac{4a(c+p)-b^2}{4a}.$$

当p值增加时，抛物线沿y轴方向向上平移，当p充分大时，$y_{min}>0$，这时抛物线与x轴无交点，即方程$ax^2+bx+c+p=0$无实根，与题设矛盾，所以a不能大于零。

2）若$a<0$，方程$ax^2+bx+c+p=0$有一根是：

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4a(c+p)}}{2a}.$$

当p充分大时，（只要$c+p>0$），有$-b+\sqrt{b^2-4a(c+p)}>0$，从而$\alpha<0$，与题设矛盾，所以a不能小于零。综上所述，只能有$a=0$。

例 3 在凸四边形$ABCD$中，已知$AB+BD\leqslant AC+CD$求证：$AB<AC$。

分析待证结论$AB<AC$的反面虽然有两种情况：$AB=AC$及$AB>AC$，但我们可以将它们合在一起，即$AB\geqslant AC$。

证 如图7，反设$AB\geqslant AC$，于是$\alpha\geqslant\beta$，因为$ABCD$是凸四边形，所以对角线AC及BD都在形内。于是

$$\angle BCD>\alpha\geqslant\beta>\angle DBC,$$

$$BD>DC.$$

故 $AB+BD>AC+CD$，

这与题设条件$AB+BD\leqslant AC+CD$，

矛盾。

这就证得 $AB<AC$。

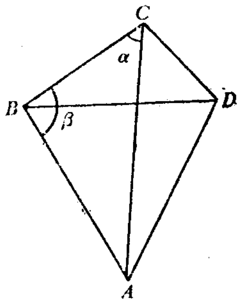


图 7

3.2 反证法的逻辑依据

反证法的依据是形式逻辑中的两个基本规律——矛盾律和排中律。所谓“矛盾律”是说：在同一论证过程中，两个互相反对或互相否定的论断，其中至少有一个是假的。而所谓“排中律”则是说：任何一个判断或者为真或者为假（不真）二者必居其一。也就是说，结论“B真”与“B不真”(即结论$\bar{B}$真，这里$\bar{B}$表示B不成立。）中有且只有一个是对的。

例如，用反证法证明：在一个三角形中至少有一个内角大于或等于60°。先反设：假定“三个内角都小于60°。推出：“它们的和小于180°”，知道这与“三个内角之和等于180°”互相反对，所以由“矛盾律”知二者必有一假。但我们知后者为真（我们承认全部数学理论是一个和谐、相容的整体、它的公理、定义、定理等都是正确而无矛盾的）。从而前者为假，也就是说：三个内角都小于60°是假的”，再由排中律知对立的结论“至少有一个内角大于或等于60°”是真的。

从上述讨论可见，反证法的结构（包括逻辑依据）可以写成下面的程式：

欲证命题“若A则B”，先反设$\bar{B}$成立。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{由}\bar{B}\text{及}\\ \text{已知条件}\end{array}\right. \xRightarrow[\text{正确的推理}]{} B_1 \xRightarrow[\text{正确的推理}]{} B_2 \xRightarrow[\text{正确的推理}]{} \cdots$$

$$\xRightarrow[\text{正确的推理}]{} B_n \text{与} \left\{\begin{array}{l}\text{公理、定义、定理、公式}\\ \text{法则及已知条件等}\end{array}\right\}\text{之一}$$

$$\text{矛盾} \xRightarrow[\text{矛盾律}]{} \text{“若}A\text{则}\bar{B}\text{”为假} \xRightarrow[\text{排中律}]{} \text{“若}A\text{则}B\text{”}$$

为真。

例 4 证明：圆内非直径的两弦，不可能互相平分。

证 反设圆O内两条非直径的弦AB及CD互相平分于一点P，如图8所示。由题设知P点不与圆心O相重合。连结OP，则由反设条件知：

$$OP\perp AB \text{ 及 } OP\perp CD,$$

这就是说，通过P点可能有两条直线AB和CD同垂直于直线OP，这与已知定理相违。所以AB与CD不能互相平分。

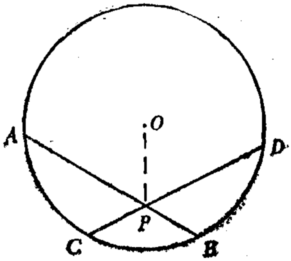


图 8

例 5 已知p，q为实数且$p^3+q^3=2$，求证$p+q\leqslant 2$。

证 假设$p+q>2$，则$p>2-q$，两端立方后，再整理得

$$p^3+q^3>2+6(q-1)^2.$$

由此得$p^3+q^3>2$，，这与已知条件$p^3+q^3=2$相矛盾。所以$p+q>2$是错误的，故$p+q\leqslant 2$。

例 6 求证：不定方程$8x+15y=50$没有正整数解。

证 假设有正整数解：$x=m$，$y=n$，则由$8m+15n=50$得：$8m=50-15n=5(10-3n)$。由于m是正整数，所以$5|8m$，从而知$5|m$，故

$$m\geqslant 5. \qquad (1)$$

又由$8m=50-15n$，由于n是正整数，故$8m\leqslant 50-15=35$，则

$$m\leqslant\frac{35}{8}<5 \qquad (2)$$

（1）与（2）矛盾，故不定方程$8x+15y=50$有正整数解的假定是错误的。所以方程没有正整数解。

从上面几个例子可以看到，反证法的推理过程是无既定目标的，只要是由正确的推理导致了矛盾的结果就完成了命题的证明．“导致矛盾的结果”是多种多样的，例 4 所导致的矛盾是与已知定理的矛盾；例 1 及例 3 所导致的矛盾是与题设条件或反设的矛盾；例 6 所导致的矛盾是两个互相矛盾的事实．这样，对于许多命题，反证法较之“直接证法”要达到的是一个既定的目标要来得方便，这正是反证法的优越之处．

3.3 运用反证法应注意的问题

1）必须注意正确地“否定结论”（即反设）．正确地“否定结论”是正确运用反证法的前提．如果“反设”错了，那么推理．论证得再好也都会前功尽弃．

在否定命题的结论时，首先要弄清命题的结论是什么，千万不能在命题的结论尚未弄清的时候就冒然地“否定结论”，这样就会导致在“反设”上出现错误．当命题的结论的反面非常明显且只有一种情形时是比较容易作出“反设”的．但命题结论的反面是多种情形或者比较隐晦时，就不太容易作出“反设”．这时必须认真分析、仔细推敲，在提出“假定”之后，再回过头来看看“假定”的对立面是否恰是命题的结论．

例如，设 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 和 b 是适合下列条件的整数：

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b$$

试证：这些数不能都是奇数．

这个题的结论是：“这些数不能都是奇数”，它的反面应是：“这些数都是奇数”，而不该是“这些数不能是偶数”或“这些数都是偶数”

又例如，设 a， b， c，d 都是实数，且满足：$a+b=1$，$c+d=1$，$ac+bd=1$。求证：a，b，c，d 四数不能都不是负数。

这个题的结论是“a，b，c，d 四数不能都不是负数”，也就是“a，b，c，d 至少有一个是负数”。因此，它的反面应该是：“a，b，c，d 四数都不是负数”或“a，b，c，d 四数都是非负数”，而不能是“a，b，c，d 四数不能都不是非负数”或“a，b，c，d 四数都不是非负数”。

现将一些常用词的否定形式列表如下。

原结论词	反设词	原结论词	反设词
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至少有 n 个	至多 n—1 个
大(小)于	不大(小)于	至多有一个	至少有二个

2）在添加补充“假设”后，由 B 及原题设条件 $\Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_n$ 整个推理过程必须准确无误，这样导致的矛盾才是正确的。前面已经讲过，反证法与直接证法不同的是推理的目标不太明确。因此，对于一个用反证法证明的题目，能推出什么样的矛盾结果，很难事先估计到，也没有一个机械的标准，有的甚至是捉摸不定的。那么，对于一个用反证法的题目，该到哪里去找矛盾？一般地总是在问题有关的“邻域”里去考虑。例如，关于质数的问题，往往联系到质数的意义以及数的整除性；如是关于整数、有理数以及运算的问题，除联系到整除性外，还往往联系到有理数和无理数的意义和表示等等。

3）在一定意义下，反证法的实质是改证与原命题等价

的逆否命题。凡是推出与题设相矛盾的结果，实质上都是把欲证 $A \Rightarrow B$ 真改为证明 $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ 真。但在“制作”逆否命题时，不能笼统地、简单地把原命题的条件和结论都否定并换一下就行了。例如把“若 a，b 都是正数则 ab 是正数”作为原命题，若把其条件和结论都否定并交换而得到的命题："若 ab 不是正数，则 a，b 都不是正数”就不是原命题的逆否命题。但如下制作的命题：

（1）若 ab 不是正数，a 为正数则 b 不是正数；

（2）若 ab 不是正数，b 为正数则 a 不是正数。

它们都是原命题的逆否命题。

一般情况下，当命题的条件和结论都只有一个时，只要把条件和结论都否定并交换一下位置，就可以得到原命题唯一的逆否命题；当命题的条件和结论都不止一个时，这时原命题的逆否命题不是唯一的，且逆否命题含有原命题的部分条件。了解了这一点，在应用反证法时会有助于采取不同的推理方法；

4）虽然数学证明题一般都可以采用反证法，但并不是说，所有证明题都要使用反证法来证明。就多数题来说，用直接证法能较简捷地证出来。因此，在证题时，应首先试用直接证法，若有困难时再试用反证法。从这点看，我们可以说反证法是证明一些难题的钥匙。

3.4 哪些数学问题宜用反证法

对于“若 A 则 B”一类的数学命题，一般都能用反证法来证明，但难易程度不同。有些数学问题用直接证法难度大，会遇到难以克服的逻辑上的困难或甚至不可能。但应用反证法来证明却能迎刃而解，可以说：“反证法和一些数学难题结下了不解之缘”。哪些类型的数学问题宜用反证法呢？

1）已知条件很少或由题设条件所能推得的结论很少的一类命题。特别是有一些数学分支，如平面几何和立体几何等，按照公理化方法来建立它的学科体系时，最初只是提出少量的定义、公理。因此，起始阶段的一些性质和定理，由于很难直接推证，它们多数宜于用反证法来证明。例如，平面几何中关于平行线有许多判定定理，其中的第一个判定定理（无论是用同位角相等，还是内错角互补）就难于直接证明。

例 7 求证：分别和两条异面直线 AB，CD 同时相交的两直线 AC，BD 是异面直线。

证 如图9，假设直线 AC 和 BD 同在一个平面 α 内，即平面 α 经过 A，B，C，D，因为 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，所以 $AB\subset\alpha$。同理 $CD\subset\alpha$，这与已知条件 AB 和 CD 是异面直线相矛盾。

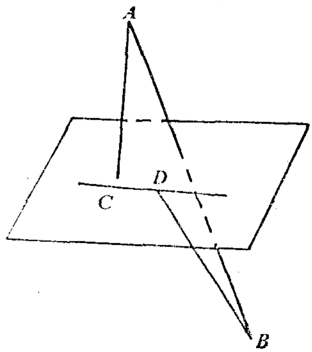


图 9

因此，直线 AC 和 BD 不可能在同一个平面内，即直线 AC 和 BD 是异面直线。

例 8 求证：圆内接 k 边形中，周界最大的必是正 k 边形。

分析 本题所给条件甚少，如用直接证法只能任作一个 k 边形 $B_1B_2\cdots B_k$ 和正 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 相比较，推出 $A_1A_2\cdots A_k$ 的周长较大。但 $B_1B_2\cdots B_k$ 的任意性太大（不能带有特殊性，否则失去了证明的一般性），因此，直接证

明比较困难。如用反证法，反设周界最大的 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 不是正 k 边形，只要我们能作出一个特殊的 k 边形 $B_1B_2\cdots B_k$，推出 $B_1B_2\cdots B_k$ 周长较大，就导致了矛盾。而带特殊性的 k 边形是容易作的。这种想法，实际上是证明了原命题的逆否命题：若 $A_1A_2\cdots A_k$ 不是圆内接正 k 边形，则它的周长不可能是该圆的所有内接 k 边形中周长最大者。

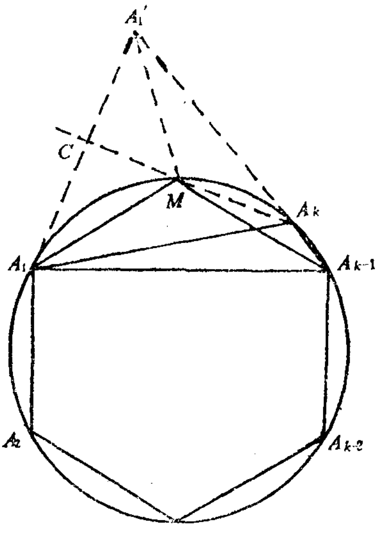


图 10

证 反设 $A_1A_2\cdots A_k$ 是所有圆内接 k 边形中周长最大者，但它不是正 k 边形，则它至少有一对邻边不相等，不妨设 $A_{k-1}A_k \neq A_kA_1$（图10），取 $\overset{\frown}{A_1A_kA_{k-1}}$ 的中点 M，连 A_1M，$A_{k-1}M$，A_kM，过 A_1 作 A_kM 的垂线，垂足为 C 点，延长 A_1C 至 A'_1，使 $A'_1C = A_1C$。于是

$\triangle A_1MC \cong \triangle A'_1MC$，

$\triangle A_1A_kC \cong \triangle A'_1A_kC$，

故

$$A_1M = A'_1M = A_{k-1}M,$$

$$A_1A_k = A'_1A_k,$$

$$\angle A'_1A_kM = \angle A_1A_kM = \angle A_1A_{k-1}M = \angle MA_1A_{k-1}.$$

又 $\angle A_1MA_{K-1}=\angle A_1A_KA_{K-1}$，

故 $\angle A'_1A_KM+\angle MA_KA_1+\angle A_1A_KA_{K-1}$

$$=\angle A_1A_{K-1}M+MA_1A_{K-1}+\angle A_1MA_{K-1}=180°.$$

因此 A_{K-1}, A_K, A'_1 三点共线，再由 $\Delta MA_{K-1}A'_1$ 得

$$A_{K-1}M+MA'_1>A_{K-1}A'_1,$$

即 $A_1M+A_{K-1}M>A_1A_K+A_KA_{K-1}$.

所以 $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{K-2}A_{K-1}+A_{K-1}M+MA_1$.

$>A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{K-2}A_{K-1}+A_{K-1}A_K+A_KA_1$.

即证得 k边形$A_1A_2\cdots A_{K-1}M$的周长大于 k边形$A_1A_K\cdots A_{K-1}A_K$ 的周长。这与反设相矛盾。故原命题成立。

2）结论的反面比原结论更具体的命题，特别是结论是否定形式（“不是”，“不可能”，“不可约”等等）的命题，这类命题的反面比较具体，宜于用反证法。

例 9 证明$\cos\sqrt{x}$不是周期函数。

分析 这里“不是周期函数”很不具体，而其反面是周期函数，则有关系可用。

证 反设$\cos\sqrt{x}$是周期函数，即存在 $T\neq0$，使

$$\cos\sqrt{x+T}=\cos\sqrt{x}. \tag{3.1}$$

令 $x=0$，可推得 $T=4K^2\pi^2$ ($K\neq0$ 为整数，不妨设$K>0$)；再在（3.1）式中令 $x=4\pi^2$，可得

$$\sqrt{4\pi^2+4K^2\pi^2}=2K_1\pi\ \text{（}K_1\text{为整数）}.$$

所以 $\sqrt{1+K^2}=K_1$.

但当 $K>0$ 时，$\sqrt{1+K^2}$不可能是整数（这是因为$K<\sqrt{1+K^2}<K+1$），因而得到矛盾。这就证得$\cos\sqrt{x}$ 不是周期函数。

例 10 证明边长为 1 的正三角形，不能被两个边长

小于 1 的正三角形盖住。

证 若能，则大的三角形的两个顶点必属于某个小三角形，这显然是不可能的。

例 11 求证：$(x+x^{-1})^n$ 及 $(x+x^{-1})^{n+1}$ 的展开式不能都含有常数项

证 假设两个展开式中都含有常数项，并设 $(x+x^{-1})^n$ 的展开式中的第 $k+1$ 项 T_{K+1} 为常数项；$(x+x^{-1})^{n+1}$ 的展开式中的第 $r+1$ 项 S_{r+1} 为常数项，则

$$T_{K+1}=C_n^K x^{n-K}x^{-K}=C_n^K x^{n-2K},$$

所以
$$n-2k=0,$$

$$k=\frac{n}{2};$$

$$S_{r+1}=C_{n+1}^r x^{n+1-r}x^{-r}=C_{n+1}^r x^{n-1-2r},$$

所以
$$n+1-2r=0,$$

$$r=\frac{n+1}{2}$$

因 k，r 都是非负整数，所以 n，$n+1$ 必须同时为偶数，这是不可能的。故 $(x+x^{-1})^n$ 及 $(x+x^{-1})^{n+1}$ 的展开式中不能同时都含有常数项。

有些问题结论的否定形式蕴含在概念之中，如二直线的平行被定义为无限延长不相交，又如异面直线被定义为不共面的直线，所以证明关于直线平行及异面直线的问题，常用反证法。

例 12 求证：椭圆的内接矩形的相邻两边分别平行于椭圆的两条对称轴。

证 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0),$$

$ABCD$ 是它的内接矩形（图11）.

反设 AB 不平行于椭圆的长轴（或短轴），则 AB 的斜率存在且不为零. 令 AB 的斜率为 k，因为 $CD /\!/ AB$，所以 CD 的斜率也是 k.

设 A,B,C,D 的坐标分别是 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，(x_4,y_4)，它们都满足椭圆的方程，

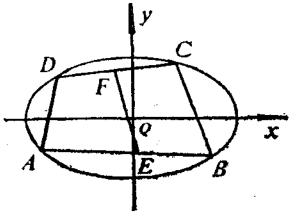


图 11

即有：

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,$$
$$b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2.$$

两式相减得：

$$b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0.$$

因为 AB 的中点 E 的坐标为

$$x'=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y'=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

所以 $$b^2x'(x_1-x_2)+a^2y'(y_1-y_2)=0,$$

$$y'=-\frac{b^2(x_1-x_2)}{a^2(y_1-y_2)}x'=-\frac{b^2}{a^2k}x'.$$

同理，设 CD 中点 F 的坐标为 (x'', y'')，则

$$y''=-\frac{b^2}{a^2k}x'',$$

由此可知，直线 EF 的方程是 $y=-\dfrac{b^2}{a^2k}x$，故 EF 的斜率为 $k'=-\dfrac{b^2}{a^2k}$

而 $EF /\!/ BC$ 故 BC 的斜率也是 k'. 因为 $a>b>0$，

所以 AB 的斜率 $\times$ BC 的斜率 $=kk'=-\dfrac{b^2}{a^2}\neq-1$,

即 AB 与 BC 不互相垂直，这与 $ABCD$ 是矩形矛盾．从而，AB 应平行于 x 轴，由此知 BC 平行于 y 轴．

例 13 如图 12，三棱锥 $S—ABC$ 的两条侧棱 $SA \neq SB$，求证：侧面 $\triangle SAB$ 的 AB 边上的高 SH 与底面 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的中线 CG 是异面直线．

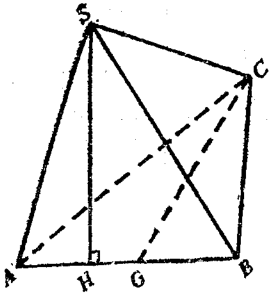


图 12

证 假设 SH 与 CG 共面，则有两种可能的情况：(1) H，G 两点重合；（2）H,G 两点不重合．

（1）若 H,G 重合因为 $SH \perp AB$，且 $AG=GB$，则 $\triangle ASB$ 为等腰三角形，所以 $SA=SB$，这与已知条件相矛盾；

（2）若 H，G 不重合，$\because H,G,C,S$ 都在同一平面，故 AB 与 SC 共面，这与 $S—ABC$ 是三棱锥相矛盾．

根据（1），（2）知 SH 与 CG 共面是不可能的，因而 SH 与 CG 是异面直线．

例 14 如果 a 是一个大于 1 的整数，而所有小于、等于 $\sqrt{a}$ 的素数都不能整除 a，则 a 是素数．

证 设 a 是合数，则 $a=b\cdot c$ 其中 b,c 都是大于 1 的整数，由于 a 不能被大于 1 而小于、等于 $\sqrt{a}$ 整数整除，所以 $b>\sqrt{a}$，$c>\sqrt{a}$，从而 $b\cdot c>\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$，这与 $bc=a$ 矛盾，因而 a 不是合数，即 a 为素数．

这类例子还可以举出很多，下面一些题留给读者做练习：

（1）证明：任何椭圆内不能作内接正 $n(n\geqslant5)$ 边形．

（2）证明：两个小圆一定盖不住一个大圆。

（3）证明：$xy-1$ 不可能分解成一次因式的乘积。

（4）证明：两个分数的和与积不能都是整数。

（5）证明：在抛物线上任取四点，组成的四边形不可能是平行四边形。

（6）证明：$\sin x$不能表示为x的多项式。

3）某些涉及无理数的问题。无理数的定义是无限不循环小数，也可以看成是实数中不是有理数的数。因此，这类问题也属否定形式，不仅如此，无理数的本身很难表示，而其反面——有理数可以表示成$\frac{q}{p}$（q,p为互质整数）的形式，这就有利于用反证法。

例如：证明$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{2}$，$\mathrm{tg}2$，$\sqrt{N}$（N不是平方数），$\cos 10°$是无理数等都用反证法，这些都留给读者做练习。

例 15 证明$\sqrt[3]{2}$不能表示成$p+q\sqrt{r}$的形式（p,q,r为有理数。

证 若$\sqrt[3]{2}$能表示成$p+q\sqrt{r}$的形式，即$\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$（显然$q\neq 0$，否则$\sqrt[3]{2}=p$是有理数），立方后得

$$2=p^3+3p^2q\sqrt{r}+3pq^2r+q^3r\sqrt{r}$$
$$=p(p^2+3q^2r)+q(3p^2+q^2r)\sqrt{r}.$$

现分两种情形讨论：

（1）若$3p^2+q^2r\neq 0$则

$$\sqrt{r}=\frac{2-p(p^2+3q^2r)}{q(3p^2+q^2r)}$$

为有理数。所以，$\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$为有理数。这与$\sqrt[3]{2}$为无理数矛盾。

（2）若$3p^2+q^2r=0$，即$q^2r=-3p^2$，则

$$2=p[p^2+3(-3p^2)]=-8p^3.$$

由此可知 $p<0$，且 $\sqrt[3]{2}=-2p$ 为有理数，这也与 $\sqrt[3]{2}$ 为无理数矛盾。

综上所述，$\sqrt[3]{2}$ 不能表成 $p+q\sqrt{r}$ 形式。

4）关于“存在性”及“唯一性”问题。

例 16 设 $f(x)$ 是一个不恒为零实系数多项式，如果存在 $n(\geqslant 2)$ 个点 $x_1 x_2 \cdots x_n \in (0,\pi)$，使

$$\sum_{K=1}^{n} f(x_K)\sin x_K=\sum_{K=1}^{n} f(x_K)\cos x_K=0.$$

求证：$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个不同的根。

证 首先证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内必有零点。若不然，则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内同号。因 $\sin x_K>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，

所以
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\sin x_k\neq 0.$$

与所设矛盾。

其次证明 $f(x)$ 至少两个不同的根。反设 $f(x)$ 只有一个根 α，则不妨设 $f(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 中为负，而在 (α,π) 中 $f(x)$ 为正，又设

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant\alpha,$$

$$\alpha\leqslant x_{m+1}<x_{m+2}<\cdots<x_n<\pi.$$

则
$$\sin(x_i-\alpha)\leqslant 0\ (i=1,2,\cdots m),$$

$$\sin(x_j-\alpha)\geqslant 0.\quad (j=m+1,\ m+2,\ \cdots n),$$

且上不等式至少有一个不等号。

故
$$f(x_i)\sin(x_i-\alpha)\geqslant 0,$$

$$f(x_j)\sin(x_j-\alpha)\geqslant 0,$$

至少有一个成立不等号。

所以
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\sin(x_k-\alpha)$$

$$=\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\sin(x_i-\alpha)+\sum_{j=m+1}^{n} f(x_j)\sin(x_j-\alpha)>0.$$

另一方面，由已知又有

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\sin(x_k-\alpha)$$

$$=\cos\alpha\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\sin x_K-\sin\alpha\sum_{k=1}^{n} f(x_K)\cos x_k=0.$$

这与上面得到的事实相矛盾。即原结论得证。

例 17 设有四面体 $ABCD$，证明必存在一个顶点，从它出发的三条棱可组成一个三角形。

证 设四面体的六条棱中，最长的一条是 AB（图13），我们证明：A，B 两点中至少有一个所求。若否，这时 AB,AC 及 AD 不能组成三角形，于是

$$AB\geqslant AC+AD$$

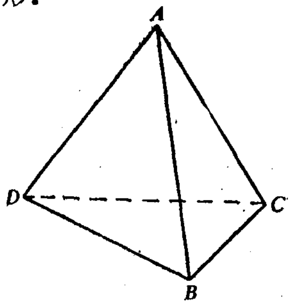


图 13

同样，由 BA，BC,BD 不能组成三角形，有

$$AB\geqslant BC+BD.$$

所以 $$2AB\geqslant(AC+BC)+(AD+BD)>AB+AB=2AB.$$

但这是不可能的，故原命题得证。

注 对极端情况的分析，常是解决存在性问题的关键，具体地说，当我们要证明存在$X\in M$具有某种性质 P时，可以先考虑集合M中具有极端性质的元素 a（例如，数量上的极大、极小，图形上的极限位置等），许多情况下，或者 a 就

是要求的元素，或者要求的元素 x 与 a 有关。如本题，我们就是从六条棱的集合中，选出了最长的来考虑。

例 18 把1600粒花生分给100只猴子，证明：不管怎样分，至少有4只猴子得到的花生一样多。

证 反设没有4只猴子得到的花生一样多，我们从所需花生最少的情况出发考虑：

3只猴子各给0粒花生；

3只猴子各给1粒花生；

3只猴子各给2粒花生；

…………

3只猴子各给32粒花生；

最后1只猴子给33粒花生。

显然，这种情况所需花生最少，共用花生

$3\times(0+1+2+\cdots+32)+33=1617$（粒）。而现在只有1600粒花生，是不够分的。这就证明这不管怎样分，至少有4只猴子得到的花生一样多。

唯一就是独一无二，它在数学上不好处理，但其反面是没有或至少有两个不同的，这在数学上就好处理些了。

例 19 求证：刻卜勒方程 $x=\sin x+c$（其中 c 是常数）的解是唯一的。

分析：欲证 $x=\sin x+c$ 的解唯一，首先应该证明方程的解存在，方程的解即是曲线 $y=\sin x$ 及 $y=x-c$ 的交点；其次，证明方程 $x=\sin x+c$ 至少有两个解是不可能的。

证 （1）因为直线 $y=x-c$ 与曲线 $y=\sin x$ 必有交点（一条是与一、三象限角平分线平行的直线，另一条是过原点正弦曲线，且这两条曲线都是无限长的，因此必相交），故方程 $x=\sin x+c$ 必有解。

（2）反设方程的解不唯一，即至少有两个解 x_1, x_2，且 $x_1 \neq x_2$，于是

$$x_1 = \sin x_1 + c, \quad x_2 = \sin x_2 + c.$$

两式相减，得 $x_1 - x_2 = 2\cos\dfrac{x_1 + x_2}{2}\sin\dfrac{x_1 - x_2}{2}$。

而
$$\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| < \frac{|x_1 - x_2|}{2},$$

$$|x_1 - x_2| = 2\left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right|$$
$$< 2 \cdot \left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2},$$

即
$$|x_1 - x_2| < \left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \cdot |x_1 - x_2|.$$

用 $|x_1 - x_2| > 0$ 去除不等式，得 $1 < \left|\cos\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right|$ 这显然是矛盾的。这就证得方程 $x = \sin x + c$ 至多只有一个解，

综上所述，知方程 $x = \sin x + c$ 的解是唯一的。

例 20 如果一个平面点集 M 可被半径为 R 的圆覆盖，但不能被半径小于 R 的圆覆盖，证明：用半径为 R 的圆去覆盖时，圆心的位置是唯一确定的。

证 若不然，设有两个不同的点 O_1 及 O_2 可以做覆盖圆的中心（图14）。

因 $M \subset \odot O_1$，$M \subset \odot O_2$，故 $M \subset (\odot O_1 \cap \odot O_2) = K$。现以两圆的公共弦 AB 为直径作 $\odot O_3$（图中未作出），设 $\overline{O_2O_3} = r$ 则 $\odot O_3$ 的半径 $AO_3 = \sqrt{R^2 - r^2} < R$，又 $M \subset K \subset \odot O_3$，这与题设

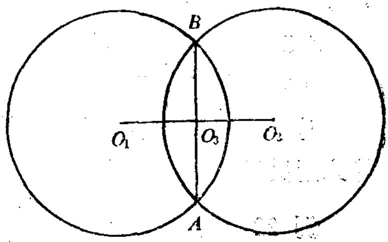


图 14

矛盾，故命题得证.

下面几个题留给读者作练习

（1）求证：所有过点（$\sqrt{2}$，0）的直线中，至少通过两个有理点（即纵、横坐标都是有理数的点）的直线有且只有一条.

（2）是否存在实数 a，b 使对所有 $x\in[0,\ 2\pi]$都有

$$f^2(x)-f(x)\cos x<\frac{1}{2}\sin^2 x.$$

其中 $f(x)=ax+b$.

（3）证明：抛物线不存在渐近线.

5）要证的结论是无限的，其反面是有限的，宜于用反证法. 下面介绍一个最有名的欧几里德关于质[illegible]无限性的证明.

例 21 求证：素数个数有无穷多个.

证 设素数仅有 n 个：$p_1, p_2, \cdots p_n$. 取整数 $N=p_1, p_2\cdots p_n+1$，显然，这个N不能被这 n 个素数中的任何一个整除. 因此，或者N本身就是素数或者N还含有除这 n 个素数以外的素因数 p，这些都与素数仅有 n 个的假定相矛盾. 故素数不能只有有限个，即素数有无穷多个.

3.5 用反证法解其他问题

1）不等式问题

对于一些关系不明确的不等式问题或难于直接证明的不等式用反证法常能凑效.

例 22 设 $x, y, z\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，且满足下列关系：

$$\sin\cos x = x,\quad \cos y = y,\quad \cos\sin z = z.$$

试将 x, y, z 的大小关系排列出来。

分析 本题不仅由题设推出的结论甚少，且 x, y, z 的大小关系不明确，使人感到难于直接入手，用反证法，添加了假设条件 $x \geqslant y$ 或 $y \geqslant z$ 就可以试推下去

解 1）假定 $x \geqslant y$，因余弦函数在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以 $0 < \cos x \leqslant \cos y = y < \frac{\pi}{2}$，从而

$$x = \sin\cos x < \cos x \leqslant \cos y = y.$$

这与 $x \geqslant y$ 矛盾，于是 $x < y$。

2）再假定 $y \geqslant z$，则 $0 < \sin z < z \leqslant y < \frac{\pi}{2}$，于是 $z = \cos\sin z > \cos y = y$，与 $y \geqslant z$ 矛盾，于是 $y < z$。

综上讨论得 $x < y < z$。

例 23 设 $a, b, c \in R^+$，求证下列三个数：

$$A = \frac{a(b-1)^2}{(a^2+1)(b^2+1)},\quad B = \frac{b(c-1)^2}{(b^2+1)(c^2+1)},$$

$$C = \frac{c(a-1)^2}{(c^2+1)(a^2+1)}$$

不能都大于 $\frac{1}{8}$。

证 反设所给的三个数都大于 $1/8$，于是它们的乘积

$$A \cdot B \cdot C = \frac{abc(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2}{(a^2+1)^2(b^2+1)^2(c^2+1)^2} > \frac{1}{8^3}.$$

另一方面，由平均不等式，有

$$\frac{a(a-1)^2}{(a^2+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{a^2+1} \cdot \frac{(a-1)^2}{a^2+1}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{a^2+1} + \frac{(a-1)^2}{a^2+1}\right]\right\}^2 = \frac{1}{8}.$$

同理 $\frac{b(b-1)^2}{(b^2+1)^2}\leqslant\frac{1}{8}$; $\frac{c(c-1)^2}{(c^2+1)^2}\leqslant\frac{1}{8}$.

三式相乘又得 $ABC\leqslant 1/8$，这与前面结果矛盾，故命题得证。

注　要证明几个数（或式子）中至少有一个满足某个不等式，常用反证明。

例 24　已知 $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha$ 求证：$\alpha<\beta$.

证　（1）假设 $\alpha=\beta$，则 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha$ 得 $\cos\alpha=1$，这与 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 相矛盾，故 $\alpha=\beta$ 不能成立。

（2）设 $\alpha>\beta$，由 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=2\sin\alpha$

得　$\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha(2-\cos\beta)$，

即
$$\frac{\cos\alpha}{2-\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

又　$\alpha>\beta$，知 $\sin\alpha>\sin\beta$ 得
$$\frac{\cos\alpha}{2-\cos\beta}>1,$$

即 $\cos\alpha>2-\cos\beta$。从而得到 $\cos\alpha+\cos\beta>2$。这与已知事实相矛盾，故 $\alpha>\beta$ 不能成立。

综上所述可知 $\alpha<\beta$。

2）奇偶性分析

在整数中，奇数和偶数是对立性矛盾。通过对有关整数的奇偶性讨论，常是解一些与整数有关的问题（特别是不定方程的整数解问题）及组合问题（通常把那些不属于传统的几何，三角及代数范畴的题叫组合题）的有力工具，而这又常与反证法联系在一起。

例 25　试证明勾股三角形（即边长为整数的直角三角

形）的两条直角边长不可能是两个差为 2 的质数。

证 用反证法。设勾股分别是质数 p 及 $p+2$(这里 $p\neq 2$，否则 $p+2=4$ 不是质数），弦为正整数 k，由 $p^2+(p+2)^2=k^2$，得

$$2p^2+4p+4=k^2.$$

上式左边是偶数，故 k 为偶数。

设 $k=2m$，$2p^2+4p+4=4m^2$，即

$$p^2+2p+2=2m^2.$$

又因 p 为奇数，这样，上式左端为奇数，而右端为偶数，这是不可能的，故命题得证。

例 26 试证明方程 $5^x+2=17^y$ 没有正整数解。

证 设有正整数 x,y 使得 $5^x+2=17^y$，即

$$(3\times 2-1)^x+2=(3\times 6-1)^y.$$

由二项式定理，得

$$3k+(-1)^x+2=3l+(-1)^y,$$

即
$$(-1)^x+2=3m+(-1)^y.$$

其中 m 为整数，若 y 为奇数，则 $(-1)^x=3(m-1)$，这是不可能的。所以 y 必是偶数。另一方面，由

$$5^x+2=17^y=(5\cdot 3+2)^y=5M+2^y$$

知 2^y-2 可被 5 整除。但 y 为偶数时 2^y-2 的末位数是 2 或 4，又得矛盾，故命题得证。

例 27 一个展览馆有 24 间展览室（如图 15，图中每个方格代表一间展览室）。每相邻展览室有门相通。问能否设计出一条从入口的参观路线，不重复不遗漏地走过每间展览室。

解 本题是一个讨论可能性的问题，用直接画的方法是难于求解的。为了把参观路线形象化，我们用黑白两色把

方格涂色(如图 16，图中有阴影的部分代表黑色)，从图 16 中可见，不论按着怎样的路线参观，参观者总是从白房进入黑房，或者从黑房进入白房。假设题中要求的路线可以设计出来，则这条路线中，方格颜色变化的情况如下：

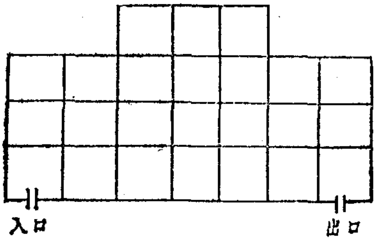


图 15

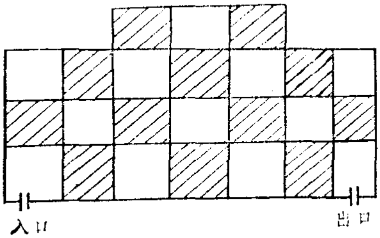


图 16

白(入口)$\xrightarrow{1}$黑$\xrightarrow{2}$白$\xrightarrow{3}$黑$\xrightarrow{4}$白→…→黑$\xrightarrow{n}$白（出口）．

从上可见，n 应是一偶数，但另一方面，由于展览室的总数是 24，所以 $n=23$ 为奇数。这就导致矛盾。也就是说，所要求的路线是不存在的。

注　在本例中，我们把展览室分成了两类，并用黑白两色标记，以便形象地揭示变化规律，再通过奇偶性分析，导致奇数等于偶数这一矛盾。这是用奇偶性分析解题的常用手段。当然，除用涂色方法作标记外，也可用数字化方法，即用 -1 和 1 或者 0 和 1 来标记要研究的对象。

例 28　证明：不存在这样的多面体，它有奇数个面，而每面都可有奇数条棱。

证　初看起来，这是一个立体几何的问题。但它却是巧妙地用奇偶性分析证明。

用反证法　设多面体有 $2n+1$ 个面，每面棱数分别为：a_1，a_2，…，a_{2n+1}（它们都是奇数）．于是，$a_1+a_2+\cdots$

a_{2n+1} 是奇数．另一方面，由于任何一条棱都恰为两个面所共有．这样，和 $a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}$ 又等于该多面体总棱数的二倍，故应为偶数，所得矛盾说明这样的多面体不存在．

注　其他三种情况的多面体都存在．如四面体是有偶数个面，每面有奇数条棱的多面体；立方体是有偶数个面，每面有偶数条棱的多面体；图 17 所示的多面体是有奇数个面，每面有偶数条棱的多面体．

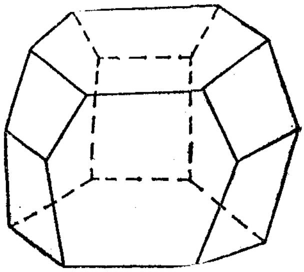


图　17

例 29　设有 m 只茶杯，开始时杯口都朝上，把茶杯随意翻转，规定每翻转 n 只，算一次翻动，翻动过的茶杯允许再翻，证明：当 m 为奇数，n 为偶数时，无论翻动多少次，都不可能使杯口都朝下．

证法 1　反设经 k 次翻动能成功．若每只茶杯被翻动过的次数是 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_m，由于把茶杯从朝上翻到朝下总要翻奇数次才行，所以 $a_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 都是奇数．又因 m 是奇数，故 m 只茶杯被动过的总次数 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 是奇数．另一方面，因每次翻动 n 个，故所有杯子被动过的总次数是 kn，这是一个偶数，是为矛盾．

证法 2　用数字化方法．规定杯口朝上时为 1，杯口朝下时为 -1．经过 k 次翻动后，代表茶杯情况的 m 个数字乘积是 F_k．开始时茶杯口全朝上故 $F_0=1$，茶杯经 k 次翻动后，再经第 $k+1$ 次翻动时，改变了 n 个数时的符号，故 $F_{k+1}=(-1)^nF_k=F_k$．由上可见，对所有 k，$F_k=1$．但是，杯口全朝下时，代表茶杯情况的 m 个数字的乘积是 $(-1)^m=-1$，是为矛盾．这就证明了无论经多少次翻动，

都不能使杯口全朝下。

例 30 已给如下数表：

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 & 24 & -5 & 3 \\ 0.2 & -3.15 & 2.7 & -2 & -7 & 1.1 \\ -7 & \pi & -1 & 8.3\times10^5 & 6 & -9 \\ -1.2 & 63 & 720 & -631 & 8 & 7 \\ 63 & e & -15 & -9.1 & -11 & 8 \\ -30 & 10 & -18 & -2 & -9 & -0.5 \end{pmatrix}$$

将它的任一行或一列中的所有数同时变号，称为一次变换。问能否经过若干次变换，使表中的数全变为正数。

解 因为每次变换，改变表中 6 个数的符号，而$(-1)^6=1$，所以每次变换不会改变所变动的行（或列）中 6 个数的乘积的符号，从而也不会改变全表中 36 个数乘积的符号，开始时表中有 19 个负数，故表中 36 个数的乘积为负数。这样，无论作多少次变换，表中 36 个数乘积：总是负的。但全表中所有数为正时，36 个数的乘积为正。所以，无论经多少次变换，都不能使表中所有数全变为正的。

例 31 用 18 张 1×2 的纸牌随意地拼成 6×6 的方格 A（纸牌横放竖放都可）求证：必存在一条直线把 A 分成非空的两块，且此直线不穿过任何一张纸牌。

证 考察把 A 划分成方格的五条水平线和五条竖直线，如果它们都至少穿过一张纸牌，由于这些直线中的每一条都是把 A 划分成有偶数个方格的非空的两块，所以它们中的每一条都只能穿过偶数张纸牌（否则划分的两块各有奇数个方格），再由所设知，每条直线至少要穿过两张纸牌。又因为这些直线中任两条不会穿过同一块纸牌，这样 A 中至少有

$$5\times2+5\times2=20$$

张纸牌，导致矛盾.

例 32 能否把 1，1，2，2，3，3，…，1986，1986 这些数字排成一行，使得两个 1 之间夹着一个数，两个 2 之间夹着两个数，……，两个 1986 之间夹着 1986 个数．请证明你的结论．

解法 1 假设能按要求排出，所给这些数将占有 $2\times1986=3972$ 个位置．按从左到右的顺序，依次称这些位置为第 1 号位，第 2 号位，……，第 3972 号位．于是每个 i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 1986)$ 将占有两个位置，设分别为 a_i 位及第 b_i 位 $(a_i<b_i)$，依题设要求，有

$$b_i-a_i=i+1,$$

即 $$b_i+a_i-2a_i=i+1.$$

$$\sum_{i=1}^{1986}(b_i+a_i)-2\sum_{i=1}^{1986}a_i=\sum_{i=1}^{1986}(i+1)$$

$$=2+3+\cdots+1987=993\times1989=\text{奇数} \qquad (3.2)$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{1986}(b_i+a_i)$ 恰是全部号位的和，即

$$\sum_{i=1}^{1986}(b_i+a_i)=1+2+3+\cdots+3972$$

$$=1986\times3973=\text{偶数}.$$

这样，(3.2) 式左端是偶数，而右端是奇数，这是不可能的．即证明这些数不能按要求排成一列．

解法 2 a_i，b_i 的意义同解法 1，有

$$b_i-a_i=i+1\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 1986)$$

设 i 为奇数，则 $i+1$ 是偶数，从而 a_i 和 b_i 有相同的奇偶性．这说明在奇号位置上的奇数必为偶数个（设为 $2m$ 个）；设 i 为偶数，则 a_i 和 b_i 必一奇一偶，这说明所有偶

数必然是一半在奇号位置上，一半在偶号位置上。综上得知，1986 个奇号位有 993 个被偶数所占，其余被 $2m$ 个奇数所占，故

$$1986 = 993 + 2m.$$

但上式左边是偶数，右边是奇数，导致矛盾，这就是说，不能按要求排成一行。

例 33 设集合 M 由奇数个元素组成，如果对于 M 中的每一个元素 x，都有一个唯一确定的集合 $H_x \subseteq M$ 与 x 对应，并且满足条件：

（1）对于任意 $x \in M$，都有 $x \in H_x$；

（2）对于任意两个元素 x，$y \in M$，当且仅当 $y \in H_x$ 时，$x \in H_y$。

求证：至少有一个 H_x，由奇数个元素组成。

证 反设所有 H_x 中元素的个数都是偶数。将 M 中的元素用点表示，如果 $y \neq x$ 并且 $y \in H_x$，就在 x，y 之间连一线段。由条件 2）知，这条线段也表示 $x \in H_y$，这说明了这种连线方式的合理性。

如果 H_x 中元素的个数是偶数，因为由条件 1）知 $x \in H_x$，故从 x 引出的线段必是奇数条。现设所有 H_x 中元素的个数都是偶数，那么从 M 中每一点引出的线段的条数的总和是

$$k = \text{奇数个奇数的和} = \text{奇数}.$$

另一方面，由于每条线段是连接 M 中的两个点，所以 k 是图中所有线段的 2 倍，必是偶数，是为矛盾。

3）其他组合题

例 34 设 a_1，a_2，…，a_n 为一系列数，其中任何三个连续项的和为正，任何五个连续项的和为负。求证：$n \leqslant 6$。

证 反设 $n \geqslant 7$。考虑下表：

$$a_1,\ a_2,\ a_3$$
$$a_2,\ a_3,\ a_4$$
$$a_3,\ a_4,\ a_5$$
$$a_4,\ a_5,\ a_6$$
$$a_5,\ a_6,\ a_7.$$

由题设知，上表中每行3个数之和为正，所以表中15个数的总和为正；另一方面，上表中每列五个数之和为负，所以，表中15个数的总和为负．是为矛盾．

注　$n=6$时，数列3，-5，3，3，-5，3满足要求．

例 35　设A，B，C三个人中有两种人，一种人从不说真话，一种人从不说假话．在一次集会上，A说B，C都是说谎者，B予以否认；而C说B在说谎．问A，B，C各是哪种人．

解　先把可能的答案列表如下：

可能答案	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
说真话者	A,B,C	A, B	A, C	B, C	A	B	C	
说谎者		C	B	A	B, C	A, C	A, B	A,B,C

若是①，由于A说真话，从而B，C说谎，这与①自相矛盾．

若是②，由于A说真话，从而B，C说谎，这与B是说真话者矛盾．

类似地，可分析出答案③，④，⑤，⑧都有矛盾．

若是⑥，由于B说真话，所以A说“B，C说谎”是假话；C说“B在说谎”是假话，故A，C是说谎者，这与答

案⑥相容（即无矛盾）．故⑥是可能答案．

类似地，⑦也是可能答案．

综上，本题答案有两种：B是诚实人，A，C是说谎者；C是诚实人，A，B是说谎者

注　本题是所谓逻辑问题，解法中用了反证法和淘汰法．

例 36　设有 n 种虫子，任取两种必有一种可吃掉另一种．求证：一定可以把 n 种虫子排成一行，使前一种可以吃掉后一种．

证　设 n 种虫子为 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$a_i \to a_j$ 表示 a_i 吃掉 a_j（这里吃掉关系不能传递，即 $a_i \to a_j$，$a_j \to a_k$ 不一定 $a_i \to a_k$），用数学归纳法讨论．

$n=2$ 时，$a_1 \to a_2$ 及 $a_2 \to a_1$ 至少有一个成立．

设 $n=k$ 时成立，并且不妨设（必要时重新排号）$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_k$．

下面证明 $n=k+1$ 时成立．

用反证法．若不成立，即 $k+1$ 种虫子不能按“$\to$”排成一列．

（1）必有 $a_1 \to a_{k+1}$ 若不然 $a_{k+1} \to a_1$，排成 $a_{k+1} \to a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_k$ 矛盾．

（2）设 $a_i \to a_{k+1}$（$i<k$）则必 $a_{i+1} \to a_{k+1}$，若不然，$a_{k+1} \to a_{i+1}$，于是排成

$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_i \to a_{k+1} \to a_{i+1} \to a_{i+2} \to \cdots \to a_k$，矛盾．

由（1），（2）及数学归纳法，得 $a_k \to a_{k+1}$，于是排成

$$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_k \to a_{k+1}.$$

这就证得命题对 $n=k+1$ 时成立．

下面讲一个著名的数学问题，这个问题是英国著名数学

家雪尔维斯特（Sylvester, 1814—1897）提出的，世称雪尔维斯特问题。这个问题提出后，历经50年无人能解决，后来被一个"无名小卒"用反证法解决了。

Syloester **问题**：平面上一有限点集M，过M中任意两点作直线，必过M中的另一点，则集M中的所有点共线。

证 设M中有n个点a_1，a_2，…，a_n，它们不共线。则过其中任两点作直线，这样的直线只有有限条（至多是C_n^2条）。由于M中的点不共线，因而对这些直线中的每一条a_ja_k（$1\leqslant j<k\leqslant n$），至少有一点$a_i$不在直线$a_ja_k$上，记

$$d_{ijk}=a_i\text{ 到直线 }a_ja_k\text{ 距离},$$

则$d_{ijk}>0$，而这样的d_{ijk}一共只有有限个。所以集$N=\{d_{ijk}\}$中必有一个最小的数，记为d，

$$d=\min\{d_{ijk}\},\ d>0,$$

不妨设$d=d_{123}=a_1$到直线l：a_2a_3的距离，由所设条件，l上至少还有集M中的一点。

设$a_4\in l\cap M$，这样在a_1到l的垂线是A点的某一侧，至少有a_2，a_3，a_4中的两点（可能有一点就是A），比如a_2，a_3，且不妨设a_3离A近（图18），于是$d>h>d_{314}$，（h是A到a_1a_4的距离）这与对d的假设矛盾。

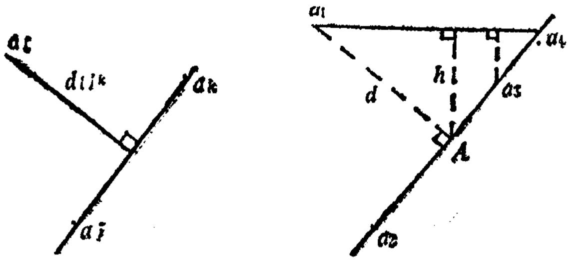


图 18

练　习　题

1. 设 $f(x)=x^2+px+q$，求证：$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$ 中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$。

2. 设α，β，γ为正角，且$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，求证：$\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$。

3. 设$f(x)$，$g(x)$ 是$[0, 1]$上的实值函数，证明存在x_0，$y_0\in[0,1]$，使得

$$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}.$$

提示：反设结论不成立，然后分别取 $x_0=0$，$y_0=0$；$x_0=0$，$y_0=1$；$x_0=1$，$y_0=0$；$x_0=1$，$y_0=1$。对所得四个不等式进行分析。

4. 设实数a_0，a_1，a_2，…，a_{n-1}，a_n满足下列条件：$a_0-a_n=0$，$a_0-2a_1+a_2\geqslant0$，$a_1-2a_2+a_3\geqslant0$，…，$a_{n-2}-2a_{n-1}+a_n\geqslant0$。
证明：$a_k=0$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$。

5. 设三角形的三边互不相等，求证：过此三角形任一顶点作直线，无论如何作都不能把原三角形划分成两个全等的小三角形。

6. 设$p(x)$ 是一个整系数多项式，对于x的5个不同整数值，a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，$p(a_i)$ $(i=1,2,3,4,5)$为同一质数，试证：$p(x)$ 无整数根。

7. 求证：以整数为公比的等比数列的任一项不可能等于另外两项的和。

8．在面积为5的矩形中，放置9个面积为1的矩形．求证：一定存在两个矩形，它们的公共部分的面积不小于$\frac{1}{9}$．

提示：反设结论不成立，推出9个小矩形公共部分的面积大于5．

9．设a_1，a_2，…，a_{64}是自然数1，2，3，…，63，64的任意一种排列，令

$$b_1=|a_1-a_2|,\ b_2=|a_3-a_4|,\ \cdots,\ b_{32}=|a_{63}-a_{64}|;$$
$$c_1=|b_1-b_2|,\ c_2=|b_3-b_4|,\ \cdots,\ c_{16}=|b_{31}-b_{32}|;$$
$$d_1=|c_1-c_2|,\ \cdots,\ d_8=|c_{15}-c_{16}|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如此一直作下去，最后得到一个整数x，求证：x为偶数．

10．设n为一奇数，a_1，a_2，…，a_n是1，2，…，n的任一排列，求证：乘积$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$必为偶数．

11．求证：不存在整数m，n，使得

$$5m^2-6mn+7n^2=1987.$$

12．设在平面上给定了13个点p_1，p_2，…，p_{13}，假设它们之间连有线段p_1p_2，p_2p_3，…，$p_{12}p_{13}$，$p_{13}p_1$，问能否作一条直线，使之通过这些线段中的每一条的内部．

13．今有10人，要排一张值日表，每天排3人，无论如何排，但要求每2人有且只有一天在一起值日，求证：这张表不可能排出．

14．已知平面上有四个半平面，它们把全平面复盖，求证：从中可以找出三个平面，它们仍复盖全平面．

提示：反设的含义是：对每一个半平面，其上至少有一

点不在另三个平面上.

15. 平面上任给 n ($\geqslant 3$) 个点，其中任两点的距离的最大值为 d. 距离为 d 的两点间的连线段称为这一组点的直径，求证：直径的数目至多 n 条.

16. 任给六点（其中任三点不共线），求证：从这些点的15条连线中，至多只能选出9条，使六点中任何三点都没有连成三角形. 并请作出选9条的方案.

4 从结论入手

4.1 反推法

反推法是一种从结论入手考虑的证题方法。设要证明命题：若A则B，即

$$A \Rightarrow B.$$

当命题的条件A与结论之间的关系较复杂，直接从已知条件A出发进行推证时，有时在中途会迷失方向，使推理难于进行下去。在这种情况下，可以运用“执果索因”的反推法。具体地说是：先假定结论B成立，然后以结论作为条件，看能逆推出一些什么结果。设由B能推出结论C(即$B \Rightarrow C$)，再检查B与C是否可逆（即是否能由$C \Rightarrow B$），若可逆，即

$$B \Leftrightarrow C.$$

接着分析从C又能得出什么结果，若由C能得出结论D，且C与D可逆，即$C \Leftrightarrow D$，再继续逆推，如果最终得到下面的程式：

B（原命题结论）$\Leftrightarrow C \Leftrightarrow D \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow G$. 关于结论$G$，可能出现几种情形：

（1）G是命题的条件A，或G是已知的结论。这样，就完成了分析的过程，原命题可得到证明。这种情形常称为**逆证法**；

（2）上述逆推程序进行到某一步骤，例如到结论G（也可能是前面的结论C或D等），发现命题“$A \Rightarrow G$”是比较容易证明的。由于命题“$A \Rightarrow G$”与命题“$A \Rightarrow B$”是等价

的，这样也就完成了原命题的证明。这种情形的推导程式是为：

$$A \Leftrightarrow G \Leftrightarrow B.$$

从方法上讲，这是通过等效变形把原命题转化为一个较容易证明的命题。从广义意义上讲，各种数学问题的转化，如几何问题的代数化，代数问题的几何化，抽象问题的具体化或数字化（如前节奇偶性分析中的一些例题）都属于这种情形。

例 1 设 a，b 都是不等于 1 的正数，且 $a^b=b^a$，求证：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}.$$

分析 欲证等式的结构比较复杂，从已知条件比较难于入手，故宜用反推法。这正如我们通常证明三角恒等式时，总是从复杂的一边向简单的一边转化一样。

证 假定欲证等式成立，两边 b 次方，得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^a=a^{a-b}.$$

再两边除以 a^a，得

$$\frac{1}{b^a}=\frac{1}{a^b},$$

即 $$b^a=a^b.$$

最后这个等式是已知条件，而且上述推导的每一步都是可逆的，故命题得证。

注 本题的论证过程，可写成程式：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^a=a^{a-b} \Leftrightarrow b^{-a}=a^{-b} \Leftrightarrow a^b=b^a.$$

以后的解题过程，我们常用程式。

例 2 设 a，$b \in R^+$，且 $2c>a+b$，求证：

$$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}.$$

分析 要证的是双联不等式，由已知条件很难直接推证（请逆看下述证明的程式），考虑用反推法。

证 由于要证的不等式

$$\begin{aligned}&c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}\\ \Leftrightarrow&-\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab}\\ \Leftrightarrow&|a-c|<\sqrt{c^2-ab}\\ \Leftrightarrow&a^2-2ac+c^2<c^2-ab\\ \Leftrightarrow&a+b<2c.\end{aligned}$$

而最后一个不等式是原命题条件，故原不等式得证。

注 反推法是证明复杂不等式的常用方法，下面再举几个例题。

例 3 设 a，b，c 是三角形的三边，$m>0$，求证：

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}.$$

证 原不等式等价于

$$\begin{aligned}&\frac{a(b+m)+b(a+m)}{(a+m)(b+m)}>\frac{c}{c+m}\\ \Leftrightarrow&\frac{2ab+m(a+b)}{ab+m(a+b)+m^2}>\frac{c}{c+m}\\ \Leftrightarrow&\frac{ab+m(a+b)+m^2}{2ab+m(a+b)}<\frac{c+m}{c}\\ \Leftrightarrow&1+\frac{m^2-ab}{2ab+m(a+b)}<1+\frac{m}{c}\\ \Leftrightarrow&cm^2-abc<2abm+m^2(a+b)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m^2[c-(a+b)]<ab(2m+c).$$

因 $a+b>c$，故上式左边为负，而右边为正，故最后的不等式成立。证毕。

注　本题所用的变形方法——先通分，再将两边分式取倒数并把不等式反向，在证明分式不等式时是常用的。

例 4　设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1>1$，公差 $d>0$，求证数列 $\{\log_{a_n}^{a_{n+1}}\}$ 是递减的。

证　我们需要证明不等式

$$\log_{a_n}(a_n+d)>\log_{(a_n+d)}(a_n+2d).$$

因为 $a_1>1$，$d>0$，所以 $a_n>1$，$\log_{a_n}^{(a_n+d)}>0$ 故上不等式

$$\Leftrightarrow 1>\frac{1}{\log_{a_n}(a_n+d)}\log_{(a_n+d)}(a_n+2d)$$

$$=\log_{(a_n+d)}a_n\log_{(a_n+d)}(a_n+2d)$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}\log_{(a_n+d)}(a_n+d)^2$$

$$>\log_{(a_n+d)}a_n\log_{(a_n+d)}(a_{n+2d}) \qquad (4.1)$$

下面证明这个不等式。由 $d>0$，易知 $a_n(a_n+2d)<(a_n+d)^2$，所以

$$\log_{a_n+d}(a_n+d^2)>\log_{a_n+d}(a_n+2d),$$

即　$$1>\frac{\log_{(a_n+d)}a_n+\log_{(a+d)}(a_n+2d)}{2}.$$

再由平均不等式，得

$$1>\left[\frac{\log_{(a_n+d)}a_n+\log_{(a_n+d)}(a_n+2d)}{2}\right]^2$$

$$\geqslant\log_{(a_n+d)}a_n\log_{(a_n+d)}(a_n+2d).$$ 证毕。

注　本例是先用反推法把原式转换成较容易的不等式

(4.1)，然后再用综合法证明，这是证明较复杂的不等式常用的手段.

例 5 设$\triangle ABC$的三个内角成等差数列，求证：

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

分析 此题若用综合法，由A，B，C成等差数列可得到$A+C=2B$，再由$A+B+C==180°$可知$B=60°$. 但到此即迷失了方向. 无从下手去推证. 现用反推法.

证 欲证等式等价于

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$$

$$\Leftrightarrow\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$$

$$\Leftrightarrow c(b+c)+a(a+b)=(a+b)(b+c)$$

$$\Leftrightarrow b^2=a^2+c^2-ac.$$

下面证明最后一个式子. 这个式子的形式很象余弦定理. 于是，由A，B，C成等差数列，知$B=60°$，

所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-2ac$. 证毕

例 6 设AOB是圆O的一条直径（图 19），BM是圆在B点的切线；CF是圆在F点的切线，它与BM相交于C，延长弦AF与BM交于D. 求证：$BC=CD$.

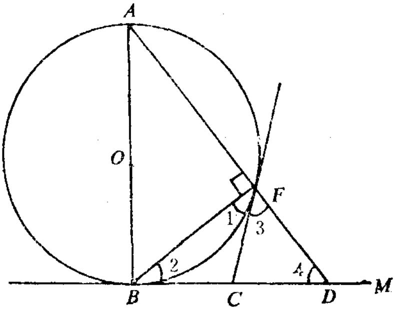


图 19

证 用反推法，假定$BC=CD$，由于从题设条件知$CB=CF$，故$FC=CD$，$\angle 3=\angle 4$，

连接 BF，由于 $\triangle ABD$ 是直角三角形，$\angle A$ 与 $\angle 4$ 互为余角；又由于 $\triangle ABF$ 是直角三角形知 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 互余 $\angle A=\angle 1$，而 $\angle A=\angle 1$ 是已知的（圆周角等于弦切角），由于上述分析的每一步骤可逆，故原命题得证。

注 上述反推法证明，如果正面写出来（即用综合法）其程序为（理由从略）。

因为 $\angle A=\angle 1$ $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 互余，$\angle A$ 与 $\angle 4$ 互余，所以 $\angle 3=\angle 4$，于是，$CD=CF$。又因 $CF=BC$，故 $CD=BC$，

例 7 设有 $n(>1)$ 个选手 P_1，P_2，P_3，…，P_n 参加一次乒乓球循环赛（循环赛是每两位选手都只赛一次，乒乓球赛无平局）。用 a_i 及 b_i 分别表示选手 P_i（$i=1, 2, \cdots, n$）获胜与失利的局数。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2=\sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

证 欲证等式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-b_i^2)=0 \qquad (4,2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)(a_i-b_i)=0,$$

由题设知，每个选手都要参加 $n-1$ 场比赛，故 $a_i+b_i=n-1$（$i=1, 2, \cdots, n$），所以上式即为

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=0 \qquad (n>1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i. \qquad (4.3)$$

而最后这个等式是成立的，这是因为比赛没有平局，n个选手总的获胜局数等于失利的总局数。

注　从本题可以看出反推法的优点，这是因为采用直接证法，首先就不易想到(4.3)式成立，即使想到了，从(4.3)式推导(4.2)式还要费不少思索。而从(4.2)式推得(4.3)式则比较自然。下面一个例题更说明了这一点。

例 8　求出n个互不相同的自然数，使它们的例数和为$\frac{1}{n!}$。

解　设x_1，x_2，…，x_n是n个互不相同的自然数，使得

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{n!}.$$

记左边各分数的公分母（即x_1，x_2，…．x_n的最小公倍数）为A，设

$$\frac{1}{x_i}=\frac{a_i}{A}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{A}=\frac{1}{n!}.$$

这就是说，只要取$A=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot n!$就可达到预期的目的。问题是$a_1$，$a_2$，…，$a_n$如何选取。最简单的是选取$a_1=1$，$a_2=2$，…，$a_n=n$来试探，于是

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

由此可知，若取

$$A=\frac{1}{2}n(n+1)\cdot n!,$$

则 $x_i=\frac{A}{a_i}=\frac{n}{2}(n+1)\cdot\frac{n!}{i}\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$

由于$\frac{n!}{i}$是自然数，故 x_i 确是互不相同的自然数，且满足

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{n!}.$$

注 （1）本题是个不定方程，它的解远不止一组；

（2）即使是解最简单的方程，从实质上说都是用的反推法，如

$$2x+4=10\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3.$$

（3）某些方程，如分式方程，无理方程，超越方程等，由于从方程出发逆推过程不等价（即不具可逆性），所以这是造成增根或失根的原因.

4.2 分析法

本小节仍就命题“$A\Rightarrow B$”进行讨论. 有些命题，特别是数学竞赛中的一些题，由于它们是把另一些题加以改造得出的，结论 B 的形式较复杂，这时从原命题的结论 B 难以逆推，所以我们可以转而分析要得到 B 需要什么样（充分）条件. 假设若有条件 C 就有结论 B，即 C 是成立的充分条件：

$$C\Rightarrow B.$$

再分析在什么样的条件下能得到 C，即

$$D\Rightarrow C.$$

如果 D 比 B 的形式要简单得多，这就引导我们去考虑命题

$$“A\Rightarrow D”,$$

如果这个命题成立，也就证明了原命题。这种证题方法的推导程式为

$$A\Rightarrow D\Rightarrow B$$

一般称之为**分析法**。下面对分析法作几点说明：

（1）分析法的证明中，常使用短语："只需证明……就可以了"来刻划，具体地说是：$D\Rightarrow B$欲证"$A\Rightarrow B$"只需证明 $A\Rightarrow D$ 即可。

（2）逆证法是把要证的结论作为推理的起步，以后每步推理都是它前步的充要条件；分析法是逐步分析命题结论成立的充分条件，在推理过程中，只要求前一步是它后一步的充分条件即可。因而，逆证法是分析法的特殊情况。用逆证法证明的命题用分析法一定能证明，反之用分析法能证明的命题，用逆证法就不一定能证。

（3）分析法是基于：若命题"$A\Rightarrow D$"成立，则命题"$A\Rightarrow B$"一定成立。从方法上说，是把我们原来要证的命题，改成了证明命题"$A\Rightarrow D$"成立。由于命题"$A\Rightarrow D$"不一定成立（它实际上是命题"$A\Rightarrow B$"成立的充分条件，而非必要条件），这样，分析法实为一探索过程。如果"$A\Rightarrow D$"不成立，并不能说明"$A\Rightarrow B$"不成立，如果出现这种情形，我们只能另求解题途径。

例 9 设 $0\leqslant a,b,c\leqslant 1$，求证

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1,$$

证 欲证不等式的左边很复杂，直接证明（如先把左边通分）是很困难的，由于此不等式关于字母 a，b，c 是对称的，故不妨设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$，于是有

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1},$$

故原不等式左边$\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$.

这样，我们就可以试探着去证明

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1 \qquad (4,4)$$

（只要它成立的话，原不等式一定成立）.

因为式（4.4）左边$=\frac{a+b+1}{a+b+1}+\frac{c-1}{a+b+1}+(1-a)(1-b)$

$$\cdot(1-c)$$

$$=1-\frac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)$$

$$\cdot(1-b)],$$

这样,为证明式（4.4），只要证明

$$(1+a+b)(1-a)(1-b)\leqslant 1 \quad \text{即可}$$

这已不难证明了，事实上，

$$(1+a+b)(1-a)(1-b)\leqslant(1+a+b+ab)(1-a)(1-b)$$
$$=(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 1.$$

故不等式（4）成立，从而原式成立.

注　本题的证明方法，在不等式的证明里叫做**放缩法**.

例 10　设 a，b，c 是互不相等的正数，求证：

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant 3abc\sqrt[3]{abc}.$$

证　由平均不等式，有

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc},$$

这样，为证明原不等式，只需证明

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c} \geqslant \frac{3abc\sqrt[3]{abc}}{3\sqrt[3]{abc}},$$

即 $$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2,$$

亦即 $$\frac{1}{2}(a^2b^2+c^2a^2)+\frac{1}{2}(b^2c^2+a^2b^2)+\frac{1}{2}(c^2a^2+b^2c^2)$$

$$\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

而为证最后这个不等式，又只需证明

$$\frac{1}{2}(a^2b^2+c^2a^2) \geqslant a^2bc,$$

$$\frac{1}{2}(b^2c^2+a^2b^2) \geqslant ab^2c,$$

$$\frac{1}{2}(c^2a^2+b^2c^2) \geqslant abc^2.$$

这三个不等式，由平均不等式立即可以得到。故原不等式成立。

例 11 设 a 是任意的正奇数，证明：一定存在整数 x，y，使得 $5x^2+11y^2-1$ 为 a 的倍数。

证 本题只要能找出两个 x，y，使 $5x^2+11y^2-1$ 是 a 的倍数即可。现在的困难是 $5x^2+11y^2-1$ 不能分解因式，为克服这一困难，我们可试设 $x=y$，于是

$$5x^2+11y^2-1=16x^2-1=(4x+1)(4x-1).$$

设 $a=2m+1$，我们只要选取 x，使 $4x-1$ 是 $2m+1$ 的倍数即可。为此，又只需取 $x=m^2$ 即可，事实上，$x=m^2$ 时，有

$$4x-1=4m^2-1=(2m-1)(2m+1),$$

$$16x^2-1=(4m^2+1)(2m-1)(2m+1)=Ka,$$

其中K为整数。这就是说，当$x=y=m^2$，时$5x^2+11y^2-1$是a的倍数。

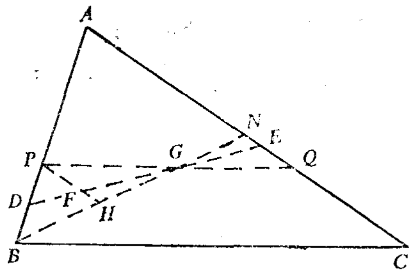


图 20

例 12 过$\triangle ABC$的重心G任作一直线，把这三角形分成两部分。证明：这两部分面积之差不大于整个三角形面积的$\frac{1}{9}$。

证 以下用S_{ABC}表示$\triangle ABC$的面积，余类似。首先考虑两条过G点的特殊的直线：

（1）过G作$PQ\parallel BC$分别交AB,AC于P,Q(图20)，则

$$
\begin{aligned}
&S_{PBCQ}-S_{APQ}\\
&=S_{ABC}-2S_{APQ}\\
&=S_{ABC}\left(1-2\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}\right)\\
&=S_{ABC}\left[1-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]\\
&=\frac{1}{9}S_{ABC}.
\end{aligned}
$$

2）连BG延长交AC于N，则

$$S_{ABN}-S_{BCN}=0.$$

现在，过G任作一直线，交AB，AC于D,E，由(1)及(2)可知，为完成命题的证明，只需证明：

$$S_{ABN}-S_{BCN}\leqslant S_{DBCE}-S_{ADE}\leqslant S_{PBCQ}-S_{APQ}. \quad (4.5)$$

为此，过P作AC的平行线，分别交DE,BN于F,H，则有

$$\triangle PFG \cong \triangle QEG,\ \triangle FHG \cong \triangle ENG.$$

所以
$$S_{PDG} \geqslant S_{PFG} = S_{QEG},$$
$$S_{DHG} \geqslant S_{FHG} = S_{ENG},$$
$$S_{DBCE} = S_{PBCQ} + S_{QEG} - S_{PDG} \leqslant S_{PBCQ},$$
$$S_{ADE} = S_{APQ} + S_{PDG} - S_{QEG} \geqslant S_{APQ}.$$

由这两式，即得式（4.5）中的第二个不等式．（4.5）中的第一个不等式可类似地证明．

例 13 求证：任何面积等于1的凸四边形的周长及两条对角线之长的总和不小于 $4+\sqrt{8}$．

证 先考虑两个满足题设要求的特殊情形：

（1）边长为1的正方形，它的周长＝4；两对角线长之和$=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$；

（2）两相邻边长为2及$\frac{1}{2}$的矩形，它的周长＝5，两对角长之和$=2\sqrt{4+\frac{1}{4}}=\sqrt{17}$．

这引导我们猜测，是否可把周长和两对角线长分开来算，即去证明：对满足题设的凸四边形，有

$$\text{周长} \geqslant 4 \tag{4.6}$$

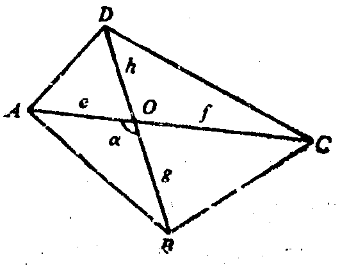


图 21

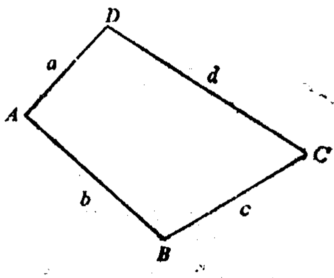


图 22

两对角线长$\geqslant\sqrt{8}$　　　　　　　　　　(4.7)

(注意：这两个不等式是原不等式的充分条件而非必要条件。)

而这并不难证明：如图21，记$AO=e$，$OC=f$，$OB=g$，$OD=h$，$\angle AOB=\alpha$ 则

$$1=S_{ABCD}=\frac{1}{2}(eg+gf+fh+he)\sin\alpha$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(e+f)(g+h)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{e+f+g+h}{2}\right)^2.$$

所以　$e+f+g+h\geqslant\sqrt{8}$.

又如图22，记$AD=a$，$AB=b$，$BC=c$，$CD=d$，则

$$2=2S_{ABCD}=\frac{1}{2}ab\sin A+\frac{1}{2}bc\sin B$$

$$+\frac{1}{2}cd\sin C+\frac{1}{2}da\sin D$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2.$$

故　$a+b+c+d\geqslant 4$.

这就完成了式(4.6)及(4.7)的证明，从而命题成立。

例 14 设有n个球，甲乙两人按下法做游戏：两人轮流取球，每人一次可随意拿一个或两个球，但不准不拿，谁取得最后一个球谁败。如果甲先拿，试就n的值分析甲的

胜败．

解 首先容易得到下面的判断：

甲最后一次取时剩2个或3个球（记作D）→甲胜（记作B）．

这是因为剩2个或3个球时，甲取走1个或2个，最后一个是乙取．往前追溯，又易知

乙最后一次取时剩4个球（记作C）$\Rightarrow D$；

甲倒数第二次取时剩5个或6个球$\Rightarrow C$；

…………

由此可知，甲开始取时，球数$n=3k$或$3k+2$时，甲必胜．其具体策略如下：设$n=3k$或$3k+2$个球时，甲取走2个或1个球，乙取时球数是$3k_1+1$个．然后乙取，若乙取2个，甲就随之取1个；若乙取1个，甲就取2个．总之，使乙取球时，球数都是3的倍数加1，最终使乙取走最后一个球．

如果$n=3k+1$，则甲必败．这是因为甲第一次无论是取1个或2个球，乙第一次取球时，球数必是3的倍数或3的倍数加2，由前述讨论知，乙必胜．

例 15 在实数轴上任给一长度为$\frac{1}{n}$的开区间，其中n为自然数，求证：在此区间内，至多有$\left[\frac{n+1}{2}\right]$个形如$\frac{P}{q}$（$1\leqslant q\leqslant n$）的既约分数．这里$[x]$表示不超过$x$的最大整数．

证 由于$m=\left[\frac{n+1}{2}\right]$恰好是表示不超过$n$的正奇数的个数．因此，我们可以这样来设想：把满足$1\leqslant q\leqslant n$的正整

数分成m个类，如果能证明在同一类中以q为分母的既约分数至多只有一个在所给区间内，则原命题就得证。

由于一切自然数都可以写成$2^k t$的形式，其中t是奇数。现在把一切不超过n的自然数q写成

$$q=2^k t$$

而且把t相同的数q归入同一类，这样一共有m个类。

现在考察以同一类中的两个数$q=2^k t$及$q_1=2^{k_1}t$为分母的两个既约分数$\frac{p}{q}$及$\frac{p_1}{q_1}$。不妨设$q_1\geqslant q$：

（1）若$q_1=q$则$p_1\neq p$，于是$|p-p_1|\geqslant 1$，从而

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{p_1}{q_1}\right|=\frac{|p-p_1|}{q}\geqslant\frac{1}{n}\quad(1\leqslant q\leqslant n).$$

（2）若$q_1>q$，则$k_1>k$。因为$\frac{p_1}{2^{k_1}t}$既约，所以$p_1\neq 2^{k_1-k}p$。从而

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{p_1}{q_1}\right|=\frac{|2^{k_1-k}p-p_1|}{q_1}\geqslant\frac{1}{n}.$$

上面两个不等式说明：以同一类中两个数为分母的既约分数，不可能同在一个长为$\frac{1}{n}$的开区间内。命题得证。

例 16 5个学生A,B,C,D,E参加一场比赛，某人预测比赛结果的名次顺序是$ABCDE$，结果没有猜中任何一个名次，也没有猜中任何一对名次相邻的学生（即两个名次紧挨着的学生）的名次顺序；另一个人预测比赛结果的名次依次是$DAECB$，结果猜中了两个名次，同时还猜中了两对名次相邻的名次顺序。问这次比赛实际结果如何？

解 我们从第二人的预测进行探索。首先被猜中的两个

名次必定是相邻的，否则至多只能猜中一对名次顺序．按照他的预测，相邻的名次有四对，即 DA，AE，EC，CB．这四对中哪一对正确的名次呢？这一对正确的名次只能是 DA 或 CB（例如，若为 AE，按他的猜测 $D\overline{AE}CB$，AE 之外，只有一对相邻名次 CB，由于已知他猜中两对名次相邻的名次顺序，这样 CB 不仅顺序被他猜对，名次也被他猜对了，这与他只猜对两个名次相违）．

（1）若为 DA，则名次顺序应为 $DABEC$ 或 $DACBE$（其余皆不可，例如 $DAEBC$，则 E 的名次已被他猜中）若为 $DABEC$，则 AB 的次序被第一人猜中；若为 $DACBE$，则 C 的名次被第一人猜中，这都与假设矛盾．这就是说 DA 不可能是正确的名次．

（2）若为 CB，则名次顺序应为 $EDACB$ 或 $ADECB$，再根据第一人的猜测，只能有 $EDACB$ 是正确的．

综上讨论，知比赛结果为 $EDACB$．

4.3 递推法

递推法（也称递归法）是一种探索数学规律和寻求解题思路的重要方法．它主要是解决与自然数 n 有关的计数问题，我们通过例题来说明这种方法．

例 17 平面上有 100 个圆，其中每两圆相交于两点，每三圆都不共点，试求：这 100 个圆把平面分成多少部分．

解 显然，画出满足条件的100个圆后再用数的办法是既费事，又没有一般意义．我们索性把问题考虑得更一般一些，设有 n 个满足题设条件的圆把平面分成 a_n 部分，我们来寻求 a_n 的表达式．

现在回到最原始的画图数数的办法，要画出 $n(\geqslant 2)$ 个满

足题设条件的圆，必然是先画出$n-1$个满足题设条件的圆，这$n-1$个圆把平面分成了a_{n-1}个部分，再画一个圆o_n，使n个圆满足题设要求，圆o_n与原先的$n-1$个圆有$2(n-1)$个交点，这$2(n-1)$个点把圆o_n分成$2(n-1)$段弧，而这$2(n-1)$段弧又把原先的某些区域一分为二。这样添加O_n后就增加$2(n-1)$个区域，即数列$\{a_n\}$有递推关系

$$a_n=a_{n-1}+2(n-1) \qquad (n=2,3\cdots). \tag{4.8}$$

将(4.8)式中的n代之以$n-1$,得

$$a_{n-1}=a_{n-2}+2(n-2),$$

所以 $$a_n=a_{n-2}+2(n-2)+2(n-1).$$

同理 $$a_n=a_{n-3}+2(n-3)+2(n-2)+2(n-1)$$
$$=a_{n-3}+2[(n-1)+(n-2)+(n-3)].$$

如次反推下去，可得到a_n用a_1及n的表达式：

$$a_n=a_1+2[(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1]$$
$$=a_1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}=a_1+n^2-n.$$

再注意到$a_1=2$（一个圆把平面分成2部分），得

$$a_n=n^2-n+2.$$

特别地，$a_{100}=9902$，即100个满足要求的圆，把平面分成9902部分。

注（1）本例的解题过程，代表了用递推方法解题的基本思路：在一个与自然数有关的计数问题里，通过寻找递推关系，然后找出数列的通项公式，本题中找通项公式的方法，称为**直接迭代法**。

（2）本题的解法，从两个方面体现了“反推”的思想：一方面是寻求递推关系的过程；另一方面是从递推关系求通项公式的过程。

例 18 已知数列 $\{a_n\}$：$a_1=a$，$a_n=ra_{n-1}+qp^{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，其中 a,r,p,q 都是已知数，求 a_n 通项公式。

解 用直接迭代法，得

$$\begin{aligned}
a_n &= ra_{n-1}+qp^{n-1}\\
&= r(ra_{n-2}+qp^{n-2})+qp^{n-1}\\
&= r^2a_{n-2}+q(p^{n-1}+rp^{n-2})\\
&= r^2(ra_{n-3}+qp^{n-3})+q(p^{n-1}+rp^{n-2})\\
&= r^3a_{n-3}+q(p^{n-1}+rpn^{-2}+r^2p^{n-3})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&= r^{n-1}a_1+q(p^{n-1}+rp^{n-2}+r^2p^{n-3}+\cdots+r^{n-2}p)\\
&= \begin{cases} r^{n-1}[a+(n-1)q] & \text{当 } r=p \text{ 时}\\ r^{n-1}(a-q)+\dfrac{q(p^n-r^n)}{p-r} & \text{当 } r\neq p \text{ 时。}\end{cases}
\end{aligned}$$

(4.9)

例 19 把一个圆分成 $n(n\geqslant 2)$ 个扇形，依次记为 S_1，$S_2,\cdots,S_n$，（图23），每个扇形都可用红、白、蓝三种不同颜色之任一种涂色，要求相邻的扇形颜色互不相同，问有多少种涂色法？

解 设涂法总数为 $a_n(n\geqslant 2)$。当 $n=2$ 时，先对 S_1 涂色，有 3 种涂法，S_1 涂色后，继而涂 S_2，只有两种涂法。因而 $a_2=3\times 2=6$。下面确定 a_n 的递归关系：若先涂 S_1，有三种涂法：继而涂 S_2，只有两种涂法；再涂 S_3，如果只要求它与 S_2 的颜色不同，有两种涂法，……如此下去，最后涂 S_n。如果只要求 S_n 与 S_{n-1} 的颜色不同（但不顾及

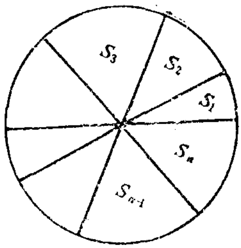


图 23

S_n与S_1的颜色）仍有两种涂法。这样总共有 $3\cdot 2^{n-1}$ 种涂法。但这$3\cdot 2^{n-1}$种涂法可分为两类：一类是S_n与S_1颜色不同，这种涂法符合题设要求，其数为a_n；另一类是S_n与S_1的颜色相同，这种涂法不符合题设要求，如果把S_n与S_1合并看成一个扇形，这类涂法就相当于把圆分成$n-1$个扇形，按题设要求的涂法，故这类涂法总数为a_{n-1}。于是得递归关系

$$a_n+a_{n-1}=3\cdot 2^{n-1}\quad(n=3,4,\cdots),$$

即

$$a_n=-a_{n-1}+3\cdot 2^{n-1}\quad(n=3,4,\cdots).$$

为利用例18的公式（4.9），令$a_n=b_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$，得

$$b_{n-1}=-b_{n-2}+3\cdot 2^{n-1}\quad(n=3,4\cdots).$$

即

$$\begin{aligned}b_n&=-b_{n-1}+3\cdot 2^n\\&=-b_{n-1}+6\cdot 2^{n-1}\quad(n=2,3,\cdots)\end{aligned}$$

于是由例18的公式（4.9）（其中$r=-1$，$q=6$，$p=2$），得

$$b_n=2[2^n-(-1)^n],$$

$$a_n=b_{n-1}=2[2^{n-1}-(-1)^{n-1}]\quad(n=2,3,\cdots).$$

例 20 命$P_n(k)$是集$\{1,2,\cdots,n\}$的保持k个元素不动的排列，求证

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=n!$$

证 集合$\{1,2,\cdots,n\}$的保持k个元素不动的排列，可以这样得到：1）先从n个元素中，任意取定k个保持不动，其有C_n^k种取法；2）其余$n-k$个元素作出一种排列，并使所有元素都改变位置，由定义有$P_{n-k}(0)$种，于是得递推关系

$$P_n(k)=C_n^k p_{n-k}(0).$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)$$

$$=\sum_{K=1}^{n} kC_n^k P_{n-k}(0)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} P_{n-k}(0) \text{（因为} kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}\text{）}$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} P_{n-1-k}(0)$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(k).$$

又由 $P_n(k)$ 的定义有

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = P_n = n!,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(k) = P_{n-1} = (n-1)!,$$

所以原式左边 $=n\cdot(n-1)!=n!$.

练　习　题

1．设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证：$2\sin 2\alpha \leqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

2．设 $a>b>0$，求证：$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$.

3．设 $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots\alpha_n<\frac{\pi}{2}$，求证

$$\operatorname{tg}\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<\operatorname{tg}\alpha_n.$$

4．设 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}^3\frac{C}{2}$，$\operatorname{tg}C=2\operatorname{tg}B$，且 A,B,C 为锐角，

求证：A,B,C 成等差数列。

5. 设圆内接四边形的对角线互相垂直，求证：圆心至任一边的距离等于该边对边的一半。

6. 设有 $2n+1$ 根火柴，二人轮流取，每人可取 1，2 或 3 根（不能不取），最后取得偶数根者为胜，试分析先取者的胜负。

7. 设 n,k 是已知正整数，且 $n>1$，$k>1$。求证：$n(n-1)^{k-1}$ 可以写成 n 个连续偶数的和。

8. 试证：不存在整数 a,b,c，使得 $a^2+b^2-8c=6$。

提示：问题等价于任何两个整数的平方和被 8 除后余数不可能是 6。

9. 如果 a,b,c,d 都是实数，并且满足

$$\begin{cases} a^2+b^2+2a-4b+4=0, \\ c^2+d^2-4c+4b+4=0. \end{cases}$$

求 $w=(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最大值和最小值。

提示：化成一个等价 n 的几何问题。

10. 五个学生 A,B,C,D,E 参加一场比赛，五个人对比结果作预测，每人猜测两个（第一个数字是名次）：

甲猜：2—B，3—A；

乙猜：2—D，4—E；

丙猜：1—E，5—C；

丁猜：3—D，4—C；

戊猜：2—A，5—B。

结果每人恰好猜对了一个人的名次。实际比赛结果如何？

提示：把猜测结果列成下表：

	1	2	3	4	5
甲		B	A		
乙		D		E	
丙	E				C
丁			D	C	
戊		A			B

然后再进行分析。

11. 一次竞赛在$n(>1)$天中共发了m枚金牌，第一天发出了1枚再加上余下的$m-1$枚的$\frac{1}{7}$；第二天发出了2枚加上余下的$\frac{1}{7}$；如此继续下去，最后第n天，恰好发出余下的n枚。问这次竞赛进行了几天？一共发出了多少枚金牌？

5　从反面考虑解选择题

近年来，在数学竞赛和高考中，都普遍地采用了选择答案的命题方法，这种方法的容量大、题型新、覆盖面广、解法活，因而受到一些数学工作者的青睐，它也有利于培养学生思维的批判性和鉴别力，对提高分析能力和判断能力起到很大作用。

解数学选择题，与解其他题型一样，要善于把生疏的命题转化成熟悉的命题，把复杂的命题分解成简单的命题，把抽象化成具体，并注意数与形的沟通和应用。但选择题又有其固有的特点：不要求计算及论证过程，只要能选择出正确的答案问题即获解决。通常题目还提供了一个信息：所给的选择支，有且只有一个对（这称为单一选择题），这样解选择题，大体上就不外乎沿着以下两个方面思考：

（1）从正面考虑：就是从已知条件出发，运用已知的公理、定义、定理及公式进行推理和运算，得出应有的结论，从而作出正确的选择。这种方法通常称为正推法或直接方法，它是解选择题的常规方法。

（2）从反面考虑：这是基于选择题的特点，从反面用剔除法，逆推法，猜证法等逆向思考方法，将那些不正确的答案逐一剔除，从而得出正确的答案。

基于本书的宗旨，以下只讲解关于单一选择题的逆向思维方法。首先是什么样的选择题宜于用这种方法？这难有一

个明确的标准，一般说来，对于那些条件形式隐晦、数量较多、正面求解繁杂；或者条件虽简单，但灵活性较大，牵涉到的基本概念较多；或者是结论中的概念在相互干扰的题，宜于从反面去考虑。灵活地掌握这些方法，不仅在各种应试中可迅速而正确地得到答案，起到事半功倍的作用，而且对培养思维能力是大有好处的。

从题目的性质上讲，选择题大体上可分为三种类型：

定性型 要求从命题的条件中判定所述数学元素可具备的性质或关系。

定量型 偏重于计算在一定条件下得到的数量关系。

混合型 对以上两方面都有所要求。

1）通过特例（即反例）剔除不正确的答案。这种方法又称**特例否推法**，较多的适用于定性型选择题。

例 1 首尾相接的四条线段 AB,BC,CD,DA 组成平面四边形的条件为下列哪一个？

(A) $\angle ABC+\angle CDA=180°$.

(B) $AB+CD=BC+DA$.

(C) $AB+CD=AC+BD$,

(D) $AC\cap BD\neq\phi$.

解 取一个正方形 $ABCD$，然后将此正方形沿对角线 AC 折起，使 A,B,C,D 四点不共面，得一空间四边形，此空间四边形满足 $\angle ABC+\angle CDA=180°$，也满足 $AB+CD=BC+DA$，这个反例说明答案（A），（B）都错；又正方形 $ABCD$ 满足 $AB+CD<AC+BD$，故（C）错，剩下只能是选择答案（D）。

例 2 下述四条关于四边形的主体几何命题中正确的是：

(A) 四边相等的四边形是菱形.

(B) 对角互补的四边形是平面图形.

(C) 连结一组对边中点的线段等于另一组对边之和的一半，则四边形是平面图形.

(D) 相对顶点连结线段的乘积不大于两组对边乘积之和，则此四边形是平面图形.

解 仍用例1中剔除 (A)，(B) 的反例，此空间四边形的四边相等，但不是菱形，故本题答案 (A) 错；如果把上述正方形 $ABCD$ 沿 AC 折起时，使平面 $ABC\perp$ 平面 ACD，此空间四边形的对角互补，且不是平面图形，故 (B) 错；取正方形 $ABCD$ 设 AC，BD 相交于 O，则易知

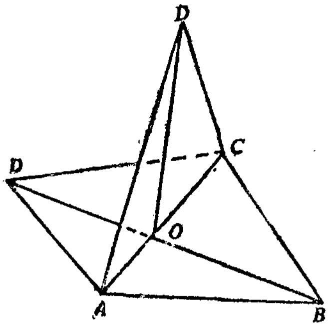


图 24

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD$$
$$=AC\cdot BD$$

将 $\triangle ACD$ 沿 AC 折起（图24），得 $\triangle ACD'$，

所以 $BD=BO+OD=BO+D'O>BD'$.

由（1）式得

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD>AC\cdot BD'.$$

这就是说，四边形 $ABCD'$ 满足命题 (D) 的条件，但不是平面图形，即 (D) 错. 故选择 (C) .

注 本题也可以正面证明命题 (C) 正确，这留给读者自己证（先证满足 (C) 的条件的四边形必有一组对边平行）.

例 3 在平面直角坐标系中，纵横坐标均为有理数的点称为有理点，若 a 为无理数，则过点 $(a, 0)$ 的所有直

线中，

(A) 有无穷多条直线，其中每条直线上至少存在两个有理点。

(B) 恰有 $n(2\leqslant n<+\infty)$ 条直线，其中每条直线上至少存在两个有理点。

(C) 有且仅有一条直线至少通过两个有理点。

(D) 每条直线至多通过一个有理点。

解 过点 $(a,0)$ 的直线方程为 $x=a$ 及 $y=k(x-a)$ $(-\infty<k<+\infty)$，在直线 $x=a$ 上无有理点。再考虑直线 $y=k(x-a)$，当 $k=0$ 时，直线 $y=0$ 上有无穷多个有理点，从而否定结论 (D)；当 $k\neq 0$ 时，若此直线上有两个有理点 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2)，则由 $y_1=k(x_1-a)$ 及 $y_2=k(x_2-a)$，得

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1),$$

所以 k 为有理数，但当 k 为有理数时，直线 $y=k(x-a)$ 上无有理点（事实上，若 x_1 是无理数，则 (x_1,y_1) 不是有理点；若 x_1 为有理数，则 x_1-a 为无理数，从而 $y_1=k(x_1-a)$ 是无理数，(x_1,y_1) 也不是有理点），从而否定结论 (A) 及 (B)。综上知应选 (C)。

2) 用特殊值代入，剔除不正确的结论，这种方法又称特殊值否推法，较多的适用于定量型的选择题。

例 4 当 $(a+1)(b+1)=2$ 时，$\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b$ 的弧度等于

(A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{5}$.

解 取一个特殊值，例如 $a=0$，$b=1$，得 $\operatorname{arctg}a$

$+\operatorname{arctg} b=\dfrac{\pi}{4}$. 这个特例,从逻辑上讲,虽不能直接肯定 (C) 正确,但却否定了 (A), (B), (D) 的正确性,也就从反面肯定了 (C) .

例 5 下列哪一个数不是某个自然数的平方(其中 n 为自然数):

(A) $3n^2-3n+3$. (B) $4n^2+4n+4$.

(C) $5n^2-5n-5$. (D) $7n^2-7n+7$.

(E) $11n^2+11n-11$.

解 将原选择支改写为

(A) $3(n^2-n+1)$; (B) $4(n^2+n+1)$;

(C) $5(n^2-n+1)$; (D) $7(n^2-n+1)$;

(E) $11(n^2+n-1)$.

取 $n=2$代入 (A) 得 $3(2^2-2+1)=3^2$ 与题目要求矛盾,故剔除 (A) ; 取 $n=3$ 代入 (C), (D), (E) 分别得到 5^2, 7^2, 11^2 均与题目要求矛盾,剔除 (C) , (D), (E) ,故结论 (B) 是正确的.

例 6 若 $F\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x$, 则下列等式中正确的为

(A) $F(-2-x)=-2-F(x)$ (B) $F(-x)=F\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

(C) $F(x^{-1})=F(x)$. (D) $F(F(x))=-x$.

解 在 $F\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x$ 中, 令 $x=1$, 得 $F(0)=1$, 令 $x=0$ 得 $F(1)=0$. 而在 (B) 的等式中, 令 $x=0$, 有 $F(0)=F(1)$ 故 (B) 错; 又在 (D) 的等式中, 令 $x=1$, 得 $-1=F(F(1))=F(0)=1$, 矛盾, 故 (D) 错. 至于 (C), 取

$x=0$，右边无意义，故（C）错．所以应选（A）．

例 7 给定三直线 $4x+y=4$，$mx+y=0$，$2x-3my=4$，它们相交成一个三角形，则 m 的取值范围为

（A）全体实数．

（B）$m\neq 2$ 的全体实数．

（C）$m\neq 4$，$-\frac{1}{6}$，-1，$\frac{2}{3}$的全体实数．

（D）$m\neq 4$，$-\frac{1}{6}$的全体实数．

解 对于（A）及（B）很容易举出反例，例如取 $m=4$，所给三直线中有两条平行，它们不可能交成三角形，故（A）及（B）都错；（C）与（D）的差别是 -1 和 $\frac{2}{3}$ 这两个数，取 -1 和 $\frac{2}{3}$ 代入，易算得三条直线共点，故（C）错．所以应选（D）．

例 8 对任何 $\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 都有

（A）$\sin\sin\theta<\cos\theta<\cos\cos\theta$．

（B）$\sin\sin\theta>\cos\theta>\cos\cos\theta$．

（C）$\sin\cos\theta>\cos\theta>\cos\sin\theta$，

（D）$\sin\cos\theta<\cos\theta<\cos\cos\theta$．

解 当 $\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\theta>\sin\theta$，再由余弦函数的递减性，得

$$\cos\theta<\cos\sin\theta.$$

从而否定（C）；再考虑到在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$内，不等式$\theta<\cos\theta$及$\theta>\cos\theta$都可能成立。例如：由$\frac{\pi}{3}>\cos\frac{\pi}{3}$，有$\cos\frac{\pi}{3}<\cos\cos\frac{\pi}{3}$从而否定（$B$），同样用$\theta=\frac{\pi}{6}$又可否定（$A$）。

故应选择（D）

注　本题用极限值判定更简单。当$\theta\to 0$时$\sin\cos\theta\to\sin 1<1$而$\cos\theta\to 1$因而否定（$C$）；$\sin\sin\theta\to 0$，因而否定（$B$）；当$\theta\to\pi/2$时，$\sin\sin\theta\to\sin 1$，$\cos\theta\to 0$因而否定（$A$）。

3）将一般的情况化为特殊的情况（包括极限情况）剔除不正确的结论，从而迅速地作出正确判断。

例 9　在梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$AB=a$，$CD=b$（$a>b$），M是DC延长线上一点，如果AM把梯形分成面积相等的两部分，则CM的长为

（A）$\frac{ab}{2(a+b)}$．　　（B）$\frac{a(a-b)}{2(a+b)}$．

（C）$\frac{ab}{a+b}$．　　（D）$\frac{a(a-b)}{a+b}$．

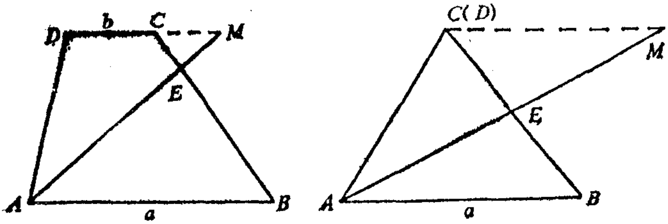


图　25

解 如图25，我们可使已知的梯形特殊化，即令D点沿着DC逐步向C点靠拢，直至与C点重合．此时，极限状态下的梯形已转化成一个三角形按题设AM平分梯形$ABCD$面积．显然，在极限状态的AM平分$\triangle ABC$的面积，故E点必为BC的中点．由于$CM\parallel AB$，$\therefore \triangle ABE\cong\triangle MCE$，故$AB=CM=a$，而$DC=b=0$代入（$A$），得$\dfrac{ab}{2(a+b)}=0$；代入（$B$），得$\dfrac{a(a-b)}{2(a+b)}=\dfrac{a}{2}$；代入（$C$），得$\dfrac{ab}{a+b}=0$．于是，我们剔除了（$A$），（$B$），（$C$），故结论（$D$）正确．

例 10 在梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AD=a$，$BC=b$ E，F分别是AD，BC的中点，AF与BE相交于G，CE与DF相交于H，则GH的长为

（A） $\dfrac{1}{2}(a+b)$． （B） $b-a$． （C） $\sqrt{ab}$．

（D） $\dfrac{ab}{a+b}$．

解 如图26，我们使梯形特殊化，即令A，D离开E点

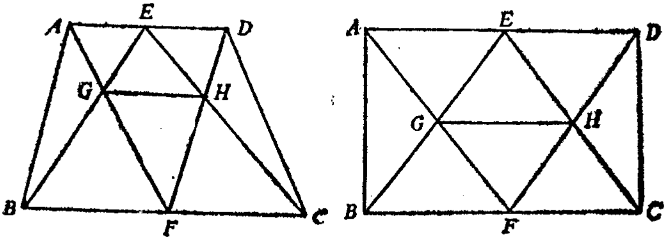


图 26

直至$ABCD$成为一个矩形，由于图形的对称性，即知GH

是$\triangle BEC$与$\triangle AFD$的中位线，所以当$a=b$时GH为$\frac{1}{2}b$（或$\frac{1}{2}a$）.

现检验一下各选择支，知（A）$\frac{1}{2}(a+b)=a=b\neq\frac{a}{2}$，（$B$）$b-a=0$；（$C$）$\sqrt{ab}=a=b\neq\frac{a}{2}$，这样即将（$A$），（$B$），（$C$）剔除，故结论（$D$）是正确的.

注　从以上二例可看出，利用点的位置变换，使一般的图形转化为特殊的图形，使一般图形变换为极限状态，这样可使题目变得简单，便于剔除不正确的选择支，从而作出正确判断.

例 11　用三个正多边形木板铺地，拼在一起，相交于一点的各边完全吻合，设它们的边数分别为l，m，n，则下式成立的为

（A）$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$.　（$B$）$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$.

（C）$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{n}$.　（$D$）$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{2}{n}$.

解　因为正五边形的每个内角为108°，正十边形的每个内角为144°，若两个正五边形一个正十边形拼在一起交于一点的三边能完全吻合（因为$144°+108°+108°=360°$），也就是说它们符合题设条件.

所以可令$l=10$，$m=5$，$n=5$，代入（A）得$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\neq 1$,因而否定$(A)$；代入$(C)$，得$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}$
$=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$，而$\frac{1}{n}=\frac{1}{5}$，$\frac{3}{10}\neq\frac{1}{5}$故$(C)$不成立；代入$(D)$同理可知$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\neq\frac{2}{n}$，知$(D)$错．这样我们剔除了$(A)$ (C)，(D)，知(B)是正确的．

4）通过对选择支及概念的定性分析，剔除不正确的答案，这称为**分析否推法**．

例 12 如果θ是第二象限的角，且满足$\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin\theta}$，那么$\frac{\theta}{2}$

(A) 是第一象限角．　　(B) 是第三象限的角．

(C) 可能是第一象限的角，也可能是第三象限的角．

(D) 是第二象限的角．

这是1984年的一道高考题．据说不少人选了(A)，可能是由于认为θ是第二象限的角，因而$\frac{\theta}{2}$是第一象限角，这是错误的，这可能是命题者故意设下的“陷阱”．因θ在第二象限，故

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi$$

即 $$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

这样$\frac{\theta}{2}$可能在第一或第三象限，但$\frac{\theta}{2}$在一象限时，必$k=2m$，

于是

$$2m\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2m\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\cos\frac{\theta}{2}<\sin\frac{\theta}{2}.$$

但$\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}<0$ 不符合所设条件，因而正确的结论只能是(B)。

例 13 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，$0\leqslant x\leqslant\pi$。则 $\operatorname{tg}x$等于

(A) $\frac{4}{3}$． (B) $\frac{3}{4}$． (C) $-\frac{4}{3}$． (D) $-\frac{1}{4}$． (E) 两个不同的值．

解 由于当$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$\sin x+\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{5}$，所以$X$只可能在第二象限，从而否定 (A)，(B)，(E)．

因为$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ($x=\pi$不可能)，所以$x>0$，

$\cos x<0$，因此由题设 $\sin x>|\cos x|$，即$|\operatorname{tg}x|>1$ 知(D) 不是答案．综上知应选择(C)．

例 14 一个凸多边形，除了一个内角之外，其他内角各角之和为 $2570°$，则这个内角为

(A) $72°$． (B) $105°$． (C) $120°$． (D) $130°$．

解 因凸多边形内角之和为$(n-2)180°$，它显然是 9 的倍数．根据能被 9 整除的判定方法（各位数字之和能被 9 整除），考虑到 2570 各位数字之和已是 14，于是，只须从四个选择支中，选各位数字之和是4 或 13 者即为所求，故

(D)为正确答案。

例 15 设复数 z 所对应的点，在曲线 $|z-1-i|=\sqrt{2}$ 上运动。则复数 $w=\frac{1}{z}(z\neq0)$ 所对应的点的运动轨迹为

(A) 圆。(B) 椭圆。(C) 直线。(D) 直线段。

解 由于原点 $z=0$ 正好在所给曲线上，当沿所给曲线趋于原点时，$|w|=1/|z|\to\infty$。故复数 $w=1/z$ 所对应的点应在一无界曲线上运动，而 $(A),(B),(D)$ 都是有界曲线，故应选择 (C)。

5）"制造"合适的筛子，剔除不正确的结论

例 16 某次数学竞赛共有10道选择题，评分的办法是，每一题答对得 4 分，答错得 -1 分，不答得 0 分，设这次竞赛至多有 n 种可能成绩，则 n 应该等于

(A) 42。(B) 45。(C) 46。(D) 48。(E) 以上答案都不对。

解 从10题全对得40分到10题全错得 -10 分共有51种成绩，现在筛去那些不可能得到的成绩. 由于每对一道题得 4 分，将 1 到40间的整数表示为 $4K, 4K-1, 4K-2, 4K-3$，这里 K 是答对题数 $1\leqslant K\leqslant10$ 且 $K\in N$。

当 $K\leqslant7$ 时，未答对（或未答）题数 $\geqslant3$ 这时因倒扣，$4K$，$4K-1$，$4K-2$，$4K-3$ 这些成绩皆可能取到。

当 $K=8$ 时，未答对题数 $\leqslant2$，这时唯有 $4K$，$4K-1$，$4K-2$ 为可能，缺 $4K-3=29$，应筛去29；

当 $K=9$ 时，未答对题数 $\leqslant1$，这时唯有 $4K$，$4K-1$ 为可能，缺 $4K-2=34$，$4K-3=33$，应筛去34，33。

当 $K=10$ 时，未答对题数 $=0$，唯 $4K$ 为可能，缺 $4K-1=39$，$4K-2=38$，$4K-3=37$，应筛去39，38，37。

当 $K=0$ 时，由一题不答到十题都答错，即 0 分到 -10 分都能取到。

综合上述情况知应筛去 6 个成绩，故 n 应等于 $51-6=45$，则取答案(B)。

例 17 今有 1 角币一张，2 角币一张，5 角币一张，1 元币四张，5 元币二张，用这些纸币任意付款，则可以付不同数额的款子共有

(A) 30种．(B) 29种．(C) 120种．(D) 119种．

分析 此题从正面解，因涉及重复排列、组合，显得比较复杂．从反面考虑"制作"筛子剔除不能付出的数额，从而得到能付出币值的种类．

解 从最低币值 1 角到最高币值十四元八角，共有 148 个币值．从中筛去那些不能构成的币值．经考察，合适的筛子是 4 角、9 角的币值，从 4 角、9 角、1 元 4 角、1 元 9 角……到14元 4 角共29个币值．这样付出的币值应为$148-29=119$种，这样就剔除了(A)，(B)，(C)，故取答案为(D)．

例 18 正方体内可以作出不同的内接四面体的个数有

$(A)\ C_8^4$．$(B)\ C_8^4-6$．$(C)\ C_8^4-8$．$(D)\ C_8^4-12$．

解 从正面去解，显然会因情况复杂而陷入困境，因而转向反面来考虑．从正方体 8 个顶点任选 4 个顶点构成的各种组合总数为C_8^4，从中筛去那些不能构成四面体的组合数．经考察，应筛去正方体的表面及对角面，正方体有六个表面和六个对角面，这样就排除了(A)，(B)，(C)．故答案应是 (D)．

6）利用各选择支之间的相容关系，剔除不正确的结论．

有时，我们会遇到这样的选择题，由它的选择支 (A) 对，

可以推出选择支(B)对。则选择(A)必错。这是因为否则就有两个正确的结论，这与已知信息：有且只有一个选择支对相矛盾。

例 19 如果凸边形$F(n\geqslant 4)$的所有对角线都相等，则

$(A)F\in\{$四边形$\}$。

$(B)F\in\{$五边形$\}$。

$(C)F\in\{$四边形$\}\cup\{$五边形$\}$。

$(D)F\in\{$边相等的多边形$\}\cup\{$内角相等的多边形$\}$。

解 显然，若(A)对，则(C)也对，故(A)错；同理(B)也错；再用等腰梯形可否定(D)，故应选择(C)。

例 20 如果三角形的三边a,b,c所对的角分别为A,B,C且满足条件：$a\cos A+b\cos B=c\cos C$，那么这个三角形一定是

(A) 等边三角形。(B) 以a为斜边的直角三角形。(C) 以b为斜边的直角三角形。(D) 以上答案都不对。

解 由于已知等式关于a，A和b，B是对称的，由此可见，若答案(B)对，则答案(C)也应对，反之亦然，故(B)，(C)都错；再考虑答案(A)，若(A)对，这时，$A=B=C=60°$，$a=b=c$，这样，原条件就成了$2=1$，这显然不可能，故(A)错，于是只能选(D)。

6 抽 屉 原 则

抽屉原则又叫重迭原则或鸽笼原则，它是离散数学中的一个重要原则．虽然它的原理很简单、浅显易懂，但它属于发散思维范畴，它能培养我们从不同的角度去认识、理解、探讨问题；应用这个原则可以把需要讨论的范围缩小．对一些看起来相当复杂的甚至是无从下手的题目，常能发挥它独特的作用．因此，在当前国内外中学生数学竞赛中常涉及到这些原则，熟练地掌握这些原则巧妙地应用这些原则，在解题过程中可以得到意想不到的效果．

6.1 什么是抽屉原则

在日常生活中，我们有这样的常识：把十个苹果放到九个抽屉里，你无论怎样放，这九个抽屉中一定至少有一个抽屉里放了两个或两个以上的苹果．将这个明显的事实推广到一般情形，便得到所谓抽屉原则：

原则 1 把多于 n 个的元素，按任意确定的方式分放在 n 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里有两个或更多的元素．

原则 1 还有以下更一般的形式．

原则 2 把多于 $m\times n$ 个元素，按任意确定的方式分放在 n 个抽屉里那么至少有一个抽屉里有 $m+1$ 个或多于 $m+1$ 个元素．

证 假设每个抽屉里的元素均不超过 m，那么，n 个抽屉里的元素就会超过 $m\times n$ 个，这与已知条件矛盾，所以至少

有一个抽屉里至少有 $m+1$ 个元素.

原则 3 把无穷多个元素，按任意确定的方式分放在 n 个抽屉里（n 是一个确定的数），那么，至少有一个抽屉里有无穷多个元素.

证 假设每个抽屉里只有有限个元素，那么 n 个抽屉里只能有有限个元素，这与已知条件矛盾，故至少有一个抽屉里有无穷多个元素.

以上三个原则都称为抽屉原则. 通常，把原则 1 称为抽屉原则，把原则 2 、原则 3 称为推广的抽屉原则. 这些原则都是很简单的. 但是它在初等数学和高等数学中都有应泛的应用.

6.2 构造抽屉，利用抽屉原则解题

抽屉原则很简单且浅显易懂，但利用这个原则解题时，首先碰到的问题，就是如何利用题中的条件构造出与题设密切关联着的“抽屉”. 也就是说，解题的关键是正确地制造抽屉. 下面介绍几种常用的构改抽屉的方法.

1）**分割几何图形制造抽屉** 这类题目的特点是，在一个几何图形内，有一些已知的点，只要我们能够巧妙地把图形进行分割，用这些分割成的图形作抽屉，就可以把题设中的点分类，从而得出要证的结论.

例 1 在边长为 1 的正方形内，任意放入 9 个点，证明在以这些点为顶点的许许多多三角形中，必有一个三角形它的面积不超过1/8.

分析 把正方形分成四个全等的小矩形，这样就成了四个抽屉（小矩形），根据原则 2 ，至少有一个小矩形内有三个点，设法证明，由这三个点构成的三角形面积小于 1/8.

证 如图27，用三条平行的直线把正方形分成全等的

4个长方形．由已知条件，9个点放入四个长方形中，则根

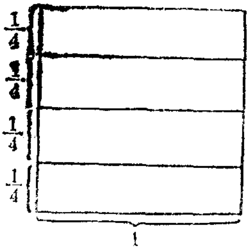


图 27

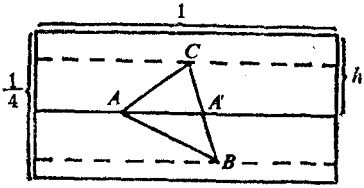


图 28

据原则2，至少有2+1个点落在某个长方形内，现取出这个长方形加以讨论．如图28，把落在此长方形中的三点记为A，B，C，通过这三点，分别作平于底边的直线，于是有

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AA'C}+S_{\triangle AA'B}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\times 1\times h+\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{1}{4}-h\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

这就得到要证明的结论．

注　在构造抽屉时，抽屉要构造得恰当．如果构造出来的抽屉不合适，就很可能使问题无从下手，得不出所需的结论．如果在例1中用正方形的两条对角线，把它分成4个全等的等腰直角三角形，把每个等腰直角三角形当成一个抽屉，就无法证明所要求的结论．

例 2　在3×4的长方形中，任意放置6个点，试证：可以找到两个点，使它们的距离不大于$\sqrt{5}$．

分析　解本题关键在于制造出5个抽屉——即将3×4的长方形划分成5个区域，使在每个区域内的任两点的距离不大于$\sqrt{5}$．

证 如图29，将长方形划分成5个区域，将6个点放入长方形，由抽屉原则1知，至少有一个区域内有两个点，易证这两个点的距离不大于$\sqrt{5}$.

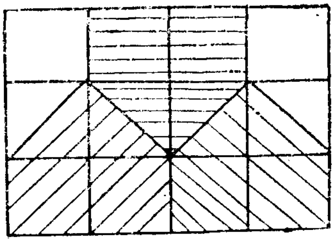


图 29

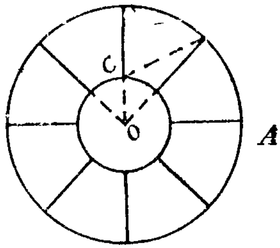


图 30

例 3 直径为5的圆内有10个点，证明：其中有某二点的距离小于2.

证 设O为所给圆圆心，如图30，把此圆划分成9个区域（其中一个是半径为$r=OC=0.9$的圆，8个是相等的环扇形）圆内10点，至少有二点M，N在同一区域内，若M，N在小圆内，则

$$\overline{MN}<2\overline{OC}=1.8<2;$$

若M,N在环扇形内，由余弦定理，有

$$\overline{MN}\leqslant AC=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2\overline{AO}\cdot\overline{OC}\cos 45^\circ}$$

$$<\sqrt{6.25+0.81-2.25\times1.4}=\sqrt{3.91}<2.$$

故命题得证.

2）**利用余数制造抽屉** 我们知道，一个整数m被n除，总可以写成

$$m=np+r\quad(0\leqslant r<n)$$

的形式，即m被n除有n个余数0，1，2，…，$n-1$，如果我们把有相同余数的整数作为一类，即造成一个抽屉，从而可以制造n个抽屉(即把全体整数分成了n个类，同一类中任两个数被n除后所得余数相同，它们称为关于模n的剩余类)，这时，若有m个$(m>n)$数，必有两个数的余数相同，即有两个数在同一个抽屉里，进一步由抽屉原则1，当$n|m$时，至少有一个抽屉里有$\frac{m}{n}$个元素，即至少有$\frac{m}{n}$个元素的余数相同，当$n\nmid m$时，至少有一个抽屉里有$\left[\frac{m}{n}\right]+1$个元素$\left(这里\left[\frac{m}{n}\right]表示\frac{m}{n}的整数部分\right)$。

利用这个想法可以解决一些与余数有关的题目。

例 4 试证：从任意给定的n个自然数中，必可找出k个数$(1\leqslant k\leqslant n)$，使它们的和能被$n$整除。

证 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个给定的自然数，作n个和数：

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \cdots,\ a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

它们被n除得的余数，可能取0，1，2，…，$n-1$。下面分两种情况考虑：

（1）若所得n个余数中，有某个为零，则结论已成立；

（2）若所得n个余数全不为零，于是这n个余数只能从1，2，…，$n-1$这$n-1$个数中选取，于是必有两个余数相同。设$a_1+a_2+\cdots+a_i$和$a_1+a_2+\cdots+a_j$ $(j>i)$被n除的余数相同（即它们在同一个关于模n的剩余类中）。这样，它们的差

$$a_1+a_2+\cdots+a_j-(a_1+a_2+\cdots+a_i)$$
$$=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j$$

被 n 整除。

综合(1)，(2)知命题得证。

例 5 任意 1000 个整数中必有两个整数，它们的和或差是 998 的倍数。

证 因为每个整数被 998 除，其余数必是 0，1，2，…，997 中的一数，现在用这些余数造成 501 只抽屉：{0}，{1,997}，{2,996}，…，{497,501}，{498}，{499}，{500}，现把 1000 个整数，分别放在上述 501 只抽屉中，由抽屉原则知，至少有两个整数在同一个抽屉中，如果这两个数在抽屉{0}或{499}或{500}，那么它们的差必是 998 的倍数，如果这两个数在其他抽屉$\{i,998-i\}$ $(i=1,2,\cdots,497)$ 中，那么这两个数的和就是 998 的倍数。由此命题得证。

注 在例 5 的证明中，制造抽屉除利用了余数外，还利用了偶数，在解整数问题中，利用数偶制造抽屉．也是一种常用方法。

例 6 在坐标平面上任取 5 个整点（纵横坐标都是整数的点叫整点）。求证：一定可以从中找出两个整点，它们连线段的中点仍是整点。

分析 设 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2) 是整点，它们连线段中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

x,y都是整数的充要条件是：x_1 和 x_2 且 y_1和 y_2 有相同的奇偶性。这使我们想到利用奇偶性去把整点分类。

证 有序整数对(x,y)按奇偶性可分为四类：（奇，

奇）；（奇，偶）；（偶，奇）；（偶，偶）．现有五个点，故至少有两个点属同一类，设这两个整点是(x_1,y_1)及(x_2,y_2)由于x_1和y_1且x_2和y_2有相同的奇偶性，从而$\frac{x_1+x_2}{2}$及$\frac{y_1+y_2}{2}$都是整数，即这两个整点的连线段的中点也是整点．

3）**利用不大于n的整数造抽屉** 由于小于n的n个整数数必有两个数相等，所以我们可以把小于n的$n-1$个正整数造成个$n-1$抽屉，从而得到要证的结论．

例 7 对于$n+1$个不同的自然数，如果每一个数都小于$2n$，那么可以从中选出三个数，使其中两个之和等于第三个．

证 首先把这$n+1$个数排成单调增加序列：

$$a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n<2n.$$

令$b_i=a_i-a_0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，这样又造成一个单调序列：

$$b_1<b_2<\cdots<b_n<a_n<2n.$$

于是，我们就得到$2n+1$个小于$2n$的自然数，根据抽屉原则1，至少有两相等的自然数，它们分别是a_k及b_j，由$b_j=a_j-a_0$故$a_k=a_j-a_0$，即$a_j=a_k+a_0$，证毕．

例 8 一个国际社团的成员来自6个国家，共有1978人，用1，2，3，…，1978，1979编号，求证：该社团至少有一个成员的编号数，是它的两个同胞的编号数之和，或者是一个同胞编号数的二倍．

证 本题相当于：把1，2，…，1977，1978这1978个数任意分成6组，则必有一组有如下性质：该组中至少有一个数，或者等于同一组中另两数之和，或者等于另一个数的

二倍。

用反证法证明上述结论。设任一个数组都不具备所要求的性质，则我们可以证明下述事实P：若$a,b\in M$，则$a-b\notin M$。因若$a-b\in M$，则由$b+(a-b)=b$可知，M已具有题目所要求的性质。

因$\frac{1978}{6}>329$，由抽屉原则，至少有一个数组A至少含330个数。用m_1表示数组A中最大的数，用m_1减去A中其余的数（这些数显然是小于1978的自然数）得到不少于329个数，根据前述事实P，它们都不是A中的数。也就是说，这些数在其余5组中。因$\frac{329}{5}>65$，据抽屉原则，必有一个数组B，含有其中的66个数。设这66个数中最大的是m_2，用m_2减去其余65个数，由事实P，所得65个数都不在B中。下面证明：这65个数也不在A中。事实上，若其中某个数$m_2-b\in A$，因m_2与b可以写成

$$m_2=m_1-a_1,\quad b=m_1-a_2\quad (a_1,\ a_2\in A).$$

故
$$a_2-a_1=m_2-b\in A.$$

这与事实P矛盾。

这样，上述65个数只能在其余四组中，因$\frac{65}{4}>16$，由抽屉原组，有一组数C至少含这65个数中的17个。记这17数中最大的是m_3，用m_3减去其余16个新数，仿此可证，这16个数只能在其余三组D,E,F,中，如此继续下去。最后得到一个数组F，F中至少含有两个数，用大数减小数所得差，不在A,B,C,D,E,F中，但这个差又是一个不超过1978的自然数。是为矛盾。命题得证。

除此之外，关于整数问题，还有一些其他造抽屉的方法。

例 9 从自然数 1， 2，…，99，100中随意选出 51 个数来，求证：其中一定有两个数，它们中的某一个数是另外一个的整数倍。

分析 显然 我们只要制造出 50 个抽屉来，把 1 到100 这100个自然数放到这 50 个抽屉内，并且使得同一个抽屉内任两个数，它们中的某一个是另一个的倍数即获解决。

证 首先注意，一个正整数，要么是一个奇数，要么是一个偶数。若是一个偶数时，则必可表示为：奇数$\times 2^s$（其中 $s=1,2,\cdots$）的形式。

如果允许$s=0$，那么奇数也包括在上述一般形式之中。

现在把 1 到 100 的全部整数分在下面 50 个抽屉中：

$m_1\{1,1\times 2,1\times 2^2,1\times 2^3,1\times 2^4,1\times 2^5,1\times 2^6\}$,

$m_2=\{3,3\times 2,3\times 2^2,3\times 2^3,3\times 2^4,3\times 2^5\}$,

$m_3=\{5,5\times 2,5\times 2^2,5\times 2^3,5\times 2^4\}$,

……………

$m_{25}=\{49\ \ 49\times 2\}$,

$m_{26}=\{51\}$,

$m_{27}=\{53\}$,

……………

$m_{50}=\{99\}$.

很明显， 1， 2，…，100 这一百个整数，没有遗漏地被放入了这 50 个抽屉中。并且，同一个数字不会出现在两个不同的抽屉中，因此，不论用何种方式从中取出51个数时，必然至少有两个数出自同一个抽屉，而同一个抽屉中的两个数，大数必是小数的整数倍。

例 10 设 $n=2^m(m\in N)$，求证：从任意 $2n-1$ 个不同

的自然数中，都可以找出 n 个数来，使它们的和可被 n 整除。

证 对 m 进行归纳。

当 $m=1$ 时，有 $n=2$ 及 $2n-1=3$。由于在任意 3 个不同的正整数中，都至少有某 2 个的奇偶性相同，它们的和为偶数，可被 2 整除。知当 $m=1$ 时命题成立。

假设 $m=k$ 时命题已成立，即从任意 $2^{k+1}-1$ 个不同的正整数中，都可以挑出 2^k 个数来，它们的和可被 2^k 整除。我们要证明当 $m=k+1$ 时，命题也成立。

此时，$n=2^{k+1}$，$2n-1=2^{k+2}-1=2^k+2^k+2^{k+1}-1$，于是可先将这 $2n-1$ 个数分为 3 组，使它们分别有 $2^k,2^k,2^{k+1}-1$ 个数。由归纳法假设，可以先从第 3 组的 $2^{k+1}-1$ 个数中挑出 2^k 个数来，它们的和可被 2^k 整除。此时第 3 组中还剩下 2^k-1 个数。再将剩下的数并入第 2 组，又变为 $2^{k+1}-1$ 个数，于是又可从中挑出 2^k 个数来，它们的和可被 2^k 整除。最后，再仿此将挑剩的数并入第 1 摊，又可从中挑出 2^k 个数来，它们的和可被 2^k 整除。这样我们就一共得到了 3 组新数（每组 2^k 个）它们各含有 2^k个正整数，而且 2^k 个数的和都可被 2^k 整除，也就是说，它们的和都具有

$$2^k\cdot a,\ 2^k\cdot b,\ 2^k\cdot c$$

的形式，其中 a,b,c 为正整数。由于 a,b,c 中至少有两个数的奇偶性相同，不妨设 a 和 b 即如此。于是就有 $a+b=2d$，d 为正整数，这样

$$2^k\cdot a+2^k\cdot b=2^k(a+b)=2^{k+1}\cdot d$$

就可以被 2^{k+1} 整除，可见我们已经找出了合乎要求的 2^{k+1} 个数。所以命题在 $m=k+1$ 时也成立。

所以对一切为 2 的正整数次方幂的 n，命题都成立。

4）**分割区间造抽屉**。如果把区间[0，1]平均分成n个子区间：

$$\left[0,\ \frac{1}{n}\right),\ \left[\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right),\ \left[\frac{2}{n},\ \frac{3}{n}\right),\ \cdots,\ \left[\frac{n-2}{n},\ \frac{n-1}{n}\right),$$

$\left[\frac{n-1}{n},\ 1\right]$并且在区间[0，1]内任意放置$n+1$个点，那么，一定有两个点在同一个子区间内，这两个点的距离不大于$\frac{1}{n}$。利用这个想法，可以解决一些与区间有关的抽屉原则的题目，还可以用它来研究用有理数逼近无理数的问题。

例 11 平面上有定点A,B和任意4点P_1,P_2,P_3,P_4，求证：在这4点中一定有两个点P_i，P_j（$i,j=1,2,3,4$，$i\neq j$）使得

$$|\sin\angle AP_iB-\sin\angle AP_jB|\leqslant\frac{1}{3}.$$

证 由于$0\leqslant\angle AP_iB\leqslant180°$（$i=1,2,3,4$,），所以

$$0\leqslant\sin AP_iB\leqslant1.$$

将[0，1]分成三个相等的区间，每个子区间的长度等于$\frac{1}{3}$。这样，构造了三个抽屉。四个角的正弦值，至少有两个正弦值在一个抽屉中，即存在两个不同的点P_i,P_j，使得

$$|\sin\angle AP_iB-\sin\angle AP_jB|\leqslant\frac{1}{3}.$$

例 12 任给无理数α和正整数Q，一定可以找到一个有理数$\frac{n}{m}$（其中$0<m\leqslant Q$），使得

$$\left|\alpha-\frac{n}{m}\right|<\frac{1}{mQ}.$$

证 首先设 $0<\alpha<1$，把区间$[0,1)$ Q等分：

$$\left[0,\ \frac{1}{Q}\right),\ \left[\frac{1}{Q},\ \frac{2}{Q}\right),\ \cdots,\ \left[\frac{Q-1}{Q},\ 1\right).$$

再考虑位于区间$[0,1)$中的 $Q+1$ 个数

$$0,\ \alpha,\ \{2\alpha\},\ \cdots,\ \{Q\alpha\},$$

这里$\{Q\alpha\}$表示 $Q\alpha$ 的小数部分，余类似. 则一定有两个数（例如$\{h\alpha\}$及$\{k\alpha\}$并且不妨设$h<k$）落在同一个小区间内，则

$$|\{k\alpha\}-\{h\alpha\}|<\frac{1}{Q},$$

因$\{k\alpha\}=k\alpha-[k\alpha]$，$\{h\alpha\}=h\alpha-[h\alpha]$，则

$$|(k-h)\alpha-([k\alpha]-[h\alpha]|<\frac{1}{Q}.$$

令 $m=k-h$，$n=[k\alpha]-[h\alpha]$将不等式两端同除以 m，即得

$$\left|\alpha-\frac{n}{m}\right|<\frac{1}{mQ}.$$

注 这个不等式说明用有理数$\frac{n}{m}$逼近无理数 α，其绝对误差不超过$\frac{1}{mQ}$.

例 13 设 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 是实数，且满足条件：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：对每个整数 $k\geqslant2$，存在不全为零的整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得

$$|a_i|\leqslant k-1\ \ (i=1,2,\cdots,n),$$

且 $$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

注 本题是第28届（1987年）国际数学竞赛题，从题目本身已可看出，解决的途径应运用抽屉原则。

证 因 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，由柯西（Cauchy）不等式，有

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{n}$$
$$=\sqrt{n}.$$

所以，当 $e_i\in A=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$时，有

$$|e_1x_1+e_2x_2+\cdots+e_nx_n|\leqslant|e_1|\cdot|x_1|+|e_2|\cdot|x_2|$$
$$+\cdots+|e_n|\cdot|x_n|$$
$$\leqslant(k-1)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\leqslant(k-1)\sqrt{n}.$$

把区间$[0,(k-1)\sqrt{n}]$等分成 k^n-1 分，每个小区间的长度为$\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$。再考虑集合

$$B=\{e_1x_1+e_2x_2+\cdots+e_nx_n|e_i\in A\, i=1,2,\cdots n\}.$$

由于集合B中共有 k^n 个元，由抽屉原则，必存在有B中两不个同的数：

$$e_1x_1+e_2x_2+\cdots+e_nx_n \text{ 及 } e'_1x_1+e'_2x_2+\cdots+e'_nx_n$$

落在同一个小区间内。命 $a_i=e_i-e'_e$，则$|a_i|\leqslant k-1$，且

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|$$
$$=|e_1x_1+\cdots+e_nx_n-(e'_1x_1+\cdots+e'_nx_n)|$$
$$\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

5）应用抽屉原则解题，除上面介绍的几种构造抽屉的

方法外，“染色”、“单色三角形”以及“面积重叠”问题（这些问题经常在各种数学竞赛试题中出现）等，都可利用抽屉原则的思想来解决，下面举一些例子供读者参考。

例 14 世界上任意六个人中，一定有三个人或者认识，或者不认识。

分析 用空间六个点代表六个人（设任三点不共线），如果两个人互相认识，就把这两个点用红线联结起来，两个人互相不认识，就把这两个点用蓝线联结起来。于是，本例就归结为下面问题：

设有六个点，其中任何三点都不共线，在每两点间连起直线段后，将每一条这样的线段或染上红色或染上蓝色，求证：不论如何染色一定存在一个三角形，它的三边有相同颜色。

证 设六个点为A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6。不失一般性，先取A_1与其余五个点联成五条线段，由于这五条线段已被红蓝两色所涂染，于是，由抽屉原则知，至少有三条线段同色。例如，设有三条红色线段，如图31中的实线，我们来考察这三条由同一点出发的具有相同颜色的线段。把这三条线段的另外三个端点两两联结起来，就构成图中的虚线三角形。如果这三条虚线段至少有一条被染成红色。那么它就与两条实线组成红色三角形；如果这三条虚线中一条红的都没有，那么虚线本身就组成一个蓝边三角形了无论哪种情况命题都成立。

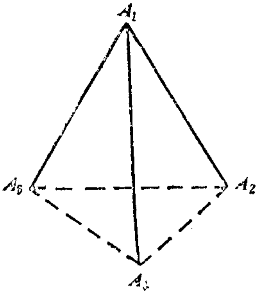


图 31

为了叙述方便，我们把三边都染有相同颜色的三角形，称作单色三角形；把空间n个点，每

两点联一线段所得的图形，称 n 阶完全图。若这个完全图中各线有 k 种颜色，就称作 n 阶 k 色完全图。这样，上例可改为：

六阶二色完全图，必有一单色三角形。

利用这个结果，可以解决许多有趣的问题。

例 15 已给空间六条直线，求证：总可以找出三条来，或者其中任两条异面，或者任两条共面。

本题，表面上是一个立体几何题，实际上，只要把两条直线的异面或共面，类比成两人的互相认识或互不认识，则本题的结论就显然了。

例 16 已给六点，任三点不共线，证明：以这些点为顶点的三角形中，一定有一个三角形的最大边是另一个三角形的最小边。

证 记六点为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$，任取一线段 A_iA_j $(i, j=1, 2, \cdots, 6)$，若 A_iA_j 是某个 $\triangle A_iA_jA_k$ 的最小边，则将 A_iA_j 涂以红色，其余的边都涂上蓝色。这样涂色后，得一六阶二色完全图，它必存在有单色三角形，显然，这个三角形的边不可能全是蓝色（因为它自己的最小边应涂红色），所以此单色三角形的边是红色的。于是由涂色方法知这个红三角形的最大边必是另一个三角形的最小边。

关于完全图的染色问题的一些进一步的结果，留给读者作练习。

1．六阶二色完全图中至少有两个单色三角形。

提示　由例13知，它必有一单色三角形，假设单色（不妨设为红色）三角形为 $\triangle A_1A_2A_3$（如图32），若 $\triangle A_4A_5A_6$ 亦为单色三角形，问题得证，若 $\triangle A_4A_5A_6$ 不是单色三角形，则至少有一边为蓝色，设为 A_4A_5，显然 A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3，

至少有两边同色，若此两边为红色，则又出现一个单色三角形．若此两边为蓝色，则 A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3 也有两边为蓝色（否则也出现红色三角形）于是，A_1, A_2, A_3 中至少有一点与 A_4A_5 的连线为蓝色，则出现一蓝色三角形．

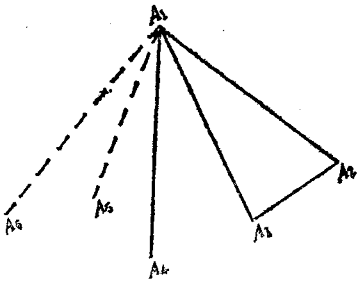


图 32

2．有十七个学生，它们之间都互相通信，内容有三个问题 a, b, c．但是，每两个学生互相通信仅讨论一个问题．证明：至少有三个学生，他们之间通信的内容是同一个问题．

类似地，本题可归结为如下命题：

设有17个点（没有三点共线），每两个点之间都用线段相连，且每条线段上都染了红蓝黄三种颜色中的任意一种．那么，无论怎样染法，必有一只同色三角形．

提示　设 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{16}$ 是已知的17个点，先取定一点A_0，考虑16条线段$A_0A_1, A_0A_2, \cdots, A_0A_{16}$用红、蓝、黄三种颜色染这 16 条线段，由抽屉原则可知，至少有$\left[\frac{16}{3}\right]+1=6$条线段染了同一颜色．不妨假设$A_0A_1, A_0A_2, \cdots, A_0A_6$六条线段都染了黄色，再考察 $A_1A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 这六个点两两联线的染色情况，不外有两种可能情况：1）这六个点所连的线段中至少有一条染了黄色，比如是黄色线段，于是$\triangle A_0A_1A_2$ 就是一只同色三角形；2）若这六个点所连线段没有一条染黄色的，于是就归结为例13，即必有一个同色

三角形.

3. 求证：在任何18人中，一定有4个人互相认识或互不认识.

用18个点代替18人，如果2人互相认识，就在两点间连以红线；如2人互不认识，则连以蓝线. 这样，就得到一个18阶二色完全图，于是，问题就等价于：18阶二色完全图中必有一单色完全四边形，这里完全四边形是指由4点构成的4阶完全图.

提示　考虑由一点O引出的17条线，则至少有9条同色，如9条红色，设这9条为OV_1，$OV_2,\cdots,OV_9$.

考虑由9点$V_1,V_2,\cdots,V_9$组成的二色9阶完全图K_9，若在K_9中有一个顶点（例如V_1）从它出发至少有四条属于K_9的红线段. 不妨设$V_1V_2,V_1V_3,V_1V_4,V_1V_5$为红色，若$V_2,V_3,V_4,V_5$有两点连线是红色的，比如$V_2V_3$，则$OV_1V_2V_3$为红色完全四边形；若$V_2,V_3,V_4,V_5$每两点连线是蓝色则$V_2V_3V_4V_5$是蓝色完全四边形.

若在K_9中，每点至多有三条红线，则不能恰为三条，否则，这9点每点连5条蓝线，而$\frac{5\times9}{2}$不是整数，于是至少出现六条从一点出发的蓝线，设为$V_1V_2,V_1V_3,V_1V_4\cdots$，$V_1V_7$，对于$V_2V_3,\cdots,V_7$这六点必出现一同色三角形，设$V_2V_3V_4$为红色三角形，则$OV_2V_3V_4$为红色完全四边形；若$V_2V_3V_4$为蓝色三角形，则$V_1V_2V_3V_4$为蓝色完全四边形.

在数学竞赛中还出现一些其他形式的染色问题.

例 17　3×7的方格，每个小方格任意染成红蓝二色，证明：在任意染色的情况下，在方格纸上必有一个矩形，它的

四角的四个小方格同色。

证 3×7的方格有7列，每列涂色不外乎8种情况之一（如图33），这8种情况分别标号为1，2，…，8．分几种情况讨论：

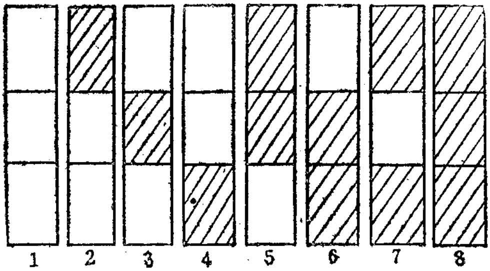


图 33

（1）若有一列涂色是1号，那么其余6列有一列是2，3，4号之一，问题得证；若没有2，3，4号，则这6列属1，5，6，7，8号，由抽屉原则，必有两列同号，亦得证；

（2）若有一列属8号，与1）同样讨论；

（3）若没有一列属1号或8号，则7列属于2，3，4，5，6，7号，必有两列属同号，问题得证。

综上讨论，命题得证。

例 18 用任意的方式，给平面上的每一个点染上黑色或白色，求证：一定存在一个边长为1或$\sqrt{3}$的正三角形，它的三个顶点同色。

证 反设任何一个边长为1或$\sqrt{3}$的正三角形，它的三个顶点不同色。

先任作一个边长为1的正三角形，其三个顶点不同色，

即至少有两个顶点异色，设为A及A_1点．作$\triangle AA_1B$，使$AB=A_1B=2$（$\because AA_1=1$，此三角形可作）这时B或与A异色或与A_1异色，即平面上存在距离为2的两个异色点．

设$AB=2$，A，B异色，不妨设A是黑的，B是白的（图34）．若AB中点D是黑的，则正三角形ADE及ADF的两个顶点必是白的，易知，这时$\triangle EFB$是边长为$\sqrt{3}$的正三角形，它的三个顶点是白的，与所设矛盾．

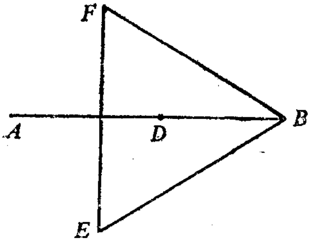


图 34

设n个图形的面积分别是$S_1,S_2,\cdots,S_n$，把这n个图形按任何方式一一搬到某一已知面积为S的平面图形上去，如果$S_1+S_2+\cdots+S_n>S$，那么$S_1S_2,\cdots,S_n$中至少有两个图形发生重迭，即存在面积不为零的公共部分（注意，相切不算重迭）——这就是面积重迭原则．面积重迭原则还有更一般的形式：

如果关于上述区域$S_1S_2,\cdots,S_n$及S，有

$$S_1+S_2+\cdots+S_n>mS,$$

这里m是自然数，则$S_1,S_2,\cdots,S_n$中至少有$m+1$个图形，它们有重迭部分．

面积重迭原则，很类似于抽屉原则，它的正确性很容易从反面证实，请读者自己想一想．利用面积重迭原则，可以解决许多有趣的覆盖问题．

例 19 把66个直径为$\sqrt{2}$的圆纸片，任意放到一个边长为10的正方形内，求证：这66个圆纸片中必有重迭的．

证 每个圆纸片的面积为$\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$，故66个圆纸片

的总面积为

$$66\times\frac{\pi}{2}=33\pi>33\times3.1=102.3.$$

已给正方形的面积为 100，而 102.3>100，故由面积重迭原则，至少有两个圆纸片重迭。

例 20 半径为 16 的圆 C 内有 650 个点，求证：存在内半径 2，外半径为 3 的圆环，它至少盖住其中的10个点。

证 作半径为19的圆C的同心圆K，圆K的面积为 $19^2\pi$。以给定点 $a_i(i=1,2,\cdots,650)$ 为圆心，作内半径为 2、外半径为 3 的圆环，其面积为：$(3^2-2^2)\pi=5\pi$。则这 650 个圆环的面积为

$$5\pi\times650=3250\pi.$$

由于

$$3250\pi>19\pi^2\times9=3249\pi,$$

所以至少有10个圆环重迭，在重迭部分取一点 o，设这10个圆环的中心为$a_{i_1},a_{i_2}\cdots,a_{i_{10}}$。由于 $2\leqslant 0a_{i_j}\leqslant3(j=1,2\cdots10)$，则以$O$为圆心，内半径为 2，外半径为 3 的圆环盖住 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots a_{i_{10}}$共10个点。

例 21 在一个20×25的长方形内，任意放进120 个 1×1 的正方形，求证：在这个长方形中，一定还可以放下一个直径为 1 的圆，使之不和这 120 个正方形中的任何一个相交。

证 反设再也放不下一个直径为 1 的圆，即这个圆无论如何放，必至少与120个正方形中的一个相交。

从20×25的长方形中每边剪去一个宽为$\frac{1}{2}$的长条，这样就得到一个19×24的长方形，记这个长方形为K，K的面积为 $19\times24=456$。这样，任意放进原长方形内的直径为 1 的圆的圆心都在K中。

设P是长方形内任一点，以P为中心作直径为1的圆．按反设，此圆要和某个小正方形K相交，设它与小正方形$EFGH$相交．我们把$EFGH$的每边接一个宽为$\frac{1}{2}$的长条，四个角接上一个半径为$\frac{1}{2}$的扇形(图35) 这样就得到一个面积为$3+\frac{\pi}{4}$的圆角正方形．由于P到$EFGH$的最短距离不超过$\frac{1}{2}$，所以点P必在此圆角正方形内．又因P是K中任一点，这就

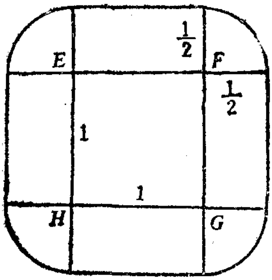


图 35

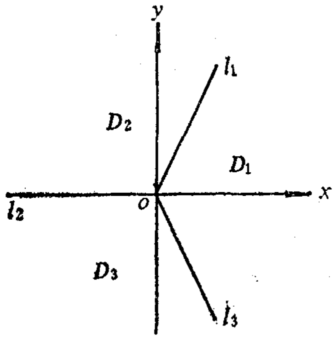


图 36

得知，长方形K应被120个圆角正方形复盖．于是，120个圆角正方形的总面积应不小于k的面积，但

$$120\times\left(3+\frac{\pi}{4}\right)<120\left(3+\frac{3.2}{4}\right)=456.$$

这就得到矛盾．

例 22 设$z_1, z_2, \cdots, z_n$为复数，满足：

$$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1,$$

求证：上述n个复数中必存在若干个复数，它们的和的模不小于$\frac{1}{6}$．

证 如图36(见112页)，由原点出发作三条射线l_1, l_2, l_3将周角三等分，其中l_3重合于x轴的负方向，而整个平面被分成三个区域D_1, D_2, D_3。在区域D_r $(r=1,2,3)$中的复数z_k $(k=1,2,\cdots,n)$之和分别为因为

$$\sum_{D_1} z_k, \quad \sum_{D_2} z_k, \quad \sum_{D_3} z_k.$$

因为
$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = 1,$$

即
$$\sum_{D1} |z_k| + \sum_{D2} |z_k| + \sum_{D3} |z_k| = 1,$$

所以上述三个和式中，至少有一个和式大于等于$\frac{1}{3}$。不失一般性，设

$$\sum_{D1} |z_k| \geqslant \frac{1}{3},$$

$$z_k = x_k + i y_k,$$

因为在区域D_1上有

$$|z_k| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leqslant \sqrt{x^2 + 3x_k^2} = 2x_k.$$

所以
$$\sum_{D1} x_k \geqslant \frac{1}{2} \sum_{D1} |z_k| \geqslant \frac{1}{6}.$$

又因为
$$\sum_{D1} z_k = \sum_{D1} x_k + i \sum_{D1} y_k,$$

所以
$$\left|\sum_{D1} z_k\right| \geqslant \left|\sum_{D1} x_k\right| = \sum_{D1} x_k \geqslant \frac{1}{6}.$$ 证毕。

注 1) 本题还可用由原点出发的四条射线l_1, l_2, l_3, l_4将周角分成四等分，仿效上面的证法来证。

2) 本题将$\frac{1}{6}$换成$\frac{1}{4}$，结论也是正确的，请读者试

证之。

例 23 设G是$\triangle ABC$内任一点，联AG，BG，CG且延长分别交AB，BC，AC于F，D，E，求证：三个比值$\frac{AG}{GD}$，$\frac{BG}{GF}$，$\frac{CG}{GF}$中至少有一个$\leqslant 2$，且至少有一个$\geqslant 2$。

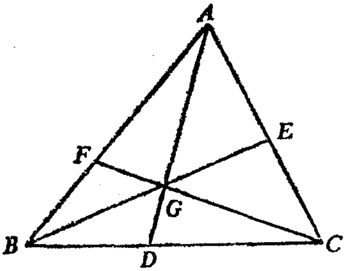


图 37

证 如图37，因

$$\frac{S\triangle GBC}{S\triangle ABC}=\frac{GD}{AD}=\frac{1}{1+\frac{AG}{GD}}$$

同理得

$$\frac{S\triangle GAC}{S\triangle ABC}=\frac{1}{1+\frac{BG}{GE}};$$

$$\frac{S\triangle GAB}{S\triangle ABC}=\frac{1}{1+\frac{CG}{GF}}.$$

于是

$$\frac{1}{1+\frac{AG}{GD}}+\frac{1}{1+\frac{BG}{GE}}+\frac{1}{1+\frac{CG}{GF}}=1.$$

上述三个正数之和等于1，于是这三个正数中至少有一个$\geqslant\frac{1}{3}$，且至少有一个$\leqslant\frac{1}{3}$不失一般性，设

$$\frac{1}{1+\frac{AG}{GD}}\leqslant\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{1+\frac{BG}{GE}}\geqslant\frac{1}{3}$$

即分别得

$$1+\frac{AG}{GD}\geqslant 3,\qquad\qquad 1+\frac{BG}{GE}\leqslant 3$$

所以

$$\frac{AG}{GD}\geqslant 2,\qquad\qquad \frac{BG}{GE}\leqslant 2.$$ 证毕.

练　习　题

1. 单位圆的内接正六边形内有七个点，求证：其中有两个点，它们的距离不大于1.

2. 有111个点，放在一个边长为15的正三角形中，证明用一个直径为$\sqrt{3}$的圆形硬币总可以盖住上述111个点中的三个.（1983荷兰数学奥林匹克竞赛题）

提示：把正三角形每边10等分，分成100个边长为1.5的全等的正三角形，考察一个顶点在上面的55个小三角形，这个硬币，可作为这55个小三角形中每个的外接圆；并注意到$111=55\times 2+1$.

3. 在正方体的每个顶点处，写上非负的实数，而且这些实数的和等于1，甲、乙两人作如下的游戏：甲任选一面以后，乙另选一面，然后甲再选第三面，但甲选定第一面后，后面选取的面不能平行于已选的面. 证明：甲总可以使所选取的三个面的公共点处的数小于$\frac{1}{6}$（16届全俄数学竞赛题）

提示：先证明若$a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,8)$，$\sum\limits_{i=1}^{8}a_i=1$，则至少有三个数小于$\frac{1}{6}$；

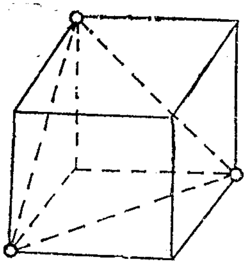


图 38

再把立方体分成如图 38 的两部分，则其中一部分至少有一条对角线的两个顶点的数小于$\frac{1}{6}$。甲第一次选取包含这条对角线的面。

4. 任给 5 个整数，求证：一定可以从中取出 3 个数，使其和能被 3 整除。

5. 任意给定正整数m，求证一定有一个完全由 0 和 1 组成的正整数，它恰好是m的倍数。

提示：构造一个完全由 1 组成的有 $m+1$次的数列：

$$1,\ 11,\ 111,\ \cdots,\ \underbrace{11\cdots1}_{m+1\text{个}}$$

用 m除数列的每一项，以其余数构造 m个抽屉。这样，这个数列中一定至少有两项在同一个抽屉里，这两项之差即为所求。

6. 在 $2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, \cdots, 2^{n-1}$ 中，至少有一个数能被 n 整除（其中 n 为大于 1 的奇数）.

提示：注意到 $n \nmid 2^i$，则 $2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{n-1}$ 被 n 除，必有两个数对 n 同余，考察这两个数的差。

7. 在平面直角坐标系中，有任意 19 个整点，任何三点都不在同一条直线上，证明至少有三点，由这三点作为三角形的顶点，其重心必为整数。

提示：注意到一个整数被 3 除，余数为 0，1，2，按余数分类，可把整点分为 $3^2=9$ 类必有一类有三个点，此三点为三角形的顶点，其重心为整点。

8. 任给101个互异的自然数$a_1, a_2, \cdots, a_{100} n a_{101}$，求证：其中一定存在4个正整数$a_i, a_j, a_m, a_n$，使得$(a_i-a_j)(a_k-a_l)$

是1988的倍数。

提示：注意$1988=71\times28$。

9．求证：在等差数列1，4，7，10，…，97，100中任选20个不同的整数，其中必有两个整数的和等于104。

提示：作18只抽屉：$\{1\}$，$\{52\}$，$\{4,100\}$，$\{7,97\}$，…，$\{49,55\}$，等差数列中各数都包含在各个抽屉中。任选20个数则至少有两个数在同一抽屉中，它们的和恰是104。

10．一个象棋大师有11个星期用来准备参加比赛，他决定每天至少下一盘棋，但为了使自己不致太累，他决定在任一星期内不下多于12盘棋。试证：存在一些连续的日子，在这些日子里该象棋大师恰好下了21盘棋。

提示：设大师第i天下了x_i盘棋，令

$$S_i=x_1+x_2+\cdots+x_i$$

为第i天前共下了S_i盘棋，则数列$\{S_i\}$共有77项，且每项都不大于$12\times11=132$；

再考虑S_i+21的数列，它也有77项，每一项都不大于$132+21=153$。

由此得到不大于153的154个数，其中一定有两个相等的数。

11．证明存在不全为零的整数a，b，c且每个数的绝对值均小于100万使

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}.$$

提示：设$S=\{r+S\sqrt{2}+t\sqrt{3}\mid r,s,t<10^6; r, s, t\in Z\}$，则$S$的元素有$10^{18}$个。又设

$d=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot10^6$，把区间$[0,d)$分成$10^{18}-1$个小区间，其长度均为$\frac{d}{10^{18}-1}$，于是$S$中至少有两个元素在同一个子区间，研究这两个元素，即可证明a,b,c的存在性。

7 错在哪里?

错误常常是正确的先导，探讨数学解题中的某些“病症”，从反面辨认、推敲错解的根源这是识别错误、改正错解的重要方法之一，也是检验知识、考核能力的试金石。由于知识上的某些缺陷或由于逻辑上的差错常发生一些似真实假、不易察觉的错误。如果我们能清楚地知道错误是如何发生的，其症结所在，能防患于未然，避免出现错误。它对于解题能力，培养严谨周密的思考方法都是很有益的。

现将解题中常见的一些错误和初等数学中几个著名的伪证介绍于后。

7.1 初等数学中一些著名的伪证

初等数学中有很多著名的伪证，它们的特点是：谬误之处证得比较巧妙。不易被人们察觉，若稍不注意就会认为是真实的。下面介绍几个伪证，从反面提供一些经验，借以来扩大眼界，增加一些“免疫力”。

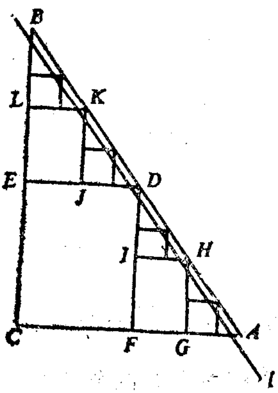


图 39

例 1 在任何直角三角形中，勾+股=弦。

伪证 在直角$\triangle ABC$中，自弦AB中点D，分别向勾股作垂线，得DF，DE（图 39）。于是折线$AFDEB$应等于$\triangle ABC$的勾股之和，对于直角$\triangle AFD$和直角$\triangle BDE$再自它们弦的中点H，

K分别作勾、股的垂线，则得一四齿折线$AGHIDJKLB$，其长仍等于$\triangle ABC$的勾股之和；这个过程可以无限继续下去，就是说，将弦分成2，4，8，16…等分，对每一种等分相应地都得到一条多齿折线（图中只画出8齿折线）。现在从两个方面看这个齿数无限增多的折线序列。

首先，每一种这样的折线，不管有多少齿，其长度恒等于$\triangle ABC$勾股之和（可用归纳法证明）。

其次，当齿数无限增多时，折线将无限靠近弦AB。换句话说：任作一条平行AB的直线l。让它和AB非常靠近，则当齿数足够多时，折法将完全进入l和AB围成的带域中。由此可见，折线的长度所组成的数列应以AB为极限。另一方面，由于多齿折线的长始终是$AC+BC$。于是$AB=AC+BC$。

简析　证明的错误发生在逻辑判断上，我们从直观上看到的是多齿曲线无限接近弦AB，这是正确的。用集合的语言来解释是一个点集（多齿曲线）的序列（族）以另一点集（弦AB）为极限。但由此得出结论：多齿曲线的长度所组成数列的极限等于弦AB的长度就错了！因为多齿曲线所在的每一个小三角形中勾股的和与弦相差确实很小，但大量的（无限多个）这样的勾股和相加，就可能跟弦相差很大了，它混淆了一条曲线和这条曲线的长度这两个不同概念的区别。此外，伪证只强调了两条曲线无限接近，而却忽视了两者在每一点的方向上不一致——在弦AB的每一点永远只有一个方向，而当多齿曲线无限接近弦时，其每一点的方向一会儿水平，一会儿垂直变化剧烈，这就是伪证的症结所在。

例2　$\pi=2$。

伪证　以一线段AB为直径作半圆，如图40，取AB中

点，分别以两个半径为直径作两个半圆，一个半圆在 AB 之上，另一个在 AB 之下，于是得到一个波形曲线（正弦样），

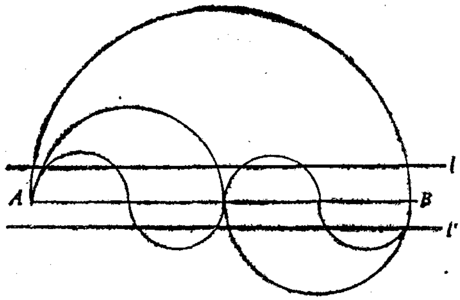


图 40

其长度为：$\frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{2}\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{2}\pi=\frac{\pi}{2}AB$，仿此将 AB 分成 4，8，16，…等分，对于每一种等分都对应一条多波形曲线，于是得到一个波形曲线的序列。

首先，每条波形曲线不管它有波几何，其长度恒等于 $\frac{\pi}{2}AB$（可用归纳法证明）。

其次，当曲线的波数无限增加时，曲线将无限靠近 AB，换句话说，在 AB 两侧，任作两条平行于 AB 的直线 l，l' 使与 AB 非常靠近，则当波数足够多时，曲线将完全进入 ll' 形成的带域中，由此可见，波形曲线的序列应以 AB 为极限。

这样，我们就证明了 AB 的长将与波形曲线的长 $\frac{\pi}{2}AB$ 无限接近，由于 AB 在极限过程中没有变化，可知必有 $AB=\frac{\pi}{2}AB$，即 $\pi=2$。

简析 此题情况与例1相同，波形曲线无限靠近直径AB，但不等于说两者长度越来越接近；直径AB上每点的方向只有一个，而波形曲线的方向从水平以至垂直反复无常、变化不定，这就是伪证的根源。

例 3 任何圆都有同一周长。

伪证 设有两个同心圆C，C_1，它们的半径分别为R，r $(R>r)$，如图41。设想这是个机械零件的外轴和内轴的剖面，并且两者已经固定不动。设圆C沿一条与之切于M点的直线MN滚动一周，其时，圆C_1也将切于M_1的直线M_1N_1滚动一周，在滚动时，圆C的切点M经P点落在M''点，相应地，圆C_1的切点M_1将径P_1点而落在M_1''点。

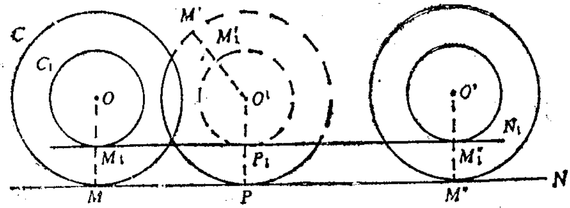


图 41

因$OM \parallel O''M''$，故得$MM''=M_1M_1''$。因MM''及M_1M''分别是圆C及C_1的周长，所以C与C_1的周长相等。

简析 此伪证原系古典诡辨说之一，由希腊哲学家亚里士多德提出。俗称《亚里士多德回论》。若单从几何考虑确实不易识破，但从运动学角度来看却一目了然！如果大圆无滑动地沿着直线MN滚动，则小圆必不可能沿着直线M_1N_1无滑动地滚动；这是因为如果小圆也无滑动地滚动，则当公共中心位于O'时，这时轴轮便有两个瞬时旋转中心：P与P_1，而M'处的速度方向既要垂直于PM'又无垂直于P_1M'这

是办不到的，因此可以说当大圆作无滑动滚动时，小圆在作前滑滚动。反过来当小圆作无滑动滚动时，大圆在作后滑滚动。可以证明当大圆滚动时有 $MP=\overset{\frown}{PM'}$ 的话，则对小圆将有 $M_1P_1=\frac{r}{R}\overset{\frown}{P_1M'}$。

7.2 循环论证

循环论证是解题中常见错误之一，如果在证明过程中默认命题的结论（或不自觉地引用命题的结论）来证明这个命题，就犯了循环论证的错误。

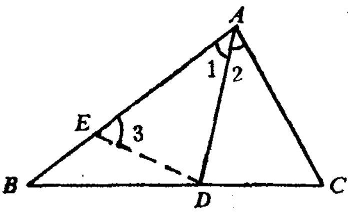


图 42

例 4 已知$\triangle ABC$中，AD为$\angle A$平分线，$BD>DC$，求证：$AB>AC$

错证 如图 42，在 AB 上取点 E，使得 $AE=AC$，连接 DE，由所设条件$\angle 1=\angle 2$，$AD=AD$得，$\triangle AED\cong\triangle ACD$，于是$\angle 3=\angle C$。因为$\angle 3>\angle B$，所以$\angle C>\angle B$，$AB>AC$。

简析 上述证明错了，错在哪里？错在在 AB 上取点 $AE=AC$，因为这种取点方式已实际上承认了题中的结论 $AB>AC$，继而又用它为基础进行了推导。也就是说，这种证法的实质就是用要证的命题结论为依据来证明命题本身。如此证来证去，只是围绕这个命题兜圈子，结果什么也没有证明，这就是循环论证，这个错误说明证几何问题时，不能随心所欲地作辅助线。

本题正确证法很多，下面给出一种面积证法。

正确证法 过A作$AE\perp BC$，垂足为E（图 43），则

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AE$,

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot AE$。

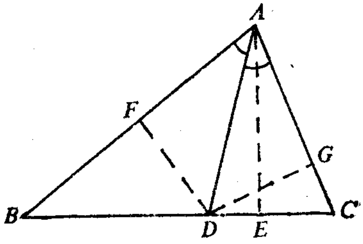


图 43

因为 $BD>CD$

所以 $S_{\triangle ABD}>S_{\triangle ACD}$.

过D作$DF\perp AB$，$DG\perp AC$，垂足分别为F，G，则$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DF$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot DG$。

$$\frac{1}{2}AB\cdot DF>\frac{1}{2}AC\cdot DG$$

因为AD为角平分线，

所以$DF=DG$，从而$AB>AC$。

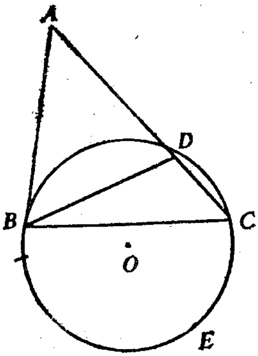


图 44

下面一题是 1987 年全国初中联赛第二试中的一个题，许多学生就犯了循环论证的错误。

例 5 已知D是$\triangle ABC$的边AC上的一点，$AD:DC=2:1$，$\angle C=45°$，$\angle ADB=60°$，求证：AB是$\triangle BCD$的外接圆的切线。

错证 如图 44，因为$\angle ACB=45°$，所以$\overset{\frown}{BD}=90°$。

又$\angle ADB=60°$，

故$\angle BDC=120°$，$\overset{\frown}{BEC}=240°$。

从而 $$\angle A=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BEC}-\overset{\frown}{BD})=75° \tag{7.1}$$

$$\angle ABD=180°-75°-60°=45°,$$

$$\angle ABD=\angle C,$$

因此，$\angle ABD$ 是弦切角，即 AB 为 $\triangle BCD$ 外切圆的切线．

简析 本题仍属循环论证的错误，但错在何处不易发现．我们先从反面来看一看，在上述错证中，根本没有用列条件 $AD:DC=2:1$，一般说来，一道题特别是试题，是经命题者反复考虑过，条件不会多给，也不会少给，当然有时"智者千虑，必有一失"难免有错．但这种情况极少，如果一道题你有条件未用而作出．绝大部分情况下可以肯定你错了，当然，这不能算是说明上述证明错了的有说服力的理由．我们还是从证明过程来分析，本题错在（7.1）或不成立，因为（7.1）式成立的前题是 AB 是圆 O 的切线，因为，

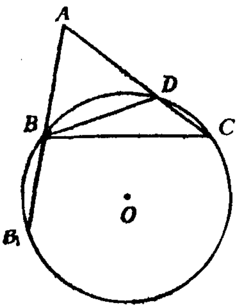


图 45

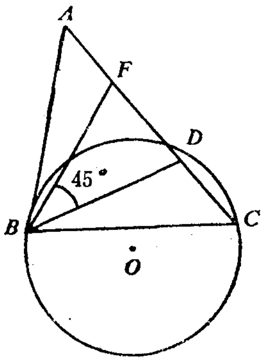


图 46

如不承认 B 是切点的话，则 AB 与圆 O 还有另一交点 B_1（图 45），这样 $\angle A=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{B_1EC}-\overset{\frown}{BD})\neq\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BEC}-\overset{\frown}{BD})$．

于是（7.1）式就不成立.

正确证法 过B作BF交AC（（或者延长线）于F，使$\angle DBF=45°$（如图46所示）.

因为 $\angle C=45°$，所以$\triangle FDB\sim\triangle FCB$.

且 $$BF^2=FD\cdot FC \tag{7.2}$$

所以BF是$\triangle BDC$外接圆的切线.

因为 $\angle FDB=60°$，$\angle FBD=45°$，

所以 $\dfrac{FB}{FD}=\dfrac{\sin 60°}{\sin 45°}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，

$$FB^2=\frac{3}{2}FD^2. \tag{7.3}$$

由（7.2）及（7.3）式得 $\dfrac{FC}{FD}=\dfrac{3}{2}$，

$$FD=2DC.$$

又 $AD=2DC$，

所以F与A点重合，即AB是$\triangle BCD$外接圆的切线.

例 6 证明勾股定理.

错证 1979年曾以这条定理作为全国高考入学数学试题，在改卷中发现，很多人采用下述证法：在$\triangle ABC$中，设$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，$\angle C=90°$，于是由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$因为$\angle C=90°$，所以$\cos C=0$，于是$a^2+b^2=c^2$.

简析 这又是一个循环论证，因为余弦定理本身就是用勾股定理推出来的，在那次考试中，还有许多人用解析几何中两点的距离公式或$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$来证，这都属同一个错误，至于勾股定理的正确证明方法，据说国外有一本书罗列了370种证法，这里从略.

7.3　论据不充足

论题的真实性必须由真实的论据来证明，论据和论题之间应有因果关系，尽管在证明过程中使用的所有论据是真实的，但有的不是论题的真正理由，就会犯“论据不足”的错误。

例 7　求证：$\operatorname{arc tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

错证　因为$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc tg}\frac{1}{3}\right)$

$$=\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arc tg}\frac{1}{2}+\operatorname{tg}\operatorname{arc tg}\frac{1}{3}}{1-\operatorname{tg}\operatorname{arc tg}\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\operatorname{arc tg}\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1,$$

而　$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$,

所以　$\operatorname{arc tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

简析　由于使 $\operatorname{tg}\alpha=1$ 的角 α 不只一个 $\frac{\pi}{4}$，而所有形如 $k\pi+\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$ 的角的正切值都是 1，因此，由“$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc tg}\frac{1}{3}\right)=1$”的论据，并不能得出“$\operatorname{arc tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$”的结论。

正确解法　先算得

$$\mathrm{tg}\left(\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{2}+\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)=1.$$

因为 $0<\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$，$0<\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}$，

所以 $0<\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{2}+\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{3}<\pi$.

而在 $(0,\ \pi)$ 内正切值为 1 的角只有 1 个，即 $\frac{\pi}{4}$.

故 $\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{2}+\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

例 8 在平面直角坐标系中，试画出点集

$M=\{(x,y)$: $\begin{cases}x=\cos\theta+\sin\theta\\ y=\sin\theta\cdot\cos\theta\end{cases}$ (θ为参数)所表示的图形.

错解 由 $\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta\\ y=\sin\theta\cdot\cos\theta\end{cases}$ 消去参数 θ，得到

$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$，于是，点集$M$的图形是抛物线（图 47）.

简析 图象错了.虽然在消去参数求出解析式时，作法、步骤清晰，但由于没有考虑函数的定义域致使论据不充足，因而得出的结论是错误的.

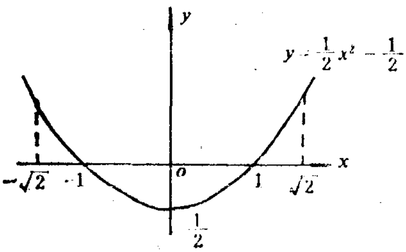


图 47

正确解法 由

$$\begin{cases} x = \sin\theta + \cos\theta \\ y = \sin\theta \cdot \cos\theta \end{cases}$$ 消去参数θ,

得 $$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

因为 $$x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

所以$-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

于是点集M的图形是抛物线$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$在$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

的部分（图48）。

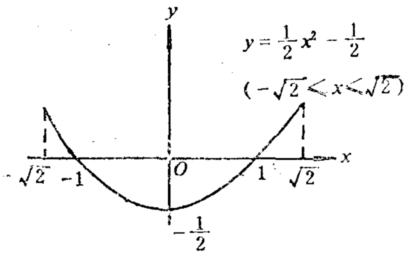


图 48

7.4 乱淆充要条件

充要条件是数学中一个非常重要的概念，在解题过程中往往由于对这个概念理解的不够透彻．而混淆了必要条件、充分条件和充要条件之间的差别，错误地将必要条件当成充分条件或充要条件进行推理而导致错误．

例 9 若方程 $x^2 + (m-2)x + (5-m) = 0$ 的二根都比 2 大，求实数 m的范围．

错解　因为
$$\left.\begin{aligned} x_1>2 \\ x_2>2 \end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

所以
$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2>4 \\ x_1\cdot x_2>4 \end{aligned}\right\} \qquad (7.5)$$

于是，韦达定理得
$$\begin{cases} 2-m>4, \\ 5-m>4, \end{cases}$$

解得　$m<-2$。

又由 $\Delta=(m-2)^2-4(5-m)=m^2-16\geqslant0$，解得 $m\geqslant4$ 或 $m\leqslant-4$。

综上得 $m\leqslant-4$。

简析　上述解法错了，错在混淆了充要条件．具体地说　适合条件组(7.5)的 x_1,x_2 并不总是适合条件组(7.4)，即 (7.5) 是 (7.4) 的必要条件而非充分条件．例如，取 $m=-5\leqslant-4$，此时方程变为 $x^2-7x+10=0$，它的两个根是 2 和 5，并不都大于 2

正确解法　令 $y=x-2$，原方程变形为 $y^2+(m+2)y+(m+5)=0$，这时方程的根都大于零，因此
$$\begin{cases} m+2<0, \\ m+5>0. \end{cases}$$

解得　$-5<m<-2$。

又由 $\Delta=(m+2)^2-4(m+5)=m^2-16\geqslant0$ 解得

$m\geqslant4$ 或 $m\leqslant-4$。

因此　$-5<m\leqslant-4$。

例 10　要使 $a,a+1,a+2$ 为钝角三角形的三边，试求

a 的取值范围。

错解 因为 $a+2$ 是三角形中的最大边，由题意知其对角 θ（钝角）有

$$\cos\theta=\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}=\frac{a-3}{2a}<0.$$

所以 $0<a<3$。

简析 答案是错误的。如果 $a=1$，，则由长度为 1，2，3 的条线路并不能构成三角形。解错的原因是：$\cos\theta<0$ 仅仅是钝角三角形的必要条件，并非钝角三角形的充分条件。

正确解法 解不等式组：

$$\begin{cases} a>0, \\ a+(a+1)>a+2, \\ \dfrac{a^2+(a+1)^2+(a+2)^2}{2a(a+1)}<0, \end{cases}$$

得 $1<a<3$。

例 11 把点 $A(a,b)$ 的坐标变换成新坐标 $A(b,a)$ 坐标轴要旋转多大角度（a,b 均不为零）？

错解 由坐标旋转公式：

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta, \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}, \\ \sin\theta=\dfrac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2}. \end{cases}$$

于是据题意有：

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a\cdot b+b\cdot a}{a^2+b^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}\\ \sin\theta&=\frac{b\cdot b-a\cdot a}{a^2+b^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\end{aligned}\right\}\tag{7.6}$$

故坐标轴要旋转的角为

从而得 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{b^2-a^2}{2ab}$， (7.7)

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{b^2-a^2}{2ab}\tag{7.8}$$

简析 (7.6)， (7.7)， (7.8) 式彼此并不等价，(7.7) 仅是 (7.6) 的必要条件， (7.8) 仅是 (7.7) 的充分条件，故满足 (7.8) 的 θ 并不一定就满足 (7.6)．例如，当 $ab<0$，$b^2-a<0$ 时， (7.6) 式中的 θ 应为第三象限角，而 (7.8) 中的θ却是第一象限的角．

正确解法

由
$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=\dfrac{2\dfrac{b}{a}}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2},\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{\left(\dfrac{b}{a}\right)-1}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2},\end{cases}$$

设 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{b}{a}$，且取 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}$，则

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin2\alpha=\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right),\\[2ex] \sin\sigma=-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-\cos2\alpha=\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

可见，θ 与 $2\alpha-\frac{\pi}{2}$ 的终边重合，故坐标轴应旋转的角度取为

$$\theta=2\alpha-\frac{\pi}{2}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}-\frac{\pi}{2}.$$

7.5 用特殊代替一般

这也是解题中常见的错误之一。如果在解题过程中，用对特例的推导代替一般性证明，这就犯了“用特殊代替一般”的错误。

例 12 已知 $|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，求证：

$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}<1$.

错证 因 $|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，故不妨设 $\sin\alpha=a$，$\cos\alpha=b$，于是有：

$$\begin{aligned}&ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\\&=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)}\\&=\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\left|\sin 2\alpha\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\left|\sin 2\alpha\right|+\frac{1}{2}\left|\sin 2\alpha\right|=\left|\sin 2\alpha\right|\leqslant 1.\end{aligned}$$

简析 按已知条件，a 和 b 应看作是两个独立变量。而在错证中，令 $a=\sin\alpha$，$b=\cos\alpha$，这就把 a，b 看作是相关的了。这是用特殊情况概括一般，因此出现了误证。

正确证法 由于 $|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，故可作三角代换

$$a=\sin\alpha,\qquad b=\cos\beta$$

这里 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$（由于$\alpha$，$\beta$ 是独立的，这就避免了前述错误），于是

$$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+|\cos\alpha\sin\beta|$$
$$=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\sin(\alpha\pm\beta)\leqslant 1.$$

故不等式得证。

例 13 若 $\sqrt[n+1]{3a^3b}$与$\sqrt[5]{3a^{m-n}b}$ 是同类根式，求 m,n。

错解 由同类根式的意义及题设得

$$\begin{cases} n+1=5, \\ m-n=5, \end{cases}$$

解之得 $n=4$，$m=9$。

简析 按照同类根式的定义，两个同类根式如果不是最简根式，那么它们的根指数及被开方数可能对应相等，也可能互不相等。例如，因为

$$\sqrt[5]{3a^5b}=a\sqrt[5]{3b},\quad \sqrt[5]{3a^{10}b}=a^2\sqrt[5]{3b},$$

故$\sqrt[5]{3a^5b}$与$\sqrt[5]{3a^{10}b}$ 是同类根式。但它们的根指数及被开方数并不对应相等。上述错解错在忽略了这个较一般的情况。

正确解法 由同类根式的意义及题设得

$$\begin{cases} n+1=5, \\ m-n=5k, \end{cases}$$

解之得 $n=4$，$m=5k+4$，这里 k 是任意整数。

7.6 忽视了隐含条件

所谓隐含条件，是指题目中若明若暗的含蓄不露的已知条件，它们常是巧妙的隐蔽在题设的背后，不易为人们所察觉。如在解题过程中，不能准确地发掘和使用隐含条件，就必须会导致错误。

例 14 已知点$M(x,y)$的坐标满足方程：

$\log_{(1+x)}y+\log_{(1+x)}y=2(\log_{(1-x)}y)\log_{(1-x)}y$。

试在 xoy 平面上绘出点M的轨迹。

错解 由题设得

$$\frac{1}{\log_y(1+x)}+\frac{1}{\log_y(1-x)}=\frac{2}{\log_y(1+x)\log_y(1-x)},$$

即 $\log_y(1-x)+\log_y(1+x)=2$。

所以 $1-x^2=y^2$ 即 $x^2+y^2=1$，故图象是以原点为圆心，以 1 为半径的圆。

简析 这个结论显然是错误的。因为在解题过程中忽略了使对数有意义的隐含条件：

1) $y>0$； 2) $1+x>0$，$1+x\neq1$； 3) $1-x>0$，$1-x\neq1$。致使解答是错误的。

正确解法 得出 $x^2+y^2=1$ 后，考虑到隐含条件：$y>0$；$1\neq1+x>0$；$1\neq1-x>0$。

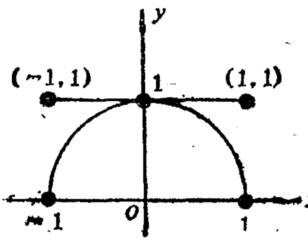


图 49

所以M点的轨迹方程为：$x^2+y^2=1(y>0,\ -1<x<1且x\neq0)$及$y=1(-1<x<1\ 且\ x\neq0)$。

故点$M(x,y)$的轨迹应为：以原点为圆心，以 1 为半径的在 x 轴上方的半圆且须去掉（±1，0），及（0，1）各点及两条

线段：$y=1(-1<x<0)$ 与$y=1(0<x<1)$。如图 49。

例 15 x 为正实数，且$\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1-a)$，

求$\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}$的值。

错解 由$\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1-a)$，得$x=\frac{1}{4}(1-a)^2$，

所以 $x+a=\frac{1}{4}(1-a)^2+a=\left[\frac{1}{2}(1+a)\right]^2$，

$$x-a+2=\frac{1}{4}(1-a)^2-a+2=\left[\frac{1}{2}(3-a)\right]^2.$$

故 $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}=\frac{1}{2}|1+a|-\frac{1}{2}|3-a|$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}[-1-a-(3-a)]=-2, & \text{当 } a<-1\text{时}\\ \frac{1}{2}[1+a-(3-a)]=a-1, & \text{当 } -1\leqslant a<3\text{ 时}\\ \frac{1}{2}[1+a-(a-3)]=2. & \text{当 } a\geqslant 3\text{ 时，}\end{cases}$$

简析 这个答案是错误的。错在解的过程中忽略了隐含条件。由 x 为正实数且$\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1-a)$知 $1-a>0$，即 $a<1$。由于没有考虑 $a<1$ 而导致错误。

正确解法 得出

$\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}=\frac{1}{2}|1+a|-\frac{1}{2}|3-a|$后，正确的结论应是

$\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}[-1-a-(3-a)]=-2, & \text{当} a<-1 \text{时} \\ \frac{1}{2}[1+a-(3-a)]=a-1. & \text{当} -1\leqslant a<1 \text{时}.\end{cases}$$

例 16 求证$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2(x\neq 0)$.

错证 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$

简析 证错了，出错的原因就是忽略了不等式$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$成立的隐含条件：$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$.

正确证法 由于$x\neq 0$时，x与$\frac{1}{x}$同号，故

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}=2.$$

7.7 概念不清

基本概念是数学的"灵魂"，基本概念不清，在解题中必然会出现错误。特别是对构成概念的较隐晦的部分的任何含混或疏忽，在解题中都会导致概念性错误的发生，而且这些误还不易察觉。

例 17 求直线

$$\begin{cases}x=2+t \\ y=\sqrt{3}t\end{cases}(t \text{为参数})$$

被双曲线$x^2-y^2=1$所截得的线段长。

错解 将直线方程

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=\sqrt{3}t \end{cases}$$

代入双曲线方程 $x^2-y^2=1$ 中，整理得

$$2t^2-4t-3=0. \qquad 7.9$$

所以 $t_1\cdot t_2=-\frac{3}{2}$，$t_1+t_2=2$，故弦长

$$|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{10}.$$

简析 此题解法错在混淆了不同的参数方程中，参数 t 的含义不同这一基本概念。直接的参数方程常有两种形式，一种为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\sin\alpha. \end{cases} \quad (t\text{ 为参数})$$

这里 t 的几何意义是直线上动点相对于定点 (x_0,y_0) 的位移（距离），另一种为

$$\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt. \end{cases} \quad (t\text{ 为参数})$$

这里的 t 已不具备上面的几何意义了。本题出现错误就是误将第二种直线参数方程的 t，赋于第一种参考方程 t 的几何意义而致误。

正确解法 由（7.9）解得

$$\begin{cases} t_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}, \\ t_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$$

分别将 t_1,t_2 代入直线的参数方程，得二交点 A,B 的坐

标为

$$\begin{cases} x_1 = 3+\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \\ y_1=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{30}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3-\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \\ y_2=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{30}}{2}, \end{cases}$$

所以弦长$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=2\sqrt{10}$。

例 18 计算 $\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

错解 $\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{5\pi}{3}$.

简析 由于反正弦函数概念不清导致错误。根据反正弦数的定义，在其定义域内，

$\sin(\arcsin x)=x$ 是正确的。但是，$\arcsin(\sin x)=x$ 并不是对一切 x 都成立。只在 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时它才成立。事实上，

令 $\arcsin(\sin x)=y$，则

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ 且 } \sin y=\sin x,$$

若 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 则 $y=x$。而 $\dfrac{5}{3}\pi\notin\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，故得出错误结果。

正确解法 $\arcsin\left(\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)=\arcsin\left[\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\arcsin\left(-\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=-\arcsin\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$.

例 19 一动圆与已知圆 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 和 y 轴均相切，求动圆圆心的轨迹。

错解 对 $x^2+y^2=2ax$ 配方得：$(x-a)^2+y^2=a^2$，这是一个以点 $A(a,0)$ 为圆心，a 为半径的圆。

设动圆圆心为 $p(x,y)$，动圆与 y 轴相切于 B 点。

由题意得：$|pA|=|pB|+a$

则 $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=x+a$，化简得

$$y^2=4ax.$$

简析 此解法有三处犯有概念性错误：

（1）混淆了相切与外切两个概念，误把相切仅当成外切去解了，丢了内切的情况；

（2）坐标概念与线路长度的概念含混。用坐标 x 表达距离 $|pB|$ 不加绝对值，导致漏解；

（3）混淆了“轨迹”和“轨迹方程”，仅给出了轨迹方程而未说明曲线类型。

正确解法 （1）外切的情况：

由 $|pA|=|pB|+a$ $(x\neq0)$，得：

$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=|x|+a$，化简得：

$$y^2=2a(x+|x|)=\begin{cases}4ax, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

此时所求轨迹为抛物线 $y^2=4ax$ 及半直线 $y=0$ $(x<0)$；

（2）内切的情况：

由 $|PA|=a-|PB|$，得：

$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=|x|-a$，化简得

$$y^2=2a(x-|x|)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\geqslant0\\ 4ax & \text{当 } x<0\end{cases}$$

此时所求轨迹为半直线 $y=0$ ($x \geqslant 0$)，当 $x<0$ 时 $y^2=4ax$。不成立，无轨迹。

由（1），（2）的结果知所求轨迹为

抛物线 $y^2=4ax$ 及 x 轴 $y=0$。(去掉原点)

责任编辑：伍传平
封面设计：罗　洪

ISBN 7-312-00046-0/O·19

定价：1.30元