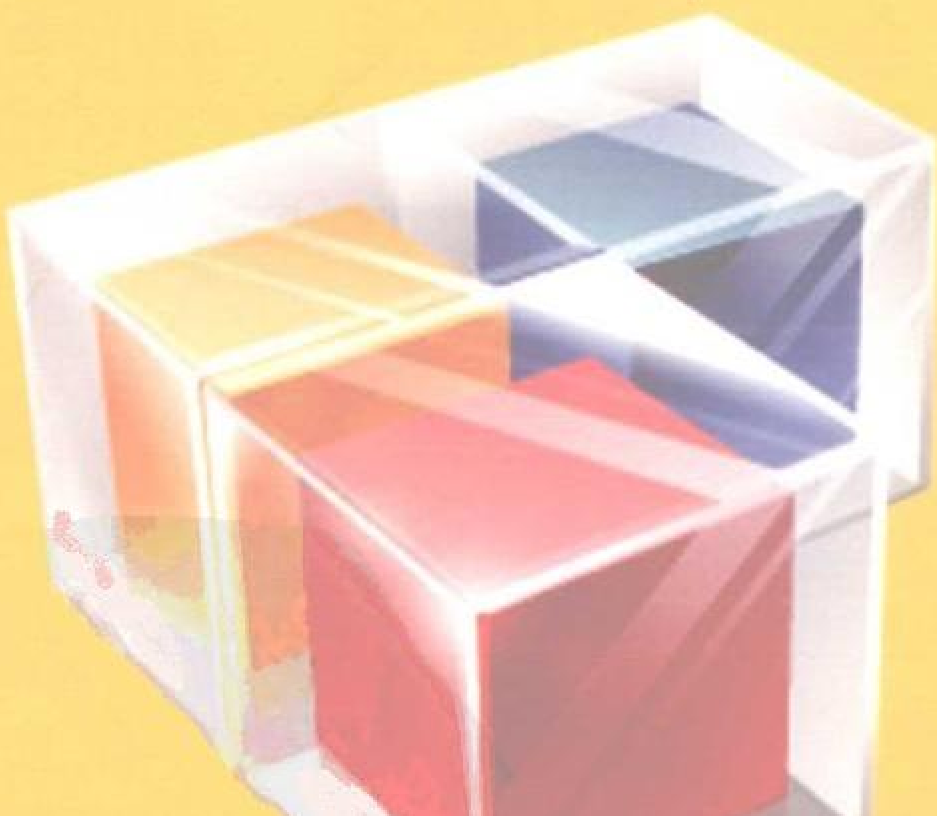
Shuxue Aosai
Fudao Congshu

数学奥赛辅导丛书

# 组合恒等式

Zuhe Hengdengshi

史济怀 编著



中国科学技术大学出版社

数学奥赛辅导丛书

# 组合恒等式

史济怀 编著



中国科学技术大学出版社

# 序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则“天下文章一大抄”，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌．写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言：“居高才能临下，深入才能浅出”，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也堪称是这方面的范本．

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学与科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座，出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的亲炙，耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色．

我看了几本他们编写的“数学奥赛辅导丛书”原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐之为序．

龚　昇

# 前　言

1986年暑假,中国科学技术大学数学系在安徽屯溪,为全国中学数学教师举办了一次暑假讲习班,笔者在讲习班上以"组合恒等式"为题作了一次讲演.当时选择这个题目的目的,是希望中学数学教师在中学教材的基础上,对组合数的性质有进一步的了解,同时希望通过对一些组合恒等式的证明,以加深对数学中常用的一些证明技巧,例如归纳、递推、变换等方法的认识.鉴于在一些国际数学竞赛中,有时也出现证明组合恒等式或与组合数性质有关的题目,希望教师在对学生进行辅导时,增加一些这方面的题材,这是讲演的另一个目的.这本小册子便是在那次讲演的基础上写成的.

所谓组合恒等式,是指组合数 $C_n^k$ 满足的一些关系式,例如大家熟知的

$$C_n^k=C_n^{n-k},\quad C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$$

便是两个最简单的组合恒等式.由于组合数本身的含义以及它同时又是二项式定理中展开式的系数这一事实,使得在数学的许多领域中出现越来越多的组合恒等式.现在"组合恒等式"已成为组合数学中的一个研究方向,已经出版了若干本专著.特别是七十年代以来,单复变数函数和多复变数函数的残数理论被用来研究组合恒等式,使得很多组合恒等式的证明得到了统一

的处理和简化. 1977 年苏联学者叶格里切夫把这方面的成果写成了一本专著《组合和的积分表示和计算》，美国数学学会于 1984 年把这本专著翻译成英文出版，可见组合恒等式的研究正在引起人们的重视.

这本小册子介绍了证明组合恒等式的几种常用的方法. 我们只假定读者具有高中的数学水平，即掌握了一般的排列、组合、二项式定理、复数等项知识的读者就能阅读本书. 由于规定了这样一个起点，有关用微积分证明组合恒等式的方法都没有涉及，当然更不可能介绍前面曾经提到的，用复变函数中残数理论和围道积分证明组合恒等式的方法了.

每节之后附的习题是本书的重要组成部分，通过这些习题，读者可以检查自己对书中介绍的方法掌握的程度.

这是一本入门性的小册子，除了前面提到的，希望对中学数学教师和高中生有用外，还希望能引起具有高中或高中以上文化程度的读者对研究组合恒等式的兴趣！

史济怀

# 目　　次



# 1 几个基本的组合恒等式

牛顿二项式公式

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

的系数恰好是组合数 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$，所以组合数有时也称为二项式系数. 组合数有许多有趣的关系式，例如在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$，就得到两个恒等式

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

$$C_n^0-C_n^1+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$$

这是大家熟知的. 组合数，作为牛顿二项式公式的系数以及它本身在组合学中的含义，使得在数学的很多领域中出现越来越多的各种不同的组合恒等式. 1972 年美国出版了一本组合恒等式的表，其中收集了 500 多个组合恒等式，当然这远不是人们知道的全部组合恒等式！

一些复杂的组合恒等式往往是通过几个基本的组合恒等式，经过归纳、递推等方法得到的. 这些基本的组合恒等式是

$$C_n^k=C_n^{n-k} \tag{1.1}$$

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1} \tag{1.2}$$

$$C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1} \tag{1.3}$$

$$C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m, \quad m \leqslant k \leqslant n \tag{1.4}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n \tag{1.5}$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0 \tag{1.6}$$

这六个基本恒等式中，前两个是大家熟知的，第三个是第四个的特例：只要在(1.4)的第一个等式中取 $m=1$，就得 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$，这就是等式(1.3)。

现在来证明等式(1.4)。事实上，按照计算组合数的公式

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

可以写出

$$C_n^k C_k^m = \frac{n!}{k!\ (n-k)!} \frac{k!}{m!\ (k-m)!}$$

$$= \frac{n!}{m!\ (n-k)!\ (k-m)!}$$

$$C_n^m C_{n-m}^{k-m} = \frac{n!}{m!\ (n-m)!} \frac{(n-m)!}{(k-m)!\ (n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{m!\ (n-k)!\ (k-m)!}$$

$$C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m = \frac{n!}{(k-m)!\ (n-k+m)!} \frac{(n-k+m)!}{m!\ (n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{m!\ (n-k)!\ (k-m)!}$$

这三个乘积是相等的，这就是等式(1.4)。

等式(1.5)和(1.6)就是本章开头提到的两个恒等式，只要在二项式定理中分别取 $x=1$ 和 $-1$ 就能得到。

下面我们将看到，这些基本恒等式虽然简单，但用它们

可以证明或推导出一大批组合恒等式.

在给出具体的例子前,先介绍一下求和的记号,我们把和式 $C_1+C_2+\cdots+C_n$ 简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i$,这里 $C_i$ 表示一般项,$\sum$(读作"西格马")上下的数字表示 $i$ 从 1 加到 $n$,$i$ 是求和指标,只起辅助作用,也可以换成别的记号. 例如

$$1+2+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n}i=\sum_{j=1}^{n}j$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{r=1}^{n}r^2=\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos mx=\sum_{j=1}^{m}\cos jx$$

利用这种记号,多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 可以简记为 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$,二项式定理可简写为 $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k$. 公式(1.5)和(1.6)可分别写为

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n,\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k=0$$

在下面的讨论中,有时需要更换求和指标,必须注意同时更换求和的上下限. 例如

$$\sum_{n=0}^{s}a_nx^n=\sum_{n=2}^{s+2}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{k=1}^{s+1}a_{k-1}x^{k-1}$$

下面是一系列利用六个基本恒等式来推导组合恒等式的例子. 其中,我们约定,$C_n^0=1$,当 $k>n$ 或 $k$ 是负整数时,$C_n^k=0$.

**【例 1】** 计算 $S_{n,m}=\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^kC_n^k$, $m\leqslant n$.

**解** 从等式(1.6)知道,当 $m=n$ 时, $S_{n,n}=0$. 现设 $m<n$, 利用基本恒等式(1.2), $S_{n,m}$ 可以写成

$$
\begin{aligned}
S_{n,m} &= 1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}(C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1}) \\
&= 1-(C_{n-1}^{1}+C_{n-1}^{0})+(C_{n-1}^{2}+C_{n-1}^{1}) \\
&\quad +(-1)^{m}(C_{n-1}^{m}+C_{n-1}^{m-1}) \\
&= (-1)^{m}C_{n-1}^{m}
\end{aligned}
$$

这样,就得到等式

$$
\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}C_{n}^{k}=\begin{cases}0, & m=n. \\ (-1)^{m}C_{n-1}^{m}, & m<n.\end{cases}
$$

**【例 2】** 证明

$$
\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}=2^{2n-1}+\frac{1}{2}C_{2n}^{n}
$$

**证** 记 $a_n=\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}$, $b_n=\sum_{k=n-1}^{2n}C_{2n}^{k}$, 则由等式(1.5)得

$$
a_n+b_n=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}=2^{2n} \tag{1.7}
$$

另一方面,对 $b_n$ 的求和指标作变换: $k=2n-l$, 得

$$
b_n=\sum_{l=0}^{n-1}C_{2n}^{2n-l}=\sum_{l=0}^{n-1}C_{2n}^{l}=\sum_{l=0}^{n}C_{2n}^{l}-C_{2n}^{n}=a_n-C_{2n}^{n}
$$

代入(1.7),即得

$$
a_n=2^{2n-1}+\frac{1}{2}C_{2n}^{n}
$$

这就是要证明的恒等式.

**【例3】** 计算 $p_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_{n}^{k}$, $q_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k+1}C_{n}^{k}$.

**解** 计算这两个和式的主要困难是在每个组合数 $C_n^k$ 前有一个因子 $\frac{1}{k+1}$，若能通过变换把这个因子去掉，那么利用基本恒等式(1.5)和(1.6)，就能得到所要求的和. 事实上，把基本恒等式(1.3)改写为

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

并代入 $p_n$ 和 $q_n$，即得

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

$$q_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

这里我们已经应用了公式(1.5)和(1.6).

**【例 4】** 计算 $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k$.

**解** 先利用基本恒等式(1.3)，可得

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n\sum_{k=1}^{n} kC_{n-1}^{k-1}$$

对右端的和式作指标变换 $k-1=l$，得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kC_{n-1}^{k-1} &= \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)C_{n-1}^{l} = \sum_{l=0}^{n-1} lC_{n-1}^{l} + \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{l} \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} lC_{n-1}^{l} + 2^{n-1}\end{aligned}$$

(应用公式(1.3)) $= (n-1)\sum_{l=1}^{n-1} C_{n-2}^{l-1} + 2^{n-1}$

(作指标变换 $l-1=s$) $= (n-1)\sum_{s=0}^{n-2} C_{n-2}^{s} + 2^{n-1}$

(应用公式(1.6)) $= (n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}$

故最后得

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

应用完全相同的方法，读者可以算出

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 C_n^k, \sum_{k=1}^{n} k^4 C_n^k, \cdots$$

的值.

**【例 5】** 设 $m \leqslant n$，证明

$$S_{mn} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^m = (-1)^m \delta_{mn}$$

这里

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } m=n, \\ 0, & \text{如果 } m \neq n. \end{cases}$$

$\delta_{mn}$ 称为克朗耐克尔 $\delta$. 以后要多次用到它.

**证** 当 $m=n$ 时，上面的和式只有一项

$$S_{mn} = (-1)^m C_m^m C_m^m = (-1)^m$$

故等式成立. 现设 $m<n$，利用基本恒等式(1.4)得

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \sum_{k=m}^{n} (-1)^k C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k C_{n-m}^{k-m} \\ (\text{作指标变换 } k-m=l) &= C_n^m \sum_{l=0}^{n-m} (-1)^{m+l} C_{n-m}^l \\ &= (-1)^m C_n^m \sum_{l=0}^{n-m} (-1)^l C_{n-m}^l \\ &= 0 \end{aligned}$$

最后一步利用了等式(1.6). 证明完毕.

证明这个恒等式的关键是基本恒等式(1.4)，它把两个

因子都和变动指标 $k$ 有关的乘积 $C_n^kC_k^m$ 变成了只有一个因子与 $k$ 有关的乘积 $C_n^mC_{n-m}^{k-m}$，这样，$C_n^m$ 就可作为公因子提出来，和式就化简了. 这里利用(1.4)的目的和例 3 中利用(1.3)的目的是一样的，都是为了把和式化简. 这个等式在下面的讨论中还要用到.

**【例 6】** 设 $m\leqslant n$ 证明 $\sum\limits_{k=m}^{n}C_n^kC_k^m=2^{n-m}C_n^m$.

**证** 和证明例 5 的方法一样，利用基本恒等式(1.4)得

$$\sum_{k=m}^{n}C_n^kC_k^m=C_n^m\sum_{k=m}^{n}C_{n-m}^{k-m}=C_n^m\sum_{l=0}^{n-m}C_{n-m}^{l}=2^{n-m}C_n^m$$

最后一步利用了基本恒等式(1.5)

**【例 7】** 证明 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\dfrac{m}{m+k}=(C_{m+n}^n)^{-1}$.

**证** 显然，当 $m=1$ 时，这就是例 3 中 $q_n$ 的结果，但现在例 3 中的方法已不能用. 记上式左端为 $b_n$，利用基本恒等式(1.2)和(1.3)可得

$$\begin{aligned}
b_n&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{m}{m+k}\\
&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1})\frac{m}{m+k}+(-1)^n\frac{m}{m+n}\\
&=b_{n-1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_{n-1}^{k-1}\frac{m}{m+k}\\
&=b_{n-1}+\frac{m}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{k}{m+k}\\
&=b_{n-1}+\frac{m}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k-\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{m}{m+k}\right\}
\end{aligned}$$

$$= b_{n-1} - \frac{m}{n} b_n$$

这里我们已经应用了等式(1.6). 由此即得

$$b_n = \frac{n}{m+n} b_{n-1}$$

从这个递推公式立刻可得所要证明的等式:

$$b_n = \frac{n}{m+n} b_{n-1} = \frac{n}{(m+n)} \frac{n-1}{m+n-1} b_{n-2}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} b_{n-3} = \cdots$$

$$= \frac{n!m!}{(m+n)!} b_0 = (C_{m+n}^{n})^{-1}$$

这里我们一下子得不到要证明的等式, 但得到了 $b_m$ 和 $b_{m-1}$ 之间的递推关系. 这种利用递推关系证明恒等式的方法下面将要多次用到.

**【例 8】** 证明

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (1.8)$$

**证** 看上去(1.8)左端的和式与例 3 的 $q_n$ 差不多, 但现在不能直接用公式(1.3). 不过容易想到通过等式(1.2)来使用公式(1.3). 事实上, 先用公式(1.2), 再用公式(1.3)可得

$$\frac{1}{k} C_n^k = \frac{1}{k}(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) = \frac{1}{k} C_{n-1}^k + \frac{1}{n} C_n^k$$

于是若记 $f_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k$, 则

$$f_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^{k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}C_n^k + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$= f_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k = f_{n-1} + \frac{1}{n}$$

这里最后的等式用了基本恒等式(1.6). 从这个递推关系可得

$$f_{n-1} = f_{n-2} + \frac{1}{n-1}, \cdots, f_2 = f_1 + \frac{1}{2}, f_1 = 1$$

所以

$$f_n = f_{n-1} + \frac{1}{n} = f_{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

这就是要证明的等式(1.8).

**【例 9】** 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}C_{2n-k+1}^{k} = n+1 \tag{1.9}$$

**证** 记(1.9)左端的和式为 $a_n$, 利用基本恒等式(1.2), $a_n$ 可写为

$$a_n = 2^{2n} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}(C_{2n-k}^{k} + C_{2n-k}^{k-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k-1} \tag{1.10}$$

对上式第二个和式作指标变换 $k=l+1$ 得

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+1}2^{2(n-1)-2l}C_{2(n-1)-l+1}^{l} = -a_{n-1}$$

如果把(1.10) 右端的第一个和式记为 $b_n$, 即

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k}$$

那么(1.10)可写为

$$b_n=a_n+a_{n-1} \tag{1.11}$$

在 $b_n$ 中再用基本恒等式(1.2)得

$$b_n=2^{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k 2^{2n-2k}(C_{2n-k-1}^{k}+C_{2n-k-1}^{k-1})+(-1)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k 2^{2n-2k}C_{2n-k-1}^{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}C_{2n-k-1}^{k-1}$$

上式右端第一个和式显然可写为

$$4\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k 2^{2(n-1)-2k}C_{2(n-1)-k+1}^{k}=4a_{n-1}$$

对第二个和式作指标变换 $k-1=l$,则第二个和式为

$$\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+1}2^{2(n-1)-2l}C_{2(n-1)-l}^{l}=-b_{n-1}$$

由此得

$$b_n=4a_{n-1}-b_{n-1} \tag{1.12}$$

从(1.11)和(1.12)得

$$a_n+a_{n-1}=4a_{n-1}-b_{n-1}=4a_{n-1}-a_{n-1}-a_{n-2}$$

由此得递推关系

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-1} \tag{1.13}$$

显然 $a_0=1,a_1=2$. 于是从(1.13)得

$$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}=a_{n-2}-a_{n-3}=\cdots=a_1-a_0=1$$

由此得

$$a_n=a_{n-1}+1=a_{n-2}+2=\cdots=a_0+n=n+1$$

这就是要证明的等式(1.9).

从(1.9)和(1.11)又可得一新的恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k}=2n+1 \tag{1.14}$$

如果把(1.14)中的流动指标 $k$ 换成 $n-l$，又得恒等式

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}2^{2l}C_{n+l}^{2l}=2n+1$$

例 9 的恒等式证明起来有一定的难度，为了算出 $a_n$ 的值，我们引进了 $b_n$，通过 $a_n$ 和 $b_n$ 的关系，最后算出了 $a_n$. 这种方法在下面还将用到.

**【例 10】** 证明 $\sum\limits_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k-1}(k+1)(C_{2n}^{k})^{-1}=0.$ (1.15)

**证** 把上面左端的和式记为 $y_n$. 两次利用基本恒等式(1.3)得

$$\frac{k+1}{C_{2n}^{k}}=\frac{2n+1}{C_{2n+1}^{k+1}}=\frac{2n+1}{C_{2n+1}^{2n-k}}=\frac{2n-k}{C_{2n}^{2n-k-1}}$$

于是

$$y_n=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k+1}\frac{2n-k}{C_{2n}^{2n-k-1}}$$

作求和指标变换 $l=2n-k-1$，则当 $k$ 从 0 变到 $2n-1$ 时，$l$ 从 $2n-1$ 变到 0，因而

$$y_n=\sum_{l=0}^{2n-1}(-1)^{2n-l}\frac{l+1}{C_{2n}^{l}}=\sum_{l=0}^{2n-1}(-1)^{l}\frac{l+1}{C_{2n}^{l}}=-y_n$$

由此即得 $y_n=0$.

作为一个习题，请读者自己证明

$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{n-k}{C_{2n}^{k}}=0 \tag{1.16}$$

【例 11】 证明$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}(C_{2n}^{k})^{-1}=\frac{1}{n+1}$.

**证** 若记

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}(C_{2n}^{k})^{-1},\quad b_n=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}k(C_{2n}^{k})^{-1}$$

则由例 10 知道

$$\begin{aligned}a_n+b_n&=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}(k+1)(C_{2n}^{k})^{-1}\\&=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k-1}(k+1)(C_{2n}^{k})^{-1}+1=1\end{aligned}\tag{1.17}$$

从(1.16)又有

$$na_n-b_n=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}(n-k)(C_{2n}^{k})^{-1}=0\tag{1.18}$$

(1.17)和(1.18)相加,即得$a_n=\frac{1}{n+1}$,这就是要证明的恒等式. 从(1.18)又得$b_n=na_n=\frac{n}{n+1}$. 这样我们就得到了下面两个组合恒等式

$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}(C_{2n}^{k})^{-1}=\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}k(C_{2n}^{k})^{-1}=\frac{n}{n+1}$$

其实例 11 的等式还有一个更简单的证法. 根据组合数的计算公式直接可得

$$\frac{2n+2}{2n+1}\frac{1}{C_{2n}^{k}}=\frac{1}{C_{2n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}\tag{1.19}$$

于是

$$\frac{2n+2}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{C_{2n}^{k}}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{1}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2}}\right)-\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{2}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{3}}\right)$$

$$+\cdots+(-1)^{2n-1}\left(\frac{1}{C_{2n+1}^{2n}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{C_{2n+1}^{1}}-1=\frac{1}{2n+1}-1=\frac{-2n}{2n+1}$$

由此即得

$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}(C_{2n}^{k})^{-1}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}(C_{2n}^{k})^{-1}+1$$

$$=-\frac{n}{n+1}+1=\frac{1}{n+1}$$

这个证明不需要(1.15)和(1.16)两个恒等式的帮助，而仅仅利用了等式(1.19)，这是从组合数的计算公式直接得到的，但要想到这一点，只有对组合数的运算非常熟练才能办到.

数学归纳法自然是证明组合恒等式的一种重要方法，例如例7、例8都可用数学归纳法来证明.下面是一个较为困难的例子.

**【例12】** 证明

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}=\frac{1}{n}C_{2(n-1)}^{n-1},n=2,3,\cdots \tag{1.20}$$

**证** 先把等式化简.注意

$$\frac{n}{k(n-k)}=\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}$$

(1.20) 的左端乘以 $n$ 得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k(n-k)}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} \tag{1.21}$$

在(1.21) 右端的第二个和式中命 $n-k=l$ 得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l}C_{2(n-l-1)}^{n-l-1}C_{2(l-1)}^{l-1}$$

这说明(1.21) 右端的两个和是相同的，因而有

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k(n-k)}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} \tag{1.22}$$

这样一来，(1.20) 就变成

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}=\frac{1}{2}C_{2(n-1)}^{n-1} \tag{1.23}$$

现在用数学归纳法证明(1.23) 成立. $n=2$ 时，等式显然成立. 今设 $n=m$ 时，(1.23) 成立，要证 $n=m+1$ 时，(1.23) 也成立. 当 $n=m+1$ 时，(1.23) 的左端为

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k)}^{m-k}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k)}^{m-k}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1} \tag{1.24}$$

注意到

$$C_{2(m-k)}^{m-k}=\frac{(2m-2k)!}{((m-k)!)^2}$$

$$=\frac{(2m-2k)(2m-2k-1)}{(m-k)^2}\times\frac{(2m-2k-2)!}{((m-k-1)!)^2}$$

$$=2\left(2-\frac{1}{m-k}\right)C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}$$

代入(1.24)得

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k)}^{m-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2}{k}\left(2-\frac{1}{m-k}\right)C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$=4\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}$$

$$-2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k(m-k)}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1}$$

利用(1.22)和归纳假定即得

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k)}^{m-k}$$

$$=4\left(1-\frac{1}{m}\right)\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(m-k-1)}^{m-k-1}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$=4\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2}C_{2(m-1)}^{m-1}+\frac{1}{m}C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$=\left(2-\frac{1}{m}\right)C_{2(m-1)}^{m-1}=\frac{2m-1}{m}\frac{(2m-2)!}{((m-1)!)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2m(2m-1)}{m^2}\frac{(2m-2)!}{((m-1)!)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(2m)!}{(m!)^2}=\frac{1}{2}C_{2m}^{m}$$

这就证明了(1.23)当 $n=m+1$ 时也成立，因而(1.20)成立.归纳法证明完毕.

这个恒等式在例 18 讨论 $\sqrt{1+x}$ 的展开式时将要用到.

上面十二个例子都是通过六个基本恒等式来证明的，至于什么情况下用哪一个以及如何用，这就是证明技巧之所在，要通过较多的练习才能逐步掌握.

## 习　题　一

证明下列恒等式：

1. $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = 3^n$.

2. $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$.

3. $\sum_{k=0}^{n} (k+1) C_n^k = 2^{n-1}(n+2)$.

4. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k C_n^k = 0$,　$(n>1)$.

5. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^k = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}$.

6. 如果 $n$ 为偶数，则 $C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$，

   如果 $n$ 为奇数，则 $C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$.

7. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} C_n^k = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$.

8. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^{-1} = \frac{n+1}{n+2}(1+(-1)^n)$.

9. $\sum_{k=l}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k C_k^l = \frac{(-1)^l}{n+1}$.

10. $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k = 2^{2n-2}$.

11. $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_{2n}^{k} = n2^{2n-1}$.

12. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{1}{k} C_{n}^{k} [1-(1-x)^{k}] = x + \dfrac{x^{2}}{2} + \cdots + \dfrac{x^{n}}{n}$.

13. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k}}{2k+1} C_{n}^{k} = \dfrac{2^{2n}}{2n+1} (C_{2n}^{n})^{-1}$.

14. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k}}{1-2k} C_{n}^{k} = 2^{2n} (C_{2n}^{n})^{-1}$.

15. $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_{2n+1}^{k} = (2n+1)2^{2n-1} - \dfrac{2n+1}{2} C_{2n}^{n}$.

16. $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_{2n}^{n-k} = nC_{2n-1}^{n}$.

17. $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_{2n+1}^{n-k} = (2n+1)C_{2n-1}^{n} - 2^{2n-1}$.

18. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} x^{k} = \dfrac{(1+\sqrt{x})^{2n+1} - (1-\sqrt{x})^{2n+1}}{2\sqrt{x}}$.

19. $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \dfrac{n-k}{C_{2n}^{k}} = 0$.

20. $\sum\limits_{k=l}^{n} C_{n}^{k} C_{k}^{l} x^{k} (1-x)^{n-k} = C_{n}^{l} x^{l}$.

# 2 母函数方法

上面已经看到,六个基本恒等式在证明各种组合恒等式时起着重要的作用,但必须在某种方法的指导下恰当地使用它们,才能得到所要的结果.下面介绍的母函数方法就是这种有效方法中的一种.

设$\{a_k\}$,$k=0,1,\cdots,n$是一个给定的数列,如果它恰好是某一个多项式$p(x)$的系数,即

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

就称$p(x)$是这个数列的**母函数**或**生成函数**.意思是这个数列是由多项式$p(x)$产生的.

例如,由组合数构成的数列

$$C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$$

的母函数是$(1+x)^n$,这是因为由二项式定理可得

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n$$

同样道理,数列

$$C_{2n}^0,C_{2n}^1,\cdots,C_{2n}^{2n}$$

的母函数是$(1+x)^{2n}$.

如果给定的是无穷数列,例如

$$C_n^n,C_{n+1}^n,C_{n+2}^n,\cdots,C_{n+k}^n,\cdots$$

它的母函数是什么呢?一般来说,无穷数列

$$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$

的母函数应该是一个“无穷次多项式”:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

我们把这种“无穷次多项式”叫做**形式幂级数**. 这个名词是这样得来的:无穷个数相加的式子称为级数,而它的每项都是幂函数 $a_n x^n$,故称之为幂级数;所以要加上“形式”两字是因为我们这儿并不讨论它的收敛、发散等问题,而是把整个幂级数看作一个对象加以研究和使用,就好像把 $a+bi$ 看作一个整体——叫做复数——来研究和使用一样.

现在给出无穷数列(以下简称数列)的母函数的明确定义.

**定义 1** 设

$$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots \tag{2.1}$$

是一个给定的数列,称形式幂级数

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2.2}$$

为数列(2.1)的母函数.

例如数列 $1, 1, \cdots, \cdots$ 的母函数是 $1 + x + \cdots + x^n + \cdots$,数列 $1, 2, 3, \cdots$ 的母函数是 $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$.

形式幂级数对我们来说是完全新的对象,什么是两个形式幂级数的和、差、积、商必须重新定义.

**定义 2** 两个形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

当且仅当

$$a_n=b_n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

时才认为是相等的.

因此,数列$\{a_n\}$和它的母函数之间是一一对应的,不同的数列,对应的母函数也不相同.

**定义 3** 两个形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

的和是一个以$\{a_n+b_n\}$为系数的形式幂级数,即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$$

**定义 4** 常数$\alpha$和形式幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的乘积是一个以$\{\alpha a_n\}$为系数的形式幂级数,即

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n)x^n$$

从定义 3,4 得知

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-b_n)x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n\end{aligned}$$

**定义 5** 两个形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

的积定义为形式幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$,其中系数$c_n$为

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\qquad(2.3)$$

即

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n$$

**【例 13】** 计算$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^2$.

**解** 设

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

即 $a_n=b_n=1,n=0,1,2,\cdots$ 因而

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=n+1$$

由此即得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

**【例 14】** 计算$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)$.

**解** 设$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$,则 $b_n=1,n=0,1,2,\cdots$ 于是

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_k=a_0+a_1+\cdots+a_n$$

所以

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n$$

这个例子告诉我们,如果数列

$$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$$

的母函数是 $f(x)$,那么数列

$$a_0,a_0+a_1,a_0+a_1+a_2,\cdots,a_0+a_1+\cdots+a_n,\cdots$$

的母函数是 $f(x)\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

形式幂级数的乘法运算定义得似乎有点不自然，其实它就是多项式乘法运算的推广. 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 分别是 5 次和 7 次多项式：

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5$$

$$Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_7x^7$$

它们的乘积是

$$P(x)Q(x)=(a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5)(b_0+b_1x+\cdots+b_7x^7)$$

$$=\sum_{k=0}^{12}c_kx^k.$$

容易看出，乘积中 $x^4$ 的系数是

$$c_4=a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0=\sum_{k=0}^{4}a_kb_{4-k}$$

$x^5$ 的系数是

$$c_5=a_0b_5+a_1b_4+\cdots+a_5b_0=\sum_{k=0}^{5}a_kb_{5-k}$$

但 $x^8$ 的系数是

$$c_8=a_1b_7+a_2b_6+a_3b_5+a_4b_4+a_5b_3$$

而不再是

$$\sum_{k=0}^{8}a_kb_{8-k}=a_0b_8+a_1b_7+\cdots+a_8b_0$$

这是因为 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 中根本没有 $a_6,a_7,a_8,b_8$ 这些系数. 但在形式幂级数中，项数是无穷的，因此把 $c_n$ 定义为(2.3)的样子是合理的，它就是多项式乘法运算的推广.

有了乘法运算，就可定义除法运算.

**定义 6** 设

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,h=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

是三个形式幂级数,如果 $f=gh$,就称 $f$ 被 $g$ 除的商是 $h$,记为 $\frac{f}{g}=h$.

**【例 15】** 把 1 和 $1-x$ 都看成形式幂级数,计算它们的商 $\frac{1}{1-x}$.

**解** 设商为 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$,即

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

按定义 6 得

$$1=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{2.4}$$

(2.4) 的右端可改写为

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-c_{n-1})x^n$$

代入(2.4) 得

$$1=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-c_{n-1})x^n$$

比较两边同幂次的系数,得

$$c_0=1,c_n-c_{n-1}=0,n=1,2,3,\cdots$$

由此即得 $c_0=c_1=c_2=\cdots=1$. 因而得展开式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \tag{2.5}$$

这个展开式在下面的讨论中将多次利用到.

要注意的是(2.5)中的相等是形式幂级数的相等,在它的两边不能用 $x$ 的具体数值代入. 例如,若用 $x=2$ 代入,就会得出

$$-1=1+2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$$

这样的荒谬结果. 这是形式幂级数与多项式的本质差别.

是不是任意两个形式幂级数都可以相除?不是的. 设

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

是两个形式幂级数,如果设它们的商为

$$h=\frac{f}{g}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

那么按定义 $f=gh$,即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}b_kc_{n-k}\right)x^n$$

比较两端形式幂级数的系数得

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}b_kc_{n-k},\ n=0,1,\cdots$$

即

$$a_0=b_0c_0,\ a_1=b_0c_1+b_1c_0,\cdots,\ a_n=b_0c_n+b_1c_{n-1}+\cdots+b_nc_0,\cdots$$

如果 $b_0\neq0$,那么

$$c_0=\frac{a_0}{b_0},\ c_1=\frac{a_1-b_1c_0}{b_0},\ c_2=\frac{a_2-(b_1c_1+b_2c_0)}{b_0},\cdots$$

$$c_n=\frac{a_n-(b_1c_{n-1}+\cdots+b_nc_0)}{b_0},\cdots \tag{2.6}$$

这就是由 $f,g$ 计算商 $h$ 的系数的递推公式. 如果 $b_0=0$,而

$a_0 \neq 0$，这时不论 $c_0$ 取何值都不能使

$$a_0 = b_0 c_0$$

成立，因而$\dfrac{f}{g}$就不再是形式幂级数了. 这说明不是任意两个形式幂级数都可以相除的，这正好像不是任意两个多项式都能相除一样.

**【例 16】** 设 $r$ 是任意实数，计算商$\dfrac{1}{1-rx}$.

**解** 把 1 和 $1-rx$ 都看成形式幂级数：

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$1 - rx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

由此得

$$a_0 = 1, a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0$$

$$b_0 = 1, b_1 = -r, b_2 = b_3 = \cdots = b_n = \cdots = 0$$

代入递推公式(2.6)得

$$c_0 = 1, c_1 = r, c_2 = r^2, \cdots, c_n = r^n, \cdots$$

故得展开式

$$\frac{1}{1-rx} = 1 + rx + r^2 x^2 + \cdots + r^n x^n + \cdots \qquad (2.7)$$

如果在(2.7)中取 $r=1$ 就得(2.5).

从这里还可以看出，如果在(2.5)中用 $rx$ 代替 $x$，等式还是成立的. 这种情况以后还会遇到多次，就不再一一说明了.

有了(2.5)，就可给出$\dfrac{1}{(1-x)^n}$的幂级数表达式了，这对

证明组合恒等式将是十分有用的.

**【例 17】** 证明

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n-1+k}^{n-1}x^k \tag{2.8}$$

**证** 用数学归纳法证明(2.8)成立. $n=1$ 时,(2.8)就是(2.5),今设 $n=k$ 时,(2.8)成立,即

$$\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{l=0}^{\infty}C_{k+l-1}^{k-1}x^l$$

于是当 $n=k+1$ 时,

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\frac{1}{(1-x)^k}\frac{1}{1-x}=\Big(\sum_{l=0}^{\infty}C_{k+l-1}^{k-1}x^l\Big)\Big(\sum_{l=0}^{\infty}x^l\Big)$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{l}C_{k+j-1}^{k-1}\Big)x^l \tag{2.9}$$

利用基本恒等式(1.2)可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{l}C_{k+j-1}^{k-1}&=C_{k-1}^{k-1}+C_k^{k-1}+C_{k+1}^{k-1}+\cdots+C_{k+l-1}^{k-1}\\&=(C_k^k+C_k^{k-1})+C_{k+1}^{k-1}+\cdots+C_{k+l-1}^{k-1}\\&=C_{k+1}^k+C_{k+1}^{k-1}+C_{k+2}^{k-1}+\cdots+C_{k+l-1}^{k-1}\\&=C_{k+2}^k+C_{k+2}^{k-1}+\cdots+C_{k+l-1}^{k-1}=\cdots=C_{k+l}^k\end{aligned}$$

代人(2.9)即得

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}C_{k+l}^k x^l$$

这就证明了(2.8)当 $n=k+1$ 时也成立. 根据归纳法原理,(2.8)对所有自然数 $n$ 成立.

(2.8)告诉我们一个重要的事实,数列

$$C_n^n,C_{n+1}^n,C_{n+2}^n,\cdots,C_{n+k}^n,\cdots$$

的母函数是$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$，这个事实在证明某些组合恒等式时将起重要作用.

根据形式幂级数的乘法运算，还可定义形式幂级数的开方运算.

**定义 7** 设

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, a_0>0;\quad g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, b_0>0$$

是两个形式幂级数，如果 $f^2=g$，就称 $f$ 是 $g$ 的平方根，记为 $f=\sqrt{g}$.

作为一个重要的例子，我们来计算形式幂级数 $1+x$ 的平方根.

**【例 18】** 证明

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}C_{2n-2}^{n-1}x^n \tag{2.10}$$

**证** 记 $a_0=1, a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}C_{2n-2}^{n-1}$，要证明的(2.10)可写为

$$\sqrt{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{2.11}$$

按照定义，要证明(2.11)成立，只要证明

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2=1+x \tag{2.12}$$

根据乘法的定义有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n,\quad d_n=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$$

显然 $d_0=a_0^2=1,d_1=a_0a_1+a_1a_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,如果能证明 $d_n=0(n=2,3,\cdots)$,那么(2.12)成立,即(2.10)成立.根据 $a_n$ 的表达式,当 $n\geqslant 2$ 时有

$$
\begin{aligned}
d_n&=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}=a_0a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}+a_na_0\\
&=2a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}\\
&=\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-2}}C_{2(n-1)}^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-2}}{2^{2n-2}}\frac{1}{k(n-k)}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}\\
&=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\left\{\frac{1}{n}C_{2(n-1)}^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}C_{2(k-1)}^{k-1}C_{2(n-k-1)}^{n-k-1}\right\}
\end{aligned}
$$

由例12证明的恒等式(1.20)知道,上面花括弧中的值为0,因而 $d_n=0,n=2,3,\cdots$所以(2.10)成立.

但对我们来说更重要的是要证明下面的 $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ 的展开式.

**【例19】** 证明

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}^{n}x^n \tag{2.13}$$

**证** 在(2.10)中用 $-4x$ 代替 $x$,就得

$$\sqrt{1-4x}=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}C_{2k-2}^{k-1}x^k$$

记 $a_0=1,a_k=-\frac{2}{k}C_{2k-2}^{k-1},k=1,2,\cdots,b_k=C_{2k}^{k},k=0,1,\cdots$

只要能证明 $\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k\right)=1$,按照幂级数除法的定

义，要证明的等式成立. 记

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

已知 $d_0 = a_0 b_0 = 1$，剩下要证明的是

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0,\ n = 1, 2, \cdots$$

$$d_n = a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} + a_n b_0$$

$$= C_{2n}^{n} - \frac{2}{n} C_{2n-2}^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k} C_{2k-2}^{k-1} C_{2n-2k}^{n-k}$$

这样，要证 $d_n = 0$ 归结为证明

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} C_{2n-2k}^{n-k} = \frac{1}{2} C_{2n}^{n} - \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) C_{2n-2}^{n-1} \tag{2.14}$$

由于 $C_{2n-2k}^{n-k} = 2\left(2 - \frac{1}{n-k}\right) C_{2n-2k-2}^{n-k-1}$，(2.14) 的左端可以写为

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} C_{2n-2k}^{n-k} = 4 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} C_{2n-2k-2}^{n-k-1}$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} C_{2k-2}^{k-1} C_{2n-2k-2}^{n-k-1}$$

$$= 2 C_{2n-2}^{n-1} - \frac{2}{n} C_{2n-2}^{n-1}$$

这里我们已经使用了例 12 的等式(1.20)和(1.23)，这就是(2.14)，因而(2.13)成立.

(2.10)和(2.13)用微积分的方法是不难证明的，它不过

是一般二项展开式的两个特例. 由于我们不假定读者具有微积分的知识,所以纯粹用初等的方法,按照形式幂级数除法的定义给出它们的证明. 在证明过程中,我们还获得了像(1.20),(1.23)和(2.14)那样有意义的组合恒等式.

现在可以用母函数方法来证明组合恒等式了. 先来证明最基本的恒等式 $C_n^k=C_n^{n-k}$. 前面说过

$$C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$$

的母函数是$(1+x)^n$. 那么数列

$$C_n^n,C_n^{n-1},\cdots,C_n^0$$

的母函数又是什么? 按照定义,它的母函数是

$$\begin{aligned}&C_n^n+C_n^{n-1}x+\cdots+C_n^{n-k}x^k+\cdots+C_n^0x^n\\&=x^n\left(C_n^n\frac{1}{x^n}+C_n^{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+C_n^0\right)\\&=x^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=(1+x)^n\end{aligned}$$

这说明二者具有相同的母函数,因而这两个数列也是相同的,即 $C_n^k=C_n^{n-k}$,$k=0,1,\cdots,n$.

从上面的证明过程可以看出,应用母函数来证明组合恒等式的基本思想是证明恒等式两端的数列具有相同的母函数.

**【例 20】** 证明$\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$.

**证** 因为$(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k$,所以

$$(1+x)^{2n}=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k\right)$$

这个乘积中 $x^n$ 的系数为

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$$

但从展开式$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$ 知道$x^n$ 的系数为$C_{2n}^n$ 因而得

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

**【例 21】** 证明

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}, & \text{如果 } n \text{ 是偶数} \\ 0, & \text{如果 } n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

**证** 根据二项式定理得

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2k} \tag{2.15}$$

另一方面

$$(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k\right) \tag{2.16}$$

比较(2.15),(2.16) 中 $x^{2r}$ 的系数得

$$\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_n^k C_n^{2r-k} = (-1)^r C_n^r \tag{2.17}$$

比较 $x^{2r+1}$ 的系数得

$$\sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_n^k C_n^{2r+1-k} = 0 \tag{2.18}$$

如果 $n$ 是偶数,在(2.17) 中取 $r = \frac{n}{2}$ 就得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2 = (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}$$

如果 $n$ 是奇数，在(2.18)中取 $r=\frac{n-1}{2}$ 得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}(C_{n}^{k})^{2}=0$$

这就是要证明的结果.

这个恒等式也可分成下面两个来写：

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}(C_{2n}^{k})^{2}=(-1)^{n}C_{2n}^{n}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{k}(C_{2n+1}^{k})^{2}=0$$

**【例 22】** 证明 $\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q}=C_{p+q+n+1}^{p+q+1}$ (2.19)

**证** 由例 17 知道，

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{p+k}^{p}x^{k},\quad \frac{1}{(1-x)^{q+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{q+k}^{q}x^{k}$$

所以

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}\frac{1}{(1-x)^{q+1}}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{p+k}^{p}x^{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{q+k}^{q}x^{k}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q}\right)x^{n}\qquad(2.20)$$

另一方面

$$\frac{1}{(1-x)^{p+q+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{p+q+n+1}^{p+q+1}x^{n}\qquad(2.21)$$

比较(2.20)和(2.21)即得(2.19).

**【例 23】** 证明 $\sum_{k=0}^{q}C_{n}^{k}C_{m}^{q-k}=C_{m+n}^{q}$. (2.22)

**证** 证明很简单，因为 $\{C_{n}^{k}\}$，$\{C_{m}^{k}\}$ 的母函数分别为

$(1+x)^n$ 和 $(1+x)^m$，而 $\sum\limits_{k=0}^{q} C_n^k C_m^{q-k}$ 是这两个母函数乘积 $(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{m+n}$ 的 $x^q$ 的系数，而 $(1+x)^{m+n}$ 的 $x^q$ 的系数是 $C_{m+n}^q$，因而两者相等，即(2.22)成立.

(2.22)称为范德蒙公式.它在证明某些恒等式时很有用，它的主要作用是把 $C_{m+n}^q$ 分解成一个和式，使证明得以简化.

**【例 24】** 证明 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_{m+k}^q=(-1)^n C_m^{q-n}$.

**证** 利用范德蒙公式把 $C_{m+k}^q$ 分解为

$$C_{m+k}^q=\sum_{l=0}^{q} C_k^l C_m^{q-l}$$

利用例 5 的结果得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_{m+k}^q=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \sum_{l=0}^{q} C_k^l C_m^{q-l}$$

$$=\sum_{l=0}^{q} C_m^{q-l} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_k^l=\sum_{l=0}^{q} C_m^{q-l} \sum_{k=l}^{n}(-1)^k C_n^k C_k^l$$

$$=\sum_{l=0}^{q} C_m^{q-l}(-1)^l \delta_{ln}=(-1)^n C_m^{q-n}$$

**【例 25】** 证明 $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}=2^{2n}$.

**证** 由(2.13)知道

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^k x^k$$

两边平方得

$$\frac{1}{1-4x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}\right)x^n$$

另一方面 $\frac{1}{1-4x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(4x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{2n}x^n$，比较两边 $x^n$ 的系数，即得所要证的等式.

在例 9 中我们证明了恒等式(1.9)

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l 2^{2n-2l}C_{2n-l+1}^{l}=n+1$$

作指标变换 $n-l=k$，上式可写为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}C_{n+k+1}^{2k+1}=n+1 \qquad (2.23)$$

(1.9) 和 (2.23) 是等价的. 现在用母函数的思想来证明 (2.23). 为此命

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(2-x)^{n+k+1}x^k$$

我们来研究 $f(x)$ 中 $x^n$ 的系数. 首先，由二项式定理，

$$(2-x)^{n+k+1}=\sum_{l=0}^{n+k+1}C_{n+k+1}^{l}2^l(-x)^{n+k+1-l}$$

$$(2-x)^{n+k+1}x^k=\sum_{l=0}^{n+k+1}C_{n+k+1}^{l}2^l(-1)^{n+k+1-l}x^{n+2k+1-l}$$

在这个和式中，只有当 $l=2k+1$ 时才出现 $x^n$ 的项

$$C_{n+k+1}^{2k+1}2^{2k+1}(-1)^{n-k}x^n$$

所以 $f(x)$ 中 $x^n$ 的系数为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k+1}C_{n+k+1}^{2k+1}=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}C_{n+k+1}^{2k+1}$$

另一方面，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(2-x)^{n+k+1}x^k=(2-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2x-x^2)^k$$
$$=(2-x)^{n+1}\frac{1-(2x-x^2)^{n+1}}{1-2x+x^2}$$

$$=\frac{(2-x)^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{x^{n+1}(2-x)^{2(n+1)}}{(1-x)^2} \tag{2.24}$$

先看第一项,因为

$$(2-x)^{n+1}=[1+(1-x)]^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k(1-x)^k$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{(2-x)^{n+1}}{(1-x)^2}&=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k(1-x)^{k-2}\\&=C_{n+1}^0(1-x)^{-2}+C_{n+1}^1(1-x)^{-1}+C_{n+1}^2\\&\quad+C_{n+1}^3(1-x)+\cdots+C_{n+1}^{n+1}(1-x)^{n-1}\end{aligned}$$

显然,上面的和式从第三项起都不能产生 $x^n$ 的项,而第一项 $x^n$ 的系数是 $n+1$,第二项 $x^n$ 的系数也是 $n+1$. 这说明 $\frac{(2-x)^{n+1}}{(1-x)^2}$ 中 $x^n$ 的系数是 $2(n+1)$. 用同样的方法不难证明(2.24)的第二项中不含 $x^n$ 的项. 因而 $f(x)$ 中 $x^n$ 的系数是 $2(n+1)$. 由此即得(2.23).

这个证明的困难之处在于构造与问题相适应的函数 $f(x)$,上面的例子提供了一种构造方法.

用母函数方法证明组合恒等式的另一种想法是这样的:把恒等式的某一端看成一个数列 $\{a_n\}$,设法算出 $\{a_n\}$ 所对应的母函数 $f(x)$,再把 $f(x)$ 展开成形式幂级数,它的 $x^n$ 项的系数就是 $a_n$ 的值. 下面先看一个例子.

**【例 26】** 计算 $\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_{n-k}^k$, 这里 $[x]$ 表示 $x$ 的整数部分.

**解** 记 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_{n-k}^k$, 我们设法求出 $a_n$ 所对应的母函

数. 先证明 $a_n$ 满足下面的递推关系：

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\quad n=2,3\cdots \tag{2.25}$$

设 $n$ 为偶数，$n=2m$，则 $\left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[\frac{n-2}{2}\right]=m-1$. 利用基本恒等式(1.2)，$a_n$ 可写为

$$a_n=\sum_{k=0}^{m}C_{2m-k}^{k}=C_{2m}^{0}+\sum_{k=1}^{m-1}C_{2m-k-1}^{k}+\sum_{k=1}^{m-1}C_{2m-k-1}^{k-1}+C_{m}^{m} \tag{2.26}$$

(2.26) 的前两项的和为

$$\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m-k-1}^{k}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-1-k}^{k}=a_{n-1}$$

后两项的和为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-1}C_{2m-k-1}^{k-1}+C_{m-1}^{m-1}&=\sum_{l=0}^{m-2}C_{2m-l-2}^{l}+C_{m-1}^{m-1}=\sum_{l=0}^{m-1}C_{2m-l-2}^{l}\\&=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}C_{n-2-l}^{l}=a_{n-2}\end{aligned}$$

代入(2.26)即知(2.25)成立. $n$ 为奇数的情形也可同样证明. 从 $a_n$ 的表达式可以直接看出 $a_0=a_1=1$. 设 $a_n$ 的母函数为 $f(x)$，则有

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots\\-xf(x)&=\quad -a_0x-a_1x^2-\cdots-a_{n-1}x^n-\cdots\\-x^2f(x)&=\qquad\qquad -a_0x^2-\cdots-a_{n-2}x^n-\cdots\end{aligned}$$

把这三个式子加起来，注意到 $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$ 以及 $a_0=a_1=1$，得

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)f(x)&=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1-a_0)x^2+\cdots\\&\quad+(a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^n+\cdots=1\end{aligned}$$

因而有

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$$

这就是数列$\{a_n\}$的母函数. 剩下的问题是把它展开为形式幂级数. 容易验证,

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{x-r_1}-\frac{1}{x-r_2}\right) \qquad (2.27)$$

其中 $r_1, r_2$ 是二次方程 $1-x-x^2=0$ 的两个根:

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

把(2.27)改写为

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{r_2-r_1}\left[\frac{1}{r_2\left(1-\frac{1}{r_2}x\right)}-\frac{1}{r_1\left(1-\frac{1}{r_1}x\right)}\right]$$

从(2.7)可得

$$\frac{1}{1-\frac{1}{r_2}x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_2^n}x^n, \quad \frac{1}{1-\frac{1}{r_1}x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_1^n}x^n$$

代入上式得

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right)\right\}x^n$$

由此即得

$$a_n=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right)=\frac{1}{(r_1r_2)^{n+1}}\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_2-r_1} \qquad (2.28)$$

但 $r_1r_2=-1, r_2-r_1=-\sqrt{5}$,而

$$r_1^{n+1}-r_2^{n+1}=(-1)^{n+1}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

代入(2.28),就得下面的恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad (2.29)$$

这就是要算的结果.

这样一个恒等式用其他方法是不易得到的.

现在可以进一步推广我们的结果.

**【例 27】** 计算$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} r^{k}$.

**解** 记$b_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} r^{k}$,容易看出$b_0 = b_1 = 1$,用和例26相同的办法,可以证明

$$b_n = b_{n-1} + rb_{n-2}, \quad n=2,3,\cdots$$

设$\{b_n\}$的母函数是$g(x)$,那么

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

$$-xg(x) = -b_0 x - b_1 x^2 - \cdots - b_{n-1} x^n - \cdots$$

$$-rx^2 g(x) = -rb_0 x^2 - \cdots - rb_{n-2} x^n - \cdots$$

三式相加得$(1-x-rx^2)g(x)=1$,这里我们已经利用了$b_n$的递推关系式以及条件$b_0=b_1=1$. 于是

$$g(x) = \frac{1}{1-x-rx^2}$$

用和例26同样的方法把它展开成形式幂级数即得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} r^{k} = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{1+4r}}\{(1+\sqrt{1+4r})^{n+1} - (1-\sqrt{1+4r})^{n+1}\} \quad (2.30)$$

当 $r=1$ 时，从(2.30)就得到(2.29). 在(2.30)中分别取 $r=2$ 和 $r=6$，就分别得到

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-k}^{k} 2^{k} = \frac{1}{3}(2^{n+1}+(-1)^{n}) \tag{2.31}$$

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-k}^{k} 6^{k} = \frac{1}{5}(3^{n+1}+(-1)^{n}2^{n+1}) \tag{2.32}$$

在(2.30)中取 $r=-1$，这时(2.30)的右端等于

$$\frac{1}{\sqrt{3}\mathrm{i}}\left\{\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}\mathrm{i}}\left\{\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}-\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n+1}{3}\pi$$

最后一个等式利用了棣莫佛公式. 这样从(2.30)又得到一个新的组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^{k} C_{n-k}^{k} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n+1}{3}\pi \tag{2.33}$$

**【例 28】** 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k)(C_n^{k+1}+C_n^{k+2}+\cdots+C_n^n)=\frac{n}{2}C_{2n}^{n} \tag{2.34}$$

**证** 记(2.34)的左端为 $a_{n-1}$，$d_k=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k$，则

$$C_n^{k+1}+C_n^{k+2}+\cdots+C_n^n=C_n^{n-k-1}+C_n^{n-k-2}+\cdots+C_n^0=d_{n-k-1}$$

于是 $a_{n-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}d_k d_{n-k-1}$. 如果 $d_k$ 的母函数是 $f(x)$，即 $f(x)=$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k x^k$，那么根据形式幂级数的乘法规则，

$$f^2(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{l} d_k d_{l-k}\right)x^l$$

由此可见 $a_{n-1}$ 是 $f^2(x)$ 的展开式中 $x^{n-1}$ 的系数.

因为 $C_n^0, C_n^1, \cdots$ 的母函数是 $(1+x)^n$，由例 14 知道

$$C_n^0, C_n^0 + C_n^1, C_n^0 + C_n^1 + C_n^2, \cdots$$

的母函数是 $(1+x)^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{(1+x)^n}{1-x}$；即 $d_k$ 的母函数

$$f(x) = \frac{(1+x)^n}{1-x}$$

而 $a_{n-1}$ 便是 $f^2(x) = \dfrac{(1+x)^{2n}}{(1-x)^2}$ 展开式中 $x^{n-1}$ 的系数.

由例 17 知道，

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

而 $(1+x)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$，因而

$$\frac{(1+x)^{2n}}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} C_{2n}^l (k-l+1)\right)x^k$$

所以 $x^{n-1}$ 的系数为

$$a_{n-1} = \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^l (n-l) \tag{2.35}$$

由例 2 和第 1 节的习题 11 知道

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}C_{2n}^n, \sum_{k=0}^{n} kC_{2n}^k = n2^{2n-1}$$

代入(2.35)即得

$$
\begin{aligned}
a_{n-1} &= n\sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^{l} - \sum_{l=0}^{n-1} lC_{2n}^{l} \\
&= n\left(\sum_{l=0}^{n} C_{2n}^{l} - C_{2n}^{n}\right) - \sum_{l=0}^{n} lC_{2n}^{l} + nC_{2n}^{n} \\
&= n\left(2^{2n-1} + \frac{1}{2}C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n}\right) - n2^{2n-1} + nC_{2n}^{n} \\
&= \frac{n}{2}C_{2n}^{n}
\end{aligned}
$$

这就是要证明的(2.34).

这个有趣的组合恒等式是由常庚哲和单墫首先提出并证明的，登载在 *SIAM Review*. 25(1983)No. 1 的问题和解答栏内.

作为练习，读者试用相同的方法计算下面的和

$$
\sum_{k=0}^{n-1} (C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^k C_n^k) \times ((-1)^{k+1} C_n^{k+1} + \cdots + (-1)^n C_n^n)
$$

上面三个例子都是把所求的和看成一个数列，求出它的母函数后，再从母函数的展开式得到要求的和. 这里的关键是找到它的母函数，而有时候这种母函数又是很难找到的. 下面的例子提供了又一种寻找母函数的方法.

**【例 29】** 计算$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1}$.

**解** 记$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1}$，它的母函数设为 $f(x)$，则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，这里假定 $a_0 = 0$. 为了求得 $f(x)$，我们引进另外一个和式

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k}$$

并记它的母函数为 $g(x)$，即 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. 利用基本恒等式(1.2) 可得

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1+k}^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k} + 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k} = a_n + b_n \tag{2.36}$$

$$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1+k}^{2k} + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+k}^{2k} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+k}^{2k-1} + 1$$

对上面最后一个和式作指标变换 $k = l+1$，于是

$$1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+k}^{2k-1} = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} C_{n+l+1}^{2l+1} = \sum_{l=0}^{n} C_{n+1+l}^{2l+1} = a_{n+1}$$

因而得

$$b_{n+1} = b_n + a_{n+1} \tag{2.37}$$

从(2.36)、(2.37) 两个递推公式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}$$

即

$$\begin{cases} f(x)=xf(x)+xg(x) \\ g(x)-1=xg(x)+f(x) \end{cases}$$

从这关于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的联立方程组可以解得

$$f(x)=\frac{x}{1-3x+x^2},\quad g(x)=\frac{1-x}{1-3x+x^2}$$

从上面的推导看出，在 $g(\boldsymbol{x})$ 的帮助下，我们才求得了 $f(\boldsymbol{x})$ 的表达式. 现在来求 $f(\boldsymbol{x})$ 的展开式.

容易知道 $x^2-3x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$，这里

$$\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

所以

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{x}{1-3x+x^2} \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{-\alpha}{x-\alpha}+\frac{\beta}{x-\beta}\right) \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha}}-\frac{1}{1-\dfrac{x}{\beta}}\right) \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}\right)x^n \end{aligned}$$

由此得

$$a_n=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}\right)=\frac{1}{\beta-\alpha}\,\frac{\beta^n-\alpha^n}{\alpha^n\beta^n}$$

由于 $\beta-\alpha=-\sqrt{5}$，$\alpha\beta=1$，所以

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

即

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+k}^{2k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \qquad (2.38)$$

这就是我们要算的值.

用同样的方法，把 $g(x)$ 展开就可得 $b_n$ 的值. 不过有一个

更简单的办法可算出

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k}$$

作指标变换 $k = n - l$,上式就变成

$$b_n = \sum_{l=0}^{n} C_{2n-l}^{2n-2l} = \sum_{l=0}^{n} C_{2n-l}^{l}$$

回想起我们在例 26 中已经算出

$$c_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

由此立刻得到

$$b_n = c_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right\} \quad (2.39)$$

## 习　题　二

证明下列恒等式:

1. $\sum_{k=0}^{m} C_{k+n-1}^{n-1} = C_{m+n}^{n}$.

2. $\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} C_n^k = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$.

3. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_m^k C_m^{2n-k} = (-1)^n C_m^n$.

4. $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k C_m^k = n C_{n+m-1}^{n}$.

5. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{m+k}^{q-k} = (-1)^n C_m^{q-n}$.

6. $\sum_{k=0}^{n} kC_{2k}^{k}C_{2n-2k}^{n-k} = n2^{2n-1}$.

7. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-2k}C_{2k}^{k}2^{2n-2k} = C_{2n}^{n}$.

8. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n}^{k}C_{m+n-k}^{m} = \begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m<n\end{cases}$

9. $\sum_{k=0}^{n-1}(C_{2n}^{2k+1})^{2} = \frac{1}{2}\{C_{4n}^{2n}+(-1)^{n-1}C_{2n}^{n}\}$.

10. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^{k}C_{n+1}^{k}C_{2n-2k}^{n} = n+1$.

11. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^{k}C_{n}^{k}C_{2n-2k}^{n} = 2^{n}$.

12. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^{2}(C_{n}^{k})^{2} = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$.

13. (i) 若 $r<n$,则

$$\sum_{k=q}^{r}(-1)^{k}C_{k}^{q}C_{n}^{r-k} = (-1)^{q}C_{n-q-1}^{r-q}$$

(ii) 若 $r \geqslant n$,且 $q \leqslant n-1$,则

$$\sum_{k=q}^{r}(-1)^{k}C_{k}^{q}C_{n}^{r-k} = 0.$$

14. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}C_{2k}^{k}C_{4n-2k}^{2n-k} = 2^{2n}C_{2n}^{n}$.

15. $\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{k}C_{2k}^{k}C_{4n+2-2k}^{2n+1-k} = 0$.

16. $\sum_{k=0}^{n}C_{2n-2k}^{n-k}C_{2k}^{k}\frac{1}{2k-1} = 0, n=1,2,\cdots$

17. $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_{n+k}^{2k} = \dfrac{2^{2n+1}+1}{3}$.

18. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^k C_n^k)((-1)^{k+1} C_n^{k+1}$
$+ \cdots + (-1)^n C_n^n) = -C_{2n-2}^{n-1}$.

# 3　组合变换的互逆公式

组合变换的互逆公式是计算由组合数构成的和式，和发现新的组合恒等式的重要工具.

设$\{a_n\}$是一个给定的数列. 命

$$b_k=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l C_k^l a_l, k=0,1,2,\cdots \tag{3.1}$$

则公式(3.1)把数列$\{a_n\}$变换成一个新数列$\{b_n\}$. 如果把数列$\{b_n\}$再经过(3.1)变换一次，所得结果如何?

为了讨论这一问题，先说明一个求和公式. 设$\{x_{kl}\}$是一个和两个指标有关的数列，考虑下面这些数的和:

$$\begin{array}{l} x_{00} \\ +x_{10}+x_{11} \\ +x_{20}+x_{21}+x_{22} \\ +x_{30}+x_{31}+x_{32}+x_{33} \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +x_{n0}+x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nn} \end{array}$$

每一行的和可写成$\sum_{l=0}^{k}x_{kl}$, $k=0,1,\cdots,n$, 再把$n+1$行的和加起来得表中所有数的和

$$S=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}x_{kl}$$

当然 $S$ 也可用另一种办法写出来：先把每一列的和写出来得 $\sum_{k=l}^{n} x_{kl}$，$l = 0,1,\cdots,n$，再把 $n+1$ 列的和加起来得

$$S = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} x_{kl}$$

因而得求和公式.

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} x_{kl} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} x_{kl} \tag{3.2}$$

现在回到原来的问题。把 $\{b_n\}$ 经(3.1) 再变换一次，可得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left( \sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l a_l \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k+l} C_n^k C_k^l a_l$$

记 $x_{kl} = (-1)^{k+l} C_n^k C_k^l a_l$，利用求和公式(3.2) 和例 5 的恒等式得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b_k = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} (-1)^{k+l} C_n^k C_k^l a_l$$
$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l a_l \sum_{k=l}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^l$$
$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l a_l (-1)^l \delta_{ln} = \sum_{l=0}^{n} a_l \delta_{ln} = a_n$$

上面的推导说明，把 $\{a_n\}$ 经变换(3.1) 变为 $\{b_n\}$，若把 $\{b_n\}$ 再经变换(3.1) 变换一次，则又回到了原来的 $\{a_n\}$.

我们得到了下面的

**定理 1** 设 $\{a_n\}$ 是一个给定的数列，如果

$$b_k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l a_l, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{3.1}$$

那么

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k b_k, \quad n = 0,1,2,\cdots \qquad (3.3)$$

(3.1)和(3.3)称为一对组合变换的互逆公式.

这对互逆公式的作用是可以由一个组合恒等式产生一个新的组合恒等式.

**【例 30】** 证明恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{n} \qquad (3.4)$$

**证** 直接证明这个恒等式是比较困难的. 在例 8 中我们已经证明了

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad (1.8)$$

如果命 $a_0 = 0, a_k = -\frac{1}{k}, k = 1,2,\cdots; b_0 = 0, b_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, n = 1,2,\cdots$ 那么(1.8) 便可写为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_k = b_n, \quad n = 0,1,\cdots$$

根据组合变换的互逆公式,立刻得

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k b_k, \quad n = 0,1,\cdots$$

把 $a_n, b_n$ 的表达式代入上式,就得到要证明的恒等式(3.4).

**【例 31】** 证明 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (C_{m+k}^k)^{-1} = \frac{m}{m+n}$. $\qquad$ (3.5)

**证** 直接证明这个等式比较困难. 根据组合变换的互逆公式,如果能证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k} = (C_{m+n}^{m})^{-1} \tag{3.6}$$

那么(3.5)便成立.实际上,我们在例7中已经证明(3.6)成立,因而根据定理1,(3.5)成立.

上面两个例子充分说明了组合变换的互逆公式在推导组合恒等式时的作用:从一个较简单的恒等式可以导出一个较复杂的恒等式.

现在来推广例30的结果.

**【例32】** 证明

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^k}{k}\right)=\frac{-1}{n}[1-(1-x)^n] \tag{3.7}$$

**证** 显然,当$x=1$时,从(3.7)就得到(3.4).根据定理1,要证明(3.7),只要证明

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k \frac{1}{k}[1-(1-x)^k] = x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n} \tag{3.8}$$

就行了.(3.8)的左端可以写为

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k \frac{1}{k}(1-x)^k = \alpha_n - \beta_n \tag{3.9}$$

从例8已知$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.再用证明例8的方法来计算$\beta_n$.由于

$$\frac{1}{k}C_n^k = \frac{1}{k}(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) = \frac{1}{k}C_{n-1}^k + \frac{1}{n}C_n^k$$

所以

$$\beta_n=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}C_n^k\frac{1}{k}(1-x)^k+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(1-x)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k(1-x)^k$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k(1-x)^k$$

$$=\beta_{n-1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k(1-x)^k$$

由二项式定理，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k(1-x)^k=(1-(1-x))^n=x^n$$

因而得 $\beta_n$ 的递推关系

$$\beta_n=\beta_{n-1}+\frac{1}{n}(1-x^n)$$

$$=\beta_{n-2}+\frac{1}{n-1}(1-x^{n-1})+\frac{1}{n}(1-x^n)=\cdots$$

$$=\beta_1+\frac{1}{2}(1-x^2)+\cdots+\frac{1}{n}(1-x^n)$$

$$=1-x+\frac{1}{2}(1-x^2)+\cdots+\frac{1}{n}(1-x^n)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)$$

把 $\alpha_n$ 和 $\beta_n$ 的值代入(3.9)就得到(3.8). 证明完毕.

在(3.7)中命 $x=2$，就得到下面的恒等式：

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k\left(2+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^k}{k}\right)=-\frac{1}{n}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, & n=\text{偶数}\\ -\dfrac{2}{n}, & n=\text{奇数}\end{cases}$$

用证明定理 1 的方法还可导出另一组互逆公式.

**定理 2** 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是两个给定的数列,则下面两个等式等价

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+p}^{k+p} b_k \tag{3.10}$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+p}^{k+p} a_k \tag{3.11}$$

式中 $p$ 是任意的非负整数.

所谓(3.10)和(3.11)等价,是指如果(3.10)成立,则(3.11)也成立,反之也然.

**证** 如果(3.10)成立,我们验证(3.11)也成立. 把 $a_k$ 的表达式代入(3.11)的右端得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+p}^{k+p} a_k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k+l} C_{n+p}^{k+p} C_{k+p}^{l+p} b_l$$

$$=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l b_l \sum_{k=l}^{n}(-1)^k C_{n+p}^{k+p} C_{k+p}^{l+p} \tag{3.12}$$

由于

$$C_{n+p}^{k+p} C_{k+p}^{l+p}=\frac{(n+p)!}{(k+p)!(n-k)!}\frac{(k+p)!}{(l+p)!(k-l)!}$$

$$=\frac{(n+p)!}{n!}\frac{l!}{(l+p)!}C_n^k C_k^l$$

把它代入(3.12)并应用例 5 的等式,即得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+p}^{k+p} a_k$$

$$=\frac{(n+p)!}{n!}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}b_{l}\frac{l!}{(l+p)!}\sum_{k=l}^{n}(-1)^{k}C_{n}^{k}C_{k}^{l}$$

$$=\frac{(n+p)!}{n!}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}b_{l}\frac{l!}{(l+p)!}\delta_{ln}(-1)^{l}$$

$$=\frac{(n+p)!}{n!}\frac{n!}{(n+p)!}b_{n}$$

$$=b_{n}$$

这就是(3.11).用同样的方法可以从(3.11)推出(3.10).

作为定理2的应用,我们证明下面的恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n}C_{n+p}^{k+p}x^{k}=\sum_{k=0}^{n}C_{p+k-1}^{k}(1+x)^{n-k},\quad p=1,2,\cdots \tag{3.13}$$

在(3.10),(3.11)这组互逆公式中,取 $b_k=(-1)^k\alpha^k$,并

记 $a_n(\alpha,p)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n+p}^{k+p}\alpha^k$,于是从(3.11)即得

$$\alpha^{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_{n+p}^{k+p}a_{k}(\alpha,p)$$

记 $a_n(\alpha,p)$ 的母函数为 $f(\alpha,p,x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\alpha,p)x^n$.由于

$$a_{n}(\alpha,p)=\sum_{k=0}^{n}C_{n+p}^{k+p}\alpha^{k}=\sum_{k=0}^{n}C_{n+p-1}^{k+p}\alpha^{k}+\sum_{k=0}^{n}C_{n+p-1}^{k+p-1}\alpha^{k}$$
$$=a_{n}(\alpha,p-1)+a_{n-1}(\alpha,p)$$

所以

$$(1-x)f(\alpha,p,x)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(\alpha,p)x^{n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(\alpha,p)x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(\alpha,p)x^{n+1}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}(\alpha,p)x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_{n-1}(\alpha,p))x^{n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(\alpha,p) - a_{n-1}(\alpha,p))x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha,p-1)x^n = f(\alpha,p-1,x)$$

由此不难得到

$$\begin{aligned}(1-x)^p f(\alpha,p,x) &= (1-x)^{p-1} f(\alpha,p-1,x)\\ &= (1-x)^{p-2} f(\alpha,p-2,x)\\ &= \cdots = f(\alpha,0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha,0)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1+\alpha)^n x^n = \frac{1}{1-(1+\alpha)x}\end{aligned}$$

于是得

$$f(\alpha,p,x) = \frac{1}{(1-x)^p}\frac{1}{1-(1+\alpha)x} \qquad (3.14)$$

从例 17 知道$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{p-1+n}^{n} x^n$. 再根据形式幂级数的乘法规则

$$\frac{1}{(1-x)^p}\frac{1}{1-(1+\alpha)x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_{p+k-1}^{k}(1+\alpha)^{n-k}\right)x^n$$

比较(3.14) 两端 $x^n$ 的系数，即得

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+p}^{k+p}\alpha^{p} = \sum_{k=0}^{n} C_{p+k-1}^{k}(1+\alpha)^{n-k}$$

这就是要证明的(3.13).

(3.13) 有一个有趣的应用. 在(3.13) 中取 $x=-1$，得一新恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n-p}^{k+p} = C_{p+n-1}^{n} \qquad (3.15)$$

这相当于在(3.10)中取 $b_k=1$，于是从(3.11)又得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+p}^{k+p} C_{p+k-1}^{k}=1 \tag{3.16}$$

这又是一个新的恒等式. 注意到

$$C_{n+p}^{k+p}C_{p+k-1}^{k}=\frac{(n+p)!}{(k+p)!(n-k)!}\,\frac{(p+k-1)!}{k!(p-1)!}$$

$$=C_n^k C_{n+p}^{n}\,\frac{p}{k+p}$$

把它代入(3.16)，又得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{p}{k+p}=(C_{n+p}^{n})^{-1}$$

这是我们在例 7 中已经证明过的恒等式.

定理 2 和定理 1 从本质上来说没有多大差别，因为定理 2 可由定理 1 导出. 下面的定理给出了一组新的互逆公式.

**定理 3** 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个数列，下面两个等式等价：

$$a_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^k b_{n-2k} \tag{3.17}$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} a_{n-2k} \tag{3.18}$$

**证** 我们就 $a_k=\alpha^k$ 的情形，由(3.18)来推导(3.17)，也就是说，假定

$$b_n(\alpha)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k}\alpha^{n-2k},\quad m=\left[\frac{n}{2}\right]$$

要证明

$$\alpha^n=\sum_{k=0}^{m} C_n^k b_{n-2k}(\alpha) \tag{3.19}$$

利用基本恒等式(1.3),可写

$$\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}=\left(1+\frac{k}{n-k}\right)C_{n-k}^{k}=C_{n-k}^{k}+C_{n-k-1}^{k-1}$$

于是

$$b_n(\alpha)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(C_{n-k}^{k}+C_{n-k-1}^{k-1})\alpha^{n-2k}$$

这里我们规定 $k$ 是负整数时 $C_n^k=0$. 由此得

$$\alpha b_{n-1}(\alpha)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(C_{n-1-k}^{k}+C_{n-2-k}^{k-1})\alpha^{n-2k}$$

此外

$$b_{n-2}(\alpha)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(C_{n-2-k}^{k}+C_{n-3-k}^{k-1})\alpha^{n-2-2k}$$

作指标变换 $k=l-1$ 得

$$b_{n-2}(\alpha)=\sum_{l=1}^{m+1}(-1)^{l-1}(C_{n-1-l}^{l-1}+C_{n-2-l}^{l-2})\alpha^{n-2l}$$

由于 $m\leqslant\frac{n}{2}<m+1$,即 $n-2<2m$. 故当 $l=m+1$ 时,

$$C_{n-1-l}^{l-1}=C_{n-m-2}^{m}=0,\quad C_{n-2-l}^{l-2}=C_{n-m-3}^{m-1}=0$$

于是

$$b_{n-2}(\alpha)=-\sum_{l=0}^{m}(-1)^l(C_{n-1-l}^{l-1}+C_{n-2-l}^{l-2})\alpha^{n-2l}$$

所以

$$\begin{aligned}&\alpha b_{n-1}(\alpha)-b_{n-2}(\alpha)\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(C_{n-1-k}^{k}+C_{n-2-k}^{k-1}+C_{n-1-k}^{k-1}+C_{n-2-k}^{k-2})\alpha^{n-2k}\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(C_{n-k}^{k}+C_{n-k-1}^{k-1})\alpha^{n-2k}=b_n(\alpha)\end{aligned}$$

或者

$$\alpha b_n(\alpha)=b_{n+1}(\alpha)+b_{n-1}(\alpha),\quad n=2,3,\cdots \tag{3.20}$$

此外容易看出

$$b_0(\alpha)=1,\ \alpha b_0(\alpha)=b_1(\alpha),\ \alpha b_1(\alpha)=b_2(\alpha)+2b_0(\alpha) \tag{3.21}$$

现在设 $b_n(\alpha)$的母函数为 $f(\alpha,x)$,即

$$f(\alpha,x)=b_0(\alpha)+b_1(\alpha)x+b_2(\alpha)x^2+\cdots+b_n(\alpha)x^n+\cdots$$

$$-\alpha xf(\alpha,x)=-\alpha b_0(\alpha)x-\alpha b_1(\alpha)x^2-\cdots-\alpha b_{n-1}(\alpha)x^n-\cdots$$

$$x^2f(\alpha,x)=b_0(\alpha)x^2+\cdots+b_{n-2}(\alpha)x^n+\cdots$$

三式相加,根据(3.20)和(3.21)可得

$$(1-\alpha x+x^2)f(\alpha,x)=1-x^2$$

或者

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}f(\alpha,x)=\frac{1+x^2}{1-\alpha x+x^2}=\frac{1}{1-\alpha x(1+x^2)^{-1}}$$

记 $z=x(1+x^2)^{-1}$,则

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}f(\alpha,x)=\frac{1}{1-\alpha z}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nz^n \tag{3.22}$$

另一方面,从 $z=\dfrac{x}{1+x^2}$,可以解得

$$x^2=\frac{x}{z}-1,x=\frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z} \tag{3.23}$$

于是

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{1+x^2}{1+x^2-2x^2}=\frac{1}{1-2xz}=\frac{1}{\sqrt{1-4z^2}}$$

记 $\beta_0(z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-4z^2}}=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$,那么

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}f(\alpha,x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\alpha)\beta_0(z)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\alpha)\beta_k(z)\quad(3.24)$$

这里 $\beta_k(z)=\beta_0(z)x^k$，由(3.23)的第一个式子可得

$$\beta_k(z)=\beta_0(z)x^{k-2}\left(\frac{x}{z}-1\right)=\frac{1}{z}\beta_0(z)x^{k-1}-\beta_0(z)x^{k-2}$$

$$=\frac{1}{z}\beta_{k-1}(z)-\beta_{k-2}(z),\quad k=2,3,\cdots\quad(3.25)$$

而

$$\beta_1(z)=\beta_0(z)x=\beta_0(z)\frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z}$$

$$=\frac{1}{2z}\beta_0(z)\left(1-\frac{1}{\beta_0(z)}\right)=\frac{1}{2z}(\beta_0(z)-1)$$

由例 19 已知

$$\beta_0(z)=(1-4z^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}^{n}z^{2n}\quad(3.26)$$

所以

$$\beta_1(z)=\frac{1}{2z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}^{k}z^{2k}-1\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}^{k}z^{2k-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+2}^{n+1}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+1}^{n}z^{2n+1}\quad(3.27)$$

从(3.26)、(3.27)并利用(3.25)的递推关系，应用数学归纳法，即可证得一般的

$$\beta_{2k}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}C_{2n}^{n-k}z^{2n},\ \beta_{2k+1}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}C_{2n+1}^{n-k}z^{2n+1}$$

把这些关系代入(3.24)得

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}f(\alpha,x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k}(\alpha)\beta_{2k}(z)+\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+1}(\alpha)\beta_{2k+1}(z)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}C_{2n}^{n-k}z^{2n}b_{2k}(\alpha) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}C_{2n+1}^{n-k}z^{2n+1}b_{2k+1}(\alpha)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{n-k}b_{2k}(\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty}z^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{n-k}b_{2k+1}(\alpha) \quad (3.28)$$

这里我们已经在 $n=\infty$ 的情况下使用了求和公式(3.2). 现在比较(3.22) 和(3.28) 中同次幂的系数得:

$$\alpha^{2n} = \sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{n-k}b_{2k}(\alpha) = \sum_{l=0}^{n}C_{2n}^{l}b_{2n-2l}(\alpha)$$

$$\alpha^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{n-k}b_{2k+1}(\alpha) = \sum_{l=0}^{n}C_{2n+1}^{l}b_{2n-2l-1}(\alpha)$$

这两式合起来就是(3.19). 证明完毕.

这个定理的证明有一定的难度，它充分利用了母函数这一工具. 当然，没有熟练的运算技巧，母函数方法是很难用上的.

现在看定理 3 的应用.

**【例 33】** 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}\alpha^{n-2k}$$

$$= \frac{1}{2^n}\{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4})^n + (\alpha-\sqrt{\alpha^2-4})^n\} \qquad (3.29)$$

**证** 在定理 3 的证明中,

$$b_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}\alpha^{n-2k},\ m=\left[\frac{n}{2}\right] \qquad (3.30)$$

这就是(3.29) 的左端. 已知 $b_n(\alpha)$ 的母函数为

$$f(\alpha,x)=\frac{1-x^2}{1-\alpha x+x^2}=\frac{2-\alpha x}{1-\alpha x+x^2}-1$$

$$=\frac{1}{1-px}+\frac{1}{1-qx}-1$$

这里 $p,q$ 满足 $1-\alpha x+x^2=(1-px)(1-qx)$，所以 $p+q=\alpha$，$pq=1$，而且

$$p=\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}),\quad q=\frac{1}{2}(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4})\qquad(3.31)$$

把$\frac{1}{1-px}$，$\frac{1}{1-qx}$展开成形式幂级数，便有

$$\begin{aligned}f(\alpha,x)&=\sum_{n=0}^{\infty}p^nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}q^nx^n-1\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(p^n+q^n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(\alpha)x^n\end{aligned}$$

比较 $x^n$ 的系数，即得

$$b_n(\alpha)=p^n+q^n,n=1,2,\cdots$$

把(3.30)和(3.31)代入上式即得(3.29)。证毕.

在(3.29)中取 $\alpha=2$，得恒等式

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}2^{n-2k}=2,\quad n=1,2,\cdots\qquad(3.32)$$

这个等式也可直接从(3.17)和(3.18)得到：在这组互逆公式中取 $a_k=2^k$，$k=0,1,2,\cdots$；$b_0=1$，$b_k=2$，$k=1,2,\cdots$. 容易证明这时(3.17)成立，因而(3.18)成立，这就是(3.32).

在(3.29)中取 $\alpha=1$，(3.29)的右端为

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n=2\cos\frac{n\pi}{3}$$

于是又得恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k \frac{n}{n-k}C_{n-k}^k = 2\cos\frac{n\pi}{3}, \quad n=1,2,\cdots \tag{3.33}$$

在互逆公式(3.17)和(3.18)中取$a_k=1, k=0,1,\cdots, b_0=1$, $b_k=2\cos\frac{k\pi}{3}, k=1,2,\cdots$ 则当 $n=2m+1$ 时，从(3.17)，(3.18)和(3.33)可得

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k b_{2m+1-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k 2\cos\frac{\pi}{3}(2m+1-2k)\end{aligned}$$

如果 $n=2m$，则有

$$1=\sum_{k=0}^{m} C_{2m}^k b_{2m-2k} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k 2\cos\frac{2m-2k}{3}\pi + C_{2m}^m$$

或者

$$1=2\sum_{k=0}^{m} C_{2m}^k \cos\frac{2m-2k}{3}\pi - C_{2m}^m$$

综上所述，我们得到等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^k \cos\frac{(n-2k)\pi}{3} = \begin{cases}\frac{1}{2}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2}(1+C_n^{\frac{n}{2}}), & n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

从(3.29)还可得到恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n-k}^k \frac{(2\cos x)^{n-2k}}{n-k} = \frac{2}{n}\cos nx$$

这个等式请读者自己证明.

根据上面的等式以及互逆公式(3.17)和(3.18)，还可得

到新的恒等式

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^k \cos(n-2k)x = \begin{cases} 2^{n-1}\cos^n x, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}\cos^n x + \frac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

从定理 3 还可推出一组新的互逆公式.

设 $\alpha_n$,$\beta_n$ 是满足(3.17),(3.18)的一对数列,即

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^k \beta_{n-2k}$$

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k \alpha_{n-2k}$$

命 $p_n = \frac{\alpha_n}{n}$,$q_n = \frac{\beta_n}{n}$,代入上式得

$$np_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^k (n-2k) q_{n-2k}$$

$$nq_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k (n-2k) p_{n-2k}$$

由于

$$\frac{n-2k}{n-k}C_{n-k}^k = \left(1-\frac{k}{n-k}\right)C_{n-k}^k = C_{n-k}^k - C_{n-k-1}^{k-1} = C_{n-k-1}^k$$

这里我们先用了基本恒等式(1.3),再用(1.2).

这一组等式可改写为

$$p_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^k \frac{n-2k}{n} q_{n-2k}$$

$$q_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k C_{n-k-1}^k p_{n-2k}$$

或者

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]} C_{n+1}^{k} \frac{n+1-2k}{n+1} q^{n+1-2k}$$

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]} (-1)^k C_{n-k}^{k} p_{n+1-2k}$$

由于

$$\frac{n+1-2k}{n+1} C_{n+1}^{k} = \left(1-\frac{2k}{n+1}\right) C_{n+1}^{k} = C_{n+1}^{k} - 2C_{n}^{k-1} = C_{n}^{k} - C_{n}^{k-1}$$

记 $p_{n+1}=a_n, q_{n+1}=b_n$，故这组等式就变为

$$a_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (C_n^k - C_n^{k-1}) b_{n-2k} \tag{3.35}$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k C_{n-k}^{k} a_{n-2k} \tag{3.36}$$

这是一组新的互逆公式，这里$[\frac{n+1}{2}]$换成$[\frac{n}{2}]$是因为当 $n=2m$ 时，$[\frac{n+1}{2}] = [\frac{n}{2}]$；当 $n = 2m+1$ 时，$[\frac{n+1}{2}] = m+1$，这时 $C_{n-(m+1)}^{m+1} = C_m^{m+1} = 0$，所以 $k = [\frac{n+1}{2}]$ 这项不出现.

**【例 34】** 证明 $\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(n+1-2k)^2}{n+1-k} C_n^k = 2^n.$ (3.37)

**证** 在例 9 中我们得到了一对恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n-k}^{k} 2^{2n-2k} = 2n+1 \tag{1.14}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1-k}^{k} 2^{2n+1-2k} = 2n+2 \tag{1.9}$$

在(3.36)中取 $a_n = 2^n$, $b_n = n+1$, 当 $n$ 取偶数时得到(1.14), 当 $n$ 取奇数时,得到(1.9). 这说明这样的一对 $a_n$, $b_n$ 使(3.36)成立,因而(3.35)也成立. 于是得

$$2^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(C_n^k - C_n^{k-1})(n+1-2k)$$

但

$$\begin{aligned} C_n^k - C_n^{k-1} &= C_n^k - (C_{n+1}^k - C_n^k) = 2C_n^k - C_{n+1}^{n+1-k} \\ &= 2C_n^k - \frac{n+1}{n+1-k}C_n^{n-k} = \frac{n+1-2k}{n+1-k}C_n^k \end{aligned}$$

代入上式便得(3.37).

作为这章的结尾,我们介绍用母函数构造互逆公式的一种方法.

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列,它们的母函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

如果有幂级数 $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 使得

$$f(x) = g(x)h(x)$$

那么 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 有下列关系

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k} \tag{3.38}$$

如果 $\frac{1}{h(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n$, 由于 $g(x) = f(x)\frac{1}{h(x)}$, 那么

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} c_k^* a_{n-k} \tag{3.39}$$

(3.38) 和(3.39) 便是一对互逆公式.

例如,取 $h(x)=\frac{1}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{p+n}^{n}x^{n}$,则

$$\frac{1}{h(x)}=(1-x)^{p+1}=\sum_{n=0}^{p+1}(-1)^{n}C_{p+1}^{n}x^{n}$$

由此就得如下一对互逆公式

$$a_{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^{k}b_{n-k},\ b_{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{p+1}^{k}a_{n-k} \tag{3.40}$$

组合变换的互逆公式在证明组合恒等式时有重要的作用,这在本章的例中已经充分体现出来.它的作用有两个方面:当一对等式中有一个已经被证明时,那么另外一个就是前一个的推论,无需再证明;当两个等式都未被证明,则可选择一个较为容易的来证.

本章介绍了下面五对互逆公式:

$$\begin{cases}a_{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n}^{k}b_{k}\\ b_{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n}^{k}a_{k}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n+p}^{k+p}b_{k}\\ b_{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n+p}^{k+p}a_{k}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{n}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_{n}^{k}b_{n-2k}\\ b_{n}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^{k}\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}a_{n-2k}\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (C_n^k - C_n^{k-1}) b_{n-2k} \\ b_n = \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n-k}^k a_{n-2k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{p-k}^k b_{n-k} \\ b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_{p+1}^k a_{n-k} \end{cases}$$

从它们得到了不少新的恒等式. 构造新的互逆公式是研究组合恒等式的一个重要内容,这里介绍的只是其中最基本的几个. 在第 6 节中我们还要介绍另外 3 个互逆公式.

## 习　题　三

证明下列恒等式:

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1} C_n^k [(1+x)^{k+1} - 1] = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1} C_n^k \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{k+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{2k} (C_{2k}^k)^{-1} = \dfrac{1}{1-2n}$.

4. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k k C_n^k C_{k+m-1}^k = (-1)^n n C_m^n$.

5. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k (C_{2k}^k)^{-1} 2^{2k} = \dfrac{1}{2n+1}$.

6. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \sum\limits_{l=1}^{k} \dfrac{1}{l} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{l}\right) = \dfrac{1}{n^2}$.

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{l+1}\right)=\frac{1}{(n+1)^3}$.

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^kC_{n-k}^k2^{n-2k}=n+1$.

9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^kC_{n-k}^k\frac{(2\cos x)^{n-2k}}{n-k}=\frac{2}{n}\cos nx$.

10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^k\cos(n-2k)x=\begin{cases}2^{n-1}\cos^n x, & n\text{ 为奇数},\\ 2^{n-1}\cos^n x+\frac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

# 4 差分方法

差分方法是证明某些组合恒等式时的有效方法. 先引进差分算子 $\Delta$.

设 $f(x)$为任一函数,定义差分算子 $\Delta$ 为

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$

称它为 $f$ 的一阶差分或 $f$ 的一阶差分在 $x$ 处的值. 例如 $\Delta f(0)=f(1)-f(0)$,$\Delta f(0)$就称为 $f$ 的一阶差分在 $x=0$ 处的值.

设 $\alpha$ 为任一常数,定义 $\alpha\Delta$ 为

$$(\alpha\Delta)f(x)=\alpha\Delta f(x)$$

定义 $\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))$,且一般定义

$$\Delta^n f(x)=\Delta(\Delta^{n-1}f(x)),(\alpha\Delta^n)f(x)=\alpha\Delta^n f(x)$$

设 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 是一个 $n$ 次多项式,定义 $p(\Delta)=a_0\mathrm{I}+a_1\Delta+\cdots+a_n\Delta^n$,这里 I 为恒等算子,定义为 $\mathrm{I}f(x)=f(x)$. $\Delta$ 的多项式 $p(\Delta)$对 $f(x)$的作用定义为

$$p(\Delta)f(x)=a_0f(x)+a_1\Delta f(x)+\cdots+a_n\Delta^n f(x)$$

定义算子 E 为 $\mathrm{E}f(x)=f(x+1)$,称为移位算子. 和 $\Delta$ 一样,定义 $\mathrm{E}^2f(x)=\mathrm{E}(\mathrm{E}f(x))$,$\mathrm{E}^nf(x)=\mathrm{E}(\mathrm{E}^{n-1}f(x))$.

容易看出

$$\mathrm{E}^2f(x)=\mathrm{E}(\mathrm{E}f(x))=\mathrm{E}(f(x+1))=f(x+2)$$

一般有 $E^n f(x)=f(x+n)$.

算子 $\Delta,I,E$ 的关系容易从下面的等式得到：

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=Ef(x)-If(x)=(E-I)f(x)$$

即 $\Delta=E-I,E=I+\Delta$. 由此可得

$$\begin{aligned}\Delta^n &= (E-I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-I)^k E^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k I^k E^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k E^k I^{n-k} \qquad (4.1)\end{aligned}$$

$\Delta^n$ 的这个表达式在讨论中十分有用.

从 $\Delta^2$ 的定义可以得到

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+1)-f(x)) \\ &= (f(x+2)-f(x+1))-(f(x+1)-f(x)) \\ &= f(x+2)-2f(x+1)+f(x)\end{aligned}$$

$\Delta^n f(x)$ 的一般表达式如何?

**定理 4** 设 $f(x)$ 为任一函数，那么

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x+n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x+k) \qquad (4.2)\end{aligned}$$

**证** 利用(4.1)中 $\Delta^n$ 的两种不同的表示，即得

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k E^{n-k} I^k\right) f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k E^{n-k} I^k f(x)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k E^{n-k} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x+n-k)$$

$$\Delta^n f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k E^k I^{n-k}\right) f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k E^k I^{n-k} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k f(x+k)$$

证明完毕.

特别,取 $x=0$ 或 $x=1$ 就得

$$\Delta^n f(0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(n-k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k f(k)$$

$$\Delta^n f(1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(1+n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k f(k+1)$$

**定理 5** 设 $f(x)$ 为任一函数,那么

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x) \tag{4.3}$$

**证** 把定理 4 的等式写为

$$(-1)^n \Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x+k)$$

在互逆公式(3.1)和(3.3)中取 $a_k = f(x+k)$,$b_k = (-1)^k \Delta^k f(x)$即得

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (-1)^k \Delta^k f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x)$$

这就是(4.3).

**【例 35】** 证明:当 $n>k$ 时,$\Delta^n x^k=0$,$\Delta^n x^n=n!$.

**证** 按照一阶差分的定义,

$$\begin{aligned}\Delta x^k&=(x+1)^k-x^k=1+C_k^1x+\cdots+C_k^{k-1}x^{k-1}+x^k-x^k\\&=kx^{k-1}+\cdots+kx+1\end{aligned}$$

这说明 $x^k$ 的一阶差分 $\Delta x^k$ 是一个 $k-1$ 次多项式,照此推论 $\Delta(\Delta x^k)=\Delta^2x^k$ 是一个 $k-2$ 次多项式,一直做下去,便知 $\Delta^k x^k$ 是一个常数,因而当 $n>k$ 时,$\Delta^n x^k=0$. 第二个式子容易用数学归纳法来证明. $n=1$ 时,$\Delta x=(x+1)-x=1$,等式成立. 现设 $\Delta^n x^n=n!$,于是

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}x^{n+1}&=\Delta^n(\Delta x^{n+1})=\Delta^n\{(x+1)^{n+1}-x^n\}\\&=\Delta^n\{(n+1)x^n+C_{n+1}^{n-1}x^{n-1}+\cdots+1\}\\&=(n+1)\Delta^n x^n=(n+1)!\end{aligned}$$

这里我们已经用了刚才证明的结论:

$$\Delta^n x^{n-1}=0,\Delta^n x^{n-2}=0,\cdots\Delta^n 1=0$$

证明完毕.

作为(4.2)的应用,我们证明下面的求和公式.

**定理 6** 设 $f(x)$是任一函数,则

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(k+1)=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}\Delta^k f(1) \tag{4.4}$$

**证** 由(4.2)得

$$\Delta^k f(1)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C_k^l f(l+1)$$

代入(4.4)的右端,并利用求和公式(3.2)得

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k-1} \Delta^k f(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l C_n^{k+l} f(l+1)$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l f(l+1) \sum_{k=l}^{n-1} (-1)^k C_n^{k+1} C_k^l$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l f(l+1) \sum_{k=l}^{n-1} (-1)^k \frac{n}{k+1} C_{n-1}^k C_k^l$$

根据第 1 节习题 9 的恒等式

$$\sum_{k=l}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k+1} C_{n-1}^k C_k^l = \frac{(-1)^l}{n}$$

上式变为

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k-1} \Delta^k f(1) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l f(l+1) n \cdot \frac{(-1)^l}{n}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} f(l+1)$$

这就是要证明的(4.4).

(4.4)是一个很有用的求和公式,用它可以得到自然数方幂和的计算公式.

例如,取 $f(x)=x^3$,则(4.4)的左端为自然数的立方和 $1^3+2^3+\cdots+n^3$,而右端是 $f(x)=x^3$ 的各阶差分在 $x=1$ 处的值乘以相应的组合数的和. 由例 35 知道,$\Delta^4 x^3=\Delta^5 x^3=\cdots=0$,故(4.4)的右端为

$$C_n^1 f(1)+C_n^2 \Delta f(1)+C_n^3 \Delta^2 f(1)+C_n^4 \Delta^3 f(1)$$

不难直接算出,此时 $\Delta f(1)=7$,$\Delta^2 f(1)=12$,$\Delta^3 f(1)=6$,于是得求立方和的公式

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=C_n^1+7C_n^2+12C_n^3+6C_n^4=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

这是大家熟知的公式.

这里应该提到的是如何简单地算出上述差分值.作下面的表:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(1)$ | | $f(2)$ | | $f(3)$ | | $f(4)$ |
| 1 | | 8 | | 27 | | 64 |
| | 7 | | 19 | | 37 | |
| | | 12 | | 18 | | |
| | | | 6 | | | |

表中左边斜行 1,7,12,6 便分别是 $f(1)$,$\Delta f(1)$,$\Delta^2 f(1)$,$\Delta^3 f(1)$.

**【例 36】** 求 $1^5+2^5+\cdots+n^5$.

**解** 在(4.4)中取 $f(x)=x^5$,则由(4.4)得

$$1^5+2^5+\cdots+n^5=C_n^1+C_n^2\Delta f(1)+C_n^3\Delta^2 f(1)+C_n^4\Delta^3 f(1)+C_n^5\Delta^4 f(1)+C_n^6\Delta^5 f(1)$$

从下面的表算得

$\Delta f(1)=31$,$\Delta^2 f(1)=180$,$\Delta^3 f(1)=390$,

$\Delta^4 f(1)=360$,$\Delta^5 f(1)=120$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(1)$ | | $f(2)$ | | $f(3)$ | | $f(4)$ | | $f(5)$ | | $f(6)$ |
| 1 | | 32 | | 243 | | 1024 | | 3125 | | 7776 |
| | 31 | | 211 | | 781 | | 2101 | | 4651 | |
| | | 180 | | 570 | | 1320 | | 2550 | | |
| | | | 390 | | 750 | | 1230 | | | |
| | | | | 360 | | 480 | | | | |
| | | | | | 120 | | | | | |

因而得求和公式

$$1^5+2^5+\cdots+n^5=C_n^1+31C_n^2+180C_n^3+390C_n^4+360C_n^5+120C_n^6$$

如果在(4.4)中取 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则得

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}\Delta^k f(1)$$

但由(4.2)和例3知

$$\Delta^k f(1)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C_k^l\frac{1}{1+l}=\frac{(-1)^k}{k+1}$$

代入上式得

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{C_n^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}C_n^k$$

这样，我们就再一次得到例8中已经得到的恒等式.

**【例37】** 证明

$$\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

**证** 在(4.4)中取 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，则有

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}\Delta^k f(1)$$

但由(4.2)和第1节的习题7知，

$$\begin{aligned}\Delta^k f(1)&=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C_k^l\frac{1}{(1+l)^2}\\&=\frac{(-1)^k}{k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)\end{aligned}$$

代入上式即得

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}\frac{(-1)^k}{k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

这就是要证明的.

利用定理 1 的互逆公式，从例 37 的等式可得一新的恒等式：

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

**【例 38】** 证明$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x+n-k)^n = n!$

**证** 在定理 4 中已经证明

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x+n-k)$$

在上式中取 $f(x)=x^n$，由例 35 知 $\Delta^n n^n = n!$，由此即得所要证的等式.

在上面的等式中特别取 $x=0$，得等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$$

或者

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^n = (-1)^n n!$$

**定理 7** 如果

$$f(n) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k g(k) \tag{4.6}$$

那么

$$\Delta^n f(0)=\sum_{k=0}^{m}C_m^k g(k+n) \tag{4.7}$$

反之,若(4.7)成立,则(4.6)也成立.

**证** 先设(4.7)成立,即

$$\begin{aligned}\Delta^n f(0)&=\sum_{k=0}^{m}C_m^k g(k+n)=\sum_{k=0}^{m}C_m^k \mathrm{E}^{k+n}g(0)\\&=\sum_{k=0}^{m}C_m^k \mathrm{E}^k\mathrm{E}^n g(0)=(\mathrm{I}+\mathrm{E})^m\mathrm{E}^n g(0)\\&=(-1)^n(\mathrm{I}+\mathrm{E})^m\{\mathrm{I}-(\mathrm{I}+\mathrm{E})\}^n g(0)\\&=(-1)^n(\mathrm{I}+\mathrm{E})^m\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(\mathrm{I}+\mathrm{E})^k g(0)\end{aligned}$$

或者

$$(-1)^n\Delta^n f(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\{(\mathrm{I}+\mathrm{E})^{m+k}g(0)\}$$

用定理1的互逆公式就得

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}+\mathrm{E})^{m+n}g(0)&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(-1)^k\Delta^k f(0)\\&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k f(0)=f(n)\end{aligned}$$

这里最后一个等式利用了定理5的(4.3).对上式左端应用二项式定理,即得

$$f(n)=\sum_{k=0}^{m+n}C_{m+n}^k\mathrm{E}^k g(0)=\sum_{k=0}^{m+n}C_{m+n}^k g(k)$$

这就是(4.6).

反之,设(4.6)成立,把(4.6)写成

$$f(n)=\sum_{k=0}^{m+n}C_{m+n}^k\mathrm{E}^k g(0)=(\mathrm{I}+\mathrm{E})^{m+n}g(0)$$

利用上式和(4.2)得

$$\begin{aligned}
\Delta^n f(0) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k(\mathrm{I}+\mathrm{E})^{m+k}g(0) \\
&= (-1)^n(\mathrm{I}+\mathrm{E})^m\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(\mathrm{I}+\mathrm{E})^k g(0) \\
&= (-1)^n(\mathrm{I}+\mathrm{E})^m(\mathrm{I}-(\mathrm{I}+\mathrm{E}))^n g(0) \\
&= (\mathrm{I}+\mathrm{E})^m\mathrm{E}^n g(0) \\
&= \sum_{k=0}^{m}C_m^k\mathrm{E}^k g(n) = \sum_{k=0}^{m}C_m^k g(k+n)
\end{aligned}$$

这就是(4.7).定理证毕.

如果在定理 7 中取 $m=0$,(4.6)和(4.7)分别变为 $f(n)=\sum_{k=0}^{m}C_n^k g(k)$ 和

$$g(n)=\Delta^n f(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k)$$

如果取 $a_k=(-1)^k g(k)$,$b_k=f(k)$,则上面两个等式变为

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_k,\ a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k b_k$$

这就是定理 1 的一对互逆公式.所以定理 7 是定理 1 的推广.

设$\{a_n\}$是一个给定的数列,差分算子 $\Delta$ 对数列$\{a_n\}$的作用定义为

$$\Delta a_0=a_1-a_0,\Delta a_1=a_2-a_1,\cdots,\Delta a_n=a_{n+1}-a_n,\cdots$$

称$\{\Delta a_n\}$为$\{a_n\}$的一阶差分数列.定义

$$\Delta^2 a_n=\Delta(\Delta a_n),\quad n=0,1,2\cdots$$

称它为$\{a_n\}$的二阶差分数列，一般地定义

$$\Delta^k(a_n)=\Delta(\Delta^{k-1}a_n),\quad n=0,1,\cdots$$

称它为$\{a_n\}$的$k$阶差分数列.

设$\{a_n\}$是一个给定的数列，如果它的$p$阶差分数列$\{\Delta^p a_n\}$不是零数列，而$p+1$阶差分数列$\{\Delta^{p+1}a_n\}$是零数列，就称$\{a_n\}$是一个$p$阶等差数列.

例如数列$\{a_n\}=\{2,4,6,8,\cdots\}$，它的一阶差分数列$\{\Delta a_n\}=\{2,2,2,\cdots\}$不是零数列，而它的二阶差分数列$\{\Delta^2 a_n\}=\{0,0,\cdots\}$是一个零数列，所以它是一阶等差数列，即普通的等差数列.

又如$\{a_n\}=\{n^3\}=\{0,1,8,27,64,125,216,\cdots\}$，则$\{\Delta a_n\}=\{1,7,19,37,61,91,\cdots\}$，$\{\Delta^2 a_n\}=\{6,12,18,24,30,\cdots\}$，$\{\Delta^3 a_n\}=\{6,6,6,6,\cdots\}$，$\{\Delta^4 a_n\}=\{0,0,0,\cdots\}$. 所以$\{n^3\}$是一个三阶等差数列.

**【例 39】** 数列$\{n^p\}$是$p$阶等差数列.

**证** 从例 35 知道，$\Delta^p n^p=p!$，所以$\{\Delta^p n^p\}$不是零数列，而$\Delta^{p+1}n^p=0$，因而$\{n^p\}$是$p$阶等差数列.

从例 39 可得下面的定理 8.

**定理 8** 设$P(x)=a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p$是一个$p$次多项式，则数列$\{P(n)\}$是一个$p$阶等差数列.

**证** 从例 35 容易得到

$$\begin{aligned}\Delta^p p(n)&=\Delta^p(a_0n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a^p)\\&=a_0\Delta^p n^p+a_1\Delta^p n^{p-1}+\cdots+\Delta^p a_p=a_0p!\end{aligned}$$

而$\Delta^{p+1}p(n)=0$，所以$\{p(n)\}$是$p$阶等差数列.

**【例 40】** 数列$\{C_{n-p}^{p}\}$是 $p$ 阶等差数列.

**证** 因为

$$C_{n+p}^{p}=\frac{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}{p!}$$

分子上共有 $p$ 个 $n$ 的因子相乘,因此它为 $n$ 的 $p$ 次多项式,而其分母是个与 $n$ 无关的常数,故 $C_{n+p}^{p}$ 是 $n$ 的 $p$ 次多项式,由定理 8 即知它是一个 $p$ 阶等差数列.

利用定理 5 可得下面的定理 9.

**定理 9** 设$\{a_n\}$是一个 $p$ 阶等差数列,那么

$$a_n=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k a_0, & \text{如果 } n\leqslant p\\ \sum\limits_{k=0}^{p}C_n^k\Delta^k a_0, & \text{如果 } n>p\end{cases}$$

**证** 定义函数 $f(x)$,使它满足

$$f(n)=a_n,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

于是由(4.3)得

$$a_n=f(n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k f(0)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k a_0$$

当 $n>p$ 时,由于 $\Delta^{p+1}a_0=\cdots=\Delta^n a_0=0$,所以

$$a_n=\sum_{k=0}^{p}C_n^k\Delta^k a_0+\sum_{k=p+1}^{n}C_n^k\Delta^k a_0=\sum_{k=0}^{p}C_n^k\Delta^k a_0$$

这就是要证明的.

从定理 8 和定理 9 可得下面的定理 10.

**定理 10** $\{a_n\}$是 $p$ 阶等差数列的充分必要条件是 $a_n$ 是 $n$ 的 $p$ 次多项式.

**证** 如果 $a_n$ 是 $n$ 的 $p$ 次多项式,则由定理 8 知 $a_n$ 是 $p$

阶等差数列，这就证明了定理的充分性. 反之，若 $a_n$ 是 $p$ 阶等差数列，则由定理 9 知 $a_n$ 是 $n$ 的 $p$ 次多项式. 定理证毕.

**定理 11** 若$\{a_n\}$和$\{b_n\}$分别为 $p$ 阶和 $q$ 阶等差数列，且 $p \geqslant q$，则

(i) $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$为 $p$ 阶等差数列，这里 $\alpha, \beta$ 为任意两个常数.

(ii) $\{a_n b_n\}$为 $p+q$ 阶等差数列.

**证** 由定理 10 知道，$a_n, b_n$ 分别为 $n$ 的 $p$ 次和 $q$ 次多项式，因为 $p \geqslant q$，因此 $\alpha a_n + \beta b_n$ 便是 $n$ 的 $p$ 次多项式，于是由定理 10 的充分性知道$\{\alpha a_n + \beta b_n\}$是 $p$ 阶等差数列，这就证明了(i). 同样道理，$a_n b_n$ 是 $n$ 的 $p+q$ 次多项式，所以$\{a_n b_n\}$是 $p+q$ 阶等差数列.

现在回到我们的主题上来，如果$\{a_n\}$是 $p$ 阶等差数列，如何计算下面两个和：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k C_n^k$$

**定理 12** 设$\{a_k\}$是一个 $p$ 阶等差数列，则

(i) 当 $n \geqslant p$ 时，有 $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k C_n^k = \sum\limits_{k=0}^{p} 2^{n-k} C_n^k \Delta^k a_0$，这里 $\Delta^k a_0$ 是$\{a_n\}$的 $k$ 阶差分数列的首项.

(ii) 当 $n > p$ 时，有 $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k C_n^k = 0$.

**证** (i) 由(4.3)得

$$a_k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \Delta^l a_0$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k = \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{l=0}^{k} C_k^l \Delta^l a_0 \right) C_n^k$$

利用(3.2)的求和公式和例 6 的恒等式得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k = \sum_{l=0}^{n} \Delta^l a_0 \sum_{k=l}^{n} C_n^k C_k^l = \sum_{l=0}^{n} 2^{n-l} C_n^l \Delta^l a_0$$

$$= \sum_{l=0}^{p} 2^{n-l} C_n^l \Delta^l a_0 + \sum_{l=p+1}^{n} 2^{n-l} C_n^l \Delta^l a_0$$

由于$\{a_k\}$是 $p$ 阶等差数列，所以

$$\Delta^{p+1} a_0 = \Delta^{p+2} a_0 = \cdots = \Delta^n a_0 = 0$$

$$\sum_{l=p+1}^{n} 2^{n-l} C_n^l \Delta^l a_0 = 0$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k = \sum_{l=0}^{p} 2^{n-l} C_n^l \Delta^l a_0$$

这就是要证明的(i).

(ii) 因为$\{a_k\}$是 $p$ 阶等差数列，且 $n > p$，故由(4.2)得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_k = (-1)^n \Delta^n a_0 = 0$$

定理证毕.

用这里的公式计算 $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$ 就很简单. 因为$\{k^2\}$是二阶等差数列，而且用例 36 中作表的方法可得 $a_0 = 0$，$\Delta a_0 = 1$，$\Delta^2 a_0 = 2$，于是从(i)可得

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = 2^{n-1} C_n^1 + 2 \times 2^{n-2} C_n^2 = 2^{n-2} n(n+1)$$

这是我们在例 4 中已经得到过的等式.

用同样的方法可以算得

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 C_n^k = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}\cdot 6C_n^2 + 2^{n-3}\cdot 6C_n^3$$
$$= 2^{n-3}n^2(n+3) \tag{4.8}$$

**【例 41】** 设$P(x)$是一个$p$次多项式,则当$n>p$时有等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(k) C_n^k = 0$$

**证** 因为$P(k)$是$k$的$p$次多项式,由定理10知道,$P(k)$是$p$阶等差数列,故由定理12的(ii)即知上式成立.

例41为定理12(ii)的应用.

**【例42】** 设$p_1,\cdots,p_r$是$r$个自然数,证明当$n>p_1+\cdots+p_r$时有等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{p_1+k}^{p_1}\cdots C_{p_r+k}^{p_r} C_n^k = 0 \tag{4.9}$$

**证** 由例40知道,$C_{p_1-k}^{p_1},\cdots,C_{p_r-k}^{p_r}$分别为$p_1,\cdots,p_r$阶等差数列.根据定理11的(ii),$C_{p_1+k}^{p_1}C_{p_2+k}^{p_2}\cdots C_{p_r+k}^{p_r}$为$p_1+p_2+\cdots+p_r$阶等差数列,再由定理12的(ii)知,当$n>p_1+\cdots+p_r$时,上式成立.

特别,当$p_1=\cdots=p_r=p$时,就得等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (C_{p+k}^{p})^r C_n^k = 0,\quad n>rp \tag{4.10}$$

## 习 题 四

证明下列恒等式:

1. $\Delta(f(x)g(x))=f(x+1)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x)$.

2. $\Delta^n(f(x)g(x))=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k f(x+n-k)\Delta^{n-k}g(x)$.

3. $\Delta^n x^{n+1}=(n+1)!\left(x+\frac{n}{2}\right)$.

4. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(x-k)^{n+1}=\left(x-\frac{n}{2}\right)(n+1)!$.

5. $\sum_{k=0}^{n}k^4=C_n^1+15C_n^2+50C_n^3+60C_n^4+24C_n^5$.

6. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{2k-1}C_n^k(C_{2k-2}^{k-1})^{-1}=4\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$.

7. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)=-\frac{2^{2n-2}}{2n-1}(C_{2n-2}^{n-1})^{-1}$.

8. $\sum_{k=0}^{n}k^4C_n^k=C_n^1 2^{n-1}+14C_n^2 2^{n-2}+36C_n^3 2^{n-3}+24C_n^4 2^{n-4}$.

9. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)^n C_{n+1}^{k+1}=0$.

10. $\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l C_k^l(l+1)^n=0$.

11. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_{m-2k}^{n-1}=0,\quad m\geqslant 2n$.

# 5 复数方法

应用复数的运算规则，有时可导出一些很有用的组合恒等式.

下面的讨论中，经常要用到 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 这种形状的复数，为方便起见，把它记为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta \tag{5.1}$$

根据复数的乘法规则，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)\\&=\cos(\theta+\psi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\psi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\psi)}\end{aligned}$$

所以对于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 可以像普通的指数函数那样进行运算，特别有 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

从(5.1)我们有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=2\cos\theta$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=2\mathrm{i}\sin\theta$$

这是两个经常要用到的公式.

这一章中，我们要给出下面四个和式

$$\sum_{k=0}^{n}a_kC_n^k\cos kx,\quad \sum_{k=0}^{n}a_kC_n^k\sin kx$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^ka_kC_n^k\cos kx,\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^ka_kC_n^k\sin kx$$

的计算公式，这里 $\{a_k\}$ 是一个 $p$ 阶等差数列.

我们先从推广上一节的定理 12 着手.

**定理 13** 设$\{a_k\}$是一个 $p$ 阶等差数列,那么

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{p} C_n^k \Delta^k a_0 x^k, n \geqslant p \quad (5.2)$$

**证** 利用第 1 节习题 20 的恒等式

$$\sum_{k=l}^{n} C_k^l C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = C_n^l x^l$$

和 $a_k$ 的表达式 $a_k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \Delta^l a_0$ ,即得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l \Delta^l a_0\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{l=0}^{n} \Delta^l a_0 \sum_{k=l}^{n} C_n^k C_k^l x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{l=0}^{n} C_n^l \Delta^l a_0 x^l = \sum_{l=0}^{p} C_n^l \Delta^l a_0 x^l\end{aligned}$$

这就是要证明的(5.2).

如果在(5.2)中命 $x=\frac{1}{2}$,就得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k = \sum_{k=0}^{p} 2^{n-k} C_n^k \Delta^k a_0$$

这是定理 12 中的(i).所以定理 13 是定理 12 的推广.

如果在(5.2)中取 $a_k=k$,这是一阶等差数列,$a_0=0$,$\Delta a_0=1$,于是得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx$$

如果在(5.2)中取 $a_k=k^2$,这时 $p=2$,而且 $a_0=0$,$\Delta a_0=1$,$\Delta^2 a_0=2$,所以有等式

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1+nx-x)$$

如果在上面的等式中取 $x=\frac{1}{3}$,又得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 2^{n-k} C_n^k = 3^{n-2} n(n+2)$$

从定理 13 可得

**定理 14** 设$\{a_k\}$是一个 $p$ 阶等差数列,则当 $n \geqslant p$ 时有等式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k t^k = \sum_{k=0}^{p} C_n^k t^k (1+t)^{n-k} \Delta^k a_0 \tag{5.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k C_n^k t^k = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \Delta^k a_0 \tag{5.4}$$

**证** 在等式(5.2)中,命$\frac{x}{1-x}=t$,则 $x=\frac{t}{1+t}$,于是

$$x^k(1-x)^{n-k}=\frac{t^k}{(1+t)^k}\frac{1}{(1+t)^{n-k}}=\frac{t^k}{(1+t)^n}$$

代入(5.2)即得

$$\frac{1}{(1+t)^n}\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k t^k = \sum_{k=0}^{p} C_n^k \Delta^k a_0 \left(\frac{t}{1+t}\right)^k$$

两端同乘以$(1+t)^n$ 即得(5.3). 在(5.3)中用$-t$ 代 $t$ 即得(5.4),定理证毕.

根据定理 14 就可导出本节开头提出的那四个和式的计算公式.

**定理 15** 设$\{a_k\}$是一个 $p$ 阶等差数列,则当 $n \geqslant p$ 时有等式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k \cos kx = \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{n-k} \cos\frac{n+k}{2} x \Delta^k a_0 \tag{5.5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k \sin kx = \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{n-k} \sin \frac{n+k}{2} x \Delta^k a_0 \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k C_n^k \cos kx \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \cos \frac{1}{2}[n(x+\pi)+k(x-\pi)] \\ &\quad \times \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{n-k} \Delta^k a_0\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k C_n^k \sin kx \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \sin \frac{1}{2}[n(x+\pi)+k(x-\pi)] \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{n-k} \\ &\quad \times \Delta^k a_0\end{aligned} \tag{5.8}$$

**证**　在(5.3)中命 $t=e^{ix}$，由于

$$1+t = 1+e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}) = 2e^{i\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}$$

把它代入(5.3)得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{p} C_n^k e^{ikx} 2^{n-k} e^{i(n-k)\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{n-k} \Delta^k a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} e^{i(n+k)\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{n-k} \Delta^k a_0\end{aligned}$$

注意到

$$e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$$

$$e^{i(n+k)\frac{x}{2}} = \cos(n+k)\frac{x}{2} + i\sin(n+k)\frac{x}{2}$$

把它们代入上式，并分别取两端的实部和虚部，就得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k \cos kx = \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \cos(n+k)\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{n-k}\Delta^k a_0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k \sin kx = \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \sin(n+k)\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{n-k}\Delta^k a_0$$

这就是(5.5)和(5.6).

同样,在(5.4)中命 $t=e^{ix}$,注意到

$$1-t=1-e^{ix}=-e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}})=-2ie^{i\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}$$

$$i^{n-k}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n-k}=e^{i\frac{n-k}{2}\pi}$$

把它们代入(5.4),即得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k C_n^k e^{ikx}$$

$$=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^k e^{ikx}(-1)^{n-k}2^{n-k}i^{n-k}e^{i\frac{n-k}{2}x}\times\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-k}\Delta^k a_0$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{p}C_n^k 2^{n-k}e^{ix\left(k+\frac{n-k}{2}\pi\right)}e^{i\frac{n-k}{2}\pi}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-k}\Delta^k a_0$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{p}C_n^k 2^{n-k}e^{\frac{i}{2}[n(x+\pi)+k(x-\pi)]}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-k}\Delta^k a_0$$

让等式两端的实部和虚部分别相等得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k C_n^k \cos kx$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{p}C_n^k 2^{n-k}\cos\frac{1}{2}[n(x+\pi)+k(x-\pi)]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-k}$$

$$\times\Delta^k a_0$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k C_n^k \sin kx$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{p}C_n^k2^{n-k}\sin\frac{1}{2}[n(x+\pi)+k(x-\pi)]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-k}$$
$$\times\Delta^k a_0$$

这就是(5.7)和(5.8).定理证毕.

如果在定理15的四个等式中取 $a_k=1,k=0,1,\cdots$,那么 $a_0=1,\Delta a_0=0,\Delta^2 a_0=0,\cdots$.因而得

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos kx=2^n\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n\cos\frac{n}{2}x \tag{5.9}$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin kx=2^n\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n\sin\frac{n}{2}x \tag{5.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\cos kx=(-1)^n2^n\cos\frac{n}{2}(x+\pi)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^n \tag{5.11}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\sin kx=(-1)^n2^n\sin\frac{n}{2}(x+\pi)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^n \tag{5.12}$$

如果取 $a_k=k$,那么 $a_0=0,\Delta a_0=1,\Delta^2 a_0=\cdots=0$,因而从(5.5),(5.6),(5.7),(5.8)又可得

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\cos kx=n2^{n-1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{n-1}\cos\frac{n+1}{2}x \tag{5.13}$$

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\sin kx=n2^{n-1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{n-1}\sin\frac{n+1}{2}x \tag{5.14}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kkC_n^k\cos kx$$
$$=(-1)^nn2^{n-1}\cos\frac{1}{2}[(n+1)x+(n-1)\pi]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-1} \tag{5.15}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kkC_n^k\sin kx$$
$$=(-1)^nn2^{n-1}\sin\frac{1}{2}[(n+1)x+(n-1)\pi]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-1} \tag{5.16}$$

如果再用定理 1 的互逆公式，那么从(5.9)—(5.16)这八个恒等式又可产生八个新的恒等式. 例如在(5.9)中命 $a_k=(-1)^k\cos kx$，则(5.9)可写成

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_k=2^n\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n\cos\frac{n}{2}x$$

于是根据定理 1 的互逆公式，就得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^k\left(\cos\frac{x}{2}\right)^k\cos\frac{k}{2}x=(-1)^n\cos nx \tag{5.17}$$

和(5.10)、(5.11)、(5.12)互逆的公式分别为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^k\left(\cos\frac{x}{2}\right)^k\sin\frac{k}{2}x=(-1)^n\sin nx \tag{5.18}$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^k\cos\frac{k}{2}(x+\pi)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^k=\cos nx \tag{5.19}$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^k\sin\frac{k}{2}(x+\pi)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^k=\sin nx \tag{5.20}$$

要直接证明这些恒等式是相当困难的.

在上面这些恒等式中取一些特殊的 $x$ 值，又可得到一系列有趣的组合恒等式. 例如在(5.19)中命 $x=\frac{\pi}{2}$ 得

$$\sum_{k=0}^{n}2^k C_n^k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k\cos\frac{3k\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{2}$$

注意到 $\cos\frac{3k\pi}{4}=(-1)^k\cos\frac{k\pi}{4}$，得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{\frac{k}{2}}C_n^k\cos\frac{k\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{2} \tag{5.21}$$

若在(5.20)中取 $x=\frac{\pi}{2}$，则得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}2^{\frac{k}{2}}C_n^k\sin\frac{k\pi}{4}=\sin\frac{n\pi}{2} \tag{5.22}$$

复数中的单位根在讨论某一类组合恒等式特别有用. 我们知道方程

$$z^m=1$$

有 $m$ 个根，它们是

$$z=\cos\frac{2k\pi}{m}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{m},\quad k=0,1,\cdots,m-1.$$

用我们现在的记号就是 $z=e^{\frac{2k\pi}{m}\mathrm{i}}$，$k=0,1,\cdots,m-1$. 称 $\omega_k=e^{\frac{2k\pi}{m}\mathrm{i}}(k=0,1,\cdots,m-1)$ 为 $m$ 次单位根. $\omega_k$ 有下列重要性质：设 $s$ 是任意的整数，那么

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^s=\begin{cases}m,\text{如果是 } s \text{ 是 } m \text{ 的倍数}\\0,\text{如果 } s \text{ 不是 } m \text{ 的倍数}\end{cases} \tag{5.23}$$

事实上，如果 $s$ 是 $m$ 的倍数，记 $s=qm$，$q$ 是整数，则

$$\omega_k^s=(e^{\frac{2k\pi}{m}\mathrm{i}})^s=e^{2kq\pi\mathrm{i}}=\cos 2kq\pi+\mathrm{i}\sin 2kq\pi=1$$

所以 $\sum\limits_{k=0}^{m-1}\omega_k^s=m$. 如果 $s$ 不是 $m$ 的倍数，那么

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^s=\sum_{k=0}^{m-1}(e^{\frac{2k\pi}{m}\mathrm{i}})^s=\sum_{k=0}^{m-1}(e^{\frac{2s\pi}{m}\mathrm{i}})^k=\frac{1-e^{2s\pi\mathrm{i}}}{1-e^{\frac{2s\pi}{m}\mathrm{i}}}=0$$

这就证明了(5.23).

**【例 43】** 证明

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}x^{r+km}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+x\omega_k)^n \tag{5.24}$$

式中 $\omega_k=e^{\frac{2k\pi}{m}i}$，$r,m$ 为非负数整数，且 $r\leqslant m$.

**证** 由二项式定理

$$(1+x\omega_k)^n=\sum_{l=0}^{n}C_n^l x^l \omega_k^l$$

于是(5.24)的右端为

$$\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+x\omega_k)^n=\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}\sum_{l=0}^{n}C_n^l x^l\omega_k^l$$
$$=\sum_{l=0}^{n}C_n^l x^l\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^{l-r}$$

根据(5.23)，当 $l-r=qm$ 时，$\sum\limits_{k=0}^{m-1}\omega_k^{l-r}=m$，当 $l-r\neq qm$ 时，$\sum\limits_{k=0}^{m-1}\omega_k^{l-r}=0$，因此上面的和式，只有当 $l=r+qm$ 时，对应的项才不为 0. 由于 $l=r+qm\leqslant n$，即 $q\leqslant\frac{n-r}{m}$，所以当 $l$ 从 0 变到 $n$ 时，$q$ 从 0 变到 $\left[\frac{n-r}{m}\right]$，于是得

$$\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+x\omega_k)^n=m\sum_{q=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+qm}x^{r+qm}$$

这就是要证明的(5.23).

**【例 44】** 证明当 $r\leqslant m$ 时，有

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m}\qquad(5.25)$$

**证** 在(5.24)中取 $x=1$ 得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+\omega_k)^n\qquad(5.26)$$

因为

$$
\begin{aligned}
(\omega_k)^{-r}(1+\omega_k)^n &= e^{\frac{-2rk\pi i}{m}}(1+e^{\frac{2k\pi i}{m}})^n \\
&= e^{\frac{-2rk\pi i}{m}} e^{\frac{kn\pi i}{m}}(e^{-\frac{k\pi i}{m}}+e^{\frac{k\pi i}{m}}) \\
&= e^{\frac{k\pi i}{m}(n-2r)} 2^n \left(\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n \\
&= \left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n \left(\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m}+i\sin\frac{(n-2r)k\pi}{m}\right)
\end{aligned}
$$

所以(5.26)的右端为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+\omega_k)^n \\
=&\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n\left\{\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m}+i\sin\frac{(n-2r)k\pi}{m}\right\}
\end{aligned}
$$

在(5.26)的两端取实部，即得

$$
\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]} C_n^{r+km} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m}
$$

这就是等式(5.25).

(5.25)给出了以一定的间隔连续变动的组合数的求和公式.

在(5.25)中取 $r=0,m=2$ 得

$$
\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} = 2^{n-1} \tag{5.27}
$$

取 $r=0,m=4$ 可得

$$
\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{4}\right]} C_n^{4k} = \frac{1}{4}\left(2^n+2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}\right) \tag{5.28}
$$

在上面的等式中，用 $4n$ 换 $n$ 又得

$$
\sum_{k=0}^{n} C_{4n}^{4k} = \frac{1}{4}(2^{4n}+(-1)^n 2^{2n+1}) \tag{5.29}
$$

此外,若在(5.25)中分别取 $r=1, m=3, r=2, m=3$,又可分别得恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} C_n^{1+3k}=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right) \tag{5.30}$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]} C_n^{2+3k}=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right) \tag{5.31}$$

若在(5.25)中取 $r=0, m=n$,则得恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)^n=\frac{n}{2^{n-1}} \tag{5.32}$$

**【例 45】** 证明下列恒等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]} C_n^{r+km}\cos(r+km)x$$

$$=\frac{2^n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\cos\left[\frac{nx}{2}+\frac{k\pi}{m}(n-2r)\right]\cos^n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right) \tag{5.33}$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]} C_n^{r+km}\sin(r+km)x$$

$$=\frac{2^n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sin\left[\frac{nx}{2}+\frac{k\pi}{m}(n-2r)\right]\cos^n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right) \tag{5.34}$$

**证** 在等式(5.24)的 $x$ 处用 $e^{ix}$ 代替就得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]} C_n^{r+km}e^{i(r+km)x}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}e^{-\frac{2kr\pi}{m}i}\left(1+e^{i\left(x+\frac{2k\pi}{m}\right)}\right)^n$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}e^{-\frac{2kr\pi}{m}i}e^{i\frac{n}{2}\left(x+\frac{2k\pi}{m}\right)}\left(e^{-\frac{i}{2}\left(x+\frac{2k\pi}{m}\right)}+e^{\frac{i}{2}\left(x+\frac{2k\pi}{m}\right)}\right)^n$$

$$=\frac{2^n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}e^{i\left[\frac{n}{2}\left(x+\frac{2k\pi}{m}\right)-\frac{2kr\pi}{m}\right]}\cos^n\frac{1}{2}\left(x+\frac{2k\pi}{m}\right)$$

让等式两边的实部、虚部分别相等得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}\cos(r+km)x$$

$$=\frac{2^n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\cos\left[\frac{nx}{2}+\frac{k\pi}{m}(n-2r)\right]\cos^n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}\sin(r+km)x$$

$$=\frac{2^n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sin\left[\frac{nx}{2}+\frac{k\pi}{m}(n-2r)\right]\cos^n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right)$$

这就是(5.33)和(5.34).

如果在上式中让 $r=0$,又可得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}C_n^{km}\cos kmx$$

$$=\frac{2^n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\cos n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right)\cos^n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right) \qquad (5.35)$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}C_n^{km}\sin kmx$$

$$=\frac{2^n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right)\cos^n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right) \qquad (5.36)$$

特别,如果取 $m=2$,则有

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}\cos 2kx$$

$$=2^{n-1}\left\{\cos\frac{nx}{2}\cos^n\frac{x}{2}+\cos n\frac{x+\pi}{2}\left(\cos\frac{x+\pi}{2}\right)^n\right\} \quad (5.37)$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k}\sin 2kx$$

$$=2^{n-1}\left\{\sin\frac{nx}{2}\cos^n\frac{x}{2}+\sin n\frac{x+\pi}{2}\left(\cos\frac{x+\pi}{2}\right)^n\right\} \quad (5.38)$$

## 习 题 五

证明下列恒等式

1. $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-a\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=(x-a)^2+\frac{x(1-x)}{n}$.

2. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^k\cos(n-2k)x$

$$=\begin{cases}2^{n-1}\cos^n x, & n \text{ 为奇数时}, \\ 2^{n-1}\cos^n x+\frac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

3. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n-k}^k(2\cos x)^{n-2k}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$.

4. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k2^{k-1}C_n^k\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{k-1}\cos\frac{k+1}{2}x$

$=(-1)^n n\cos nx$.

5. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k2^{k-1}C_n^k\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{k-1}\sin\frac{k+1}{2}x$

$=(-1)^n n\sin nx$.

6. $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^{k-1}C_n^k \cos\frac{1}{2}[(k+1)x+(k-1)\pi]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{k-2}$

$=n\cos nx$

7. $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^{k-1}C_n^k \sin\frac{1}{2}[(k+1)x+(k-1)\pi]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{k-2}$

$=n\sin nx.$

8. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k kC_n^k 2^{\frac{k-1}{2}}\sin\frac{k+1}{4}\pi=(-1)^n n\sin\frac{n\pi}{2}.$

9. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2k+1}\cos(2k+1)x$

$=2^{n-1}\left\{\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}-(-1)^n\sin^n\frac{x}{2}\cos\frac{n(x+\pi)}{2}\right\}.$

10. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2k+1}\sin(2k+1)x$

$=2^{n-1}\left\{\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}-(-1)^n\sin^n\frac{x}{2}\sin\frac{n(\pi+x)}{2}\right\}.$

# 6 阿倍尔恒等式和由它导出的互逆公式

在第 3 节中，我们介绍了五对组合变换的互逆公式，利用它们可以从已知的组合恒等式发现新的恒等式，或者把一个不易证明的恒等式归结为比较容易证明的恒等式. 在这一节中，我们首先介绍牛顿二项式公式的推广——阿倍尔恒等式，然后再由它导出三对新的互逆公式.

**定理 16** 设 $x\neq 0$，那么

$$x^{-1}(x+y+n)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k} \tag{6.1}$$

(6.1)称为阿倍尔恒等式.

在给出(6.1)的证明之前，我们先来说明，为什么说(6.1)是二项式公式的推广. 任取 $a\neq 0$ 并用$\frac{x}{a}$，$\frac{y}{a}$分别代替(6.1)中的 $x$ 和 $y$ 得

$$\frac{a}{x}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+n\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{a}+k\right)^{k-1}\left(\frac{y}{a}+n-k\right)^{n-k}$$

两端消去$\frac{1}{a^{n-1}}$即得

$$x^{-1}(x+y+an)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+ak)^{k-1}(y+a(n-k))^{n-k} \tag{6.2}$$

上式当 $a\neq0$ 时成立. 当 $a=0$ 时,它也成立,而且就是牛顿二项式公式:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$$

所以(6.2)是牛顿二项式公式的推广,而(6.2)就是(6.1).

为了证明(6.1),我们引进下面的和式:

$$A_n(x,y;p,q)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^{k+p}(y+n-k)^{n-k+q}\qquad(6.3)$$

利用这个记号,(6.1)的右端就是 $A_n(x,y;-1,0)$ 因此,要证明(6.1)就是要证明

$$A_n(x,y;-1,0)=x^{-1}(x+y+n)^n\qquad(6.4)$$

为了证明(6.4),我们先来研究一般的 $A_n(x,y;p,g)$. 在(6.3)右端的和式中,作指标变换 $k=n-l$,那么

$$\begin{aligned}A_n(x,y;p,q)&=\sum_{l=0}^{n}C_n^{n-l}(x+n-l)^{n-l+p}(y+l)^{l+q}\\&=\sum_{l=0}^{n}C_n^{l}(y+l)^{l+q}(x+n-l)^{n-l+p}\\&=A_n(y,x;q,p)\end{aligned}\qquad(6.5)$$

这是以后常用的等式.

$A_n(x,y;p,q)$还满足下面的递推关系.

**定理 17** $A_n(x,y;p,q)$满足:

(i) $A_n(x,y;p,q)=A_{n-1}(x,y+1;p,q+1)$

$$+A_{n-1}(x+1,y;p+1,q)\qquad(6.6)$$

(ii) $A_n(x,y;p,q)=xA_n(x,y;p-1,q)$

$$+nA_{n-1}(x+1,y;p,q)\qquad(6.7)$$

(iii) $A_n(x,y;p,q)=xA_{n-1}(x,y+1;p-1,q+1)$

$$+(x+n)A_{n-1}(x+1,y;p,q) \quad (6.8)$$

**证** (i)利用基本公式(1.2),

$$A_n(x,y;p,q)$$

$$=x^p(y+n)^{n+q}+\sum_{k=1}^{n-1}(C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1})(x+k)^{k+p}$$

$$\cdot(y+n-k)^{n-k+q}+(x+n)^{n+p}y^q$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(x+k)^{k+p}(y+n-k)^{n-k+q}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}(x+k)^{k+p}(y+n-k)^{n-k+q}$$

$$=A_{n-1}(x,y+1;p,q+1)+\sum_{l=0}^{n-1}C_{n-1}^l(x+l+1)^{l+1+p}$$

$$\cdot(y+n-l-1)^{n-l-1+q}$$

$$=A_{n-1}(x,y+1;p,q+1)+A_{n-1}(x+1,y;p+1,q)$$

这就是(6.6).

(ii)为证明(6.7),把 $A_n(x,y;p,q)$ 写成

$$A_n(x,y;p,q)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)(x+k)^{k-1+p}(y+n-k)^{n-k+q}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^{k-1+p}(y+n-k)^{n-k+q}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}kC_n^k(x+k)^{k-1+p}(y+n-k)^{n-k+q}$$

$$=xA_n(x,y;p-1,q)+n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}(x+k)^{k-1+p}$$

$$\cdot(y+n-k)^{n-k+q}$$

$$=xA_n(x,y;p-1,q)+n\sum_{l=0}^{n-1}C_{n-1}^l(x+l+1)^{l+p}$$

$$\cdot (y+n-l-1)^{n-l-1+q}$$

$$= xA_n(x,y;p-1,q)+nA_{n-1}(x+1,y;p,q)$$

这就是(6.7),证明完毕.

(iii)利用(6.6)有

$$A_n(x,y;p-1,q)=A_{n-1}(x,y+1;p-1,q+1)$$
$$+A_{n-1}(x+1,y;p,q)$$

把它代入(6.7)的右端,即得

$$A_n(x,y;p,q)=xA_{n-1}(x,y+1;p-1,q+1)$$
$$+(x+n)A_{n-1}(x+1,y;p,g)$$

(6.8)证毕.

利用定理 17,即可得

**定理 18** $A_n(x,y;-1,0)$有下面的表示:

$$A_n(x,y;-1,0)=yA_{n-1}(y,x+1;-1,0)$$
$$+(y+n)A_{n-1}(x,y+1;-1,0) \quad (6.9)$$

**证** 在(6.8)中命 $p=0$ 和 $q=-1$ 得

$$A_n(x,y;0,-1)=xA_{n-1}(x,y+1;-1,0)$$
$$+(x+n)A_{n-1}(x+1,y;0,-1)$$

由(6.5)可得

$$A_n(y,x;-1,0)=xA_{n-1}(x,y+1;-1,0)$$
$$+(x+n)A_{n-1}(y,x+1;-1,0)$$

再把上式中的 $x,y$ 对调即得(6.9).

有了这些准备,就可证明定理 16 了.我们要证明

$$A_n(x,y;-1,0) = x^{-1}(x+y+n)^n \qquad (6.4)$$

对 $n$ 用数学归纳法.由(6.3)的定义知道

$$A_0(x,y;p,q)=x^p y^q \tag{6.10}$$

因而 $A_0(x,y;-1,0)=x^{-1}$,即 $n=0$ 时(6.4)成立. 今设

$$A_{n-1}(x,y;-1,0)=x^{-1}(x+y+n-1)^{n-1} \tag{6.11}$$

成立,我们要证(6.4)成立. 把(6.11)代入(6.9)得

$$\begin{aligned}A_n(x,y;-1,0)&=yy^{-1}(x+y+1+n-1)^{n-1}\\&\quad+(y+n)x^{-1}(x+y+1+n-1)^{n-1}\\&=(x+y+n)^{n-1}(1+(y+n)x^{-1})\\&=x^{-1}(x+y+n)^n\end{aligned}$$

这就证明了(6.4),定理 16 证毕.

在下面的讨论中,我们还需要

**定理 19** 设 $n$ 是正整数,那么

(i) $A_n(x,y;-1,-1)=(x^{-1}+y^{-1})(x+y+n)^{n-1}$ (6.12)

(ii) $A_n(x,y;-2,0)=x^{-2}(x+1)^{-1}$

$[(x+1)(x+y+n)^n-nx(x+y+n)^{n-1}]$ (6.13)

即

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k-1}$$
$$=(x^{-1}+y^{-1})(x+y+n)^{n-1} \tag{6.12}$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^{k-2}(y+n-k)^{n-k}$$
$$=x^{-2}(x+1)^{-1}[(x+1)(x+y+n)^n$$
$$-nx(x+y+n)^{n-1}] \tag{6.13}$$

**证** (i)在(6.6)中取 $p=-1,q=-1$,并利用(6.4)和(6.5)得

$$A_n(x,y;-1,-1)$$
$$=A_{n-1}(x,y+1;-1,0)+A_{n-1}(x+1,y;0,-1)$$
$$=A_{n-1}(x,y+1;-1,0)+A_{n-1}(y,x+1;-1,0)$$
$$=x^{-1}(x+y+n-1)^{n-1}+y^{-1}(x+y+1+n-1)^{n-1}$$
$$=(x^{-1}+y^{-1})(x+y+n)^{n-1}$$

(ii)在(6.7)中取 $p=-1,q=0$ 得

$$A_n(x,y;-1,0)=xA_n(x,y;-2,0)+nA_{n-1}(x+1,y;-1,0)$$

利用阿倍尔恒等式(6.4)得

$$xA_n(x,y;-2,0)$$
$$=A_n(x,y;-1,0)-nA_{n-1}(x+1,y;-1,0)$$
$$=x^{-1}(x+y+n)^n-n(x+1)^{-1}(x+y+n)^{n-1}$$

两端除以 $x$ 即得(6.13).

**定理 20** $A_n(x,y;p,q)$可表示为

$$A_n(x,y;p,q)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k k!(x+k)A_{n-k}(x+k,y;p-1,q) \tag{6.14}$$

**证** 对 $n$ 用数学归纳法. $n=0$ 时,(6.14)的两端都是 $x^p y^q$,因而相等. 今设

$$A_{n-1}(x,y;p,q)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k k!(x+k)A_{n-1-k}(x+k,y;p-1,q) \tag{6.15}$$

成立. 则由(6.7)和(6.15)得

$$A_n(x,y;p,q)=xA_n(x,y;p-1,q)+nA_{n-1}(x+1,y;p,q)$$
$$=xA_n(x,y;p-1,q)+n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k k!$$

$$\cdot (x+1+k)A_{n-1-k}(x+1+k,y,p-1,q)$$

对右端的和式作指标变换 $k+1=l$,并注意到 $nC_{n-1}^{l-1}=lC_n^l$ 就有

$$A_n(x,y;p,q)=xA_n(x,y;p-1,q)+n\sum_{l=1}^{n}C_{n-1}^{l-1}(l-1)!$$

$$\cdot (x+l)A_{n-l}(x+l,y;p-1,q)$$

$$=xA_n(x,y;p-1,q)+\sum_{l=1}^{n}C_n^l l!(x+l)$$

$$A_{n-l}(x+l,y;p-1,q)$$

$$=\sum_{l=0}^{n}C_n^l l!(x+l)A_{n-l}(x+l,y;p-1,q).$$

这就是(6.14),证明完毕.

利用上面的定理即可证得下面的柯西恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^k(y+n-k)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k k!(x+y+n)^{n-k} \tag{6.16}$$

事实上,(6.16)的左端即 $A_n(x,y;0,0)$ 在定理 20 中取 $p=q=0$ 得

$$A_n(x,y;0,0)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k k!(x+k)A_{n-k}(x+k,y;-1,0) \tag{6.17}$$

根据阿倍尔恒等式(6.4),

$$A_{n-k}(x+k,y;-1,0)=(x+k)^{-1}(x+k+y+n-k)^{n-k}$$

$$=(x+k)^{-1}(x+y+n)^{n-k}$$

把它代入(6.17)即得(6.16).

柯西恒等式的意义在于把两个多项式的乘积 $C_n^k(x+k)^k(y+n-k)^{n-k}$ 的和化为一个多项式 $C_n^k k!(x+y+n)^{n-k}$ 的和.

例如,在(6.16)中取 $x=0, y=-n$ 即得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^n = n! \tag{6.18}$$

这正是在例 38 中已经得到的等式.

如果在(6.16)中取 $x=y=-\frac{n}{2}$,即得

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(-\frac{n}{2}+k\right)^k\left(-\frac{n}{2}+n-k\right)^{n-k}=n!$$

化简得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(n-2k)^n = 2^n n! \tag{6.19}$$

这则是一个新的等式. 当然,它也可以通过定理 12 的(ii)和(6.18)得到.

现在介绍由阿倍尔恒等式产生的互逆公式.

**定理 21** 设 $x\neq 0$,那么

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x(x+n-k)^{n-k-1}b_k \tag{6.20}$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+n}C_n^k x(x-n+k)^{n-k-1}a_k \tag{6.21}$$

是一对互逆公式.

**证** 我们从(6.21)来推导(6.20). 由(6.21),

$$b_k=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{l+k}C_k^l x(x-k+l)^{k-l-1}a_l$$

要证

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x(x+n-k)^{n-k-1} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l-k} C_k^l x(x-k+l)^{k-l-1} a_l = a_n$$

利用求和公式(3.2)，上式即为

$$\sum_{l=0}^{n}\left(\sum_{k=l}^{n}(-1)^{l-k}C_n^kC_k^l x^2(x+n-k)^{n-k-1}(x-k+l)^{k-l-1}\right)a_l = a_n$$

即要证

$$\sum_{k=l}^{n}(-1)^{l-k}C_n^kC_k^l x^2(x+n-k)^{n-k-1}(x-k+l)^{k-l-1} = \delta_{ln} \tag{6.22}$$

这里的 $\delta_{ln}$ 为克朗耐克尔 $\delta$(定义见 p. 6).

利用基本公式(1.4)，(6.22)可写为

$$C_n^l\sum_{k=l}^{n}(-1)^{l-k}C_{n-l}^{k-l} x^2(x+n-k)^{n-k-1}(x-k+l)^{k-l-1} = \delta_{ln} \tag{6.23}$$

对上式左端作指标变换 $k-l=j$，(6.23)变为

$$C_n^l\sum_{j=0}^{n-l}(-1)^jC_{n-l}^j x^2(x+n-l-j)^{n-l-j-1}(x-j)^{j-1} = \delta_{ln} \tag{6.24}$$

就是要证明当 $n=l$ 时，(6.24)的左端为 1，$n\neq l$ 时，(6.24)的左端为 0，若记 $n-l=m$，则(6.24)等价于

$$C_n^m\sum_{j=0}^{m}(-1)^jC_m^j x^2(x+m-j)^{m-j-1}(x-j)^{j-1} = \delta_{m0} \tag{6.25}$$

把(6.25)改写为

$$-C_n^m\sum_{j=0}^{n}C_m^j x^2(x+m-j)^{m-j-1}(-x+j)^{j-1} = \delta_{m0}$$

它就是

$$-C_n^m x^2 A_m(-x,x;-1,-1)=\delta_{m0} \qquad (6.26)$$

由(6.10)知道，当 $m=0$ 时，

$$A_0(-x,x;-1,-1)=(-x)^{-1}x^{-1}=-x^{-2}$$

故(6.26)成立. 当 $m\neq 0$ 时，由(6.12)知道

$$A_m(-x,x;-1,-1)=\left(\frac{1}{-x}+\frac{1}{x}\right)m^{m-1}=0$$

(6.26)也成立. 这就从(6.21)证明了(6.20). 反过来的证明是一样的.

从阿倍尔恒等式得到的第二对互逆公式是

**定理 22**

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+n-k)^{n-k}b_k \qquad (6.27)$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2-n+k)(-x+n-k)^{n-k-2}a_k \quad (6.28)$$

是一对互逆公式.

**证** 我们从(6.28)来推导(6.27). 和定理 21 的证明一样，这等于证明

$$\sum_{k=l}^{n}C_n^kC_k^l(x+n-k)^{n-k}(x^2-k+l)(-x+k-l)^{k-l-2}=\delta_{ln}$$

或者

$$C_n^l\sum_{k=l}^{n}C_{n-l}^{k-l}(x+n-k)^{n-k}(x^2-k+l)(-x+k-l)^{k-l-2}=\delta_{ln}$$

$$(6.29)$$

和定理 21 的证明一样，对上面的和作指标变换 $k-l=j$，再命 $n-l=m$，(6.29)就等价于

$$C_n^m \sum_{j=0}^{m} C_m^j (x+m-j)^{m-j}(x^2-j)(-x+j)^{j-2} = \delta_{m0}$$

(6.30)

按定义

$$A_m(-x,x;-2,0) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-x+k)^{k-2}(x+m-k)^{m-k}$$

$$A_m(-x,x;-1,0) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-x+k)^{k-1}(x+m-k)^{m-k}$$

所以

$$\begin{aligned}&x(x-1)A_m(-x,x;-2,0)-A_m(-x,x;-1,0)\\&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-x+k)^{k-2}(x+m-k)^{m-k}[x(x-1)-(-x+k)]\\&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-x+k)^{k-2}(x+m-k)^{m-k}(x^2-k)\end{aligned}$$

这样要证明(6.30)就变成证明

$$C_n^m \{x(x-1)A_m(-x,x;-2,0)-A_m(-x,x;-1,0)\}=\delta_{m0}$$

(6.31)

当 $m=0$ 时,由(6.10)知道(6.31)的左端是

$$x(x-1)(-x)^{-2}-(-x)^{-1} = x(x-1)\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} = 1$$

右端也是 1,故(6.31)成立. 当 $m\neq 0$ 时,由(6.4)和(6.13)知道

$$\begin{aligned}&x(x-1)A_m(-x,x;-2,0)-A_m(-x,x;-1,0)\\&=x(x-1)(-x)^{-2}(1-x)^{-1}[(1-x)m^n+mxm^{n-1}]+x^{-1}m^n=0\end{aligned}$$

因而(6.31)成立. 从(6.27)证明(6.28)的方法是一样的.

在定理 22 中取 $x=0$,就得到一组特殊的互逆公式

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (n-k)^{n-k} b_k \tag{6.32}$$

$$b_n = a_n - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (n-k)^{k-1} a_k \tag{6.33}$$

其中(6.33)是这样得来的，由(6.28)得

$$b_n = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (-n+k)(n-k)^{n-k-2} b_k$$

$$= a_n - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (n-k)^{n-k-1} b_k$$

从阿倍尔恒等式得到的第三对互逆公式是

**定理 23**

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-k)^{n-k} b_k \tag{6.34}$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-x+k)(-x+n)^{n-k-1} a_k \tag{6.35}$$

是一对互逆公式.

**证** 如果(6.35)成立，我们证明(6.34)也成立. 和前两个定理的证明方法一样，这归结为证明

$$\sum_{k=l}^{n} C_n^k C_k^l (x-k)^{n-k} (-x+l)(-x+k)^{k-l-1} = \delta_{ln} \tag{6.36}$$

利用基本恒等式(1.4)，并命 $k-l=j$，上式等价于

$$(-x+l)C_n^l \sum_{j=0}^{n-l} C_{n-l}^j (x-l-j)^{n-l-j} (-x+l+j)^{j-1} = \delta_{ln}$$

命 $n-l=m$，上式又等价于

$$-(-x+l)C_n^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j (x-l-j)^{m-1} = \delta_{m0} \tag{6.37}$$

当 $m=0$ 时,上式两端均为 1,(6.37)成立. 当 $m\neq 0$,因为$(x-l-j)^{m-1}$是 $j$ 的 $m-1$ 次多项式,故由例 41 知道

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}C_{m}^{j}(x-l-j)^{m-1}=0$$

故(6.37)也成立. 因而(6.36)成立. 从(6.34)证明(6.35)的方法是一样的.

在定理 23 中把 $x$ 换成 $-x$ 可得一对新的互逆公式:

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k(x+k)^{n-k}b_k \tag{6.38}$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)(x+n)^{n-k-1}a_k \tag{6.39}$$

在上式中让 $x=0$ 又得一对互逆公式

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^{n-k}b_k \tag{6.40}$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k k n^{n-k-1}a_k \tag{6.41}$$

**【例 46】** 证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}n^{-k}k!=1$.

**证** 由(6.18)知道

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^n=n!$$

故若取 $a_n=n!$,$b_n=n^n$,则(6.40)成立,因而(6.41)也成立,此即

$$n^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k k n^{n-k-1}k! \tag{6.42}$$

注意到 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$,上式变为

$$n^n=\sum_{k=0}^{n}nC_{n-1}^{k-1}n^{n-k-1}k!=\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}n^{n-k}k!$$

两端除以 $n^n$ 即得所要证明的等式.

**【例 47】** 证明

$$(x+n)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)(x+n)^{n-k-1}k! \quad (6.43)$$

**证** 在定理 4 中取 $f(x)=x^n$,并由例 35 得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k(x+k)^n=\Delta^n x^n=n! \quad (6.44)$$

今取 $a_n=n!$ $b_n=(x+n)^n$,则由(6.44)知(6.38)成立.因而(6.39)也成立,此即(6.43).

在(6.43)中对 $x$ 取一系列不同的值.又能得到一系列新的恒等式.例如取 $x=0$.则得

$$n^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k k n^{n-k-1}k!$$

这就是(6.42).分别取 $x=1$ 和 $x=2$ 就可得

$$(n+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(n+1)^{n-k-1}(k+1)!$$

$$(n+2)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(k+2)(n+2)^{n-k-1}k!$$

## 习 题 六

证明下列恒等式

1. $(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x(x+k)^{k-1}(y-k)^{n-k}$.

2. $(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(x-k)^{n-k}y(y+k)^{k-1}$.

3. $y^{-1}(x+y+n)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^k(y+n-k)^{n-k-1}$.

4. $\sum_{k=0}^{n}C_n^k k^k(n-k+1)^{n-k-1}=(n+1)^n$.

5. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(n-k-1)^{n-k-1}(k+1)^k=-n^n$.

6. $\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2-k)(-x+k)^{k-2}(x+y+n-k)^{n-k}$

$=y(y+n)^{n-1}$.

7. $\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^{k-1}(n-k+1)^{n-k}=n(n+1)^{n-1}$.

# 附录1　习题解答或提示

## 习　题　一

1. 在二项式定理$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k$中取$x=2$即得.

2. 由基本恒等式(1.3)得$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$,所以

$$\sum_{k=0}^{n}kC_n^k=\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}=n\sum_{l=0}^{n-1}C_{n-1}^l=n2^{n-1}$$

3. 由基本恒等式(1.5)和上题的结果即得.

4. 利用基本恒等式(1.3)和(1.6)即得.

5. 由基本恒等式(1.3)得$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$,所以

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^kx^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}x^k=\frac{1}{(n+1)x}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}x^{k+1}$$

$$=\frac{1}{(n+1)x}\sum_{l=1}^{n+1}C_{n+1}^lx^l=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}$$

注意,这是例3的推广,在上面的等式中分别命$x=1$和$x=-1$,就得例3的结果.若命$x=2$就得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k+1}C_n^k=\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}$$

6. 由基本恒等式(1.5)和(1.6)知道

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n \qquad (a)$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \cdots (-1)^n C_n^n = 0 \qquad (b)$$

如果 $n$ 是偶数，则($b$)可写为

$$C_n^0 - C_n^1 + \cdots + C_n^n = 0 \qquad (c)$$

($a$)—($c$)即得

$$C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$$

如果 $n$ 为奇数，则($b$)可写为

$$C_n^0 - C_n^1 + \cdots - C_n^n = 0 \qquad (d)$$

($a$)-($d$)得

$$C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$$

这个等式可以简写为 $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2k-1} = 2^{n-1}$.

例 44 的(5.25)给出了一般的公式．在(5.25)中取 $r=1, m=2$ 即能得到这个等式．

7. 由基本恒等式(1.3)和例 8，即得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} C_n^k &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} C_{n+1}^{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} \frac{(-1)^{l+1}}{l} C_{n+1}^{l} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

8. 先设 $n$ 为偶数，$n=2m$，于是根据例 11 的等式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{C_n^k} &= \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k}{C_{2m}^k} = 2 + \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^k}{C_{2m}^k} \\
&= 2 + \frac{-1}{m+1} = \frac{2m+1}{m+1} = \frac{2(n+1)}{n+2}
\end{aligned}$$

如果 $n$ 为奇数，设 $n=2m+1$，则由例 10 得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{C_n^k}=\sum_{k=0}^{2m+1}\frac{(-1)^k}{C_{2m+1}^k}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^k}{C_{2m+1}^k}$$

$$=\frac{1}{2m+1}\sum_{k=1}^{2m}\frac{k(-1)^k}{C_{2m}^{k-1}}$$

$$=\frac{1}{2m+1}\sum_{l=0}^{2m-1}\frac{(l+1)(-1)^{l-1}}{C_{2m}^l}=0$$

9. 由基本恒等式(1.3)和例 5 即得.

10. 记 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{2n-1}^k$，$b_n=\sum\limits_{k=n}^{2n-1}C_{2n-1}^k$，于是 $a_n+b_n=\sum\limits_{k=0}^{2n-1}C_{2n-1}^k$ $=2^{2n-1}$，但容易知道 $b_n=a_n$，所以 $a_n=2^{2n-2}$.

11. $\sum\limits_{k=0}^{n}kC_{2n}^k=2n\sum\limits_{k=1}^{n}C_{2n-1}^{k-1}=2n\sum\limits_{l=0}^{n-1}C_{2n-1}^l=n2^{2n-1}$

12. 因为 $\frac{1}{k}C_n^k=\frac{1}{k}C_{n-1}^k+\frac{1}{n}C_n^k$，所以

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k[1-(1-x)^k]$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k[1-(1-x)^k]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k[1-(1-x)^k]$$

$$=f_{n-1}+g_n$$

而 $g_n=-\frac{1}{n}\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k-\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k(1-x)^k\right\}$

$$=-\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k-\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k(1-x)^k\right\}$$

$$= \frac{1}{n}(1-(1-x))^n = \frac{1}{n}x^n$$

从递推公式 $f_n = f_{n-1} + \frac{1}{n}x^n$，即得要证的等式.

13. 若记 $b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k}$，则在例 7 中已经证明了递推关系式

$$b_n = \frac{n}{m+n}b_{n-1}$$

这个证明过程并不需要假定 $m$ 是整数. 现在取 $m=\frac{1}{2}$，则 $b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{2k+1}$，因而

$$b_n = \frac{n}{\frac{1}{2}+n}b_{n-1} = \frac{n(n-1)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}b_{n-2}$$

$$= \cdots = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+1\right)}b_0$$

$$= \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$$

$$= \frac{2^{2n}}{2n+1}(C_{2n}^n)^{-1}$$

14. 在上题中取 $m=-\frac{1}{2}$，用同样的递推方法即得.

15. $\sum_{k=0}^{n} kC_{2n+1}^k = (2n+1)\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{k-1} = (2n+1)\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k$

$$= (2n+1)\left\{\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k - C_{2n}^n\right\} = (2n+1)\left(2^{2n-1} - \frac{1}{2}C_{2n}^n\right)$$

这里已经利用了例 2 的结果.

16. $\sum_{k=0}^{n} kC_{2n}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)C_{2n}^{k}$

$$= n\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k} - \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k}$$

$$= n\left(2^{2n-1} + \frac{1}{2}C_{2n}^{n}\right) - n2^{2n-1} = nC_{2n}^{n}$$

这里用了例 2 和第 11 题的结果.

17. 和上题的证法相同.

18. 记 $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (\sqrt{x})^{2k}$，于是

$$\sqrt{x}a_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (\sqrt{x})^{2k+1}$$

引进 $b_n = \sum_{k=0}^{u} C_{2n+1}^{2k} \sqrt{x}^{2k}$，我们有

$$\sqrt{x}a_n + b_n = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} \sqrt{x}^{k} = (1+\sqrt{x})^{2n-1}$$

$$\sqrt{x}a_n - b_n = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} (-1)^{k+1} \sqrt{x}^{k} = (\sqrt{x}-1)^{2n+1}$$

两式相加即得要证的等式，两式相减得

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} x^k = \frac{(1+\sqrt{x})^{2n+1} + (1-\sqrt{x})^{2n+1}}{2}$$

19. 把和式写成

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^{k}}$$

$$= a_n + b_n$$

对右端第二个和式作指标变换 $k=2n-l$，于是

$$b_n=\sum_{k=n+1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{n-k}{C_{2n}^{k}}=\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{l-1}\frac{l-n}{C_{2n}^{2n-l}}$$

$$=-\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{l-1}\frac{n-l}{C_{2n}^{l}}=-a_n$$

所以 $a_n+b_n=0$.

20. 利用基本恒等式(1.4),

$$\sum_{k=l}^{n}C_n^kC_k^lx^k(1-x)^{n-k}=C_n^l\sum_{k=l}^{n}C_{n-l}^{k-l}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=C_n^l\sum_{j=0}^{n-l}C_{n-l}^{j}x^{n-j}(1-x)^j$$

$$=C_n^lx^l\sum_{j=0}^{n-l}C_{n-l}^{j}x^{n-l-j}(1-x)^j=C_n^lx^l$$

## 习　题　二

1. 因为 $\{C_{k-n-1}^{n-1}\}$ 的母函数为 $\dfrac{1}{(1-x)^n}$，根据例 14

$\left\{\sum\limits_{k=0}^{m}C_{k+n-1}^{n-1}\right\}_{m=0,1,2\cdots}$ 的母函数为

$$\frac{1}{1-x}\frac{1}{(1-x)^n}=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

即 $\sum\limits_{k=0}^{m}C_{k+n-1}^{n-1}$ 是$\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$展开式中 $x^m$ 的系数，因而得

$$\sum_{k=0}^{m}C_{k+n-1}^{n-1}=C_{n+m}^{m}$$

2. 因为$(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k$，

$$x(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}x^k$$

所以 $x(1+x)^n(1+x)^n$ 的 $x^n$ 的系数为

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^{k-1}C_n^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1}C_n^{k}$$

另一方面 $x(1+x)^{2n}$ 中 $x^n$ 的系数为

$$C_{2n}^{n-1}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

所以等式成立.

3. 左端的和式是 $(1-x)^m(1+x)^m=(1-x^2)^m$ 中 $x^{2n}$ 的系数,所以它等于 $(-1)^nC_m^n$.

4. 由基本恒等式(1.3)

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^kC_m^k=n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}C_m^k=n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}C_m^{k+1}$$

$\{C_m^{k-1}\}$ 的母函数是 $x^{-1}(1+x)^m$,$\{C_{n-1}^k\}$ 的母函数是 $(1+x)^{n-1}$,所以 $\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}C_m^{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{n-1-k}C_m^{k+1}$ 是

$$x^{-1}(1+x)^m(1+x)^{n-1}=x^{-1}(1+x)^{m+n-1}$$

中 $x^{n-1}$ 的系数,因而等于 $C_{n+m-1}^n$.

5. 概据范德蒙公式

$$C_{m+k}^{q+k}=\sum_{l=0}^{q+k} C_k^lC_m^{q+k-l}$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kC_{m+k}^{q+k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\sum_{l=0}^{q+k}C_k^lC_m^{q+k-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\sum_{l=0}^{k}C_k^lC_m^{q+k-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\sum_{l=0}^{k}C_k^{k-l}C_m^{q+l}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} C_m^{q-j} \sum_{k=j}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} C_m^{q+j} (-1)^j \delta_{jn} = (-1)^n C_m^{q+n}$$

6. 记 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$,则 $f^2(x)=\dfrac{1}{1-4x}= \sum\limits_{k=0}^{\infty} 4^k x^k$,

于是

$$f^3(x) = f^2(x) f(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^k x^k\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^k 2^{2n-2k}\right) x^n$$

用数学归纳法容易证明 $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^k 2^{2n-2k} =(2n+1)C_{2n}^n$. 因而得

$f^3(x)= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)C_{2n}^n x^n$ . 由此得

$$f^4(x)=f^3(x)f(x)= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (2k+1)C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}\right) x^n$$

另一方面

$$f^4(x) = \frac{1}{(1-4x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)4^n x^n$$

比较 $x^n$ 的系数,即得

$$(n+1)4^n= \sum_{k=0}^{n} (2k+1) C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} k C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} k C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k} + 4^n$$

由此即得

$$\sum_{k=0}^{n} kC_{2k}^{k}C_{2n-2k}^{n-k} = n2^{2n-1}$$

7. 在(2.10)中用$-4x$代替$x$，可得

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-2k}C_{2k}^{k}x^{k}$$

另外$\frac{1}{1-4x}=\sum_{k=0}^{\infty}4^{k}x^{k}$，所以

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-2k}C_{2k}^{k}2^{2n-2k}$$

便是$\frac{1}{1-4x}\cdot\sqrt{1-4x}=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$的展开式中$x^n$的系数，因而等于$C_{2n}^{n}$.

8. 容易看出$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n}^{k}C_{m+n-k}^{m}$是

$$(1-x)^{n}\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = (1-x)^{n-m-1}$$

中$x^n$系数，因而得要证的等式.

9. 记$a_n=\sum_{k=0}^{n-1}(C_{2n}^{2k+1})^2$， $b_n=\sum_{k=0}^{n}(C_{2n}^{2k})^2$，则由例 19 和例 20 得

$$a_n+b_n=C_{4n}^{2n}, \quad b_n-a_n=(-1)^{n}C_{2n}^{n}$$

因而得$a_n=\frac{1}{2}(C_{4n}^{2n}+(-1)^{n-1}C_{2n}^{n})$.

10. 因为$(1-x^2)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k}C_{n+1}^{k}x^{2k}$，

$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k}^{n}x^{k}$，所以$(1-x^2)^{n+1}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$中$x^n$的系数是

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n+1}^k C_{2n-2k}^n$$

另一方面$(1-x^2)^{n+1}\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}=(1+x)^{n+1}$,它的 $x^n$ 系数是$n+1$.故得所欲证之等式.

11. 和上题的做法相同,$\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{2n-2k}^n$ 是$(1-x^2)^n\cdot\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}=(1+x)^n\dfrac{1}{1-x}$中 $x^n$ 的系数,它等于

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

12. 不难证明

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^2(C_n^k)^2=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^2(C_n^k)^2$$

而

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^2(C_n^k)^2\\&=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2-\frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n}k(C_n^k)^2+\frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2(C_n^k)^2\\&=a_1+a_2+a_3\end{aligned}$$

由例 19 知 $a_1=\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$,在第 4 题中让 $m=n$,得 $a_2=-\dfrac{4}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}k(C_n^k)^2=-4C_{2n-1}^n$,而

$$a_3=\frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2(C_n^k)^2=4\sum_{k=1}^{n}(C_{n-1}^{k-1})^2=4C_{2n-2}^{n-1}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^2(C_n^k)^2=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$$

13. 由$(1-x)^n$和$(1-x)^{-q-1}$的展开式可得

$$(1-x)^{n-q-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C_n^{k-l}C_{q+l}^{l}\right)x^k \qquad (e)$$

如果 $r<n$，则因 $q\leqslant r<n$，$n-q-1\geqslant 0$，所以

$$(1-x)^{n-q-1}=\sum_{k=0}^{n-q-1}(-1)^kC_{n-q-1}^{k}x^k \qquad (f)$$

比较$(e)$和$(f)$的 $x^{r-q}$的系数得

$$\sum_{l=0}^{r-q}(-1)^{r-q-l}C_n^{r-q-l}C_{q+l}^{l}=(-1)^{r-q}C_{n-q-1}^{r-q}$$

对上式求和指标作变换 $q+l=k$，上式可写为

$$\sum_{k=q}^{r}(-1)^{r-k}C_n^{r-k}C_k^q=(-1)^{r-q}C_{n-q-1}^{r-q}$$

两端消去$(-1)^r$，即得(i).

如果 $r\geqslant n$，这时 $r-q>n-q-1$，又因 $q\leqslant n-1$，即 $n-q-1\geqslant 0$，故$(f)$右端和式中最高次项为 $x^{n-q-1}$. 比较$(e)$和$(f)$中 $x^{r-q}$的系数即得(ii).

14. 记 $f(x)=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$，则 $f(-x)=(1+4x)^{-\frac{1}{2}}$，所以 $f(x)f(-x)=(1-4^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$，因为 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{2k}^{k}x^k$，$f(-x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kC_{2k}^{k}x^k$，所以 $f(x)f(-x)$中 $x^{2n}$的系数为

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kC_{2k}^{k}C_{2(2n-k)}^{2n-k}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kC_{2k}^{k}C_{4n-2k}^{2n-k}$$

而$(1-4^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$展开式中 $x^{2n}$的系数是 $2^{2n}C_{2n}^{n}$，故等式

成立.

15. 上题中 $f(x)f(-x)$ 的展开式中 $x^{2n+1}$ 的系数为

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k C_{2k}^k C_{4n+2-2k}^{2n+1-k}$$

而 $(1-4^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 的展开式中没有 $x^{2n-1}$ 这种项,因而上式为 0.

16. 在第 7 题中已经得到

$$\sqrt{1-4x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-2k}C_{2k}^k x^k$$

所以

$$1=\sqrt{1-4x}\,\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1-2k}C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}\right)x^n$$

比较系数即得.

17. 命 $n-k=l$,则

$$\sum_{k=0}^{n}2^{n-k}C_{n+k}^{2k}=\sum_{l=0}^{n}C_{2n-l}^{2n-2l}2^l=\sum_{l=0}^{n}C_{2n-l}^{l}2^l=\frac{2^{2n+1}+1}{3}$$

最后一个等式是利用公式(2.30)得到的.

18 和例 28 的做法一样.

## 习 题 三

1. 在习题一的第 5 题中取 $a_k=(-1)^k\frac{x^k}{k+1}$, $b_k=\frac{(1+x)^{k-1}-1}{(k+1)x}$,由定理 1 的互逆公式即得.

2. 在习题一的第 7 题中取 $a_k=\frac{1}{(k+1)^2}$, $b_k=\frac{1}{k+1}\times$

$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)$，由定理 1 的互逆公式即得.

3. 在习题一的第 14 题中取 $a_k=\frac{1}{1-2k}$，$b_k=2^{2k}\cdot(C_{2k}^{k})^{-1}$，再用定理 1 的互逆公式.

4. 在习题二的第 4 题中取 $a_k=(-1)^k kC_m^k$，$b_k=kC_{k+m-1}^{k}$，用定理 1 的互逆公式.

5. 在习题一的第 13 题中取 $a_k=\frac{1}{2k+1}$，$b_k=\frac{2^{2k}}{2k+1}(C_{2k}^{k})^{-1}$，再用定理 1 的互逆公式.

6. 如果命 $a_k=-\frac{1}{k^2}$，$b_k=\sum\limits_{l=1}^{k}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{l}\right)$，那么根据定理 1 的互逆公式，所要证的恒等式等价于

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}C_n^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

记上式左端为 $f_n$，则

$$\begin{aligned}f_n&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}C_{n-1}^{k}+\frac{1}{n}C_n^k\right)+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}C_{n-1}^{k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k\\&=f_{n-1}+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

由这递推公式，即得上面的恒等式.

7. 若取 $a_k=\frac{1}{(k+1)^3}$，$b_k=\frac{1}{k+1}\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{1}{l+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{l+1}\right)$，则由定理 1 的互逆公式，要证的等式等价于

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)^3}C_n^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)$$

利用上题的等式及上题的方法即可证得上面的等式成立.

8. 在互逆公式

$$a_k=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_n^k-C_n^{k-1})b_{n-2k}$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^kC_{n-k}^k a_{n-2k}$$

中取 $a_k=2^k, b_k=k+1$,要证明等式成立,只须证明

$$\sum_{k=0}^{m}(C_n^k-C_n^{k-1})(n-2k+1)=2^n, m=\left[\frac{n}{2}\right] \quad (g)$$

事实上

$$\sum_{k=0}^{m}(C_n^k-C_n^{k-1})(n-2k+1)$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{m}(C_n^k-C_n^{k-1})-2\sum_{k=0}^{m}k(C_n^k-C_n^{k-1})$$

$$=(n+1)C_n^m-2q_n$$

而 $q_n=\sum_{k=0}^{m}kC_n^k-\sum_{k=0}^{m}kC_n^{k-1}=\sum_{k=1}^{m}kC_n^k-\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)C_n^k$

$$=mC_n^m-\sum_{k=0}^{m-1}C_n^k=(m+1)C_n^m-\sum_{k=0}^{m}C_n^k$$

注意到等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^k=\begin{cases}2^{n-1}, & n\text{ 为奇数时}\\ \frac{1}{2}(2^n+C_n^{\frac{n}{2}}), & n\text{ 为偶数时}\end{cases}$$

当 $n$ 为奇数时，$n=2m+1$，则 $\left[\frac{n}{2}\right]=m$，

$$2q_n=2(m+1)C_n^m-2^n$$

所以

$$\sum_{k=0}^{m}(C_n^k-C_n^{k-1})(n-2k+1)$$
$$=(2m+2)C_n^m-2(m+1)C_n^m+2^n=2^n$$

即(g)成立．当 $n=2m$ 时，$\left[\frac{n}{2}\right]=m$，

$$2q_n=2(m+1)C_n^m-2^n-C_n^m$$

所以

$$\sum_{k=0}^{m}(C_n^k-C_n^{k-1})(n-2k+1)$$
$$=(2m+1)C_n^m-2(m+1)C_n^m+2^2+C_n^m=2^n$$

这时(g)也成立．因而由互逆公式，所证的恒等式成立．

注意，在正文中本题的等式是通过(1.9)和(1.14)来确立的，然后通过互逆公式证明(g)成立．这里先证明(g)成立，通过互逆公式证明本题的等式成立，实际上是给这等式另一个独立的证明．

9．在等式(3.29)

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k\alpha^{n-2k}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\{(\alpha+\sqrt{\alpha^2+4})^n+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4})^n\}$$

中取 $\alpha=2\cos x$，则 $\alpha^2-4=4(\cos^2x-1)=-4\sin^2x$，故右

端为

$$\frac{1}{2^n}\{(2\cos x+2i\sin x)^n+(2\cos x-2i\sin x)^n\}$$

$$=2\cos nx$$

故知等式成立.

10. 在互逆公式(3.17)和(3.18)中取 $a_k=(\cos x)^k, k=0,1,\cdots, b_0=1, b_k=2\cos kx$,利用上题的恒等式即得.

## 习 题 四

1.
$$\begin{aligned}\Delta(f(x)g(x)) &= f(x+1)g(x+1)-f(x)g(x)\\ &= f(x+1)g(x+1)-f(x+1)\\ &\quad\cdot g(x)+f(x+1)g(x)-f(x)g(x)\\ &= f(x+1)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x)\end{aligned}$$

2. 记 $E_f, \Delta_f$ 是只对 $f$ 作用的算子, $E_g, \Delta_g$ 只对 $g$ 作用,即

$$E_f f(x)=Ef(x)=f(x+1)$$

$$E_g g(x)=Eg(x)=g(x+1)$$

$$\Delta_f f(x)=\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$

$$\Delta_g g(x)=\Delta g(x)=g(x+1)-g(x)$$

于是由上题知道,

$$\Delta(f(x)g(x))=(E_f\Delta_g+\Delta_f)(f(x)g(x))$$

所以 $\Delta^n(f(x)g(x))=(E_f\Delta_g+\Delta_f)^n(f(x)g(x))$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta_f^k E_f^{n-k}\Delta_g^{n-k}\right)(f(x)g(x))$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta_f^k E_f^{n-k}f(x)\Delta_g^{n-k}g(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x+n-k)\Delta^{n-k} g(x)$$

3. 用数学归纳法，当 $n=1$ 时

$\Delta x^2=(x+1)^2-x^2=2x+1=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ 等式成立. 今设

$$\Delta^{n-1}x^n = n!\left(x+\frac{n-1}{2}\right)$$

利用上题的结果得

$$\begin{aligned}\Delta^n(x^{n+1}) &= \Delta^n(x^n \cdot x) = (\Delta^n x^n)x + n\Delta^{n-1}(x+1)^n \\ &= n!x + n\Delta^{n-1}(x^n + nx^{n-1}) \\ &= n!x + n\left(n!\left(x+\frac{n-1}{2}\right)+n!\right) \\ &= (n+1)!\left(x+\frac{n}{2}\right)\end{aligned}$$

4. 在定理 4 的等式

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x+n-k)$$

中取 $f(x)=x^{n+1}$，由上题的结果得

$$(n+1)!\left(x+\frac{n}{2}\right)= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x+n-k)^{n+1}$$

用 $x-n$ 代替上面的 $x$，即得要证的等式.

5. 由定理 6 的求和公式即得.

6. 在定理 6 的求和公式中取 $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$，由公式(4.2)和

第 1 节的习题 13 得

$$\Delta^k f(1) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^{l-k} C_k^l f(l+1)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l \frac{1}{2l+1}$$

$$= (-1)^k \frac{2^{2k}}{2k+1} (C_{2k}^k)^{-1}$$

由(4.4)即得

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^{k+1} \frac{2^{2k}}{2k+1} (C_{2k}^k)^{-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{2^{2k-2}}{2k-1} (C_{2k-2}^{k-1})^{-1}$$

7. 从上题的恒等式再用定理 1 的互逆公式即得.

8. $\{k^4\}$是 4 阶等差数列,用定理 12 的计算公式.

9. 用 $k$ 换 $k+1$,要证的等式变为

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^n C_{n+1}^k = 0$$

在(4.2)中取 $f(x)=x^n$,得

$$\Delta^{n+1} x^n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} C_{n+1}^k (x+k)^n$$

因为 $\Delta^{n+1} x^n = 0$. 故得 $\sum\limits_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k (x+k)^n = 0$. 命 $x=0$,即得要证的等式.

10. $\sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l (l+1)^n$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l (l+1)^n \sum_{k=l}^{n} C_k^l$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l (l+1)^n C_{n+1}^{l+1} = 0$$

最后一个等式是利用了上题的结果.

11. 因为

$$C_{m-2k}^{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}(m-2k)(m-2k-1)$$

$$\cdots(m-2k-n+2)$$

是 $k$ 的 $n-1$ 次多项式，由定理 10 知，它是一个 $n-1$ 阶等差数列，于是由定理 12 的(ii)知等式成立.

## 习　题　五

1. 利用从(4.9)分别取 $a_k=k, a_k=k^2$ 得到的两个等式即得证明.

2. 记 $z=e^{it}$，$a_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^k z^{2k}$，$b_n=\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} C_n^k z^{2k}$

则 $a_n+b_n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{2k}=(1+z^2)^n$.

当 $n=2m+1$ 为奇数时，$\left[\frac{n}{2}\right]=m$，

$$b_n=\sum_{k=m+1}^{n} C_n^k z^{2k}=\sum_{l=0}^{n-m-1} C_n^{n-l} z^{2n-2l}=\sum_{l=0}^{m} C_n^l z^{2n-2l}$$

所以

$$a_n+\frac{b_n}{z^{2n}}=\sum_{k=0}^{m} C_n^k(z^{2k}+z^{-2k})$$

$$\frac{a_n}{z^{2n}}+\frac{b_n}{z^{2n}}=(1+z^{-2})^n$$

因而

$$(1-z^{-2n})a_n=\sum_{k=0}^{m} C_n^k(z^{2k}+z^{-2k})-(1+z^{-2})^n$$

两端同乘 $z^n$ 得

$$(z^n - z^{-n})a_n = z^n\sum_{k=0}^{m} C_n^k(z^{2k} + z^{-2k}) - (z + z^{-1})^n$$

即 $2\mathrm{i}\sin nx\sum\limits_{k=0}^{m} C_n^k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\sum\limits_{k=0}^{m} C_n^k\cos 2kx - (2\cos x)^n$. 两边取实部得

$$-2\sin nx\sum_{k=0}^{m} C_n^k\sin 2kx = 2\cos nx\sum_{k=0}^{m} C_n^k\cos 2kx - (2\cos x)^n$$

移项后即得

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k\cos(n-2k)x = 2^{n-1}\cos^n x$$

当 $n=2m$ 为偶数时，$\left[\frac{n}{2}\right]=m$，这时

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-m-1} C_n^k z^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k z^{2n-2k}$$

因而

$$a_n + z^{-2n}b_n = \sum_{k=0}^{m} C_n^k(z^{2k} + z^{-2k}) - C_n^m z^{-2m}$$

所以

$$(1 - z^{-2n})a_n = \sum_{k=0}^{m} C_n^k(z^{2k} + z^{-2k}) - (1 + z^{-2})^n - C_n^m z^{-2n}$$

或

$$(z^n - z^{-n})a_n = z^n\sum_{k=0}^{m} C_n^k(z^{2k} + z^{-2k}) - (z + z^{-1})^n - C_n^m$$

用 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 代入，两边取实部，即得

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k\cos(n-2k)x = 2^{n-1}\cos^n x + \frac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}$$

在第 3 节中我们已经得到过这个恒等式，这里用复数方法

给出了另一个证明.

3. 在第 3 节中，我们得到了下面的互逆对：

$$\begin{cases} a_n = \sum\limits_{k=0}^{m} (C_n^k - C_n^{k-1}) b_{n-2k} \\ b_n = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k a_{n-2k} \end{cases} \qquad m = \left[\frac{n}{2}\right]$$

在上面的互逆对中取 $a_k = (2\cos x)^k$，$b_k = \dfrac{\sin(k+1)x}{\sin x}$. 因此要证明等式成立，只要证明下面的等式成立：

$$(2\cos x)^n = \sum_{k=0}^{m} (C_n^k - C_n^{k-1}) \frac{\sin(n-2k+1)x}{\sin x} \qquad (h)$$

容易看出，上式右端为

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{\sin(n-2k+1)x}{\sin x} - \sum_{k=0}^{m} C_n^{k-1} \frac{\sin(n-2k+1)x}{\sin x}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{\sin(n-2k+1)x}{\sin x} - \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \frac{\sin(n-2k-1)x}{\sin x}$$

$$= C_n^m \frac{\sin(n-2m+1)x}{\sin x}$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \frac{\sin(n-2k+1)x - \sin(n-2k-1)x}{\sin x}$$

$$= C_n^m \frac{\sin(n-2m+1)x}{\sin x} + 2\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \cos(n-2k)x \qquad (i)$$

当 $n=2m+1$ 时，$\left[\dfrac{n}{2}\right]=m$，上式变为

$$C_n^m \frac{\sin 2x}{\sin x} + 2\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \cos(n-2k)x$$

$$= 2\sum_{k=0}^{m} C_n^k \cos(n-2k)x$$

当 $n=2m$ 时，$\left[\frac{n}{2}\right]=m$，$(i)$ 变为

$$C_n^{\frac{n}{2}} + 2\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \cos(n-2k)x$$

$$= 2\sum_{k=0}^{m} C_n^k \cos(n-2k)x - 2C_n^{\frac{n}{2}} + C_n^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{m} C_n^k \cos(n-2k)x - C_n^{\frac{n}{2}}$$

因此要$(h)$成立，就要证明

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k \cos(n-2k)x = \begin{cases} 2^{n-1}\cos^n x, & n \text{ 为奇数时}, \\ 2^{n-1}\cos^n x + \frac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数时}. \end{cases}$$

而这就是上题中已经证明的.

4. 在(5.13)中命 $a_k=(-1)^k k\cos kx$，$b_k=k2^{k-1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{k-1}\cos\frac{k+1}{2}x$，则从(5.13)和定理一的互逆公式可得

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k k 2^{k-1} C_n^k \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{k-1}\cos\frac{k+1}{2}x$$

$$= (-1)^n n\cos nx$$

5. 利用(5.14)和定理一的互逆公式.

6. 利用(5.15)和定理一的互逆公式.

7. 利用(5.16)和定理一的互逆公式.

8. 在第 5 题的恒等式中命 $x=\frac{\pi}{2}$.

9. 在公式(5.27)中取 $r=1, m=2$,这时(5.27)的右端为

$$2^{n-1}\left\{\cos\frac{nx}{2}\cos^n\frac{x}{2}+\cos\left[\frac{nx}{2}+\frac{\pi}{2}(n-2)\right]\cos^n\frac{x+\pi}{2}\right\}$$

因为

$$\cos\left(\frac{nx}{2}+\frac{n\pi}{2}-\pi\right)=-\cos\frac{n(x+\pi)}{2},$$

$$\cos\frac{x+\pi}{2}=-\sin\frac{x}{2}$$

所以上式可改写为

$$2^{n-1}\left\{\cos\frac{nx}{2}\cos^n\frac{x}{2}-(-1)^n\sin^n\frac{x}{2}\cos\frac{n(x+\pi)}{2}\right\}$$

因而得本题的等式.

10. 和上题方法相同.

## 习 题 六

1. 在阿培尔恒等式

$$x^{-1}(x+y+n)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k}$$

中,把 $y+n$ 换成 $y$ 即得.

2. 在上题中把 $x$ 和 $y$ 对换.

3. 等式右端为 $A_n(x,y;0,-1)$. 由(6.5)

$$A_n(x,y;0,-1)=A_n(y,x;-1,0)=y^{-1}(x+y+n)^n$$

第二个等式利用了阿培尔恒等式.

4. 在第 3 题的等式中取 $x=0, y=1$.

5. 在互逆对(6.20)和(6.21)中取 $x=1$,得互逆对

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(1+n-k)^{n-k-1}b_k \qquad (j)$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k(1-n+k)^{n-k-1}a_k \qquad (k)$$

今取 $a_n=(n+1)^n$，$b_n=n^n$，则由第 4 题的等式知$(j)$成立，因而$(k)$也成立，于是

$$n^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k(1-n+k)^{n-k-1}(k+1)^k$$

$$=-\sum_{k=0}^{n}C_n^k(n-k-1)^{n-k-1}(k+1)^k$$

这就是要证的等式.

6. 易知

$$y(y+n)^{n-1}=(y+n)^n-n(y+n)^{n-1} \qquad (l)$$

由阿培尔恒等式

$$(y+n)^n=(-x+x+y+n)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-x)(-x+k)^{k-1}(x+y+n-k)^{n-k} \qquad (m)$$

利用$(m)$可得

$$n(y+n)^{n-1}=n(y+1+n-1)^{n-1}$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(-x)(-x+k)^{k-1}$$

$$\cdot(x+y+1+n-1-k)^{n-1-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}(k+1)(-x)(-x+k)^{k-1}$$

$$\cdot(x+y+n-k)^{n-1-k}$$

由于上式左端与 $x$ 无关，故在右边的式子中把 $x$ 换成 $x-1$

等式仍然成立，于是有

$$n(y+n)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}(k+1)(-x+1)$$
$$\cdot(-x+1+k)^{k-1}(x+1+y+n-k)^{n-1-k}$$

在右边的和式中把指标 $k+1$ 换成 $k$，得

$$n(y+n)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k k(-x+1)(-x+k)^{k-2}(x+y+n-k)^{n-k} \tag{n}$$

由($l$)，($m$)和($n$)就得

$$y(y+n)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+y+n-k)^{n-k}[(-x)(-x+k)^{k-1}$$
$$-k(-x+1)(-x+k)^{k-2}]$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2-k)(-x+k)^{k-2}(x+y+n-k)^{n-k}$$

这就是要证的等式

7. 第 6 题等式右端的和式中 $k=0$ 的项是

$$x^2(-x)^{-2}(x+y+n)^n=(x+y+n)^n$$

故该等式可写为

$$y(y+n)^{n-1}=(x+y+n)^n$$
$$+\sum_{k=1}^{n}C_n^k(x^2-k)(-x+k)^{k-2}$$
$$\cdot(x+y+n-k)^{n-k}$$

在上面的等式中让 $x=0,y=1$ 得

$$(n+1)^{n-1}=(1+n)^n-\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^{k-1}(n-k+1)^{n-k}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{k-1}(n-k+1)^{n-k} = (n+1)^n - (n+1)^{n-1}$$
$$= n(n+1)^{n-1}$$

# 附录 2　本书中出现过的组合恒等式

1—6 为基本恒等式，7—122 的恒等式左边和式中只出现一个组合数的因子，123—154 左边和式中出现两个或两个以上组合数的因子，155—160 左边和式的因子的分母上有组合数. 每个等式后面括弧中的数字表示该等式在书中出现的地方.

例如(3.32)表示该等式即书中的(3.32)式，(例 8)表示该等式即例 8 的等式.(E3.6)表示该式出现在习题 3 的第 6 题.

1. $C_n^k=C_n^{n-k}$ (1.1)

2. $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$ (1.2)

3. $C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$ (1.3)

4. $C_n^kC_k^m=C_n^mC_{n-m}^{k-m}=C_n^{k-m}C_{n-k+m}^m$ $(m\leqslant k\leqslant n)$ (1.4)

5. $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$ (1.5)

6. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k=0$ (1.6)

7. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k=(-1)^m C_{n-1}^m \qquad (m<n)$ （例 1）

8. $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k=2^{n-1}+\frac{1}{2}C_{2n}^n$ （例 2）

9. $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$ （例 3）

10. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}$ （例 3）

11. $\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=n(n+1)2^{n-2}$ （例 4）

12. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{m}{m+k}=(C_{m+n}^n)^{-1}$ （例 7）

13. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ （例 8）

14. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^{2n-2k}C_{2n-k+1}^k=n+1$ （例 9）

15. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^{2n-2k}C_{2n-k}^k=2n+1$ （1.14）

16. $\sum_{k=0}^{n}2^kC_n^k=3^n$ （E1.1）

17. $\sum_{k=1}^{n}kC_n^k=n2^{n-1}$ （E1.2）

18. $\sum_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k=2^{n-1}(n+2)$ （E1.3）

19. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kkC_n^k=0 \qquad (n>1)$ （E1.4）

20. $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^kx^k=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}$ （E1.5）

21. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} C_n^k = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$

(E1.7)

22. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k = 2^{2n-2}$ (E1.10)

23. $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_{2n}^k = n 2^{2n-1}$ (E1.11)

24. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k [1-(1-x)^k] = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ (E1.12)

25. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k = \frac{2^{2n}}{2n+1} (C_{2n}^n)^{-1}$ (E1.13)

26. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1-2k} C_n^k = 2^{2n} (C_{2n}^n)^{-1}$ (E1.14)

27. $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_{2n+1}^k = (2n+1)2^{2n-1} - \frac{2n+1}{2} C_{2n}^n$ (E1.15)

28. $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_{2n}^{n-k} = n C_{2n-1}^n$ (E1.16)

29. $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_{2n+1}^{n-k} = (2n+1) C_{2n-1}^n - 2^{2n-1}$ (E1.17)

30. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} x^k$

$= 2x^{-\frac{1}{2}} [(1+\sqrt{x})^{2n+1} - (1-\sqrt{x})^{2n+1}]$ (E1.18)

31. $\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-k}^k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$ (例 26)

32. $\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-k}^k r^k = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+4r}}\{(1+\sqrt{1+4r})^{n+1}$

$-(1-\sqrt{1+4r})^{n+1}\}$ (2.30)

33. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} 2^{k} = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^{n})$ (2.31)

34. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} 6^{k} = \frac{1}{5}(3^{n+1} + (-1)^{n} 2^{n+1})$ (2.32)

35. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k} C_{n-k}^{k} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n+1}{3}\pi$ (2.33)

36. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}$ (2.38)

37. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right\}$

(2.39)

38. $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{k+n-1}^{n-1} = C_{m+n}^{n}$ ($E$2.1)

39. $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_{n+k}^{2k} = \frac{1}{3}(2^{2n+1} + 1)$ ($E$2.17)

40. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{n}$ (3.4)

41. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k}\left(x + \frac{x^{2}}{2} + \cdots + \frac{x^{k}}{k}\right)$

$= \frac{-1}{n}[1 - (1-x)^{n}]$ (3.7)

42. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{n+p}^{k+p} x^{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{p+k-1}^{k} (1+x)^{n-k}$ (3.13)

43. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n+p}^{k+p} = C_{n+p-1}^{n}$ (3.15)

44. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} x^{n-2k}$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{(x+\sqrt{x^2-4})^n+(x-\sqrt{x^2-4})^n\right\} \qquad (3.29)$$

45. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}2^{n-2k}=2 \qquad (3.32)$$

46. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}=2\cos\frac{n\pi}{3},n=1,2,\cdots. \qquad (3.33)$$

47. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^k\cos\frac{(n-2k)}{3}\pi=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{1}{2}(1+C_n^{\frac{n}{2}}), & n\text{ 为偶数}\end{cases} \qquad (3.34)$$

48. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(n+1-2k)^2}{n+1-k}C_n^k=2^n \qquad (3.37)$$

49. $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k[(1+x)^{k+1}-1]=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (E3.1)$$

50. $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{(n+1)^2} \qquad (E3.2)$$

51. $$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{l}\right)=\frac{1}{n^2} \qquad (E3.6)$$

52. $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{l+1}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} \tag{E3.7}$$

53. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n-k}^k 2^{n-2k} = n+1 \tag{E3.8}$$

54. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n-k}^k \frac{(2\cos x)^{n-2k}}{n-k} = \frac{2}{n}\cos nx \tag{E3.9}$$

55. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^k \cos(n-2k)x = \begin{cases} 2^{n-1}\cos^n x, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}\cos^n x + \frac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{E3.16}$$

56. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^k \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

(例 37)

57. $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$$

(4.5)

58. $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (x+n-k)^n = n! \qquad \text{(例 38)}$$

59. $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(k) C_n^k = 0 \qquad \text{(例 41)}$$

这里 $P(k)$是 $k$ 的 $p(<n)$次多项式

60. $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (x-k)^{n+1} = \left(x - \frac{n}{2}\right)(n+1)!$$

(E4.4)

61. $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\right)$$

$$=-\frac{2^{2n-2}}{2n-1}(C_{2n-2}^{n-1})^{-1} \tag{E4.7}$$

62. $$\sum_{k=1}^{n} k^4 C_n^k = C_n^1 2^{n-1} + 14C_n^2 2^{n-2} + 36C_n^3 2^{n-3} + 24C_n^4 2^{n-4}$$

(E4.8)

63. $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)^n C_{n+1}^{k+1} = 0 \tag{E4.9}$$

64. $$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l (l+1)^n = 0 \tag{E4.10}$$

在 65—73 的等式中，$\{a_n\}$是 $p$ 阶等差数列，$\Delta^k a_0$ 是 $\{a_n\}$ 的 $k$ 阶差分数列的首项，$n \geqslant p$.

65. $$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k = \sum_{k=0}^{p} 2^{n-k} C_n^k \Delta^k a_0 \qquad \text{(定理 12(i))}$$

66. $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k C_n^k = 0 \qquad (n>p) \qquad \text{(定理 12(ii))}$$

67. $$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{p} C_n^k \Delta^k a_0 x^k \tag{5.2}$$

68. $$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k t^k = \sum_{k=0}^{p} C_n^k t^k (1+t)^{n-k} \Delta^k a_0 \tag{5.3}$$

69. $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k C_n^k t^k = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \Delta^k a_0$$

(5.4)

70. $$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k \cos kx = \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{n-k} \cos\frac{n+k}{2} x \Delta^k a_0$$

(5.5)

71. $$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k \sin kx = \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{n-k} \sin\frac{n+k}{2} x \Delta^k a_0$$

(5.6)

72. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k C_n^k \cos kx$

$$=(-1)^n \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \cos \frac{1}{2}[n(x+\pi)+k(x-\pi)] \cdot \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{n-k} \Delta^k a_0 \quad (5.7)$$

73. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k C_n^k \sin kx = (-1)^n \sum_{k=0}^{p} C_n^k 2^{n-k} \cdot \sin \frac{1}{2}[n(x+\pi)+k(x-\pi)]\left(\sin \frac{x}{2}\right)^{n-k} \Delta^k a_0 \quad (5.8)$$

74. $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx = 2^n \left(\cos \frac{x}{2}\right)^n \cos \frac{x}{2} x \quad (5.9)$$

75. $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx = 2^n \left(\cos \frac{x}{2}\right)^n \sin \frac{x}{2} x \quad (5.10)$$

76. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \cos kx = (-1)^n 2^n \cos \frac{n}{2}(x+\pi)\left(\sin \frac{x}{2}\right)^n \quad (5.11)$$

77. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \sin kx = (-1)^n 2^n \sin \frac{n}{2}(x+\pi)\left(\sin \frac{x}{2}\right)^n \quad (5.12)$$

78. $$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k \cos kx = n 2^{n-1}\left(\cos \frac{x}{2}\right)^{n-1} \cos \frac{n+1}{2} x \quad (5.13)$$

79. $$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k \sin kx = n 2^{n-1}\left(\cos \frac{x}{2}\right)^{n-1} \sin \frac{n+1}{2} x \quad (5.14)$$

80. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k C_n^k \cos kx$

$$=(-1)^n n 2^{n-1}\cos\frac{1}{2}[(n+1)x+(n-1)\pi]$$

$$\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-1} \tag{5.15}$$

81. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k C_n^k \sin kx$$

$$=(-1)^n n 2^{n-1}\sin\frac{1}{2}[(n+1)x+(n-1)\pi]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-1} \tag{5.16}$$

82. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^k\left(\cos\frac{x}{2}\right)^k\cos\frac{k}{2}x=(-1)^n\cos nx \tag{5.17}$$

83. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^k\left(\cos\frac{x}{2}\right)^k\sin\frac{k}{2}x=(-1)^n\sin nx \tag{5.18}$$

84. $$\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^k\cos\frac{k}{2}(x+\pi)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^k=\cos nx \tag{5.19}$$

85. $$\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^k\sin\frac{k}{2}(x+\pi)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^k=\sin nx \tag{5.20}$$

86. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{\frac{k}{2}}C_n^k\cos\frac{k\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{2} \tag{5.21}$$

87. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}2^{\frac{k}{2}}C_n^k\sin\frac{k\pi}{4}=\sin\frac{n\pi}{2} \tag{5.22}$$

88. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m},$$

$$r\leqslant m \tag{5.25}$$

89. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} = 2^{n-1}$ (5.27)

90. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{4}\right]} C_n^{4k} = \frac{1}{4}\left(2^n + 2(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}\right)$ (5.28)

91. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{4n}^{4k} = \frac{1}{4}(2^{4n} + (-1)^n 2^{2n+1})$ (5.29)

92. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} C_n^{1+3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)}{2}\pi\right)$ (5.30)

93. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]} C_n^{2+3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)}{3}\pi\right)$ (5.31)

94. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$ (5.32)

95. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]} C_n^{r\cdot km} \cos(r+km)x$

$$= \frac{2^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos\left[\frac{nx}{2} + \frac{k\pi}{m}(n-2r)\right]\cos^n\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{m}\right)$$

(5.33)

96. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]} C_n^{r+km} \sin(r+km)x$

$$= \frac{2^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sin\left[\frac{nx}{2} + \frac{k\pi}{m}(n-2r)\right]\cos^n\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{m}\right)$$

(5.34)

97. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]} C_n^{km} \cos kmx$

$$= \frac{2^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos n\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{m}\right)\cos^n\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{m}\right)$$ (5.35)

98. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]} C_n^{km} \sin kmx$

$$=\frac{2^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sin n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right)\cos^n\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{m}\right) \tag{5.36}$$

99. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} \cos 2kx$

$$=2^{n-1}\left\{\cos\frac{nx}{2}\cos^n\frac{x}{2}+\cos\frac{x+\pi}{2}\left(\cos\frac{x+\pi}{2}\right)^n\right. \tag{5.37}$$

100. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} \sin 2kx$

$$=2^{n-1}\left\{\sin\frac{nx}{2}\cos^n\frac{x}{2}+\sin\frac{x+\pi}{2}\left(\cos\frac{x+\pi}{2}\right)^n\right. \tag{5.38}$$

101. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-a\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=(x-a)^2+\frac{x(1-x)}{n}$ (E5.1)

102. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n-k}^k(2\cos x)^{n-2k}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$ (E5.3)

103. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k k 2^{k-1} C_n^k\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{k-1}\cos\frac{k+1}{2}x$

$=(-1)^n n\cos nx$ (E5.4)

104. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k k 2^{k-1} C_n^k\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{k-1}\sin\frac{k+1}{2}x$

$=(-1)^n n\sin nx$ (E5.5)

105. $\sum\limits_{k=0}^{n} k 2^{k-1} C_n^k \cos\frac{1}{2}[(k+1)x+(k-1)\pi]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{k-1}$

$$=n\cos nx \tag{E5.6}$$

106. $$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1}C_n^k\sin\frac{1}{2}[(k+1)x+(k-1)\pi]\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{k-1}$$
$$=n\sin nx \tag{E5.7}$$

107. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k kC_n^k 2^{\frac{k-1}{2}}\sin\frac{k+1}{4}\pi=(-1)^n n\sin\frac{n\pi}{2} \tag{E5.8}$$

108. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2k+1}\cos(2k+1)x$$
$$=2^{n-1}\left\{\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}-(-1)^n\sin^n\frac{x}{2}\cos\frac{n(x+\pi)}{2}\right\} \tag{E5.9}$$

109. $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2k+1}\sin(2k+1)x$$
$$=2^{n-1}\left\{\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}-(-1)^n\sin^n\frac{x}{2}\sin\frac{n(x+\pi)}{2}\right\} \tag{E5.10}$$

110. $$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k}=x^{-1}(x+y+n)^n \tag{6.1}$$

111. $$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k-1}$$
$$=(x^{-1}+y^{-1})(x+y+n)^{n-1} \tag{6.12}$$

112. $$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x+k)^{k-2}(y+n-k)^{n-k}$$
$$=x^{-2}(x+1)^{-1}[(x+1)(x+y+n)^n$$

$$-nx(x+y+n)^{n-1}]\qquad(6.13)$$

113. $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x+k)^k (y+n-k)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k k!(x+y+n)^{n-k}\qquad(6.16)$$

114. $$\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} n^{-k} k! = 1\qquad(例 46)$$

115. $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x+k)(x+n)^{n-k-1} k! = (x+n)^n\qquad(6.43)$$

116. $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x(x+k)^{k-1}(y-k)^{n-k} = (x+y)^n\qquad(E6.1)$$

117. $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-k)^{n-k} y(y+k)^{k-1} = (x+y)^n\qquad(E6.2)$$

118. $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x+k)^k (y+n-k)^{n-k-1} = y^{-1}(x+y+n)^n$$
$$(E6.3)$$

119. $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k^k (n-k+1)^{n-k-1} = (n+1)^n\qquad(E6.4)$$

120. $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k-1)^{n-k-1}(k+1)^k = -n^n$$
$$(E6.5)$$

121. $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2-k)(-x+k)^{k-2}(x+y+n-k)^{n-k}$$
$$=y(y+n)^{n-1}\qquad(E6.6)$$

122. $$\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{k-1}(n-k+1)^{n-k} = n(n+1)^{n-1}\qquad(E6.7)$$

123. $$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^m = (-1)^m \delta_{mn}\qquad(例 5)$$

124. $\sum\limits_{k=m}^{n} C_n^k C_k^m = 2^{n-m} C_n^m$ （例 6）

125. $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k(n-k)} C_{2(k-1)}^{k-1} C_{2(n-k-1)}^{n-k-1} = \dfrac{1}{n} C_{2(n-1)}^{n-1}$ （1.20）

126. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{1}{k+1} C_n^k C_k^l = \dfrac{(-1)^l}{n+1}$ （$E$1.9）

127. $\sum\limits_{k=m}^{n} C_n^k C_k^m x^k (1-x)^{n-k} = C_n^m x^m$ （$E$1.20）

128. $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$ （例 20）

129. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 是偶数} \\ 0, & n \text{ 是奇数} \end{cases}$ （例 21）

130. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{p+k}^p C_{q+n-k}^q = C_{p+q+n+1}^{p+q+1}$ （例 22）

131. $\sum\limits_{k=0}^{q} C_n^k C_m^{q-k} = C_{m+n}^q$ （例 23）

132. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{m+k}^q = (-1)^n C_m^{q-n}$ （例 24）

133. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k} = 2^{2n}$ （例 25）

134. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k)(C_n^{k+1} C_n^{k+2} + \cdots + C_n^n)$

$= \dfrac{n}{2} C_{2n}^n$ （例 28）

135. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^{k-1} C_n^k = \dfrac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$ （$E$2.2）

136. $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k C_m^k C_m^{2n-k} = (-1)^n C_m^n$ （$E$2.3）

137. $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k C_m^k = nC_{n+m-1}^{n}$ (E2.4)

138. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{m+k}^{q+k} = (-1)^n C_m^{q+n}$ (E2.5)

139. $\sum_{k=0}^{n} kC_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k} = n2^{2n-1}$ (E2.6)

140. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{m+n-k}^{m} = \delta_{mn} \quad (m \leqslant n)$ (E2.8)

141. $\sum_{k=0}^{n-1} (C_{2n}^{2k+1})^2 = \frac{1}{2}(C_{4n}^{2n} + (-1)^{n-1} C_{2n}^{n})$ (E2.9)

142. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n+1}^k C_{2n-2k}^{n} = n+1$ (E2.10)

143. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_n^k C_{2n-2k}^{n} = 2^n$ (E2.11)

144. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(1 - \frac{2k}{n}\right)^2 (C_n^k)^2 = \frac{1}{n} C_{2n-1}^{n-1}$ (E2.12)

145. $\sum_{k=q}^{r} (-1)^k C_k^q C_n^{r-k} = \begin{cases} (-1)^q C_{n-q-1}^{r-q}, & r < n \\ 0, \quad r \geqslant n, & q \leqslant n-1 \end{cases}$ (E2.13)

146. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2k}^k C_{4n-2k}^{2n-k} = 2^{2n} C_{2n}^{n}$ (E2.14)

147. $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k C_{2k}^k C_{4n+2-2k}^{2n+1-k} = 0$ (E2.15)

148. $\sum_{k=0}^{n} C_{2n-2k}^{n-k} C_{2k}^k \frac{1}{2k-1} = 0$ (E2.16)

149. $\sum_{k=0}^{n-1} (C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^k C_n^k)$

$((-1)^{k+1} C_n^{k+1} + \cdots + (-1)^n C_n^n) = -C_{2n-2}^{n-1}$ (E2.18)

150. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+p}^{k+p} C_{p+k-1}^{k} = 1$ (3.16)

151. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k C_n^k C_{n+m-1}^{k} = (-1)^n n C_m^n$ (E3.4)

152. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{p_1+k}^{p_1} \cdots C_{p_r+k}^{p_r} C_n^k = 0,\ n > p_1 + \cdots + p_r$

(4.9)

153. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (C_{p+k}^{p})^r C_n^k = 0,\ n > rp$ (4.10)

154. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_{m-2k}^{n-1} = 0,\ m \geqslant 2n$ (E4.11)

155. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (C_n^k)^{-1} = \frac{n+1}{n+2}(1+(-1)^n)$ (E1.8)

156. $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1} \frac{n-k}{C_{2n}^k} = 0$ (E1.19)

157. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (C_{m+k}^k)^{-1} = \frac{m}{m+n}$ (3.5)

158. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{2k} (C_{2k}^k)^{-1} = \frac{1}{1-2n}$ (E3.3)

159. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k (C_{2k}^k)^{-1} 2^{2k} = \frac{1}{2n+1}$ (E3.5)

160. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{2^{2k}}{2k-1} C_n^k (C_{2k-2}^{k-1})^{-1}$

$= 4\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$ (E4.6)

**图书在版编目（CIP）数据**

组合恒等式/史济怀编著. —3 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009. 4

（数学奥赛辅导丛书）

ISBN 978-7-312-02484-9

Ⅰ. 组… Ⅱ. 史… Ⅲ. 组合恒等式—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 049170 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址：安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

网址：http://press. ustc. edu. cn

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本：880×1230/32 印张：5. 125 字数：108 千

1989 年 3 月第 1 版 2009 年 4 月第 3 版

2009 年 4 月第 3 次印刷

定价：11. 00 元