



中学生数学  
课外读物

51.2  
4460

# 数学归纳法

伊罗庚

上海教育出版社

中学生数学课外读物

数 学 归 纳 法

华 罗 庚

上海教育出版社

一九六四年·上海

中学生数学课外读物  
**数 学 归 纳 法**  
华 罗 庚

上海教育出版社出版  
(上海永福路123号)

上海市书刊出版业营业许可证出090号

上海市印刷三厂印刷

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32 印张：1 7/8 字数：39,000

1963年11月第1版 1964年5月第3次印刷

印数：48,001—146,000本

统一书号：7150·1457

定 价：(七) 0.15元

## · 編輯說明

数学，在中学里是一門基本工具学科，通过这一学科的教学，必須使中学生掌握数学这个工具，为他們参加生产劳动和进一步学习打下扎实的基础。为了使中学生学好数学，除了必須用最大的努力提高教学质量以外，还需要各方面的配合。我們編輯这套“中学生数学課外讀物”，目的就在于配合教学，使中学生更好地掌握基础知识，进一步提高基本技能，同时扩大他們的眼界，培养他們对数学的爱好，以帮助他們适应参加生产劳动和进一步学习的需要。

这套讀物的內容主要包括下列两个方面：一、就中学数学課程中的一些問題，介紹为深透理解这些問題所需要的基础知識，并提供一些必要的习题，以加强基本訓練和提高运用知識解决实际問題的能力；二、就一些与中学数学有关的专题，介紹数学方法，邏輯知識，数学某些分支的概况，数学史方面的知識，等等。

这套讀物的編写还是一种新的嘗試。無論在选题、要求、內容、体裁等方面是否能适合中学生的需要，希望教育工作者和讀者对我們提出宝贵的意見，同时还希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物，帮助我們做好这套讀物的編輯工作。

中学生数学課外讀物編审委员会

1963年8月

## 目 录

一	写在前面	1
二	归纳法的本原	3
三	两条缺一不可	6
四	数学归纳法的其他形式	11
五	归纳法能帮助我们深思	16
六	“题”与“解”	19
七	递归函数	25
八	排列和组合	28
九	代数恒等式方面的例题	32
十	差分	35
十一	李善兰恒等式	40
十二	不等式方面的例题	43
十三	几何方面的例题	50
十四	自然数的性质	55

## 一 写在前面

高中代数教科书里，讲过数学归纳法，也有不少的数学参考书讲到数学归纳法。但是，我为什么还要写这本小册子呢？

首先，当然是由于这个方法的重要。学好了、学透了，对进一步学好高等数学有帮助，甚至对认识数学的性质，也会有所裨益。但更主要的，我总觉得有些看法、有些材料，值得补充。而这些看法和材料，在我学懂数学归纳法的过程中，曾经起过一定的作用。

这里，我先提出其中的一点。

我在中学阶段学习数学归纳法这部分教材的时候，总认为学会了

“1对；假设 $n$ 对，那末 $n+1$ 也对”

的证明方法就满足了。后来，却愈想愈觉得不满足，总感到还差了些什么。

抽象地谈恐怕谈不清楚，还是举个例子来说明吧。

例如：求证

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[ \frac{1}{2}n(n+1) \right]^2. \quad (1)$$

这个问题当时我会做。证法如下：

证明：当 $n=1$ 的时候，(1)式左右两边都等于1；所以，当 $n=1$ 的时候，(1)式成立。

假設当  $n=k$  的时候(1)式成立, 就是

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[ \frac{1}{2}k(k+1) \right]^2. \quad (2)$$

那末, 因为

$$\begin{aligned} & 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 \\ &= \left[ \frac{1}{2}k(k+1) \right]^2 + (k+1)^3 \\ &= \left[ \frac{1}{2}(k+1) \right]^2 [k^2 + 4(k+1)] \\ &= \left[ \frac{1}{2}(k+1) \right]^2 [k+2]^2 \\ &= \left[ \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \right]^2, \end{aligned}$$

所以, 当  $n=k+1$  的时候, (1)式也成立.

因此, 对于所有的自然数  $n$ , (1)式都成立. (证毕)

上面的证明步骤是不是完整了呢? 当然, 是完整了. 老师应当不加挑剔地完全认可了.

但是, 我后来仔细想想, 却感到有些不满足. 问题不是由于证明错了, 而是对上面这个恒等式(1)是怎样得来的, 也就是对前人怎样发现这个恒等式, 产生了疑问. 难道这是从天上掉下来的吗? 当然不是! 是有“天才”的人, 直观地看出来的吗? 也不尽然!

这个问题启发了我: 难处不在于有了公式去证明, 而在于没有公式之前, 怎样去找出公式来; 才知道要点在于言外, 而我们以前所学到的, 仅仅是其中比较容易的一个方面而已.

我这样说, 请不要跟学校里对同学们的要求混同起来, 作为中学数学教科书, 要求同学们学会数学归纳法的运用, 就可

以了，而这本书是中学生的数学課外讀物，不是教科书，要求也就不同了。

話虽如此，一切我們还是从头讲起。

## 二 归納法的本原

先从少数的事例中摸索出規律来，再从理論上来证明这一規律的一般性，这是人們認識客观法則的方法之一。

以識数为例。小孩子識数，先学会数一个、两个、三个；过些时候，能够数到十了；又过些时候，会数到二十、三十、……一百了。但后来，却决不是这样一段一段地增长，而是飞跃前进。到了某一个时候，他領悟了，他会說：“我什么数都会数了”。这一飞跃，竟从有限跃到了无穷！怎样会的？首先，他知道从头数；其次，他知道一个一个按次序地数，而且不愁数了一个以后，下一个不会数。也就是他領悟了下一个数的表达方式，可以由上一个数来决定，于是，他也就会数任何一个数了。

設想一下，如果这个飞跃現象不出現，那末人們一輩子就只能学数数了。而且人生有限，数目无穷，就是学了一輩子，也决不会学尽呢！

解釋这个飞跃現象的原理，正就是数学归納法。数学归納法大大地帮助我們認識客观事物，由簡到繁，由有限到无穷。

从一个袋子里摸出来的第一个是紅玻璃球、第二个是紅玻璃球、甚至第三个、第四个、第五个都是紅玻璃球的时候，我



們立刻會出現一種猜想：“是不是這個袋里的東西全部都是紅玻璃球？”但是，當我們有一次摸出一個白玻璃球的時候，這個猜想失敗了；這時，我們會出現另一個猜想：“是不是袋里的東西，全部都是玻璃球？”但是，當有一次摸出來的是——個木球的時候，這個猜想又失敗了；那時我們會出現第三個猜想：“是不是袋里的東西都是球？”這個猜想對不對，還必須繼續加以檢驗，要把袋里的東西全部摸出來，才能見個分曉。

袋子裡的東西是有限的，遲早總可以把它摸完，由此可以得出一個肯定的結論。但是，當東西是無窮的時候，那怎麼辦？

如果我們有這樣的一個保證：“當你這一次摸出紅玻璃球的時候，下一次摸出的東西，也一定是紅玻璃球”，那末，在這樣的保證之下，就不必費力去一個一個地摸了。只要第一次摸出來的確實是紅玻璃球，就可以不再檢查地作出正確的結論：“袋里的東西，全部是紅玻璃球”。

這就是數學歸納法的引子。我們採用形式上的講法，也就是：

有一批編了號碼的數學命題；我們能夠證明第 1 號命題是正確的；如果我們能夠證明在第  $k$  號命題正確的時候，第  $k+1$  號命題也是正確的，那末，這一批命題就全部正確。

在上一節里舉過的例子：

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{1}{2}n(n+1) \right]^2. \quad (1)$$

當  $n=1$  的時候，這個等式就成為

$$1^3 = \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) \right]^2.$$

这是第 1 号命题。(这个命题可以通过验证,证实它是成立的。)

当  $n=k$  的时候,这个等式成为

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[ \frac{1}{2}k(k+1) \right]^2, \quad (2)$$

这是第  $k$  号命题。(这个命题是假设能够成立的。)

而下一步就是要在第  $k$  号命题成立的前提下,证明第  $k+1$  号命题

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[ \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \right]^2$$

也成立。所以这个证法就是上面所说的这一原则的体现。

再看下面的一个例子。

例 求证:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \quad (3)$$

第 1 号命题是: 当  $n=1$  的时候,上面这个等式成为

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1+1}.$$

这显然是成立的。

现在假设第  $k$  号命题是正确的,就是假设

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1},$$

那末,第  $k+1$  号命题的左边是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ & = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

恰好等于第  $k+1$  号命题的右边, 所以第  $k+1$  号命题也正确.

由此, 我们就可以作出结论: 对于所有的自然数  $n$ , (3) 式都成立.

附言: 上面的证明中, 假设“第  $k$  号命题是正确的”, 我们有时用“归纳法假设”一语来代替.

### 三 两条缺一不可

这里, 必须强调一下, 在我们的证法里:

- (1) “当  $n=1$  的时候, 这个命题是正确的”;
- (2) “假设当  $n=k$  的时候, 这个命题是正确的, 那末当  $n=k+1$  的时候, 这个命题也是正确的”, 这两条缺一不可.

不要认为, 一个命题在  $n=1$  的时候, 正确; 在  $n=2$  的时候, 正确; 在  $n=3$  的时候也正确, 就正确了. 老实说, 不要说当  $n=3$  的时候正确还不算数, 就是一直到当  $n$  是 1 千的时候正确, 或者 1 万的时候正确, 是不是对任何自然数都正确, 还得证明了再说.

不妨举几个例子.

例 1 当  $n=1, 2, 3, \dots, 15$  的时候, 我们可以验证式子

$$n^2 + n + 17$$

的值都是素数<sup>①</sup>。是不是由此就可以作出这样的结论：“ $n$  是任何自然数的时候， $n^2+n+17$  的值都是素数”呢？

这个命题是不正确的。事实上，当  $n=16$  的时候，

$$\begin{aligned}n^2+n+17 &= 16^2+16+17 \\ &= 17^2,\end{aligned}$$

它就不是素数。

不仅如此，我们还可以举出同样性质的例子：

(1) 当  $n=1, 2, 3, \dots, 39$  的时候，式子

$$n^2+n+41$$

的值都是素数；但是，当  $n=40$  的时候，它的值就不是素数。

(2) 当  $n=1, 2, 3, \dots, 11000$  的时候，式子

$$n^2+n+72,491$$

的值都是素数，即使如此，我们还不能肯定  $n$  是任何自然数的时候，这个式子的值总是素数。事实上，只要  $n=72,490$  的时候，它的值就不是素数。

这也就是说，即使我们试了 11,000 次，式子

$$“n^2+n+72,491”$$

的值都是素数，但我们仍旧不能断定这个命题一般的正确性。

**例 2** 式子

$$2^{2^n}+1,$$

当  $n=0, 1, 2, 3, 4$  的时候，它的值分别等于 3, 5, 17, 257, 65537，这 5 个数都是素数。根据这些资料，费尔马(Fermat)

---

<sup>①</sup> 素数又称质数，就是除 1 和它本身以外，不能被其他自然数整除的数。

就猜想：对于任何自然数  $n$ ，式子

$$2^{2^n} + 1$$

的值都是素数。但这是一个不幸的猜测。欧拉 (Euler) 举出，当  $n=5$  的时候，

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6,700,417.$$

因而费尔马猜错了。

后来，有人还证明当  $n=6, 7, 8, 9$  的时候， $2^{2^n} + 1$  的值也都不是素数。

例 3  $x-1 = x-1,$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1),$$

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 + 1),$$

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1),$$

$$x^5 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),$$

.....

从上而这些恒等式，可以看出什么来？

我們可以看出一点：“把  $x^n - 1$  分解为不可再分解并且具有整系数的因式以后，各系数的绝对值都不超过 1”。

这个命题是不是正确呢？这就是所谓契巴塔廖夫 (H. Г. Чеботарев) 问题。后来被依万诺夫 (B. Иванов) 找出了反例，他发现  $x^{105} - 1$  有下面的因式

$$\begin{aligned} & x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} \\ & + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} \\ & - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} \\ & + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^5 - 2x^7 - x^6 \\ & - x^5 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

其中  $x^{11}$  和  $x^7$  的系数都是  $-2$ , 它的绝对值大于 1.

虽然如此, 我们可以证明上面的命题, 当  $n$  是素数的时候, 总是对的; 当  $n < 105$  的时候, 也总是对的.

**例 4** 一个平面把空间分为两份; 两个平面最多可以把空间分为四份; 三个平面最多可以把空间分为八份. 从这些资料, 我们能不能得出这样的结论:

“ $n$  个平面最多可以把空间分为  $2^n$  份”?

这个命题是不正确的. 事实上, 四个平面不可能把空间分为 16 份, 而最多只能分为 15 份; 五个平面也不可能把空间分成 32 份, 而最多只能分为 26 份. 一般地说,  $n$  个平面最多可以把空间分为  $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$  份, 而不是  $2^n$  份, 并且的确有这样的  $n$  个平面存在.

怎样证明这一点, 读者可以自己思考<sup>①</sup>. 在思考的过程中, 可以先从比较容易的问题入手, 试一试证明下面这个命题:

平面上  $n$  条直线, 最多可以把平面分为  $1 + \frac{1}{2}n(n+1)$  份.

上面这几个例子, 总的说明了一个问题: 对于一个命题, 仅仅验证了有限次, 即使是千次、万次, 还不能肯定这个命题的一般正确性. 而命题的一般正确性, 必须要看我们能不能证明数学归纳法的第二句话: “假设当  $n=k$  的时候, 这个命题是正确的, 那末当  $n=k+1$  的时候, 这个命题也是正确的”.

另一方面, 也不要以为“当  $n=1$  的时候, 这个命题是正确的”, 这句话简单而丢开不管. 在证题的时候, 如果只证明了

<sup>①</sup> 本书以后将证明这一结论(见第 52 页).

“假設当  $n=k$  的时候, 这个命题是正确的, 那末当  $n=k+1$  的时候, 这个命题也是正确的”, 而不去验证“当  $n=1$  的时候, 这个命题是正确的”, 那末这个证明是不对的, 至少也得說, 这个证明是不完整的.

讓我們来看几个由于不确切地闡明数学归纳法里的第一句話“当  $n=1$  的时候, 这个命题是正确的”, 而得出非常荒謬的結果的例子.

**例 5** 所有的正整数都相等.

这个命题显然是荒謬的, 但是如果我們丟开“当  $n=1$  的时候, 这个命题是正确的”不管, 那末可以用“数学归纳法”来“证明”它.

这里, 第  $k$  号命题是: “第  $k-1$  个正整数等于第  $k$  个正整数”, 就是

$$k-1=k.$$

两边都加上 1, 就得

$$k=k+1.$$

这就是說, 第  $k$  个正整数等于第  $k+1$  个正整数. 这不是說明了所有的正整数都相等了嗎?

錯誤就在于, 我們沒有考虑  $k=1$  的情况.

**例 6** 如果我們不考虑  $n=1$  的情况, 可以证明

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 + l.$$

这里,  $l$  是任何的数.

事实上, 假設第  $k$  号命题

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left[ \frac{1}{2} k(k+1) \right]^2 + l$$

正确，那末象第 2 頁里证过的一样，第  $k+1$  号命题

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[ \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \right]^2 + 1$$

也就正确。

但是，这个結論显然是荒謬的。

讲到这里，讓我們再重复說一遍：数学归纳法的证明过程必須包括两个步骤：“当  $n=1$  的时候，这个命题是正确的”；“假设当  $n=k$  的时候，这个命题是正确的，那末当  $n=k+1$  的时候，这个命题也是正确的”。两者缺一不可！缺一不可！

也許有人会問：上面的第一句話要不要改做“当  $n=1, 2, 3, \dots$  的时候，这个命题是正确的”？

这样的要求是多余的，同时也是不正确的。所以多余，在于除了用  $n=1$  来验证以外，还要用  $n=2$  和  $n=3$  来验证，而它的不正确則在于“……”。如果“……”表示試下去都正确，那末試問到底要試到什么地步才算試完呢？

“多余”还可以解釋成我是从  $n=1, n=2, n=3$  里看出規律来的，或者希望通过练习熟悉这个公式；但在沒有证明  $n$  是所有自然数时都对以前就加上“……”，却要不得，这是犯了邏輯上的錯誤！

## 四 数学归纳法的其他形式

数学归纳法有不少“变着”。下面我們先来讲几种“变着”



(1) 不一定从 1 开始. 也就是数学归纳法里的两句话, 可以改成: 如果当  $n=k_0$  的时候, 这个命题是正确的, 又从假设当  $n=k(k \geq k_0)$  时, 这个命题是正确的, 可以推出当  $n=k+1$  时, 这个命题也是正确的, 那末这个命题当  $n \geq k_0$  时都正确.

**例 1** 求证:  $n$  边形  $n$  个内角的和等于  $(n-2)\pi$ .

这里就要假定  $n \geq 3$ .

**证明** 当  $n=3$  时, 我们知道三角形三个内角的和是 2 直角. 所以, 当  $n=3$  时, 命题是正确的.

假设当  $n=k(k \geq 3)$  时命题也是正确的. 设  $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$  是  $k+1$  边形的顶点. 作线段  $A_1A_k$ , 它把这个  $k+1$  边形分成两个图形, 一个是  $k$  边形  $A_1A_2 \dots A_k$ , 另一个是三角形  $A_kA_{k+1}A_1$ . 并且  $k+1$  边形内角的和等于后面这两个图形的内角和的和. 就是

$$(k-2)\pi + \pi = (k-1)\pi = [(k+1)-2]\pi.$$

也就是说, 当  $n=k+1$  时这个命题也是正确的. 因此, 定理得证.

**例 2** 求证: 当  $n \geq 5$  的时候,  $2^n > n^2$ .

**证明** 当  $n=5$  时,

$$2^5 = 32, \quad 5^2 = 25;$$

所以  $2^5 > 5^2$ .

假设当  $n=k(k \geq 5)$  时这个命题是正确的, 那末由

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \times 2^k \\ &> 2 \times k^2 \\ &\geq k^2 + 5k \\ &> k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2, \end{aligned}$$

可知这个命题当  $n=k+1$  时也是正确的。因此，这个命题对于所有大于或等于 5 的自然数  $n$  都正确。

**例 3** 求证：当  $n \geq -4$  的时候， $(n+3)(n+4) \geq 0$ 。

**证明** 当  $n = -4$  时，这个不等式成立。

假设当  $n = k (k \geq -4)$  时，这个不等式成立，那末由

$$\begin{aligned} & [(k+1)+3][(k+1)+4] \\ &= (k+4)(k+5) \\ &= k^2 + 9k + 20 \\ &= (k+3)(k+4) + 2k + 8 \\ &\geq (k+3)(k+4), \\ & \quad (\because \text{当 } k \geq -4 \text{ 时, } 2k + 8 \geq 0.) \end{aligned}$$

即得所证。

(2) 第二句话也可以改为“如果当  $n$  适合于  $1 \leq n \leq k$  时，命题正确，那末当  $n = k+1$  时，命题也正确”。由此同样可以证明对于所有的  $n$  命题都正确。

**例 4** 有两堆棋子，数目相等。两人玩耍，每人可以在一堆里任意取几颗，但不能同时在两堆里取，规定取得最后一颗者胜。求证后取者可以必胜。

**证明** 设  $n$  是棋子的颗数。当  $n = 1$  时，先取者只能在一堆里取 1 颗，这样另一堆里留下的 1 颗就被后取者取得。所以结论是正确的。

假设当  $n \leq k$  时命题是正确的。现在我们来证明，当  $n = k+1$  时，命题也是正确的。

因为在这种情况下，先取者可以在一堆里取棋子  $l$  颗 ( $1 \leq l \leq k+1$ )，这样，剩下的两堆棋子，一堆有棋子  $(k+1)$  颗，另一堆有棋子  $(k+1-l)$  颗。这时后取者可以在较多的一堆里

取棋子  $l$  顆，使兩堆棋子都有  $(k+1-l)$  顆。这样就变成了  $n=k+1-l$  的問題。按照規定，后取者可以得勝。由此就证明了对于所有的自然数  $n$  來說，后取者都可以得勝。

讀者可以自己考慮一下，如果任給兩堆棋子，能不能數一下棋子的顆數，就知道誰勝誰負？

(3) 有时，第二句話需要改成“假設当  $n=k$  的时候，这个命題是正确的，那末当  $n=k+2$  的时候，这个命題也是正确的”。这时，第一句話仅仅驗證“当  $n=1$  的时候，这个命題是正确的”就不够了；而要改成：“当  $n=1, 2$  的时候，这个命題都是正确的。”

例 5 求证：适合于

$$x+2y=n \quad (x \geq 0, y \geq 0, \text{并且 } x, y \text{ 都是整数}) \quad (1)$$

的解的組数  $r(n)$ ① 等于

$$\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}[1+(-1)^n].$$

(1)式的解，可以分为两类：“ $y=0$ ”的和“ $y \geq 1$ ”的。前一类解的組数等于 1；后一类解的組数等于

$$x+2(y-1)=n-2$$

适合于  $x \geq 0, y-1 \geq 0$  ( $x, y$  都是整数)的解的組数  $r(n-2)$ ，所以

$$r(n) = r(n-2) + 1$$

如果仅仅知道当  $n=1$  时， $r(n)=1$  (这时  $x+2y=1$ ，所

① 因为适合这个方程的解的組数与  $n$  有关，所以我们用符号  $r(n)$  来表示。例如，当  $n=5$  时，方程有 3 組解，所以  $r(n)=3$ 。

以适合条件的解只有一组,就是  $x=1, y=0$ ), 就只能推出当  $n$  是奇数时,  $r(n) = \frac{1}{2}(n+1)$ , 而还不能推出  $n$  是偶数时的情况. 必须再算出, 当  $n=2$  时,

$$x+2y=2$$

有两组解  $x=2, y=0$  和  $x=0, y=1$ , 即  $r(2)=2$ , 才能推出

当  $n$  是偶数时,  $r(n) = \frac{1}{2}(n+2)$ . 这样归纳法才完整.

作为练习, 读者可以试一试解下面这个比较更复杂的题目: 求适合于

$$2x+3y=n \quad (x \geq 0, y \geq 0, \text{并且 } x, y \text{ 都是整数})$$

的解的组数.

(4) 一般的, 还可以有以下的“变着”:

当  $n=1, 2, \dots, l$  时, 这个命题都是正确的, 并且证明了“假设当  $n=k$  时, 这个命题正确, 那末当  $n=k+l$  时, 这个命题也正确”, 于是当  $n$  是任何自然数时, 这个命题都是正确的.

例 6 求证: 适合于

$$x+ly=n \quad (x \geq 0, y \geq 0, \text{并且 } x, y \text{ 都是整数})$$

的解的组数等于  $\left[ \frac{n}{l} \right] + 1$ . 这里符号  $\left[ \frac{n}{l} \right]$  表示商  $\frac{n}{l}$  的整数部分.

证明留给读者.

数学归纳法的“变着”还有不少, 读者以后还会看到“反向归纳法”、“翘翘板归纳法”等等.

## 五 歸納法能幫助我們深思

大家都知道，數學歸納法有幫助我們“進”的一面。現在我想談談數學歸納法幫助我們“退”的一面。把一個比較複雜的問題，“退”成最簡單最原始的問題，把這個最簡單最原始的問題想通了、想透了，然後再用數學歸納法來一個飛躍上升，於是問題也就迎刃而解了。

我們還是舉一個具體的例子來談。

這是一個有趣的數學遊戲，但它充分說明了，一個人會不會應用數學歸納法，在思考問題上就會有很大的差異。不會應用數學歸納法的人，要想解決這個問題著實要些“聰明”，但是融會貫通地掌握了數學歸納法的人，解決這個問題就不需要多少“聰明”。

問題是這樣的：

有一位老師，想辨別出他的三個得意門生中哪一個更聰明一些，他採用了以下的方法。事先準備好 5 頂帽子，其中 3 頂是白的，2 頂是黑的。在試驗時，他先把這些帽子讓學生們看了一看，然後要他們閉上眼睛，替每個學生戴上一頂白色的帽子，並且把 2 頂黑帽子藏了起來，最後再讓他們張開眼睛，請他們說出自己頭上戴的帽子，究竟是哪一種顏色。

三個學生相互看了一看，躊躇了一會兒，然後他們異口同聲地說，自己頭上戴的是白色的帽子。

他們是怎樣推算出來的呢？他們怎樣能夠從別人頭上戴的帽子的顏色，正確地推斷出自己頭上戴的帽子的顏色的呢？

建議讀者，讀到这儿，暫時把書擱下來，自己想一。能  
够想出來嗎？如果一時想不出，可以多想一些時候。

×        ×        ×

現在，我把謎底揭曉一下：甲、乙、丙三個學生是怎樣想的。

甲這樣想<sup>①</sup>：{如果我頭上戴的是黑帽子，那末乙一定會這樣想：[如果我頭上戴的是黑帽子，那末丙一定會這樣想：(甲乙兩人都戴了黑帽子，而黑帽子只有兩頂，所以自己頭上戴的一定是白帽子。)這樣，丙就會脫口而出地說出他自己頭上戴的是白帽子。但是他為什麼要躊躇？可見自己〈指乙〉頭上戴的是白帽子。]如果這樣乙也會脫口而出地說出他自己頭上戴的是白帽子。但是他為什麼也要躊躇呢？可見自己〈指甲〉頭上戴的不是黑帽子。}

經過這樣思考，於是三個人都推出了自己頭上戴的是白帽子。

讀者讀到这儿，請再想一想。想通了沒有？有些傷腦筋吧！

學過數學歸納法的人會怎樣想呢？他會先退一步，(善于“退”，足夠地“退”，“退”到最原始而不失去重要性的地方，是學好數學的一個訣巧！)不考慮三個人而僅僅考慮兩個人一頂黑帽子的問題。這個問題誰都會解，黑帽子只有一頂，我戴了，他立刻會說：“自己戴的是白帽子”。但是，他為什麼要躊躇呢？可見我戴的不是黑帽子而是白帽子。

這就是說，“兩個人，一頂黑帽子，不管多少（當然要不少

<sup>①</sup> 為了讀者容易看懂，這里加上了一些括號。{ }里的是甲的想法，[ ]里的是甲設想乙應當有的想法，( )里的是甲設想乙應當為丙設想的想法。

于2)頂白帽子”的問題,是一個輕而易舉的問題。

現在我們來解上面這個較複雜的:“三個人,兩頂黑帽子,不管多少(當然要不少於3)頂白帽子”的問題也就容易了。為什麼呢?如果我頭上戴的是黑帽子,那末對於他們兩人來說,就變成“兩個人,一頂黑帽子”的問題,這是他們兩人應該立刻解決的問題,是不必躊躇的。現在他們在躊躇,就說明了我頭上戴的不是黑帽子而是白帽子。

這裡可以看到,學會了數學歸納法,就會得運用“歸納技巧”從原來問題里減去一個人、一頂黑帽子,把它轉化為一個簡單的問題。

倘使我們把原來的問題再搞得複雜一些:“四個人,三頂黑帽子,若干(不少於4)頂白帽子”。解這個問題,如果仍舊用我們開始時的敘述方法,那末一定要說成:“甲想……{乙想……[丙想……(丁想<……>)]}等等”。這樣講起來多費事,簡直象“拗口令”,使人不易聽清,不易搞懂。但是掌握了數學歸納法,善於“退”,那就只要用幾句話就可了事,“如果我頭上戴的是黑帽子,那末對他們三個人來說,是‘三個人,兩頂黑帽子,若干頂白帽子’的問題。這個問題他們立刻會解決而不必躊躇。現在他們要躊躇,正是說明我戴的不是黑帽子而是白帽子。”換句話說,“如果我頭上戴的是黑帽子”就是這裡的歸納法假定。

豈特四個人三頂黑帽子,即使象“ $n$ 個人, $n-1$ 頂黑帽子,若干(不少於 $n$ )頂白帽子”這樣複雜的問題,我們也可以很簡單地解決了。因為當 $n=2$ 時已經解決了,假設當 $n=k$ 時問題已經解決,那末當 $n=k+1$ 時,只要有1人戴的是黑帽子,就變成 $n=k$ 的問題,大家都會應用數學歸納法,他們應當

都說出他們自己头上戴的是白帽子,但是他們要躊躇,所以这个人就可以判断出自己头上戴的是白帽子。

讀到这儿,讀者可能領會到兩點:

(1) 应用歸納法可以处理多么复杂的問題! 懂得它的人,比不懂它的人岂不是“聰明”得多。

(2) 歸納法的原則,不但指導我們“進”,而且还教會我們“退”.把問題“退”到最朴素易解的情況,然后再用歸納法飞跃前进.这样比学会了“三人問題”,搞“四人問題”,搞通了“四人問題”再嘗試“五人問題”的做法,不是要爽快得多!

当然,我們也不能完全排斥步步前进的做法.當我們看不出歸納綫索的时候,先一步一步地前进,也还是必要的。

## 六 “題”与“解”

数学里,有时候出題容易解題难.凡事問一个为什么,有时候要回答出来确不容易.但也有时候,出題困难解題易.題目本身就包括了解題的方法,难不难在解,而难在怎样想出这个題目来.最显著的是用歸納法来证明一些代数恒等式.这时,难不难在应用歸納法来证明,而难在怎样想出这些恒等式来.本书开始时所举的例子,就是:人家怎样想出

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \left[ \frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 \\ &= (1+2+3+\dots+n)^2 \end{aligned}$$

来的?

一般地說:求证一个形如



$$a_1 + \dots + a_n = S_n \quad (1)$$

的恒等式, 本身就建議我們求證“ $a_{n+1} + S_n = S_{n+1}$ ”或者“ $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ”. 而一般讲来由“ $a$ ”求“ $S$ ”較难, 由“ $S$ ”求“ $a$ ”較易. 并且如果证明了

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1},$$

我們还可以把級数(1)写成

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &= S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \dots + (S_n - S_{n-1}) \\ &= S_n. \end{aligned}$$

交叉消去即得所求. (注意: 上面这个等式的成立也要用归纳法加以证明才合乎严格要求.)

下面我們举些例子:

**例 1** 求证:

$$\begin{aligned} &4 \cdot 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10 \cdot 13 + 10 \cdot 13 \cdot 16 + \dots \\ &\quad + (3n+1)(3n+4)(3n+7) \\ &= \frac{1}{12} [(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10) \\ &\quad - 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10]. \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

看了这个公式, 就可以知道: 一定会有  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , 也就是

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12} [(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10) \\ &\quad - (3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)] \\ &= (3n+1)(3n+4)(3n+7). \end{aligned}$$

一算真对. 我們就可以用交叉消去法(或者归纳法)来证明这个公式了.

例 2 求证:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 15} + \frac{1}{11 \cdot 15 \cdot 19} + \cdots \\ & \quad + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)} \\ & = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{3 \cdot 7} - \frac{1}{(4n+3)(4n+7)} \right) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

这个恒等式可以由

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} - \frac{1}{(4n+3)(4n+7)} \right] \\ & = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)} \end{aligned}$$

推出.

例 3 求证:

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx \\ & = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x \sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

从这个恒等式可以得到启发:

$$\begin{aligned} & \frac{\left[ \sin \frac{1}{2}(n+1)x \sin \frac{1}{2}nx - \sin \frac{1}{2}nx \sin \frac{1}{2}(n-1)x \right]}{\sin \frac{1}{2}x} \\ & = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \left[ \sin \frac{1}{2}(n+1)x - \sin \frac{1}{2}(n-1)x \right]}{\sin \frac{1}{2}x} \\ & = 2 \sin \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}nx = \sin nx. \end{aligned}$$

反过来,可以用这个等式来证明原来的恒等式.

用同样的方法,我们可以处理以下的题目:

例4 求证:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}. \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

例5 求证:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x. \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

(这里,  $x$  不等于  $\pi$  的整数倍)

例6 求证:

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n \alpha \\ &= \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}. \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

这些例题的真困难不是在于既得公式之后去寻求它们的证明,而是在于这批恒等式是怎样获得的.

我国古代堆垛术所得出的一些公式,也都属于这一类.

例7 求证: 当  $n \geq 1$  的时候,

$$\begin{aligned} & 1 + (1+9) + (1+9+25) + \cdots \\ & \quad + [1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2] \\ &= \frac{1}{3} \left[ n^2 (n+1)^2 - \frac{1}{2} n (n+1) \right] \textcircled{1}. \end{aligned}$$

① 陈世仁(1676—1722).

以下五題采自元朱世杰：算学启蒙（1299），四元玉鉴（1303）。

$$\begin{aligned} \text{例 8} \quad & a + 2(a+b) + 3(a+2b) + \cdots + n[a + (n-1)b] \\ & = \frac{1}{6}n(n+1)[2bn + (3a-2b)]. \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 9} \quad & [a + (n-1)b] + 2[a + (n-2)b] + \cdots \\ & + (n-1)(a+b) + na \\ & = \frac{1}{6}n(n+1)[bn + (3a-b)]. \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

作为练习，讀者可以試由例 8 直接推出例 9 来；試用两两相加两两相减找出例 8 例 9 的恒等式来。

$$\begin{aligned} \text{例 10} \quad & a + 3(a+b) + 6(a+2b) + \cdots \\ & + \frac{n}{2}(n+1)[a + (n-1)b] \\ & = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)[3bn + (4a-3b)]. \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 11} \quad & [a + (n-1)b] + 3[a + (n-2)b] + \cdots \\ & + \frac{1}{2}n(n-1)(a+b) + \frac{1}{2}n(n+1)a \\ & = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)[bn + (4a-b)]. \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

例 12 在級数

$$1 + 3 + 7 + 12 + 19 + 27 + 37 + 48 + 61 + \cdots$$

里，如果  $a_n$  是它的第  $n$  項，那末

$$a_{2l} = 3l^2, \quad a_{2l-1} = 3l(l-1) + 1.$$

这里  $l$  是大于或者等于 1 的整数。求证：

$$S_{2l-1} = \frac{1}{2}l(4l^2 - 3l + 1);$$

$$S_{2l} = \frac{1}{2}l(4l^2 + 3l + 1).$$

最后一题启发我们想到归纳法的另一“变着”：“翘翘板归纳法”——有两个命题  $A_n$ 、 $B_n$ ，如果“ $A_1$  是正确的”，“假设  $A_k$  是正确的，那末  $B_k$  也是正确的”，“假设  $B_k$  是正确的，那末  $A_{k+1}$  也是正确的”，那末，对于任何自然数  $n$ ，命题  $A_n$ 、 $B_n$  都是正确的。

这里命题  $A_n$  是 “ $S_{2n-1} = \frac{1}{2}n(4n^2 - 3n + 1)$ ”，而命题  $B_n$  是 “ $S_{2n} = \frac{1}{2}n(4n^2 + 3n + 1)$ ”。

显而易见， $A_1$  是正确的，即  $S_1 = 1$ 。

假设  $S_{2k-1} = \frac{1}{2}k(4k^2 - 3k + 1)$ ，那末

$$S_{2k} = \frac{1}{2}k(4k^2 - 3k + 1) + 3k^2 = \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1).$$

这就是说，假设  $A_k$  是正确的，那末  $B_k$  也是正确的。

又假设  $S_{2k} = \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1)$ ，那末

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &= \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1) + 3k(k+1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(k+1)[4(k+1)^2 - 3(k+1) + 1]. \end{aligned}$$

这也就是说，假设  $B_k$  是正确的，那末  $A_{k+1}$  也是正确的。

因此， $A_n$ 、 $B_n$  对于任何自然数  $n$ ，都是正确的。

这个题目是朱世杰研究圆锥垛积得出来的，但照上面这样写下来，就显得有些造作了。

不仅出现过“翘翘板归纳法”，而且还出现过若干結論螺旋式上升的证明方法。例如：有5个命题  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n$ 。現在知道  $A_1$  是正确的，又  $A_k \rightarrow B_k$  ①,  $B_k \rightarrow C_k, C_k \rightarrow D_k, D_k \rightarrow E_k$ ，并且  $E_k \rightarrow A_{k+1}$ ，这样，这五个命题就都是正确的。

## 七 递归函数

上节里我們的主要依据是

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n \quad (1)$$

和

$$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (2)$$

的关系。这启发了我們，如果知道了(2)，就可以作出一个(1)来。例如，我們知道了公式：

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1},$$

由此就可以作出一个恒等式：

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} \\ = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

关系式(2)本身就可以看成是用数学归纳法来定义  $S_n$  就是：

已知  $S_1 = a_1$ ，假設已知  $S_{k-1}$ ，那末由  $S_k = S_{k-1} + a_k$  就定义了  $S_k$ 。

① 我們用  $A_k \rightarrow B_k$  表示“假設  $A_k$  是正确的，那末  $B_k$  也是正确的。”

这是所谓递归函数的一个例证。

一般來說，递归函数是一个在正整数集上定义了的函数  $f(n)$ 。首先， $f(1)$  有定义；其次，如果知道了  $f(1), f(2), \dots, f(k)$ ，那末  $f(k+1)$  也就完全知道了。这实在不是什么新东西，而只是数学归纳法的重申。

例如，由

$$\begin{cases} f(k+1) = f(k) + k, \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

定义了一个递归函数。通过计算，可以知道  $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 7, \dots$ ，从而可以得出这个递归函数就是

$$f(k) = \frac{1}{2}k(k-1) + 1.$$

这个等式一下就变为一个需要“证明”的问题。而由数学归纳法可以知道：对于所有正整数  $n$ ，有

$$f(n) = \frac{1}{2}n(n-1) + 1.$$

本节开始时的例子，就是求解：

$$\begin{cases} f(k) - f(k+1) = \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1}, \\ f(1) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

跟数学归纳法一样，递归函数也可以有各种形式的“变着”。例如，由关系式

$$f(k+1) = 3f(k) - 2f(k-1)$$

所定义的  $f(k)$ ，就必须由两个已知值，例如  $f(0) = 2, f(1) = 3$

开始.

現在我們來證明這樣的開始值:

$$f(n) = 2^n + 1.$$

證明: 當  $n = 0, 1$  的時候, 這個結論顯然正確.

假設已知  $f(k) = 2^k + 1$ ,  $f(k-1) = 2^{k-1} + 1$ , 那末

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) \\ &= 2^{k+1} + 1. \end{aligned}$$

由此命題得證.

上面的這個解答  $f(n) = 2^n + 1$  又是怎樣想出來的呢? 可能是從  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 5$  等等歸納出來的, 但是從

$$f(k+1) - f(k) = 2[f(k) - f(k-1)]$$

來看, 却會更容易一些.

我們設

$$g(k) = f(k+1) - f(k).$$

那末由

$$g(1) = 2,$$

$$g(k+1) = 2g(k),$$

可見

$$g(k) = 2^k.$$

再由

$$f(k) - f(k-1) = 2^{k-1},$$

得出

$$f(n) - f(0) = \sum_{k=1}^n [f(k) - f(k-1)] \textcircled{1}$$

① “ $\sum$ ” 是和的符號, 讀做 “Sigma”.

$\sum_{k=1}^n [f(k) - f(k-1)]$  就是表示下面的和:

$$\begin{aligned} &[f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] \\ &+ \cdots + [f(n) - f(n-1)]. \end{aligned}$$

也就是順次用  $1, 2, 3, \cdots, n$  代替  $[f(k) - f(k-1)]$  里的  $k$ , 再把這  $n$  個差  $[f(1) - f(0)], [f(2) - f(1)], \cdots, [f(n) - f(n-1)]$  加起來.

下文里我們經常要使用這個符號, 讀者必須熟悉它.



$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \\
&= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

从而可得

$$f(n) = 2^n + 1.$$

## 八 排列和組合

数学归纳法最简单的应用之一，是用来研究排列和組合的公式。

讀者在中学代数課程中，已經知道：“从  $n$  个不同的元素里，每次取  $r$  个，按照一定的順序摆成一排，叫做从  $n$  个元素里每次取出  $r$  个元素的排列。”排列的种数，叫做排列数。从  $n$  个不同元素里每次取  $r$  个元素所有不同的排列数，可以用符号  $A_n^r$  来表示。对于  $A_n^r$  有下面的公式：

$$\text{定理 1} \quad A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \quad (1)$$

当时，这个公式并没有作严格的证明，現在我們利用数学归纳法来证明它。

**证明** 首先， $A_n^1 = n$ 。

这是显然的。如果再能证明

$$A_n^r = nA_{n-1}^{r-1},$$

那末，这个定理就可以应用数学归纳法来证明①。

① 因为当  $n=1$  的时候，这个定理显然是正确的；假设当  $n=k-1$  的时候，这个定理是正确的，那末

$$A_k^r = kA_{k-1}^{r-1} = k[(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)]. \quad (\text{这里}, 1 < r < k)$$

所以，当  $n=k$  的时候，这个定理也是正确的。

我們假定  $n$  个元素是  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 在每次取出  $r$  个元素的  $A_n^r$  种排列法里, 以  $a_1$  为首的共有  $A_{n-1}^r$  种, 以  $a_2$  为首的同样也有  $A_{n-1}^r$  种, 由此即得

$$A_n^r = nA_{n-1}^r.$$

于是定理得证.

定理 1 的特例是  $n$  个元素全取的排列数, 它是

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

我們用符号  $n!$  表示这个乘积, 就是

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)n.$$

这样, 定理 1 就可以写成

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

現在我們来研究更一般的情况:

$n$  个元素里, 有若干个是同类的, 其中有  $p$  个  $a$ ,  $q$  个  $b$ ,  $\dots$ . 求每次全取这些元素所作成的排列种数. 答案是:

$$N = \frac{n!}{p!q!\cdots}$$

这个結論可以这样来证明:

如果在  $p$  个  $a$  上标上号数  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , 作为不同的元素,  $q$  个  $b$  上标上号数  $b_1, b_2, \dots, b_q$ , 也作为不同的元素,  $\dots$ . 这样問題就变成了  $n$  个不同元素全取的排列, 得出的排列数是

$$P_n = n!.$$

把  $a_1, a_2, \dots, a_p$  这  $p$  个元素任意排列的排列数是  $p!$ . 但是实际上这  $p$  个元素是相同的元素, 是分辨不出的, 所以擦去了标号之后, 原来的  $p!$  个排列只变成了 1 个排列. 因此擦去  $a$

的编号以后, 排列的种数是

$$\frac{n!}{p!}$$

同样的, 再擦去  $b$  的标号以后, 排列的种数就是

$$\frac{n!}{p! q!}$$

等等.

注 我們用一个具体例子来说明. 例如, 求  $aaab$  全取排列的种数.

编号以后的排列种数是

$$P_4 = 4! = 24.$$

$a_1 a_2 a_3 b$
$a_1 a_3 a_2 b$
$a_2 a_1 a_3 b$
$a_2 a_3 a_1 b$
$a_3 a_1 a_2 b$
$a_3 a_2 a_1 b$

$a_1 a_2 b a_3$
$a_1 a_3 b a_2$
$a_2 a_1 b a_3$
$a_2 a_3 b a_1$
$a_3 a_1 b a_2$
$a_3 a_2 b a_1$

$a_1 b a_2 a_3$
$a_1 b a_3 a_2$
$a_2 b a_1 a_3$
$a_2 b a_3 a_1$
$a_3 b a_1 a_2$
$a_3 b a_2 a_1$

$b a_1 a_2 a_3$
$b a_1 a_3 a_2$
$b a_2 a_1 a_3$
$b a_2 a_3 a_1$
$b a_3 a_1 a_2$
$b a_3 a_2 a_1$

擦去编号以后, 每一直行里的 6 ( $3!$ ) 种, 变成了 1 种, 所以排列种数就成为 4 种:  $aaab$ ,  $aaba$ ,  $abaa$ ,  $baaa$ .

由此可见

$$N = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4.$$

讀者在中学代数課程中, 还曾知道: 从  $n$  个不同元素里, 每次取出  $r$  个, 不管怎样的順序并成一組, 叫做从  $n$  个元素里每次取出  $r$  个元素的組合. 組合的种数, 叫做組合数, 从  $n$  个不同元素里每次取出  $r$  个元素所有不同的組合数, 可以用符号  $C_n^r$  来表示. 对于  $C_n^r$  有下列的公式:

$$\text{定理 2} \quad C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (2)$$

这个定理也可以用数学归纳法来证明.

**证明** 首先,  $C_n^1 = n$ .

这是显然的. 如果再能证明当  $1 < r < n$  的时候,

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}, \quad (3)$$

那末, 这个定理就可以应用数学归纳法来证明①.

我們假定有  $n$  个不同的元素  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 在每次取出  $r$  个元素的组合里, 可以分为两类: 一类含有  $a_1$ , 一类不含有  $a_1$ . 含有  $a_1$  的组合数, 就等于从  $a_2, a_3, \dots, a_n$  里取  $r-1$  个元素的组合数, 它等于  $C_{n-1}^{r-1}$ ; 不含有  $a_1$  的组合数, 就等于  $a_2, a_3, \dots, a_n$  里取  $r$  个的组合数, 它等于  $C_{n-1}^r$ . 所以

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} \text{②}.$$

于是定理得证.

讀者在中学代数课程中学过的二项式定理

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= x^n + C_n^1 ax^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots \\ &\quad + \dots + C_n^k a^k x^{n-k} + \dots + C_n^n a^n \\ &= \sum_{j=0}^n C_n^j a^j x^{n-j}. \end{aligned}$$

就是利用组合的知识来证明的.

① 因为当  $n=1$  的时候, 这个定理是正确的; 假设当  $n=k-1$  的时候, 这个定理是正确的, 那末

$$\begin{aligned} C_k^r &= C_{k-1}^r + C_{k-1}^{r-1} = \frac{(k-1)!}{r!(k-1-r)!} + \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} \\ &= \frac{k!}{r!(k-r)!}. \quad (\text{这里, } 1 < r < k) \end{aligned}$$

所以当  $n=k$  的时候, 这个定理也是正确的.

② 公式  $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$  是一个十分重要的公式, 詳見拙著《从楊輝三角谈起》(中国青年出版社出版).

## 九 代数恒等式方面的例题

有不少代数恒等式，它的严格证明，需要用到数学归纳法。这里先讲几个读者所熟悉的例子。

**例 1** 等差数列的第  $n$  项，可以用公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (1)$$

表示。这里， $a_1$  是它的首项， $d$  是公差。

**证明** 当  $n=1$  的时候， $a_1 = a_1$ ，(1)式是成立的。

假设当  $n=k$  的时候，(1)式是成立的，那末，因为

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + d \\ &= a_1 + (k-1)d + d \\ &= a_1 + [(k+1)-1]d, \end{aligned}$$

所以当  $n=k+1$  的时候，(1)式也是成立的。由此可知，对于所有的  $n$ ，(1)式都是成立的。

**例 2** 等差数列前  $n$  项的和，可以用公式

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d \quad (2)$$

表示。这里， $a_1$  是它的首项， $d$  是公差。

这个公式也可以用数学归纳法来证明。

**证明** 当  $n=1$  的时候， $S_1 = a_1$ ，(2)式是成立的。

假设当  $n=k$  的时候，(2)式是成立的，那末

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ ka_1 + \frac{1}{2}k(k-1)d \right] + \{a_1 + [(k+1) - 1]d\} \\
&= (k+1)a_1 + \frac{1}{2}(k+1)[(k+1) - 1]d.
\end{aligned}$$

所以当  $n = k+1$  的时候, (2) 式也是成立的. 由此可知, 对于所有的  $n$ , (2) 式都是成立的.

**注** 例 1 里的公式(1)可以直观地得出, 但是例 2 里的公式(2)又怎样得出的呢? 所以从要找出这个公式的角度来考虑, 还是象中学代数课本里那样用“颠倒相加”的方法好. 而数学归纳法的作用只是在找出了这样的公式以后, 给以严格的证明.

**例 3** 等比数列的第  $n$  项可以用公式

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad (3)$$

表示; 前  $n$  项的和可以用公式

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (4)$$

表示. 这里,  $a_1$  是它的首项,  $q$  是公比.

这两个公式也都可以用数学归纳法来证明 (证明留给读者). 象例 2 一样, 公式(4)的导出, 当然也还是象中学代数课本里那样用习惯使用的方法, 就是把

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}, \\
qS_n &= a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n
\end{aligned}$$

两式相减, 再把所得差的两边同除以  $q-1$  来得好.

再谈高阶等差级数. 在拙著《从杨辉三角谈起》一书里提出的不少恒等式, 它们都可以用数学归纳法证明的. 其中最主要的是:

$$(1) 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n;$$

$$(2) 1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1);$$

$$(3) 1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2);$$

$$(4) 1+4+10+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \\ =\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3);$$

.....

这些公式，讀者不妨用数学归纳法一一加以验证。

这些公式是怎样得来的呢？事实上，它们都可以从上节里的公式(3)

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$$

推出。例如，取  $r=2$ ，就得

$$\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}(n-1)n = n;$$

取  $r=3$ ，就得

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \\ = \frac{1}{2}n(n+1);$$

等等。这样，应用第七节里所讲的方法，就可以从这些公式导出上面的恒等式。

有了这些公式，把  $n^2$  写成  $2\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] - n$ ，把  $n^3$  写成  $6\left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right] - 6\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] + n$ ，就可以算出

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[ \frac{1}{2}n(n+1) \right]^2.$$

作为练习, 請讀者先算出这些公式, 然后用数学归纳法加以证明.

## 十 差 分

我們把  $f(x) - f(x-1)$  叫做函数  $f(x)$  的差分. 記做

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1). \quad (1)$$

例如,  $f(n) = C_n^r$ , 它的差分就是

$$\begin{aligned} \Delta f(n) &= f(n) - f(n-1) \\ &= C_n^r - C_{n-1}^r \\ &= C_{n-1}^{r-1}. \quad [\text{应用第八节里的公式(3).}] \end{aligned}$$

前面我們所讲的求和问题

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n, \quad [=f(n)]$$

可以看做給了差分  $a_n = g(n)$ , 求原函数  $f(n)$ , 使

$$f(n) - f(n-1) = g(n) \quad (2)$$

的問題. 方程(2)叫做差分方程.

用数学归纳法的眼光来看, (2)式不过說出了归纳法的第二句話: “如果知道了  $f(n-1)$ , 那末可以定出  $f(n)$  [ $f(n) = f(n-1) + g(n)$ ] 来. 所以只有(2)式还不能完全定义  $f(n)$ , 还必须添上一句: “ $f(0)$  如何”. 加上了这句話, 归纳法的程序完成了, 因而对于所有的自然数  $n$ , 函数  $f(n)$  都定义了.

函数  $f(x)$  的差分  $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$ , 还是  $x$  的函



数。我們可以再求它的差分，这就引出了二阶差分的概念。就是

$$\Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x) - f(x-1)).$$

我們用  $\Delta^2 f(x)$  来表示。

一般的，如果对函数  $f(x)$  的  $r-1$  阶差分再求差分，就得到了  $f(x)$  的  $r$  阶差分。就是

$$\Delta^r f(x) = \Delta(\Delta^{r-1} f(x)). \quad (3)$$

現在我們用数学归纳法来证明下面的恒等式：

$$\Delta^n f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f(x-j) \textcircled{1}. \quad (4)$$

**证明** 当  $n=1$  的时候，(4)式就表示

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1),$$

命题显然正确。

假设当  $n=k$  的时候，(4)式是成立的，那末当  $n=k+1$  的时候，

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} f(x) &= \Delta(\Delta^k f(x)) \\ &= \Delta \left( \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) \right) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \Delta f(x-j) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j [f(x-j) - f(x-j-1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f(x-j) \\ &= f(x) - C_n^1 f(x-1) + C_n^2 f(x-2) \\ &\quad \dots \dots + (-1)^n C_n^n f(x-n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) \\
&\quad - \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j-1) \text{ ①} \\
&= \left[ f(x) + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) \right] \\
&\quad + \left[ \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^{j-1} f(x-j) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{k+1} f(x-k-1) \right] \\
&= f(x) + (-1)^{k+1} f(x-k-1) \\
&\quad + \sum_{j=1}^k (-1)^j (C_k^j + C_k^{j-1}) f(x-j) \\
&= f(x) + (-1)^{k+1} f(x-k-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{① } \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) &= C_k^0 f(x) - C_k^1 f(x-1) + C_k^2 f(x-2) \\
&\quad - \dots + (-1)^k C_k^k f(x-k) \\
&= f(x) + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^j f(x-j); \\
- \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j-1) & \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} C_k^j f(x-j-1) \\
&= - C_k^0 f(x-1) + C_k^1 f(x-2) - \dots \\
&\quad + (-1)^k C_k^{k-1} f(x-k) + (-1)^{k+1} C_k^k f(x-k-1) \\
&= \sum_{j=1}^k (-1)^j C_k^{j-1} f(x-j) + (-1)^{k+1} f(x-k-1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_{k+1}^j f(x-j) \textcircled{1} \\
& = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C_{k+1}^j f(x-j).
\end{aligned}$$

于是定理得证.

如果  $f(x)$  是  $x$  的多項式, 那末經過一次差分, 多項式的次数就降低 1 次, 因此对于任何一个次数低于  $k$  次的多項式, 經過  $k$  次差分, 一定等于 0. 也就是說, 如果  $f(x)$  是次数低于  $k$  次的多項式, 那末

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x-j) = 0. \quad (5)$$

特別的, 当  $x=k$  的时候, 取  $k-j=l$ , 那末

$$\sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} C_k^l f(l) = 0. \quad (6)$$

一阶差分方程

$$f(x) - f(x-1) = g(x)$$

的解是

$$\begin{aligned}
f(n) - f(0) &= \sum_{k=1}^n [f(k) - f(k-1)] \\
&= \sum_{k=1}^n g(k).
\end{aligned}$$

更一般的一阶差分方程

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \quad & f(x) + (-1)^{k+1} f(x-k-1) + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_{k+1}^j f(x-j) \\
&= f(x) + (-1) C_{k+1}^1 f(x-1) + (-1)^2 C_{k+1}^2 f(x-2) + \dots \\
&\quad + (-1)^k C_{k+1}^k f(x-k) + (-1)^{k+1} f(x-k-1) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C_{k+1}^j f(x-j).
\end{aligned}$$

$$af(x) - bf(x-1) = g(x),$$

不妨假定  $a=1$ , 于是

$$\begin{aligned} f(n) &= g(n) + bf(n-1) \\ &= g(n) + b[g(n-1) + bf(n-2)] \\ &= g(n) + bg(n-1) + b^2f(n-2) \\ &\dots\dots\dots \\ &= g(n) + bg(n-1) + b^2g(n-2) + \dots\dots \\ &\quad + b^{n-1}g(1) + b^nf(0). \end{aligned}$$

(可以用数学归纳法来证明)

二阶差分方程

$$f(x) + \alpha f(x-1) + \beta f(x-2) = g(x), \quad (7)$$

可以变成两次一阶差分方程来解. 因为

$$\begin{aligned} [f(x) + \lambda f(x-1)] + \mu [f(x-1) + \lambda f(x-2)] \\ = f(x) + (\lambda + \mu)f(x-1) + \lambda\mu f(x-2), \end{aligned}$$

从  $\lambda + \mu = \alpha$ ,  $\lambda\mu = \beta$  里解出  $\lambda$  和  $\mu$  来. 再设

$$h(x) = f(x) + \lambda f(x-1),$$

那末方程(7)就变成先求

$$h(x) + \mu h(x-1) = g(x),$$

再求

$$f(x) + \lambda f(x-1) = h(x)$$

的解了.

例 求差分方程

$$f(x) - 3f(x-1) + 2f(x-2) = 1,$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

的解.

解 设  $h(x) = f(x) - f(x-1)$ , 得

$$h(x) - 2h(x-1) = 1, \quad h(1) = 1.$$

解得

$$h(n) = 2^n - 1.$$

再从

$$f(x) - f(x-1) = 2^x - 1, \quad f(0) = 0,$$

解得

$$f(n) = 2^{n+1} - n - 2.$$

## 十一 李善兰恒等式

这里,我附带地介绍两个有趣的恒等式.

清末数学家李善兰(1810—1882)曾提出了恒等式

$$\sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 C_{n+2k-j}^{2k} = (C_{n+k}^k)^2. \quad (1)$$

这个恒等式流传于海外. 我们现在借讲过差分性质之便, 来证明这个恒等式.

因为

$$C_{n+k}^k = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}{k!},$$

所以李善兰恒等式(1)是下面这个更一般的恒等式

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots(x-j+1)}{(2k)!} \\ = \left[ \frac{(x+k)(x+k-1)\cdots(x+1)}{k!} \right]^2, \end{aligned} \quad (2)$$

在  $x=n$  时的特殊情形.

现在我们来证明恒等式(2)的成立.

(2)式的左右两边都是  $x$  的  $2k$  次多项式, 并且右边的多项式有二重根  $x = -l (1 \leq l \leq k)$ , 如果我们能够证明:

(i) 左右两边  $x^{2k}$  的系数相等, 就是

$$\sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 = \frac{(2k)!}{k! k!}; \quad (3)$$

(ii) 左边也有  $x = -l (1 \leq l \leq k)$  是它的重根, 那末问题就解决了.

先证明(i). 根据二项式定理, 得

$$(1+x)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j x^j.$$

因此,  $(1+x)^k \cdot (1+x)^k$  里  $x^k$  的系数等于

$$\sum_{j+l=k} C_k^j C_k^l = \sum_{j=0}^k C_k^j C_k^{k-j} = \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2.$$

另一方面, 从

$$(1+x)^k \cdot (1+x)^k = (1+x)^{2k}$$

的展开式里, 可知  $x^k$  的系数是

$$C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{k! k!}.$$

所以(3)式成立.

现在再来证(ii). (2)式里左边每一项里都含有因式  $x+l$ , 所以它有根  $x = -l$  是显然的. 问题只在于证明它有二重根  $x = -l$ .

因为(2)式左边各项都有因式  $x+l$ , 所以

$$\frac{1}{x+l} \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots(x-j+1)}{(2k)!}$$

$$= \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots(x+l+1)(x+l-1)\cdots(x-j+1)}{(2k)!}$$

我們证明, 当  $x = -l$  时, 这个式子的值是 0.

事实上, 当  $x = -l$  时, 上式的值等于

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \frac{[(2k-j-l)(2k-j-l-1)\cdots 1][(-1)\cdots(-l-j+1)]}{(2k)!} \\ &= \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{k!}{(k-j)! j!} \cdot \frac{(2k-j-l)! (l+j-1)!}{(2k)!} (-1)^{l+j-1} \\ &= (-1)^{l-1} \frac{k!}{(2k)!} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \frac{(2k-j-l)! (l+j-1)!}{(k-j)! j!} \\ &= (-1)^{l-1} \frac{k!}{(2k)!} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (2k-j-l) \cdots \\ & \quad (k-j+1)(l+j-1) \cdots (j+1). \quad (4) \end{aligned}$$

这里

$$(2k-j-l) \cdots (k-j+1)(l+j-1) \cdots (j+1)$$

是多项式

$$f(x) = (2k-x-l) \cdots (k-x+1)(l+x-1) \cdots (x+1)$$

当  $x=j$  时的值. 而  $f(x)$  是  $x$  的

$$(k-l) + (l-1) = k-1$$

次多项式. 因此根据上节里的公式(5)(第 38 页), 可知(4)式等于 0.

由此, 我們就证明了(2)式确是一个恒等式.

施惠同把李善兰恒等式进一步推广为:

設  $l \geq k \geq 0$ ,  $l, k$  是整数, 那末

$$\binom{x+k}{k} \binom{x+l}{l} = \sum_{j=0}^k C_k^j C_l^j \binom{x+k+l-j}{k+l-j}.$$

这里,  $x$  是实数, 符号  $(x+k)$  表示多项式  $\frac{1}{k!}(x+k)(x+k-1)\cdots(x+1)$ .

这个恒等式是怎样想出来的呢?

## 十二 不等式方面的例题

数学归纳法在证明不等式方面, 也很有用. 下面我们举几个例子.

例 1 求证  $n$  个非负数的几何平均数不大于它们的算术平均数.

$n$  个非负数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的几何平均数是

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}};$$

算术平均数是

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

所以本题就是要求证明:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \quad (1)$$

**证明** 当  $n=1$  的时候, (1) 式不证自明. 如果  $a_1, a_2, \dots, a_n$  里有一个等于 0, (1) 式也不证自明.

现在假设

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n.$$

如果  $a_1 = a_n$ , 那末所有的  $a_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 都相等, (1) 式也就不证自明. 所以我们进一步假设  $a_1 < a_n$ , 并且假设



$$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \quad (2)$$

成立. 显然(2)式的右边  $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} < a_n$ . 因为

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{(n-1) \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} + a_n}{n} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} + \frac{a_n - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}{n}, \end{aligned}$$

把等式两边都乘方  $n$  ( $n > 1$ ) 次, 并且由

$$(a+b)^n > a^n + na^{n-1}b, \quad (a > 0, b > 0)$$

可知

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \\ &> \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)^n \\ &+ n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{a_n - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}{n}\right) \\ &= a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\geq a_n (a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n, \end{aligned}$$

所以

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

也成立. 于是定理得证.

上面的证明中还说明了, 当各数都相等的时候, (1)式才会出现等号.

下面是另一个证法，它提出了数学归纳法的另一变着“反向归纳法”。

**别证** 当  $n=2$  的时候，(1)式是

$$(a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

这可以由  $(a_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{\frac{1}{2}})^2 \geq 0$  直接推出。

现在我们来证明，当  $n=2^p$ ， $p$  是任意自然数的时候，定理都是成立的。（用数学归纳法）

假设当  $n=2^k$  的时候，(1)式是成立的，那末

$$\begin{aligned} & (a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}} \\ &= \left[ (a_1 a_2 \cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} (a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ (a_1 a_2 \cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} + (a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k} \right] \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

所以当  $n=2^{k+1}$  的时候，(1)式也是成立的。因此，当  $n=2^p$ ， $p$  是任何自然数的时候，(1)式都是成立的。

进一步再推到一般的  $n$ 。我们在假设当  $n=k$  的时候，(1)式成立的前提下来证明，当  $n=k-1$  的时候，它也成立。

取  $a_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}$ 。因为当  $n=k$  的时候，(1)

式是成立的，所以

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k}{k} \\ &\geq (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)^{\frac{1}{k}} \\ &= \left( a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \right)^{\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

两边同除以  $\left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \right)^{\frac{1}{k}}$ , 得

$$\left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \geq (a_1 a_2 \cdots a_{k-1})^{\frac{1}{k}}.$$

由此得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geq (a_1 a_2 \cdots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}.$$

即得所证.

至此定理就完全得到了证明.

例 2 (加权平均) 设  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  是  $n$  个正数, 它们的和是 1. 那末, 当  $a_v \geq 0$  ( $v=1, 2, \cdots, n$ ) 的时候,

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n. \quad (3)$$

例 1 显然是例 2 在  $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$  时的特例. 但例 2 也并未走得很远. 事实上, 如果  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  是正有理数, 它们的公分母是  $l$ , 那末可以记做  $p_v = \frac{m_v}{l}$ , 而  $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = l$ . 我们想要证明的就变成是

$$(a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_n^{m_n})^{\frac{1}{l}} \leq \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n}{l}.$$

这就是例 1 里取  $m_1$  个等于  $a_1$ ,  $m_2$  个等于  $a_2$ ,  $\cdots$ ,  $m_n$  个等于  $a_n$  的特例而已. 也就是, (3) 式对适合于  $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$  的任意  $n$  个正有理数  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  都成立.

讀者如果學過極限的概念，就不難推出(3)式對所有適合於  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$  的正實數  $p_1, p_2, \dots, p_n$  都成立。

例3 設  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正數，並且

$$\begin{aligned} & (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) \\ & = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n. \end{aligned}$$

這裡  $c_r$  是從  $a_1, a_2, \dots, a_n$  里每次任意取  $r$  個乘起來的總和，它一定含有  $C_n^r$  項。而  $C_n^r$  就是從  $n$  個元素里每次取  $r$  個的組合數，也就是

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}.$$

現在定義  $P_r$  是從  $a_1, a_2, \dots, a_n$  里每次取  $r$  個的乘積的平均數，就是

$$P_r = \frac{c_r}{C_n^r}.$$

不難看到， $P_1$  就是  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的算術平均數，而  $P_n$  就是  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的幾何平均數的  $n$  次方。

比例1更廣泛些有以下的結果：

$$P_1 \geq P_2^{\frac{1}{2}} \geq P_3^{\frac{1}{3}} \cdots \geq P_n^{\frac{1}{n}}. \quad (4)$$

為了方便，我們再定義  $c_0 = 1, P_0 = 1$ 。於是這個結果可以由以下的結果推導出來：

$$P_{r-1}P_{r+1} \leq (P_r)^2, \quad (1 \leq r \leq n) \quad (5)$$

我們先用歸納法證明(5)式。當  $n=2$  的時候，它就是

$$a_1 a_2 \leq \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2,$$

所以(5)式一定成立。

假設對於  $(n-1)$  個數  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ，(5)式是成立的。

而用  $c'_r$ 、 $P'_r$  分别表示由这  $(n-1)$  个数所做成的  $c_r$ 、 $P_r$ 。又設  $c'_0 = P'_0 = 1$ ,  $c'_n = P'_n = 0$ , 那末

$$c_r = c'_r + a_n c'_{r-1} \quad (1 \leq r \leq n)$$

和

$$P_r = \frac{n-r}{n} P'_r + \frac{r}{n} a_n P'_{r-1}. \quad (1 \leq r \leq n)$$

(这里用到了  $\frac{C_{n-1}^r}{C_n^r} = \frac{n-r}{n}$ ,  $\frac{C_{n-1}^{r-1}}{C_n^r} = \frac{r}{n}$ .)

因此

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_r^2) = A + Ba_n + Ca_n^2. \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

这里

$$A = [(n-r)^2 - 1]P'_{r-1}P'_{r+1} - (n-r)^2P_r'^2,$$

$$B = (n-r+1)(r+1)P'_{r-1}P'_r \\ + (n-r-1)(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1} \\ - 2r(n-r)P'_{r-1}P'_r,$$

$$C = (r^2 - 1)P'_{r-2}P'_r - r^2P_{r-1}'^2.$$

由归纳法的假定与  $P'_0 = P'_n = 1$ , 易見

$$P'_{r-1}P'_{r+1} \leq P_r'^2, \quad (1 \leq r \leq n-2)$$

$$P'_{r-2}P'_r \leq P_{r-1}'^2. \quad (2 \leq r \leq n-1)$$

由此推得

$$P'_{r-2}P'_{r+1} \leq P'_{r-1}P'_r. \quad (2 \leq r \leq n-1)$$

因此, 当  $1 \leq r \leq n-1$  的时候,

$$A \leq \{[(n-r)^2 - 1] - (n-r)^2\}P_r'^2 = -P_r'^2,$$

$$B \leq [(n-r+1)(r+1) + (n-r-1)(r-1) \\ - 2r(n-r)]P'_{r-1}P'_r = 2P'_{r-1}P'_r,$$

$$C \leq [(r^2 - 1) - r^2] P_r'^2 = -P_r'^2.$$

所以

$$\begin{aligned} n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_r^2) &\leq -P_r'^2 + 2P_{r-1}'P_r' - P_{r-1}'^2 \\ &= -(P_r' - P_{r-1}')^2 \leq 0. \end{aligned}$$

因此

$$P_{r-1}P_{r+1} \leq P_r^2.$$

即得所证.

再由(5)推出(4)来,由(5)可知

$$\begin{aligned} (P_0P_2)(P_1P_3)^2(P_2P_4)^3 \cdots (P_{r-1}P_{r+1})^r \\ \leq P_1^2P_2^4P_3^6 \cdots P_r^{2r}, \end{aligned}$$

得

$$P_{r+1}^r \leq P_r^{r+1},$$

就是

$$P_r^{\frac{1}{r}} \geq P_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}.$$

这就是(4)式.

从这个問題就可以推出:

$$C_{r-1}C_{r+1} < C_r^2. \quad (6)$$

因为由

$$P_{r-1}P_{r+1} \leq P_r^2$$

得出

$$C_{r-1}C_{r+1} < \frac{(r+1)(n-r+1)}{r(n-r)} C_{r-1}C_{r+1} \leq C_r^2.$$

所以这是較弱的結論.

由(6)推出,当  $r < s$  的时候, (要不要用归納法?)

$$C_{r-1}C_s < C_rC_{s-1}. \quad (7)$$

由此也证明了,如果方程

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

只有負根，那末它的系数一定适合于(6)与(7)。

### 十三 几何方面的例題

数学归纳法还可以用来证明几何方面的问题。下面我们也举几个例子。

**例 1** 平面上有  $n$  条直线，其中没有两条平行，也没有三条经过同一点。求证：它們

(1) 共有  $V_n = \frac{1}{2} n(n-1)$  个交点；

(2) 互相分割成  $E_n = n^2$  条线段；

(3) 把平面分割成  $S_n = 1 + \frac{1}{2} n(n+1)$  块。

**证明** 假设命题在  $n-1$  条直线时是正确的。现在来看添上一条直线后的情况。

新添上去的 1 条直线与原来的  $n-1$  条直线各有 1 个交点，因此

$$V_n = V_{n-1} + n - 1.$$

这新添上去的 1 条直线被原来的  $n-1$  条直线分割为  $n$  段，而它又把原来的  $n-1$  条直线每条多分割出一段，因此

$$\begin{aligned} E_n &= E_{n-1} + n + n - 1 \\ &= E_{n-1} + 2n - 1. \end{aligned}$$

这新添上去的 1 条直线被分割为  $n$  段，每段把一块平面分成两块，总共要添出  $n$  块，因此

$$S_n = S_{n-1} + n.$$

当  $n=1$  的时候,  $V_1=0, E_1=1, S_1=2$ .

因此,

$$\begin{aligned}V_n &= (n-1) + V_{n-1} \\ &= (n-1) + (n-2) + V_{n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots\dots + 1 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_n &= (2n-1) + E_{n-1} \\ &= (2n-1) + (2n-3) + E_{n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ &= (2n-1) + (2n-3) + \dots\dots + 1 \\ &= n^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n &= n + S_{n-1} \\ &= n + (n-1) + S_{n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ &= n + (n-1) + \dots\dots + 2 + 2 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + 1. \end{aligned}$$

思考题: 如果平面上有  $n$  条直线, 其中  $a$  条过同一点,  $b$  条过同一点,  $\dots\dots$ , 这  $n$  条直线分平面为多少份?

例 2 空间有  $n$  个平面, 其中没有两个平面平行, 没有三个平面相交于同一条直线, 也没有四个平面过同一点. 求证: 它们

(1) 有  $V_n = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$  个交点;



(2) 有  $E_n = \frac{1}{2}n(n-1)^2$  段交綫;

(3) 有  $S_n = n + \frac{1}{2}n^2(n-1)$  片面;

(4) 把空間分成  $F_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$  份.

**证明** (1) 每三个平面有 1 个交点, 所以共有

$$C_n^3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

个交点.

(2) 每两个平面有 1 条交綫, 所以共有

$$C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

条交綫. 而每条交綫又被其他  $n-2$  个平面截为  $n-1$  段, 因此得

$$E_n = C_n^2 \cdot (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)^2.$$

(3) 在每个平面上都有这平面与其他  $n-1$  个平面的  $n-1$  条交綫, 而这平面被这  $n-1$  条交綫割成  $1 + \frac{1}{2}n(n-1)$  块(例 1). 因此共有

$$S_n = n \left[ 1 + \frac{1}{2}n(n-1) \right] = n + \frac{1}{2}n^2(n-1)$$

片面.

(4) 原来  $n-1$  个平面已把空間分成为  $F_{n-1}$  块. 再添上 1 个平面, 这平面上被分为  $1 + \frac{1}{2}n(n-1)$  部分, 每一部分又把一空間块切成两块. 因此得

$$F_n = F_{n-1} + 1 + \frac{1}{2}n(n-1).$$

应用归纳法, 由

$$F_1 = 2 \text{ 和 } F_{n-1} = \frac{1}{6}[(n-1)^3 + 5(n-1) + 6]$$

即可推得

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{6}[(n-1)^3 + 5(n-1) + 6] + 1 + \frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6). \end{aligned}$$

**例 3** 过同一点的  $n$  个平面, 其中没有 3 个交于同一条直线, 它们把空间分为  $[n(n-1) + 2]$  份.

证明留给读者.

与此等价的问题有:

**例 4** 球面上以球心为中心的圆称为大圆. 设有  $n$  个大圆, 其中任何 3 个都不能在球面上有同一个交点, 这些大圆把球面分成  $[n(n-1) + 2]$  份.

思考题: 依经纬度每隔  $30^\circ$  作一单位来划分球面, 这样划出的区域有多少点、线、面?

**例 5** 平面上若干条线段连在一起组成一个几何图形, 其中有顶点, 有边 (两端都是顶点的线段, 并且线段中间再没有别的顶点), 有面 (四周被线段所围绕的部分, 并且不是由两个或者两个以上的面合起来的). 如果用  $V$ 、 $E$  和  $S$  分别表示顶点数、边数和面数, 求证:

$$V - E + S = 1. \quad (1)$$

**证明** 我们应用数学归纳法.

当  $n=1$  就是有 1 条线段的时候, 有 2 个点, 1 条线, 无

面。也就是

$$V_1 = 2, \quad E_1 = 1, \quad S_1 = 0.$$

所以結論是正确的。

假設对由不多于  $k$  条綫段組成的图形, 这个定理成立, 現在证明对由  $(k+1)$  条綫段組成的图形, 这个定理也成立。

添上一条綫可以有几种添法, 但是这条綫是与原来的图形連在一起的, 所以至少要有一端在原图形上。根据这一点, 我們来考虑以下各种可能情况。

(1) 一端在图形外, 另一端就是原来的頂点。这样, 点数加上 1, 綫数加上 1, 面数不变。这就是要在原来的公式的左边加上  $1-1+0=0$ 。所以(1)式成立。

(2) 一端在图形外, 另一端在某一条綫段上。这样, 点数加上 2, 綫数也加上 2 (除掉添上的一条綫之外, 原来的某一条綫被分为两段), 面数不变。因为  $2-2+0=0$ , 所以(1)式仍成立。

(3) 两端恰好是原来的两頂点。这时, 这条綫段把一个面一分为两, 即綫、面数各加上 1, 而点数不变。因为  $0-1+1=0$ , 所以(1)式仍成立。

(4) 一端是頂点, 另一端在一条边上。这时, 点数加上 1, 边数加上 2 (一条是添的綫, 另一条来自把一边一分为两), 面数加上 1。因为  $1-2+1=0$ , 所以(1)式仍成立。

(5) 两端都在边上。这时, 点数加上 2, 边数加上 3, 面数加上 1。因为  $2-3+1=0$ , 所以(1)式仍成立。

綜上所述, 可知公式

$$V - E + F = 1$$

对于所有的  $n$  都成立。

## 十四 自然数的性质

作为本书的结束, 这里来谈谈自然数的性质.

众所周知, 自然数就是指

$$1, 2, 3, \dots$$

这些数所组成的整体.

对于自然数有以下的性质:

- (1) 1 是自然数.
- (2) 每一个确定的自然数  $a$ , 都有一个确定的随从<sup>①</sup>  $a'$ ,  $a'$  也是自然数.
- (3) 1 非随从, 即  $1 \neq a'$ .
- (4) 一个数只能是某一个数的随从, 或者根本不是随从,

即由

$$a' = b',$$

一定能推得

$$a = b.$$

(5) 任意一个自然数的集合, 如果包含 1, 并且假设包含  $a$ , 也一定包含  $a$  的随从  $a'$ , 那末这个集合包含所有的自然数.

这五条自然数的性质是由 Peano 抽象出来的, 因此通常把它叫做自然数的裴雅诺 (Peano) 公理. 特别的, 其中的性质(5)是数学归纳法(也称完全归纳法)的根据.

现在我们来证明以下的基本性质 (也称数学归纳法的第

---

<sup>①</sup> “随从”也叫做后继数, 就是紧接在某一个自然数后面的数. 例如, 1 的随从是 2; 2 的随从是 3 等等.

1964/6/19

二形式):

一批自然数里一定有一个最小的数, 也就是这个数小于其他所有的数.

**证明** 在这集合里任意取一个数  $n$ , 大于  $n$  的不必讨论了. 我们需要讨论的是那些不大于  $n$  的自然数里一定有一个最小的数.

应用归纳法. 如果  $n=1$ , 它本身就是自然数里的最小的数. 如果这集合里没有小于  $n$  的自然数存在, 那末  $n$  就是最小的, 也不必讨论了. 如果有一个  $m < n$ , 那末由数学归纳法的假设, 知道集合里不大于  $m$  的自然数里一定有一个最小的数存在. 这个数也就是原集合里的最小的数. 即得所证.

反过来, 也可以用这个性质来推出“数学归纳法”.

假设对于某些自然数命题是不正确的, 那末, 一定有一个最小的自然数  $n=k$  使这个命题不正确; 也就是, 当  $n=k-1$  的时候, 命题正确, 而当  $n=k$  的时候, 这个命题不正确. 这与归纳法的假定是矛盾的.

“最小数原则”不仅在理论研究上很重要, 在具体使用时, 有时也比归纳法原来的形式为方便. 但在这本书里, 不准备加以深论了.