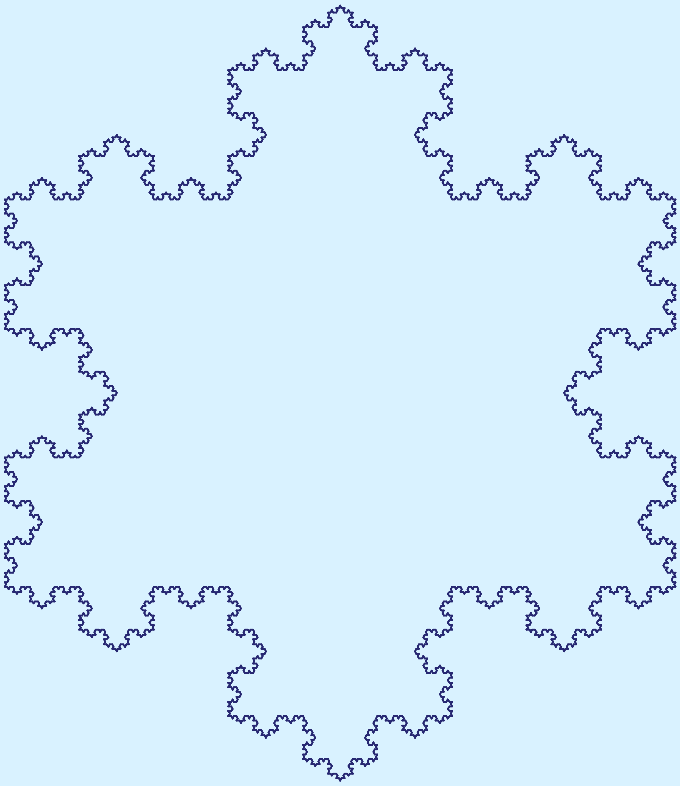
数学空间——人教数学网刊

高中数学



目录

1 入门篇——《智慧宝典》连载

1.1 第一回 昆仑山上话别离 集合谷里显身手——陈海峰

话说昆仑山上住在一位长老，姓孔，人称孔老师。其下有二个徒弟，男的名曰小豪，女的名唤小英。这天长老对徒弟们说：“你俩跟随我学艺有 11 年有余了。师傅已将所学全授予你俩了，只是为师有一件心愿未了。”只见小豪和小英同时跪下说：“承蒙师傅栽培，弟子愿赴汤蹈火，替师傅完成心愿。”孔长老点点头微笑说：“现在为师给你俩一个任务，去取得《智慧宝典》……”。说完命小童拿了两件宝物过来，一个小童揭开盖上宝物的纱巾，是一个金闪闪的笔；长老对小豪说：“为师送你‘奎星笔’。”小豪接过受了。又转头对小英说“为师也送你一件宝物”，又命人取了一件宝物，赫然是一个小算盘。长老见小英不解，对小英说：“可别小看这东西，它叫‘神算子’，这两件宝物可帮你们完成任务，今后你俩要相依为命，相伴行走江湖。要记住，江湖上诱惑很多，你们要用心思考，巧妙利用这两件宝物，用心思考，团结一心，克服难关，不负为师期望。”师徒含泪泣别，忽听得一声，吾去也！徒弟俩抬头一看，哪有师傅的踪影！

徒弟俩只能从昆仑山下来，一路青山绿水，两人高声放歌，好不快活。一路起来，来到一个峡谷，旁边有一石，上书“集合谷”三个大字。两人不忘师傅的所托，四处打听《智慧宝典》的下路，走不多时，见一小孩，说明来意后。那小孩说：“我不知你们说的东西是什么？很多面事只有我们大王才知道”。徒弟俩忙问如何见到大王，“我们大王只见聪明之人”，“如果不能回答他给出的问题，就免谈！”你们还是别去了，多少人都是无功而返呀！”“我去过你们的大王。”听到这句话，更加激起小豪的豪气。

只见两人来到集合王住处，但见上面刻有两句诗句，集合王府八字开，不会解题莫进来。旁边又提供了如下题组：

（1）已知：$A=\left\{y\mid y=5-x^2,x\in\mathbb{R}\right\}$，$B=\left\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbb{R}\right\}$，求：$A\bigcap B$。

（2）已知：$A=\left\{(x,y)\mid y=5-x^2,x\in\mathbb{R}\right\}$，$B=\left\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbb{R}\right\}$，求：$A\bigcap B$。

小豪看过之后，也不多想，就拿起‘奎星笔’写上——

解 第一问这里边的集合 A、B 都是数集。或者看作是这两个函数图象的值域。也就是 $A=\{y\mid y\le 5\}$，$B=\{y\mid y\ge 1\}$，所以 $A\bigcap B=\{y\mid 1\le y\le 5\}$。

第二问的中集合 A、B 的实质是点集。也是就求这两个函数的交点。解方程组 $\begin{cases} y=5-x^2 \\ y=x^2+1 \end{cases}$ 得出交点坐标 $\left(\sqrt{2},3\right)$ 和 $\left(-\sqrt{2},3\right)$，所以 $A\bigcap B=\left\{\left(\sqrt{2},3\right),\left(-\sqrt{2},3\right)\right\}$。 □

只听一声大喊，“妙！妙！妙！果然是孔长老的高徒，确实智慧过人。我斗胆问一下，你是如果看出来的。来我们这边的人很多人看不出它们的区别”只听小豪说：“这有何难，对于集合之类的题，关键是要注意表示集合中最基本的构成是什么？也就是集合中是元素是什么？才能抓住集合的本质。一般我们经常见的可能有数集、点集、图形集等等。”集合王点头默许。说：“来我们这边的人还有不少第二问写成 $A\bigcap B=\left\{\sqrt{2},3,-\sqrt{2},3\right\}$，这就犯了表述不当的错误。呵呵！好了，你们有什么事要我帮忙，请说。

小豪和小英说明来意，要打听《智慧宝典》的下落。只见集合王面色凝重，说：“这个《智慧宝典》据说已被分成两半，一半被‘函谷关’的守备大人所得，另外一半我也不知去向……”徒弟俩也不停留，疾往函谷关奔去，一路上，小豪说：“师傅可能多虑了，江湖诱惑也不过如此……，哈！哈！哈！

因为这个笑声，差点引来杀身之祸，欲知详情，且听下回分解。

1.2 第二回 小豪大意险丧命 小英小心救师兄——陈海峰

上回说到小豪和小英往函谷关奔来。但见函谷关气势雄伟，寒气逼人。小英道：我们得小心行事才是。小豪道：知道了。”可是心里不当一回事。

且说他们两人到了城前，正要进入。只听守门的两位将士大喝一声：“有没有通关文书”。徒弟俩从昆仑山下来，哪里见过什么关文，俩人说明来意，守卫将士不答应，更也不相信他们从集合谷来。只听一声“招打吧”。只见电光一闪，出现下面的题组：

例 1.2.1. （ 1 ）如果函数 $f(x)=\lg\left(x^2+2ax-a\right)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$ ，求实数 a 的取值范围。

（ 2 ）如果函数 $f(x)=\lg\left(x^2+2ax-a\right)$ 的值域是 $\mathbb{R}$ ，求实数 a 的取值范围。

小豪见状，拿起‘奎星笔’应敌．打过几个回合，只见小豪用笔写出如下答案。

解 （ 1 ） $f(x)=\lg\left(x^2+2ax-a\right)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$ ，则任意的 $x\in\mathbb{R}$ ，真数 $g(x)=x^2+2ax-a$ 的值必需大于 0 。由二次函数 $g(x)=x^2+2ax-a$ 的图象可知需满足 $\Delta<0$ 。即 $4a^2-4(-a)<0$ ，所以 $-1<a<0$ 。

（ 2 ）要使 $f(x)=\lg\left(x^2+2ax-a\right)$ 的值域是 $\mathbb{R}$ ，则也需真数大于 0 ， $\Delta<0$ ，即 $-1<a<0$ 。 □

小豪刚刚写完，只听大喝一声“中”，只见小豪被刺一刀，鲜血喷涌而出。

花开两朵，各表一枝，且说另一位守门将士朝小英打来．小英拿起‘神算子’应敌，只见一阵迷雾出现了“如果”题组。

例 1.2.2. 已知 $g(x)=\lg\left(4^x+4^{-x}-a\right)$ ，

（ 1 ）如果 $g(x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$ 。求实数 a 的取值范围。

（ 2 ）如果 $g(x)$ 的值域是 $\mathbb{R}$ 。求实数 a 的取值范围。

解 （ 1 ） $g(x)=\lg\left(4^x+4^{-x}-a\right)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$ ，则只需真数大于 0 ，即有 $4^x+4^{-x}-a>0$ ，从而知 $a<4^x+4^{-x}$ 对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立，而右边的 $4^x+4^{-x}\geq 2$ 。故 $a<2$ 。

（ 2 ）要使 $g(x)=\lg\left(4^x+4^{-x}-a\right)$ 的值域是 $\mathbb{R}$ ，就要 $4^x+4^{-x}-a$ 要取遍所有的正数，也就是函数 $t(x)=4^x+4^{-x}-a$ 的值域要充满所有在 y 轴的正半轴，故 $a\geq 2$ 。 □

只见挨呀一声，这名将士落荒而逃。

这时小英不敢追敌，救师兄要紧。急忙赶来助阵，说一声，“我来也”迎面而战，才发现这两个守门将士伎俩想同，就神算子一拔，出现如下答案。

解 （ 2 ）要做要使 $f(x)=\lg\left(x^2+2ax-a\right)$ 的值域是 $\mathbb{R}$ ，则真数 $g(x)=x^2+2ax-a$ 的值必能取遍所有大于 0 的数。由二次函数 $g(x)=x^2+2ax-a$ 图象知需要满足 $\Delta\geq 0$ 。也就是 $4a^2-4(-a)\geq 0$ 。所以 $a\geq 0$ 或 $a\leq -1$ 。 □

神算子刚拨完，只听一声“风紧”，这名将士又是落荒而逃。

小英急忙拿出师傅给的金创药敷上。说也神奇，小豪又恢复如初了。小豪说：“一开始我以为没什么，以我这两招都相同，谁知里面真的不同，而且后面一招更是暗藏杀机。”小英说：“其实你完全有能力对付的。只是你轻敌罢了，所有我们此去，应该更加小心，两个守门将士的武功就如此了得。我们真的不能大意，我们现在开始知道师傅所言了。”这回小豪用力的点点头。

欲知此去究竟遇到什么厉害角色，请听下回分解。

2　高考篇

2.1　高考常考题型分类总结（导数）——吴剑

导数自 2003 年开始在高考中出现后，便成为一个新的高考必考知识，并且很多省市都保持着一个小题一个大题的分值，与数列解析几何等并重，这也说明导数这一教材新知识的重要性。导数在高考中考查主要是以运用导数为主，体现了导数在解决函数相关问题甚至一些其他问题时的工具作用。主要考查点有切线、单调性、极值最值这几个基本内容，另外在这几个基本内容的基础上，也考察了导数在一些不等式、图象问题上的灵活运用。

题型一、切线

导数的几何意义： $f'(x_0)$ 即为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率。

如图 2.1.1 ，切线问题一般要注意到三个等量关系：

（ 1 ）切线斜率 $k=f'(x_0)$ ；

（ 2 ）切点 P 满足曲线方程;

（ 3 ）切点 P 满足切线方程。

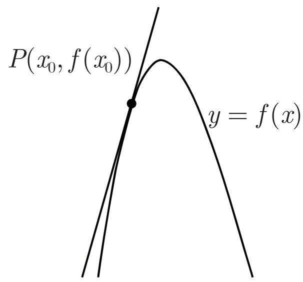


图 2.1.1

例　2.1.1. $f(x)=x^3+bx^2+cx+2$ 在点 $P(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $6x-y+7=0$ ，求 b 、 c 的值。

解　$f'(x)=3x^2+2bx+c$ ，由 P 点坐标要满足切线方程可得 $f(-1)=1$ ，代入到 $f(x)=x^3+bx^2+cx+2$ 有

$$b=c\text{ ，} \tag{2.1.1}$$

又 $6=f'(-1)$ ，即

$$3-2b+c=6\text{ ，} \tag{2.1.2}$$

由 (2.1.1) 、 (2.1.2) 解得 $b=c=-3$ 。 □

评注：这是一个比较基础的运用导数几何意义的问题，求当中的变量，那么就要抓住已有的三个等量关系。

例　2.1.2. 已知 $y=x+1$ 与 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 $a=$ ________ 。

解　设切点为 (x_0, x_0+1) ， $(\ln(x+a))'=\dfrac{1}{x+a}$ ，则由题意有

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_0+a}=1\text{ ，} & (2.1.3) \\ x_0+1=\ln(x_0+a)\text{ ，} & (2.1.4) \end{cases}$$

由 (2.1.3) 有 $x_0+a=1$ ，代入 (2.1.4) 有，则解得 $a=2$ ， $x_0=-1$ 。 □

评注：此题只说了直线与曲线相切，并没有提到切点。但是要用相切的条件必须要有切点横坐标才行，所以一开始就设出切点直接套用三个等量关系是此题的关键。

例 2.1.3. 求过原点且与曲线 $f(x)=x^3-3x^2+2x$ 相切的切线方程。

错解 $f'(x)=3x^2-6x+2$ ， $f'(0)=2$ ， $f(0)=0$ ，故切线方程为 $y=2x$ 。 □

评注：这是一个很容易出错的概念，很多老师以及一些教参上都直接利用错解的方法。过 P 点作曲线的切线与曲线在 P 点处的切线是两个完全不同的概念。如图 2.1.2 ，过 P 点做切线， P 点不见得一定是切点，有可能切点是 Q 点，也就是说满足条件的切线有图中的 l_1 、 l_2 。但是 P 点处的切线就是以 P 为切点那条切线，就只能是图中的 l_1 。

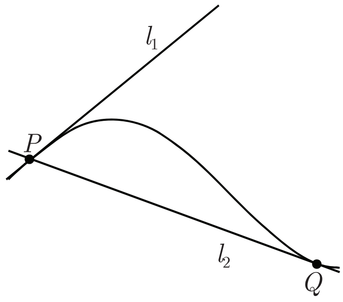


图 2.1.2

解 设切点为 $\left(x_0,x_0^3-3x_0^2+2x_0\right)$ ，则该点处的切线方程为

$$l:y-\left(x_0^3-3x_0^2+2x_0\right)=\left(3x_0^2-6x+2\right)(x-x_0) \text{ ，}$$

因为其要过原点，则将原点代入有

$$0-\left(x_0^3-3x_0^2+2x_0\right)=\left(3x_0^2-6x+2\right)(0-x_0) \text{ ，}$$

化简得

$$x_0^2(2x_0-3)=0 \text{ ，}$$

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=\dfrac{3}{2}$ ，代入到 l 的方程中得到切线方程为 $y=2x$ 或 $y=-\dfrac{1}{4}x$ 。 □

例 2.1.4. $y=x^{n+1}$ （ $n\in\mathbb{N}^*$ ）在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴交点横坐标为 $(x_n,0)$ ，求 $x_1x_2\cdots x_n$ 的值。

解 $y'=(n+1)x^n$ ，则 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=(n+1)(x-1)$ 。令 $y=0$ 有 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ ，则 $x_1x_2\cdots x_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ 。 □

题型二、单调性与极值

例 2.1.5. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)-f(x)<0$ ，则当 $0<a<b$ 时 （ ）

A. $af(a)<f(b)$ B. $bf(b)<f(a)$ C. $af(b)<bf(a)$ D. $af(b)>bf(a)$

解 由 $xf'(x)-f(x)<0$ 可得 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ ，即

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'<0 \text{ ，}$$

则函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数。又 $0<a<b$ ，则 $\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$ 即 $af(b)<bf(a)$ 。故答案为 C 。 □

评注：此题是一个常见的抽象函数单调性问题，题目中所给式子的结构与某一函数求导后的结构非常相似，所以构造出函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 后即可得到其单调性，与之类似的还有以下几题：

（ 1 ） $f'(x)>f(x)$ ，则当 $x>0$ 时 $f(x)$ ____ $e^xf(0)$ 。

（ 2 ）设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$ ，且 $2f(x)+xf'(x)>x^2$ ，下面的不等式在 $\mathbb{R}$ 上恒成立的是 （ ）

A. $f(x)>0$ B. $f(x)<0$ C. $f(x)>x$ D. $f(x)<x$

例 2.1.6. （3）已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{b}{2}x^2+x$ 在 $\mathbb{R}$ 上有极值点，则 b 的取值范围是________。

此题在学生中易产生一种错解。

错解 $f'(x)=x^2-bx+1$，则要存在极值点，即是 $f'(x)=x^2-bx+1=0$ 要有根，故由 $\Delta\geq 0 \implies b^2\geq 4$。 □

错因分析：对于可导函数，x_0 是极值点 $\implies f'(x_0)=0$，但 $f'(x_0)=0$ 却不能得到 x_0 一定是极值点。就此题而言，若 $b=2$，则 $f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$，虽然此时 $f'(1)=0$，但是在 $x<1, x>1$ 时，导数值均是正数，函数增，故这不是极值点。当 $b=-2$ 时，同理可知不满足。由此可见正解应为 $b<-2$ 或 $b>2$。

评注：高考中的导函数一般以二次函数居多，所以这题可以为我们可以得到这样一个判断方法：$f'(x)=0$ 有解，且不能是重根。故此题可直接列式 $\Delta>0 \implies b^2>4$。

例 2.1.7. 已知 $f(x)=x-\frac{2}{x}+a(2-\ln x)\ (a>0)$，讨论 $f(x)$ 的单调性和极值的情况。

解 注意到该函数定义域为 $(0,+\infty)$，求导得

$$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+2}{x^2}\ 。$$

（1）当 $a^2-8\leq 0$ 时，$f'(x)=\frac{x^2-ax+2}{x^2}\geq 0$，且 $f'(x)=0$ 的解为重根，故函数在 $(0,+\infty)$ 增，此时函数在 $(0,+\infty)$ 无极值；

（2）当 $a^2-8>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 可解得 $x<\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$ 或 $x>\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$，$f'(x)<0$ 可解得 $\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}<x<\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$。

故减区间为 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}\right)$，增区间为 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}\right),\left(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2},+\infty\right)$。

当 $x=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$ 时，函数取得极大值，当 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$ 函数取得极小值。 □

评注：该题是非常常见的单调性问题，考察中大都不给出具体函数求单调区间，而是带一个参数在中间需要分类讨论。并且在导函数多为二次函数的情况下，将含参数的二次不等式讨论综合到函数单调性里面，也体现了旧知识在新知识中的运用。其次，解这类题还要注意到函数自身的定义域，不要只顾解不等式而忘记了 $x>0$ 这个条件。

变式一 若 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递减，求实数 a 的取值范围。

解法一 由上题可知，只有 $a^2-8>0$ 时，函数才具有减区间，又 $f(x)$ 要在 $(1,2)$ 递减，则

$$(1,2)\subseteq\left(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}\right)\ ,$$

故

$$\begin{cases}\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}\leq 1\\ 2\leq\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}\end{cases}\implies a\geq 3\ 。$$

□

解法二 $f(x)$ 要在 $(1,2)$ 递减，即 $f'(x)=\dfrac{x^2-ax+2}{x^2}\le 0$ 在 $(1,2)$ 恒成立，即

$$x^2-ax+2\le 0 \implies x+\frac{2}{x}\le a\ ,$$

故

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)_{\max}\le a \implies a\ge 3\ 。$$

□

评注：法一是先求出单调区间再利用集合的关系解不等式组得到参数范围。法二是利用了导数在区间中的符号建立起一个二次不等式恒成立问题，大大的简化了计算过程，这里注意到用的是 $f'(x)\le 0$ ，是因为只要 $f'(x)=0$ 的解是孤立的，那么 $f'(x)\le 0$ 都能得到函数严格单减。而导数是二次函数时， $f'(x)=0$ 的解肯定不会连续出现。

变式二 若 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 不单调，求实数 a 的取值范围。

解 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 不单调，即是 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内有极值点。即 $x^2-ax+2=0$ 在 $(1,2)$ 内有解，且不是重根。即 $x+\dfrac{2}{x}=a$ 在 $(1,2)$ 内有解。通过 $y=x+\dfrac{2}{x}$ 在 $(1,2)$ 的图象可得 $a\in\left(2\sqrt{2},3\right)$ 。 □

评注：该题设问灵活，需要学生去分析不单调的本质含义，得到最后方程根的分布问题。另外，在解决二次方程根的分布问题时，如果能够多注意分离参数的方法，那比起传统的根的分布的讨论来得更加简洁和迅速。

例 2.1.8. 若函数 $f(x)=\log_a(x^3-ax)\ (a>0,a\ne 1)$ 在区间 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 内单调递增，则实数 a 的取值范围是 （ ）

A. $\left[\dfrac{1}{4},1\right)$ B. $\left[\dfrac{3}{4},1\right)$ C. $\left(\dfrac{9}{4},+\infty\right)$ D. $\left(1,\dfrac{9}{4}\right)$

解 $f'(x)=\dfrac{3x^2-a}{(x^3-ax)\ln a}$ ，依题意有

$$\begin{cases} x^3-ax>0 \\ \dfrac{3x^2-a}{(x^3-ax)\ln a}\ge 0 \end{cases}$$

在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 恒成立。由 $x^3-ax>0 \implies a>\dfrac{1}{4}$ 。

当 $a<1$ 时， $\dfrac{3x^2-a}{(x^3-ax)\ln a}\ge 0 \implies a\ge\dfrac{3}{4}$ ；

当 $a>1$ 时， $\dfrac{3x^2-a}{(x^3-ax)\ln a}\ge 0 \implies a\le 0$ ，矛盾。

综上： $a\in\left[\dfrac{3}{4},1\right)$ ，故答案为 B 。 □

评注：此题运用了变式一中法二的方法，使得这个问题得到简化。并且此题要注意真数为正 $x^3-ax>0$ 这一隐含条件。另外此题利用符合函数单调性的方法也可以解决，在这里不做解答。

2.2 高中基础数列知识微型整理——郭子伟

本文的普通正文内容为高中阶段普通数列题的一些基础知识以及常用方法小归纳，适用于普通高中生，而选读内容（楷书字体部分）则会稍作加深，志在给有兴趣的同学或老师阅读，随你看不看。

一、基础公式

	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1}-a_n=d$	$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q\neq 0$
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$ ； $a_n=a_m+(n-m)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$ ； $a_n=a_mq^{n-m}$
项的性质	$m+n=p+q \implies a_m+a_n=a_p+a_q$	$m+n=p+q \implies a_ma_n=a_pa_q$
前 n 项和	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$	$S_n=\begin{cases} na_1 & q=1 \\ a_1\dfrac{1-q^n}{1-q} & q\neq 1\end{cases}$
和的性质	每连续 k 项的和组成的数列仍然等差	每连续 k 项的和（或积）组成的数列若无 0 则仍然等比

选读： 不怕记乱的话，熟悉下列公式可能有助提高解题速度：对于等差数列，有

- $S_n=na_n-\dfrac{n(n-1)}{2}d$ （知末项或涉及末项时用）
- $S_{m\sim n}=\begin{cases}(n-m+1)a_1+\dfrac{(n+m-2)(n-m+1)}{2}d \\ (n-m+1)a_m+\dfrac{(n-m+1)(n-m)}{2}d\end{cases}$ （ $S_{m\sim n}$ 表示第 m 项到第 n 项之和）
- $S_n=\dfrac{d}{2}\left(n-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a_1}{d}\right)\right)^2-\dfrac{d}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a_1}{d}\right)^2$ （此式便于观察 S_n 的最值情况）
- $S_m=S_n \iff S_{m+n}=0$

大家可以尝试对等比数列写出类似的公式变式。

书本上推导等比数列的前 n 项和公式用的是错位相减法，是一个很好的方法，其实还可以利用一个有用的恒等式给出另一个简洁推导：对于 $n\in\mathbb{N}^+$ 及意任 a,b ，恒有

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})\text{ ，} \tag{2.2.1}$$

此式的成立可以说是显然的，令 $a=1,b=q$ 即得 $1-q^n=(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$ ，从而当 $q\neq 1$ 时就有 $S_n=a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ 。 □

无穷等比数列的所有项的和存在的充要条件是 $0<|q|<1$ ，其和为 $\dfrac{a_1}{1-q}$ 。

二、数列求通项方法

直接能利用等差等比定义求通项的就不说了，下面讲其它常见的一些类型。

由“和”与“项”之间的关系求通项

即给出的式中同时出现 S 和 a 两种量时，我们一般利用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 消去其中一种，转化为接下来要讲的递推关系去求解，记得解完后还需验证 $n=1$ 时是否符合。至于应该消去哪种就具体情况具体分析了，在高中题目里，按照经验，多数消去 S 会方便一些，例外的比如下面这道经典题：

例 2.2.1. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 中，前 n 项和为 S_n ，且对任意正整数 n 均有 $2S_n = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ 成立，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

大家可以试试从两个方向去消项求解，这里就不写解答了，结果 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ，留给读者玩。

由递推关系求通项

这部分的类型较多，也是重点内容，下面一一讲解。

类型 2.2.1. $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型

即是将等差数列中的 d 换成了关于 n 的函数 $f(n)$ ，因此有“似等差数列”之称。求解方法为叠加法，将以下 $n-1$ 个式子

$$\begin{gathered} a_n = a_{n-1} + f(n-1) \\ a_{n-1} = a_{n-2} + f(n-2) \\ \cdots \\ a_2 = a_1 + f(1) \end{gathered}$$

相加即得

$$a_n = f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(1) + a_1 \text{ 。} \tag{2.2.2}$$

类型 2.2.2. $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ 型

与“似等差”类似，这个也有“似等比数列”之称，刚才叠加，这个自然是叠乘，仿上易得

$$a_n = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdots f(1) \cdot a_1 \text{ 。} \tag{2.2.3}$$

类型 2.2.3. $a_{n+1} = pa_n + q$ 型（ p, q 为非零常数且 $p \neq 1$ ）

待定系数法：假设递推式可以化成

$$a_{n+1} - x = p\left(a_n - x\right)$$

的形式，其中 x 为待定系数，经展开后与原式对比可知应有 $x - px = q$ ，解得

$$x = \frac{q}{1-p} \text{ ，}$$

从而得到

$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p} = p\left(a_n - \frac{q}{1-p}\right) \text{ ，} \tag{2.2.4}$$

即数列 $\left\{a_n - \dfrac{q}{1-p}\right\}$ 为等比数列，即可解出 a_n 。

变项作差法：由已知得

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + q \text{ ，} \\ a_n = pa_{n-1} + q \text{ ，} \end{cases}$$

两式相减得

$$a_{n+1} - a_n = p(a_n - a_{n-1}) \text{ ，} \tag{2.2.5}$$

即数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等比数列，求出 $a_{n+1} - a_n$ 后即转化为类型 2.2.1 。

两种方法对比下，个人认为待定系数法比较方便。

类型 2.2.4. $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型（ p 为非零常数）

这是类型 2.2.1 的进一步，事实上，只要两边同时除以 p^n 即得

$$\frac{a_{n+1}}{p^n}=\frac{a_n}{p^{n-1}}+\frac{f(n)}{p^n}\text{ ，} \tag{2.2.6}$$

令 $\dfrac{a_n}{p^{n-1}}=b_n$ 及 $\dfrac{f(n)}{q^n}=g(n)$ ，则显然数列 $\{b_n\}$ 满足类型 2.2.1 ，求得 b_n 即可得 a_n 。

选读： 上面的是类型 2.2.4 的通法，而其实如果对于某些特殊的 $f(n)$ ，也可以尝试其它方法。例如若递推关系式为 $a_{n+1}=2a_n+n^2$ ，我们可尝试采取待定系数法，假设式子可化为 $a_{n+1}+k(n+1)^2+j(n+1)+h=2\left(a_n+kn^2+jn+h\right)$ ，展开与原式对比系数后方可得到 $k=1,j=2,h=3$ ，即有

$$a_{n+1}+(n+1)^2+2(n+1)+3=2\left(a_n+n^2+2n+3\right)\text{ ，} \tag{2.2.7}$$

由此易求 a_n 。除了待定系数还可以尝试裂项，请读者试试。

类型 2.2.5. $a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$ 型

比类型 2.2.4 再进一步，不过方法其实没什么分别，也是考虑两边除以 $f(n)$ 的连乘式后类似地处理，但由于除完再求和的式子大概会很复杂，因此如果不是特意安排好的式子，很可能最后求不出和来。涉及此类型题较为少见，以下仅以一经典题说明解法。

例 2.2.2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=6$ ，且对任意正整数 n 均有 $\dfrac{a_{n+1}+a_n-1}{a_{n+1}-a_n+1}=n$ 成立，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解 当 $n\geq 2$ 时，由已知等式可解得

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{n-1}a_n-\frac{n+1}{n-1}\text{ ，} \tag{2.2.8}$$

两边除以 $n(n+1)$ 并裂项整理得

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)n}-\frac{1}{n}=\frac{a_n}{n(n-1)}-\frac{1}{n-1}\text{ 。} \tag{2.2.9}$$

可见数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n(n-1)}-\dfrac{1}{n-1}\right\}$ 为常数列，下略。 □

类型 2.2.6. $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{ra_n+s}$ 型（ p,r,s 为非零常数）

倒数法：对递推式两边倒数即得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{s}{p}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{r}{p}\text{ ，}$$

显然数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 满足类型 2.2.3 ，即可解出 a_n 。

选读： 将 p,r,s 改成关于 n 的函数也可以类似地倒数转化为前面的类型去求解。

类型 2.2.7. $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ 型（ p,q,r,s 为非零常数）

这是类型 2.2.6 的进一步，为了转化为类型 2.2.6 去求解，我们利用待定系数法，两边加参数去转化，这里我们用一个实例去说明如何操作。

例 2.2.3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ，且对任意正整数 n 均有 $a_{n+1} = \dfrac{5a_n + 4}{2a_n + 7}$ 成立，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解 两边减参数 k 并整理，可得

$$a_{n+1} - k = \frac{(5-2k)\left(a_n + \dfrac{4-7k}{5-2k}\right)}{2a_n + 7} \ , \tag{2.2.10}$$

令

$$-k = \frac{4-7k}{5-2k} \ , \tag{2.2.11}$$

解此方程得两根 $k = 1$ 或 $k = -2$ ，取其一，譬如 $k = 1$ ，代入整理即得

$$a_{n+1} - 1 = \frac{3(a_n - 1)}{2(a_n - 1) + 9} \ , \tag{2.2.12}$$

则数列 $\{a_n - 1\}$ 就满足类型 2.2.6 ，从而用倒数法求解即可得出 a_n 。 □

选读： 也可以再取另一根 $k = -2$ 代入后再与式 (2.2.12) 比之得到

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 2} \ , \tag{2.2.13}$$

由等比求出 $\dfrac{a_n - 1}{a_n + 2}$ 即可解出 a_n 。

一般地，对 $a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ 作如上待定系数后需要的 k 满足方程

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \ , \tag{2.2.14}$$

目前主流解法就是解出此方程的两根后得型如 (2.2.13) 的式子再解之，由于方程 (2.2.13) 可看递推关系的不动点方程，故此也称之为“不动点法”。需要注意的是此法需要两根不相同时才有两种式子去比，而前面的转化为倒数法则只需一根，就没有此限制。

不动点法还适用于 $a_{n+1} = \dfrac{pa_n^2 + r}{2pa_n + t}$ 型，操作方法类似，读者不妨试试。

类型 2.2.8. $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ 型（ p, q 为非零常数）

还是用待定系数法，假设递推式能化为 $a_{n+2} - ra_{n+1} = s(a_{n+1} - ra_n)$ ，展开对比系数应有 $r + s = p$ 及 $-rs = q$ ，由韦达定理可见 r, s 为方程

$$x^2 = px + q \tag{2.2.15}$$

的两根，这样便可以先求出 $a_{n+1} - ra_n$ 后转化为类型 2.2.4 去求解。

选读： 方程 (2.2.15) 称作此递推式的特征方程，它的根称为特征根，因此此方法也称作“特征根法”。非齐次的或更高阶的线性递推数列也可以利用特征根法去求解，这里就不说太多了。值得一提的是，可以证明，当前面的两特征根 r, s 不相等时，则通项公式总能写成

$$a_n = Ar^n + Bs^n \tag{2.2.16}$$

的形式，这样我们可以通过前两项及特征根去解出常数 A, B 即可得到通项公式。

关于通项就先讲到这里，还有一些特殊的数列求通项法鉴于难度就不说了。另外，不是任何数列都能求通项，虽然上面列了若干，但我想这也仅是冰山一角中的一角。

三、数列求和

下面也分几种类型去略总结一下求和方法。

倒序相加

在前面讲等差数列时已经提及了倒序相加方法，这种思想不仅用于等差数列求和，只要是对称项有一定关系的都可以尝试这样做，比如下例：

例 2.2.4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4^x+2}$ ，求 $f\left(\dfrac{1}{2011}\right)+f\left(\dfrac{2}{2011}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2010}{2011}\right)$ 的值。

分析 观察所求的式子，考虑 $f(x)+f(1-x)$ ，只要化简得到定值，即可倒序相加。 □

选读：一般地，当 $a>0,a\neq1,b\neq0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{a^x+b}$ 的对称中心为 $\left(\log_a|b|,\dfrac{1}{2b}\right)$ ，证明留给读者。

把“倒序”的思想再拓广一下，还可以是“旋转一角度”后再加，比如 2009 年湖南理数第 15 题就可以用这种思想，具体可参考作者的一贴 `http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=479052` 中第 164 楼。

错位相减

对于型如 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$ 其中 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别为等差和等比数列，都可以用错位相减的方法去求和，其操作方法就是先乘公比再作差。

例 2.2.5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=n\cdot3^n$ ，求其前 n 项和 S_n 。

解 由已知有

$$S_n=3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+n\cdot3^n\text{ ，}$$
$$3S_n=3^2+2\cdot3^3+3\cdot3^4+\cdots+n\cdot3^{n+1}\text{ ，}$$

两式相减有

$$2S_n=-3-3^2-3^3-\cdots-3^n+n\cdot3^{n+1}\text{ ，}$$

化简即得

$$S_n=\frac{(2n-1)\cdot3^{n+1}+3}{4}\text{ 。}$$

□

选读：此题还可以用导数或裂项相消去求解，详情可参考： `http://bbs.pep.com.cn/thread-329938-1-1.html` ，此链接可谓经典贴也，大家在论坛上遇见好贴都应收藏。

裂项相消

例 2.2.6. 求 $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{2010\cdot2011}$ 的值。

解 利用

$$\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\text{ ，}$$

得

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2010\cdot2011}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}=\frac{2010}{2011}\text{ 。}$$

□

一般地，有裂项公式 $\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$ 。

选读： 更一般地，有裂项公式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n(n+k)(n+2k)\cdots(n+mk)}\\&=\frac{1}{mk}\left(\frac{1}{n(n+k)(n+2k)\cdots(n+(m-1)k)}-\frac{1}{(n+k)(n+2k)(n+3k)\cdots(n+mk)}\right)\text{。}\end{aligned}$$

例 2.2.7. 求 $1\cdot2+2\cdot3+\cdots+2010\cdot2011$ 的值。

解 利用

$$(n-1)\cdot n=\frac{-(n-2)(n-1)n+(n-1)n(n+1)}{3}\text{，}$$

得

$$\begin{aligned}&1\cdot2+2\cdot3+\cdots+2010\cdot2011\\&=\frac{-0\cdot1\cdot2+1\cdot2\cdot3-1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4-\cdots-2009\cdot2010\cdot2011+2010\cdot2011\cdot2012}{3}\\&=\frac{2010\cdot2011\cdot2012}{3}=2710908440\text{。}\end{aligned}$$

□

一般地，有裂项公式 $n\left(n+k\right)=\dfrac{-\left(n-k\right)n\left(n+k\right)+n\left(n+k\right)\left(n+2k\right)}{3k}$ 。

另外，本题也可以通过 $(n-1)\cdot n=n^2-n$ ，然后分别累加求解，需要用到 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的求和，这将在后面的“等幂和”部分会讲到。

选读： 更一般地，有裂项公式

$$n(n+k)(n+2k)\cdots(n+mk)=\frac{-(n-k)n(n+k)\cdots(n+mk)+n(n+k)(n+2k)\cdots(n+(m+1)k)}{(m+2)k}\text{。}$$

其它常用的裂项公式还有

- $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$
- $n\cdot n!=(n+1)!-n!$
- $C_n^k=C_{n+1}^{k+1}-C_n^{k+1}$
- $\tan(n\alpha)\cdot\tan\left((n+1)\alpha\right)=\dfrac{\tan\left((n+1)\alpha\right)-\tan(n\alpha)}{\tan\alpha}-1$
- $\sin\left(\alpha+n\beta\right)=\dfrac{\cos\dfrac{2\alpha+(2n-1)\beta}{2}-\cos\dfrac{2\alpha+(2n+1)\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}$

等等。

等幂和

这里所说的“等幂和”就是指形如

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k \tag{2.2.17}$$

的式子。当 $k=1$ 时就是等差数列求和。当 $k=2$ 时，由 $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$ 可得

$$\begin{gathered}2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1\ ,\\3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1\ ,\\\cdots\\(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1\ ,\end{gathered}$$

相加得

$$(n+1)^3-1^3=3\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+\frac{3n(n+1)}{2}+n\ ,$$

化简得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ 。\tag{2.2.18}$$

当 $k=3$ 时，由 $(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$ 可得

$$\begin{gathered}2^4-1^4=4\cdot1^2+6\cdot1^2+4\cdot1+1\ ,\\3^4-2^4=4\cdot2^2+6\cdot2^2+4\cdot2+1\ ,\\\cdots\\(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1\ ,\end{gathered}$$

相加得

$$(n+1)^4-1=4\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)+n(n+1)(2n+1)+n\ ,$$

利用式 (2.2.18) 化简得

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}=(1+2+\cdots+n)^2\ \ 。\tag{2.2.19}$$

如此类推，即可以求出所有 $k\in\mathbb{N}^+$ 的等幂和，读者可以试试继续往上推。

选读： $k\in\mathbb{N}^+$ 的等幂和还有个更好的求和方法，就是高阶等差数列的思想，鉴于篇幅，这里就不说了，有兴趣的可以查阅资料研究一下。

当 $k=-1$ 时式 (2.2.17) 即为著名的“调和数列”的前 n 项和，当 n 为无穷时也称为“调和级数”。调和数列没有初等求和公式，调和级数是发散的，但减去 $\ln n$ 后收敛，即有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma\ ,\tag{2.2.20}$$

这里的 γ 称作欧拉常数，值约为 0.57718 ，尚未清楚该数是有理数还是无理数。

当 $k=-2$ 时，也有著名的极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}\ ,\tag{2.2.21}$$

此极限曾经是一大难题，极限值是由欧拉最先得到的。

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^k$ 当 $k\geq-1$ 时发散，当 $k<-1$ 时收敛。

OK ，这个微型整理暂时就先整到这里，希望本文能对大家有所帮助，有机会再续。

2.3 简单多面体截面的画法——何万程

画简单多面体的截面是学习立体几何中提供空间想象力和加深线面相交基本性质认识的很好的问题，其中常用到下面几个性质：

1. 直线与平面若相交且直线不在平面内，则仅有一交点；
2. 两平面若相交，则交于一直线；
3. 三平面若两两相交，则三平面有且只有一个公共点，这个公共点也是这些平面交线的公共点；
4. 若一平面与两个平行平面其中一个相交，则与另外一个平面也相交，交线平行。

下面举几个简单例子说明一下。

例 2.3.1. 如图 2.3.1 所示，正方体 $ABCD$-$EFGH$ 的棱 AE 上有一点 P ，棱 BF 上有一点 Q ，棱 DH 上有一点 R ，画出平面 PQR 截正方体 $ABCD$-$EFGH$ 的截面。

解 作直线 PQ 与 EF 的交点 S ，作直线 PR 与 EH 的交点 T 。连直线 ST ，与 FG 的交点为 U ，与 GH 的交点 V 。则五边形 $PQUVR$ 就是所求的截面。 □

例 2.3.2. 如图 2.3.2 所示，正方体 $ABCD$-$EFGH$ 的棱 AE 上有一点 P ，棱 BF 上有一点 Q ，棱 GH 上有一点 R ，画出平面 PQR 截正方体 $ABCD$-$EFGH$ 的截面。

解 作直线 PQ 与 EF 的交点 S 。连直线 SR ，与 FG 交于点 U ，与 EH 交于点 T 。连直线 PT ，与 DH 交于 V 。则五边形 $PQURV$ 就是所求的截面。 □

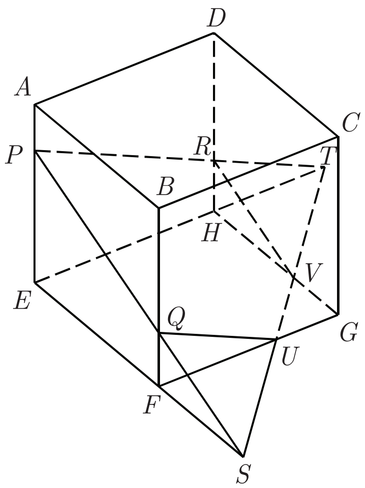


图 2.3.1

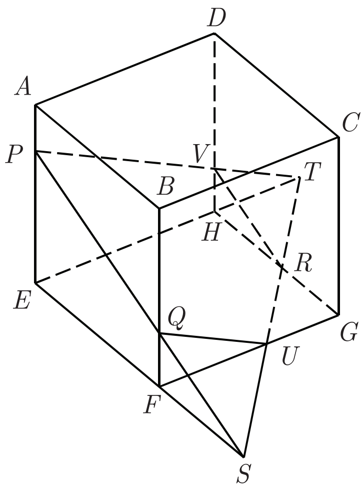


图 2.3.2

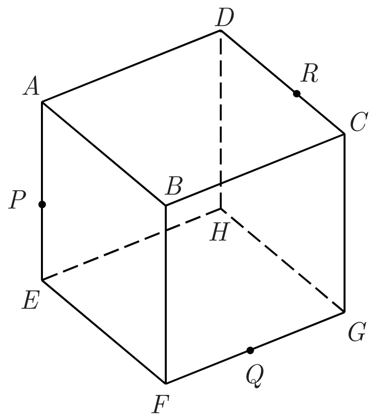


图 2.3.3

以上两个例子都比较简单，有两点是在多面体的同一面上的，这样求交点就很容易。下面举一个稍为复杂点的例子。

例 2.3.3. 五棱锥 P-$BCDEF$ 的棱 AB 上有一点 P ，棱 CD 上有一点 Q ，棱 AE 上有一点 R ，求平面 PQR 截五棱锥 P-$BCDEF$ 所得的截面。

解 如图 2.3.4 所示，若 PQ 不与平面 $BCDEF$ 平行，则过点 P,Q 作 AF 的平行线分别与 FB,EF 相交于点 S,T 。连直线 PQ 、 ST ，两线相交于点 U 。连直线 QU ，与 BC 相交于点 V ，与 DE 相交于

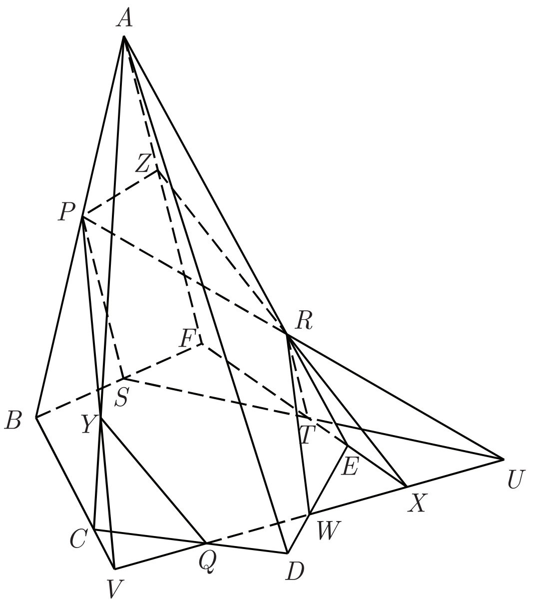


图 2.3.4

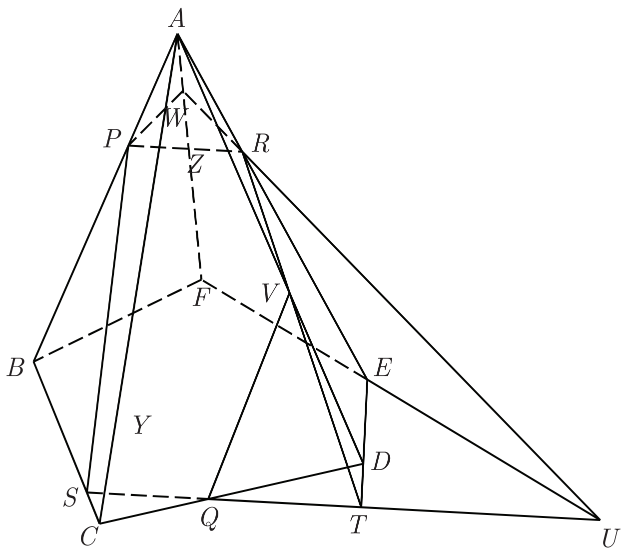


图 2.3.5

点 W，与 EF 相交于点 X。连直线 PV，与 AC 相交于点 Y。连直线 RX，与 AF 相交于点 Z。则六边形 $PYQWRZ$ 就是所求的截面。

如图 2.3.5 所示，若 $PQ \parallel$ 平面 $BCDEF$，则过点 Q 作 PQ 的平行线。若这条平行线不与 CD 重合（若这条平行线不与 CD 重合，则如果操作，留给读者思考），则作与 BC 的交点 S，与 DE 的交点 T，与 EF 的交点 U。连直线 RT，交 AD 于点 V。连直线 RU，交 AF 于点 W。则六边形 $PSQVRW$ 就是所求的截面。 □

下面这个题目留给读者作为练习。

如图 2.3.3 所示，正方体 $ABCD$-$EFGH$ 的棱 AE 上有一点 P，棱 FG 上有一点 Q，棱 CD 上有一点 R，画出平面 PQR 截正方体 $ABCD$-$EFGH$ 的截面。

2.4 ab1962 解题集精选（一）——廖凡

本文中的题目和解答均由 ab1962 历任版主的上千题网上解题集的第 1 ~ 100 题中精选出来的，从选题、 LaTeX 重排版到题后的评注均由现任版主 kuing 完成。排版过程中，在解答内容上基本按照原解答进行编制，并未作太多的改动。

由于这些题目和解答都是在几年前的论坛上的，而自 06 年到 07 年之间论坛的大改版后，这些旧贴的链接全部失效， tid 也对不上，附件也全部丢失！因此这里就无法给出原贴地址了，见谅。

本系列精选将会在接下来的几期内不断刊出，内容精彩，敬请关注。

kuing

题目 2.4.1. 数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=\dfrac{11}{7}$ 且对任意正整数 n 有 $a_{n+1}=1+\dfrac{2}{a_n}$ ，求证： $(-1)a_1+(-1)^2a_2+\cdots+(-1)^na_n<1$ 。

证明 先证

$$0<a_{2n-1}<2\,,\quad a_{2n}>2\,。\tag{2.4.1}$$

当 $n=1$ 时， $0<a_1=\dfrac{11}{7}<2$ ， $a_2=\dfrac{25}{11}>2$ ， (2.4.1) 式成立;

假设当 $n=k$ 时 (2.4.1) 式成立，即有 $0<a_{2k-1}<2$ ， $a_{2k}>2$ ，则当 $n=k+1$ 时，有

$$a_{2k+1}=1+\frac{2}{a_{2k}}>0\,,\quad a_{2k+1}-2=\frac{2}{a_{2k}}-1=\frac{2-a_{2k}}{a_{2k}}<0\,,$$

$$a_{2k+2}-2=\frac{2}{a_{2k+1}}-1=\frac{2-a_{2k+1}}{a_{2k+1}}=\frac{1-\dfrac{2}{a_{2k}}}{1+\dfrac{2}{a_{2k}}}=\frac{a_{2k}-2}{a_{2k}+2}>0\,,$$

所以 $0<a_{2k+1}<2$ ， $a_{2k+2}>2$ ，即当 $n=k+1$ 时 (2.4.1) 式也成立， (2.4.1) 式得证。

设

$$b_n=a_{2n}-a_{2n-1}=\frac{(a_{2n}-2)(a_{2n}+1)}{a_{2n}-1}\,,$$

$$b_{n+1}=a_{2n+2}-a_{2n+1}=\frac{2(a_{2n}-2)(a_{2n}+1)}{a_{2n}(a_{2n}+2)}\,,$$

则

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2(a_{2n}-1)}{a_{2n}(a_{2n}+2)}=\frac{2}{a_{2n}-1+\dfrac{3}{a_{2n}-1}+4}\le\frac{2}{2\sqrt{3}+4}=2-\sqrt{3}\,,$$

注意到 $a_2=\dfrac{25}{11}$ ， $b_1=a_2-a_1=\dfrac{54}{77}$ ，有

$$b_n=b_1\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}\le\frac{54}{77}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^{n-1}\,,$$

所以

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<\frac{54}{77\left(1-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)}=\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{11}<1\,,$$

因此当 n 为偶数时 $(-1)a_1+(-1)^2a_2+\cdots+(-1)^na_n<1$ 成立。而当 n 为奇数时多了个负加数因此原式也成立，故原命题成立。 □

kuing 注： 其实 a_n 的通项是可求的，事实上经计算可知上述 b_n 的通项为 $\dfrac{27\cdot4^n}{(3\cdot4^n+2)(3\cdot4^n-1)}$ ，由此容易证明 $b_n<\dfrac{3}{4^n}$ ，求和有 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<1-4^{-n}<1$ 即得证，个人认为这可能才是出题人的想法。

题目 2.4.2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a^2=b(b+c)$ 。（1）求证 $A=2B$ ；（2）若 $a=\sqrt{3}b$ ，试判断 $\triangle ABC$ 的形状。

解 （1）**证法一** 由余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ，结合 $a^2=b(b+c)$ 得到

$$\begin{aligned}b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+bc &\iff c-2b\cos A=b\\&\iff \sin C-2\sin B\cos A=\sin B\\&\iff \sin(A+B)-2\sin B\cos A=\sin B\\&\iff \sin(A-B)=\sin B\\&\iff A-B=B\\&\iff A=2B\text{ 。}\end{aligned}$$

证法二 延长 CA ，使 $AD=AB$ ，连 BD ，则 $\angle 1=\angle D$ ，由 $a^2=b(b+c)$ 得 $BC^2=CA\cdot CD$ ，于是

$$\triangle ABC\sim\triangle BDC\implies\angle ABC=\angle D\text{，}$$

因此

$$\angle BAC=\angle 1+\angle D=2\angle D=2\angle ABC\text{ 。}$$

（2）把 $a=\sqrt{3}b$ 代入 $a^2=b(b+c)$ 得 $c=2b$ ，则

$$c^2-a^2=4b^2-3b^2=b^2\text{，}$$

即 $\triangle ABC$ 是直角三解形。 □

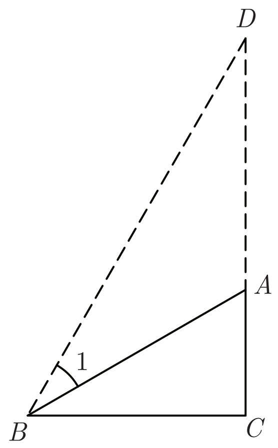


图 2.4.1

题目 2.4.3. 数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1+a$ 其中 $a>0$ ，对任意正整数 n 有 $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}+a$ 。求证：对于一切正整数 n 都有 $a_n>1$ 。

证明 由 $a_1=1+a=\dfrac{1-a^2}{1-a}$ ， $a_2=\dfrac{1}{a_1}+a=\dfrac{1-a}{1-a^2}+a=\dfrac{1-a^3}{1-a^2}$ ， $a_3=\dfrac{1}{a_2}+a=\dfrac{1-a^2}{1-a^3}+a=\dfrac{1-a^4}{1-a^3}$ ，从而猜想出

$$a_n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a^n}\text{ 。}\tag{2.4.2}$$

下面用数学归纳法证明，当 $n=1$ 时式 (2.4.2) 显然成立，假设当 $n=k$ 时式 (2.4.2) 成立，即 $a_k=\dfrac{1-a^{k+1}}{1-a^k}$ ，则当 $n=k+1$ 时

$$a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+a=\frac{1-a^k}{1-a^{k+1}}+a=\frac{1-a^{k+2}}{1-a^{k+1}}\text{，}$$

即当 $n=k+1$ 时式 (2.4.2) 也成立，式 (2.4.2) 得证。于是

$$a_n-1=\frac{1-a^{n+1}}{1-a^n}-1=\frac{1-a^{n+1}-1+a^n}{1-a^n}=\frac{a^n(1-a)}{1-a^n}>0\text{，}$$

即得 $a_n>1$ 。 □

kuing 注： 此证法通过归纳猜想，从而用数学归纳法简洁地求得通项公式，避免了复杂的求解，是妙解也。若用普通求通项的通法，则需要转化为倒数法或不动点法等。

题目 2.4.4. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 且 $|f(0)|\le 1$ ， $|f(1)|\le 1$ ， $|f(-1)|\le 1$ ，求证：当 $-1\le x\le 1$ 时有 $|f(x)|\le \frac{5}{4}$ 。

证明 设 $f(1)=m$ ， $f(-1)=n$ ， $f(0)=c$ ，则 $|m|\le 1$ ， $|n|\le 1$ ， $|c|\le 1$ ，又由 $a+b+c=m, a-b+c=n$ 得 $a=\frac{1}{2}(m+n-2c)$ ， $b=\frac{1}{2}(m-n)$ ，于是

$$\begin{aligned}
f(x)&=ax^2+bx+c\\
&=\frac{1}{2}(m+n-2c)x^2+\frac{1}{2}(m-n)x+c\\
&=m\left(\frac{x^2+x}{2}\right)+n\left(\frac{x^2-x}{2}\right)+c\left(1-x^2\right) ,
\end{aligned}$$

由绝对值不等式有

$$\begin{aligned}
|f(x)|&\le\left|m\left(\frac{x^2+x}{2}\right)\right|+\left|n\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\right|+\left|c(1-x^2)\right|\\
&\le\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+\left|\frac{x^2-x}{2}\right|+\left|1-x^2\right| 。
\end{aligned}$$

（ 1 ）当 $-1\le x\le 0$ 时

$$\begin{aligned}
|f(x)|&\le\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+\left|\frac{x^2-x}{2}\right|+\left|1-x^2\right|\\
&=-\left(\frac{x^2+x}{2}\right)+\left(\frac{x^2-x}{2}\right)+(1-x^2)\\
&=-x^2-x+1\\
&=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\le\frac{5}{4} ;
\end{aligned}$$

（ 2 ）当 $0\le x\le 1$ 时

$$\begin{aligned}
|f(x)|&\le\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+\left|\frac{x^2-x}{2}\right|+\left|1-x^2\right|\\
&=\left(\frac{x^2+x}{2}\right)+\left(\frac{-x^2+x}{2}\right)+(1-x^2)\\
&=-x^2+x+1\\
&=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\le\frac{5}{4} 。
\end{aligned}$$

综上所述，原命题成立。 □

kuing 注： 其实后面的证明可以更简单，不必分类讨论，由 $-1\le x\le 1$ 得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+\left|\frac{x^2-x}{2}\right|+\left|1-x^2\right|&=\frac{|x|(1+x)}{2}+\frac{|x|(1-x)}{2}+1-x^2\\
&=|x|+1-x^2\\
&=|x|(1-|x|)+1\\
&\le\left(\frac{|x|+1-|x|}{2}\right)^2+1\\
&=\frac{5}{4} ,
\end{aligned}$$

即得证。

题目 2.4.5. 第 $n+1$ 项等于 n 项加上第 n 项的倒数，如何求通项。

解 由 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 求通项可能很困难，但 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ 求通项是有办法的。由递推式有

$$a_{n+1}+1=\frac{a_n^2+1}{2a_n}+1=\frac{(a_n+1)^2}{2a_n}\ ,$$

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n^2+1}{2a_n}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}\ ,$$

两式相除得 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\left(\dfrac{a_n+1}{a_{n1}-1}\right)^2$ ，于是

$$\frac{a_n+1}{a_n-1}=\left(\frac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}-1}\right)^2=\left(\frac{a_{n-2}+1}{a_{n-2}-1}\right)^{2\times2}=\left(\frac{a_{n-3}+1}{a_{n-3}-1}\right)^{2\times2\times2}=\cdots=\left(\frac{a_1+1}{a_1-1}\right)^{2^n}\ ,$$

故 a_n 可解出。

另外，已知 $a_{n+1}=aa_n+\dfrac{b}{a_n}$ 求通项的一般方法是否被发现了，不太清楚，可以肯定的是已知 $a_{n+1}=ka_n+b$ ， $a_{n+1}=ka_n+ba_{n-1}$ ， $a_{n+1}=ka_n^b$ （字母全正）， $a_{n+1}=\dfrac{ca_n}{ka_n+b}$ 是可以求通项的。 □

kuing 注：据我所知 $a_{n+1}=aa_n+\dfrac{b}{a_n}$ 求通项办法还没发现，而可以解决的是 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n^2+r}{2pa_n+t}$ 型，更多内容参考《微型整理》一文。

题目 2.4.6. 设圆满足：① 截 y 轴所得弦长为 2 ；② 被 x 轴分成两段圆弧，其弧长的比为 $3:1$ ，在满足条件 ① 、 ② 的所有圆中，求圆心到直线 $x-2y=0$ 的距离最小的圆的方程。

解 设圆的圆心为 $P(a,b)$ ，半径为 r ，则点 P 到 x 轴， y 轴的距离分别为 $|b|,|a|$ 。由题设知圆 P 截 x 轴所得劣弧对的圆心角为 90° ，知圆 P 截 x 轴所得的弦长为 $\sqrt{2}r$ ，故

$$r^2=2b^2\ 。$$

因 P 截 y 轴所得的弦长为 2 ，故 $r^2=a^2+1$ ，从而得

$$2b^2-a^2=1\ 。$$

因点 $P(a,b)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$ ，所以

$$5d^2=|a-2b|^2=a^2+4b^2-4ab\geq a^2+4b^2-2\left(a^2+b^2\right)=2b^2-a^2=1\ ,$$

当且仅当 $a=b$ 时上式等号成立，结合 $2b^2-a^2=1$ 解得 $a=b=\pm1$ ，再由 $r^2=2b^2$ 知 $r=\sqrt{2}$ ，即 d 取得最小值时的圆的方程为

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2\ ,$$

或

$$(x+1)^2+(y+1)^2=2\ 。$$

□

2.5 羊の问题门诊——杨洪

引言

有问题和思考问题的人才会有适合的结果，也才会有成功的那天。

弱点是最难被挖掘的更何况是自己的弱点，一般都不愿意去面对。

但是一旦面对了无可逃了便真是无处可逃，会自己逼上改正之路。

我已经把学习上的各类问题逐步收集起来，现在回复大家的疑问。

目前整理就是先把问题贴完整和回复完整，把总结也写精简清楚。

重新安排了问题门诊的帖子以便阅读理解，各位敬请朋友的关注。

以后就继续续在这贴里出大家最新的疑问，解答都支持错题理论。

能用错题理论和实践的我尽量提倡和推广，因为实为一种好方法。

以下是把一些比较常见或比较有意义的问题及答复归类罗列出来。

在以后每期的网刊中我都将选择出一些问题门诊系列的问答内容。

考前百日安排——羊の学科门诊 I

> 原帖由 zzw100 于 2004-12-31 13:30 发表
>
> 请问羊羊羊羊先生：
>
> 现在离高考还有 150 几天，面对数学中差生（高考成绩勉强及格的学生），应该采取什么措施呢？请您不吝赐教！

羊复：

先得提出一个进程性问题，这个学生的数学课内容是结束了还是在某一个阶段？

如果最后的课程没有结束，那就只能依据这个学生目前数学老师的规划前进了。

如果最后的课程完全结束，在我看来这些时间应该勉强够进行整体性的小复习。

虽然在实际操作上有困难，但是要想做一个小的系统性复习并非是不可能实现。

依我看就数学这门课来说，差生各方面基础问题非常多并且错误都非常地顽固。

不过差生认识本来就较弱，自己无法发觉或者系统地对自己的错误和问题归类。

列几点：

1. 公式札记

把时间穿插到一个半月中，把数学书本上的所有公式看一次并且将其推导完善。

如果哪有推导推不出来的，那么既是基础薄弱的基本体现又是高考的失分方向。

最好做一本数学公式札记，表示出自己推导的理解和演算的过程以示学习到位。

2. 教学笔记

上课课堂教学价值非常大，课堂教学笔记阅读理解及例题都是老师的精华部分。

应该主动去摘选课堂教学，其他虽然是系统性强的衔接但无大意义详略应得当。

应自己取舍教学笔记内容，但是在取舍方面的安排不应该花过多的时间及精力。

因为时间少一天就没一天，高考的尾巴半年中只要越接近高考就越是需要效率。

3. 错题积累

这需要长时间操作和执行，对于错题记录摘抄和整理等工作都是贵在坚持不懈。

一直把以前的卷子找出来，时间差不多算下来从年底开始一直把错题记录出来。

记录完一张卷子就丢一张，在错题的摘录面前不必去理会卷子的整体视觉效果。

就算是有蒙对或者猜对的，这方面知识点的缺漏一定会在别的卷子中体现出来。

这里需要再反复强调一下，在错题研究策略上的重点的思路是错题积累和改造。

有了积累可以把错题归类，归类的问题越多越可以越准确的反映出问题的缺陷。

积累错题时要将错题改造，由于学生的能力本身就比较差所以这点要求比较高。

只能寄期望与其数学老师，希望能够帮忙改造并且反复对错误的题目进行演练。

4. 题海战术

我始终认为没题海不牢靠，题海多则错题多而他们要的不是对的题目而是错题。

5. 整体规划

能力差的学生定不来计划，可找老师帮忙规划一下这最后一段时间的整体计划。

一旦定下计划便坚决执行，除非由于学校或其他突发性因素而无法执行者除外。

把学习规划的时间分配好，时间很重要因而更得把学习时间的环节扣得准确些。

学习计划一定得包括生活，得尽量把状态调整到离考前近的时候达到最佳状态。

宁可开始的计划难度低些，这样适应得比较快且执行起来难度不大可持续进步。

总得来说我的思路还是在错题，错题之优势：

1. 体现薄弱

错题就体现最薄弱的环节，是客观体现自己问题的东西尤其差学生更是如此了。

2. 出题意图

错题就是体现出题者意图，出题者出题意图往往是知识易混淆且能力有缺陷处。

3. 重拾信心

把错题挖掘出来并且面对，使自己在难题和自己容易失误的题目面更加有信心。

注：仅供参考。

此法已实践在中效果不错，只要是为他们着想的话有意见和想法请直接说无妨。

如果确实觉得有意义的话，我们应当去认真思索研究甚至狠狠地进行自我批判。

试卷双面问题——羊の学科门诊 II

> 原帖由 姣姣 于 2006-4-6 20:42 发表
>
> 如果习题的两面都需要剪怎么办？

羊复：

大面积复印。

小面积摘抄。

抄袭答案疑惑——羊の学科门诊 III

> 原帖由 某游客 于 2006-8-27 21:05 发表
>
> 理科一般都全自己做，然后再对照看答案，纠错。
>
> 做做抄抄一般都是语文的。不知道这样对语文是不是，很不好啊？

羊复：

理科文科都是一般性学科，其实一般性学科的学习和解答都应该做完再对答案。

否则很担心养成习惯之后，一旦遇到做不出来的题目就习惯性去翻答案就完了。

不是习惯性去攻那些门槛，那进步的锐气岂非受阻而被取而代之直至消逝了么？

3　进阶篇

3.1　双曲函数的基本性质及简单应用（上）——吴炜超

双曲函数，这个名字有点玄乎，难道又是什么高等玩意？非也，双曲函数是一种仅有指数函数构成的重要初等函数，它和三角函数有类似的性质，可以看做是三角函数的一种延伸。本文将介绍双曲函数的基本性质并与三角函数进行对比，在（下）篇将会给出一些简单的应用例子。

一、双曲函数是什么东西？

双曲函数和三角函数极为类似，也有 6 种，下面一一道来：

双曲正弦函数：记号为 $\sinh(x)$ 或 $\operatorname{sh}(x)$ ，其中 $\operatorname{sh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ， $x\in\mathbb{R}$ ；

双曲余弦函数：记号为 $\cosh(x)$ 或 $\operatorname{ch}(x)$ ，其中 $\operatorname{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ ， $x\in\mathbb{R}$ ；

双曲正切函数：记号为 $\tanh(x)$ 或 $\operatorname{th}(x)$ ，其中 $\operatorname{th}(x)=\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ ， $x\in\mathbb{R}$ ；

双曲余切函数：记号为 $\coth(x)$ 或 $\operatorname{cth}(x)$ ，其中 $\operatorname{cth}(x)=\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ ， $x\neq 0$ ；

双曲正割函数： $\operatorname{sech}(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$ ， $x\in\mathbb{R}$ ；

双曲余割函数： $\operatorname{csch}(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)}=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$ ， $x\neq 0$ 。

其中双曲余切、正割、余割和三角的余切、正割、余割一样，比较少用，这里只是简单介绍一下，主要将介绍双曲正弦和余弦的性质及应用。

二、双曲函数有哪些基本性质？

1. 值域、奇偶性和图象

首先不难看出 $\operatorname{sh}(x)$ 是个奇函数，因为 $\operatorname{sh}(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\operatorname{sh}(x)$ 。

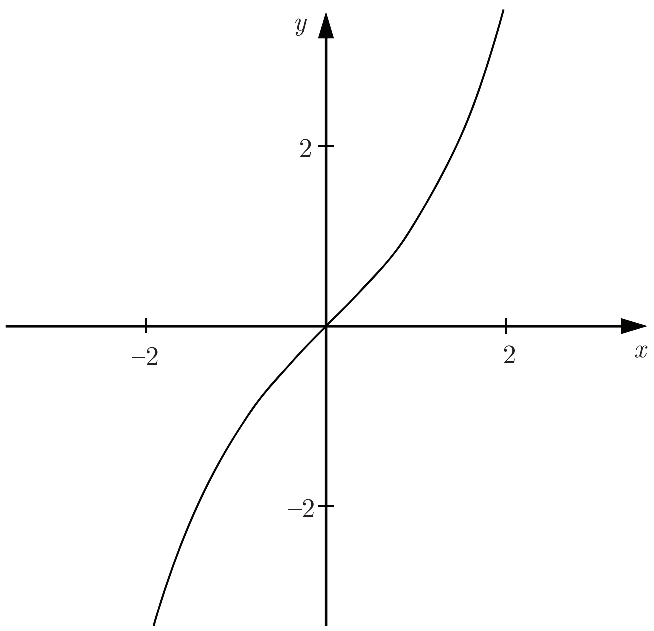


图 3.1.1

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sh}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=+\infty$ ，这就可以知道 $\operatorname{sh}(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$ 。

图象如图 3.1.1 。

这也可以看出明显是奇函数，而且 $x=0$ 是唯一的零点，这也是为什么双曲余切和余割的定义域里要求 $x\neq 0$ 了。

和三角函数类似，正弦是奇函数，余弦就是偶函数

$$\operatorname{ch}(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=\operatorname{ch}(x)\ 。$$

不过值域就不太一样了，令 $e^x=t$ ，其中 $t>0$ ，于是有

$$\operatorname{ch}(x)=\frac{t+\dfrac{1}{t}}{2}\geq\frac{2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}}{2}=1,$$

仅当 $t=1$ ，即 $x=0$ 时等号成立。

同时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{ch}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=+\infty$ ，可以知道 $\operatorname{ch}(x)$ 的值域为 $[1,+\infty)$ 。

图象如图 3.1.2 。

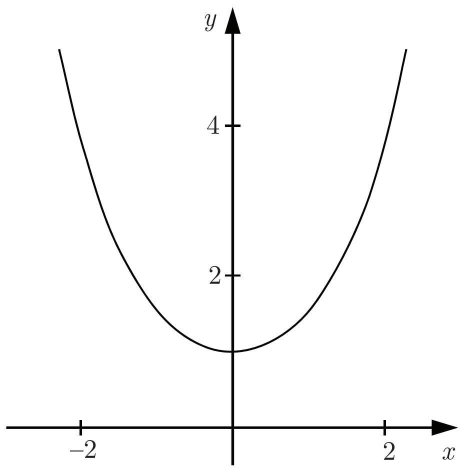


图 3.1.2

可以看出 $\operatorname{ch}(x)$ 的最小值就是 1 ，它根本没有零点，所以双曲正切和正割可以定义在全实数上。

至于双曲正切，那个还要古怪一些。

显然 $\operatorname{th}(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-\operatorname{th}(x)$ ， $\operatorname{th}(x)$ 为奇函数。

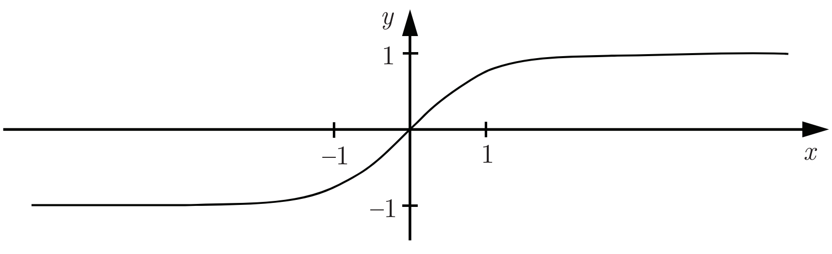


图 3.1.3

而

$$\operatorname{th}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=-1+\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\ ,$$

由于 $\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}$ 和 $\frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 都是正数，因此可以得出 $-1<\operatorname{th}(x)<1$ 。同时也不难得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th}(x)=1$ ，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th}(x)=-1$ ，因此 $\operatorname{th}(x)$ 的值域就是 $(-1,1)$ 。

图象如图 3.1.3 。

剩下三个以此类推，有兴趣的读者可以自己尝试推导。

2. 相互关系及和差公式

我们知道在三角函数里，有一个很基本的关系式就是 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 。

在双曲函数里，这个不再成立，但是也有一个很类似的关系式：

$$\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)=1\ ,$$

证明也不难——

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)&=(\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x))\\&=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\\&=e^x\cdot e^{-x}\\&=1\ 。\end{aligned}$$

由此也可以看出 $\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)=e^x$ ， $\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)=e^{-x}$ 。

另外三角中还有 $\sec^2 x-\tan^2 x=1$ 。

双曲里面就又反过来： $\operatorname{sech}^2(x)+\operatorname{th}^2(x)=1$ 。

$$\operatorname{sech}^2(x)+\operatorname{th}^2(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}+\frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}=\frac{1+\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}=\frac{\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}=1\ 。$$

关于和差公式，也有类似的性质。

三角中有 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ 。

双曲中 $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$ 。

证明

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{e^xe^y+e^xe^{-y}-e^{-x}e^y-e^{-x}e^{-y}}{4}+\frac{e^xe^y-e^xe^{-y}+e^{-x}e^y-e^{-x}e^{-y}}{4}\\&=\frac{2e^xe^y-2e^{-x}e^{-y}}{4}\\&=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}\\&=\operatorname{sh}(x+y)\ 。\end{aligned}$$

□

三角中有 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ 。

双曲中 $\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$ ，千万注意中间是加号！

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)&=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{e^xe^y+e^xe^{-y}+e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}}{4}+\frac{e^xe^y-e^xe^{-y}-e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}}{4}\\&=\frac{2e^xe^y+2e^{-x}e^{-y}}{4}\\&=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}\\&=\mathrm{ch}(x+y)\ 。\end{aligned}$$

□

由以上两个基本的公式就可以推出下面一系列和差倍半的公式，我这里只把它们列出来，有兴趣的读者可以自己试着证明。

$$\begin{aligned}&\mathrm{sh}(2x)=2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)\ ;\\&\mathrm{ch}(2x)=\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)=2\,\mathrm{ch}^2(x)-1=2\,\mathrm{sh}^2(x)+1\ ;\\&\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y)-\mathrm{sh}(y)\,\mathrm{ch}(x)\ ;\\&\mathrm{ch}(x-y)=\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)-\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)\ ;\\&\mathrm{th}(x+y)=\frac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}\ ;\\&\mathrm{th}(x-y)=\frac{\mathrm{th}(x)-\mathrm{th}(y)}{1-\mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}\ ;\\&2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y)=\mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)\ ;\\&2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)=\mathrm{sh}(x+y)-\mathrm{sh}(x-y)\ ;\\&2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)=\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y)\ ;\\&2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)=\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}(x-y)\ 。\end{aligned}$$

至于诱导公式，双曲函数就没有了，因为它没有周期（严格来讲是没有实周期，它实际上是有虚数周期 $2\pi i$ 的，不过那个已经属于复变函数的内容，就不去讨论了）。

3. 导数和单调性

也许细心的读者会发现，前面的一大堆性质好像都挺好，就是和这个自然对数 e 没什么关系，好像随便塞一个正数 a 进去，让两个函数变成 $\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 、 $\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 也有上述性质，下面就来告诉你为什么用 e 比较好。

作为初等函数，显然双曲函数在定义域内都是连续可导的，这个就不去详细讨论了。

双曲函数在导数时和三角函数有着惊人的相似性，这个看了下面的推导就知道了。

在三角函数中，我们有 $\sin' x=\cos x$ 。

双曲函数中， $\operatorname{sh}'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{1}{2}\left(e^{x}-\left(-e^{-x}\right)\right)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}(x)$ 。

在三角函数中，我们有 $\cos' x=-\sin x$ 。

双曲函数中， $\operatorname{ch}'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\operatorname{sh}(x)$ ，千万注意这里没有负号。

看见了吧，如果这里不是自然对数 e 而是另一个正常数 a ，每次导数就会多一个常数 $\ln a$ 出来，这就和三角不像了。

三角中 $\tan' x=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ 。

双曲中 $\operatorname{th}'(x)=\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}=\operatorname{sech}^2(x)$ 。

由此也可以知道， $\operatorname{sh}'(x)=\operatorname{ch}(x)>0$ ， $\operatorname{sh}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒为增函数。

而 $\operatorname{ch}'(x)=\operatorname{sh}(x)>0$ 。 $x>0$ 时 $\operatorname{ch}'(x)>0$ ， $x<0$ 时 $\operatorname{ch}'(x)<0$ ， $x=0$ 时 $\operatorname{ch}'(x)=0$ 。即 $\operatorname{ch}(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数，在 $(0,+\infty)$ 上为增函数， $x=0$ 为极小值点。

$\operatorname{th}'(x)=\operatorname{sech}^2(x)>0$ ，因此 $\operatorname{th}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒为增函数。

4. 反双曲函数

尽管三角函数不是单调函数，但还是有反三角函数，双曲函数里面不少都是单调函数，反双曲函数的出现自然也是很正常的。

由 $\operatorname{sh}(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 得

$$2ye^{x}=e^{2x}-1\ ,$$

解这个关于 e^{x} 的方程，得

$$e^{x}=y\pm\sqrt{y^2+1}\ ,$$

由于 $e^{x}>0$ ，因此

$$e^{x}=y+\sqrt{y^2+1}\ ,$$
$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\ ,$$

定义

$$\operatorname{arcsh}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ ,\quad x\in\mathbb{R}\ ,$$

这就是反双曲正弦函数。

反双曲余弦比较奇怪，毕竟双曲余弦不是单调函数，所以反双曲余弦有两部分，

$$\operatorname{arcch}(x)=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)\ ,\quad x\geq 1\ 。$$

反双曲正切

$$\operatorname{arcth}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ ,\quad x\in(-1,1)\ 。$$

双曲函数主要的基本性质就讲到这里，下面是一些比较深的性质，这部分纯属介绍性内容，有兴趣且有能力的读者可以尝试理解和运用。

5. 扩展性质

双曲函数为什么和三角函数[1]那么像？因为它们其实是存在一定关系的，在复数范围内它们是可以互相转化的。

定理 3.1.1.

$$\operatorname{sh}(x) = -i\sin(ix)\ ,\quad \operatorname{ch}(x) = \cos(ix)\ ,$$
$$\sin(x) = -i\operatorname{sh}(ix)\ ,\quad \cos(x) = \operatorname{ch}(ix)\ 。$$

证明 由欧拉公式得

$$e^{ix} = \cos(ix) + i\sin(ix)\ ,\quad e^{-ix} = \cos(ix) - i\sin(ix)\ ,$$

因此有

$$\operatorname{sh}(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(ix) + i\sin(ix) - \cos(ix) + i\sin(ix)}{2} = i\sin(ix)\ ,$$

所以

$$\sin(x) = -i\operatorname{sh}(ix)\ 。$$

至于 $i\sin(ix)$，可以令 $x = -iy$ 代入，于是有

$$\sin(ix) = \sin(y) = -i\operatorname{sh}(iy) = -i\operatorname{sh}(-x) = i\operatorname{sh}(x)\ ,$$

所以

$$\operatorname{sh}(x) = -i\sin(ix)\ 。$$

其他同理可证。 □

另外一些性质就是求和了。

定理 3.1.2.

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(kx) = \operatorname{csch}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}(n+1)x\right)\ ,$$
$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(kx) = \operatorname{csch}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}(n+1)x\right)\ 。$$

证明

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(kx) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{kx} - e^{-kx}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(e^{(n+1)x} - 1\right)\left(1 - e^{-nx}\right)}{e^{n} - 1}\ ,\\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{1}{2}(n+1)x}\left(e^{\frac{1}{2}(n+1)x} - e^{-\frac{1}{2}(n+1)x}\right)\left(e^{\frac{nx}{2}} - e^{-\frac{nx}{2}}\right)e^{-\frac{nx}{2}}}{e^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}\right)}\\
&= \frac{\left(\dfrac{e^{\frac{1}{2}(n+1)x} - e^{-\frac{1}{2}(n+1)x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{\frac{nx}{2}} - e^{-\frac{nx}{2}}}{2}\right)}{\dfrac{e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}}{2}}\\
&= \operatorname{csch}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}(n+1)x\right)\ 。
\end{aligned}$$

另一条同理可证。 □

[1] 三角函数也称为圆函数。

还有一条求和式：

定理 3.1.3.

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{csch}\left(2^k x\right)=\frac{2}{e^x-1}-\frac{2}{e^{2^{n+1}x}-1}\ 。$$

证明

$$\begin{aligned}\operatorname{csch}\left(2^k x\right)&=\frac{1}{\operatorname{sh}\left(2^k x\right)}=\frac{2}{e^{2^k x}-e^{-2^k x}}=\frac{2e^{2^k x}}{e^{2^{k+1}x}-1}\\&=2\left(\frac{e^{2^k x}+1-1}{e^{2^{k+1}x}-1}\right)\\&=2\left(\frac{1}{e^{2^k t}-1}-\frac{1}{e^{2^{k+1}t}-1}\right)\ 。\end{aligned}$$

然后有

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{csch}\left(2^k x\right)=\frac{2}{e^x-1}-\frac{2}{e^{2^{n+1}x}-1}\ 。$$

□

推论 3.1.3.1.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{csch}\left(2^k x\right)=\operatorname{cth}(x)-1\ 。$$

证明 由上面可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{csch}\left(2^k x\right)=\frac{2}{e^{2x}-1}=\frac{2e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}(x)}=\operatorname{cth}(x)-1\ 。$$

□

最后顺便说一下，前面已经可以看到，双曲余弦函数的图像是不是很像抛物线？当然它不是抛物线，不过它也有个特殊的名字——悬链线，即一条均匀、柔软的绳索，两端固定，绳索仅受重力作用下垂情况下绳子所构成的曲线。证明比较复杂，篇幅较长，而且要用到微分方程，这里就不给出了，有兴趣的可以自己去找找。

3.2 三类函数的值域初等求法——何万程

折线函数

定义 3.2.1. 绝对值里是一次多项式的函数称为折线函数。

显然函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i|x-b_i|$ （ $a_i>0$ ， $i=1,2,\cdots,n$ ， $b_1<\cdots<b_n$ ）在 x 趋向正无穷大或负无穷大时其函数值将趋向正无穷大，下面讨论函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i|x-b_i|$ 的最小值。

以下规定若 $j\le 0$ ，则 $\sum\limits_{i=1}^{j}a_i=0$ ；若 $j>n$ ，则 $\sum\limits_{i=j}^{n}a_i=0$ 。

分三种情况：

（ 1 ）若 $x\le b_1$ ，去掉绝对值符号，则 $f(x)$ 中 x 的系数必定为负，此时 $f(x)$ 是严格单调减函数；

（ 2 ）若 $x>b_n$ ，去掉绝对值符号，则 $f(x)$ 中 x 的系数必定为正，此时 $f(x)$ 是严格单调增函数；

（ 3 ）设 $b_i<x\le b_{i+1}$ ，其中 $1\le i\le n-1$ 。

若 $\sum\limits_{j=1}^{i}a_j<\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_j$ ，去掉绝对值符号，则 $f(x)$ 中 x 的系数必定为负，此时 $f(x)$ 是严格单调减函数；

若 $\sum\limits_{j=1}^{i}a_j>\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_j$ ，去掉绝对值符号，则 $f(x)$ 中 x 的系数必定为正，此时 $f(x)$ 是严格单调增函数；

若 $\sum\limits_{j=1}^{i}a_j=\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_j$ ，去掉绝对值符号，则 $f(x)$ 是一个常数。

于是可以得如下结论（ k 是非负整数）：

（ a ）若 $\sum\limits_{i=1}^{k-1}a_i<\sum\limits_{i=k}^{n}a_i$ ， $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i>\sum\limits_{i=k+1}^{n}a_i$ ，则 $x=b_k$ 时 $f(x)$ 取得最小值；

（ b ）若 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i=\sum\limits_{i=k+1}^{n}a_i$ ，则满足 $b_k\le x\le b_{k+1}$ 的 x 值都能使 $f(x)$ 取得最小值。

分子、分母是二次函数的函数

函数 $f(x)=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ （ a_1 、 a_2 不全为 0 ， $\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ 为既约分式）的值域的其中一种方法是用一元二次方程的判别式求解。

例 3.2.1. 求函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4x-5}$ 的值域。

解 由 $y=\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4x-5}$ 得 $x^2(y-2)-x(4y-3)-5y+2=0$ 。

当 $y=2$ 时， $x=-\dfrac{8}{5}$ ， $x^2-4x-5\ne 0$ ，即 y 能等于 2 。

当 $y\ne 2$ 时，需要满足 $(-(4y-3))^2-4(y-2)(-(5y-2))\ge 0$ ，由上一不等式解出 $y\le\dfrac{6-\sqrt{11}}{6}$ 或 $y\ge\dfrac{6+\sqrt{11}}{6}$ ，且 $y\ne 2$ 。

综合得函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4x-5}$ 的值域为 $\left(-\infty,\dfrac{6-\sqrt{11}}{6}\right]\bigcup\left[\dfrac{6+\sqrt{11}}{6},+\infty\right)$ 。 □

另一种方法是把 $\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ 变形为 $\dfrac{A}{Bx+C+\dfrac{D}{Bx+C}+E}+F$ 的形式，再利用函数 $Bx+C+\dfrac{D}{Bx+C}$ 的值域来确定原函数的值域。如果自变量有范围限制的话，这个方法更能体现其优越性。

例 3.2.2. 求函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2-7x+3}$ 的值域。

解 函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2-7x+3}$ 的定义域是 $x\neq\dfrac{1}{2}$ 且 $x\neq 3$ 。

（1）当 $x=0$ 时， $\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2-7x+3}=1$ 。

（2）当 $x\neq 0$ ， $x\neq\dfrac{1}{2}$ ， $x\neq 3$ 时， $\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2-7x+3}=\dfrac{2}{2x+\dfrac{3}{x}-7}+1$ 。

若 $2x+\dfrac{3}{x}=7$ ，则必须 $x=\dfrac{1}{2}$ 或 $x=3$ ，所以 $2x+\dfrac{3}{x}\neq 7$ 。

当 $x>0$ 时， $2x+\dfrac{3}{x}\geq 2\sqrt{6}$ ，当且仅当 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立。所以

$$2\sqrt{6}-7\leq 2x+\frac{3}{x}-7<0 \text{ 或 } 2x+\frac{3}{x}-7>0 \text{ ，}$$

这样就得

$$\frac{2x^2-5x+3}{2x^2-7x+3}\leq\frac{11-4\sqrt{6}}{25} \text{ 或 } \frac{2x^2-5x+3}{2x^2-7x+3}>1 \text{ 。}$$

当 $x<0$ 时， $-2x+\dfrac{3}{-x}\geq -2\sqrt{6}$ ，当且仅当 $x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立。所以

$$2x+\frac{3}{x}-7\leq -2\sqrt{6}-7 \text{ ，}$$

这样就得

$$\frac{2x^2-5x+3}{2x^2-7x+3}\geq\frac{11+4\sqrt{6}}{25} \text{ 。}$$

综合（1）、（2）得 $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2-7x+3}$ 的值域是 $\left(-\infty,\dfrac{11-4\sqrt{6}}{25}\right]\bigcup\left[\dfrac{11+4\sqrt{6}}{25},+\infty\right)$ 。 □

分子、分母都是正弦、余弦与常数乘积相加再加上常数的函数

函数 $f(x)=\dfrac{a_1\sin x+c_1}{b_2\cos x+c_2}$ （ $a_1b_2\neq 0$ ）可利用去分母，移项得 $A\sin x+B\cos x=C$ 型来求解；也可以利用圆及斜率来求解。若 x 的范围有限制，则只能用后一种方法求解。

例 3.2.3. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sin x-7}{2\cos x+5}$ 的值域。

解 $y=\dfrac{\sin x-7}{2\cos x+5}$ 可变为 $2y\cos x+5y=\sin x-7$ ，即

$$\sin x-2y\cos x=5y+7 \text{ 。}$$

由上式即得 $\sin(x+\arctan 2y)=\dfrac{5y+7}{\sqrt{4y^2+1}}$ ，于是有 $\left|\dfrac{5y+7}{\sqrt{4y^2+1}}\right|\leq 1$ ，即

$$21y^2+70y+48\leq 0 \text{ 。}$$

解上面的不等式即得

$$-\frac{35+\sqrt{217}}{21}\leq y\leq -\frac{35-\sqrt{217}}{21} \text{ 。}$$

所以函数 $f(x)=\dfrac{\sin x-7}{2\cos x+5}$ 的值域是 $\left[-\dfrac{35+\sqrt{217}}{21},-\dfrac{35-\sqrt{217}}{21}\right]$ 。 □

例 3.2.4. 求函数 $f(x)=\dfrac{2\sin x+3}{\cos x-2}$ （ $0\le x\le\pi$ ）的值域。

解 $y=\dfrac{2\sin x+3}{\cos x-2}$ 可变为 $y=2\cdot\dfrac{2\sin x+\frac{3}{2}}{\cos x-2}$ ，而 $\dfrac{2\sin x+\frac{3}{2}}{\cos x-2}$ 可看成半圆 $x^2+y^2=1$ （ $y\ge 0$ ）上的点 $P(\cos x,\sin x)$ 与点 $M\left(2,-\dfrac{3}{2}\right)$ 连线的斜率，令 $t=\dfrac{2\sin x+\frac{3}{2}}{\cos x-2}$ ，如图 3.2.1 所示，当 $x=\pi$ 时，即点 P 在点 P_1 的位置时， $t=-\dfrac{1}{2}$ 。

当点 P 在点 P_2 的位置时， t 取得最大值，

$$k_{OM}=\frac{-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{3}{4}\text{，}|OM|=\sqrt{2^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}\text{，}\ |OP_2|=1\text{，}$$

因此 $|P_2M|=\sqrt{|OM|^2-|OP_2|^2}=\dfrac{21}{2}$ ，故

$$\tan\angle OMP_2=\frac{|OP_2|}{|P_2M|}=\frac{2}{\sqrt{21}}\text{，}$$

于是

$$t=k_{P_1M}=\frac{k_{OM}-\tan\angle OMP_2}{1+k_{OM}\cdot\tan\angle OMP_2}=-\frac{6+\sqrt{21}}{6}\text{，}$$

由此得函数 $f(x)=\dfrac{2\sin x+3}{\cos x-2}$ （ $0\le x\le\pi$ ）的值域是 $\left[-\dfrac{6+\sqrt{21}}{3},-1\right]$ 。 □

函数 $f(x)=\dfrac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$ 通过变形，可得以 $\dfrac{A_1\sin x+C_1}{B_2\cos x+C_2}$ 为变量的单调函数，利用上面的解法便可求得值域。

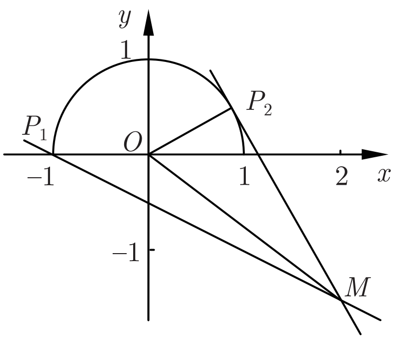


图 3.2.1

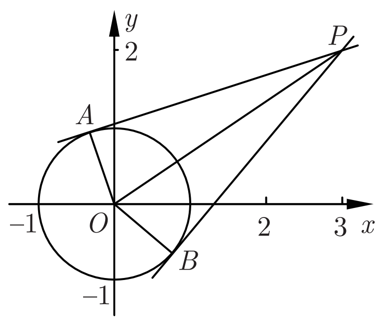


图 3.2.2

例 3.2.5. 求函数 $f(x)=\dfrac{3\sin x+\cos x-9}{3\sin x+2\cos x-12}$ 的值域。

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{3\sin x+\cos x-9}{3\sin x+2\cos x-12}&=1-\frac{\cos x-3}{3\sin x+2\cos x-12}\\&=1-\frac{1}{2+3\cdot\dfrac{\sin x-2}{\cos x-3}}\text{，}\end{aligned}$$

令 $t=\dfrac{\sin x-2}{\cos x-3}$ ，则 t 为圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到点 $P(3,2)$ 连线的斜率。

如图 3.2.2 所示，能得下面的结果：

$$|PO|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\ ,\quad k_{OP}=\frac{2}{3}\ ,$$

$$|AP|=|BP|=\sqrt{|PO|^2-|AO|^2}=2\sqrt{3}\ ,$$

于是

$$\tan\angle APO=\tan\angle BPO=\frac{|AO|}{|AP|}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ,$$

因此得

$$k_{AP}=\frac{k_{PO}-\tan\angle APO}{1+k_{PO}\cdot\tan\angle APO}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}\ ,$$
$$k_{BP}=\frac{k_{PO}+\tan\angle BPO}{1+k_{PO}\cdot\tan\angle BPO}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\ ,$$

即

$$\frac{3-\sqrt{3}}{4}\leq t\leq\frac{3+\sqrt{3}}{4}\ ,$$

于是得

$$\frac{97-6\sqrt{3}}{131}\leq y\leq\frac{97+6\sqrt{3}}{131}\ ,$$

也就是说函数 $f(x)=\dfrac{3\sin x+\cos x-9}{3\sin x+2\cos x-12}$ 的值域是 $\left[\dfrac{97-6\sqrt{3}}{131},\dfrac{97+6\sqrt{3}}{131}\right]$。 □

3.3 由三元循环不等式讲起——郭子伟

Ineq 3.3.1. $\forall a,b,c>0$ ，有

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\text{ 。}\tag{3.3.1}$$

式 (3.3.1) 这里称作三元循环不等式（在国外也称 Nessbit 不等式），是一道极为常见的基础题，相信玩过不等式的人一定在入门的时候就做过这道题。下面我就由这道简单题开始聊，聊些方法、推广什么的。

首先还是把式 (3.3.1) 证一证，由于其证法太多，这里就不一一写出，我决定只写三种。

证法一

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}&\iff\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+c+a}{c+a}+\frac{c+a+b}{a+b}\geq\frac{9}{2}\\&\iff(b+c+c+a+a+b)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9\text{ ，}\end{aligned}$$

由柯西不等式，上式显然成立。 □

证法二 由对称性，不妨设 $a\geq b\geq c$ ，则 $\dfrac{1}{b+c}\geq\dfrac{1}{c+a}\geq\dfrac{1}{a+b}$ ，由排序不等式，有

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}\text{ ，}$$
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}\text{ ，}$$

两式相加整理即得式 (3.3.1) 。 □

证法三 方便书写，这里用 $\sum\limits_{cyc}$ 表示循环求和，下同。则由

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}&=\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)\\&=\sum_{cyc}\frac{a-b+a-c}{2(b+c)}\\&=\sum_{cyc}\left(\frac{a-b}{2(b+c)}+\frac{b-a}{2(c+a)}\right)\\&=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}\\&\geq 0\text{ ，}\end{aligned}$$

即得式 (3.3.1) 。 □

我们对比一下这三种证法，看看它们各自的优缺点。先看证法三，从步骤或计算量来看，比前两种要麻烦一点点，但它有一个重要的好处，就是把左右两边的差用一个非负量具体地表现了出来，这样有利于加强不等式或者证明更强的不等式，请看下面两个例子：

由于

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}\geq\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(a+b+c)^2}=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{(a+b+c)^2}\text{ ，}$$
$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}\leq\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{ab+bc+ca}\text{ ，}$$

由此，结合证法三，立即得出原不等式的加强以及其反向组成如下的优美不等式链：

Ineq 3.3.2. $\forall a,b,c>0$ ，有

$$\frac{3}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{ab+bc+ca}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{(a+b+c)^2} 。\tag{3.3.2}$$

另外再来看一个类似的不等式：

Ineq 3.3.3. $\forall a,b,c>0$ ，有

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2} 。\tag{3.3.3}$$

这个不等式依然可以类似地用上面的三种方法来证，但如果对于以下这个比式 (3.3.3) 更强的不等式：

Ineq 3.3.4. $\forall a,b,c>0$ ，有

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} 。\tag{3.3.4}$$

前两种方法就不是那么好使了，即使能使也不易想，而证法三的法子依然能类似地很容易就证出，如下：

证明

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\\
\Longleftrightarrow&\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}-\frac{1}{2}(a+b+c)\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}-\frac{1}{2}(a+b+c)\\
\Longleftrightarrow&\sum_{cyc}\frac{a(2a-b-c)}{2(b+c)}\geq\frac{2\sum_{cyc}a^3-\sum_{cyc}ab(a+b)}{2(a^2+b^2+c^2)}\\
\Longleftrightarrow&\sum_{cyc}\left(\frac{a(a-b)}{2(b+c)}+\frac{b(b-a)}{2(c+a)}\right)\geq\frac{\sum_{cyc}\left(a^3+b^3-ab(a+b)\right)}{2(a^2+b^2+c^2)}\\
\Longleftrightarrow&\sum_{cyc}\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}\geq\frac{\sum_{cyc}(a+b)(a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}\\
\Longleftrightarrow&\sum_{cyc}\left(\frac{a+b+c}{2(a+c)(b+c)}-\frac{a+b}{2(a^2+b^2+c^2)}\right)(a-b)^2\geq 0\\
\Longleftrightarrow&\sum_{cyc}\frac{\frac{1}{2}(a+b+c)\sum_{cyc}(a-b)^2+abc}{2(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2)}(a-b)^2\geq 0 。
\end{aligned}$$

最后一式显然成立，即原不等式成立。 □

这两个例子说明了证法三的好处所在，而目前这种配方法有很多人也把它称作“ S.O.S. 方法[1]”，但其实正真的 S.O.S. 并非指这种配方，具体请参考“希尔伯特第十七问题”。那么这里为免混淆，我们暂且把像证法三这样的配方形式称作“伪 S.O.S. ”。至于伪 S.O.S. 的变形技巧，限于篇幅，这里不说太多，请大家自己探索。值得一提的是，对于同一个式子，其伪 S.O.S. 形式并不唯一，大家可以试下用不同的方向去配方得出不同的伪 S.O.S. 形式。

伪 S.O.S. 方法的缺点在于运算量可能很大，有一定的局限性，特别是对于高次不等式、根式不等式、非对称不等式以及多元不等式都很难操作。而相对来说，这正是前面的两种方法的优点所在，请看下面三个例子：

[1]S.O.S. 是英文 sum of squares 的缩写；另外，本文的不等式标签“Ineq”也是不等式的英文“Inequality”的缩写。

Ineq 3.3.5. $\forall a,b,c>0,n\geq 1$ ，有

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}\text{ 。}\tag{3.3.5}$$

这个是对式 (3.3.1) 的一个高次推广，前面的式 (3.3.3) 即上式当 $n=2$ 的情形。下面我们用排序不等式的推论——切比雪夫不等式来证明：

证明 由对称性，不妨设 $a\geq b\geq c$ ，则由 $n\geq 1$ 可得 $a^{n-1}\geq b^{n-1}\geq c^{n-1}$ 以及 $\frac{a}{b+c}\geq\frac{b}{c+a}\geq\frac{c}{a+b}$ ，由切比雪夫不等式及式 (3.3.1) ，有

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}&\geq\frac{1}{3}\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\\&\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}\text{ ，}\end{aligned}$$

得证。 □

Ineq 3.3.6. $\forall a,b,c,d>0$ ，有

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2\text{ 。}\tag{3.3.6}$$

这个是对式 (3.3.1) 的一个四元推广，这里我顺便说明两点：第一，印象中曾经有教材习题出现了此不等式，而且还要求用排序不等式做，以至于我在不少论坛上都见有人提此问，然而后来发现教材提供的所谓排序不等式的证法是错的，错在一开始就不妨设了一个顺序，因为这个是轮换对称式，不像三元时是完全对称式，所以不能像前面那样直接设顺序。第二，n 元推广后是著名的 Shapiro 循环不等式，但仅对 $n=3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,17,19,21,23$ 成立。言归正传，下面提供式 (3.3.6) 的两种简证：

证法一 由柯西不等式，有

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}&=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}\\&\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)}\\&=2+\frac{(a-c)^2+(b-d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)}\\&\geq 2\text{ 。}\end{aligned}$$

□

证法二 若 $\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b}\leq 2$ ，则由均值不等式有

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+d}+\frac{c+d}{d+a}+\frac{d+a}{a+b}\geq 4\text{ ，}$$

从而得到

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2\text{ ；}$$

若 $\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b}>2$ ，则易得

$$\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}<2\text{ ，}$$

又由

$$\begin{aligned}\frac{b+d}{a+b}+\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{a+c}{d+a}&=(a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)\\&\geq(a+c)\left(\frac{4}{a+b+c+d}\right)+(b+d)\left(\frac{4}{a+b+c+d}\right)\\&=4\text{ ,}\end{aligned}$$

就得到

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}>2\text{ 。}$$

综上所述，式 (3.3.6) 得证。 □

Ineq 3.3.7. $\forall a,b,c>0$ ，有

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2\text{ 。}\tag{3.3.7}$$

Ineq 3.3.8. $\forall a,b,c>0$ ，有

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\text{ 。}\tag{3.3.8}$$

这两个不等式属于式 (3.3.1) 的另一种指数推广的两个特例，一般的指数情形已有文献研究过，限于篇幅及难度，这里就不写了，这里只给出以上两不等式的简证：

证 Ineq 3.3.7 由均值不等式，有

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}\geq\frac{2a}{a+b+c}\text{ ,}$$

同理可得另外两式，相加即得

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=2\text{ 。}$$

考虑等号的成立条件，为 $a=b+c,b=c+a,c=a+b$ 显然不可能，因此等号取不了，即得原不等式。另外，若令 $a\to 0,b=c$ 则 $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\to 2$ ，可见下界 2 已是最佳。 □

证 Ineq 3.3.8 仿照 Ineq 3.3.7 的证明，考虑局部不等式

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}\geq\frac{3a}{\sqrt[3]{4}\,(a+b+c)}\text{ 。}$$

事实上，对上式两边立方并作差得

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^3=\frac{a^2(2a-b-c)^2(a+4b+4c)}{4(b+c)^2(a+b+c)^3}\geq 0\text{ ,}$$

因此又有

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}\geq\frac{3a}{\sqrt[3]{4}\,(a+b+c)}+\frac{3b}{\sqrt[3]{4}\,(a+b+c)}+\frac{3c}{\sqrt[3]{4}\,(a+b+c)}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\text{ ,}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$ ，证毕。 □

OK，关于这个三元循环不等式就暂时聊到这里，以上展示了几种不等式证明方法和推广方式，如果要继续深究下去当然还远不止这些，大家可以开拓思维，放开胆量继续玩下去必定还会有收获，希望本文能让大家对不等式有更好的 feel ，有机会下次再聊。

4 数学家、数学史篇

特别说明：以下内容引自百度百科数学家系列。

4.1 刘徽

简介

刘徽（生于公元 250 年左右），是中国数学史上一个非常伟大的数学家，在世界数学史上，也占有杰出的地位。他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》，是我国最宝贵的数学遗产。

图 4.1.1

《九章算术》约成书于东汉之初，共有 246 个问题的解法。在许多方面：如解联立方程，分数四则运算，正负数运算，几何图形的体积面积计算等，都属于世界先进之列，但因解法比较原始，缺乏必要的证明，而刘徽则对此均作了补充证明。在这些证明中，显示了他在多方面的创造性的贡献。他是世界上最早提出十进小数概念的人，并用十进小数来表示无理数的立方根。在代数方面，他正确地提出了正负数的概念及其加减运算的法则；改进了线性方程组的解法。在几何方面，提出了“割圆术”，即将圆周用内接或外切正多边形穷竭的一种求圆面积和圆周长的方法。他利用割圆术科学地求出了圆周率 $\pi = 3.14$ 的结果。他用割圆术，从直径为 2 尺的圆内接正六边形开始割圆，依次得正 12 边形、正 24 边形……，割得越细，正多边形面积和圆面积之差越小，用他的原话说是“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”他计算了 3072 边形面积并验证了这个值。刘徽提出的计算圆周率的科学方法，奠定了此后千余年中国圆周率计算在世界上的领先地位。

刘徽在数学上的贡献极多，在开方不尽的问题中提出“求徽数”的思想，这方法与后来求无理根的近似值的方法一致，它不仅是圆周率精确计算的必要条件，而且促进了十进小数的产生；在线性方程组解法中，他创造了比直除法更简便的互乘相消法，与现今解法基本一致；并在中国数学史上第一次提出了“不定方程问题”；他还建立了等差级数前 n 项和公式；提出并定义了许多数学概念：如幂（面积）；方程（线性方程组）；正负数等等。刘徽还提出了许多公认正确的判断作为证明的前提。他的大多数推理、证明都合乎逻辑，十分严谨，从而把《九章算术》及他自己提出的解法、公式建立在必然性的基础之上。虽然刘徽没有写出自成体系的著作，但他注《九章算术》所运用的数学知识实际上已经形成了一个独具特色、包括概念和判断、并以数学证明为其联系纽带的理论体系。

刘徽在割圆术中提出的“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”，这可视为中国古代极限观念的佳作。《海岛算经》一书中，刘徽精心选编了九个测量问题，这些题目的创造性、复杂性和富有代表性，都在当时为西方所瞩目。刘徽思想敏捷，方法灵活，既提倡推理又主张直观。他是我国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人。刘徽的一生是为数学刻苦探求的一生。他虽然地位低下，但人格高尚。他不是沽名钓誉的庸人，而是学而不厌的伟人，他给我们中华民族留下了宝贵的财富。

个人成就

刘徽的数学成就大致为两方面：

一是清理中国古代数学体系并奠定了它的理论基础。这方面集中体现在《九章算术注》中。它实已形成为一个比较完整的理论体系：

1. 在数系理论方面：用数的同类与异类阐述了通分、约分、四则运算，以及繁分数化简等的运算法则；在

开方术的注释中，他从开方不尽的意义出发，论述了无理方根的存在，并引进了新数，创造了用十进分数无限逼近无理根的方法。

2. 在筹式演算理论方面：先给率以比较明确的定义，又以遍乘、通约、齐同等三种基本运算为基础，建立了数与式运算的统一的理论基础，他还用“率”来定义中国古代数学中的“方程”，即现代数学中线性方程组的增广矩阵。

3. 在勾股理论方面：逐一论证了有关勾股定理与解勾股形的计算原理，建立了相似勾股形理论，发展了勾股测量术，通过对“勾中容横”与“股中容直”之类的典型图形的论析，形成了中国特色的相似理论。

4. 在面积与体积理论方面：用出入相补、以盈补虚的原理及“割圆术”的极限方法提出了刘徽原理，并解决了多种几何形、几何体的面积、体积计算问题。这些方面的理论价值至今仍闪烁着余辉。

二是在继承的基础上提出了自己的创见。这方面主要体现为以下几项有代表性的创见：

1. 割圆术与圆周率：他在《九章算术　圆田术》注中，用割圆术证明了圆面积的精确公式，并给出了计算圆周率的科学方法。他首先从圆内接六边形开始割圆，每次边数倍增，算到 192 边形的面积，得到 $\pi=\dfrac{157}{50}=3.14$ ，又算到 3072 边形的面积，得到 $\pi=\dfrac{3927}{1250}=3.1416$ ，称为“徽率”。

2. 刘徽原理：在《九章算术　阳马术》注中，他在用无限分割的方法解决锥体体积时，提出了关于多面体体积计算的刘徽原理。

3. “牟合方盖”说：在《九章算术　开立圆术》注中，他指出了球体积公式 $V=\dfrac{9D^3}{16}$ （ D 为球直径）的不精确性，并引入了“牟合方盖”这一著名的几何模型。“牟合方盖”是指正方体的两个轴互相垂直的内切圆柱体的贯交部分。

4. 方程新术：在《九章算术　方程术》注中，他提出了解线性方程组的新方法，运用了比率算法的思想。

5. 重差术：在白撰《海岛算经》中，他提出了重差术，采用了重表、连索和刘徽累矩等测高测远方法。他还运用“类推衍化”的方法，使重差术由两次测望，发展为“三望”、“四望”。而印度在 7 世纪，欧洲在 15–16 世纪才开始研究两次测望的问题。刘徽的工作，不仅对中国古代数学发展产生了深远影响，而且在世界数学史上也确立了崇高的历史地位。鉴于刘徽的巨大贡献，所以不少书上把他称作“中国数学史上的牛顿”。

4.2　泰勒斯

简介

泰勒斯（希腊语：Thalês，英语： Thales ，约公元前 624 年–公元前 546 年），又译为泰利斯，公元前 7 至 6 世纪的古希腊时期的思想家、科学家、哲学家，希腊最早的哲学学派——米利都学派（也称爱奥尼亚学派）的创始人。“科学和哲学之祖”，泰勒斯是古希腊及西方第一个有记载有名字留下来的自然科学家和哲学家。泰勒斯的学生有阿那克西曼德、阿那克西美尼等。

生平

泰勒斯生于米利都，他的家庭属于奴隶主贵族阶级，据说他有希伯来人（ Hebrews ）或犹太人（ Jew ）腓尼基人等人种血统，所以他从小就受到了良好的教育。泰勒斯是古希腊最早的、最著名的思想家、哲学家，天文学家，数学家和科学家。他招收学生，建立了学园，创立了米利都学派。他不仅是当时自发唯物主义的代表，同时也是较早的科学启蒙者。

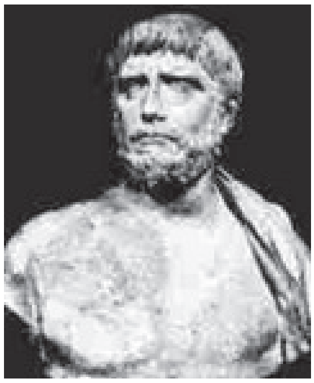


图 4.2.1

他生活的那个时代，整个社会还处于愚昧落后的状态，人们对许多自然现象是理解不了的。但是，泰勒斯却总想着探讨自然中的真理。因为他懂得天文和数学，又是人类历史上比较早的科学家，所以，人们称他为“科学之祖”。

泰勒斯早年也是一个商人，曾到过不少东方国家，学习了古巴比仑观测日食月食和测算海上船只距离等知识，了解到英赫・希敦斯基（希伯来人（ Hebrews ）或犹太人（ Jew ）、腓尼基人人种血统。）探讨万物组成的原始思想，知道了埃及土地丈量的方法和规则等。他还到美索不达米亚平原，在那里学习了数学和天文学知识。以后，他从事政治和工程活动，并研究数学和天文学，晚年转向哲学，他几乎涉猎了当时人类的全部思想和活动领域，获得崇高的声誉，被尊为“希腊七贤之首”，实际上七贤之中，只有他够得上是一个渊博的学者。

天文学方面的贡献

在天文学方面，泰勒斯作了很多研究，他对太阳的直径进行了测量和计算，结果他宣布太阳的直径约为日道的七百二十分之一。这个数字与现在所测得的太阳直径相差很小。他在计算后得知，按照小熊星航行比按大熊星航行要准确得多，他把这一发现告诉了那些航海的人。通过对日月星辰的观察和研究，他确定了三百六十五天为一年，在当时没有任何天文观察设备的情况下，作出这样的发现是很了不起的。在天文学领域，他更为人们所津津乐道的就是正确的解释了日食的原因，并曾预测了一次日食。不过人们更为关心的是另一个重要的问题，泰勒斯是怎样预知日食的呢？

后人做过种种推测和考证，一般认为是应用了迦勒底人发现的沙罗周期。一个沙罗周期等于 223 个朔望月，即 6585.321124 日或 18 年零 11 日(若其间有 5 年闰年则是 18 年零 10 日)。日月运行是有周期性的，日月食也有周期。日食一定发生在朔日，假如某个朔日有日食， 18 年 11 日之后也是朔日，而日月又大致回到原来的位置上，因此很有可能发生类似的现象。不过一个周期之后，日月位置只是近似相同，所以能看见日食的地点和日食的景象都可能有所变化甚至根本不发生日食。泰勒斯大概知道公元前 603 年 5 月 18 日有过日食，所以侥幸猜对。当然关于这件事，还有一些别的说法，没有统一的定论。

数学方面的贡献

泰勒斯在数学方面划时代的贡献是引入了命题证明的思想。它标志着人们对客观事物的认识从经验上升到理论，这在数学史上是一次不寻常的飞跃。在数学中引入逻辑证明，它的重要意义在于：保证了命题的正确性；揭示各定理之间的内在联系，使数学构成一个严密的体系，为进一步发展打下基础；使数学命题具有充分的说服力，令人深信不疑。他曾发现了不少平面几何学的定理，诸如：“直径平分圆周”、“三角形两等边对等角”、“两条直线相交、对顶角相等”、“三角形两角及其夹边已知，此三角形完全确定”、“半圆所对的圆周角是直角”等，这些定理虽然简单，而且古埃及、古巴比伦人也许早已知道，但是，泰勒斯把它们整理成一般性的命题，论证了它们的严格性，并在实践中广泛应用。据说他可以利用一根标杆，测量、推算出金字塔的高度。据说，一年春天，泰勒斯来到埃及，人们想试探一下他的能力，就问他是否能解决这个难题。泰勒斯很有把握地说可以，但有一个条件——法老必须在场。第二天，法老如约而至，金字塔周围也聚集了不少围观的老百姓。泰勒斯来到金字塔前，阳光把他的影子投在地面上。每过一会儿，他就让别人测量他影子的长度，当测量值与他的身高完全吻合时，他立刻将大金字塔在地面的投影处作一记号，然后在丈量金字塔底到投影尖顶的距离。这样，他就报出了金字塔确切的高度。在法老的请求下，他向大家讲解了如何从“影长等于身长”推到“塔影等于塔高”的原理。也就是今天所说的相似三角形定理。在科学上，他倡导理性，不满足于直观的

感性的特殊的认识，崇尚抽象的理性的一般的知识。譬如，等腰三角形的两底角相等，并不是指我们所能画出的、个别的等腰三角形，而应该是指“所有的”等腰三角形。这就需要论证、推理，才能确保数学命题的正确性，才能使数学具有理论上的严密性和应用上的广泛性。泰勒斯的积极倡导，为毕达哥拉斯创立理性的数学奠定了基础。

主要哲学思想

泰勒斯的哲学观点用一句话来总结就是“水生万物，万物复归于水”，他认为世界本原是水。古希腊七贤每人都有一句特别有名的格言，而他的格言就是：“水是最好的”。

泰勒斯向埃及人学习观察洪水，很有心得。他仔细阅读了尼罗河每年涨退的记录，还亲自查看水退后的现象。他发现每次洪水退后，不但留下肥沃的淤泥，还在淤泥里留下无数微小的胚芽和幼虫。他把这一现象与埃及人原有的关于神造宇宙的神话结合起来，便得出万物由水生成的结论。

对泰勒斯来说，水是世界初始的基本元素。埃及的祭司宣称大地是从海底升上来的，泰勒斯则认为地球就漂在水上。

泰勒斯还有一个很重要的观点就是“万物有灵。”根据这一学说，连石头也是有灵魂的生物。泰勒斯向他哲学上的对立面毕达哥拉斯反复强调说：整个宇宙都是有生命的，而又正是灵魂才使一切生机盎然。这一说法在当时非常流行。

泰勒斯曾用磁石和琥珀做实验，发现这两种物体对其他物体有吸引力，便认为它们内部有生命力，只是这生命是肉眼看不见的。由此，泰勒斯得出结论：任何一块石头，看上去冰冷坚硬、毫无生气，却也有灵魂蕴涵其中。直到公元前 300 年，斯多葛派哲学家还用泰勒斯的实验来证实世间万物因有生命而相互吸引。

评价

泰勒斯无论在天文学，数学，哲学等方面都有着巨大的建树。他所提出的理论，定理一直沿用至今。对后世的科学的发展奠定了基础，被后人誉为人类历史上最早的科学家，他无愧于“科学之祖”的称号。

且说古希腊对数学似乎有着特别大的兴趣，尤其是在几何学方面。这在一定程度上应当归功于毕达哥拉斯和柏拉图。他们都是数学的崇拜者和鼓吹者。

据说柏拉图在他所创办的学园的大门口就有着“不懂几何学者不得入内”的牌子，可见数学在古希腊的重要性。

在其他古老的国家里，数学基本上是一门实用性的学科，而在古希腊，也像我们在前面所看到的天文学的情况那样，他们是着重于向理论发展的。

古希腊最早的数学家可能要算被西方称作是“科学之父”的泰勒斯了。据说他提出并证明了下列几何学基本命题：

1. 圆被它的任一直径所平分；
2. 半圆的圆周角是直角；
3. 等腰三角形两底角相等；
4. 相似三角形的各对应边成比例；
5. 若两三角形两角和一边对应相等，则两三角形全等。

这些定理是每一个现代中学生都知道的，他们简单得不能再简单了。但是，就是这些简单的理论，构成了今天极其复杂而又高深理论的根基。

试想，今天的球面几何学，射影几何学，非欧几何学等等，有哪一门不是从这最简单的定理发生推演出来的呢？

泰勒斯年轻时去过埃及，在那里，他向埃及人学习了几何学知识。但埃及人的几何学在当时只是为了划分地产而研究的。

在那里，埃及的人们只懂得在一块具体的地面上来规划、计算，以弄清人们的地产界线。因为，每年尼罗河一涨水，所有的地面痕迹都被冲毁了，人们在涨水后不得不重新进行测量计算。

埃及人很早在实践中就懂得“所有直径都平分圆周；三角形有两条边相等，则其所对的角也相等”，但都没有从理论上给予概括，并科学地去证明它。

泰勒斯并不满足于仅仅向埃及人学习这些，他经过思考将这些具体的，只是实际操作的知识给予抽象化、理论化，使之概括成为科学的理论。

上面所概括的几条定理，是埃及人在几百年前在实践中便得知的，但并没有把具体的知识提升到理论高度。泰勒斯在这方面做出了卓越的贡献。