数学空间——人教数学网刊

高中数学

2011 年第 5 期

8	1	6
3	5	7
4	9	2

目录

数学评书

1.1 《智慧宝典》第二部第一回　身陷魔幻界　结识变形王——陈海峰

前一部说道，小龙与小豪从函谷关取得了半部的《智慧宝典》，“成立三英雄”说：“现在宝典的剩余部分散失在民间，你们得自己去寻了。”

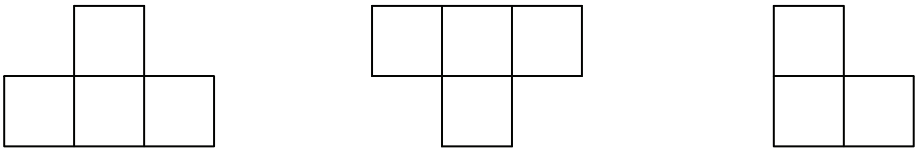
告别三英雄后，兄妹二人只得四处打听，不几日，到了一个城堡处。只见四处建筑甚是奇特，有的像火柴盒，有的像一个根笔，兄妹俩看花了眼。这时只见锣鼓喧天，两队队伍齐整出列，原来城堡的国王早就听说两位小英雄到此，故此列队欢迎。二人随国王进入宫殿，二人又看到这个世界到处是光影，好像有狗、羊，还有各种的动物，等他们走进时都消失了。就像是在看一出出“皮影戏”。

正当两人疑惑之间，国王说：“小事一桩而已，让两位‘小英雄’见笑了。这个地方叫魔幻界，我叫变形王，给你们介绍一下，这其实就是现在很时髦的 3D。我们如果从不同方向看，其实就有正视图，俯视图，左视图等。你看：

例 1.1.1. 用若干个边长是 1 的相同的立方体摆成一个立体图形，其三视图如图 1.1.1，根据三视图回答。

（1）这个立体图形的体积是多少?

（2）这个立体图形的表面积是多少?



正视图　　俯视图　　侧视图

图 1.1.1

两个小英雄知道变形王又想要考考他们俩了，只是淡淡一笑，小豪用“奎星笔”作出了如图 1.1.2 的图形。

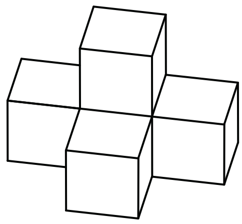


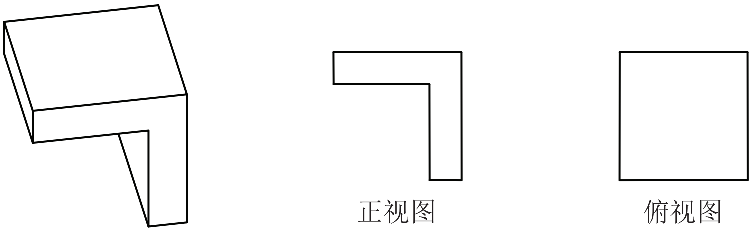
图 1.1.2

解析　要解决这两个问题，首先应该知道这个的立方体是如何构成的，通过三视图，我还原出立体图形，见图 1.1.2，可以看出，它有两层，共有五个立方体，所以不难得出那的体积是 5。到于表面积，至于表面积，当然会稍微复杂些，注意到这个立体图形的有 8 个面是连接在一起的。所以应该是 $6 \times 5 - 8 = 22$。 □

只听变形王拍手叫好。卫兵们也是齐声庆贺：“来，喝一杯酒，为你们祝兴！”

再来一题，请看：

例 1.1.2. 这个图形的正视图与俯视图如图 1.1.3，两位小英雄请指点一下，这两个图的画法正确吗? 如果有误请改正，然后再补充出它的侧视图。



正视图　　俯视图

图 1.1.3

小英微微一笑，拨起神算子，只见俯视图多了一条虚线。如图 1.1.4 的俯视图（正）所示，接着只见小英的神算子一个接一个滚落，在地板上刻出了一个如图 1.1.4 的侧视图，算子又嗖嗖地回收到小英的手中，这时变形王都看傻了眼，只听一声：“高，实在高！”变形王站了起来，“江湖所传非虚也！二位小英雄果然智慧过人！失敬、失礼了。小英雄，能否与诸位讲一下你们来到我这边的感受？”

小豪道：“我们进来时注意观察了一下，这个魔幻界其实就是由各种各样的几何体构成的，当然组合得很漂亮，刚刚大王考我俩的都是有关三视图的知识，画图应遵循‘长对正，高平齐，宽相等’，还要注意是相邻两个物体的表面相交的处理，在三视图中，分界线和可见的轮廓线用实线画出，不可见的轮廓线用虚线画出。刚刚例 1.1.2 就是犯了这样的错误。不知我这样说大家以为如何？”

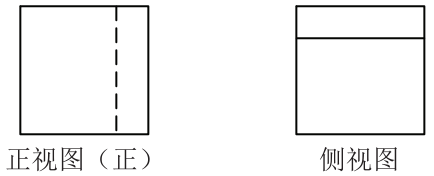


图 1.1.4

变形王道：“听君一席话，胜读十年书。今晚俩位小英雄就此住下，我还有问题想请教两位！”

究竟变形王还会出什么刁钻的问题，请听下回分解。

1.2 《智慧宝典》第二部第二回 城楼门外解封文 藏经阁里得宝典——陈海峰

话说小英与小豪被变形王留下，这一夜倒是无话。

第二天，早有侍卫等候他们，说变形王要接他们到城楼外，两个小英雄暂时猜不出变形王葫芦里卖什么药，两人商议一下，只能见机行事。

变形王带他俩到了一个地方，原来有一块石头，上面贴着一张封条，浮现出不少的文字，两个小英雄一看，封条上写着下面的文字——

例 1.2.1. （1）一个半径为 15 的球中内接一个底面半径是 $5\sqrt{3}$ 的圆柱，求此圆柱的体积。

（2）一个半径为 15 的球中内接一个底面边长是 $12\sqrt{3}$ 的正四棱柱，求此正四棱柱的体积。

（3）一个半径为 15 的球中内接一个底面边长是 $12\sqrt{3}$ 的正三棱锥，求此正三棱锥的体积。

还说如果能解除封条，便可知道宝典去处云云。

两个小英雄大喜，真是踏破铁鞋无觅处，得来全不费工夫。遂向变形王禀明了一切，变形王道，你们行动吧！

这时小豪拿起“奎星笔”，作出下图：

解析 （1）要求此圆柱的体积，必先求此圆柱的高，如图 1.2.1，有 $2R=30, 2r=10\sqrt{3}$，所以$h=\sqrt{30^2-\left(10\sqrt{3}\right)^2}=10\sqrt{6}$，故此圆柱的体积是 $V_{\text{圆柱}}=\pi\left(5\sqrt{3}\right)^2\times10\sqrt{6}=750\sqrt{6}\pi$。

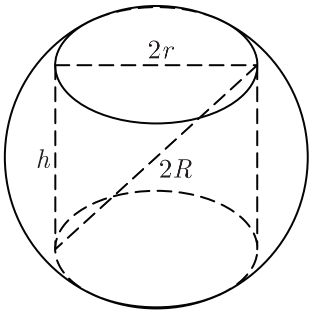


图 1.2.1

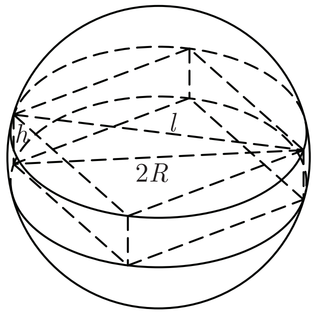


图 1.2.2

这时小豪也故意放慢了速度，变形王微微点头，用紧皱眉头。只见小豪又写道：

（2）同上面一题，见如图 1.2.2，由 $2R=30, a=12\sqrt{3}$，则 $l=\sqrt{2}a=12\sqrt{6}$，于是 $h=\sqrt{30^2-\left(12\sqrt{6}\right)^2}=6$，故此正四棱柱的体积是 $V_{\text{正四棱柱}}=\left(12\sqrt{3}\right)^2\times6=2592$。

只见小豪有点要放下笔了，小英看得仔细，大惊，忙喊，陷阱在第三题，听到师妹的喊声，小豪缓过神来，捶了一下胸口，心道：险先些误事。看似平常，差点走入死胡同。此时心中大定，写道：

（3）①如图 1.2.3，设球心为 G，在正三角形 BDC 中，O 是其外心，则有 $BO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times12\sqrt{3}=12$。在 RT$\triangle BOG$ 中，有 $OG=\sqrt{R^2-BO^2}=9$，则 $h=AO=15-9=6$，所以 $V_{A\text{-}BCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(12\sqrt{3}\right)^2\times6=216\sqrt{3}$。

②如图 1.2.4，同上述方法，不同的是 $h=A'O=15+8=24$，则 $V_{A\text{-}BCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(12\sqrt{3}\right)^2\times24=864\sqrt{3}$。 □

至此，变形王才深深的吸了一口气，只见小豪的笔句号点完，嗖的飞出一个盒子，内藏一纸条，上书：“宝典在藏经阁处。”

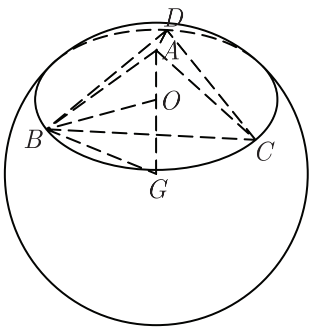


图 1.2.3

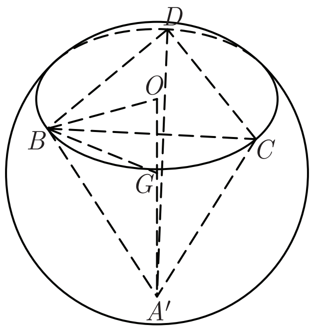


图 1.2.4

变形王带领两个小英雄取宝典而去，里面只有一页。其实两位小英雄此时心里透亮，这是变形王亲手安排的，那些题也是变形王设计的，他俩长跪致谢!

变形王道:“我也只能帮你们这个份上了，其他我也无能为力了。哈哈……但愿你们能如愿!”

欲知小英雄是否还会遇到什么艰险，请听下回分解。

助力高考

2.1 ab1962 解题集精选（五）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 $201 \sim 250$ 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看第一期。

题目 2.1.1. 已知 x,y,z 的范围都是 $[-2,2]$，求证：$xy+yz+xz\geq -4$。

证明 （1）当 x,y,z 全正，则 $xy+yz+xz\geq -4$；
（2）当 x,y,z 至少一个为 0，不妨设 $z=0$，则 $xy+yz+xz=xy$，由于 $x,y\in[-2,2]$，因此 $xy\geq -4$；
（3）当 x,y,z 两个正，一个负，不妨设 x,y 为正，z 为负，则

$$xy+yz+xz+4=xy-2x-2y+4+2x+2y+yz+xz=(x-2)(y-2)+(x+y)(2+z)\geq 0;$$

（4）当 x,y,z 两个负，一个正，不妨设 x,y 为负，z 为正，则

$$xy+yz+xz+4=xy+2x+2y+4-2x-2y+yz+xz=(x+2)(y+2)-(x+y)(2-z)\geq 0。$$

综上，原不等式成立。 □

kuing 评注： 这个解答的讨论复杂了，其实后三类可以合成一类，首先 0 无需另分类，只要将后面改为非负或非正即可，其次，因为当 x,y,z 同时变为其相反数时原式左边的值不变，所以后两类又可合成一类。

事实上，本题有如下两个更简单的方法。

另证一 设 $f(x)=xy+yz+zx+4=(y+z)x+yz+4$，为一次函数，又依题意有

$$f(-2)=(2-y)(2-z)\geq 0,$$

$$f(2)=(2+y)(2+z)\geq 0,$$

所以当 $x\in[-2,2]$ 时必有 $f(x)\geq 0$，所以原不等式成立。 □

另证二 依题意有

$$(2+x)(2+y)(2+z)\geq 0,$$

$$(2-x)(2-y)(2-z)\geq 0,$$

两式相加整理即得原不等式。 □

题目 2.1.2. 已知 x,y,z 都是非负实数，且 $x+y+z=1$。求证：

$$x(1-2x)(1-3x)+y(1-2y)(1-3y)+z(1-2z)(1-3z)\geq 0,$$

并确定等号成立的条件。

证明 不妨设 $x\geq y\geq z\geq 0$，由于 $x+y+z=1$，所以 $x+y\geq\dfrac{2}{3},z\leq\dfrac{1}{3}$，可设 $x+y=\dfrac{2}{3}+t,z=\dfrac{1}{3}-t$ 其中 $0\leq t\leq\dfrac{1}{3}$，则

$$\begin{aligned}
&x(1-2x)(1-3x)+y(1-2y)(1-3y)+z(1-2z)(1-3z)\\
=&6(x^3+y^3+z^3)-5(x^2+y^2+z^2)+x+y+z\\
=&6\left((x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz\right)-5(x^2+y^2+z^2)+1\\
=&x^2+y^2+z^2-6xy-6yz-6xz+18xyz+1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2-8xy-8yz-8xz+18xyz \\
&= 2-2xy(4-9z)-8z(x+y) \\
&= 1-8\left(\frac{1}{3}-t\right)\left(\frac{2}{3}+t\right)-2xy(1+3t) \\
&\geq 2-8\left(\frac{1}{3}-t\right)\left(\frac{2}{3}+t\right)-\frac{(x+y)^2}{2}(1+3t) \\
&= 2-8\left(\frac{1}{3}-t\right)\left(\frac{2}{3}+t\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+t\right)^2(1+3t) \\
&= \frac{1}{2}t^2(11-3t) \\
&\geq 0,
\end{aligned}
$$

故原不等式成立。 □

kuing 评注： 本题与《数学空间》第 3 期的《ab1962 解题集精选（二）》的例 2.1.5 类似，解法上也一样。这里我给出如下另证。

另证 由对称性，不妨设 $x \geq y \geq z$，则

$$
\begin{aligned}
&\quad x(1-2x)(1-3x)+y(1-2y)(1-3y)+z(1-2z)(1-3z) \\
&= x(y+z-x)(y+z-2x)+y(z+x-y)(z+x-2y)+z(x+y-z)(x+y-2z) \\
&= x(y+z-x)(2y-2x)+x(y+z-x)(z-y)+y(z+x-y)(2x-2y)+y(z+x-y)(z-x) \\
&\quad +z(x+y-z)(x-z)+z(x+y-z)(y-z) \\
&= \left(x(y+z-x)(2y-2x)+y(z+x-y)(2x-2y)\right)+\left(x(y+z-x)(z-y)+z(x+y-z)(y-z)\right) \\
&\quad +\left(y(z+x-y)(z-x)+z(x+y-z)(x-z)\right) \\
&= 2(x+y-z)(x-y)^2+(z+x-y)(x-z)(y-z)+(y+z-x)(x-z)(y-z) \\
&= 2(x+y-z)(x-y)^2+2z(x-z)(y-z) \\
&\geq 0,
\end{aligned}
$$

故原不等式成立。 □

题目 2.1.3. 已知 $5\sin B=\sin(2A+B)$，求证：$2\tan(A+B)=3\tan A$。

证明

$$
\begin{aligned}
5\sin B=\sin(2A+B) &\iff 5\sin((A+B)-A)=\sin((A+B)+A) \\
&\iff 5(\sin(A+B)\cos A-\cos(A+B)\sin A)=\sin(A+B)\cos A+\cos(A+B)\sin A \\
&\iff 4\sin(A+B)\cos A=6\cos(A+B)\sin A,
\end{aligned}
$$

下一步就到目标了。 □

kuing 评注： 本题有瑕疵，应有条件 $A, A+B \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$。

题目 2.1.4. 求 $y=\sin x\sin 2x (x\in(0,\pi))$ 的最大值。

解

$$
y=\sin x\sin 2x=2\sin^2 x\cos x=2(1-\cos^2 x)\cos x,
$$

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时 $y\leq 0$，不可能是最大值，故设 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{2}\left((1-\cos^2x)\cdot(1-\cos^2x)\cdot 2\cos^2x\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leq\sqrt{2}\left(\frac{1-\cos^2x+1-\cos^2x+2\cos^2x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{4}{9}\sqrt{3},\end{aligned}$$

当 $x=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等，故 $y_{\max}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$。 □

kuing 评注： *若改为 $y=\sin x+\sin 2x$ 又如何呢？留给大家练习，方法不止一种。*

题目 2.1.5. 已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$ 且 $abc=2$，求证 a,b,c 中至少有一个不小于 2。

证明 不妨设 $a\geq b\geq c$，由于 $a+b+c=0$，故 $a\geq 0$，$c\leq 0$，又因为 $abc=2$，故 $a>0$，$c<0$，$b<0$。假设 $0<a<2$，则 $bc>1$，但由均值不等式有

$$bc=(-b)(-c)\leq\left(\frac{-b-c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2<1,$$

矛盾，故 $a\geq 2$。 □

题目 2.1.6. 过抛物线的焦点的一条直线与抛物线交于两点 P、Q，经过点 P 和抛物线的顶点的直线交准线于点 M，求证 MQ 平行于抛物线的对称轴。

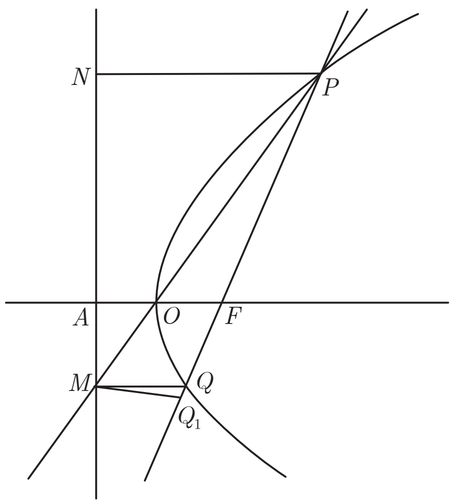


图 2.1.1

证明 用同一法。过 M 点作 MQ_1 平行于对称轴 AF 交直线 PQ 于点 Q_1，作 PN 平行于对称轴 AF 交准线于点 N，如图 2.1.1 所示。则有

$$\frac{OA}{PN}=\frac{MO}{MP}=\frac{Q_1F}{PQ_1},\ \frac{OF}{MQ_1}=\frac{PF}{PQ_1},$$

因为 $OA=OF$，所以

$$PN\cdot\frac{Q_1F}{PQ_1}=MQ_1\cdot\frac{PF}{PQ_1},$$

又 $PN=PF$，故 $Q_1F=MQ_1$，即 Q_1 在抛物线上，因此点 Q_1 与点 Q 重合，命题得证。 □

kuing 评注： 抛物线焦点弦类问题有很多有趣的几何性质，并且一般都有几何证法，不需要代数运算，往往引人入胜，本题就是一个经典题的例子。

题目 2.1.7. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：$\sin A+\sin B+\sin C>2$。

证明 设 $\angle B=x$，则 $\angle C=\pi-A-x$，因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$A+x>\dfrac{\pi}{2}$，故 $\dfrac{\pi}{2}-A<x<\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin x+\sin(\pi-x-A)=\sin A+\sin x+\sin(x+A)=f(x),$$

求导得

$$f'(x)=\cos x+\cos(x+A)=2\cos\frac{A}{2}\cos\left(x+\frac{A}{2}\right),$$

故当 $\dfrac{\pi}{2}-A<x<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，当 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，因此

$$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin A+\cos A+1=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)+1,$$

由于 $0<A<\dfrac{\pi}{2}\implies 0<A+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$，故

$$\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1,$$

所以 $f(x)>2$，即 $\sin A+\sin B+\sin C>2$。

此外，还有不用求导的适合高一的解法。仍然如上所设，利用和差化积公式将 $f(x)$ 化简为

$$f(x)=\sin A+2\cos\frac{A}{2}\sin\left(x+\frac{A}{2}\right),$$

因为 $\dfrac{\pi}{2}-A<x<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}<x+\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{A}{2}$，从而得到

$$\sin\left(x+\frac{A}{2}\right)>\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2},$$

所以

$$f(x)>\sin A+2\cos^2\frac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)+1,$$

下同上证。 □

kuing 评注： 通过角变换可知本题与《数学空间》第 2 期的《三角函数公式微型整理》的例 2.2.2 等价。

题目 2.1.8. 已知 $\cos(A-B)=a$，$\sin(A-C)=b$，求证：$\cos^2(B-C)=a^2+b^2-2ab\sin(B-C)$。

证明

$$\begin{aligned}
a^2+b^2-2ab\sin(B-C)&=\cos^2(A-B)+\sin^2(A-C)-2\cos(A-B)\sin(A-C)\sin(B-C)\\
&=1+\frac{\cos2(A-B)}{2}-\frac{\cos2(A-C)}{2}-2\cos(A-B)\sin(A-C)\sin(B-C)\\
&=1-\sin(2A-B-C)\sin(C-B)-2\cos(A-B)\sin(A-C)\sin(B-C)\\
&=1+\sin(B-C)\left(\sin((A-B)+(A-C))-2\cos(A-B)\sin(A-C)\right)\\
&=1+\sin(B-C)\sin((A-B)-(A-C))\\
&=1-\sin^2(B-C)\\
&=\cos^2(B-C)。
\end{aligned}$$

□

2.2 几道二次函数与绝对值结合的题目的研究——郭子伟

本文的二次函数与绝对值相结合的题目都是在高中阶段出现过的，这种题不是简单题但也不算太难，需要一定的经验。这里我将对其稍作整理以及数据上的推广研究。

例 2.2.1. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b,(a,b\in\mathbb{R},x\in[-1,1])$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 M，求证：$M\geq\dfrac{1}{2}$。

证明 依题意，由绝对值不等式得

$$4M\geq|f(-1)|+2|f(0)|+|f(1)|\geq|f(-1)-2f(0)+f(1)|=2,$$

即得 $M\geq\dfrac{1}{2}$，当 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{2}$ 时取等号。 □

本题在分析的时候可以联系其函数图象，由图象不难想象到取等时应为区间两端点及中点取最值时，再由开口方向即知应是 $f(-1)=-f(0)=f(1)=\dfrac{1}{2}$ 时，于是只自然考虑以 $f(-1),f(0),f(1)$ 配凑出用绝对值不等式能化为定值。

此法对此题显然具有一般性，于是容易得到如下推广。

定理 2.2.1. 给定实数 k,p,q 且 $p<q$，设函数 $f(x)=kx^2+ax+b,(a,b\in\mathbb{R},x\in[p,q])$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 M，则有 $M\geq\dfrac{1}{8}|k|(p-q)^2$。

此推广的证明方法完全可以仿照例 2.2.1 的证法，这里就不再写了，大家可以自己试一下。

例 2.2.2. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 对任意 $|x|\leq1$ 均有 $|f(x)|\leq1$，求证：当 $|x|\leq2$ 时有 $|f(x)|\leq7$。

证明 由

$$\begin{cases}f(-1)=a-b+c,\\ f(0)=c,\\ f(1)=a+b+c,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}f(1)+\dfrac{1}{2}f(-1)-f(0),\\ b=\dfrac{1}{2}f(1)-\dfrac{1}{2}f(-1),\\ c=f(0),\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)-f(0)\right)x^2+\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)\right)x+f(0)\\&=\frac{x^2+x}{2}f(1)+\frac{x^2-x}{2}f(-1)+(1-x^2)f(0),\end{aligned}$$

故依题意当 $|x|\leq2$ 时，由绝对值不等式得

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leq\left|\frac{x^2+x}{2}\right|\cdot|f(1)|+\left|\frac{x^2-x}{2}\right|\cdot|f(-1)|+\left|1-x^2\right|\cdot|f(0)|\\&\leq\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+\left|\frac{x^2-x}{2}\right|+\left|1-x^2\right|\\&=\left|\frac{x}{2}\right|\cdot(|x+1|+|x-1|)+\left|1-x^2\right|\\&\leq|x+1|+|x-1|+\left|1-x^2\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2x^2+2+2\left|1-x^2\right|}+\left|1-x^2\right| \\
&\le \sqrt{2\cdot 2^2+2+2\cdot 3}+3 \\
&= 7,
\end{aligned}
$$

原不等式得证，当 $f(x)=2x^2-1$ 或 $f(x)=-2x^2+1$ 时满足条件且能取等。 □

上述证法中，考虑 $f(-1),f(0),f(1)$ 也是因为由图象可以想象到取等条件应在两端点及中间，显然也具有一般性，因此笔者通过研究随即得到如下数据推广。

定理 2.2.2. 给定正数 $k>0,t>0,m>1$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 对任意 $|x|\le k$ 均有 $|f(x)|\le t$，则当 $|x|\le mk$ 时有 $|f(x)|\le \left(2m^2-1\right)\cdot t$。

证明 （1）当 $|x|\le k$ 时，依题意有 $|f(x)|\le t$；

（2）当 $k<|x|\le mk$ 时，由

$$
\begin{cases}
f(-k)=ak^2-bk+c, \\
f(0)=c, \\
f(k)=ak^2+bk+c,
\end{cases}
\implies
\begin{cases}
a=\dfrac{f(k)+f(-k)-2f(0)}{2k^2}, \\
b=\dfrac{f(k)-f(-k)}{2k}, \\
c=f(0),
\end{cases}
$$

得到[1]

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{f(k)+f(-k)-2f(0)}{2k^2}\cdot x^2+\frac{f(k)-f(-k)}{2k}\cdot x+f(0) \\
&=\left(\frac{x^2}{2k^2}+\frac{x}{2k}\right)f(k)+\left(\frac{x^2}{2k^2}-\frac{x}{2k}\right)f(-k)+\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)f(0),
\end{aligned}
$$

故依题意及由绝对值不等式得

$$
\begin{aligned}
|f(x)|&\le\left|\frac{x^2}{2k^2}+\frac{x}{2k}\right|\cdot|f(k)|+\left|\frac{x^2}{2k^2}-\frac{x}{2k}\right|\cdot|f(-k)|+\left|1-\frac{x^2}{k^2}\right|\cdot|f(0)| \\
&\le\left(\left|\frac{x^2}{2k^2}+\frac{x}{2k}\right|+\left|\frac{x^2}{2k^2}-\frac{x}{2k}\right|+\left|1-\frac{x^2}{k^2}\right|\right)\cdot t \\
&=\left(\left|\frac{x}{2k}\right|\cdot\left(\left|\frac{x}{k}+1\right|+\left|\frac{x}{k}-1\right|\right)+\left|\frac{x}{k}+1\right|\cdot\left|\frac{x}{k}-1\right|\right)\cdot t,
\end{aligned}
$$

因为 $k<|x|\le mk \iff 1<\left|\dfrac{x}{k}\right|\le m$，所以有

$$
\left(\frac{x}{k}+1\right)\left(\frac{x}{k}-1\right)>0 \implies \left|\frac{x}{k}+1\right|+\left|\frac{x}{k}-1\right|=\left|\frac{x}{k}+1+\frac{x}{k}-1\right|=\left|\frac{2x}{k}\right|,
$$

以及

$$
\left|\frac{x}{k}+1\right|\cdot\left|\frac{x}{k}-1\right|=\frac{x^2}{k^2}-1,
$$

于是

$$
\left|\frac{x}{2k}\right|\cdot\left(\left|\frac{x}{k}+1\right|+\left|\frac{x}{k}-1\right|\right)+\left|\frac{x}{k}+1\right|\cdot\left|\frac{x}{k}-1\right|=\left|\frac{x}{2k}\right|\cdot\left|\frac{2x}{k}\right|+\frac{x^2}{k^2}-1=\frac{2x^2}{k^2}-1\le 2m^2-1,
$$

故得到

$$
|f(x)|\le\left(2m^2-1\right)\cdot t。
$$

因为 $\left(2m^2-1\right)\cdot t>t$，故综合（1）（2）即知当 $|x|\le mk$ 时有 $|f(x)|\le\left(2m^2-1\right)\cdot t$，又有函数 $f(x)=\dfrac{2t}{k^2}x^2-t$ 或 $f(x)=-\dfrac{2t}{k^2}x^2+t$ 满足条件且能取等号，可见 $\left(2m^2-1\right)\cdot t$ 已是最佳。 □

[1] 其实用拉格朗日插值公式可以直接写出此类式子，不过由于超纲，所以还是用回基本方法。

由于能取等且取等处总在区间端点，又当 a,b,c 变化时 $f(x)$ 也是连续变化的，所以可以得到具体取值范围，由此不难得到如下推论。

推论 2.2.2.1. 给定正数 $k>0,t>0$，任意实数 a,b,c 使 $f(x)=ax^2+bx+c$ 对任意 $|x|\le k$ 均有 $|f(x)|\le t$。对任意实数 u，记 $f(u)$ 的取值区间为 $D(u)$，则

$$D(u)=\begin{cases}[-t,t]\,, & |u|\le k,\\ \left[-\left(2\left(\dfrac{u}{k}\right)^2-1\right)t,\left(2\left(\dfrac{u}{k}\right)^2-1\right)t\right], & |u|>k.\end{cases}$$

由此推论也可以得到任意区间上的情形，因为 $D(u)$ 两端点值关于 u 单调，所以只需考虑端点处的函数取值范围即可。比如将例 2.2.2 求证部分的区间改为 $x\in[2,3]$，则只需考虑 $f(3)$ 的范围，即 $D(3)$；若改为 $x\in[-e,\pi]$，则只需考虑 $f(\pi)$ 的范围，即 $D(\pi)$。

又显然平移不改变本题的结论，所以由此立得如下更一般的情形。

定理 2.2.3. 给定实数 $p<q,r<s$ 及正数 $d>0$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 对任意 $x\in[p,q]$ 均有 $f(x)\in[r,s]$，则当 $x\in[p-d,q+d]$ 时有

$$f(x)\in\left[r-\left(\left(1+\frac{2d}{q-p}\right)^2-1\right)(s-r)\,,s+\left(\left(1+\frac{2d}{q-p}\right)^2-1\right)(s-r)\right]。$$

与此定理对应的还有相应的推论，这里就不具体写了，继续下一个问题。

例 2.2.3. 若函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 对任意 $|x|\le 1$ 均有 $|f(x)|\le 1$，求 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值。

解 类似于例 2.2.2 的做法，得到

$$|a|+|b|+|c|=\left|\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)-f(0)\right|+\left|\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)\right|+|f(0)|\,,$$

由绝对值不等式，有

$$\left|\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)-f(0)\right|+\left|\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)\right|+|f(0)|\le\frac{|f(1)+f(-1)|+|f(1)-f(-1)|}{2}+2\,|f(0)|\,。$$

对于任意两个实数 x,y，当 $xy\ge 0$ 时有

$$|x+y|=|x|+|y|=\max\{|x|\,,|y|\}+\min\{|x|\,,|y|\}\,,\tag{2.2.1}$$

$$|x-y|=||x|-|y||=\max\{|x|\,,|y|\}-\min\{|x|\,,|y|\}\,,\tag{2.2.2}$$

当 $xy\le 0$ 时有

$$|x+y|=||x|-|y||=\max\{|x|\,,|y|\}-\min\{|x|\,,|y|\}\,,\tag{2.2.3}$$

$$|x-y|=|x|+|y|=\max\{|x|\,,|y|\}+\min\{|x|\,,|y|\}\,,\tag{2.2.4}$$

可见总有 $|x+y|+|x-y|=2\max\{|x|\,,|y|\}$，故此

$$\frac{|f(1)+f(-1)|+|f(1)-f(-1)|}{2}+2\,|f(0)|=\max\{|f(1)|\,,|f(-1)|\}+2\,|f(0)|\le 1+2=3,$$

即得到 $|a|+|b|+|c|\le 3$，当 $f(x)=2x^2-1$ 或 $f(x)=-2x^2+1$ 时满足条件且取等号，所以最大值就是 3。 □

这题的函数图形变化对所求式 $|a|+|b|+|c|$ 的影响相对较难想象和判断，事实上最一般的情形比较复杂，仍未完全解决，故以下仅给出两种相对简单情形的推广。

定理 2.2.4. 给定正数 $0<k\le 1,t>0$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 对任意 $|x|\le k$ 均有 $|f(x)|\le t$，则 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值是 $\left(\dfrac{2}{k^2}+1\right)t$。

证明 利用定理 2.2.2 的证明中的结果以及绝对值不等式，有

$$\begin{aligned}|a|+|b|+|c|&=\left|\frac{f(k)+f(-k)-2f(0)}{2k^2}\right|+\left|\frac{f(k)-f(-k)}{2k}\right|+|f(0)|\\&\le\frac{|f(k)+f(-k)|+k\,|f(k)-f(-k)|}{2k^2}+\left(\frac{1}{k^2}+1\right)\cdot|f(0)|,\end{aligned}$$

由式 (2.2.1) $+\,k\times$ 式 (2.2.2) 或式 (2.2.3) $+\,k\times$ 式 (2.2.4) 得到

$$\begin{aligned}&|f(k)+f(-k)|+k\,|f(k)-f(-k)|\\=&\begin{cases}(k+1)\max\{|f(k)|,|f(-k)|\}+(1-k)\min\{|f(k)|,|f(-k)|\}, & f(k)f(-k)\ge 0,\\(k+1)\max\{|f(k)|,|f(-k)|\}+(k-1)\min\{|f(k)|,|f(-k)|\}, & f(k)f(-k)\le 0,\end{cases}\end{aligned}$$

因为 $0<k\le 1$，所以

$$\begin{aligned}|f(k)+f(-k)|+k\,|f(k)-f(-k)|&\le(k+1)\max\{|f(k)|,|f(-k)|\}+(1-k)\min\{|f(k)|,|f(-k)|\}\\&\le(k+1)t+(1-k)t=2t,\end{aligned}$$

于是

$$\frac{|f(k)+f(-k)|+k\,|f(k)-f(-k)|}{2k^2}+\left(\frac{1}{k^2}+1\right)\cdot|f(0)|\le\frac{t}{k^2}+\left(\frac{1}{k^2}+1\right)t=\left(\frac{2}{k^2}+1\right)t,$$

即得到 $|a|+|b|+|c|\le\left(\dfrac{2}{k^2}+1\right)t$，当 $f(x)=\dfrac{2t}{k^2}x^2-t$ 或 $f(x)=-\dfrac{2t}{k^2}x^2+t$ 时满足条件且取等号，故最大值就是 $\left(\dfrac{2}{k^2}+1\right)t$。 □

对 $k>1$ 取最值时似乎并不在端点取等，仍然有待研究。下面再研究自变量保号[1]时的情形，由对称性只需考虑非负的情形即可。

定理 2.2.5. 给定正数 t 和非负实数 p,q 且 $0\le p<q$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 对任意 $x\in[2p,2q]$ 均有 $|f(x)|\le t$，则 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值是 $\dfrac{(2+4p+4q+p^2+6pq+q^2)t}{(p-q)^2}$。

证明 类似地，将 a,b,c 表示为关于 p,q 的式子再根据题设由绝对值不等式得

$$\begin{aligned}|a|&=\frac{|f(2p)+f(2q)-2f(p+q)|}{2(p-q)^2}\le\frac{2t}{(p-q)^2},\\|b|&=\frac{|(p+3q)f(2p)+(3p+q)f(2q)-4(p+q)f(p+q)|}{2(p-q)^2}\le\frac{4(p+q)t}{(p-q)^2},\\|c|&=\frac{|q(p+q)f(2p)+p(p+q)f(2q)-4pqf(p+q)|}{(p-q)^2}\le\frac{(p^2+6pq+q^2)t}{(p-q)^2},\end{aligned}$$

三式相加即得

$$|a|+|b|+|c|\le\frac{(2+4p+4q+p^2+6pq+q^2)t}{(p-q)^2},$$

当 $f(x)=\dfrac{2t}{(p-q)^2}x^2-\dfrac{4(p+q)t}{(p-q)^2}x+\dfrac{(p^2+6pq+q^2)t}{(p-q)^2}$ 或 $f(x)=-\dfrac{2t}{(p-q)^2}x^2+\dfrac{4(p+q)t}{(p-q)^2}x-\dfrac{(p^2+6pq+q^2)t}{(p-q)^2}$ 时满足条件且取等号，所以最大值就是 $\dfrac{(2+4p+4q+p^2+6pq+q^2)t}{(p-q)^2}$。 □

此推广取 $p=0,q=\dfrac{1}{2}$ 也是曾经出现过的题目。

[1]此处的“保号”是指自变量恒为非负或者恒为非正。

2.3 例谈七类常见不等式的求解——李明

在中学数学的学习中，学生们除了要会求解一些常见类型的方程，还要会求解一些常见类型的不等式。不等式的解法可与方程的解法类比，但方程的解集通常是离散的，而且许多情形下只含有有限多个解；而不等式的解集通常是连续的，多以区间的形式给出，含有无限多个解。此外，不等式自身的特点决定了解不等式通常要比解同类型的方程步骤繁琐一些。因此，本文归纳总结了中学教材中七类常见不等式的求解方法，并针对每种方法列举了若干典型实例，希望对正在学习或复习解不等式知识模块的中学生有所帮助。

1. 整式不等式的解法

整式不等式的一般形式为 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0>0$（$a_n\neq 0$）。

为叙述方便，下文将不等式的解集统一记为 D。

（1）当 $n=1$ 时，$a_1x+a_0>0$（$a_1\neq 0$）是一元一次不等式。

若 $a_1>0$，则 $D=\left(-\dfrac{a_0}{a_1},+\infty\right)$；

若 $a_1<0$，则 $D=\left(-\infty,-\dfrac{a_0}{a_1}\right)$。

（2）当 $n=2$ 时，$a_2x^2+a_1x+a_0>0$（$a_2\neq 0$）是一元二次不等式，两端同时除以 a_2 即可归结为下面两种情形之一：

①$x^2+px+q>0$。

若 $\Delta=p^2-4q<0$，则 $D=(-\infty,+\infty)$；

若 $\Delta\geq 0$，则 $D=\left(-\infty,\dfrac{-p-\sqrt{\Delta}}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{-p+\sqrt{\Delta}}{2},+\infty\right)$。

②$x^2+px+q<0$。

若 $\Delta\leq 0$，则 $D=\varnothing$。

若 $\Delta<0$，则 $D=\left(\dfrac{-p-\sqrt{\Delta}}{2},\dfrac{-p+\sqrt{\Delta}}{2}\right)$。

（3）当 $n\geq 3$ 时，称 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0>0$（$a_n\neq 0$）为一元高次不等式，该类不等式的求解一般采用所谓的“数轴穿根法”，其步骤如下：

①两端同时除以 a_n 得 $x^n+a'_{n-1}x^{n-1}+\cdots a'_1x+a'_0>0$（或 <0）；

②因式分解得

$$(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}\cdots\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{m_r}$$
$$>0\text{（或}<0\text{）},$$

其中 $x_1<x_2<\cdots<x_k$，$p_i^2-4q_i<0$（$i=1,2,\cdots,r$）；

③化简得 $(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k}>0$（或 <0）。

④在 x 轴上依次标出 $x_1,x_2,\cdots,x_k$；

⑤从 x 轴右上方开始，依据“奇穿偶返”原则进行穿线，x 轴上方（下方）曲线所对应的区间的并集便是 $(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k}>0$（$<0$）的解集。

例 2.3.1. 解关于 x 的不等式 $ax-a^2+3a>x+2$。

解 不等式可化为 $(a-1)x>(a-1)(a-2)$。

当 $a=1$ 时，$D=\varnothing$；当 $a>1$ 时，$D=(a-2,+\infty)$；当 $a<1$ 时，$D=(-\infty,a-2)$。 □

例 2.3.2. 解关于 x 的不等式 $ax^2-(2a+1)x+2<0$。

解 当 $a=0$ 时，$D=(2,+\infty)$。

当 $a\neq 0$ 时，不等式可化为 $a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-2)<0$。若 $a<0$，则 $\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-2)>0$，$D=\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right)\bigcup(2,+\infty)$；若 $a>0$，则 $\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-2)<0$。于是，当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$D=\left(2,\dfrac{1}{a}\right)$；当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$D=\varnothing$；当 $a>\dfrac{1}{2}$时，$D=\left(\dfrac{1}{a},2\right)$。

综上，当 $a<0$ 时，$D=\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right)\bigcup(2,+\infty)$；当 $a=0$ 时，$D=(-\infty,2)$；当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$D=\left(2,\dfrac{1}{a}\right)$；当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$D=\varnothing$；当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$D=\left(\dfrac{1}{a},2\right)$。 □

例 2.3.3. 解不等式 $\left(x^3-3x^2+2x\right)\left(x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)-24\right)\geq 0$。

解 因式分解得$x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)\left(x+4\right)\left(x^2+3x+6\right)\geq 0$，等价于

$$x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)\left(x+4\right)\geq 0,$$

其“数轴穿根”如图 2.3.1：

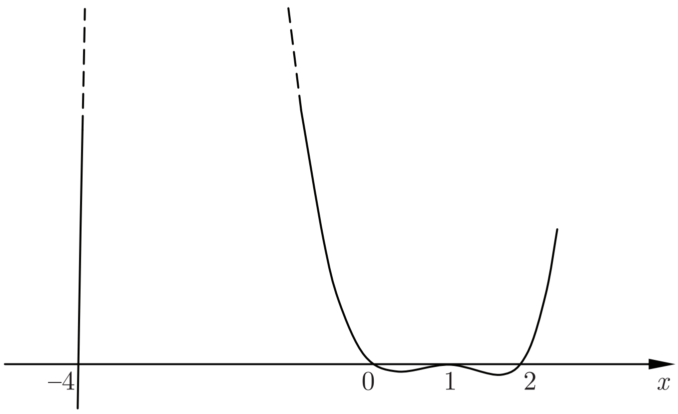


图 2.3.1

由图 2.3.1 可知$D=[-4,0]\bigcup\{1\}\bigcup[2,+\infty)$。 □

2. 分式不等式的解法

解分式不等式的一般方法：先化成与之同解的整式不等式（组），再进行求解。

例 2.3.4. 解关于 x 的不等式 $\dfrac{5x}{4x-a}\leq 1$。

解 $\dfrac{5x}{4x-a}\leq 1 \iff \dfrac{x+a}{4x-a}\leq 0 \iff \begin{cases}(x+a)(4x-a)\leq 0,\\ 4x-a\neq 0.\end{cases}$

当 $a=0$ 时，$D=\varnothing$；当 $a>0$ 时，$D=\left[-a,\dfrac{a}{4}\right)$；当 $a<0$ 时，$D=\left(\dfrac{a}{4},-a\right]$。 □

例 2.3.5. 解不等式 $\dfrac{15(x+1)}{x^2+3x+2}>6-x$。

解 $\dfrac{15\left(x+1\right)}{x^2+3x+2}\geq 6-x \iff \dfrac{\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-3\right)}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}\geq 0 \iff \begin{cases}\left(x+2\right)\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)\left(x-3\right)\geq 0,\\ \left(x+1\right)\left(x+2\right)\neq 0.\end{cases}$ 其“数轴穿根”如图 2.3.2，由图 2.3.2 可知 $D=(-2,-1)\bigcup(-1,1]\bigcup[3,+\infty)$。 □

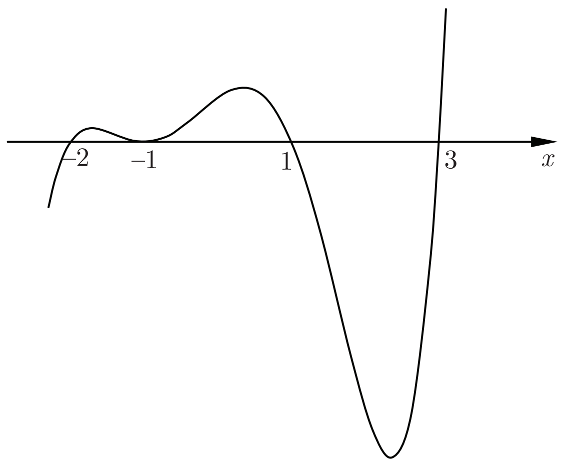


图 2.3.2

3. 绝对值不等式的解法

解绝对值不等式的一般方法是脱去绝对值符号，如：

（1）当 $a>0$ 时，$|f(x)|<a \iff -a<f(x)<a$，$|f(x)|>a \iff f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$。

（2）$|f(x)|<|g(x)| \iff f^2(x)<g^2(x)$。

（3）含多个绝对值的不等式通常采用“零点分段法”。

例 2.3.6. 解不等式 $x^2-x-5\le|2x-1|$。

解法 1 当 $x\ge\dfrac{1}{2}$ 时，$x^2-x-5\le|2x-1| \iff x^2-3x-4\le0 \iff -1\le x\le4$，于是 $x\in\left[\dfrac{1}{2},4\right]$；当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$x^2-x-5\le|2x-1| \iff x^2+x-6\le0 \iff -3\le x\le2$，于是 $x\in\left[-3,\dfrac{1}{2}\right)$。综上可得 $D=[-3,4]$。 □

解法 2 $x^2-x-5\le|2x-1| \iff 4x^2-4x-20\le4|2x-1| \iff |2x-1|^2-4|2x-1|-21=0 \iff (|2x-1|+3)(|2x-1|-7)\le0 \iff |2x-1|-7\le0 \iff -7\le2x-1\le7$，于是 $D=[-3,4]$。 □

例 2.3.7. 解关于 x 的不等式 $\left|x^2-5ax\right|\le6a^2$。

解 $\left|x^2-5ax\right|\le6a^2 \iff \left(x^2-5ax\right)^2\le\left(6a^2\right)^2 \iff (x+a)(x-2a)(x-3a)(x-6a)\le0$。
当 $a=0$ 时，$D=\{0\}$；当 $a>0$ 时，其“数轴穿根”如图 2.3.3，由图 2.3.3 可得 $D=[-a,2a]\bigcup[3a,6a]$；
当 $a<0$ 时，其“数轴穿根”如图 2.3.4，由图 2.3.4 可得 $D=[6a,3a]\bigcup[2a,-a]$。 □

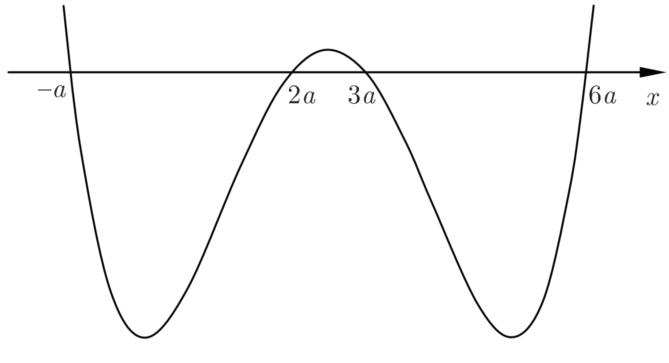


图 2.3.3

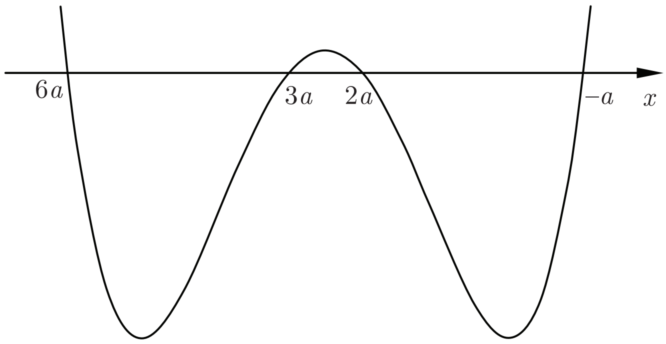


图 2.3.4

例 2.3.8. 解不等式 $|x-1|-|2x+4|>1$。

解 根据两个绝对值的零点 $x=1$ 和 $x=-2$，将实数轴分为三个区段，分别讨论得:
当 $x\le -2$ 时，原式 $\iff x+5>1 \iff x>-4$，于是$-4<x\le -2$;
当 $-2<x<1$ 时，原式 $\iff -3x-3>1 \iff x<-\dfrac{4}{3}$，于是 $-2<x<-\dfrac{4}{3}$;
当 $x\ge 1$ 时，原式 $\iff -x-5>1 \iff x<-6$，无解。
综上，$D=\left(-4,-\dfrac{4}{3}\right)$。 □

4. 无理不等式的解法

解无理不等式的通常方法：在保证偶次方根里被开方式非负的前提下，通过乘方消去根号，得到与原无理不等式同解的不等式组。如:

（1）$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)} \iff 0\le f(x)<g(x)$。

（2）$\sqrt{f(x)}<g(x) \iff \begin{cases} 0\le f(x)<g^2(x), \\ g(x)>0。\end{cases}$

（3）$\sqrt{f(x)}>g(x) \iff \begin{cases} f(x)>g^2(x), \\ g(x)\ge 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)<0。\end{cases}$

例 2.3.9. 解不等式 $\sqrt{x^2+3x-4}\ge x-2$。

解 原式等价于 $\begin{cases} x^2+3x-4\ge (x-2)^2, \\ x-2\ge 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2+3x-4\ge 0, \\ x-2<0, \end{cases}$ 解得 $D=(-\infty,-4]\bigcup[2,+\infty)$。 □

例 2.3.10. 解关于 x 的不等式 $\sqrt{a^2-x^2}<2x+a \quad (a>0)$。

解 原式 $\iff \begin{cases} a^2-x^2\ge 0, \\ 2x+a>0, \\ a^2-x^2<(2x+a)^2, \end{cases} \iff \begin{cases} -a\le x\le a, \\ x>-\dfrac{a}{2}, \\ x<-\dfrac{4}{5}a \text{ 或 } x>0, \end{cases}$ 于是 $D=(0,a]$。 □

5. 指数不等式的解法

求解指数不等式的通常方法：将不等式两端先化成同底指数式，再利用指数函数的单调性求解。

例 2.3.11. 解不等式 $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{1-x}<\left(\dfrac{25}{36}\right)^{2\left(1+\sqrt{x}\right)}$。

解 原式 $\iff \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x-1} < \left(\dfrac{5}{6}\right)^{4\left(1+\sqrt{x}\right)} \iff x-1 > 4\left(1+\sqrt{x}\right) \iff \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-5\right) > 0 \iff \sqrt{x}-5>0$，于是 $D=(25,+\infty)$。 □

例 2.3.12. 解不等式 $\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \left(\sqrt{2}-1\right)^x < 6$。

解 令 $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^x$，则原式 $\iff \begin{cases} t+\dfrac{1}{t}<6, \\ t>0, \end{cases} \iff \begin{cases} t^2-6t+1<0, \\ t>0, \end{cases}$ 解得 $0<t<3+2\sqrt{2}$，即 $\left(\sqrt{2}+1\right)^x < \left(\sqrt{2}+1\right)^2$，于是 $D=(-\infty,2)$。 □

6. 对数不等式的解法

求解对数不等式的通常方法是：在保证对数式里真数大于零的前提下，将不等式两端先化成同底对数式，再利用对数函数的单调性求解。

例 2.3.13. 解不等式 $\log_2\left(4^x-2^{x+1}-3\right)\le 5$。

解 原式 $\iff \log_2\left(\left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x-3\right)\le \log_2 32 \iff \begin{cases} \left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x-3>0, \\ \left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x-3\le 32, \end{cases} \iff 3<2^x\le 7$。于是，$D=(\log_2 3, \log_2 7]$。 □

例 2.3.14. 解关于 x 的不等式 $\log_a\sqrt{2x+3}>\log_a x$（$a>0$ 且 $a\ne 1$）。

解 当 $a>1$ 时，原式 $\iff \sqrt{2x+3}>x>0$，解得 $0<x<3$；当 $0<a<1$ 时，原式 $\iff 0<\sqrt{2x+3}<x$，解得 $x>3$。

综上，当 $a>1$ 时，$D=(0,3)$；当 $0<a<1$ 时，$D=(3,+\infty)$。 □

7. 三角不等式的解法

求解三角不等式的通常方法是：运用因式分解、变量代换等方法对三角不等式中的三角函数式进行恒等变形化简，再利用三角函数的单调性、正负号区间等特性来求解。

例 2.3.15. 解不等式 $\sin x>\sqrt{3}\cos x+\sqrt{2}$。

解 原式 $\iff \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以在 $[0,2\pi)$ 内，$\dfrac{\pi}{4}<x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{3\pi}{4}$，即 $\dfrac{7\pi}{12}<x<\dfrac{13\pi}{12}$，于是 $D=\left\{x \,\middle|\, 2k\pi+\dfrac{7\pi}{12}<x<2k\pi+\dfrac{13\pi}{12}, k\in\mathbb{Z}\right\}$。 □

例 2.3.16. 设 x 为锐角，解不等式 $4\sin^2 x+2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cos x-\left(4+\sqrt{6}\right)\ge 0$。

解 原式 $\iff \left(2\cos x-\sqrt{2}\right)\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\le 0$，所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\cos x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由于 $\cos x$ 在第一象限是减函数，所以 $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $D=\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$。 □

例 2.3.17. 解不等式 $\arcsin x<2\arccos x$。

解 原式 $\iff \arcsin x<2\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x\right) \iff \arcsin x<\dfrac{\pi}{3}$，因为 $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$ 且为增函数，所以 $-1\le x\le 1$ 且 $x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，于是 $D=\left[-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$。 □

2.4 不等式“恒成立·能成立”问题梳理（一）——窦国栋

不等式与导数相结合问题一直是高考的热点，常出压轴题。本文尝试对其中“恒成立·能成立”问题做一下梳理，简述一下方法，希望对大家有所帮助。

题型一：一主元一参数

先来一组小题，看看最简单的恒成立和能成立的解法和区别。

例 2.4.1. （1）任意 $x \in [1,3]$，使得不等式 $ax^2+(a-2)x-2 \le 0$ 成立，求实数 a 的取值范围?
（2）任意 $a \in [1,3]$，使得不等式 $ax^2+(a-2)x-2 \le 0$ 成立，求实数 x 的取值范围?
（3）存在 $x \in [1,3]$，使得不等式 $ax^2+(a-2)x-2 > 0$ 成立，求实数 a 的取值范围?
（4）存在 $a \in [1,3]$，使得不等式 $ax^2+(a-2)x-2 > 0$ 成立，求实数 x 的取值范围?
（5）存在 $x \in [1,3]$，使得等式 $ax^2+(a-2)x-2 = 0$ 成立，求实数 a 的取值范围?

解 （1）题中 x 是任取的，所以 x 是主元，a 是参数。“任意 $x \in [1,3]$，不等式 $ax^2+(a-2)x-2 \le 0$成立”等价于“任意 $x \in [1,3]$，不等式 $a(x^2+x) \le 2x+2$ 成立”，即“任意 $x \in [1,3]$，不等式 $a \le \frac{2}{x}$ 成立”，又 $\left(\frac{2}{x}\right)_{\min} = \frac{2}{3}$，所以 $a \le \frac{2}{3}$；

（2）由于任意 $a \in [1,3]$ 不等式恒成立，从而 a 是主元，x 是参数，故构造关于 a 的函数 $f(a) = (x^2+x)a-2(x+1)$，只需使关于 a 的一次函数 $f(a)$ 的最大值小于等于零即可，即只需 $\begin{cases} f(1) \le 0, \\ f(3) \le 0, \end{cases}$ 即可；

（3）本题 x 是主元，a 是参数，故构造关于 x 的函数 $g(x) = ax^2+(a-2)x-2$，使函数在 $[1,3]$ 上的最大值大于零即可；

（4）本题 a 是主元，x 是参数，故构造关于 a 的函数 $f(a) = (x^2+x)a-2(x+1)$，只需使关于 a 的一次函数 $f(a)$ 的最大值大于零即可；

（5）等价变形为 $a = \frac{2}{x}$ 对存在 $x \in [1,3]$ 成立，所以 a 是函数 $f(x) = \frac{2}{x}$ 当 $x \in [1,3]$ 时的值域。 □

梳理： 1. 显然二次函数恒成立和能成立问题，除分离参数外还有其他解法。
2. 这类题目，分清楚谁是主元谁是参量是关键，一般把给出范围的参数作为主元[1]。
3. 注意（1）和（3），（2）和（4）互为否定命题，所以还可以用间接法来做。
4. 设 A 是与 x 无关的参数或只含参数的表达式，则
（1）若不等式 $f(x) > A$ 在区间 D 上恒成立，则等价于函数 $f(x)_{\min} > A$；
（2）若不等式 $f(x) < A$ 在区间 D 上恒成立，则等价于函数 $f(x)_{\max} < A$；
（3）若在区间 D 上存在一个 x_0 使 $f(x_0) > A$ 成立，则等价于 $f(x)_{\max} > A$；
（4）若在区间 D 上存在一个 x_0 使 $f(x_0) < A$ 成立，则等价于 $f(x)_{\min} < A$；
（5）若在区间 D 上存在一个 x_0 使 $f(x_0) = A$ 成立，则等价于 $A \in \{f(x) \mid x \in D\}$。

注： 若为“$f(x) \ge A$”等，则等价式也只需添上等号。另外，若函数有上界或下界但取不到最值，则此处约定 $f(x)_{\max}$ 和 $f(x)_{\min}$ 表示上确界和下确界，并且此时无论是“$f(x) > A$”还是“$f(x) \ge A$”，等价式都应添上等号，下同。

例 2.4.2. 已知函数 $f(x) = px - \frac{p}{x} - 2\ln x$（其中 $p > 0$），函数 $g(x) = \frac{2e}{x}$，若在 $[1,e]$ 上至少存在一个 x 的值使得 $f(x) > g(x)$ 成立，求实数 p 的取值范围。

[1] 我所见到的选谁为主元的较好的解释，请参考《管窥优美解法，探究问题本源》石亮，《中学数学教学参考》2010,12（上旬）

解 在 $[1,e]$ 上至少存在一个 x 的值使得 $f(x)>g(x)$ 成立，等价于不等式 $f(x)-g(x)>0$ 在区间 $[1,e]$ 上有解。令

$$F(x)=f(x)-g(x)=px-\frac{p}{x}-2\ln x-\frac{2e}{x},$$

因为

$$F'(x)=p+\frac{p}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{2e}{x^2}>0,$$

所以 $F(x)$ 在 $[1,e]$ 单调递增，所以 $F(x)_{\max}=F(e)=pe-\dfrac{p}{e}-4>0$，所以 $p>\dfrac{4e}{e^2-1}$。 □

梳理：1. 若在区间 D 上存在一个 x_0 使 $f(x_0)>g(x_0)$ 成立（或不等式 $f(x)>g(x)$ 在区间 D 上有解），则等价于 $(f(x)-g(x))_{\max}>0$；

2. 若在区间 D 上存在一个 x_0 使 $f(x_0)<g(x_0)$ 成立（或不等式 $f(x)<g(x)$ 在区间 D 上有解），即不等式 $f(x)<g(x)$ 在区间 D 上能成立，则等价于 $(f(x)-g(x))_{\min}<0$；

3. 若不等式 $f(x)>g(x)$ 在区间 D 上恒成立（或 $f(x)$ 的图像始终在 $g(x)$ 图像上方），则等价于函数 $(f(x)-g(x))_{\min}>0$；

4. 若不等式 $f(x)<g(x)$ 在区间 D 上恒成立（或 $f(x)$ 的图像始终在 $g(x)$ 图像下方），则等价于函数 $(f(x)-g(x))_{\max}<0$；

5. 不等式在某个区间恰成立，说明该区间即是不等式的解集，因较为简单不再举例。

题型二：二主元一参数——主元均来自函数定义（子）区间

A. 同一函数定义（子）区间中任取两个主元

在同一函数定义（子）区间中任取两个主元往往考查函数的自身性质，比如增减性，凸凹性等。

例 2.4.3. （2009 辽宁）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x$，$a>1$。

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：若 $a<5$，则对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$。

（注：不等式证明实质上是证明式子恒成立，所以我把它归入恒成立问题里了）

（1）分析：因为 $f'(x)=x-a+\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{x^2-ax+a-1}{x}=\dfrac{(x-1)(x+1-a)}{x}$ 是二次函数型，且最高次系数非零，只需按两个根的大小分类即可（导函数是二次函数型的分类标准请参看上期我的拙作）。

解 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，求导有 $f'(x)=x-a+\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{x^2-ax+a-1}{x}=\dfrac{(x-1)(x+1-a)}{x}$。

（i）若 $a-1=1$ 即 $a=2$ 时，则 $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加；

（ii）若 $a-1<1$，又 $a>1$，故 $1<a<2$，则当 $x\in(a-1,1)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,a-1)$ 及 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$。故 $f(x)$ 在 $(a-1,1)$ 单调减少，在 $(0,a-1),(1,+\infty)$ 单调增加；

（iii）若 $a-1>1$，即 $a>2$，同理可得 $f(x)$ 在 $(1,a-1)$ 单调减少，在 $(0,1),(a-1,+\infty)$ 单调增加。 □

（2）分析：所求的结论为 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$，左侧的式子有两点间斜率公式特征，即证函数图像上任意两点的斜率都大于 -1，这是不易证明的。考虑分式化整式再整理可得 $(f(x_1)+x_1)-(f(x_2)+x_2)>0$，这不正是函数单调性的定义式吗?

解 令 $g(x)=f(x)+x=\dfrac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x+x$，则

$$g'(x)=x-(a-1)+\frac{a-1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{a-1}{x}}-(a-1)=1-\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2,$$

由于 $1<a<5$，故 $g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $(4,+\infty)$ 单调增加，从而当 $x_1>x_2>0$ 时，有 $g(x_1)-g(x_2)>0$，即 $f(x_1)-f(x_2)+x_1-x_2>0$，故 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$；当 $0<x_1<x_2$ 时，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>-1$。 □

拓展练习：

1.（2010 辽宁卷理科 21 题）已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$。

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $a<-1$，如果对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)|\geq 4|x_1-x_2|$，求 a 的取值范围。

注： 辽宁卷很钟情于这个知识点，2010 年再次考查，题目中去掉绝对值就和 2009 年的思路完全一致了。

2. 已知函数 $f(x)=x^3-x+a$，$x\in[-1,1]$，$a\in\mathbb{R}$，求证：对任意的 $x_1,x_2\in[-1,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<1$。

3.（2004 全国 II）已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$，$g(x)=x\ln x$。

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值；

（2）设 $0<a<b$，证明：$0<g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$。

注： 本题第二问可以使用（1）的结论证明，也可以选用二元选主元的方法证明，其中不等式的左侧部分是证明 $g(x)$ 的凸凹性的，等价于"任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，求证：$g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$"。

B. 两个函数在定义（子）区间各任取一个主元

例 2.4.4. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a^2}{x}$，$g(x)=x+\ln x$，其中 $a>0$，若对任意的 $x_1,x_2\in[1,e]$，都有 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 成立，求实数 a 的取值范围。

简解 若对任意的 $x_1,x_2\in[1,e]$，都有 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 成立，等价于对任意的 $x_1,x_2\in[1,e]$，都有 $f(x)_{\min}\geq g(x)_{\max}$ 成立，下略。 □

注： 1. 曾见过这样设问的：若对任意的 $s,t\in[1,e]$，都有 $f(s)\geq g(t)$ 成立，求实数 a 的取值范围。题目实质上一致，因为 s,t 和 x_1,x_2 都能表示从定义域里任取的自变量。

2. 若对任意的 $x_1,x_2\in D$，都有 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 成立，则等价于 $f(x)_{\min}\geq g(x)_{\max}$。

例 2.4.5. （2010 年高考山东卷理科 22）已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\dfrac{1-a}{x}-1(a\in\mathbb{R})$。

（1）当 $a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=x^2-2bx+4$，当 $a=\dfrac{1}{4}$ 时，若对任意 $x_1\in(0,2)$，存在 $x_2\in[1,2]$，使 $f(x_1)\geq g(x_2)$，求实数 b 取值范围。

解 （1）略；

（2）因为 $a=\dfrac{1}{4}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，由（1）知，$f'(x)=0$ 的两根为 1，3，且当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 (0,2) 上的最小值为 $f(1)=-\dfrac{1}{2}$。

由于“对任意 $x_1 \in (0,2)$，存在 $x_2 \in [1,2]$，使 $f(x_1) \geq g(x_2)$”等价于“$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值不大于 $f(x)$ 在 (0,2) 上的最小值 $-\frac{1}{2}$”（*），又 $g(x) = (x-b)^2 + 4 - b^2$，$x \in [1,2]$，所以

①当 $b < 1$ 时，因为 $g(x)_{\min} = g(1) = 5 - 2b > 0$，此时与（*）矛盾；

②当 $b \in [1,2]$ 时，因为 $g(x)_{\min} = 4 - b^2 \geq 0$，同样与（*）矛盾；

③当 $b \in (2,+\infty)$ 时，因为 $g(x)_{\min} = g(2) = 8 - 4b$，解不等式 $8 - 4b \leq -\frac{1}{2}$，可得 $b \geq \frac{17}{8}$。

综上，b 的取值范围是 $\left[\frac{17}{8},+\infty\right)$。 □

拓展练习：（2005 全国 3）已知函数 $f(x) = \frac{4x^2-7}{2-x}, x \in [0,1]$。

（1）求 $f(x)$ 的单调区间和值域；

（2）设 $a \geq 1$，函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a, x \in [0,1]$。若对于任意 $x_1 \in [0,1]$，总存在 $x_0 \in [0,1]$，使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立，求 a 的取值范围。

梳理：（1）任意 $x_1 \in [a,b]$，任意 $x_2 \in [c,d]$，$f(x_1) > g(x_2)$，等价于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值 $>$ $g(x)$ 在 $[c,d]$ 上的最大值；

（2）存在 $x_1 \in [a,b]$，存在 $x_2 \in [c,d]$，$f(x_1) > g(x_2)$，等价于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 $>$ $g(x)$ 在 $[c,d]$ 上的最小值；

（3）任意 $x_1 \in [a,b]$，存在 $x_2 \in [c,d]$，$f(x_1) > g(x_2)$，等价于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值 $>$ $g(x)$ 在 $[c,d]$ 上的最小值；

（4）存在 $x_1 \in [a,b]$，任意 $x_2 \in [c,d]$，$f(x_1) > g(x_2)$，等价于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 $>$ $g(x)$ 在 $[c,d]$ 上的最大值；

（5）存在 $x_1 \in [a,b]$，存在 $x_2 \in [c,d]$，$f(x_1) = g(x_2)$，等价于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域与 $g(x)$ 在 $[c,d]$ 上的值域有交集；

（6）任意 $x_1 \in [a,b]$，存在 $x_2 \in [c,d]$，$f(x_1) = g(x_2)$，等价于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域 $\subseteq$ $g(x)$ 在 $[c,d]$ 上的值域；

（7）存在$x_1 \in [a,b]$，任意 $x_2 \in [c,d]$，$f(x_1) = g(x_2)$，等价于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域 $\supseteq$ $g(x)$ 在 $[c,d]$ 上的值域。

2.5 圆锥曲线问题中的“定比分点参数法”——杜紫隆

在圆锥曲线问题中，有时会遇到“过某点的直线交圆锥曲线于两点，要求证明某等式或求某个参数取值范围”的一类问题。

笔者经过研究发现，利用共线向量等式 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 以及定比分点公式中的参数 λ 是解决此类问题的有效方法，故称之为“定比分点参数法”（以下简称“λ 法”），现举例如下。

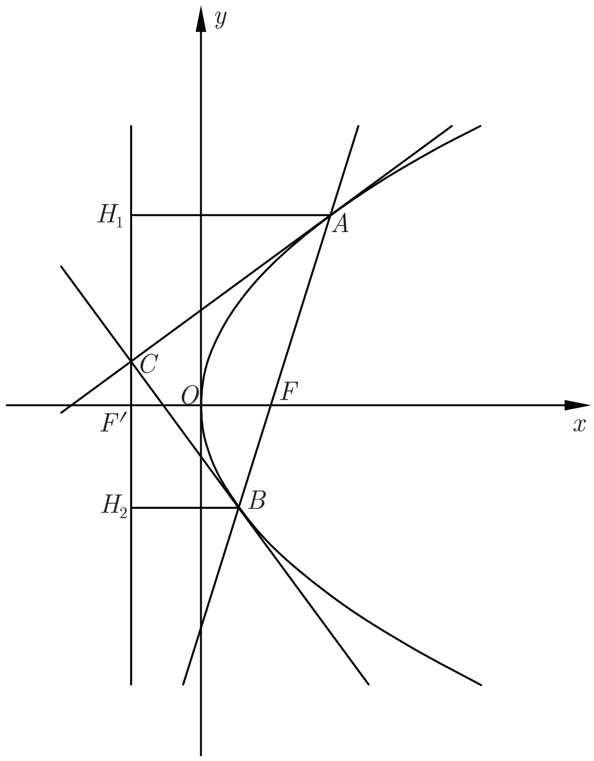


图 2.5.1

例 2.5.1. 过抛物线 $y^2=2px$ 焦点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点，过 A、B 作抛物线的两条切线交于点 C、作 AH_1、BH_2 垂直于准线 l 分别于 H_1、H_2，l 与 x 轴交点为 F'。证明：

（1）C 在 l 上；

（2）$CF\perp BA$；

（3）$CA\perp CB$；

（4）$|CF|^2=|AF||BF|$；

（5）$\angle AF'F=\angle BF'F$；

（6）A,O,H_2 三点共线、B,O,H_1 三点共线。

解 不妨设 A 在 x 轴上方且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 则由定比分点公式，得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\dfrac{p}{2},\\[2mm]\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=0,\end{cases}$$

故

$$x_1+\lambda x_2=\frac{p}{2}(1+\lambda),\tag{2.5.1}$$

由抛物线定义得 $|AH_1|=\lambda|BH_2|$，即

$$x_1-\lambda x_2=\frac{p}{2}(\lambda-1),\tag{2.5.2}$$

由式 (2.5.1)、(2.5.2) 解得

$$x_1=\frac{p}{2}\lambda,\ x_2=\frac{p}{2\lambda},\tag{2.5.3}$$

代入抛物线方程得

$$y_1=p\sqrt{\lambda},\ y_2=-\frac{p}{\sqrt{\lambda}},\tag{2.5.4}$$

（1）点 A 处切线方程：$y_1y=p(x+x_1)$，点 B 处切线方程：$y_2y=p(x+x_2)$，联立并将式 (2.5.3)、(2.5.4) 代入，得

$$x_C=-\frac{p}{2},\ y_C=\frac{p}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

即 C 在 l 上；

（2）由（1）得 $C\left(-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$，故

$$\overrightarrow{CF}=\left(p,-\frac{p}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right),\ \overrightarrow{BA}=\left(\frac{p}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right),p\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right),$$

得

$$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{p^2}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{p^2}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)=0,$$

即 $CF\perp BA$；

（3）由（1）得 $C\left(-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$，故

$$\overrightarrow{CA}=\left(\frac{p}{2}(1+\lambda),\frac{p}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right),\ \overrightarrow{CB}=\left(\frac{p}{2}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right),-\frac{p}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right),$$

得

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{p^2}{4}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}+2\right)-\frac{p^2}{4}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}+2\right)=0,$$

即 $CA\perp CB$；

（4）由（2）、（3）立即得到（4）；

（5）设直线 AF'、BF' 斜率分别为 $k_{AF'}$、$k_{BF'}$，则

$$k_{AF'}=\frac{y_1}{x_1+\frac{p}{2}}=\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda},\ k_{BF'}=\frac{y_2}{x_2+d\frac{p}{2}}=-\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda},$$

得

$$k_{AF'}+k_{BF'}=0,$$

即 $\angle AF'F=\angle BF'F$；

（6）设直线 OA、OH_2 斜率分别为 k_{OA}、k_{OH_2}，则

$$k_{OA}-k_{OH_2}=\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2}{-\frac{p}{2}}=\frac{p\sqrt{\lambda}}{\frac{p}{2}\lambda}-\frac{\frac{p}{\sqrt{\lambda}}}{\frac{p}{2}}=0,$$

即 A,O,H_2 三点共线，同理 B,O,H_1 三点共线。 □

点评：“λ 法”具有与一般参数方程相同的优点，即“可将变量均表示为关于同一参数的函数，从而可以直接代入、运算得到结果”。

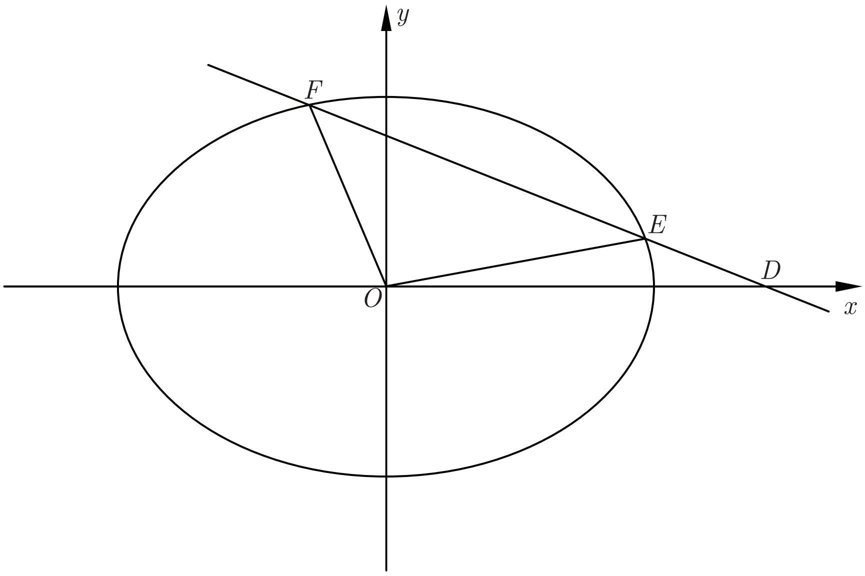


图 2.5.2

例 2.5.2. 已知点 $A(0,-1)$，$B(0,1)$，直线 AM、BM 相交于点 M，且它们的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$。

（1）求点 M 的轨迹 C 的方程;

（2）若过点 $D(2,0)$ 的直线 l 与（1）中的轨迹 C 交于不同的两点 E、F（E 在 D、F 之间），试求 $\triangle ODE$ 与 $\triangle ODF$ 的面积之比的取值范围（O 为坐标原点）。

解　（1）易得 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\ (x\neq 0)$;

（2）设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)\ (x_1>x_2)$，$\lambda=\dfrac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle ODF}}=\dfrac{y_1}{y_2}$，则 $\overrightarrow{ED}=-\lambda\overrightarrow{DF}$，由定比分点公式，得 $\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}=2$，故

$$x_1-\lambda x_2=2(1-\lambda),\tag{2.5.5}$$

$$y_1^2=\lambda^2 y_2^2,\tag{2.5.6}$$

由E、F在C上，得

$$\begin{cases} y_1^2=1-\dfrac{x_1^2}{2}, \\ y_2^2=1-\dfrac{x_2^2}{2}, \end{cases}$$

代入式 (2.5.6)，得

$$2-x_1^2=\lambda^2(2-x_2^2),$$

即

$$(x_1-\lambda x_2)(x_1+\lambda x_2)=2(1-\lambda)(1+\lambda),$$

将式 (2.5.5) 代入，得

$$x_1+\lambda x_2=1+\lambda,\tag{2.5.7}$$

由式 (2.5.5)、(2.5.7) 解得

$$x_1=\frac{3-\lambda}{2},\ x_2=\frac{3\lambda-1}{2\lambda},$$

又因为 $-\sqrt{2} < x_2 < \sqrt{2}$、$x_2 \neq 0$ 且 $\lambda < 1$，得到面积之比的取值范围

$$\frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle ODF}} = \lambda \in \left(3-2\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right) \bigcup \left(\frac{1}{3}, 1\right)。 \qquad \square$$

点评： 本题需要处理的表达式不对称，运用常规方法（韦达定理）通常需要配出对称式才能计算，而运用“λ 法”则可以直接求解。

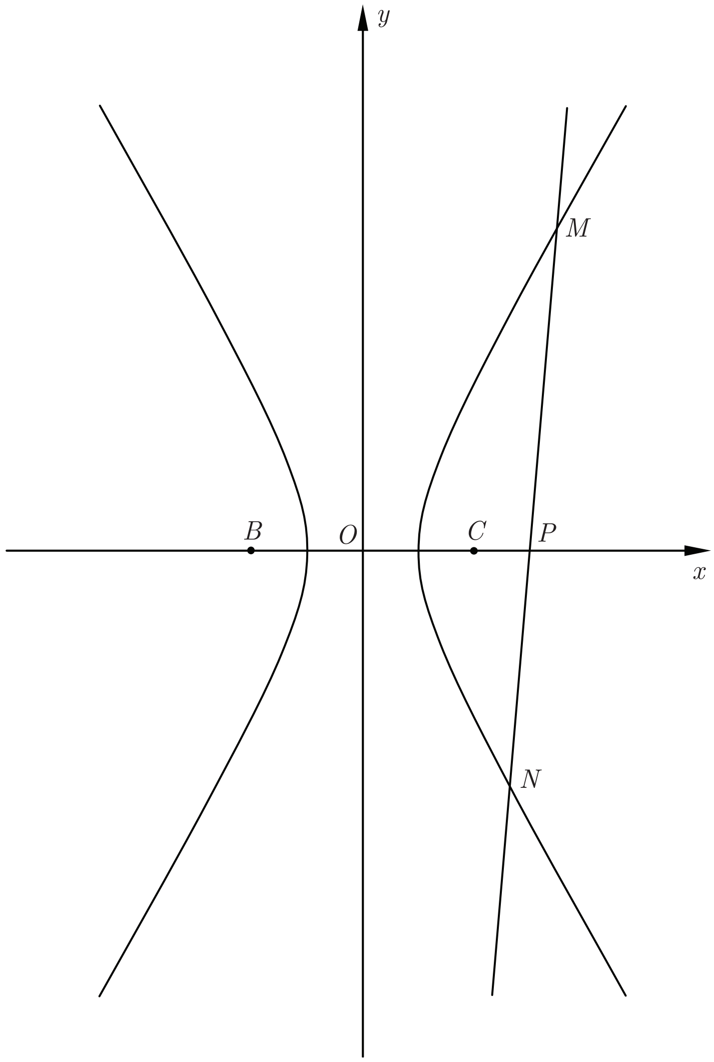


图 2.5.3

例 2.5.3. 双曲线 $E: x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 B、C。若过点 $P(3,0)$ 的一条直线 l 与双曲线 E 相交于不同于双曲线顶点的两点 M、N，且 $\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{PN}$，问在 x 轴上是否存在定点 G，使 $\overrightarrow{BC} \perp \left(\overrightarrow{GM} - \lambda\overrightarrow{GN}\right)$?

解法 1（**常规方法**） 设存在这样的点 $G(t,0)$，则当 $l \perp x$ 轴时，由 $\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{PN}$，得 $\lambda = 1$，这时 $\overrightarrow{GM} - \lambda\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GM} - \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{NM}$，显然 $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{NM}$;

当 l 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y = k(x-3)\ (k \neq 0)$，$M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，由 $\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{PN}$，得 $(3-x_1, -y_1) = \lambda(x_2-3, y_2)$，解得

$$\lambda = \frac{2-x_1}{x_2-3} = -\frac{y_1}{y_2},$$

因为 $\overrightarrow{BC}=(4,0)$，$\overrightarrow{GM}-\lambda\overrightarrow{GN}=(x_1-t-\lambda x_2+\lambda t, y_1-\lambda y_2)$，且 $\overrightarrow{BC}\perp\left(\overrightarrow{GM}-\lambda\overrightarrow{GN}\right)$，即 $x_1-t=\lambda(x_2-t)$，故

$$\frac{x_1-t}{x_2-t}=\lambda=\frac{3-x_1}{x_2-3},$$

即

$$2x_1x_2-(t+3)(x_1+x_2)+6t=0, \tag{2.5.8}$$

联立

$$\begin{cases}3x^2-y^2=3,\\ \qquad y=k(x-3),\end{cases}$$

得

$$(3-k^2)x^2+6k^2x-9k^2-3=0,$$

其中$k^2-3\neq 0$ 且 $\Delta>0$，即 $k^2\neq 3$ 且 $8k^2+3>0$，由韦达定理

$$x_1+x_2=\frac{-6k^2}{3-k^2},\ x_1x_2=\frac{-9k^2-3}{3-k^2},$$

代入式 (2.5.8)，得

$$\frac{-18k^2-6}{3-k^2}+\frac{6(t+3)k^2}{3-k^2}+6t=0$$

恒成立，化简得 $t=\dfrac{1}{3}$，因此，存在这样的定点 $G\left(\dfrac{1}{3},0\right)$。 □

解法 2（λ 法） 设存在这样的点 $G(t,0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则由 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$ 及定比分点公式，得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=3,\\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=0,\end{cases}$$

故

$$x_1+\lambda x_2=3(1+\lambda), \tag{2.5.9}$$

$$y_1^2=\lambda^2y_2^2, \tag{2.5.10}$$

由 M、N 在双曲线 E 上，得

$$\begin{cases}x_1^2-1=\dfrac{y_1^2}{3},\\ x_2^2-1=\dfrac{y_2^2}{3},\end{cases}$$

代入式 (2.5.10)，得

$$x_1^2-1=\lambda^2\left(x_2^2-1\right),$$

即 $(x_1-\lambda x_2)(x_1+\lambda x_2)=(1-\lambda)(1+\lambda)$，将式 (2.5.9) 代入，得

$$x_1-\lambda x_2=\frac{1-\lambda}{3}, \tag{2.5.11}$$

因为 $\overrightarrow{BC}=(4,0)$，$\overrightarrow{GM}-\lambda\overrightarrow{GN}=(x_1-t-\lambda x_2+\lambda t, y_1-\lambda y_2)$，且 $\overrightarrow{BC}\perp\left(\overrightarrow{GM}-\lambda\overrightarrow{GN}\right)$，即 $x_1-\lambda x_2-(1-\lambda)t=0$，故由式 (2.5.11) 得

$$\frac{1-\lambda}{3}-(1-\lambda)t=0$$

恒成立，即 $t=\dfrac{1}{3}$，因此，存在这样的定点 $G\left(\dfrac{1}{3},0\right)$。 □

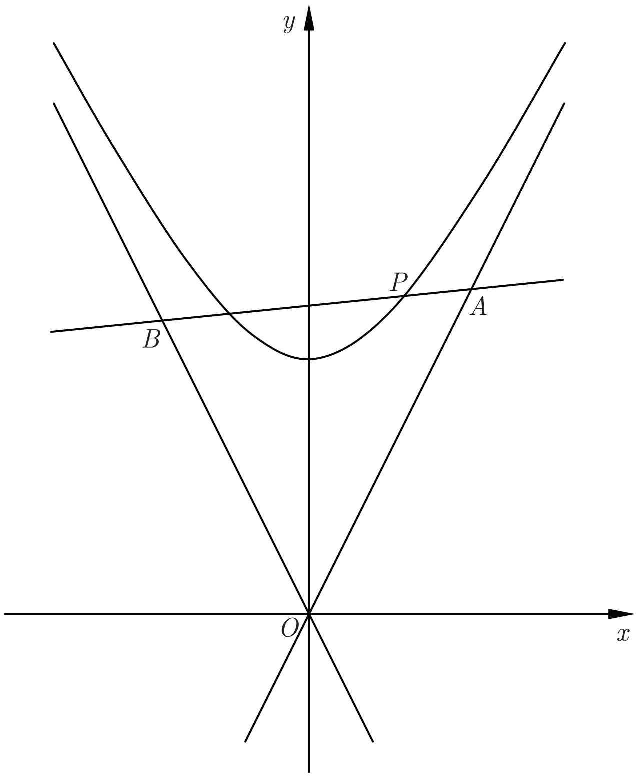


图 2.5.4

点评： 在处理本问题时，“λ 法”显然要比常规方法简便得多。

例 2.5.4. 点 P 为双曲线$C:\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$ 上 x 轴上方的点，A、B 两点在双曲线 C 的两条渐近线上，且分别位于第一、二象限。若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\lambda\in\left[\dfrac{1}{2},3\right]$，求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围。

解 设 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由点 P 在双曲线 C 上，得

$$\frac{y_0^2}{4}-x_0^2=1, \tag{2.5.12}$$

由点 A、B 在双曲线 C 的渐近线上，得

$$y_1=2x_1，y_2=-2x_2, \tag{2.5.13}$$

由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 及定比分点公式，得

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y_0=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \end{cases}$$

将式 (2.5.13) 代入并代入式 (2.5.12)，得

$$\left(\frac{x_1-\lambda x_2}{1+\lambda}\right)^2-\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)^2=1,$$

化简得

$$|x_1x_2|=\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda},$$

故

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{1}{2}|-2x_1x_2-2x_1x_2|=2|x_1x_2|=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+1\in\left[2,\frac{8}{3}\right]。$$ □

点评： 本题给出了参数 λ 且限制了范围，因此只能使用“λ 法”。

例 2.5.5. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，过点 $C(1,0)$ 的直线 l 交椭圆 E 于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点，求 x_1+2x_2 的取值范围。

解 设 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，则由定比分点公式得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=1,\\[2mm] \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=0,\end{cases}$$

故

$$x_1+\lambda x_2=1+\lambda, \tag{2.5.14}$$

$$y_1^2=\lambda^2y_2^2, \tag{2.5.15}$$

由 A、B 在椭圆 E 上，得

$$\begin{cases}4-x_1^2=2y_1^2,\\ 4-x_2^2=2y_2^2,\end{cases}$$

代入式 (2.5.15)，得

$$4-x_1^2=\lambda^2(4-x_2^2),$$

即 $(x_1-\lambda x_2)(x_1+\lambda x_2)=4(1+\lambda)(1-\lambda)$，将式 (2.5.14) 代入，得

$$x_1-\lambda x_2=4(1-\lambda), \tag{2.5.16}$$

由式 (2.5.14)、(2.5.16) 解得

$$x_1=\frac{1}{2}(5-3\lambda),\ x_2=\frac{1}{2}\left(5-\frac{3}{\lambda}\right),$$

又因为 $x_1\in[-2,2]$，得到 $\lambda\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$，故

$$x_1+2x_2=\frac{3}{2}\left(5-\left(\lambda+\frac{2}{\lambda}\right)\right)\in\left[-2,\frac{15}{2}-3\sqrt{2}\right]。$$ □

能力提升

3.1 一元三次方程和一元四次方程的解法——何万程

相信大家对一元一次方程和一元二次方程的求解都非常熟练了，但对于一元三次方程和一元四次方程知道的人不多，本篇将详细叙述一元三次方程和一元四次方程的解法。对于次数高于四次的一般高次方程，由 Galois 理论知是没有根式解的，这里就不讨论了。

一、一元三次方程

先求解方程 $x^3+px+q=0$（p 和 q 都是实数）。

（1）令 $p=-3ab$，$q=-a^3-b^3$，其中 $a\geq b$，则有 $x^3-3abx-a^3-b^3=0$，

而

$$\begin{aligned}&x^3-3abx-a^3-b^3\\=\;&x^3-(a+b)x^2+(a+b)x^2-(a+b)^2x+\left(a^2+ab+b^2\right)x-(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\\=\;&(x-a-b)(x-\omega a-\overline{\omega}b)(x-\overline{\omega}a-\omega b),\end{aligned}$$

其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，于是方程 $x^3+px+q=0$ 的解为 $x_1=a+b$，$x_2=\omega a+\overline{\omega}b$，$x_3=\overline{\omega}a+\omega b$。

现在来求 a 和 b 的值：由

$$p=-3ab, \tag{3.1.1}$$

$$q=-a^3-b^3, \tag{3.1.2}$$

(3.1.2) 平方得 $a^6+2a^3b^3+b^6=q^2$，即

$$\left(a^3-b^3\right)^2=q^2-4(ab)^3, \tag{3.1.3}$$

由 (3.1.1) 得 $ab=-\dfrac{p}{3}$，代入 (3.1.3) 得 $\left(a^3-b^3\right)^2=q^2+4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$，因此

$$a^3-b^3=\sqrt{q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3}, \tag{3.1.4}$$

此时须 $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3\geq 0$，(3.1.4) 减 (3.1.2) 后除以 2 得 $a^3=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$，即

$$a=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

(3.1.4) 乘以 -1 减 (3.1.2) 后除以 2 得 $b^3=-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$，即

$$b=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

所以当 $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3\geq 0$ 时，方程 $x^3+px+q=0$ 的解如下（$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$）：

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$x_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\overline{\omega}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$
$$x_3=\overline{\omega}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}。$$

上面 x_1 的式子也称为 Cardano 公式。Girolamo Cardano（1501–1576）是意大利人，在 1545 年他出版的《大术》一书提及 Cardano 公式。

（2）令 $x=r\cos\theta$（$r>0$，$0\le\theta\le\pi$），则 $r^3\cos^3\theta+rp\cos\theta+q=0$，令 $\frac{r^3}{rp}=\frac{4}{-3}$，则 $\left|\frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2}\right|\le 1$，即 $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\le 0$，因此得下式：

$$-\frac{8p}{9}\sqrt{-3p}\cos^3\theta+\frac{2p}{3}\sqrt{-3p}\cos\theta+q=0,$$

即

$$-\frac{2p\sqrt{-3p}}{9}\left(4\cos^3\theta-3\cos\theta\right)+q=0。$$

从上式可得 $\frac{2p\sqrt{-3p}}{9}\cos 3\theta=q$，即 $\cos 3\theta=\frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2}$，此时必须 $\left|\frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2}\right|\le 1$，即 $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\le 0$，还可得下面的式子：

$$\theta_1=\frac{1}{3}\arccos\frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2},\ \theta_2=\frac{1}{3}\left(2\pi-\arccos\frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2}\right),\ \theta_3=\frac{1}{3}\left(2\pi+\arccos\frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2}\right),$$

其中 $0\le\theta_1\le\theta_2\le\theta_3\le\pi$，于是得解（其中 $x_1\ge x_2\ge x_3$）：

$$x_1=r\cos\theta_1=\frac{2}{3}\sqrt{-3p}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2}\right),$$
$$x_2=r\cos\theta_2=-\frac{2}{3}\sqrt{-3p}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\pi+\arccos\frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2}\right)\right),$$
$$x_3=r\cos\theta_3=-\frac{2}{3}\sqrt{-3p}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3q\sqrt{-3p}}{2p^2}\right)。$$

这种情况也可以利用（1）的结果和复数开方的方法得到相同的结论，这里就不再详细写出来了。

（2）的结论可以利用（1）的公式以及复数开方得到。（2）的情况由群论的结论知，若方程无有理数解，此时不能用系数、四则运算、实根式通过有限次复合表示根。读者可能会注意到这个问题：从来没有见过 $1°$、$2°$、$4°$、$5°$、……这些角的三角函数精确值，这是因为这些角度的三角函数值不能用实根式表示。例如 $x=\cos 20°$ 满足方程 $8x^3-6x+1=0$，则个方程有三个实数解 $x=\cos 20°$，$x=\cos 80°$，$x=\cos 140°$，并且无有理数解，所以 $\cos 20°$ 不能用实根式表示。接着，因为一个角度若能用实根式表示，则其整数倍角度的三角函数值亦能用实根式表示，由 $20°$ 的三角函数不能用实根式表示可确定 $1°$、$2°$、$4°$、$5°$、$10°$ 这些角度的三角函数值亦不能实根式表示。其他角度就不一一证明了。

当 p 和 q 都是复数时，可利用（1）的方法求解。

例 3.1.1. 解方程 $x^3+(-12+9i)\,x+9-13i=0$。

解　令 $-3ab=-12+9i$，$-a^3-b^3=9-13i$，因为

$$-3ab=-12+9i, \tag{3.1.5}$$
$$-a^3-b^3=9-13i, \tag{3.1.6}$$

(3.1.6) 平方得 $a^6+2a^3b^3+b^6=-88-234i$，即 $\left(a^3-b^3\right)^2=-88-234i-4\left(ab\right)^3$，把 (3.1.5) 代入上式得 $\left(a^3-b^3\right)^2=88+234i$，取

$$a^3-b^3=13+9i, \tag{3.1.7}$$

(3.1.7) 减 (3.1.6) 后除以 2 得 $a^3=2+11i$，令 $a=p_1+q_1i$，其中 p_1、q_1 都是实数，则得下面的方程组:

$$p_1^3-3p_1q_1^2=2, \tag{3.1.8}$$

$$3p_1^2q_1-q_1^3=11, \tag{3.1.9}$$

(3.1.8) 平方加 3.1.9) 平方得 $\left(p_1^2+q_1^2\right)^3=125$，即 $p_1^2+q_1^2=5$，代入 (3.1.8) 得 $4p_1^3-15p_1-2=0$，求得 $p_1=2$ 或 $p_1=\dfrac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$，取 $p_1=2$，代入 $p_1^2+q_1^2=5$，求得 $q_1=\pm1$，取 $q_1=1$，则 $a=2+i$，代入 (3.1.5)，求得 $b=1-2i$，因此方程 $x^3+(-12+9i)\,x+9-13i=0$ 的解是:

$$x_1=a+b=3-i，x_2=\omega a+\overline{\omega}b=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(3-i\right)，x_3=\overline{\omega}a+\omega b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(3-i\right)，$$

其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$。 □

对于方程 $x^3+px+q=0$ 有另外一种解法：令 $x=y-\dfrac{p}{3y}$，代入原方程化简，得 $27y^6+27qy^3-p^3=0$，利用一元二次方程的解法便可求得 y，进而求得 x。

一般的一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$（$a\neq0$）可化为

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}=0$$

来求解。

特别地，若 a 是实数，则 $x^3-3ax^2-3x+a=0$ 得 $\dfrac{x^3-3x}{3x^2-1}=a$。令 $x=\tan\theta$，则得 $\tan3\theta=a$，于是得（其中 $x_1\geq x_2\geq x_3$）:

$$x_1=\tan\left(\frac{\arctan a+\pi}{3}\right)，x_2=\tan\left(\frac{\arctan a}{3}\right)，x_3=\tan\left(\frac{\arctan a-\pi}{3}\right)，$$

另外，由上面的解法又可得

$$x_1=a+2\sqrt{1+a^2}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)，$$
$$x_2=a-2\sqrt{1+a^2}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\pi+\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right)，$$
$$x_3=a-2\sqrt{1+a^2}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right)，$$

可以验证，这两组解是相等的（验证过程留给读者自己完成），由此知方程 $x^3-3ax^2-3x+a=0$ 的解是

$$x_1=\tan\left(\frac{\arctan a+\pi}{3}\right)，x_2=\tan\left(\frac{\arctan a}{3}\right)，x_3=\tan\left(\frac{\arctan a-\pi}{3}\right)，$$

其中 $x_1\geq x_2\geq x_3$。

本段的方程系数为实数。当 $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ 分别是正、负、零时，方程 $x^3+px+q=0$ 的根分别是有一个实数根和一对共轭虚数根、有三个不同的实数根、有三个实数根并且至少有两个实数根相同（仅当 $p=q=0$

时有三个相同的实数根，此时 $x=0$）。对一般一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，配方成 $y^3+py+q=0$ 的形式，此时

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\frac{27a^2d^2-18abcd+4ac^3+4b^3d-b^2c^2}{108a^4},$$

把

$$\Delta=27a^2d^2-18abcd+4ac^3+4b^3d-b^2c^2$$

称为方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的判别式。当 $\Delta>0$ 时方程有一个实数根和一对共轭虚数根；当 $\Delta<0$ 时有三个不同的实数根；当 $\Delta=0$ 时有三个实数根并且至少有两个实数根相同（仅当 $b^2=3ac$，$27a^2d+2b^2=9abc$ 时有三个相同的实数根，此时 $x=-\dfrac{b}{3a}$）。

二、一元四次方程

首先讨论一些特殊的一元四次方程的解法。

如果一个整系数一元四次多项式没有整系数一次多项式因式，则有可能分解为两个整系数一元二次多项式的乘积，下面就来讨论判断是否有这样的因式的方法。

先讨论四次项系数是 1 的情形。设 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$，其中 p、q、r、s、a、b、c、d 都是整数，则有

$$a+c=p，ac+b+d=q，ad+bc=r，bd=s，$$

因为两个整数的乘积等于某个整数的组合是有限的，把 s 分解成两个整数的积，这两个数分别作为 b 和 d，然后判断方程

$$y^2-py+q-b-d=0$$

是否有整数解。

（1）若有整数解，则把两根分别作为 a 和 c，然后验证 $ad+bc$ 是否等于 r。若相等，则得 a、b、c、d 的值，多项式的分解形式也确定了分解操作停止；若不相等，则取不同于上述的 b、d 值继续上面的步骤。

（2）若没有整数解，则取不同于上述的 b、d 值继续上面的步骤。

当 b、d 尝试完所有 s 的分解组合后仍然不能得一组 a、b、c、d 的值，则 $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 不能分解成 $\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$ 的形式。

例 3.1.2. 解方程 $x^4+2x^3-17x^2+30x-15=0$。

解 容易验证方程 $x^4+2x^3-17x^2+30x-15=0$ 无有理数解。因为 $3\times(-5)=-15$，取 $b=3$，$d=-5$。此时方程 $y^2-2y-15=0$ 有整数解 $y=-3$，$y=5$，取 $a=-3$，$c=5$，恰好满足 $ad+bc=30$，所以

$$x^4+2x^3-17x^2+30x-15=\left(x^2-3x+3\right)\left(x^2+5x-5\right),$$

方程 $x^4+2x^3-17x^2+30x-15=0$ 变为

$$x^2-3x+3=0 \text{ 或 } x^2+5x-5=0,$$

所以 $x^4+2x^3-17x^2+30x-15=0$ 的解是

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}，x_{3,4}=\frac{-5\pm3\sqrt{5}}{2}。$$

□

对 $kx^4+px^3+qx^2+rx+s$（$k\neq0$）的情形，则

$$k^3\left(kx^4+px^3+qx^2+rx+s\right)=(kx)^4+p\,(kx)^3+qk\,(kx)^2+rk^2\,(kx)+k^3s,$$

只需要对多项式 $y^4+py^3+qky^2+rk^2y+k^3s$ 进行上面的分解操作，若 $y^4+py^3+qky^2+rk^2y+k^3s=\left(y^2+ay+b\right)\left(y^2+cy+d\right)$，则

$$kx^4+px^3+qx^2+rx+s=\frac{1}{k^3}\left(k^2x^2+akx+b\right)\left(k^2x^2+ckx+d\right)。$$

设方程 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 中 $s\neq 0$，因此 $x=0$ 必定不是方程的根，方程两边除以 x^2，若得到的方程可以配成 $\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^2+b\left(x+\dfrac{a}{x}\right)+c=0$ 的形式，则方程就可以用一元二次方程求解。展开这个方程，得 $x^4+bx^3+(2a+c)\,x^2+abx+a^2=0$，比较系数，就可以得 $p=b$，$r=ab$，$s=a^2$，所以得 $p^2s=r^2$。若 $p^2s=r^2$，此时若 $p=0$ 则必定 $r=0$；若 $r=0$ 则必定 $p=0$，此时方程就是 $x^4+qx^2+s=0$，若 $p\neq 0$ 且 $r\neq 0$，则可变为 $\left(x+\dfrac{r}{px}\right)^2+p\left(x+\dfrac{r}{px}\right)+q-\dfrac{2r}{p}=0$。

两类特殊的一元四次方程的解法

（1）方程 $(ax+b)\,(ax+b+c)\,(ax+b+2c)\,(ax+b+3c)=d$（$a\neq 0$）

解 原方程可变为 $\left((ax+b)^2+3c\,(ax+b)\right)\left((ax+b)^2+3c\,(ax+b)+2c^2\right)=d$，因此得

$$\left((ax+b)^2+3c\,(ax+b)\right)^2+2c^2\left((ax+b)^2+3c\,(ax+b)\right)+c^4=c^4+d,$$

上式可变为

$$\left((ax+b)^2+3c\,(ax+b)+c^2\right)^2=c^4+d,$$

于是得

$$(ax+b)^2+3c\,(ax+b)+c^2=\sqrt{c^4+d}\text{ 或 }(ax+b)^2+3c\,(ax+b)+c^2=-\sqrt{c^4+d},$$

所以方程 $(ax+b)\,(ax+b+c)\,(ax+b+2c)\,(ax+b+3c)=d$（$a\neq 0$）的解为

$$x_{1,2}=\frac{-2b-3c\pm\sqrt{5c^2+4\sqrt{c^4+d}}}{2a},\quad x_{3,4}=\frac{-2b-3c\pm\sqrt{5c^2-4\sqrt{c^4+d}}}{2a}。$$ □

（2）方程 $(ax+b)^4+(ax+c)^4=d$（$a\neq 0$）

解 令 $y=ax+\dfrac{b+c}{2}$，则原方程变为 $\left(y+\dfrac{b-c}{2}\right)^4+\left(y-\dfrac{b-c}{2}\right)^4=d$，因此得

$$\left(y^2+(b-c)\,y+\frac{(b-c)^2}{4}\right)^2+\left(y^2-(b-c)\,y+\frac{(b-c)^2}{4}\right)^2=d,$$

即

$$2\left(y^2+\frac{(b-c)^2}{4}\right)^2+2\,(b-c)^2\,y^2=d,$$

上式可变为

$$2y^4+3\,(b-c)^2\,y^2+\frac{(b-c)^4}{8}=d,$$

上面方程的解是

$$y=\pm\frac{\sqrt{-3\,(b-c)^2+2\sqrt{2\,(b-c)^4+2d}}}{2}\text{ 或 }y=\pm\frac{\sqrt{-3\,(b-c)^2-2\sqrt{2\,(b-c)^4+2d}}}{2},$$

因此方程 $(ax+b)^4+(ax+c)^4=d$（$a\neq 0$）的解是

$$x_{1,2}=\frac{-b-c\pm\sqrt{-3\left(b-c\right)^2+2\sqrt{2\left(b-c\right)^4+2d}}}{2a},$$

$$x_{3,4}=\frac{-b-c\pm\sqrt{-3\left(b-c\right)^2-2\sqrt{2\left(b-c\right)^4+2d}}}{2a}。$$

□

一般的一元四次方程的 Ferrari 解法

Ferrari Lodovico（1522–1565）是意大利数学家，他第一个求出四次方程的代数解。他出身贫苦，15 岁时，到 Cardano 处为仆。接下来讨论一般的一元四次方程的解法就是 Ferrari 的方法。

先来求解方程 $x^4+px^2+qx+r=0$（p、q、r 都是实数）。

原方程可变为 x^4+px^2+qx+r。两边加上 $2mx^2+m^2$，得

$$\left(x^2+m\right)^2=\left(2m-p\right)x^2-qx+m^2-r=\left(2m-p\right)\left(\left(x-\frac{q}{4m-2p}\right)^2+\frac{m^2-r}{2m-p}-\left(\frac{q}{4m-2p}\right)^2\right),$$

使 $2m\neq p$ 时，$\dfrac{m^2-r}{2m-p}-\left(\dfrac{q}{4m-2p}\right)^2=0$，即

$$4\left(2m-p\right)\left(m^2-r\right)-q^2=0。\tag{3.1.10}$$

若 $2m=p$ 时，$\left(-q\right)^2-4\left(2m-p\right)\left(m^2-r\right)=0$，必须 $q=0$，此时方程为 $x^4+px^2+r=0$，四根为

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4r}}{2}}，x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4r}}{2}}。$$

若 $q\neq 0$，则 $2m\neq p$，此时 (3.1.10) 可化为 $8m^3-4pm^2-8rm+4pr-q^2=0$，m 的一根是

$$m=\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{2p^3+27q^2-72pr+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{2p^3+27q^2-72pr-\sqrt{\Delta}}{2}}+p\right)$$

（其中 $\Delta=\left(2p^3+27q^2-72pr\right)^2-4\left(p^2+12r\right)^3$。）或

$$m=\frac{\sqrt{p^2+12r}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{\left(2p^3+27q^2-72pr\right)\sqrt{p^2+12r}}{2\left(p^2+12r\right)^2}\right)+\frac{p}{6},$$

所以原方程变为 $x^2+m=\sqrt{2m-p}\left(x-\dfrac{q}{4m-2p}\right)$ 或 $x^2+m=-\sqrt{2m-p}\left(x-\dfrac{q}{4m-2p}\right)$，因此方程 $x^4+px^2+qx+r=0$ 的四个根是

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2m-p}\pm\sqrt{-2m-p-\frac{q}{\sqrt{2m-p}}}\right)，x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2m-p}\pm\sqrt{-2m-p+\frac{q}{\sqrt{2m-p}}}\right)。$$

例 3.1.3. 解方程 $x^4-10x^2-32x-7=0$。

解 原方程可变为 $x^4-10x^2-32x-7=0$，两边加上 $2mx^2+m^2$ 得

$$\left(x^2+m\right)^2=\left(2m+10\right)\left(\left(x+\frac{8}{m+5}\right)^2+\frac{m^2+7}{2m+10}-\left(\frac{8}{m+5}\right)^2\right),$$

令 $\dfrac{m^2+7}{2m+10}-\left(\dfrac{8}{m+5}\right)^2=0$，即 $m^3+5m^2+7m-93=0$，其根为 $m=3$ 或 $m=-4\pm\sqrt{15}i$，取 $m=3$，则原方程变为 $\left(x^2+3\right)^2=16\left(x+1\right)^2$，所以得

$$x^2-4x-1=0 \text{ 或 } x^2+4x+7=0,$$

解上面两个方程，得方程 $x^4-10x^2-32x-7=0$ 的解是 $x_{1,2}=2\pm\sqrt{5}$，$x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}i$。 □

p、q、r 其中一个是虚数也可以用上面的方法求解。

一般的一元四次方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$（$a\neq 0$）可化为

$$\left(x+\frac{b}{4a}\right)^4+\frac{8ac-b^2}{8a^2}\left(x+\frac{b}{4a}\right)^2+\frac{8a^2d-4abc+b^3}{8a^3}\left(x+\frac{b}{4a}\right)+\frac{256a^3e-64a^2bd+16ab^2c-3b^4}{256a^4}=0$$

来求解。

一般的一元四次方程的 Decartes-Euler 解法

令 $x=y-\dfrac{b}{4a}$，则一般的一元四次方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$（$a\neq 0$）化为 $y^4+py^2+qy+r=0$ 的形式。

设

$$\begin{aligned}y^4+py^2+qy+r=&\left(y-\frac{z_1+z_2+z_3}{2}\right)\cdot\left(y-\frac{z_1-z_2-z_3}{2}\right)\\&\cdot\left(y-\frac{-z_1+z_2-z_3}{2}\right)\cdot\left(y-\frac{-z_1-z_2+z_3}{2}\right),\end{aligned}$$

这里 z_1、z_2、z_3 都是复数。把右边展开，化简，得

$$y^4+py^2+qy+r=y^4-\frac{z_1^2+z_2^2+z_3^2}{2}y^2-z_1z_2z_3y+\frac{z_1^4+z_2^4+z_3^4-2\left(z_1^2z_2^2+z_1^2z_3^2+z_2^2z_3^2\right)}{16},$$

比较系数，得 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=-2p$，$z_1z_2z_3=-q$，$z_1^4+z_2^4+z_3^4-2\left(z_1^2z_2^2+z_1^2z_3^2+z_2^2z_3^2\right)=16r$，即 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=-2p$，$z_1^2z_2^2+z_1^2z_3^2+z_2^2z_3^2=p^2-4r$，$z_1^2z_2^2z_3^2=q^2$，由此知 z_1^2、z_2^2、z_3^2 是一元三次方程

$$Z^3+2pZ^2+\left(p^2-4r\right)Z-q^2=0$$

的三个根，选择其中满足的 $z_1z_2z_3=-q$ 的根，此时 $y^4+py^2+qy+r=0$ 的根就是

$$y_1=\frac{z_1+z_2+z_3}{2},\ y_2=\frac{z_1-z_2-z_3}{2},\ y_3=\frac{-z_1+z_2-z_3}{2},\ y_4=\frac{-z_1-z_2+z_3}{2},$$

因此方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的根就是

$$x_1=\frac{z_1+z_2+z_3}{2}-\frac{b}{4a},\ x_2=\frac{z_1-z_2-z_3}{2}-\frac{b}{4a},\ x_3=\frac{-z_1+z_2-z_3}{2}-\frac{b}{4a},\ x_4=\frac{-z_1-z_2+z_3}{2}-\frac{b}{4a}。$$

例 3.1.4. 解方程 $x^4-26x^2+60x-26=0$。

解 方程 $Z^3-52pZ^2+780Z-36000=0$ 的三根是 $Z=10$，$Z=12$，$Z=30$，选择 $z_1=\sqrt{10}$，$z_2=2\sqrt{3}$，$z_3=-\sqrt{30}$ 就能使 $z_1z_2z_3=-60$，所以方程 $x^4-26x^2+60x-26=0$ 的根是

$$x_1=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{2},\qquad x_2=\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{3}+\sqrt{30}}{2},$$

$$x_3=\frac{-\sqrt{10}+2\sqrt{3}+\sqrt{30}}{2},\qquad x_4=-\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{3}+\sqrt{30}}{2}。$$

□

实系数一元四次方程的实根、虚根分布情况比较复杂，这里就不讨论了，有兴趣的读者可以自己研究一下。

3.2 数列 $\{n^m \cdot k^n\}$ 的求和方法——吴炜超

首先看一个题，应该是很常见的题：

题目 数列 $\{a_n\}$，$a_n = n^2 \cdot 2^n$，求其前 n 项和 S_n。

这里先不给解法，直接给出结果 $S_n = 2^{n+1}n^2 - 2^{n+2}n + 3 \cdot 2^{n+1} - 6$。这种问题的通式就是 $a_n = n^m k^n$，其中 m 为非负整数，求其前 n 项和，本文将介绍此类问题的多种解法。

首先讲最常见的一种，也是老师讲得最多的一种——错位相减。

错位相减最早就出现在等比数列求和中，其中在求 $a_n = q^{n-1}, q \neq 1$ 前 n 项和时，就用到了

$$qS_n = q + q^2 + \cdots + q^n = S_n - 1 + q^n,$$
$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

其实等比数列就是 $a_n = n^m k^n$ 的一个特殊情况，只是 $m = 0$ 罢了，所以这里也不难想到对 $a_n = n^m k^n$ 求和也可以用类似的办法。

当然，一开始就研究这么复杂的不太好，我们先从简单的情况看起，比如 $k = 1$，此时 $a_n = n^m$，但这个还是太复杂了，我们还是要从更简单的地方入手，比如 $m = 2$（$m = 1$ 时就是大家熟知的 1 到 n 求和，这里就不再讲了）。现在$a_n = n^2$，令 $b_n = n^3$，则 $b_{n+1} - b_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$，得

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n}(b_{i+1} - b_i) + b_1 = b_1 + \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 1 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n, \end{aligned}$$

于是有

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^3 - 3\dfrac{n(n+1)}{2} - n - 1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。$$

好了，下面继续拓展，为了表示方便，我们令 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^m k^i = S(m,k,n)$。前面我们已经知道 $S(0,1,n) = n, S(1,1,n) = \dfrac{n(n+1)}{2}, S(2,1,n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，那么对于 $S(m,1,n)$，我们可以类似的令 $b_n = n^{m+1}$，则

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (n+1)^{m+1} - n^{m+1} = C_{m+1}^1 n^m + C_{m+1}^2 n^{m-1} + \cdots + C_{m+1}^m n + 1, \\ b_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n}(b_{i+1} - b_i) + b_1 = b_1 + C_{m+1}^1 \sum_{i=1}^{n} i^m + C_{m+1}^2 \sum_{i=1}^{n} i^{m-1} + \cdots + C_{m+1}^m \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 1 + C_{m+1}^1 S(m,1,n) + C_{m+1}^2 S(m-1,1,n) + \cdots + C_{m+1}^m S(1,1,n) + S(0,1,n), \end{aligned}$$

于是

$$S(m,1,n) = \frac{n^{m+1} - [C_{m+1}^2 S(m-1,1,n) + \cdots + C_{m+1}^m S(1,1,n) + S(0,1,n)] - 1}{C_{m+1}^1},$$

可以看到，这个结果相当复杂，要想算 $S(m,1,n)$，就必须把前面的 $S(m-1,1,n), S(m-2,1,n), \cdots, S(1,1,n)$ 全算出来。

$k = 1$ 的情况讨论完毕，接下来就是 $k \neq 1$ 了，同样，我们还是从最简单的情况看起，比如 $m = 1$，此时 $a_n = nk^n$，那么 $S_n = k^1 + 2k^2 + \cdots + nk^n$，则

$$kS_n = k^2 + 2k^3 + \cdots + nk^{n+1}$$

两式相减得到

$$\begin{aligned}(k-1)S_n &= (0-k)+(k^2-2k^2)+\cdots+((n-1)k^n-nk^n)+nk^{n+1}\\ &= -(k+k^2+\cdots+k^n)+nk^{n+1}\\ &= nk^{n+1}-\frac{k^{n+1}-k}{k-1},\\ S_n &= \frac{nk^{n+1}}{k-1}-\frac{k^{n+1}-k}{(k-1)^2}。\end{aligned}$$

好了，下面就慢慢往复杂的方向拓展，我们上面已求出

$$S(0,k,n)=\frac{k^{n+1}-k}{k-1},S(1,k,n)=\frac{nk^{n+1}}{k-1}-\frac{k^{n+1}-k}{(k-1)^2},$$

对于 $S(m,k,n)$，有

$$\begin{aligned}S(m,k,n)&=1^mk^1+2^mk^2+\cdots+n^mk^n,\\ kS(m,k,n)&=1^mk^2+2^mk^3+\cdots+n^mk^{n+1},\end{aligned}$$

两式相减得到

$$\begin{aligned}&(k-1)S(m,k,n)\\ =\;&-\big((k-0)+k^2(2^m-1^m)+\cdots+k^n\left(n^m-(n-1)^m\right)\big)+n^mk^{n+1}\\ =\;&-\big(k+k^2(C_m^1+C_m^2+\cdots+C_m^m)+\cdots+k^n\left(C_m^1(n-1)^{m-1}+C_m^2(n-1)^{m-2}+\cdots+C_m^m\right)\big)+n^mk^{n+1}\\ =\;&-\big(k+kC_m^1\left(k+2^{m-1}k^2+\cdots+(n-1)^{m-1}k^{n-1}\right)+kC_m^2\left(k+2^{m-2}k^2+\cdots+(n-1)^{m-2}k^{n-1}\right)+\cdots\\ &+kC_m^m\left(k+k^2+\cdots+k^{n-1}\right)\big)+n^mk^{n+1}\\ =\;&-k\left(1+C_m^1S(m-1,k,n-1)+C_m^2S(m-2,k,n-1)+\cdots+C_m^mS(0,k,n-1)\right)+n^mk^{n+1},\end{aligned}$$

最后得到

$$S(m,k,n)=\frac{n^mk^{n+1}-k\left(1+C_m^1S(m-1,k,n-1)+C_m^2S(m-2,k,n-1)+\cdots+C_m^mS(0,k,n-1)\right)}{k-1}。$$

显然，和上面一样，要想求出 $S(m,k,n)$，就必须把前面的都求出来。

现在回过头看本文开头的那道题，通过这个办法，就可以求出结果了。错位相减可以说是思路上最简单的，但计算复杂，容易出错，下面会提供两种计算量相对小的方法。

第二种方法，就是裂项[1]。

原理很简单，就是使得 $a_n=S_n-S_{n-1}$，然后找出 S_n。我们还是从简单的情况看起，比如 $m=1,k\neq 1$，此时 $a_n=nk^n$，令 $b_n=a_n$，则

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=(n+1)k^{n+1}-nk^n\\ &=nk^n(k-1)+k^{n+1},\end{aligned}$$

然后有 $nk^n=\dfrac{b_{n+1}-b_n}{k-1}-\dfrac{k^{n+1}}{k-1}$，则

$$a_n=\frac{b_{n+1}}{k-1}-\frac{b_n}{k-1}-\frac{k^{n+1}}{k-1},$$

[1]裂项法由论坛上 sunjialong 的裂项方法改进而来。

现在可以看到，我们已经把 a_n 的一部分进行了裂项，剩下一块 $-\dfrac{k^{n+1}}{k-1}$，是可以求和的。然后求和就有

$$S(1,k,n)=\frac{b_{n+1}-b_1}{k-1}-\frac{k^{n+2}-k^2}{(k-1)^2}=\frac{(n+1)k^{n+1}-k}{k-1}-\frac{k^{n+2}-k^2}{(k-1)^2},$$

化简后就是

$$S(1,k,n)=\frac{nk^{n+1}}{k-1}-\frac{k^{n+1}-k}{(k-1)^2}。$$

那么接下来看看 $m=2$ 的情况，$a_n=n^2k^n$，同样令 $b_n=a_n$，则

$$b_{n+1}-b_n=(n+1)^2k^{n+1}-n^2k^n=n^2k^n(k-1)+2nk^{n+1}+k^{n+1},$$

$$a_n=n^2k^n=\frac{b_{n+1}-b_n}{k-1}-\frac{2}{k-1}nk^{n+1}-\frac{k^{n+1}}{k-1},$$

然后可以再对剩下的部分进行裂项，由上面的结果，令 $c_n=nk^n$，则

$$nk^{n+1}=k\frac{c_{n+1}-c_n}{k-1}-\frac{k^{n+2}}{k-1},$$

然后有

$$a_n=\frac{b_{n+1}-b_n}{k-1}-\frac{2k}{(k-1)^2}(c_{n+1}-c_n)-\frac{k^{n+2}}{k-1}-\frac{k^{n+1}}{k-1},$$

求和即得

$$\begin{aligned}S(2,k,n)&=\frac{b_{n+1}-b_1}{k-1}-\frac{2k}{(k-1)^2}(c_{n+1}-c_1)-\frac{k^2(k+1)(k^n-1)}{(k-1)^2}\\&=\frac{(n+1)^2k^{n+1}-1}{k-1}-\frac{2k\left((n+1)k^n-1\right)}{(k-1)^2}-\frac{k^2(k+1)(k^n-1)}{(k-1)^2}。\end{aligned}$$

好了，下面同样推广下去。对于 $a_n=n^mk^n=S(m,k,n)-S(m,k,n-1)$，令 $b_n=a_n$，则

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=(n+1)^mk^{n+1}-n^mk^n\\&=n^mk^{n+1}+C_m^1n^{m-1}k^{n+1}+\cdots+C_m^mk^{n+1}-n^mk^n\\&=n^mk^n(k-1)+C_m^1n^{m-1}k^{n+1}+\cdots+C_m^mk^{n+1},\end{aligned}$$

于是

$$a_n=n^mk^n=\frac{b_{n+1}-b_n}{k-1}-\frac{C_m^1n^{m-1}k^{n+1}+\cdots+C_m^mk^{n+1}}{k-1},$$

直接求和的话就得到

$$\begin{aligned}S(m,k,n)&=\frac{b_{n+1}-b_1}{k-1}-\frac{kC_m^1\sum\limits_{i=1}^{n}n^{m-1}k^n+kC_m^2\sum\limits_{i=1}^{n}n^{m-2}k^n+\cdots+kC_m^m\sum\limits_{i=1}^{n}k^n}{k-1}\\&=\frac{(n+1)^mk^{n+1}-1}{k-1}-\frac{kC_m^1}{k-1}S(m-1,k,n)-\frac{kC_m^2}{k-1}S(m-2,k,n)-\cdots-\frac{kC_m^m}{k-1}S(0,k,n)。\end{aligned}$$

这个看起来要比错位相减得出的结果好看些，不过计算起来也并不简单多少。

第三种方法——微积分。

看起来很悬，其实也不算复杂，反而很巧妙。同样，从最简单的情况看起——$m=1$，此时 $a_n=nk^n$，令 $f(k)=\sum\limits_{i=1}^{n}ik^i=k+2k^2+\cdots+nk^n$，则

$$\frac{f(k)}{k}=1+2k+\cdots+nk^{n-1},$$

$$F(k)=\int \frac{f(k)}{k}\,\mathrm{d}\,k=k+k^2+\cdots+k^n+c=\frac{k^{n+1}-k}{k-1}+c,$$

然后再对 $F(x)$ 求导得到

$$F'(k)=\frac{f(k)}{k}=\frac{((n+1)k^n-1)\,(k-1)-(k^{n+1}-k)}{(k-1)^2},$$
$$f(k)=\frac{((n+1)k^n-1)\,(k-1)x-(k^{n+1}-k)k}{(k-1)^2},$$

化简后就是 $f(k)=\dfrac{nk^{n+1}}{k-1}-\dfrac{k^{n+1}-k}{(k-1)^2}$。

然后看看 $m=2$ 的情况，此时 $a_n=n^2k^n$，令 $f(k)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^2k^n=k+2^2k^2+\cdots+n^2k^n$，则

$$\begin{aligned}
\frac{f(k)}{k}&=1^2+2^2k+\cdots+n^2k^{n-1},\\
F(k)&=\int\frac{f(k)}{k}\,\mathrm{d}\,k=k+2k^2+\cdots+nk^n+c_1,\\
\frac{F(k)}{k}&=1+2k+\cdots+nk^{n-1}+\frac{c_1}{k},\\
G(k)&=\int\frac{F(k)}{k}\,\mathrm{d}\,k=k+k^2+\cdots+k^n+c_1\ln k+c_2\\
&=\frac{k^{n+1}-k}{k-1}+c_1\ln k+c_2,
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{F(k)}{k}=G'(k)&=\frac{nk^n}{k-1}-\frac{k^n-1}{(k-1)^2}+\frac{c_1}{k},\\
F(k)&=\frac{nk^{n+1}}{k-1}-\frac{k^{n+1}-k}{(k-1)^2}+c_1,\\
\frac{f(k)}{k}=F'(k)&=\frac{k^{n+1}(1-2n-2n^2)+k^n(n+1)^2+n^2k^{n+2}-k-1}{(k-1)^3},\\
f(k)&=\frac{k^{n+2}(1-2n-2n^2)+k^{n+1}(n+1)^2+n^2k^{n+3}-k^2-k}{(k-1)^3}。
\end{aligned}$$

其实在上面也看到了，在推广到其他 m 值时存在一个更简单的递推关系。

对于 $a_n=n^mk^n$，令 $f(k)=S(m,k,n)=k+2^mk^2+\cdots+n^mk^n$，则有

$$\int\frac{f(k)}{k}\,\mathrm{d}\,k=k+2^{m-1}k^2+\cdots+n^{m-1}k^n+c=S(m-1,k,n)+c,$$

于是就有[1]

$$S(m,k,n)=\frac{\partial S(m-1,k,n)}{\partial k}k。$$

这个递推式看起来比较简洁，但算起来可不简单，对于 $S(m,k,n)$ 就要求 m 次积分和导数，到了后面运算量也一样很大。

到此就可以看到，此类问题无论是那种方法，都无法一次性解决，只能靠递推的方式解决，对于较大的 m 计算量大到恐怖。

[1] $\dfrac{\partial S(m-1,k,n)}{\partial k}$ 就是 $S(m-1,k,n)$ 对 k 求偏导数，即在 $S(m-1,k,n)$ 表达式中将 $m-1,n$ 视为常数，对 k 求导。

3.3 三角形与三个正方形——何万程

这里研究两个构图比较漂亮的作图问题，三角形内部包含三个正方形。

例 3.3.1. 如图 3.3.1，给定 $\triangle ABC$，向 $\triangle ABC$ 外作三个正方形 $BDEF$、$CGHI$、$AJKL$，使点 C 在边 BF 上，点 A 在边 CI 上，点 B 在边 AL 上，点 G 在直线 EF 上，点 J 在直线 HI 上，点 D 在直线 KL 上。

解 设 $\triangle ABC$ 中 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，正方形 $BDEF, CGHI, AJKL$ 的边长分别是 x, y, z，则

$$x=a+CF=a+y\sin\angle CGF=a+y\sin\angle C。$$

同理得

$$y=b+z\sin\angle A,$$

$$z=c+x\sin\angle B。$$

解这个关于 x、y、z 的方程组，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+b\sin\angle C+c\sin\angle C\sin\angle A}{1-\sin\angle A\sin\angle B\sin\angle C}, \\ y=\dfrac{b+c\sin\angle A+a\sin\angle A\sin\angle B}{1-\sin\angle A\sin\angle B\sin\angle C}, \\ z=\dfrac{c+a\sin\angle B+b\sin\angle B\sin\angle C}{1-\sin\angle A\sin\angle B\sin\angle C}。\end{cases}$$

根据上面的结果就可以作出正方形 $BDEF$、$CGHI$、$AJKL$。 □

若给定图 3.3.1 外围的大三角形，如何作出如图 3.3.1 的三个正方形呢？计算易知靠近 JK 的大三角形内角等于 $\angle A$，靠近 DE 的大三角形内角等于 $\angle B$，靠近 GH 的大三角形内角等于 $\angle C$，因此大三角形相似于 $\triangle ABC$，利用上面的结果作出三个正方形，得到一个大的三角形，把这个大三角形及所作的三个正方形同步进行缩放，使大三角形与图 3.3.1 外围的大三角形全等，这样就可以得到所作的三个正方形了。

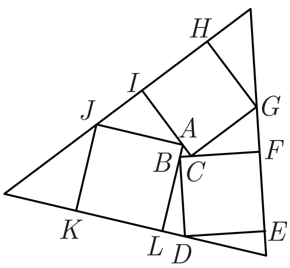


图 3.3.1

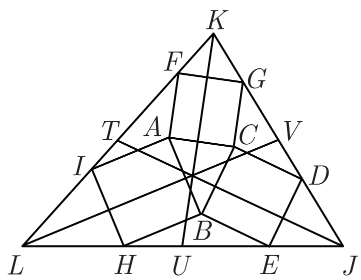


图 3.3.2

例 3.3.2. 如图 3.3.2，给定 $\triangle ABC$，其中 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，面积是 S。向 $\triangle ABC$ 外作正方形 $BCDE$、$CAFG$、$ABHI$，直线 DG 与直线 EH 相交于点 J，直线 FI 与直线 DG 相交于点 K，直线 EH 与直线 FI 相交于点 L，$\triangle JKL$ 的边 KL, LJ, JK 的中点分别是 T, U, V。求证:

（1）$\triangle JKL$ 与以 $\triangle ABC$ 的中线为边的三角形相似;

（2）$BC\perp JT$，$CA\perp KU$，$AB\perp LV$。

证明 （1）根据余弦定理和正弦定理，得

$$FI=\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\angle A}=\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},$$

$$\cos\angle KFG=\sin\angle AFI=\frac{c\sin\angle A}{FI}=\frac{2S}{b\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}},$$
$$\sin\angle KFG=\cos\angle AFI=\frac{b^2+FI^2-c^2}{2b\cdot FI}=\frac{3b^2+c^2-a^2}{2b\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}。$$

同理可得

$$\cos\angle KGF=\frac{2S}{b\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}},$$
$$\sin\angle KGF=\frac{3b^2+a^2-c^2}{2b\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}。$$

这样

$$\sin\angle FKG=\sin\angle KFG\cos\angle KGF+\cos\angle KFG\sin\angle KGF=\frac{6S}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}},$$

再根据正弦定理，得

$$KF=\frac{b\sin\angle KGF}{\sin\angle FKG}=\frac{3b^2+a^2-c^2}{12S}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}。$$

同理得

$$IL=\frac{3c^2+a^2-b^2}{12S}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}。$$

所以

$$KL=KF+FI+IL=\frac{a^2+b^2+c^2+6S}{6S}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}。$$

同理得

$$LJ=\frac{a^2+b^2+c^2+6S}{6S}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2},$$
$$JK=\frac{a^2+b^2+c^2+6S}{6S}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}。$$

由此可得 $\triangle JKL$ 与以 $\triangle ABC$ 的中线为边的三角形相似。

（2）根据中线长公式，得

$$KU=\frac{\sqrt{2JK^2+2KL^2-LJ^2}}{2}=\frac{3\left(a^2+b^2+c^2+6S\right)b}{4S},$$

再根据余弦定理，得

$$\cos\angle LKU=\frac{KL^2+KU^2-LU^2}{2KL\cdot KU}=\frac{3b^2+c^2-a^2}{2b\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}},$$

所以 $CA\perp KU$。同理得 $BC\perp JT$，$AB\perp LV$。 □

例 3.3.3. 给定一个三角形，在其内部求作三个正方形，使这三个正方形每个都有两个顶点在这个三角形的不同边上，而其余两点分别与另外两个正方形的一个顶点重合。

这里的解法 1 类似于上一作图题目的方法，也是利用缩放法得到最后结果。

解法 1 根据例 3.3.2 的结论，以这个三角形的三中线为边作第二个三角形，以第二个三角形的各边为边向外作正方形，如图 3.3.2 作 $\triangle JKL$ 那样作出第三个三角形，则第三个三角形与给定的三角形是相似的，再利用比例缩放第三个三角形，使之与给定三角形重合，则所得的正方形就是所求。 □

解法 2 根据例 3.3.2 的结论以及位似变换，如图 3.3.3 所示，分别作出 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 的中点 D、E、F，连结 AD、BE、CF；在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上任取一点 A_1，过点 A_1 作 AD 的垂线交 CA 于点 A_2，以 A_1A_2 为边作正方形 $A_1A_2A_3A_4$，使边 A_3A_4 与点 A 在 A_1A_2 的两侧；类似作出正方形 $B_1B_2B_3B_4$、$C_1C_2C_3C_4$；那么 BB_4 与 CC_3 的交点 P，CC_4 与 AA_3 的交点 Q，AA_4 与 BB_3 的交点 R 这三个点就是所求正方形两两重合的点，分别以 $\triangle PQR$ 的边 PQ、QR、RS 分别向外作正方形 $PQST$、$PRUV$、$RPWX$，这三个正方形就是所求的正方形。 □

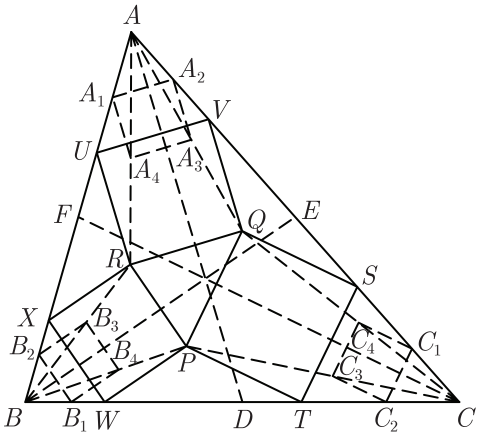


图 3.3.3

数学空间 2011 年第 3 期的封面的图就是例 3.3.3 画出来后的图。其中例 3.3.3 的解法 2 是 K12 教育论坛里的 wantnon 网友首先提出的。

朝花夕拾

4.1 【封面故事】奇妙的幻方——何万程

把 1 至 n^2 的自然数分别填入 $n \times n$ 个方格中，形成方阵，如果每行、每列以及主、副对角线上所填自然数之和分别都等于某一定值，则此方阵称为 n 阶幻方，这个称为定值幻和。幻方我国古代称为河图、洛书，又叫纵横图。

大约两千多年前西汉时代，流传夏禹治水时，黄河中跃出一匹神马，马背上驮着一幅图，人称“河图”；又洛水河中浮出一只神龟，龟背上有一张象征吉祥的图案称为“洛书”，翻译成阿拉伯数字就是本期封面的三阶幻方。

幻方最早记载于我国公元前 500 年的春秋时期《大戴礼》中，这说明我国人民早在 2500 年前就已经知道了幻方的排列规律。而在国外，公元 130 年，希腊人塞翁才第一次提起幻方。

我国是最早对幻方进行深入研究的国家。公元 13 世纪的数学家杨辉已经编制出 3～10 阶幻方，记载在他 1275 年写的《续古摘厅算法》一书中。在欧洲，直到 1574 年，德国著名画家丢勒才绘制出了完整的四阶幻方。

可以证明不存在二阶幻方，因此最小的幻方是三阶的，而且阶数高于二的幻方都是存在的。若把所有由其中一个用轴对称、中心对称所得的幻方视为同一个幻方，则原来的幻方称为这些幻方的基本幻方。三阶幻方的基本幻方只有一个。在 n 阶幻方中，凡关于中心对称的两数之和都相等，等于一个定值，那么该幻方称为全对称幻方。

下面将介绍幻方的简单构造方法。以下把不能被 4 整除的偶数称为单偶数，能被 4 整除的偶数成为双偶数。

一、奇数阶全对称幻方的 Loubère 构造法

1687 年法国人 Simon de la Loubère（1600–1664）关于一本泰王国的书，这书中提到了九宫图和一种算法, 后来人们这个算法称为 de la Loubère 构造法，简称 Loubère 构造法。构造法步骤如下：

（1）中央列最上格起填 1;

（2）在填写 n 的右上方格子填写 $n+1$，特殊情况分以下几种情况处理:

A. 如果要填写的数字在最上方行的上面，则把数字移到对应的列的最下方行处;

B. 如果要填写的数字在最右方列的右面，则把数字移到对应的行的最左方列处;

C. 如果要填写的数字 $n+1$ 的右上方格子已经被别的数字占了，则 $n+1$ 填写在填写 n 格子的正下方;

（3）如果填写 n 的格子已经处在是最右上方格子，则 $n+1$ 填写在填写 n 的格子的正下方;

（4）继续按照步骤（2）填写，直到把所有格子填写完。

图 4.1.1 就是用 Loubère 法构造的五阶幻方。

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

图 4.1.1

31	43	00	12	24
42	04	11	23	30
03	10	22	34	41
14	21	33	40	02
20	32	44	01	13

图 4.1.2

为什么用 Loubère 构造法构造出来的方阵是幻方? 把用 Loubère 构造法写成的方阵每个方格的数字减 1，再写成 n 进制数，若不够两位用 0 补到前一位（图 4.1.2 就是按上述要求写成的方阵）。以五阶幻方为例，同一行或每列、主对角线的数的个位和十位都不相同，而且都遍历了 0 到 $n-1$，因此其和都相等；而副对角线的

十位数都是 $\dfrac{n-1}{2}$，个位数遍历了 0 到 $n-1$，其和也是相等的。因此构造出来的方阵就是幻方。至于严格的证明这里就不给出了，有兴趣的读者可以自己尝试证明或查阅资料。

构造法演示地址：`http://www.krbb.cn/mk/Loubere.html`。

二、单偶数阶幻方的 Ralph Strachey 构造法

本法见于 Benson 和 Jacoby 合著的《幻方新探（NEW RECREATIONS WITH MAGIC SQUARES）》中的第 19 至 25 页。

Ralph Strachey 法构造 $2\,(2m+1)$ 阶幻方的构造方法步骤如下：

（1）把方阵划分为如图 4.1.3 所示的 A（左上），B（右上），C（左下），D（右下）四个小方阵，每边有 $u=2m+1$ 格；

（2）使 A，D，B，C 四方阵内分别含元素 1 至 u^2，u^2+1 至 $2u^2$，$2u^2+1$ 至 $3u^2$，$3u^2+1$ 至 $4u^2$，按照任何一种相同的奇数阶幻方构造法把四方阵填写成 u 阶幻方；

（3）在 A 中的中央行取左起第 $2,\cdots,m+1$ 个元素，其它行取左起第 $1,\cdots,m$ 个元素，把这些元素共 $m\,(2m+1)$ 个与 C 中对应行元素互换；

（4）在 B 中取右起共 $m-1$ 列，共 $(m-1)\,(2m+1)$ 个元素与 D 中同列对应行元素互换，$2\,(2m+1)$ 阶幻方构造完成。

图 4.1.4 是按 Loubère 法构造五阶幻方后再用 Ralph Strachey 法构造的十阶幻方。

A	B
C	D

图 4.1.3

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

图 4.1.4

设 A 中幻方的幻和是 S。

做完步骤（2）后，方阵中包含 A、B 的任意一行数字的和是 $2S+2\,(2m+1)^3$，包含 C、D 的任意一行数字的和是 $2S+4\,(2m+1)^3$，任意一列数字的和是 $2S+3\,(2m+1)^3$，主对角线数字的和是 $2S+(2m+1)^3$，副对角线数字的和是 $2S+5\,(2m+1)^3$。

做完步骤（3）后，方阵中包含 A、B 的任意一行数字的和是 $2S+(7m+2)\,(2m+1)^2$，包含 C、D 的任意一行数字的和是 $2S+(5m+4)\,(2m+1)^2$，任意一列数字的和是 $2S+3\,(2m+1)^3$，主对角线数字的和是 $2S+(5m+4)\,(2m+1)^2$，副对角线数字的和是 $2S+(7m+2)\,(2m+1)^2$。

做完步骤（4）后，方阵中包含 A、B 的任意一行数字的和是 $2S+3\,(2m+1)^3$，包含 C、D 的任意一行数字的和是 $2S+3\,(2m+1)^3$，任意一列数字的和是 $2S+3\,(2m+1)^3$，主对角线数字的和是 $2S+3\,(2m+1)^3$，副对角线数字的和是 $2S+3\,(2m+1)^3$。

所以用 Ralph Strachey 法构造的方阵是幻方。

构造法演示地址：`http://www.krbb.cn/mk/Ralph_Strachey.html`。

三、双偶数阶全对称幻方的杨辉构造法

杨辉曾给出了两个四阶幻方，其中一个制作方法加以推广，得偶数阶幻方的杨辉构造法。

杨辉构造法步骤如下：

（1）先作元素 1 到 $(4m)^2$ 的由左到右填写行再接着填写下一行的自然方阵；

（2）m^2 个由左上角开始平铺到整个方阵的四阶方阵的主、副对角线的元素（以八阶方阵为例，就是如图 4.1.5 斜线经过的格子）不动，其余 $8m^2$ 个元素关于方阵中心作对称互换，$4m$ 阶幻方构造完成。

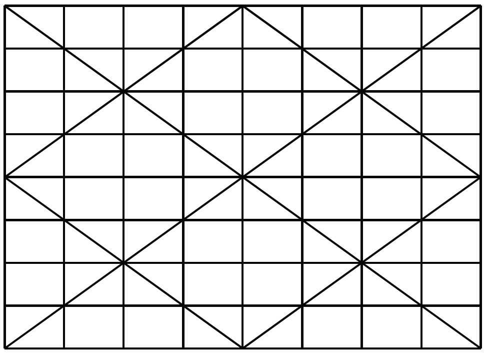


图 4.1.5

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

图 4.1.6

图 4.1.6 是按杨辉法构造的八阶幻方。

做完步骤（1）后，方阵中的元素是 $a_{ij} = 4(i-1)m + j$，容易验证主、副对角线上数字的和是 $2m\left(16m^2+1\right)$，且 $a_{ij} + a_{4m-i+1,4m-j+1} = 16m^2 + 1$。

做完步骤（2）后，方阵中第 i 行和第 $4m-i+1$ 行要交换的数字各有 $2m$ 个，并且都在相同的列中，其余的列的这两行的数字不用交换，于是行的数字和是 $2m\cdot 4(i-1)m + 2m\cdot 4(4m-i+1-1)m + 1 + 2 + \cdots + 4m = 2m\left(16m^2+1\right)$。同理可证列的数字和也是 $2m\left(16m^2+1\right)$，而主、副对角线上数字的和不会因交换而改变，所以所构造的方阵是幻方。同样 $a_{ij} + a_{4m-i+1,4m-j+1}$ 不会因交换而改变，所以按杨辉法所构造的幻方是全对称的。

构造法演示地址：`http://www.krbb.cn/mk/YangHui.html`。

至此，所有幻方的简单构造方法都已经介绍完毕，根据上面的构造方法，读者可以轻松构造出任意阶阶数高于二幻方来。还有很多构造幻方的方法，而且还有更多性质特殊的幻方，这些留给有兴趣的读者自己探索。

4.2 “雪花曲线”简介——郭子伟

数学空间 2011 年第 1 期的封面图形是被俗称为“雪花曲线”的 Koch 曲线，它是由瑞典数学家科赫 (Helge von Koch) 于 1904 年为了从初等几何构造一条没有切线的连续曲线所得到的曲线，属于一种简单的分形曲线。关于分形，本文不打算介绍，因为内容比较深而且作者水平实在有限，如果想了解更多，可以自行查阅相关书籍。这里仅是对“雪花曲线”作一点简单介绍，再给出一些基本量的计算和作图。

雪花曲线的构造其实很简单，首先作一个正三角形 a_1，对 a_1 的每条边三等分后以中间部分为底边向外作正三角形，并将原底边擦除，得到六边形 a_2，对 a_2 作同样的操作得到 a_3，如此不断重复下去即得到“雪花曲线”。如图 4.2.1 所示。

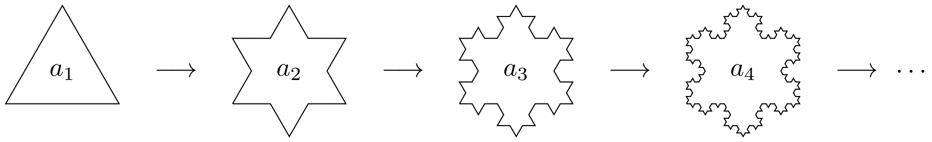


图 4.2.1

设初始的正三角形 a_1 的边长为 1，以 $N(a_n)$、$L(a_n)$、$C(a_n)$、$S(a_n)$ 分别表示第 n 个图形 a_n 的边数、边长、周长、面积，下面计算这些式子的通项。

显然 $N(a_1) = 3$，因为每经过一次操作后每条边变成四条边，于是对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 有

$$N(a_{n+1}) = 4N(a_n),$$

所以由等比数列通项公式得

$$N(a_n) = 3 \cdot 4^{n-1}。$$

由所设知 $L(a_1) = 1$，显然每经过一次操作后每条边的长度为上一个图形的三分之一，于是对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 有

$$L(a_{n+1}) = \frac{1}{3}L(a_n),$$

于是由等比数列通项公式得

$$L(a_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}。$$

因为 $C(a_n) = L(a_n) \cdot N(a_n)$，代入即得

$$C(a_n) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}。$$

显然 $S(a_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，因为由 a_n 变成 a_{n+1} 的操作时向外作的每个正三角形的边长为 $L(a_{n+1})$，面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(L(a_{n+1})\right)^2$，又因为每边向外作一个，所以这些正三角形共有 $N(a_n)$ 个，由此即是对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 有

$$S(a_{n+1}) = S(a_n) + N(a_n) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(L(a_{n+1})\right)^2,$$

代入前面已求得的通项化简即得

$$S(a_{n+1}) = S(a_n) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}},$$

解得

$$S(a_n) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)。$$

计算“雪花曲线”的周长和面积，只要取极限即可，显然有

$$\lim_{n\to+\infty} C(a_n) = \lim_{n\to+\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} S(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}。$$

由此可见，“雪花曲线”是一个面积有限但是周长却是无限的图形。

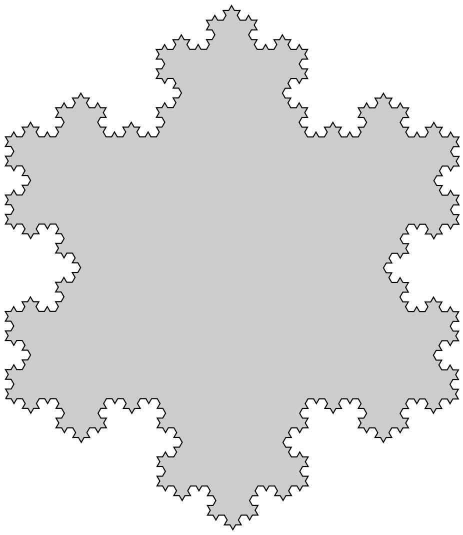


图 4.2.2

图 4.2.2 是用 LaTeX 里的 Ti*k*Z 宏包作的，该宏包里有专门作分形图的宏库 decorations.fractals，此图的代码为

```
\begin{tikzpicture}[scale=6,decoration=Koch snowflake,draw=black,fill=black!20]
\filldraw decorate{ decorate{ decorate{ decorate{
(0,0) -- ++(60:1) -- ++(-60:1) -- cycle}}}};
\end{tikzpicture}
```

有 LaTeX 软件的可以试一下，也可以自行调整细节，其中 decorate 有多少个就是迭代多少次，不过数量较多时运行会比较慢。

如果将操作中的“向外作正三角形”改为“向内作正三角形”则会得到“反雪花曲线”，其变化过程如图 4.2.3 所示。

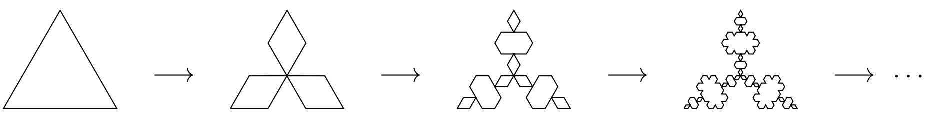


图 4.2.3

在作图代码上只需将 `++(60:1) -- ++(-60:1)` 改为 `++(1,0) -- ++(120:1)` 即可，大家也可以思考一下两者的周长或面积的关系。