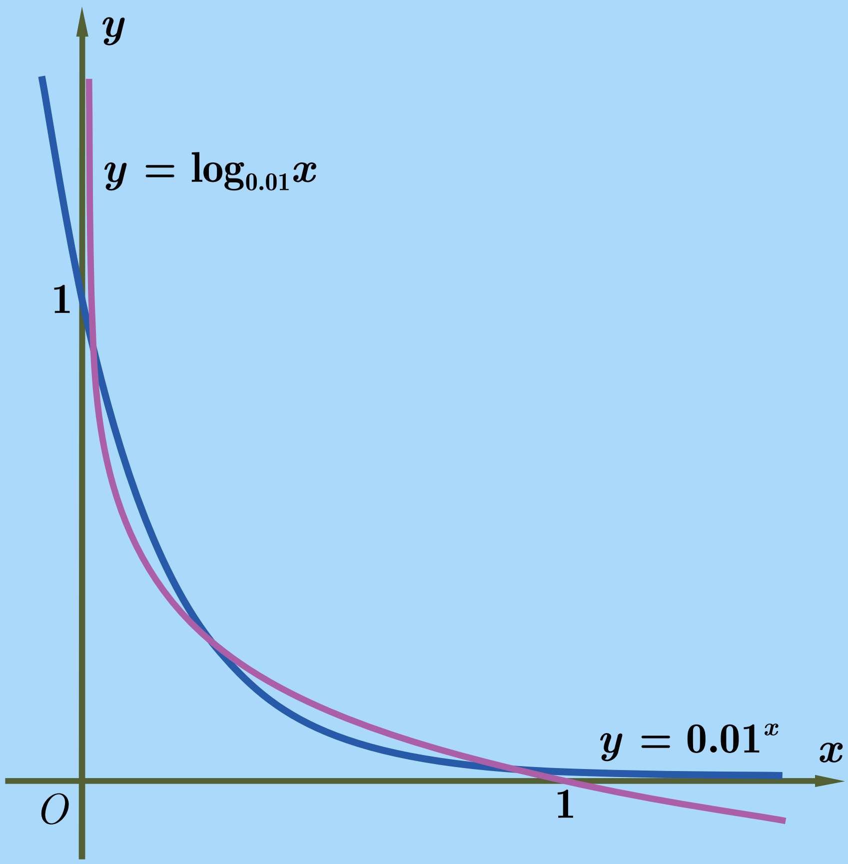
# 数学空间——人教数学网刊

## 高中数学

2011 年第 7 期



# 目录

# 数学评书

## 1.1 《智慧宝典》第二部第五回　无意得秘籍　有心能入门——陈海峰

话说小精灵逃走以后，两位小英雄也不追赶。穿过一座山后，看到有一个小屋，只听得有刀枪之声，不多时，两人来到了屋前。只见两个大汉在拼杀切磋技艺，可是都有叹惜之声。问过之后，才知道原来他们无意得到一本秘籍 ——《推广大法》，就是不知道如何使用。两位小英雄知道了怎么回事，就是如何将平面几何的知识推广到立体几何的学习中，两位小英雄决定传授他们“内功心法”。

**基础心法 1**　设 $a, b, c$ 是空间的三条直线，给出以下五个命题：

①若 $a \perp b$，$b \perp c$，则 $a \perp c$;

②若 $a$、$b$ 是异面直线，$b$、$c$ 是异面直线，则 $a$、$c$ 也是异面直线;

③若 $a$ 和 $b$ 相交，$a$ 和 $c$ 相交，则 $b$ 和 $c$ 也相交;

④若 $a$ 和 $b$ 共面，$b$ 和 $c$ 共面，则 $a$ 和 $c$ 也共面;

⑤若 $a \parallel b$，$b \parallel c$，则 $a \parallel c$;

其中正确的命题的有多少个?

小豪传授道:“上述命题中只有⑤正确，其余都是错的。平面几何到立体几何中象平行的传递性，等角定理、全等、相似依旧成立，可是一些定理就不能成立了。如垂直于同一条直线的两直线不一定平行；有三个直角的平面四边形一定是矩形，但有三直角的空间四边形不一定是矩形。”

两个大汉点头称是。小英也在一旁拨起“神算子”，启动——

**提升心法 2**　如图 1.1.1，在直角三角形 $ABC$ 中，$AD$ 是斜边 $BC$ 上的高，可以得到结论:

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}。$$

如图 1.1.2，在三棱锥 $ABCD$ 中，$AB$、$AC$、$AD$ 两两互相垂直，$AO \perp$ 平面 $BCD$，请你类比以上结论，写出一个正确的结论。

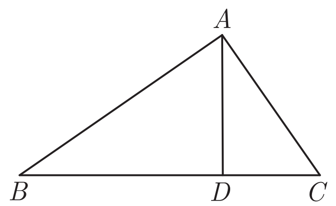


图 1.1.1

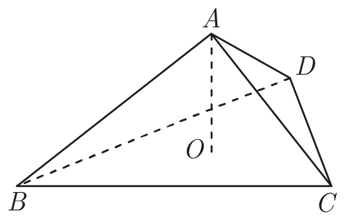


图 1.1.2

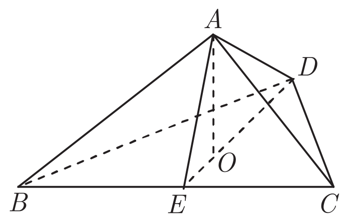


图 1.1.3

在运用《推广大法》时，要小心验证，不要伤了“五脏六腑”，我来运功示范：先猜想试试

$$\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}。$$

调理一下：连结 $DO$ 并延长交于 $E$，连结 $AE$，如图 1.1.3。先利用直线和平面垂直的判断定理得到 $AD \perp$ 平面 $ABC$，然后可证明 $AD \perp BC$，$AO \perp BC$，最终可得 $AE \perp BC$，根据等面积的原理 $\frac{1}{2}BC \times AE = \frac{1}{2}AB \times AC$，所以

$$\frac{1}{AE} = \frac{BC}{AB \times AC} \implies \frac{1}{AE^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \times AC^2},$$

又因为 $BC^2 = AB^2 + AC^2$，所以

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2},$$

同理可证 $\dfrac{1}{AO^2}=\dfrac{1}{AE^2}+\dfrac{1}{AD^2}$，所以

$$\frac{1}{AO^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2},$$

命题成立。

两个大汉如梦方醒，顿时觉得那本《推广大法》并不神秘了，赶忙操练起来，忽觉十分顺手，忙跪下连称师傅，后来此二人成了江湖的风云人物，成立了推广一派，这是后话。

欲知还会发生何事，请听下回分解。

## 1.2 《智慧宝典》第二部第六回　途经桃花岛　合力破玄机——陈海峰

前回说到小豪与小英指点了两名大汉修炼《推广大法》以后，受到两位大汉的盛情款待。两位小英雄说明了缘由后，两位大汉才含泪答应他们离开。两人又到了一处，只见一片桃花林挡住了去路。当两人走近一下，桃花树也跟着移动了一下，这下他们才明白，这就是师傅经常提起的“桃花岛”，内含“八卦”，玄机重重，稍有不慎会丢了卿卿性命。

小豪在前，走近第一棵桃花树，桃花林突然旋转了起来，小豪停步细看一下阵势：

**阵势一**　过点 $P(2,1)$ 作直线 $l$，与坐标轴围成的面积为 $\frac{1}{2}$，求此直线 $l$ 的方程。

小豪赶忙拿出“奎星笔”，分析一下这个阵势的破解办法：

**解**　设直线 $y-1=k(x-2)$，$k\neq 0$ 且 $k\neq\frac{1}{2}$（聪明的读者，你知道这是为什么吗？）

则直线与 $x$ 轴交于点 $\left(\frac{2k-1}{k},0\right)$，与 $y$ 轴交于 $(0,1-2k)$，由题意可知

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{2k-1}{k}\right||1-2k|=\frac{(2k-1)^2}{2|k|}。\tag{1.2.1}$$

当 $k>0$ 时，则 $\frac{(2k-1)^2}{2k}=\frac{1}{2}$，从而有 $k=\frac{1}{4}$ 或 $k=1$；

当 $k<0$ 时，则 $\frac{(2k-1)^2}{2k}=-\frac{1}{2}$，从而有 $4k^2-3k+1=0$，又 $\Delta=(-3)^2-4\times 4=-7<0$，该方程无解。

综上，直线 $l$ 的方程有两条，分别是 $y=x-1$ 和 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$。 □

刚刚分析完，只见桃花林忽然停止了转动。小英也不敢大意，跟着小豪背靠背移步。

过了五分钟的光景，一垄桃花林向小英方向冲了过来，阵势似曾相识。

**阵势二**　过点 $P(2,1)$ 作直线 $l$，与坐标轴围成的面积为 4，求此直线 $l$ 的方程。

小英急忙拨起神算子，赶紧分析。知道与刚刚小豪的题类似。

**解**　接上面式 (1.2.1)。

当 $k>0$ 时，则 $\frac{(2k-1)^2}{2k}=4$，从而有 $4k^2-12k+1=0$，得 $k=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ 或 $k=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$；

当 $k<0$ 时，则 $\frac{(2k-1)^2}{2k}=-4$，从而有 $4k^2+4k+1=0$，得 $k=-\frac{1}{2}$。

综上，直线 $l$ 的方程有 3 条，分别是

$$y=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}x-2+2\sqrt{2},$$
$$y=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}x-2+2\sqrt{2},$$
$$y=-\frac{1}{2}x+2。$$
□

刚刚分析完时，桃花林忽然停止冲来，两人都觉得微微冒汗了，又过了 3 分钟的光景，桃花林又动了起来，两人觉得有点晕了，合力运功一看，与刚刚的阵势又是何等相似！

**阵势三**　过点 $P(2,1)$ 作直线 $l$，与坐标轴围成的面积为 6，求此直线 $l$ 的方程。

两人觉得肯定不是那么简单，忙用“珠笔合璧”，顿时光芒万丈。

**解**　接上面式 (1.2.1)。

当 $k>0$ 时，则 $\frac{(2k-1)^2}{2k}=6$，从而有 $4k^2-16k+1=0$，得 $k=\frac{4+\sqrt{15}}{2}$ 或 $k=\frac{4-\sqrt{15}}{2}$；

当 $k>0$ 时，则 $\frac{(2k-1)^2}{2k}=-6$，从而有 $4k^2+8k+1=0$，得 $k=\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$ 或 $k=\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$。

综上，直线 $l$ 的方程有 4 条，分别是

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{4+\sqrt{15}}{2}x - 3 - \sqrt{15}，\\
y &= \frac{4-\sqrt{15}}{2}x - 3 + \sqrt{15}，\\
y &= \frac{-2-\sqrt{3}}{2}x + 3 + \sqrt{3}，\\
y &= \frac{-2+\sqrt{3}}{2}x + 3 - \sqrt{3}。
\end{aligned}
\qquad \square
$$

两位小英雄暗暗叹服，这个桃花岛主乃高人也，这些阵势只改动分毫，差点要人性命。
究竟两人性命是否保住，且听下回分解。

# 助力高考

## 2.1 ab1962 解题集精选（七）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 301 ∼ 350 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》第 1 期。

**题目 2.1.1.** 已知 $x, y > 0, x + y = 1$，求证：$\dfrac{x}{x^2+y^3} + \dfrac{y}{y^2+x^3} \leq \dfrac{8}{3}$。

**证明** 因 $x + y = 1$，故 $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$，故

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+y^3} &= \frac{x}{x^2(x+y)+y^3}\\ &= \frac{x}{x^3+y^3+x^2y}\\ &= \frac{x}{x^2+y^2-xy+x^2y}\\ &= \frac{x}{(x+y)^2-3xy+x^2y}\\ &= \frac{x}{1-xy(3-x)}\\ &\leq \frac{x}{1-\dfrac{1}{4}(3-x)}\\ &= \frac{4x}{1+x},\end{aligned}$$

同理 $\dfrac{y}{y^2+x^3} \leq \dfrac{4y}{1+y}$，所以

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+y^3} + \frac{y}{y^2+x^3} &\leq \frac{4x}{1+x} + \frac{4y}{1+y}\\ &= \frac{4(x+xy+y+xy)}{(1+x)(1+y)}\\ &= \frac{4(1+2xy)}{2+xy}\\ &= \frac{8(xy+2)-12}{2+xy}\\ &= 8 - \frac{12}{2+xy}\\ &\leq 8 - \frac{12}{2+\dfrac{1}{4}}\\ &= \frac{8}{3}。\end{aligned}$$

□

**kuing 评注：** 本题的证法有很多，按我个人的看法，一个简单易想且的确可行的方法则是在《数学空间》第 3 期介绍过的“切线法”，具体地，先证

$$\frac{x}{x^2+y^3} = \frac{x}{x^2+(1-x)^3} \leq \frac{4(4x+1)}{9},$$

上式右边作差等价于

$$\frac{(11x+4(1-x^2))(2x-1)^2}{9(x^2+(1-x)^3)} \geq 0,$$

显然成立，同理得另一式，相加即得证。更多其他证法参见 http://bbs.pep.com.cn/thread-439235-1-1.html。

**题目 2.1.2.** 设函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2ax^2-3a^2x+b, 0<a<1$。

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）若当 $x\in[a+1,a+2]$ 时，恒有 $|f'(x)|\le a$，试确定 $a$ 的取值范围。

**解**

$$f'(x)=-x^2+4ax-3a^2=-(x-a)(x-3a),$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=a, x_2=3a$，$3a-a=2a>0$。

当 $x>3a$ 或 $x<a$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(3a,+\infty)$，$(-\infty,a)$ 上递减；当 $a<x<3a$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(a,3a)$ 上递增。故

$$f(x)_{极大}=f(3a)=-\frac{1}{3}(3a)^3+2a(3a)^2-3a^2(3a)+b=b,$$
$$f(x)_{极小}=f(a)=-\frac{1}{3}(a)^3+2a(a)^2-3a^2(a)+b=-\frac{4}{3}a^3+b;$$

（2）当 $x\in[a+1,a+2]$ 时，恒有 $|f'(x)|\le a$，就是 $-a\le f'(x)\le a$，故 $f'(x)_{\max}\le a$，且 $f'(x)_{\min}\ge -a$，而 $f'(x)$ 的对称轴为 $x=2a$，开口向下，因为 $0<a<1 \implies a+1>2a$，故 $f'(x)$ 在 $[a+1,a+2]$ 上递减，所以

$$f'(x)_{\max}=f'(a+1)=-(1-2a)=2a-1\le a \implies a\le 1,$$
$$f'(x)_{\min}=f'(a+2)=-2(2-2a)=4a-4\ge -a \implies a\ge\frac{4}{5},$$

综上得 $\frac{4}{5}\le a<1$。 □

**题目 2.1.3.** 已知椭圆过 $M(1,2)$，以 $y$ 轴为准线，离心率 $e=0.5$，求其上顶点和左顶点的轨迹方程。

**解** 先求出左焦点的轨迹方程。首先椭圆显然在 $y$ 轴右边，设左焦点为 $F(x,y)$，则 $MF$ 与到 $M$ 准线（$y$ 轴）的距离比为离心率，知

$$\frac{\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}}{1}=\frac{1}{2}\iff (x-1)^2+(y-2)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

为左焦点的轨迹方程。

再求左顶点轨迹方程。设左顶点为 $(x,y)$，左焦点 $F(m,n)$，则由离心率、焦准距及椭圆基本性质，易知

$$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}，\frac{b^2}{c}=m，b^2=a^2-c^2,$$

解得 $c=\frac{m}{3}$，$a=\frac{2m}{3}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{3}m$，于是 $m-x=a-c=\frac{m}{3}\implies m=\frac{3}{2}x$，$n=y$，代入左焦点的轨迹方程得

$$\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2+(y-2)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

为左顶点轨迹方程。

最后求上顶点的轨迹方程。设上顶点为 $(x,y)$，左焦点为 $(m,n)$，则易知

$$x-m=c=\frac{m}{3}\implies m=\frac{3}{4}x,$$

以及

$$y=n+b=n+\frac{\sqrt{3}}{3}m=n+\frac{\sqrt{3}}{4}x\implies n=y-\frac{\sqrt{3}}{4}x,$$

代入左焦点的轨迹方程得

$$\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}x-2\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

为上顶点轨迹方程。 □

**题目 2.1.4.** 设 $c=\dfrac{1-\tan 40^\circ}{1+\tan 40^\circ}$，$b=\dfrac{1}{2(\cos 80^\circ-2\cos^2 50^\circ+1)}$，比较 $b,c$ 的大小。

**解** 由

$$\begin{aligned}c&=\frac{1-\tan 40^\circ}{1+\tan 40^\circ}=\tan(45^\circ-40^\circ)=\tan 5^\circ=\frac{1-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ},\\ b&=\frac{1}{2(\cos 80^\circ-2\cos^2 50^\circ+1)}=\frac{1}{2(\cos 80^\circ-\cos 100^\circ)}=\frac{1}{4\cos 80^\circ}=\frac{1}{4\sin 10^\circ},\end{aligned}$$

得

$$c-b=\frac{3-4\cos 10^\circ}{4\sin 10^\circ}<\frac{3-4\cos 15^\circ}{4\sin 10^\circ}=\frac{3-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4\sin 10^\circ}<0,$$

故 $c<b$。 □

**题目 2.1.5.** 若 $p_1,p_2,p_3$ 为非负实数，试证明:

$$\sqrt{1+p_1}+\sqrt{1+p_2}+\sqrt{1+p_3}\geq 1+\sqrt{1+p_1+p_2+p_3},$$

并指出等号何时成立。

**证明** 设

$$f(x)=\sqrt{1+p_1}+\sqrt{1+p_2}-1+\sqrt{1+x}-\sqrt{1+p_1+p_2+x},$$

则

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+p_1+p_2+x}},$$

因为 $p_1,p_2$ 非负，故当 $x\geq 0$ 时有 $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+p_1+p_2+x}}\geq 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不减，由于 $p_3\in[0,+\infty)$，所以

$$\begin{aligned}f(p_3)\geq f(0)&=\sqrt{1+p_1}+\sqrt{1+p_2}-1+\sqrt{1}-\sqrt{1+p_1+p_2}\\&=\sqrt{1+p_1}+\sqrt{1+p_2}-\sqrt{1+p_1+p_2}\\&=\sqrt{1+p_1+1+p_2+2\sqrt{(1+p_1)(1+p_2)}}-\sqrt{1+p_1+p_2}>0,\end{aligned}$$

故原不等式成立，此式取不到等号。 □

**kuing 评注:** 事实上，原不等式右边可以再加 1，即可加强为

$$\sqrt{1+p_1}+\sqrt{1+p_2}+\sqrt{1+p_3}\geq 2+\sqrt{1+p_1+p_2+p_3},$$

简单的证明方法可以先证二元情形，从而可得三元以及 $n$ 元情形。具体地，先证对任意非负实数 $x,y$ 有

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}\geq 1+\sqrt{1+x+y},$$

上式两边平方即可证得，此处从略。由此式，即得当 $x_i\geq 0, i=1,2,\cdots,n$ 时有

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\sqrt{1+x_3}+\cdots+\sqrt{1+x_n}&\geq 1+\sqrt{1+x_1+x_2}+\sqrt{1+x_3}+\cdots+\sqrt{1+x_n}\\&\geq 2+\sqrt{1+x_1+x_2+x_3}+\cdots+\sqrt{1+x_n}\\&\geq\cdots\geq n-1+\sqrt{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}。\end{aligned}$$

更一般地，对于凸函数，都有类似的结论。

## 2.2 由 2011 新课标卷（理）21 题谈求导受阻后的常用策略——窦国栋

在解决函数压轴题时，常常需要构造新函数，并对其求导，以达到解决问题的目的，但近几年高考有许多题目出现了对构造的新函数求导不能解决问题的现象，主要表现为导函数的零点不易求出，进而无法解决问题。针对这一问题下面介绍几种常用的方法，希望对大家有所帮助。

### 1. 仅对部分解析式求导

有的题目，如果对整个解析式求导，导函数结构繁杂不利于求出其零点，若能化简成几个因式乘积或商的结构，仅对不易判定正负的部分求导，可以达到简化导函数的目的。

**例 2.2.1.** （2011 新课标卷理 21）已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$。

（1）求 $a$、$b$ 的值；

（2）如果当 $x>0$，且 $x\neq 1$ 时，$f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}$，求 $k$ 的取值范围。

**分析** （1）送分，易得 $a=b=1$；（2）如果对 $f(x)-\left(\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}\right)=\dfrac{1}{1-x^2}\left(2\ln x+\dfrac{(k-1)(x^2-1)}{x}\right)$ 直接求导，结构复杂，根本求不出导函数的零点，即使是二次求导也很难解决，但由于 $\dfrac{1}{1-x^2}$ 的正负易判定，所以只需对后半部分 $2\ln x+\dfrac{(k-1)(x^2-1)}{x}$ 求导即可。

**解** （1）略；

（2）由（1）知 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}+\dfrac{1}{x}$，所以

$$f(x)-\left(\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}\right)=\frac{1}{1-x^2}\left(2\ln x+\frac{(k-1)\left(x^2-1\right)}{x}\right),$$

令 $h(x)=2\ln x+\dfrac{(k-1)(x^2-1)}{x}\ (x>0)$，则

$$h'(x)=\frac{(k-1)(x^2+1)+2x}{x^2}=\frac{(k-1)x^2+2x+(k-1)}{x^2}。$$

（i）当 $k\geq 1$ 时，$\Delta=4-4(k-1)^2>0$ 恒成立，所以 $h'(x)>0$，又 $h(1)=0$，故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，$\dfrac{1}{1-x^2}<0$，所以 $\dfrac{1}{1-x^2}h(x)<0$，与题设矛盾；

（ii）当 $k<1$ 时

①当 $\Delta=2^2-4(k-1)^2\leq 0$，即 $k\leq 0$ 时，$h'(x)<0$。又 $h(1)=0$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，可得 $\dfrac{1}{1-x^2}h(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，可得 $\dfrac{1}{1-x^2}h(x)>0$。从而当 $x>0$，且 $x\neq 1$ 时，$f(x)-\left(\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}\right)>0$，即 $f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}$；

②当 $\Delta=2^2-4(k-1)^2>0$，即 $0<k<1$。由 $(k-1)x^2+2x+(k-1)=0$ 得

$$x_1=\frac{1-\sqrt{1-(1-k)^2}}{1-k},\ x_2=\frac{1+\sqrt{1-(1-k)^2}}{1-k},$$

易证 $0<x_1<1<x_2$，所以 $x\in(x_1,1)$ 时，$h'(x)>0$，而 $h(1)=0$，故当 $x\in(x_1,1)$ 时，$h(x)<0$，可得 $\dfrac{1}{1-x^2}h(x)<0$，与题设矛盾。

综合得，$k$ 的取值范围为 $(-\infty,0]$。 □

**2. 二次求导**

有的函数表达式，对其进行一次求导，无法求出其导函数的零点，需要对其导函数（也可能是导函数的一部分）进行第二次求导，通过第二次求导来判定第一次求导的导函数的正负，进而判定原函数的增减（如果还是无法解决有可能再进行第三次求导，但高中阶段二次求导学生掌握就已经很吃力了）。

**例 2.2.2.** （2010 新课标卷 21）设函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$。
（1）若 $a = 0$，求 $f(x)$ 的单调区间；
（2）若当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \geq 0$，求 $a$ 的取值范围。

**解** （1）略；
（2）因为 $f'(x) = e^x - 1 - 2ax$，所以 $f''(x) = e^x - 2a$。

（i）当 $a \leq \dfrac{1}{2}$ 时，$f''(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立，所以 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增，$f'(x) \geq f'(0) = 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增，$f(x) \geq f(0) = 0$，所以 $a \leq \dfrac{1}{2}$ 符合题意；

（ii）当 $a > \dfrac{1}{2}$ 时，在 $[0, \ln 2a)$ 上 $f''(x) < 0$，所以 $f'(x)$ 在 $[0, \ln 2a)$ 上递减，$f'(x) \leq f'(0) = 0$，所以在 $[0, \ln 2a)$ 上也是递减，$f(x) < f(0) = 0$，所以 $a > \dfrac{1}{2}$ 不符合题意。 □

**3. 先找充分条件，再验证必要性**

吴剑版主在《数学空间》第 3 期给出了“用充分条件”和“用必要条件”解题两种方法，并且认为第二种方法是通法（详见《数学空间》第 3 期）。笔者教学实践中发现第二种方法难以实行，一是学生不理解为什么“先找必要性解题”，二是洛必达法则学生不易掌握（常常是生吞活剥的记忆），而第一种方法学生易学易懂易用，很受学生欢迎。

**例 2.2.3.** （2007 全国 1 理 20）设函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$。
（1）证明：$f(x)$ 的导数 $f'(x) \geq 2$；
（2）若对所有 $x \geq 0$ 都有 $f(x) \geq ax$，求 $a$ 的取值范围。

**解** （1）略；
（2）令 $g(x) = f(x) - ax$，则 $g'(x) = f'(x) - a = e^x + e^{-x} - a$，注意到 $g(0) = 0$。

（i）（先找充分条件）当 $g'(x) = f'(x) - a = e^x + e^{-x} - a \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立，即 $a \leq e^x + e^{-x}$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立，此时 $a \leq 2$。这时 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数，所以，$g(x) \geq g(0)$，即 $f(x) \geq ax$。所以 $a \leq 2$ 满足题意。下面只需证明 $a > 2$ 不满足题意即可。

（ii）（再验证必要性）若 $a > 2$，方程 $g'(x) = 0$ 的正根为 $x_1 = \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$，此时，若 $x \in (0, x_1)$，则 $g'(x) < 0$，故 $g(x)$ 在该区间为减函数。所以，$x \in (0, x_1)$ 时，$g(x) < g(0) = 0$，即 $f(x) < ax$，与题设 $f(x) \geq ax$ 相矛盾。

综上，满足条件的 $a$ 的取值范围是 $(-\infty, 2]$。 □

**4. 调整结构再求导**

有的题目直接构造函数求导，导函数结构复杂，若对其表达式进行一定的变形，则有利于我们求导。

**例 2.2.4.** （2010 全国 1 理 20）已知函数 $f(x) = (x + 1)\ln x - x + 1$。
（1）若 $xf'(x) \leq x^2 + ax + 1$，求 $a$ 的取值范围；
（2）证明：$(x - 1)f(x) \geq 0$。

**分析** （1）略；（2）若设 $h(x)=(x-1)f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，则

$$h'(x)=2x\ln x+\frac{x^2-1}{x}-2(x-1)=2x\ln x-\frac{1}{x}-x+2,$$

令 $h'(x)=0$ 就无法解出根来，故此需要变形再求导。

**解** $(x-1)f(x)\geq 0$ 即 $(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geq 0$，即

$$(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2。\tag{2.2.1}$$

（i）当 $x=1$ 时，不等式显然成立；

（ii）当 $x>1$ 时，式 (2.2.1) 可变为 $\ln x\geq \frac{x-1}{x+1}$，设 $g(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$，则

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{x(x+1)^2}>0,$$

所以 $g(x)$ 在 $x>1$ 上单调递增，又注意到 $g(1)=0$，所以当 $x>1$ 时，$g(x)>g(1)=0$，即 $\ln x-\frac{x-1}{x+1}>0$，所以当 $x>1$ 时，$(x-1)f(x)\geq 0$ 成立；

（iii）当 $0<x<1$，式 (2.2.1) 可变为 $\ln x\leq \frac{x-1}{x+1}$，仍如（ii）所设也有 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $0<x<1$ 上单调递增，又注意到 $g(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$g(x)<g(1)=0$，即 $\ln x-\frac{x-1}{x+1}<0$，所以 $\ln x<\frac{x-1}{x+1}$，又当 $0<x<1$，$x-1<0$，所以当 $0<x<1$ 时，$(x-1)f(x)\geq 0$ 成立。

综上所述，$(x-1)f(x)\geq 0$ 成立。 □

**参考文献**

[1] 吴剑.《高考常考题型分类总结（导数三）》.《数学空间》第 3 期

## 2.3　2011 年上海高考试题一道试题的高等数学背景以及变化——杜正荣

**题目 2.3.1.**（**2011 年上海高考理科 14**）已知点 $O(0,0)$、$Q_0(0,1)$ 和 $R_0(3,1)$，记 $Q_0R_0$ 的中点为 $P_1$，取 $Q_0P_1$ 和 $P_1R_0$ 中的一条，记其端点为 $Q_1$、$R_1$，使之满足 $(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$；记 $Q_1R_1$ 的中点为 $P_2$，取 $Q_1P_2$ 和 $P_2R_1$ 中的一条，记其端点为 $Q_2$、$R_2$，使之满足 $(|OQ_2|-2)(|OR_2|-2)<0$；依次下去，得到点 $P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=$ ____________________。

**命题立意**　考查新题型的阅读理解，转化能力，点和圆的位置关系，动态变化思想，对 $(|OQ_i|-2)(|OR_i|-2)<0$ 几何意义和极限概念的理解。

**思路分析 1**　构造圆 $x^2+y^2=4$ 和直线 $y=1$，通过作图和 $(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$ 可知，$|OQ_1|-2$ 与 $|OR_1|-2$ 异号，即 $|OQ_1|<2$ 与 $|OR_1|>2$，判断 $Q_1R_1=P_1R_0$，同理 $(|OQ_2|-2)(|OR_2|-2)<0$，得 $Q_2R_2=P_2R_1$，$\cdots$，$Q_nR_n=P_nR_{n-1}$，$|Q_0P_n|$ 的极限位置为 $|OP_n|=2$ 时，即 $P_n\left(\sqrt{3},1\right)$，由勾股定理求出极限值。 □

**解 1**　通过作图和 $(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$ 可知，$|OQ_1|-2$ 与 $|OR_1|-2$ 异号，即 $|OQ_1|<2$ 与 $|OR_1|>2$，判断 $Q_1R_1=P_1R_0$，同理 $(|OQ_2|-2)(|OR_2|-2)<0$，得 $Q_2R_2=P_2R_1$，$\cdots$，$Q_nR_n=P_nR_{n-1}$，$|Q_0P_n|$ 的极限位置为 $|OP_n|=2$ 时，即 $P_n\left(\sqrt{3},1\right)$，此时 $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$。 □

**思路分析 2**　根据高等数学区间套定理，数形结合，通过 $(|OQ_i|-2)(|OR_i|-2)<0$ 的几何意义，判断 $Q_nR_n=P_nR_{n-1}$，结合区间套定理极限思想确定点 $P_i$ 的最终落点解决。 □

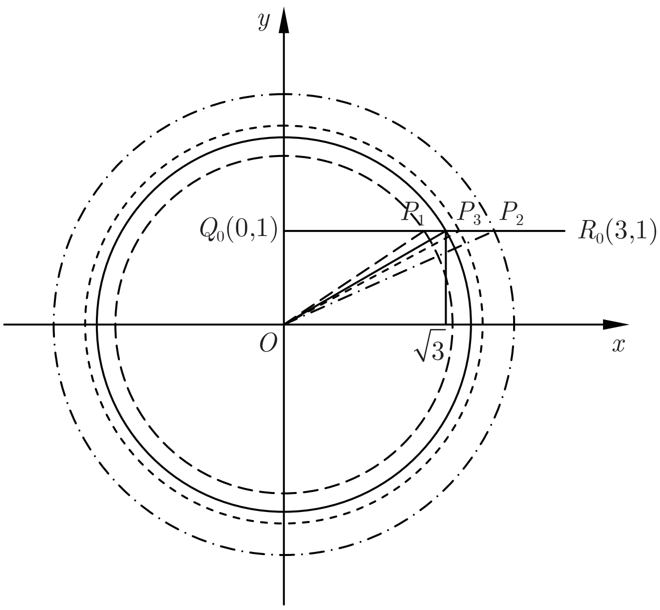



图 2.3.1

**解 2**　构造圆 $x^2+y^2=4$ 和直线 $y=1$，如图 2.3.1，通过作图和 $(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$ 可知，所取得的点列 $Q_i$、$P_i$，都在直线 $y=1$上，但是点列 $Q_i$、$P_i$ 始自始至终在一个圆内、外，对于端点列 $Q_i(a_i,1)$、$P_i(b_i,1)$ 所对应的横坐标区间 $[a_i,b_i]$（$i=1,2,3,\cdots$）来说均满足 $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq[a_3,b_3]\supseteq\cdots\supseteq[a_i,b_i]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]$，形成闭区间套，且端点分别在 $y=1$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 的交点 $P_n$ 的两边，即 $a_i\le\sqrt{3}\le b_i$，从条件看 $Q_i$、$P_i$ 无限趋近于 $P\left(\sqrt{3},1\right)$，由区间套定理可知 $P_n$ 的极限位置就是点 $P\left(\sqrt{3},1\right)$，此时 $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$。 □

**评述** 本题力求试题创新，以点和圆的位置关系的动态变化思想，孕育了高等数学中极为重要的一个定理——区间套定理的具体化朴素思想的应用，意义深远，是一道漂亮的好题，我们当初在学习高等数学实数理论的时候，理解起来极为困难的主要原因是不能找到一个具体化的问题，来帮助我们理解一般化的抽象的内涵和外延的定理，学过之后也并不十分清楚在中学教学有何作用。这道小题来得正是时候，它给我们提供了具体化、特殊化了的好素材，也提示我们回归数学的真实和本质，关注中学数学内容中所孕育的高等数学知识，尤其是极为重要的定理，思想方法往往是高校教师非常重视的衔接内容。正如本题由变量 $i$ 的特殊化、极端化 $(|OQ_i|-2)(|OR_i|-2)<0$ 的变化趋势是一个不变量，显然满足 $(|OQ_i|-2)(|OR_i|-2)=0$ 的极限位置 $P_n$，由勾股定理求出结论 $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ 就是水到渠成了。这样正规求解虽然小题大做，但是可以考查学生深刻的数学思想领悟能力，提高学生的数学能力。所以小题不小，考试提倡大题小做，小题小做，有时候需要小题大做。

**题目 2.3.2.** 数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$ 满足：$a_1=a<0$，$b_1=b>0$，且当 $k\geq 2$ 时，$a_k$ 与 $b_k$ 满足如下条件：当 $\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\geq 0$ 时，$a_k=a_{k-1}$，$b_k=\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$；当 $\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}<0$ 时，$a_k=\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$，$b_k=b_{k-1}$。

（1）求 $b_n-a_n$；

（2）求 $S_n=(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_n-a_n)$；

（3）当 $b_1>b_2>\cdots>b_n$（$n\geq 2$）时，求 $b_n$。

**解** （1）当 $\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\geq 0$ 时，$a_k=a_{k-1}$，$b_k-a_k=\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}-a_{k-1}=\dfrac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$；当 $\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}<0$ 时，$b_k-a_k=b_{k-1}-\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}=\dfrac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$ 都有 $b_k-a_k=\dfrac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$。

因此，数列 $\{b_n-a_n\}$ 是首项为 $b_1-a_1$，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，所以

$$b_n-a_n=(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}。$$

（2）$S_n=(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_n-a_n)=(b_1-a_1)\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2(b-a)\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$。

（3）当 $b_1>b_2>\cdots>b_n$（$n\geq 2$）时，$b_k\neq b_{k-1}$ $(2\leq k\leq n)$，所以 $\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\geq 0$，于是对于 $2\leq k\leq n$，$a_k=a_{k-1}$，$b_k=\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$，可得 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1$，则

$$b_n-a_n=(b_1-a_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Longrightarrow a+(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}。$$ □

本题编拟就是一闭区间套作为背景的试水题。区间套定理与波莱尔（Borel）覆盖定理是数学分析中的两个很重要的基本定理，区间套定理常常用于把某区间上满足的性质采取对分区间法归结为某点邻域中的“局部”性质，而波莱尔覆盖定理则用来将某点邻域中的“局部”性质扩充到整个区间上去。在方法上，它们是从两个不同的方面揭示了整体（区间）与部分（点的邻域）间的关系。首先区间套定理它是实数系的基本定理：设 $[a_n,b_n]$ 是数轴上的一串区间，它们满足：

（1）$[a_n,b_n]\supset[a_{n-1},b_{n-1}]$（$n=1,2,3,\cdots$）；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$。

则存在唯一实数 $m$，使得 $m\in[a_n,b_n]$，即 $m\in\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=m$。对于数列的收敛性原则作了本质性的阐述。其次，近几年各地的高考试题中很多次涉及这类问题，所以应该引起我们的重视，这对教师的数学素养提出了更高的要求。作为实数系的基本定理，从闭区间套定理与波莱尔定理到维尔斯特拉斯

（Bolzano-Weierstrass）定理到确界存在定理到单调有界数列收敛定理到 Cauchy 收敛定理都是对实数基本空间性质的刻画，其实它们相互之间都是等价的。

# 能力提升

## 3.1 实指数“幂平均三角形”的一条共性——李明，孙世宝，朱世杰

### 一、研究背景

文 [1] 定义了四种平均三角形，即三边满足下列等式之一的三角形：

$$b=\frac{a+c}{2}; \tag{3.1.1}$$

$$b=\sqrt{ac}; \tag{3.1.2}$$

$$b=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}; \tag{3.1.3}$$

$$b=\frac{2ac}{a+c}。 \tag{3.1.4}$$

更具体地，称满足 (3.1.1)、(3.1.2)、(3.1.3)、(3.1.4) 式的 $\triangle ABC$ 依次为算术平均三角形、几何平均三角形、平方平均三角形、调和平均三角形。

文 [1] 证明了这四类平均三角形有一条共性，即 $0<B\le\frac{\pi}{3}$（当且仅当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时，等号成立）。文 [2] 进一步定义了更广的整指数“幂平均三角形”的概念，即

如果 $\triangle ABC$ 的三边满足等式 $b=\begin{cases}\left(\dfrac{a^n+c^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} & n\in\mathbb{Z},\ n\ne 0,\\ \sqrt{ac} & n=0,\end{cases}$ 则称 $\triangle ABC$ 为整指数“幂平均三角形”。并证明了结论:

（1）当 $n\le 4$ 时，整指数“幂平均三角形”恒有共性 $0<B\le\frac{\pi}{3}$ 成立;

（2）当 $n>4$ 时，整指数“幂平均三角形”不具有共性 $0<B\le\frac{\pi}{3}$。

### 二、实指数“幂平均三角形”的一条共性及证明

现在我们将整指数“幂平均三角形”的概念中的 $n\in\mathbb{Z}$ 改变为 $n\in\mathbb{R}$，其余不变，我们便得到实指数“幂平均三角形”$\triangle ABC$。我们将把文 [2] 的结论推广如下:

（1）当 $n\le 4$ 时，实指数“幂平均三角形”恒有共性 $0<B\le\frac{\pi}{3}$ 成立; （2）当 $n>4$ 时，实指数“幂平均三角形”不具有共性 $0<B\le\frac{\pi}{3}$。

**证明** 文 [2] 已经证明，当 $n=4$ 时，“幂平均三角形”共性 $0<B\le\frac{\pi}{3}$ 恒成立，再结合“幂平均关于实指数 $n$ 单调递增”的性质，于是当 $n\le 4$ 时，我们便有:

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-\left(\dfrac{a^n+c^n}{2}\right)^{\frac{2}{n}}}{2ac}\ge\frac{a^2+c^2-\left(\dfrac{a^4+c^4}{2}\right)^{\frac{2}{4}}}{2ac}\ge\frac{1}{2}。$$

于是，$0<B\le\frac{\pi}{3}$，结论（1）得证。

为证明结论（2），我们只需证明如下反例：当实指数 $n>4$ 时，对于每一个给定的 $n$，都存在与之相应的幂平均三角形 $a=1$，$c=\frac{n}{4}>1$，$b=\left(\frac{a^n+c^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{1+c^{4c}}{2}\right)^{\frac{1}{4c}}$，使得 $B>\frac{\pi}{3}$。

欲证 $B>\frac{\pi}{3}$，只需证明 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1+c^2-\left(\frac{1+c^{4c}}{2}\right)^{\frac{1}{2c}}}{2c}>\frac{1}{2}$，即证:

$$2\left(c^2-c+1\right)^{2c}<c^{4c}+1\text{（}c>1\text{）。}$$

令 $c=1+x$，$x>0$，于是

$$\begin{aligned}
&2\left(c^2-c+1\right)^{2c}<c^{4c}+1\text{（}c>1\text{）}\\
\Longleftrightarrow\ &\left(1+2x+x^2\right)^{2+2x}+1>2\left(x^2+x+1\right)^{2+2x}\\
\Longleftrightarrow\ &\left(1+\frac{x}{x^2+x+1}\right)^{2+2x}+\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^{2+2x}}>2\text{，}
\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

由 Bernoulli 不等式

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{x^2+x+1}\right)^{1+2x}&>1+\frac{x\left(1+2x\right)}{x^2+x+1}\text{，}\\
\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^{2x}}&>1-2x\left(x^2+x\right)\text{，}
\end{aligned}$$

所以要证明 (3.1.5) 成立，只要证明

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x}{x^2+x+1}\right)\left(1+\frac{x\left(1+2x\right)}{x^2+x+1}\right)+\frac{1-2x\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}>2\\
\Longleftrightarrow\ &\left(x^2+2x+1\right)\left(3x^2+2x+1\right)+1-2x^2-2x^3>2\left(x^2+x+1\right)^2\\
\Longleftrightarrow\ &x^4+2x^3>0\text{。}
\end{aligned}$$

□

**参考文献**

[1] 李明．四类平均三角形的一条共性．数学教学，2008 年第 6 期。
[2] 杨志明．也谈四类平均三角形的一条共性．不等式研究通讯，2009 年第 1 期。

## 3.2 两类圆内接五边形的面积公式及一个猜测[1]——李明，何万程

**摘要** 本文定义了两类边长出现重复的圆内接五边形——“钻石五边形”和“对称五边形”，并分别给出了二者的面积公式，还证明了这两个公式对二者的同构形仍然成立。本文最后提出了圆内接五边形面积近似公式的一个猜测。

### 一、引言

1991 年，王振和陈计老师用 Galois 理论证实了一个命题，即：圆内接五边形的面积一般不能用边长的根式表示（参考文 [1]）。但是，对于某些边长出现重复的圆内接五边形，我们仍能给出其根式形式或三角形式的面积公式。比如正五边形，设其边长为 $a$，则其面积 $F=\dfrac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$。除此之外，其他特殊类型的圆内接五边形及其面积公式似乎尚未被研究发表。本文将定义两类边长出现重复的圆内接五边形——“钻石五边形”和“对称五边形”，并分别给出二者的面积公式。

### 二、“钻石五边形”的定义及其面积公式

**定义 3.2.1.** 称边长依次为 $b,a,a,a,b$ 的圆内接五边形为“钻石五边形”（如图 3.2.1）。

下面来求“钻石五边形”的面积。显然，对角线 $AC$ 与 $AD$ 相等，所以可设 $AC=AD=x$。由于 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 有相同的外接圆半径，于是可列出方程

$$\frac{ax^2}{4F_{\triangle ACD}}=\frac{abx}{4F_{\triangle ABC}},$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{4x^2-a^2}}=\frac{ab}{\sqrt{\left((a+b)^2-x^2\right)\cdot\left(x^2-(a-b)^2\right)}}。$$

化简整理得

$$\left(x^2-b^2\right)\left(x^2+bx-a^2\right)\left(x^2-bx-a^2\right)=0, \tag{3.2.1}$$

由图 3.2.1，易知 $\angle B$ 是钝角，所以 $x\in\left(\sqrt{a^2+b^2},a+b\right)$，于是 $x^2-b^2>0$，$x^2+bx-a^2>0$，于是方程 (3.2.1) 可简化为

$$x^2-bx-a^2=0, \tag{3.2.2}$$

在区间 $\left(\sqrt{a^2+b^2},a+b\right)$ 内解方程 (3.2.2) 得

$$x=\frac{b+\sqrt{b^2+4a^2}}{2},$$

再结合 (3.2.2) 的变形 $x^2=bx+a^2$，可得“钻石五边形”的面积

$$\begin{aligned}F&=F_{\triangle ACD}+2F_{\triangle ABC}\\&=\frac{a}{4}\sqrt{4x^2-a^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left((a+b)^2-x^2\right)\cdot\left(x^2-(a-b)^2\right)}\\&=\frac{a}{4}\sqrt{4\left(bx+a^2\right)-a^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left((a+b)^2-\left(bx+a^2\right)\right)\cdot\left(\left(bx+a^2\right)-(a-b)^2\right)}\\&=\frac{a}{4}\sqrt{3a^2+2b^2+2b\sqrt{b^2+4a^2}}+\frac{b}{4}\sqrt{12a^2-2b^2+2b\sqrt{b^2+4a^2}}。\end{aligned}$$

[1]该文曾于 2009 年获“第七届全国初等数学研究学术交流会论文二等奖”，曾发表于《中国初等数学研究》2011 卷。

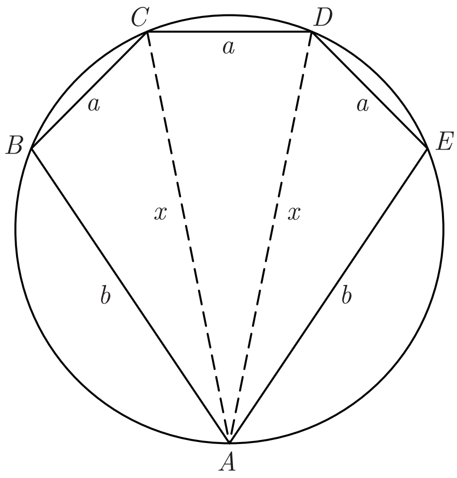



图 3.2.1

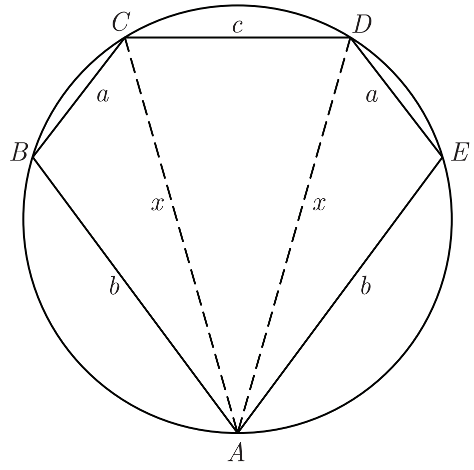



图 3.2.2

**三、“对称五边形”的定义及其面积公式**

**定义 3.2.2.** 称边长依次为 $b, a, c, a, b$（$c < 2a + 2b$）的圆内接五边形为“对称五边形”（如图 3.2.2）。

下面来求“对称五边形”的面积。显然，“对称五边形”是“钻石五边形”的推广。同样，对角线 $AC$ 与 $AD$ 仍然相等，所以可设 $AC = AD = x$。由于 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 有相同的外接圆半径，于是可列出方程

$$\frac{cx^2}{4F_{\triangle ACD}} = \frac{abx}{4F_{\triangle ABC}},$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{4x^2 - c^2}} = \frac{ab}{\sqrt{\left((a+b)^2 - x^2\right) \cdot \left(x^2 - (a-b)^2\right)}}。$$

化简整理得

$$\left(x^3 - \left(a^2 + b^2\right) x + abc\right) \cdot \left(x^3 - \left(a^2 + b^2\right) x - abc\right) = 0。 \tag{3.2.3}$$

由图 3.2.2，易知 $\angle B$ 是钝角，所以 $x \in \left(\max\left\{\sqrt{a^2 + b^2}, \frac{c}{2}\right\}, a + b\right)$，于是

$$x^3 - \left(a^2 + b^2\right) x + abc = x\left(x^2 - \left(a^2 + b^2\right)\right) + abc > 0,$$

于是方程 (3.2.3) 可简化为

$$x^3 - \left(a^2 + b^2\right) x - abc = 0。 \tag{3.2.4}$$

记 $f(x) = x^3 - \left(a^2 + b^2\right) x - abc = x\left(x^2 - \left(a^2 + b^2\right)\right) - abc$。显然 $f(x)$ 在区间 $\left(\left\{\sqrt{a^2 + b^2}, \frac{c}{2}\right\}, a + b\right)$ 上是增函数，且容易验证 $f(x)$ 在此区间两端点异号，所以方程 (3.2.4) 在区间 $\left(\left\{\sqrt{a^2 + b^2}, \frac{c}{2}\right\}, a + b\right)$ 上有唯一正实根。由一元三次方程的求根公式（可参考《数学空间》2011 年第 5 期中《一元三次方程和一元四次方程的解》一文或文 [2]），我们可得方程的根如下：

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{abc}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\dfrac{abc}{2} - \sqrt{\Delta}} & \Delta \geq 0\,, \\ \dfrac{2\sqrt{3\left(a^2 + b^2\right)}}{3} \cos\left(\dfrac{1}{3} \arccos \dfrac{3abc\sqrt{3\left(a^2 + b^2\right)}}{2\left(a^2 + b^2\right)^2}\right) & \Delta < 0, \end{cases}$$

其中 $\Delta=\left(\dfrac{abc}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a^2+b^2}{3}\right)^3$，于是，“对称五边形”的面积

$$F=F_{\triangle ACD}+2F_{\triangle ABC}=\frac{c}{4}\sqrt{4x^2-c^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left((a+b)^2-x^2\right)\cdot\left(x^2-(a-b)^2\right)}。$$

**四、两类圆内接五边形同构形的面积公式**

**定义 3.2.3.** 称两个边长相同、边的排列次序不同的圆内接 $n$ 边形互为同构形。

我们要给出的结论是：“钻石五边形”同构形与“钻石五边形”有相同的面积公式；“对称五边形”同构形与“对称五边形”也有相同的面积公式。

事实上，我们可以得到更广的结论：同构的圆内接 $n$ 边形面积相等。证此结论需借助如下引理（该引理是判定三角形全等的“边边边”定理的推广，其证明由智星论坛 bbs.kinotown.com 成员虚竹子完成，并公开在该论坛）。

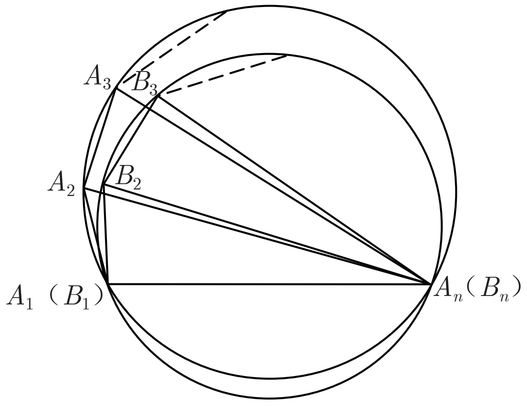



图 3.2.3

**引理 3.2.1.** 两个对应边长相等的圆内接凸 $n$ 边形全等。

**证明** 以 $P$ 表示凸$n$边形 $A_1A_2\cdots A_n$，$Q$ 表示凸 $n$ 边形 $B_1B_2\cdots B_n$，令 $R$ 和 $r$ 分别为 $P$ 和 $Q$ 的外接圆半径。如果 $P$ 和 $Q$ 的外接圆半径不相等，设 $R>r$。不妨设 $A_1A_n$ 和 $B_1B_n$ 分别为 $P$ 和 $Q$ 的 最长边。由于外接圆半径愈大，等长的弦所张成的圆心角（及跟圆心同侧的圆周角）愈小，所以对于 $i=2,3,\cdots,n-1$，由于 $R>r$，故 $\angle A_{i-1}A_nA_i<\angle B_{i-1}B_nB_i$，于是 $\angle A_1A_nA_i=\angle A_1A_nA_2+\angle A_2A_nA_3+\cdots+\angle A_{i-1}A_nA_i<\angle B_1B_nB_2+\angle B_2B_nB_3+\cdots+\angle B_{i-1}B_nB_i=\angle B_1B_nB_i$，同理 $\angle A_nA_1A_i<\angle B_nB_1B_i$。

如图 3.2.3，把 $A_1A_n$ 移至跟 $B_1B_n$ 重合。考虑 $\triangle A_1A_nA_i$ 和 $\triangle B_1B_nB_i$（$i=2,3,\cdots,n-1$），由上可知，$\triangle A_1A_nA_i$ 被 $\triangle B_1B_nB_i$ 覆盖，即顶点 $A_i$ 是 $\triangle B_1B_nB_i$ 的内点，当然也就是凸 $n$ 边形 $Q$ 的内点。因此 $P$ 完全被 $Q$ 所覆盖，且 $P$ 不与 $Q$ 重合。根据凸多边形的周界性质，凸 $n$ 边形 $P$ 的周长严格小于凸 $n$ 边形 $Q$ 的周长，这与两者对应边长相等的已知条件矛盾。所以 $P$ 和 $Q$ 的外接圆半径相等，并因此 $P$ 和 $Q$ 全等。 □

现在证明上面提及的“更广的结论”。

**证明** 记 $A$ 和 $B$ 是两个同构的圆内接 $n$ 边形，以 $A$ 的外接圆圆心 $O$ 为顶点，以 $A$ 的各边为底边可形成 $n$ 个等腰三角形，在圆 $O$ 中将这 $n$ 个等腰三角形调换位置按顶点在 $O$ 处重新拼接，使得各底边与 $B$ 中各边的排列次序相同。记这个由 $A$ 生成，与 $B$ 中各边排列次序相同的圆内接 $n$ 边形为 $C$，由于这种变换是等积变换，所以 $C$ 和 $A$ 面积相等。又由于 $C$ 和 $B$ 是两个对应边长相等的圆内接凸 $n$ 边形，根据引理 3.2.1，二者全等，所以面积相等。于是 $A$ 和 $B$ 的面积相等。 □

## 五、圆内接五边形面积近似公式猜测

对于边长给定的圆内接五边形，若不计边的排列次序，按照边的重复度可将其分成七类:（1）$a, a, a, a, a$;（2）$a, a, a, a, b$;（3）$a, a, a, b, b$;（4）$a, a, a, b, c$;（4）$a, a, b, b, c$;（6）$a, a, b, c, d$;（7）$a, b, c, d, e$。

其中，（1）、（3）、（5）的面积公式我们已经知道了，（2）只不过是（5）的特例。求（4）的面积公式涉及对角线的一元四次方程，理论上可求，但公式过于复杂，不宜推导，宜具体数据具体分析。（6）和（7）均涉及对角线的一元五次以上的方程，没有统一的根式面积公式（见文 [1]）。为了弥补（6）和（7）的这种遗憾，笔者给出圆内接五边形面积近似公式的一个猜测。

**猜测** 记 $F$ 是边长为 $a, b, c, d, e$ 的圆内接五边形的面积，记 $F^* = \dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)}}{s + 0.038\min\{a, b, c, d, e\}}$（其中 $s = \dfrac{a+b+c+d+e}{2}$）。猜测 $F^*$ 是 $F$ 的近似值，且相对误差小于 0.3%。亦即猜测 $\dfrac{|F^* - F|}{F} < 0.003$ 成立。

### 参考文献

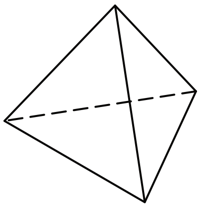
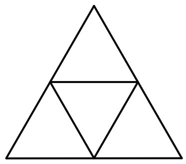
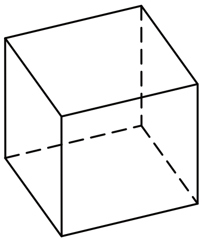
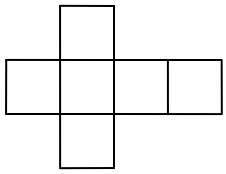
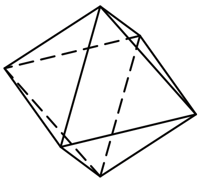
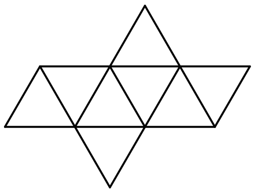
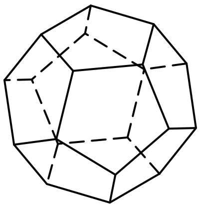
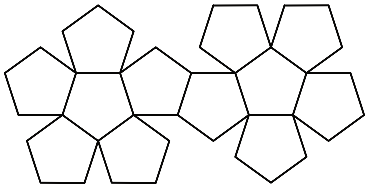
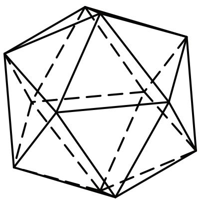
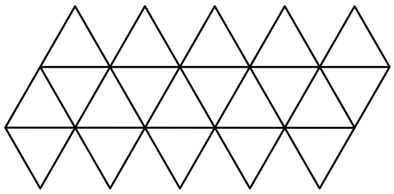
[1] 王振，陈计．$n$（$\geq 5$）边形的最大面积一般不能用边长的根式表示 [J]．成都大学自然科学学报，1991，1:38–41。

[2] H．奈茨主编．《数学公式》[M]．石胜文译．北京：海洋出版社．1983 年，45。

## 3.3 正多面体的构造法与几何量的计算——何万程

首先对正多面体的基本情况列出表 3.3.1，让大家对其情况有个初步了解。

**表 3.3.1　正多面体直观图、展开图、顶点数、面数、棱数**

| 名称 | 直观图 | 展开图 | 顶点数 | 面数 | 棱数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 正四面体 |  |  | 4 | 4 | 6 |
| 正六面体 |  |  | 8 | 6 | 12 |
| 正八面体 |  |  | 6 | 8 | 12 |
| 正十二面体 |  |  | 20 | 12 | 30 |
| 正二十面体 |  |  | 12 | 20 | 30 |

### 一、正多面体的构造法

**定义 3.3.1.** 有两个面（底面）在两个互相平行的平面内且为全等的多边形，其余各面（侧面）全是三角形的多面体称为反棱柱。若底面是全等的正多边形，侧面是全等的正三角形，这种反棱柱称为正反棱柱。

**正反棱柱的构造法**

如图 3.3.1 所示，作一个高与棱长的比是 $\sqrt{2\cos\dfrac{180^\circ}{n}+1}$ 的正 $2n$ 棱柱 $A_1A_2\cdots A_{2n}$-$B_1B_2\cdots B_{2n}$，则点 $A_1, A_3, \cdots, A_{2n-1}, B_2, B_4, \cdots, B_{2n}$ 就是侧面是正三角形正 $n$ 反棱柱的所有顶点。

**证明**　因为 $n$ 边形 $A_1A_3\cdots A_{2n-1}$、$B_2B_4\cdots B_{2n}$ 是边长相等的正 $n$ 边形，并且所得的多面体有外接球，这个外接球就是正 $2n$ 棱柱 $A_1A_2\cdots A_{2n}$-$B_1B_2\cdots B_{2n}$ 的外接球。设正 $2n$ 棱柱 $A_1A_2\cdots A_{2n}$-$B_1B_2\cdots B_{2n}$ 的棱

长是 1，正 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的中心是 $P$，正 $2n$ 边形 $B_1B_2\cdots B_{2n}$ 的中心是 $Q$，则

$$A_1A_3=2\cos\frac{90^\circ}{n}，A_1P=B_2Q=\frac{1}{2}\csc\frac{90^\circ}{n}，PQ=\sqrt{2\cos\frac{180^\circ}{n}+1},$$

所以

$$A_1B_2=\sqrt{A_1P^2+B_2Q^2+PQ^2-2\cdot A_1P\cdot B_2Q\cdot\cos\frac{180^\circ}{n}}=2\cos\frac{90^\circ}{n},$$

因此所得多面体的棱长都是 $2\cos\dfrac{90^\circ}{n}$，即所得多面体的三角形都是正三角形，并且所得多面体有内棱切球。因为相邻两个正多边形的中心与公共棱中点的连线所成的角是这两个正多边形所夹二面角的平面角，正 $2n$ 棱柱的中心到同类型的正多边形的距离相等，所以所得多面体的正三角形和相邻的正 $n$ 边形、两相邻的正三角形所夹的二面角的平面角分别相等，所以所得的多面体是侧面是正三角形正 $n$ 反棱柱。 □

在实际作图中，可以不使用上面的计算结果，直接作两个中心重合边长是 $a$ 的正 $n$ 边形，这些顶点构成正 $2n$ 边形，边长是 $b$。把其中一个正 $n$ 边形的顶点按垂直于正 $2n$ 边形所在面的方向上升 $\sqrt{a^2-b^2}$，连同没上升的正 $n$ 边形的顶点一起就构成侧面是正三角形正 $n$ 反棱柱。

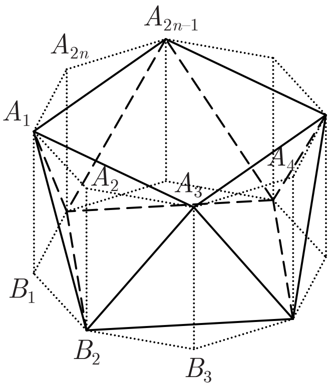



图 3.3.1

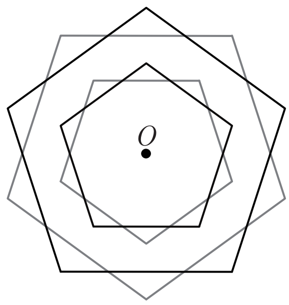



图 3.3.2

下面的直棱柱和正棱锥的构造法里包含了正四面体和正六面体的构造法，这些多面体的构造法证明比较简单，这里就省略了它们的证明。

**（1）直棱柱**

把底面的顶点按垂直于底面的方向上升 $a$，得到的点和底面的顶点一起就是侧棱长度是 $a$ 的直棱柱的顶点。正六面体可以使用这种构造法。

**（2）正棱锥**

作底面的正多边形的中心 $O$，设外接圆半径是 $R$，把点 $O$ 按垂直底面的方向上升 $\sqrt{a^2-R^2}$，得到的点和底面的顶点一起就是侧棱长度是 $a$ 的正棱锥的顶点。正四面体可以使用这种构造法。

**（3）正八面体**

作三条两两互相垂直且相交于同一点 $O$ 的直线，分别在这三条直线上各取两个点到点 $O$ 的距离相等，得六个点，这六个点就是正八面体的六个顶点。

**（4）正十二面体**

如图 3.3.2 所示，以点 $O$ 为中心作大、小两组正五边形，这两组边平行的正五边形的顶点构成大、小两个正十边形，且小正五边形的内切圆直径与大正五边形的外接圆半径相等，小正五边形边长是 $a$，一个顶点到对边距离是 $b$，大、小两组正五边形的外接圆半径分别是 $R_2$、$R_1$、小正五边形的内切圆半径是 $r_1$。黑色小正五边形不动，作为底面。黑色大正五边形的顶点按垂直底面的方向上升

$$h_1=\sqrt{a^2-(R_2-R_1)^2},$$

灰色大正五边形的顶点按垂直底面的方向上升

$$h_2 = \sqrt{b^2 - (R_2 - r_1)^2},$$

灰色小正五边形的顶点按垂直底面的方向上升 $h_1 + h_2$。这十五个点和底面五个点一起构成了正十二面体的二十个顶点。

**（5）正二十面体**

在侧面是正三角形的正五反棱柱两个正五边形面上各补上一个侧面是正三角形的正五棱锥，即得正二十面体。

## 二、正多面体的几何量计算

与多面体各棱均相切的球称为该多面体的内棱切球。计算正多面体的几何量需要用到三面角的第一余弦定理以及一些特殊角的三角函数值。三面角第一余弦定理可参考《数学空间》2011 年第 4 期中《立体几何中的角和异面直线的距离》一文，特殊角三角函数值可参考《数学空间》2011 年第 3 期中《某些特殊角的三角函数值》一文。

**例 3.3.1.** 正多面体的棱长是 1，求各种正多面体的二面角的平面角 $\theta$ 或其余弦值，全面积 $S$，体积 $V$，外接球的半径 $R$，内切球的半径 $r$，内棱切球的半径 $\rho$。

**解　（1）正四面体**

正四面体在几何量很容易求，具体计算留给读者，结果如下：

$$\cos\theta = \frac{1}{3}，S = \sqrt{3}，V = \frac{\sqrt{2}}{12}，R = \frac{\sqrt{6}}{4}，r = \frac{\sqrt{6}}{12}，\rho = \frac{\sqrt{2}}{4}。$$

**（2）正六面体**

正六面体的几何量很容易求，具体计算留给读者，结果如下：

$$\theta = 90^\circ，S = 6，V = 1，R = \frac{\sqrt{3}}{2}，r = \frac{1}{2}，\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}。$$

**（3）正八面体**

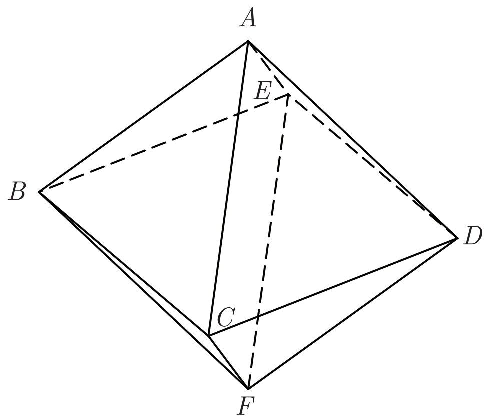



图 3.3.3

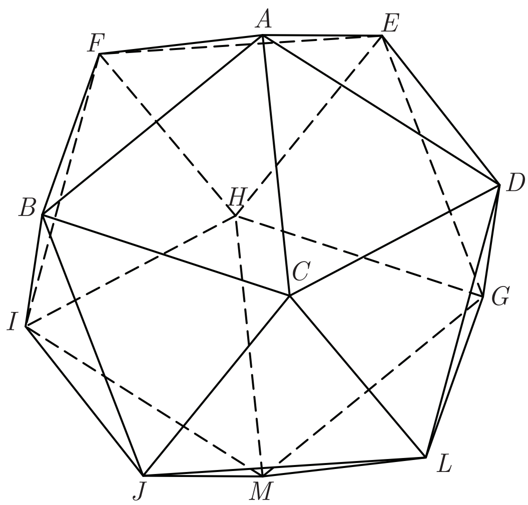



图 3.3.4

如图 3.3.3 所示，因为四边形 $BCDE$ 是正方形，所以

$$\cos\theta = \frac{\cos 90^\circ - \cos^2 60^\circ}{\sin^2 60^\circ} = -\frac{1}{3}，S = 8 \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}。$$

由于正八面体由两个正四棱锥 $A$-$BCDE$ 和 $F$-$BCDE$ 组成，并且两正棱锥体积相等，所以

$$V = 2V_{\text{四棱锥 } A\text{-}BCDE},$$

又因为棱锥 $A$-$BCDE$ 的高是 $AF$ 的一半，四边形 $ABFD$ 是正方形，所以

$$V = 2 \times \frac{1}{3} \times 1^2 \cdot \frac{AF}{2} = \frac{AF}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3},\ R = \frac{AF}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}。$$

边长是 1 的正三角形的外接圆半径 $R'$ 是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以

$$r = \sqrt{R^2 - R'^2} = \frac{\sqrt{6}}{6},\ \rho = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}。$$

**（4）正十二面体**

根据三面角第一余弦定理及三角形面积公式，得

$$\cos\theta = \frac{\cos 108^\circ - \cos^2 108^\circ}{\sin^2 108^\circ} = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ S = 12 \times 5 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin 54^\circ}{\sin 72^\circ}\right)^2 \times \sin 72^\circ = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}。$$

因为正十二面体的中心、相邻两面的中心和这两面公共棱的中点共面，并且这四点共圆，设一面的内切圆半径是 $r'$，则

$$r' = \frac{1}{2}\tan 54^\circ = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10},$$

所以

$$r = r'\tan\frac{\theta}{2} = \frac{r'(1 - \cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20},\ \rho = r'\sec\frac{\theta}{2} = r'\sqrt{\frac{2}{1 + \cos\theta}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4},$$

并且由此得

$$R = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4},\ V = \frac{1}{3}Sr = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}。$$

**（5）正二十面体**

如图 3.3.4 所示，因为五边形 $BCDEF$ 是正五边形，所以

$$\cos\theta = \frac{\cos 108^\circ - \cos^2 60^\circ}{\sin^2 60^\circ} = -\frac{\sqrt{5}}{3},\ S = 20 \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}。$$

因为正十二面体的中心、相邻两面的中心和这两面公共棱的中点共面，并且这四点共圆，设一面的内切圆半径是 $r'$，则

$$r' = \frac{1}{2}\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以

$$r = r'\tan\frac{\theta}{2} = \frac{r'(1 - \cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12},\ \rho = r'\sec\frac{\theta}{2} = r'\sqrt{\frac{2}{1 + \cos\theta}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4},$$

并且由此得到

$$R = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},\ V = \frac{1}{3}Sr = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12}。$$

□

**表 3.3.2　棱长是 1 的正多面体几何量精确值**

| 名称 | $\boldsymbol{\theta}$ | $\boldsymbol{S}$ | $\boldsymbol{V}$ | $\boldsymbol{R}$ | $\boldsymbol{r}$ | $\boldsymbol{\rho}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 正四面体 | $\arccos\dfrac{1}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ | $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ | $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ |
| 正六面体 | $90^\circ$ | 6 | 1 | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 正八面体 | $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ | $2\sqrt{3}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ | $\dfrac{1}{2}$ |
| 正十二面体 | $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ | $3\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ | $\dfrac{15+7\sqrt{5}}{4}$ | $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}$ | $\dfrac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}$ | $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ |
| 正十二面体 | $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | $5\sqrt{5}$ | $\dfrac{15+5\sqrt{5}}{12}$ | $\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ | $\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}$ | $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ |

**表 3.3.3　棱长是 1 的正多面体几何量近似值**

| 名称 | $\boldsymbol{\theta}$ | $\boldsymbol{S}$ | $\boldsymbol{V}$ | $\boldsymbol{R}$ | $\boldsymbol{r}$ | $\boldsymbol{\rho}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 正四面体 | $70^\circ31'44''$ | 1.732050808 | 0.1178511302 | 0.6123724357 | 0.2041241452 | 0.3535533906 |
| 正六面体 | $90^\circ00'00''$ | 6.000000000 | 1.000000000 | 0.8660254038 | 0.5000000000 | 0.7071067812 |
| 正八面体 | $109^\circ28'16''$ | 3.464101615 | 0.4714045208 | 0.7071067812 | 0.4082482905 | 0.5000000000 |
| 正十二面体 | $116^\circ33'54''$ | 20.64572881 | 7.663118961 | 1.401258538 | 1.113516364 | 1.309016994 |
| 正十二面体 | $138^\circ11'23''$ | 8.660254038 | 2.181694991 | 0.9510565163 | 0.7557613141 | 0.8090169944 |

表 3.3.2 和表 3.3.3 中，$\theta$ 是二面角的平面角，$S$ 是全面积，$V$ 是体积，$R$ 是外接球的半径，$r$ 是内切球的半径，$\rho$ 是内棱切球的半径。

# 朝花夕拾

## 4.1 【封面故事】指数函数及其反函数图象的公共点——郭子伟

本期封面图来源于经典的“互为反函数的指数函数与对数函数的函数图象公共点个数问题”。

初次判断，很容易会漏掉一种情况，就是封面图的三个公共点的情形。造成这种疏漏的原因，多数在于判断时仅是徒手画出函数的大致图象，观察一下就妄下定论，想当然而出错。这种错误并不少见，甚至连命题者都犯过，具体例子参见：`http://bbs.pep.com.cn/thread-950555-1-1.html`，贴内二楼附件中还有一个动态图演示。

这也再次说明仅靠图形，缺少严谨的推理证明，是很容易出错的。然而，如果你有很好的理性思维，不过份地依赖图象，追求严密的推理证明的话，那么也很容易发现这个问题并不是你想象中那么简单。当然，这个经典问题很早就被研究透了，本文仅是作个普及。以下证明由何万程提供。

设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，考虑互为反函数的 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的函数图象公共点个数。

**（1）当 $a>1$ 时**

若 $a^x>x$，$x>0$，两边取以 $a$ 为底的对数，则有 $x>\log_a x$，于是 $a^x>\log_a x$，此时函数 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的图象没有公共点。同理可得若 $a^x<x$，函数 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的图象没有公共点。所以函数 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的图象若有公共点，其公共点必定在直线 $y=x$ 上。

构造函数 $f(x)=a^x-x$，则 $f'(x)=a^x\ln a-1$，当 $x<\log_a e$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>\log_a e$ 时 $f'(x)>0$，当 $x=\log_a e$ 时 $f'(x)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=\log_a e$ 时取得最小值 $e-\log_a e$。要使 $f(x)=0$ 有解，必须 $a\leq e^{\frac{1}{e}}$。

于是得结论：

（a）当 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 时函数 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的图象有两个公共点，都在直线 $y=x$ 上。

（b）当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时函数 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的图象只有公共点 $(e,e)$，并且公切线是 $y=x$。

（c）当 $a>e^{\frac{1}{e}}$ 时函数 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的图象无公共点。

**（2）当 $0<a<1$ 时**

首先讨论函数 $F(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 的单调性，$F(x)$ 的单调性与 $G(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调性相同，$G'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以当 $0<x<e$ 时 $F(x)$ 是严格单调增函数，当 $x>e$ 时 $F(x)$ 是严格单调减函数。

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-x)=1$，而当 $x=1$ 时 $a^x-x=a-1<0$，函数 $a^x-x$ 是严格单调减函数，所以在 $(0,1)$ 内仅有一点能使 $a^x=x$，此时两边取以 $a$ 为底的对数，得 $x=\log_a x$ 所以函数 $y=ax$ 和 $y=\log_a x$ 的图象必定有一个公共点而且只有在直线 $y=x$ 上。设 $0<b<1$，那么只有唯一的 $b$ 值满足 $a=b^{\frac{1}{b}}$，容易验证此时 $x=b$ 是方程 $a^x=\log_a x$ 的解。

构造函数 $g(x)=\ln x+x\ln a$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\ln a$，当 $0<x<-\log_a e$ 时 $g'(x)>0$，当 $x>-\log_a e$ 时 $g'(x)<0$，当 $x=-\log_a e$ 时 $g'(x)=0$，所以函数 $g(x)$ 在 $x=-\log_a e$ 时取得最大值 $-\ln(-\ln a)-1$，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$。使 $-\ln(-\ln a)-1=-2\ln(-\ln a)$ 得 $a=e^{-e}(\approx 0.065988)$。

（a）当 $0<a<e^{-e}$ 时，有 $-e\log_a e<1$，即 $-\log_a e<\dfrac{1}{e}$。又因为 $-\log_a e>0$，所以 $(-\log_a e)^{-\frac{1}{\log_a e}}<\left(\dfrac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{\log_a e}}=a$，所以 $-\log_a e<b$。因为此时方程 $g(x)=-2\ln(-\ln a)$ 有两个解，设这两个解分别是 $x_1$、$x_2$，$x_1<x_2$，则 $0<x<-\log_a e<x_1$ 时或 $x>x_2$ 时 $f'(x)>0$，$x_1<x<x_2$ 时 $f'(x)<0$，$x=x_1$ 时或 $x=x_2$ 时 $f'(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值，在 $x=x_1$ 处取得极小值。

因为 $f(-\log_a e) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{\ln(-\ln a)}{\ln a}$，构造函数 $u(a) = \ln a + a^{-\frac{1}{e}}$，则 $f(-\log_a e) > 0$ 与 $u(a) > 0$ 等价。$u'(a) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{e}a^{-\frac{1}{e}}$，当 $0 < a < e^{-e}$ 时 $u(a) < 0$，当 $a = e^{-e}$ 时 $u'(a) = 0$，$u\left(e^{-e}\right) = 0$，所以当 $0 < a < e^{-e}$ 时 $f(-\log_a e) > 0$，因此函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图象至少有两个公共点。因为函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图象必定只有一个公共点在直线 $y = x$ 上另外一个公共点关于直线 $y = x$ 的对称点也必定是函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图象的公共点，因此此时函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图象有三个公共点，并且只有一个在直线 $y = x$ 上，如图 4.1.1。

（b）当 $a = e^{-e}$ 时 $g(x) = -2\ln(-\ln a)$ 只有唯一一解，此时函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图象只有唯一公共点 $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$，并且在此点处有公切线 $x + y = \dfrac{2}{e}$。

（c）当 $a > e^{-e}$ 时 $g(x) = -2\ln(-\ln a)$ 无解，此时函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图象只有唯一公共点，并且公共点在直线 $y = x$ 上。 □

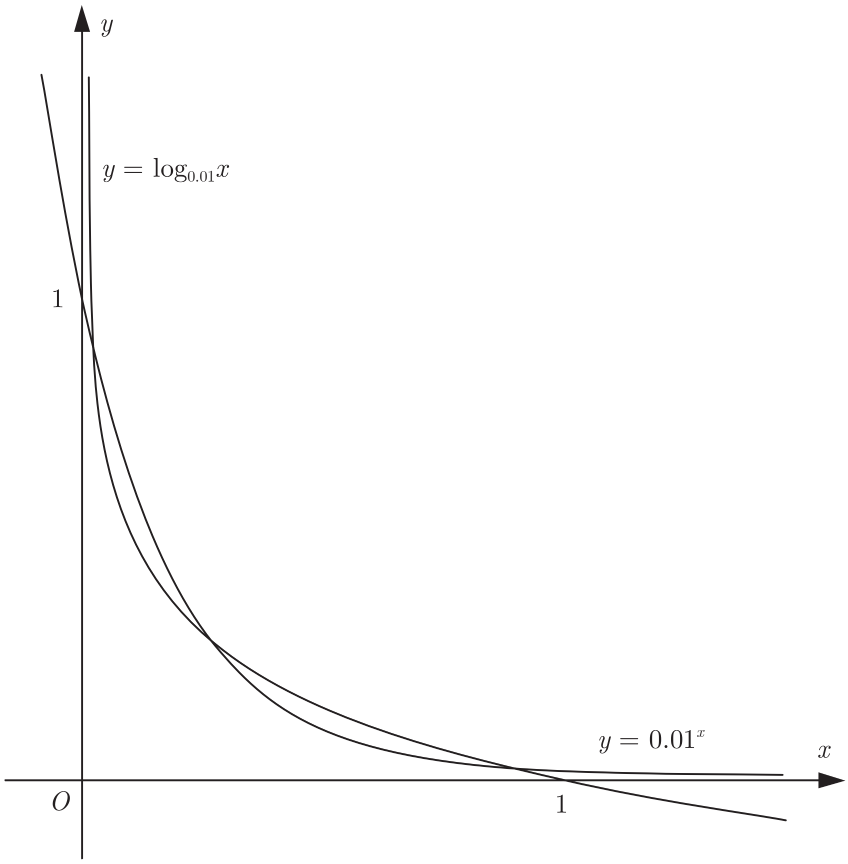



图 4.1.1

此外，对于一般的底数 $a$ 来说，公共点的坐标会是超越方程的解，而有一个经典的特殊例子，那就是当 $a = \dfrac{1}{16} = 0.0625 < e^{-e}$ 时，容易验证函数 $y = \left(\dfrac{1}{16}\right)^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{16}} x$ 的两个不在 $y = x$ 上的公共点的坐标分别为 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$，但这两个函数图形要放很大才容易看得清交点，为了看得更清楚，封面图形取了更小的值 $a = 0.01$。

本文最后，再留一个函数与其反函数交点个数问题给大家玩玩：

（1）试列举一个函数，使其与其反函数的函数图象的交点全都不在直线 $y = x$ 上；

（2）除 $f(x) = x$ 外，试列举一个函数，使其与其反函数的函数图象在 $y = x$ 上的交点有无数个；

（3）除 $f(x) = -x$ 外，试列举一个函数，使其与其反函数的函数图象不在 $y = x$ 上的交点有无数个。

## 4.2 纪念数学大师陈省身诞辰百年大会在南开大学举行[1]

今年 10 月 28 日是国际数学大师陈省身先生诞辰 100 周年，为缅怀这位伟大数学家、教育家的光辉业绩，学习和发扬他的崇高精神，由南开大学陈省身数学研究所主办的陈省身先生诞辰 100 周年纪念大会于 10 月 24 日在由陈省身先生生前亲自提议兴建的省身楼拉开帷幕。

中共中央政治局委员、国务委员刘延东为《陈省身先生诞辰一百周年纪念册》题写寄语，中共中央政治局委员、中共天津市委书记张高丽，天津市委副书记、市长黄兴国为纪念大会作出批示。

天津市政协主席、南开大学兼职教授邢元敏，天津市委常委、市委教育工委书记苟利军，首届国家最高科技奖获得者、邵逸夫奖获得者、中国科学院院士、中国数学会前理事长、陈省身先生百年诞辰纪念会学术委员会主席吴文俊，发展中国家科学院院长、巴西科学院院士帕里斯，中国科学院院士、中国数学会前理事长、中国科学院数学所王元出席大会并在前排就座。

南开大学党委书记薛进文，校长龚克，原校长侯自新，原副校长、天津市政协副主席陈永川，法兰西学院院士、国际数学联盟前副主席比斯姆特，美国科学院院士、美国斯坦福大学埃利阿西伯格，美国科学院院士、美国国家数学研究所（伯克利）所长布赖恩特，欧洲科学院院士、法国高等科学研究院院长博规农，瑞典皇家学会会员、芬兰科学院院士、乌普萨拉大学理论物理研究所所长尼米，澳大利亚皇家学会会员、澳大利亚国立大学汪徐家，世界科技图书出版社主席、新加坡南洋理工大学高等研究所所长潘国驹，中国科学院院士王梓坤、石钟慈、张恭庆、李大潜、姜伯驹、马志明、刘应明、李邦河、洪家兴、田刚、葛墨林、彭实戈、文兰、王诗宬、龙以明、张伟平、席南华，加拿大皇家学会会员、南开大学中华古典研究所所长叶嘉莹，美国加州大学伯克利分校教授项武义，陈省身基金会代表、陈省身先生之女陈璞，陈省身先生之子陈伯龙和夫人，兄弟高校和有关单位负责人等出席大会。纪念大会开幕式由薛进文主持。大会第二阶段由葛墨林主持。

刘延东在寄语中指出，陈省身先生是一代数学宗师，是 20 世纪人类最伟大的数学家之一。他创立了整体微分几何，其影响遍及数学的诸多领域，并深入影响了数学以外包括物理学在内的许多学科的发展，培养了许多优秀数学家。他曾获得美国国家科学奖、沃尔夫奖、邵逸夫奖等诸多重大奖项，在国际上享有盛誉。

寄语中说，为了数学的发展，为了把中国建成一个数学大国、数学强国，陈先生殚精竭虑，奉献了毕生心血。在纪念陈先生一百周年诞辰的日子里，可以告慰陈先生的是我国数学事业在这些年中取得了长足的进步，得到了国际数学界的肯定和重视。希望南开大学陈省身数学研究所秉承陈省身先生的遗愿，为祖国数学事业的

[1]转自 人民网—教育频道

发展做出更大贡献！期望广大科技工作者继承和发扬陈省身先生的伟大精神，为把我国建设成为创新型国家而不断努力奋进！

苟利军宣读了张高丽、黄兴国的批示。

张高丽在批示中指出，陈省身先生是享誉世界的数学大师，他的卓越成就、优秀品格、爱国情怀、崇高风范令人景仰，值此纪念陈省身先生诞辰百年之际，谨表示敬佩之情。希望南开大学和南开大学陈省身数学研究所秉承大师夙愿，弘扬大师精神，全面提高办学质量和科研水平，培养更多优秀人才，努力建设世界一流大学，为加快天津发展和我国现代化建设做出更大贡献。

黄兴国在批示中指出，陈省身先生是世界著名的数学泰斗、一代宗师，他晚年定居天津，为南开大学和我国科教事业的发展做出了重要贡献。纪念陈省身先生诞辰 100 周年，就要学习他热爱祖国的伟大情操、严谨求实的科学精神、提掖后学的优秀人格、不倦探索的人生境界。希望南开大学和南开大学陈省身数学研究所，弘扬大师风范，争创世界一流，为天津经济社会又好又快发展贡献更大力量。

邢元敏在讲话中指出，作为举世公认的国际数学大师，作为 20 世纪最杰出的微分几何学家，陈省身先生在微分几何和拓扑学的研究领域取得了开创性的重大进展，特别是他提出的陈省身示性类，为整体微分几何奠定了重要基础，对数学乃至物理学等学科的发展产生了极其重要的影响。作为一名享有崇高威望的数学教育家，陈省身先生桃李满天下，培养了一大批卓有建树的优秀数学家，为中国数学教育事业乃至世界数学教育事业的发展作出了不可磨灭的贡献。今天，我们纪念陈省身先生，就是要继承和发扬他热爱祖国的伟大情操、严谨求实的科学精神、提掖后学的优秀人格、不倦探索的人生境界，努力把先生的未竟事业继承下去，发扬光大。

邢元敏说，陈省身先生最美好的年华是在天津度过的，作为一座拥有六百多年历史的天津，也正在处于高起点、实现更高水平发展的阶段。建设新世纪的国际港口城市、北方经济中心和宜居的生态城市，需要高层次的人才资源、高水平的科技资源和高质量的教育资源来支撑。希望海内外的优秀学者，把南开大学和南开大学陈省身数学研究所作为基地和桥梁，关注、支持天津和南开大学的发展，加强学术交流，密切联系合作，为推动我国教育事业的不断进步、为促进天津经济社会又好又快发展贡献智慧和力量。

龚克代表南开大学向各位来宾表示热烈欢迎和衷心感谢。他在致辞中说，陈省身是一位杰出的南开人，南开大学是陈省身先生事业的肇基起点，更是他事业延续和精神传承的崭新节点，但是，陈省身先生对南开的贡献和影响绝不仅限于数学，对学校整体发展他同样倾注了满腔心血和热切期望，在许多重要问题上，他都以杰出科学家、教育家的战略眼光给予建议和指导。作为南开后人，我们无时无刻不感受到陈省身学长对学校发展的愿望，无时无刻不被他的精神所鼓舞。

龚克说，陈省身先生绝不仅仅属于南开，他属于全世界。他是一位杰出的数学人，一生挚爱着数学事业，为 20 世纪的数学发展做出了卓越的铭记史册的贡献；他是一位杰出的教育人，一生挚爱着学生，一丝不苟地倾注精力于教育事业，成为一代世界名师；他还是一位杰出的领导人，有着广阔的事业和深邃的眼光，又有海纳百川的胸襟和若水之高德，是世所公认的 20 世纪的科学领袖人物之一。行动是最好的纪念，在纪念陈省身先生诞辰百周年的时候，我们需要的不是豪言壮语，而是以最扎实的行动按照陈先生的要求去做，这就是：“教书的把书教好，念书的把书念好，大师傅把菜炒好，每个人都把自己的事情做好，我们的事就能办得更好”。

纪念大会上，诺贝尔奖获得者、美国科学院院士、中国科学院外籍院士、陈省身数学研究所理论物理室创办人杨振宁发来寄语，中国科学院院士、北京国际数学研究中心主任、北京大学与普林斯顿大学教授田刚介绍了陈省身先生生平与成就。

吴文俊、格里菲斯、帕里斯、马志明、张恭庆、李大潜、姜伯驹、项武义、博规农、王跃飞、叶嘉莹、潘国驹、布赖恩特、龙以明和陈伯龙、陈璞等先后发言，结合自己与陈省身先生的交往体会，缅怀他的生平与成就，礼赞他的品格与贡献。

当天下午，欧洲科学院院士、法国高等科学研究院院长博规农受聘为南开大学名誉教授，校长龚克为他佩戴校徽，致聘仪式后，博规农和柏林工业大学教授西蒙分别作了题为《现代几何：从当地到全球，从平滑到粗糙，从静态到动态》、《陈省身在汉堡大学的研究》的学术报告。纪念大会现场还播放了美国 Zara 公司拍摄的有关陈省身先生的纪录影片。


据悉，在陈省身先生诞辰 100 周年之际，由陈省身先生亲手创建的南开大学陈省身数学研究所和美国国家数学研究所，将分别在中美两地开展一系列的学术活动和纪念活动，10 月 24 日 ~ 28 日主要在中国天津南开大学举行，10 月 30 日 ~ 11 月 5 日主要在美国伯克利举行。除了纪念大会，南开大学还以纪念图片展、学术交流、故居开放、网络专题等多种形式表达对陈省身先生的由衷纪念。

陈省身先生 1911 年 10 年 28 日出生于浙江嘉兴。1930 年起先后获南开大学学士学位，清华大学硕士学位和德国汉堡大学博士学位，后赴巴黎从事研究工作。1937 年起先后在清华大学、西南联合大学、美国普林斯顿高等研究院、中国中央研究院数学研究所、美国芝加哥大学与加州大学伯克利分校任职教授等职，1981 年创办美国国家数学研究所并任所长，1985 年创办南开数学研究所并任所长。他在微积分和拓扑学、特别是在整体微分几何研究中的开创性贡献对数学乃至物理学等学科的发展产生了巨大影响。他被公认为二十世纪最伟大的数学家之一。

陈省身先生是美国科学院院士，中国、法国、意大利、俄罗斯、英国等国科学院或皇家学会外籍院士与会员。先后获美国国家科学奖章、以色列沃尔夫奖、中国国际科技合作奖及首届邵逸夫数学科学奖等多项荣誉。2002 年被推选为在北京召开的国际数学家大会名誉主席。2004 年 12 月 3 日，陈省身先生因病去世。

改革开放以来，陈省身先生非常关心中国数学事业的复兴，亲自参与组织指导我国数学界开展学术交流和学术活动，特别是 1985 年他创办了南开数学研究所，以南开为基地，亲自主持举办学术活动，在我国数学界的支持下，培养了大批优秀的青年数学家，对改革开放后我国数学事业的迅速崛起发挥了重要作用。2000 年他与夫人回南开定居，亲自为本科生讲课，指导研究生，招揽人才，推动南开数学学科的发展，为我国的数学事业做出了重大贡献。