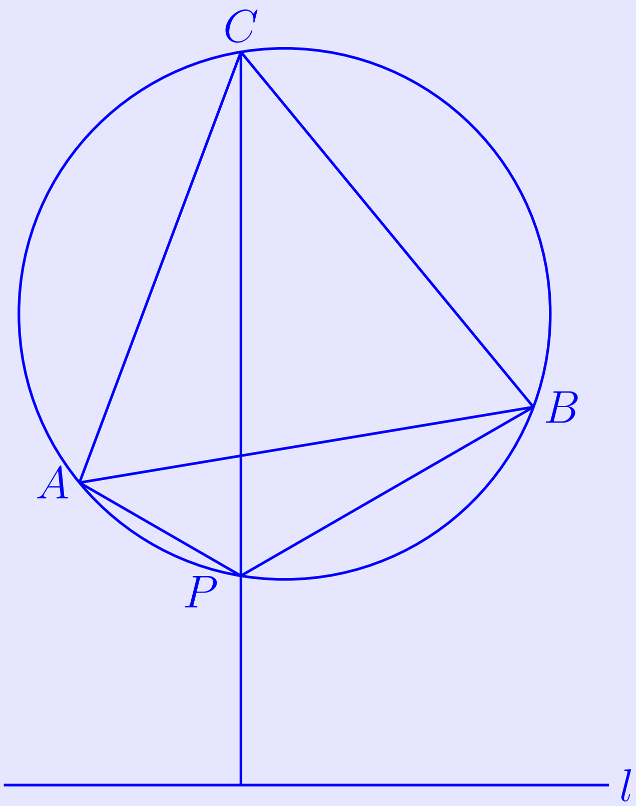
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2012 年第 2 期　　总第 9 期



目录

1 趣味数学 **1**

1.1 切蛋糕的学问——赵国瑞 1

1.2 巧拼三角板求 $\tan 15^\circ$ 的值——赵国瑞 3

2 数学竞赛 **7**

2.1 2012 年全国初中数学竞赛试题（副题） 7

2.2 2012 年全国初中数学竞赛试题（副题）参考答案 10

3 数学评书 **15**

3.1 《智慧宝典》第二部第九回　宰相起纷争　英雄来调停——陈海峰 15

3.2 《智慧宝典》第二部第十回　再会小精灵　相助得宝典——陈海峰 17

4 助力高考 **18**

4.1 对 2012 年的几道高考数学题的解答及研究——郭子伟 18

4.2 ab1962 解题集精选（九）——廖凡 24

5 能力提升 **27**

5.1 初探“幂平均三棱锥”的一条共性——李明、张进道 27

5.2 多边形的一种分类方法——李明 29

6 朝花夕拾 **31**

6.1 【封面故事】正等角中心与费马点——何万程 31

趣味数学

1.1 切蛋糕的学问——赵国瑞

星期六是小明的 11 岁生日。那天他家来了八个亲朋好友，他父母拿出一块正六边形的蛋糕款待宾客，用刀子将蛋糕分别切割成相等的 8 份（图 1.1.1），它们不但面积相等，而且形状也完全一样，由于蛋糕的厚度处处均匀，这就意味着分割出来的八块蛋糕恰到好处，能使人人满意。

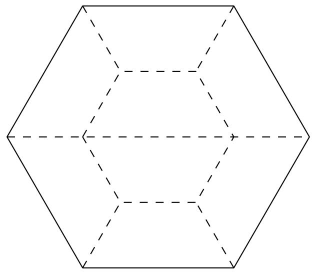


图 1.1.1

正当大家异口同声地称赞主人的绝活时，站在旁边的儿子小明却说："爸爸，你刚才分蛋糕时，一共切了十一刀，对不对？依我看，你的办法还可以改进，只切五刀也能平分成八份的。"

"恐怕不行吧？"小明父亲很惊讶，反问道："你能保证切出来的各块蛋糕不但面积相等，而且连形状也一样吗？"

"当然如此。"小明满怀信心地回答。

"好吧！让你来试试。"小明父亲高兴地把刀递给了小明。

小明接过了刀，在蛋糕上比划了一下，不慌不忙地把蛋糕切割成相等的八块。各位客人无不拍手叫好。

小明的切割方法如图 1.1.2 所示。但他切出来的蛋糕真的能满足要求吗？

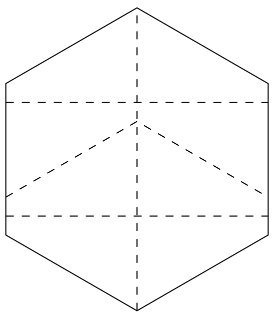


图 1.1.2

让我们来证明一下这两种切法的正确性。设正六边形每边的长度为 a，从正六边形中心向六个顶点作连线，可将六边形分成六个全等的正三角形，由于 $S_{\text{正三角形}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

于是 $S_{\text{总面积}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 6 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$。

切割成八块蛋糕后，则每块蛋糕的截面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}a^2$。

从图 1.1.1 可以看出，每块蛋糕的形状都是等腰梯形，于是，由梯形面积公式得

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}a + a\right) \times \frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2。$$

同上面的结果是完全吻合的。

小明的切法确实奇妙，真的只要五刀就行，纵切一刀，横切两刀，斜切两刀，非常对称。至于切出来的 8 块，不是等腰梯形，而是直角梯形了。

设此时梯形的上底为 x，下底为 y（$x < y$），由图 1.1.2 可知

$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ x + 3y = 2a, \end{cases}$$

解得上底之长应为 $x = \dfrac{1}{8}a$，下底之长应为 $y = \dfrac{5}{8}a$。

然后再次应用梯形面积公式，便能得出

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{8}a + \frac{5}{8}a\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2。$$

这表明，小明的神奇切法是完全能够满足要求的！

1.2 巧拼三角板求 $\tan 15^\circ$ 的值——赵国瑞

三角板是同学们早已熟悉的作图工具。一副三角板有两个，其中一个三角板是等腰直角三角形，它的三个内角分别是 45°，45°，90°，三边之比为 $1:1:\sqrt{2}$；另一个三角板是半等边三角形（等边三角形的一底边上的高将其分成两个相同的三角形，我们将这样的三角形叫做“半等边三角形”），它的三个内角分别是 30°，60°，90°，三边之比为 $1:\sqrt{3}:2$，如图 1.2.1 所示（注意：一副三角板中的等腰直角三角形的斜边与半等边三角形中的较长直角边相等）。

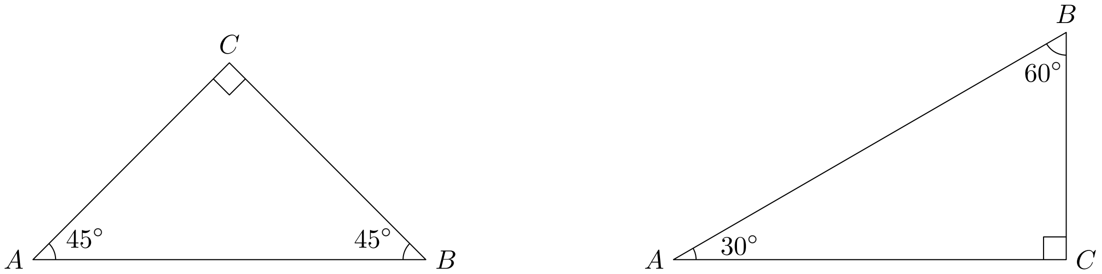


图 1.2.1

或许一些学生会认为，三角板的作用只是用来作图，其实不然，它里面包含的数学知识可多啦！利用三角板求 15° 角的三角函数值便是它的一个巧妙应用，下面仅以求 $\tan 15^\circ$ 的值为例说明。

一、利用 $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

方法 1 将一副三角板按图 1.2.2 的方式拼接，其中 AC 与 AE 在一条直线上，BC 与 AD 交于点 M，则 $\angle BAD = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$。

过点 M 作 $MN \perp AE$ 于 N，则 $\triangle MNC$ 是等腰直角三角形，$\triangle AMN$ 是半等边三角形。

设 $MN = 1$，则 $CN = 1$，$AN = \sqrt{3}$，$CM = \sqrt{2}$。

则 $AC = AN + CN = \sqrt{3} + 1$，$AB = BC = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。

故 $BM = BC - CM = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$。

所以 $\tan\angle BAD = \tan 15^\circ = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = 2 - \sqrt{3}$。 □

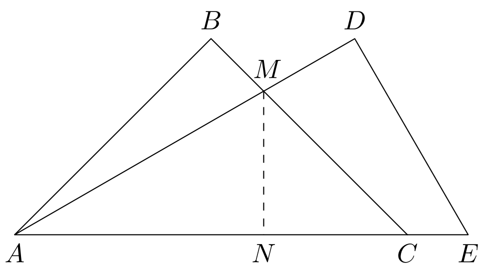


图 1.2.2

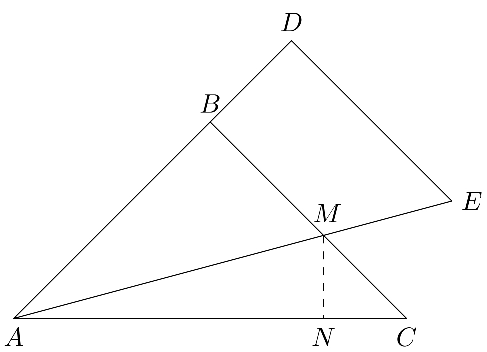


图 1.2.3

方法 2 将一副三角板按图 1.2.3 的方式拼接，其中 AB 与 AD 在一条直线上，BC 与 AE 交于点 M，则 $\angle CAE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$。

过点 M 作 $MN \perp AE$ 于 N，则 $\triangle MNC$ 是等腰直角三角形，$\triangle ABM$ 是半等边三角形。

设 $BM = 1$，则 $AB = BC = \sqrt{3}$，$AC = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$。

则 $CM = BC - BM = \sqrt{3} - 1$，$MN = CN = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

故 $AN = AC - CN = \sqrt{6} - \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。

所以 $\tan\angle CAE = \tan 15^\circ = \dfrac{MN}{AN} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = 2 - \sqrt{3}$。 □

说明：将方法 1 中的 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转 15° 即是方法 2 的拼接方式。

方法 3 将一副三角板按图 1.2.4 的方式拼接，其中等腰直角三角形的斜边与半等边三角形中的较长直角边重合，BD 与 AE 交于点 M，则 $\angle BAE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$。

以下解法同方法 1。 □

说明：将方法 1 中的 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 30° 再沿直线 AC 翻折即是方法 3 的拼接方式。

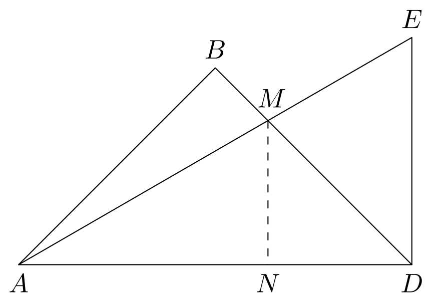


图 1.2.4

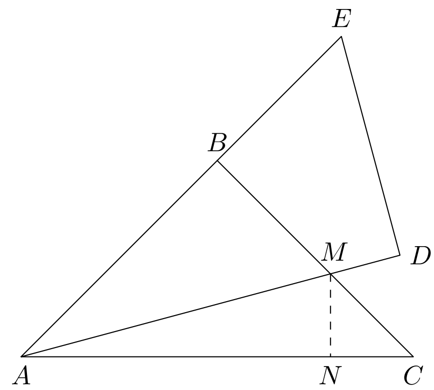


图 1.2.5

方法 4 将一副三角板按图 1.2.5 的方式拼接，其中 AB 与 AE 在一条直线上，BC 与 AD 交于点 M，则 $\angle CAD = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$。

以下解法同方法 2。 □

说明：将方法 3 中的 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转 15° 即是方法 4 的拼接方式。

二、利用 $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$

方法 5 将一副三角板按图 1.2.6 的方式拼接，其中 AC 与 AE 在一条直线上，AB 与 DE 交于点 M，则 $\angle BAD = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$。

过点 M 作 $MN \perp AE$ 于 N，则 $\triangle AMN$ 是等腰直角三角形，$\triangle MNE$ 是半等边三角形。

设 $MN = 1$，则 $AN = 1$，$NE = \sqrt{3}$，$ME = 2$。

则 $AE = AN + NE = \sqrt{3} + 1$，$AD = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$DE = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \times \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$。

故 $DM = DE - ME = \dfrac{\sqrt{3}+3}{2} - 2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$。

所以 $\tan\angle BAD = \tan 15^\circ = \dfrac{DM}{AD} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 2-\sqrt{3}$。 □

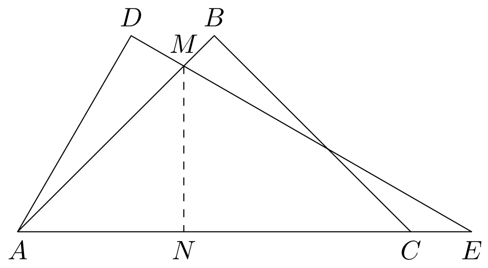


图 1.2.6

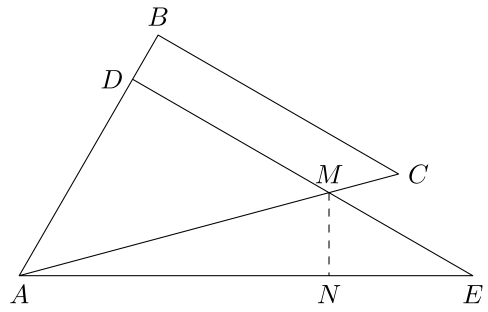


图 1.2.7

方法 6 将一副三角板按图 1.2.7 的方式拼接，其中 AD 与 AB 在一条直线上，AC 与 DE 交于点 M，则 $\angle CAE = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$。

过点 M 作 $MN \perp AE$ 于 N，则 $\triangle ADM$ 是等腰直角三角形，$\triangle MNE$ 是半等边三角形。

设 $AD = 1$，则 $DM = 1$，$DE = \sqrt{3}$，$AE = 2$。

则 $ME = \sqrt{3}-1$，$MN = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$NE = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \times \sqrt{3} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$。

故 $AN = AE - NE = 2 - \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$。

所以 $\tan\angle CAE = \tan 15^\circ = \dfrac{MN}{AN} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 2-\sqrt{3}$。 □

说明：将方法 5 中的 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 15° 即是方法 6 的拼接方式。

方法 7 将一副三角板按图 1.2.8 的方式拼接，其中 AC 与 AE 在一条直线上，AB 与 DE 交于点 M，则 $\angle DAB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$。

以下解法同方法 5。 □

说明：将方法 5 中的 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 45° 再沿直线 AE 翻折即是方法 7 的拼接方式。

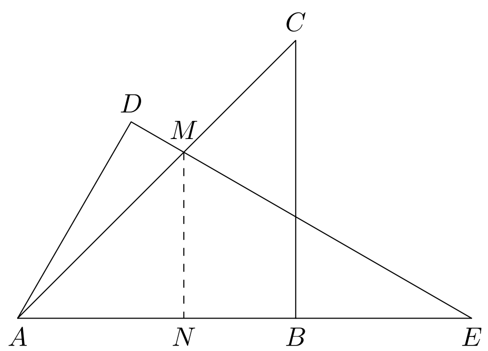


图 1.2.8

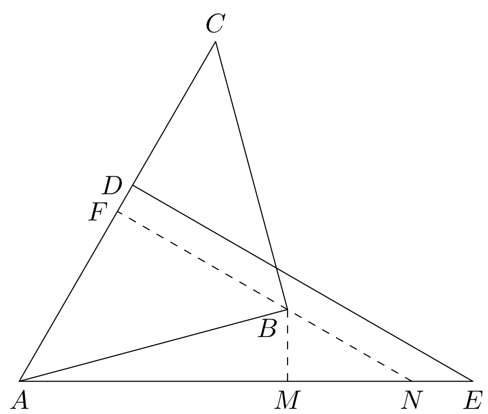


图 1.2.9

方法 8 将一副三角板按图 1.2.9 的方式拼接，其中 AC 与 AD 在一条直线上，则 $\angle BAE = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$。过点 B 作 $BM \perp AE$ 于 M，$BF \perp AC$ 于 F，BF 的反向延长线交 AE 于 N。

则 $\triangle AFN$ 是等腰直角三角形，$\triangle BNM$ 是半等边三角形。

以下解法同方法 6。 □

说明：将方法 7 中的 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 15° 即是方法 8 的拼接方式。

三、利用 $15^\circ = 90^\circ - 45^\circ - 30^\circ$

方法 9 将一副三角板按图 1.2.10 的方式拼接，其中等腰直角三角形的斜边与半等边三角形中的较长直角边重合。过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的反向延长线于点 E。过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 DE 的反向延长线于点 F。

则 $\angle DAF = 90^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$，$\triangle BDE$ 是等腰直角三角形。

设 $BE = 1$，则 $DE = 1$，$BD = \sqrt{2}$，$AB = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$，$AC = BC = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$。

故 $AF = CE = BC + BE = \sqrt{3} + 1$，$DF = EF - DE = AC - DE = \sqrt{3} - 1$。

所以 $\tan\angle DAF = \tan 15^\circ = \dfrac{DF}{AF} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$。 □

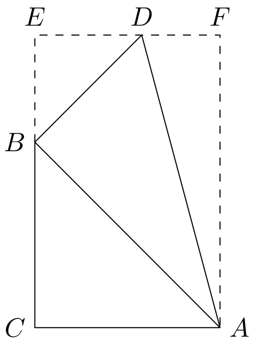


图 1.2.10

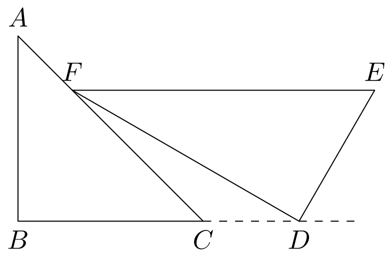


图 1.2.11

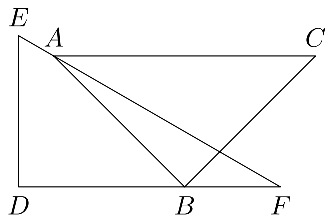


图 1.2.12

上面的拼接方式中，两个三角板都有一条边（或其中的一部分）重合。其实，我们也可以无需使一条边（或其中的一部分）重合，但要保持其中一条边平行，同样可以求出 $\tan 15^\circ$ 的值。如图 1.2.11（其中 $EF \parallel BC$）和图 1.2.12（其中 $AC \parallel DF$），请你能根据这两个图形求出 $\tan 15^\circ$ 的值。

数学竞赛

2.1　2012 年全国初中数学竞赛试题（副题）

一、选择题（共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分。以下每道小题均给出了代号为 A、B、C、D 的四个选项，其中有且只有一个选项是正确的。请将正确选项的代号填入题后的括号里，不填、多填或错填都得 0 分）

1. 小王在做数学题时，发现下面有趣的结果：

$$1+2=3$$

$$4+5+6=7+8$$

$$9+10+11+12=13+14+15$$

$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$

$$\vdots$$

由上，我们可知第 100 行的最后一个数是（　）

（A）10000　　（B）10020　　（C）10120　　（D）10200

2. 如图 2.1.1，在 3×4 表格中，左上角的 1×1 小方格被染成黑色，则在这个表格中包含黑色小方格的矩形个数是（　）

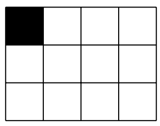


图 2.1.1

（A）11　　（B）12　　（C）13　　（D）14

3. 如果关于 x 的方程 $x^2+4x+\sqrt{10-a}+2=0$ 有两个有理根，那么所有满足条件的正整数 a 的个数是（　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

4. 若函数 $y=(k^2-1)x^2-(k+1)x+1$（k 为参数）的图象与 x 轴没有公共点，则 k 的取值范围是（　）

（A）$k>\dfrac{5}{3}$ 或 $k<-1$　　（B）$-1<k<\dfrac{5}{3}$ 且 $k\neq1$

（C）$k>\dfrac{5}{3}$ 或 $k\leqslant-1$　　（D）$k\geqslant\dfrac{5}{3}$ 或 $k\leqslant-1$

5. $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，D、M 分别为 BC 上的点，AD 平分 $\angle A$，$BM=CM$，K 为 AM 上一点，且 $\angle BKC=180^\circ-\angle A$，则 $\angle BKD$ 与 $\angle CKD$ 的大小关系为（　）

（A）$\angle BKD>\angle CKD$　　（B）$\angle BKD=\angle CKD$

（C）$\angle BKD<\angle CKD$　　（D）无法确定

二、填空题（共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

6. 如图 2.1.2，正方形 $ABCD$ 的面积为 90，点 P 在 AB 上，$PB=2AP$，X、Y、Z 三点在 BD 上，且 $BX=XY=YZ=ZD$，则 $\triangle PZX$ 的面积为________。

7. 甲、乙、丙三辆车都匀速从 A 地驶往 B 地，乙车比丙车晚 5 分钟出发，出发后 40 分钟追上丙车；甲车比乙车晚 20 分钟出发，出发后 100 分钟追上丙车，则甲车出发后________分钟追上乙车。

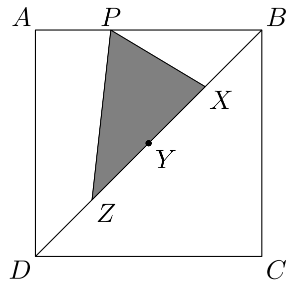


图 2.1.2

8. 设 $a_n=\dfrac{2^n}{2^{2n+1}-2^{n+1}-2^n+1}$（$n$ 为正整数），则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2012}$ 的值________1。（填“$>$”,“$=$”或“$<$”）

9. 红、黑、白三种颜色的球各 10 个，把它们全部放入甲、乙两个袋子中，要求每个袋子里三种颜色的球都有，且甲、乙两个袋子中三种颜色的球数之积相等，那么共有________种放法。

10. $\triangle ABC$ 中，已知 $\dfrac{1}{\tan\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}=\dfrac{4}{\tan\dfrac{B}{2}}$，且 $b=4$，则 $a+c=$ ________。

三、解答题（共 4 题，每题 20 分，共 80 分）

11. 已知 $c\leqslant b\leqslant a$，且 $a+b+c=10$，$abc-23a=40$，求 $|a|+|b|+|c|$ 的最小值。

12. 求关于 a，b，c，d 的方程组

$$\begin{cases}10ab+10bc+10ca=9d,\\ abc=d\end{cases}$$

的所有正整数解。

13. 如图 2.1.3，梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，AC、BD 相交于点 O，P、Q 分别是 AD、BC 上的点，且 $\angle APB=\angle CPD$，$\angle AQB=\angle CQD$。求证：$OP=OQ$。

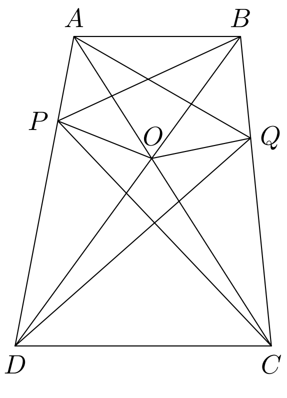


图 2.1.3

14.（1）已知 1，$1+a$，$1+2a$ 三个数中必有两个数的积等于第三个数的平方，求 a 的值；

（2）设 a 为非零实数，k 为正整数，是否存在一列数

$$1+(k-1)a，1+ka，1+(k+1)a$$

满足首尾两项的积等于中间项的平方？

（3）设 a 为非零实数，若将一列数

$$1，1+a，1+2a，1+3a$$

中的某一项删去后得到又一列数（按原来的顺序），满足首尾两项的积等于中间项的平方，试求 a 的所有可能的值。

2.2 2012 年全国初中数学竞赛试题（副题）参考答案

一、选择题

1. D

解 第 k 行的最后一个数是 $(k+1)^2-1$，故第 100 行的最后一个数是 $101^2-1=10200$。 □

2. B

解 这个表格中的矩形可由对角线的两个端点确定，由于包含黑色小方格，于是，对角线的一个端点确定，另一个端点有 $3\times 4=12$ 种选择。 □

3. B

解 由于方程的两根均为有理数，所以根的判别式 $\Delta\geqslant 0$，且为完全平方数。

$$\Delta=16-4\left(\sqrt{10-a}+2\right)=4\left(2-\sqrt{10-a}\right)\geqslant 0,$$

又 $2\geqslant 2-\sqrt{10-a}$，所以，当 $2-\sqrt{10-a}=0$ 时，解得 $a=6$；当 $2-\sqrt{10-a}=1$ 时，解得 $a=9$。 □

4. C

解 当函数为二次函数时，有

$$\begin{cases} k^2-1\neq 0, \\ \Delta=(k+1)^2-4(k^2-1)<0, \end{cases}$$

解得 $k>\dfrac{5}{3}$ 或 $k<-1$；

当函数为一次函数时，$k=1$，此时 $y=-2x+1$ 与 x 轴有公共点，不符合题意；

当函数为常数函数时，$k=-1$，此时 $y=1$ 与 x 轴没有公共点。

所以，k 的取值范围是 $k>\dfrac{5}{3}$ 或 $k\leqslant -1$。 □

5. B

解 如图 2.2.1，设 $\angle BAM=\alpha$，$\angle CAM=\beta$，作 $\square BKCE$，则

$$\angle BEC=\angle BKC=180^\circ-\angle A,$$

于是 A、B、E、C 四点共圆。因为 M 是 BC 的中点，所以 $AB\sin\alpha=AC\sin\beta$，从而有

$$\frac{KB}{KC}=\frac{EC}{EB}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC},$$

即 KD 平分 $\angle BKC$。 □

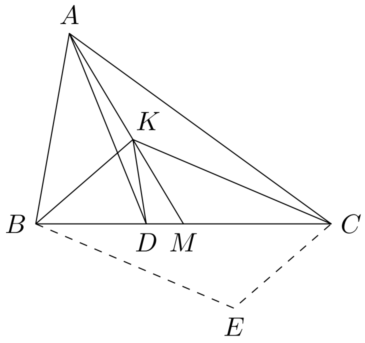


图 2.2.1

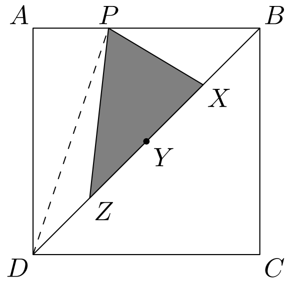


图 2.2.2

二、填空题

6. 30

解 如图 2.2.2，连接 PD，则

$$S_{\triangle PXZ}=\frac{1}{2}S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times 90=30。\qquad\square$$

7. 180

解 设甲、乙、丙三车的速度分别为每分钟 x、y、z 米，由题意知

$$45z=40y，125z=100x，$$

消去 z，得 $y=\dfrac{9}{10}x$。

设甲车出发后 t 分钟追上乙车，则 $tx=(t+20)y$，即

$$tx=(t+20)\frac{9}{10}x，$$

解得 $t=180$。 $\square$

8. $<$

解 由 $a_n=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，得

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\cdots+a_{2012}&=\left(1-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2012}-1}-\frac{1}{2^{2013}-1}\right)\\&=1-\frac{1}{2^{2013}-1}<1。\end{aligned}\qquad\square$$

9. 25

解 设甲袋中红、黑、白三种颜色的球数分别为 x、y、z，则有

$$1\leqslant x,y,z\leqslant 9，$$

且

$$xyz=(10-x)(10-y)(10-z)，\tag{2.2.1}$$

即

$$xyz=500-50(x+y+z)+5(xy+yz+zx)，\tag{2.2.2}$$

于是 $5 \mid xyz$，因此 x、y、z 中必有一个取 5。不妨设 $x=5$，代入式 (2.2.1)，得到

$$y+z=10,$$

此时，y 可取 $1, 2, \cdots, 8, 9$（相应地 z 取 $9, 8, \cdots, 2, 1$），共 9 种放法。同理可得 $y=5$ 或者 $z=5$ 时，也各有 9 种放法，但 $x=y=z$ 时，两种放法重复，因此共有 $9\times 3-2=25$ 种放法。 □

10. 6

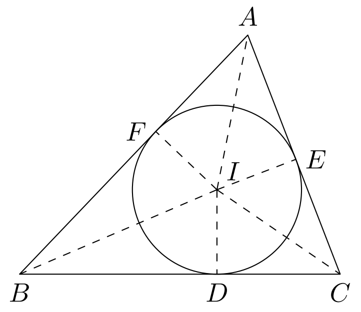


图 2.2.3

解　如图 2.2.3，设 $\triangle ABC$ 内切圆为 $\odot I$，半径为 r，$\odot I$ 与 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F，连接 IA、IB、IC、ID、IE、IF。

由切线长定理得

$$AF=p-a，BD=p-b，CE=p-c，其中\ p=\frac{1}{2}(a+b+c)。$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle AIF$ 中，$\tan\angle IAF=\dfrac{IF}{AF}$，即

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}。$$

同理，$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{p-b}$，$\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{p-c}$。代入已知等式，得

$$\frac{p-a}{r}+\frac{p-c}{r}=\frac{4(p-b)}{r},$$

因此 $a+c=\dfrac{3}{2}b=\dfrac{3}{2}\times 4=6$。 □

三、解答题

11. **解**　已知 $a>0$，又 $b+c=10-a$，且 $bc=23+\dfrac{40}{a}$，所以 b，c 是关于 x 的一元二次方程

$$x^2-(10-a)x+\left(23+\frac{40}{a}\right)=0$$

的两个根，故

$$\Delta=(10-a)^2-4\left(23+\frac{40}{a}\right)\geqslant 0,$$

即

$$a^3-20a^2+8a-160\geqslant 0,$$

即

$$(a^2+8)(a-20)\geqslant 0,$$

所以 $a\geqslant 20$。

于是 $b+c=10-a\leqslant -10$，$|b+c|\geqslant 10$，从而 $|b|+|c|\geqslant |b+c|\geqslant 10$，故

$$|a|+|b|+|c|\geqslant 30,$$

当 $a=20$，$b=-5$，$c=-5$ 时，等号成立。 □

12. **解** 将 $abc=d$ 代入 $10ab+10bc+10ca=9d$ 得

$$10ab+10bc+10ca=9abc,$$

因为 $abc\neq 0$，所以

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{9}{10}。$$

不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，则

$$\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{c}>0,$$

于是

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{3}{a},$$

即

$$\frac{1}{a}<\frac{9}{10}\leqslant\frac{3}{a},$$

得

$$\frac{10}{9}<a\leqslant\frac{30}{9},$$

从而 $a=2$ 或 3。

若 $a=2$，则 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{5}$。因为 $\frac{1}{b}<\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{2}{b}$，所以 $\frac{1}{b}<\frac{2}{5}\leqslant\frac{2}{b}$，得 $\frac{2}{5}<b\leqslant 5$，从而 $b=3$，4，5。相应地，可得 $c=15$，$\frac{20}{3}$（舍去），5。

当 $a=2$，$b=3$，$c=15$ 时，$d=90$；

当 $a=2$，$b=5$，$c=5$ 时，$d=50$；

若 $a=3$，则 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{17}{30}$。因为 $\frac{1}{b}<\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{2}{b}$，所以 $\frac{1}{b}<\frac{17}{30}\leqslant\frac{2}{b}$，得 $\frac{30}{17}<b\leqslant\frac{60}{17}$，从而 $b=2$（舍去），3。

当 $b=3$ 时，$c=\frac{30}{7}$（舍去）。

因此，所有正整数解为

$$\begin{aligned}(a,b,c,d)=&(2,3,15,90),(2,15,3,90),(3,2,15,90),\\&(3,15,2,90),(15,2,3,90),(15,3,2,90),\\&(2,5,5,50),(5,2,5,50),(5,5,2,50)。\end{aligned}$$ □

13. **证明** 如图 2.2.4，延长 DA 至 B_1，使得 $BB_1=BA$，则 $\angle PB_1B=\angle B_1AB=\angle PDC$，于是

$$\triangle DPC\sim\triangle B_1PB,$$

故

$$\frac{DP}{PB_1}=\frac{CD}{BB_1}=\frac{CD}{BA}=\frac{DO}{BO},$$

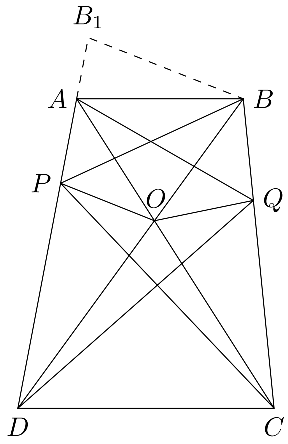


图 2.2.4

所以 $PO \parallel BB_1$。

又因为 $\triangle DPO \sim \triangle DB_1B$，所以

$$OP = BB_1 \cdot \frac{DO}{DB} = AB \cdot \frac{DO}{DB}。$$

同理可得 $OQ = AB \cdot \dfrac{CO}{CA}$，而 $AB \parallel CD$，所以 $\dfrac{DO}{DB} = \dfrac{CO}{CA}$，故 $OP = OQ$。 □

14. **解** （1）由题设可得 $1^2 = (1+a)(1+2a)$ 或 $(1+a)^2 = 1 \cdot (1+2a)$ 或 $(1+2a)^2 = 1 \cdot (1+a)$。

由 $1^2 = (1+a)(1+2a)$，解得 $a = 0$，$a = -\dfrac{3}{2}$；

由 $(1+a)^2 = 1 \cdot (1+2a)$，解得 $a = 0$；

由 $(1+2a)^2 = 1 \cdot (1+a)$，解得 $a = 0$，$a = -\dfrac{3}{4}$。

所以满足题设要求的实数 $a = 0$，$a = -\dfrac{3}{4}$，$a = -\dfrac{3}{2}$；

（2）不存在。

由题设 $1+(k-1)a$，$1+ka$，$1+(k+1)a$（整数 $k \geqslant 1$）满足首项与末项的积是中间项的平方，则有

$$(1+ka)^2 = \big(1+(k-1)a\big)\big(1+(k+1)a\big),$$

解得 $a = 0$，这与 $a \neq 0$ 矛盾，故不存在这样的数列；

（3）如果删去的是 1，或者是 $1+3a$，则由（2）知 $1+a$，$1+2a$，$1+3a$，或数列 1，$1+a$，$1+2a$ 均为 1，1，1，即 $a = 0$，这与题设 $a \neq 0$ 矛盾；

如果删去的是 $1+a$，得到的一列数为 1，$1+2a$，$1+3a$，那么 $(1+2a)^2 = 1 \cdot (1+3a)$，可得 $a = -\dfrac{1}{4}$；

如果删去的是 $1+2a$，得到的一列数为 1，$1+a$，$1+3a$，那么 $(1+a)^2 = 1 \cdot (1+3a)$，可得 $a = 1$。

所以符合题设要求的 a 的值为 1 或 $-\dfrac{1}{4}$。 □

数学评书

3.1 《智慧宝典》第二部第九回　宰相起纷争　英雄来调停——陈海峰

上回说到两位小英雄帮忙救火以后，在居民区小住数日，购买些干粮等又继续出发。不日，来到一个地方，感觉什么东西都是圆的，球形的建筑，车辆也都是半圆形的。他俩心里清楚，已经到了圆国了。于是就去拜见国王，一看国王，胖得也是像一个球，从哪个面看都是圆的。国王知道两位小英雄的来意，就请他俩讲起路上遇到种种坎坷……

突然，只见又是两个圆球似的人在互相吵吵闹闹进入了宫殿，这时两位小英雄才知道，原来是圆国内的两位宰相，这天他们喝了一些酒，对谁对圆王的贡献大这个问题吵了起来。又要来找圆王评理，圆王对这个事情不好说，都是自己的爱相，不好说谁好谁坏的，就让两位小英雄来当裁判。

左宰相说："我是的圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。可以看出，只要我一出现，大家立马可以画出一个相应的圆来。因为圆心为 (a,b)，半径为 r。当然，若圆心在坐标原点上，这时 $a=b=0$，则圆的方程就是 $x^2+y^2=r^2$。一个要确定一个圆，根据圆的定义，动点到定点的距离等于定长的点的轨迹就是圆，定点即圆心，定长即半径，这一点是右宰相所不能比拟的。所以我认为，我比右宰相贡献大，谢谢！"

右宰相接过话说："首先让你俩看一下这个方程，对于 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，整理得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}。$$

（1）当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，表示以 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆；

（2）当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程只有实数解 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，即只表示一个点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$；

（3）当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程没有实数解，因而它不表示任何图形。

综上所述，形如 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（$D^2+E^2-4F>0$）的表示圆的方程就是我，我认为，我更适合方程式的特点，理由是：

（a）x^2 和 y^2 的系数相同，且不等于 0；

（b）没有 xy 这样的二次项。

对于识别 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 是不是圆，只要看有没有 $A=C$ 且 $B=0$，如果连这一关也通不过，就不是圆了。这一点是标准方程所不能达到的，因此我认为，我比左宰相贡献大，谢谢！"

这时左宰相反唇相讥："既然你认为比我好，那么对于这道题，你如何快速体现？

例 3.1.1. （天津 08 高考，文）已知圆 C 的圆心与点 $P(-2,1)$ 关于直线 $y=x+1$ 对称。直线 $3x+4y-11=0$ 与圆 C 相交于 A、B 两点，且 $|AB|=6$，则圆 C 的方程为________。

显然应该这样：

解析　由题意知圆心的坐标为 $(0,-1)$，然后利用垂径定理得 $r^2=3^2+\frac{(-4-11)^2}{5^2}=18$，故圆的方程为 $x^2+(y+1)^2=18$，显然是高考那有限的时间内，我比你强多了。"（两个小英雄鼓掌）　□

右宰相也不示弱："那就你强呗，请出招解这道题。

例 3.1.2. 求过三点 $O(0,0)$，$M(1,1)$，$N(4,2)$ 的圆的方程。

解析　显然应该设圆的方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，由题意得

$$\begin{cases} F=0, \\ D+E+F+2=0, \\ 4D+2E+F+20=0, \end{cases}$$

解得 $D=-8$，$E=6$，$F=0$，故圆的方程为 $x^2+y^2-8x+6y=0$。”（两位小英雄也鼓掌） □

圆王不耐烦了：“停，请两位小英雄作一下点评。”

小英说：“左宰相有独到的几何优势，右宰相也独特的代数优势，可以说是平分秋色，各领风骚，圆王少了谁都不行，你们的肚子都那么大，为什么不能兼容呢。不是说宰相肚里能撑船吗！”

两位宰相点头称是，都有点不自在起来，最终握手言和。

不知两位小英雄在圆国还会有什么奇遇，请听下回分解。

3.2 《智慧宝典》第二部第十回　再会小精灵　相助得宝典——陈海峰

话说两位小英雄在圆国内帮助平息了一场纷争后，圆王知道了两位小英雄是取宝典而来，突然脸色暗了下来，说："宝典我们这边倒有一页，就是在我的父亲那边，他可是对这页宝典有特殊的感情，想把他带到坟墓去。说来奇怪，自从他有了这页宝典后，就闷闷不乐，从没开心笑过。如果能逗他一笑，幸许还有可能让出宝典，否则就……"

两位小英雄心中暗暗叫苦，如果是要用武功来对付，应该自己还有一手，可是对于逗笑的本事，师傅也没教，正在无助之际，只听有人喊了一声，我来也！两人一看，原来是小精灵。我今天来兑现我的承诺，助你们一臂之力！

只见小精灵来到圆王的父亲那边，对他说："你看我会变魔术，能主宰圆 $C: x^2+y^2=r^2$ 与直线 $l: x_0x+y_0y=r^2$ 的位置关系，你信吗？"圆王的父亲木讷的点了点头。

只见小精灵开始表演了，我是 $P(x_0,y_0)$ 现在走到圆 C 内，你猜猜，$x^2+y^2=r^2$ 与直线 $l: x_0x+y_0y=r^2$ 的位置关系，是什么？会相交吗？

圆王的父亲说："当然会了。"

小精灵说："看好了，因为我在圆内，故 $x_0^2+y_0^2<r^2$，则圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{\left|x_0\cdot 0+y_0\cdot 0-r^2\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}>\frac{r^2}{\sqrt{r^2}}=r,$$

你说他们能相交吗？"

只听有鼓掌声，原来是圆王的父亲在鼓掌，大家心头放松下来。

小精灵说："当我游到圆 C 上时，你再猜猜 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $l: x_0x+y_0y=r^2$ 的位置关系是什么？"

圆王的父亲说："当然是相切了。"

小精灵说："因为我在圆上，故 $x_0^2+y_0^2=r^2$，则圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{\left|x_0\cdot 0+y_0\cdot 0-r^2\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{r^2}}=r,$$

确实是对的。"

小精灵又接着表演："当我离开圆 C，游向远方时，你再猜猜 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $l: x_0x+y_0y=r^2$ 的位置关系是什么？猜猜。"

"应该是相离吧？"圆王的父亲自己也不敢肯定了。

小精灵说："现在我在圆外，即 $x_0^2+y_0^2>r^2$，所以

$$d=\frac{\left|x_0\cdot 0+y_0\cdot 0-r^2\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}<\frac{r^2}{\sqrt{r^2}}=r,$$

恰恰是相交。有趣吧，呵呵！"

圆王的父亲起身连说，妙呀！妙呀！

这时圆王看他的父亲满面春风，就向其说明两位小英雄的来意，不想圆王的父亲从怀里拿出一页纸，正是一页的宝典。圆王的父亲笑道："人生快乐，夫复何求，此页权当送给两位小英雄了，祝你们能为天下多做些善事。"

这时两位小英雄谢过以后，忙来到小精灵的身边，竖起大拇指。小精灵说："我的话已兑现，请两位走好！"

不知两位小英雄还会遇到什么困难，且看第三部。

助力高考

4.1 对 2012 年的几道高考数学题的解答及研究——郭子伟

与往年类似，在高考数学的那一天便会在人教论坛发贴，在试题刚放出来时随即挑选有玩头的题目来玩，争取第一时间解出来并发布在论坛。贴的地址是 `http://bbs.pep.com.cn/thread-2532549-1-1.html`，目前暂时收录了 19 道题目，本文将从中再挑选部分整理于此，更多的讨论见原贴。

题目 4.1.1. (安徽卷理数第 20 题) 如图 4.1.1，点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点。过点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆 C 的上半部分于点 P，过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线交直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 于点 Q。

（I）如果点 Q 的坐标是 $(4,4)$，求此时椭圆 C 的方程；

（II）证明：直线 PQ 与椭圆 C 只有一个交点。

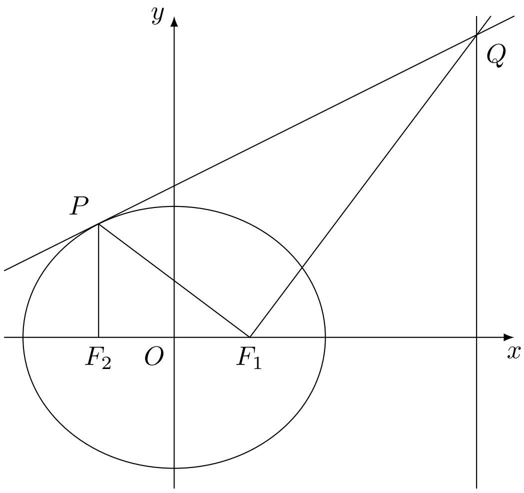


图 4.1.1

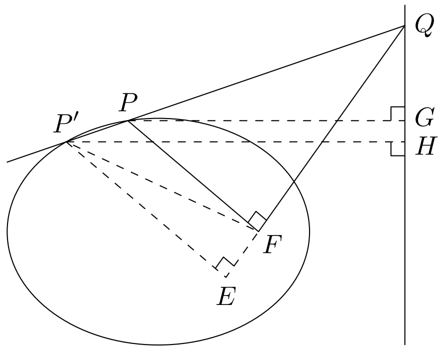


图 4.1.2

第（I）问略，这里我给出第二问的更一般情况，即如下命题。

命题 4.1.1. 椭圆上有任意一点 P（非长轴顶点），焦点 F 相应的准线为 L，连结 PF，过 F 作 PF 的垂线交 L 于 Q，则直线 PQ 与椭圆相切。

证明 用反证法，假设 PQ 与椭圆交于点 P 以外的另一点 P'，作如图 4.1.2 所示的辅助线。则由圆锥曲线第二定义以及三角形相似，得

$$\frac{PF}{P'F}=\frac{e\cdot PG}{e\cdot P'H}=\frac{PG}{P'H}=\frac{PQ}{P'Q}=\frac{PF}{P'E},$$

这样得到

$$P'F=P'E,$$

显然矛盾，故命题得证。 □

点评：命题 4.1.1 在双曲线、抛物线上都成立，证法类似，读者可以试试。由此也提供了作圆锥曲线上的点的切线的一种作法。我相信这个证法跟参考答案完全不一样，那如果这样写在考卷上的话，不知能得多少分？所以……你懂的。

题目 4.1.2. (山东卷理数第 12 题) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=ax^2+bx$（$a,\,b\in\mathbb{R},\,a\neq 0$）。若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则下列判断正确的是

（A）当 $a<0$ 时，$x_1+x_2<0$，$y_1+y_2>0$

（B）当 $a<0$ 时，$x_1+x_2>0$，$y_1+y_2<0$

（C）当 $a>0$ 时，$x_1+x_2<0$，$y_1+y_2<0$

（D）当 $a>0$ 时，$x_1+x_2>0$，$y_1+y_2>0$

解 依题意知关于 x 的多项式

$$h(x)=ax^3+bx^2-1$$

有二重根，不妨设二重根为 x_1，另一根为 x_2，则 $h(x)$ 可以分解为

$$h(x)=a(x-x_1)^2(x-x_2),$$

展开对比 x 的系数得

$$ax_1(x_1+2x_2)=0,$$

由于 $a\neq 0$ 且显然 $x_1\neq 0$，故必有

$$x_1=-2x_2,$$

又展开对比常数项得

$$ax_1^2x_2=1,$$

从而解得

$$x_1=-2x_2=-\sqrt[3]{\frac{2}{a}},$$

故易得

$$y_1=-\frac{y_2}{2}=-\sqrt[3]{\frac{a}{2}},$$

从而

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4a}}, \\ y_1+y_2=\sqrt[3]{\dfrac{a}{2}}, \end{cases}$$

因此选 B。 □

点评：此题的另一个方法是将方程变为 $ax+b=\dfrac{1}{x^2}$，然后由图象即可得答案，此另法是论坛上网友“华谷涵”告诉我的，这在考试中的确是很方便快捷的方法，不过总是欠缺一点严格，所以对于我这种远离考试者来说，还是喜欢我上面的代数解法，况且也并不麻烦，而且还得到了两根的具体表达式，这对于问题的本身来说是最好的结果。

题目 4.1.3. (江西卷理数第 6 题) 观察下列各式：$a+b=1$，$a^2+b^2=3$，$a^3+b^3=4$，$a^4+b^4=7$，$a^5+b^5=11$，$\cdots$，则 $a^{10}+b^{10}=$

（A）28 （B）76 （C）123 （D）199

解 由 $a+b=1$，$a^2+b^2=3$ 得到 $ab=-1$，从而 $a,\,b$ 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两根，于是

$$a^{n+2}+b^{n+2}=a^n(1+a)+b^n(1+b)=a^{n+1}+b^{n+1}+a^n+b^n,$$

下略。 □

点评：说个题外话，此题中的数列 $1, 3, 4, 7, 11, \cdots$ 被称为“卢卡斯数 (Lucas number)”，其通项公式为

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

跟斐波拉契数（记为 F_n）类似而且有不少关联，由于斐波拉契数的通项中的两指数项是相减的，故容易得出任何满足 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 的通项都可以用 L_n 和 F_n 线性表示，具体地，有

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \iff a_n = \frac{3a_1 - a_2}{2} \cdot F_n - \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot L_n,$$

更多内容大家可以自行查阅相关文献。

题目 4.1.4. (江西卷理数第 7 题) 在直角三角形 ABC 中，点 D 是斜边 AB 的中点，点 P 为线段 CD 的中点，则 $\dfrac{|PA|^2 + |PB|^2}{|PC|^2} =$

（A）2　　（B）4　　（C）5　　（D）10

解　在 $\triangle PAB$ 中，由中线长公式，有

$$4PC^2 = 4PD^2 = 2PA^2 + 2PB^2 - AB^2 = 2PA^2 + 2PB^2 - (4PC)^2,$$

从而得到

$$\frac{PA^2 + PB^2}{PC^2} = 10。$$

□

点评：这题怎么看也像初中题，中线长公式好像也是初中的东西，不知命题者的用意如何？莫非有更简洁常规的高中解法，只是我没发现而已？望指点。

题目 4.1.5. (新课标全国卷理数第 16 题) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$，则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为________。

解　由

$$a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1,$$

得

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (-1)^n a_{n+1} + 2n + 1 \\ &= (-1)^n \big((-1)^{n-1} a_n + 2n - 1\big) + 2n + 1 \\ &= -a_n + (-1)^n (2n-1) + 2n + 1, \end{aligned}$$

即

$$a_{n+2} + a_n = (-1)^n (2n-1) + 2n + 1,$$

也有

$$a_{n+3} + a_{n+1} = -(-1)^n (2n+1) + 2n + 3,$$

两式相加得到

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = -2(-1)^n + 4n + 4,$$

设 k 为整数，则

$$a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4} = -2(-1)^{4k+1} + 4(4k+1) + 4 = 16k + 10,$$

于是 a_n 的前 60 项和便是

$$S_{60} = \sum_{k=0}^{14} (a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4}) = \sum_{k=0}^{14} (16k + 10) = 1830。$$

□

点评：其实在得到 $a_{n+2}+a_n=(-1)^n(2n-1)+2n+1$ 之后已经可以分 n 的奇偶进行求和了，我这里为了不奇偶，注意到 60 可被 4 整除，所以再添上 $a_{n+3}+a_{n+1}$ 便得到连续四项之和的更简单表达式，进而直接一次求和即得答案。

题目 4.1.6. (江苏卷第 19 题) 如图 4.1.3，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$。已知点 $(1,e)$ 和 $\left(e,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 都在椭圆上，其中 e 为椭圆的离心率。

（1）求椭圆的方程；

（2）设 A，B 是椭圆上位于 x 轴上方的两点，且直线 AF_1 与直线 BF_2 平行，AF_2 与 BF_1 交于点 P。

（i）若 $AF_1-BF_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求直线 AF_1 的斜率；

（ii）求证：PF_1+PF_2 是定值。

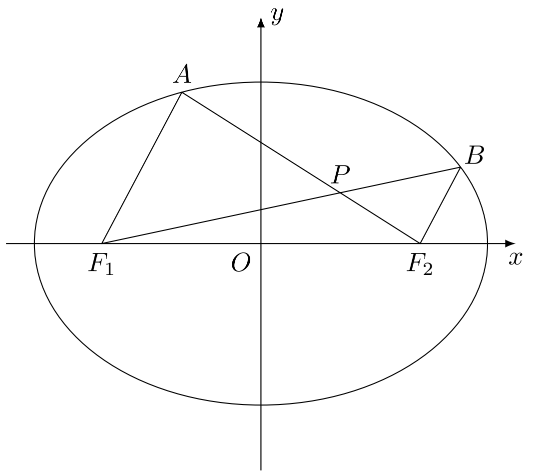


图 4.1.3

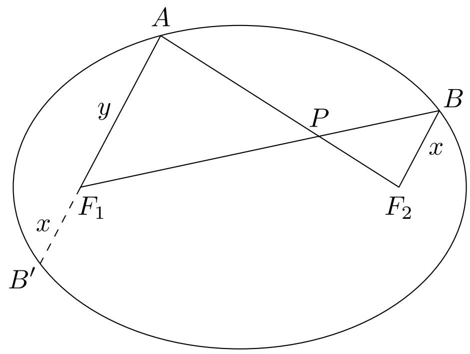


图 4.1.4

这里我只证第（2）问的第（ii）小问，为此，先引入如下常用的小结论之一。

引理 4.1.1. 过圆锥曲线 C 的焦点 F 的直线与 C 交于两点 A，B，且 F 在 A 与 B 之间，则 $\dfrac{1}{FA}+\dfrac{1}{FB}$ 为定值。

此引理相信大家都见过，这里就不证了，直接用来证明原题。

证明 延长 AF_1 交椭圆于 B'，如图 4.1.4 所示。由于 $AF_1 \parallel BF_2$，易证 $B'F_1=BF_2$，设 $B'F_1=x$，$AF_1=y$，则由 $\triangle APF_1 \sim \triangle F_2PB$ 易得

$$PF_1=(2a-x)\cdot\frac{y}{x+y}，PF_2=(2a-y)\cdot\frac{x}{x+y},$$

于是

$$PF_1+PF_2=(2a-x)\cdot\frac{y}{x+y}+(2a-y)\cdot\frac{x}{x+y}=2a-\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}},$$

由引理知 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 为定值，所以结论得证。 □

点评：由于引理中对曲线的类型并没限制，于是由证明过程可以看出，上述结论对双曲线也成立。还是那句，不知这样的解法能拿多少分，不过我想如果将引理的证明也写上然后再用，应该还行吧。

题目 4.1.7. (四川卷理数第 12 题) 设函数 $f(x)=2x-\cos x$，$\{a_n\}$ 是公差为 $\dfrac{\pi}{8}$ 的等差数列，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$，则 $\big(f(x_3)\big)^2-a_1a_5=$

（A）0 （B）$\dfrac{1}{16}\pi^2$ （C）$\dfrac{1}{8}\pi^2$ （D）$\dfrac{13}{16}\pi^2$

解 令

$$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\pi=2x+\sin x,$$

则已知等式化为

$$g\left(a_1-\frac{\pi}{2}\right)+g\left(a_2-\frac{\pi}{2}\right)+\cdots+g\left(a_5-\frac{\pi}{2}\right)=0。$$

下面证明 $a_3=\dfrac{\pi}{2}$。若不然，假设 $a_3>\dfrac{\pi}{2}$，那么我们有

$$a_3-\frac{\pi}{2}>0，a_1-\frac{\pi}{2}+a_5-\frac{\pi}{2}=a_2-\frac{\pi}{2}+a_4-\frac{\pi}{2}=2a_3-\pi>0,$$

注意到 $g(x)$ 为递增的奇函数，熟知有 $g(x)+g(y)>0 \iff x+y>0$，从而得到

$$g\left(a_3-\frac{\pi}{2}\right)>0，g\left(a_1-\frac{\pi}{2}\right)+g\left(a_5-\frac{\pi}{2}\right)>0，g\left(a_2-\frac{\pi}{2}\right)+g\left(a_4-\frac{\pi}{2}\right)>0,$$

矛盾。同理可证当假设 $a_3<\dfrac{\pi}{2}$ 时都将产生矛盾，故此必有 $a_3=\dfrac{\pi}{2}$。

所以，$\big(f(a_3)\big)^2-a_1a_5=\pi^2-\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{13}{16}\pi^2$，选 D。 □

点评：文科的第 12 题也类似，只是更容易转化出那个 $g(x)$。这个题显然可以设计得更一般化些，比如变量个数可以增加，函数也可以变复杂些，只要能变形出来递增的奇函数即可，至于那个熟知结论应该不用我证了吧。

题目 4.1.8. (四川卷理数第 16 题) 记 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数。例如，$[2]=2$，$[1.5]=1$，$[-0.3]=-1$。设 a 为正整数，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=a$，$x_{n+1}=\left[\dfrac{x_n+\left[\dfrac{a}{x_n}\right]}{2}\right]$（$n\in\mathbb{N}^+$）。现有下列命题：

① 当 $a=5$ 时，数列 $\{x_n\}$ 的前 3 项依次为 5, 3, 2；
② 对数列 $\{x_n\}$ 都存在正整数 k，当 $n\geqslant k$ 时总有 $x_n=x_k$；
③ 当 $n\geqslant 1$ 时，$x_n>\sqrt{a}-1$；
④ 对某个正整数 k，若 $x_{k+1}\geqslant x_k$，则 $x_k=[\sqrt{a}]$。
其中的真命题有________。（写出所有真命题的编号）

解 命题 ① 正确，直接列出来即知正确，事实上，后面的都是 2；
命题 ② 错误，当 $a=3$ 时可以列出 $\{x_n\}$ 为 $\{3,2,1,2,1,2,1,\cdots\}$，后面一直是 2, 1 循环；
命题 ③ 正确，由于对任意整数 n，容易证明恒有

$$\left[\frac{n}{2}\right]\geqslant\frac{n-1}{2},$$

又显然 $x_n+\left[\dfrac{a}{x_n}\right]$ 为整数，于是，由 $[x]>x-1$ 以及均值不等式，我们有

$$x_{n+1}=\left[\frac{x_n+\left[\frac{a}{x_n}\right]}{2}\right]\geqslant\frac{x_n+\left[\frac{a}{x_n}\right]-1}{2}>\frac{x_n+\frac{a}{x_n}-2}{2}\geqslant\sqrt{a}-1,$$

所以命题 ③ 成立；

命题 ④ 正确，我们分两步来证明。

（1）我们先来证明 $x_n \geqslant [\sqrt{a}]$ 对任意正整数 n 恒成立。若不然，假设存在某个 $x_k < [\sqrt{a}]$，由于 x_k 和 $[\sqrt{a}]$ 均为整数，因此有

$$x_k \leqslant [\sqrt{a}] - 1 \leqslant \sqrt{a} - 1,$$

这与命题 ③ 的结论矛盾，从而必有 $x_n \geqslant [\sqrt{a}]$ 恒成立；

（2）接下来证明当 $x_{k+1} \geqslant x_k$ 时必有 $x_k \leqslant [\sqrt{a}]$。若不然，假设 $x_k > [\sqrt{a}]$，由于 x_k 和 $[\sqrt{a}]$ 均为整数，因此有

$$x_k \geqslant [\sqrt{a}] + 1 > \sqrt{a},$$

而

$$x_{k+1} = \left[\frac{x_k + \left[\dfrac{a}{x_k}\right]}{2}\right] \leqslant \frac{x_k + \left[\dfrac{a}{x_k}\right]}{2} \leqslant \frac{x_k + \dfrac{a}{x_k}}{2},$$

于是得到

$$2(x_{k+1} - x_k) \leqslant \frac{a}{x_k} - x_k = \frac{a - x_k^2}{x_k} < 0,$$

矛盾，所以当 $x_{k+1} \geqslant x_k$ 时必有 $x_k \leqslant [\sqrt{a}]$。

综合（1）（2），命题 ④ 获证。 □

点评：解这个题是在我选的这些题之中用的时间最长的，虽然写起来看着好像很简单，但思考的时候费了我不少脑力，也许是我对高斯函数（即原题中的 $[x]$）还不熟悉的原故吧，因为本题的关键就在于对 $[x]$ 的各种放缩。

4.2 ab1962 解题集精选（九）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 401 ∼ 450 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》总第 1 期。

题目 4.2.1. 设 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$（A, B 不全为 0）的距离为 d，求证 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。（不用向量法或是垂直法，而用点到点距离公式去推）

证明 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$ 上任意一点的距离的最小值就是点 P 到直线 l 的距离。在 l 上取任意点 $Q(x,y)$，则

$$|PQ|^2=(x-x_0)^2+(y-y_0^2),$$

由于 $Ax+By+C=0$，则

$$\begin{aligned}(A^2+B^2)|PQ|^2&=(A^2+B^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0^2)]\\&=A^2(x-x_0)^2+B^2(y-y_0)^2+B^2(x-x_0)^2+A^2(y-y_0)^2\\&=[A(x-x_0)+B(y-y_0)]^2+[B(x-x_0)-A(y-y_0)]^2\\&=(Ax+Bx-Ax_0-By_0)^2+(Bx-Ay-Bx_0+Ay_0)^2\\&=(-Ax_0-By_0-C)^2+(Bx-Ay-Bx_0+Ay_0)^2\\&\geqslant(Ax_0+By_0+C)^2,\end{aligned}$$

故

$$|PQ|^2=(x-x_0)^2+(y-y_0^2)\geqslant\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2},$$

当且仅当 $Bx-Ay-Bx_0+Ay_0=0$ 且 $Ax+By+C=0$ 时取等号，所以 $d=|PQ|_{\min}=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。 □

kuing 评注： 其实我不知道题目所要求不准用的“垂直法”是什么东西，不过这公式的推导方法倒是有不少，柯西不等式也可以上。

题目 4.2.2. 在数列 $\{a_n\}$ 中，如果存在非零常数 t，使得 $a_{m+t}=a_m$ 对于任意的非零自然数 m 均成立，那么就称数列 $\{a_n\}$ 为周期数列，其中 t 叫做数列的周期。已知数列 $\{X_n\}$ 满足 $X_{n+1}=|X_n-X_{n-1}|$（$n\geqslant 2$, $n\in\mathbb{N}$），如果 $X_1=1$，$X_2=a$（$a\in\mathbb{R}, a\neq 0$），当数列的周期最小时，该数列的前 2005 项和为 （ ）

（A）668 （B）669 （C）1336 （D）1337

解 要想周期为 1，则 $X_2=a=X_1=1$，此时数列为 $1,1,0,1,1,0,\cdots$ 周期为 3，所以周期不可能为 1。

要想周期为 2，则 $X_3=|X_2-X_1|=|a-1|=X_1=1$，故得 $a=2$ 或 $a=0$（舍去），但是，当 $a=2$ 时，数列为 $1,2,1,1,0,\cdots$ 周期不为 2。

可见数列的周期最小值为 3，此时数列为 $1,1,0,1,1,0,\cdots$。

因为 $2005=3\times 668+1$，一个周期的三项之和为 $1+1+0=2$，所以，该数列的前 2005 项和为 $2\times 668+1=1337$。 □

kuing 评注： 在假设这个选择题是没问题的情况下，上述解法是 OK 的。而如果要严格起来，解法中还应当证明周期为 3 时数列唯一的或者即使数列不同但所求和也相同。事实上，不难证明只有当 $a=0$ 或 $a=1$ 时才能让 X_n 的周期为 3，而 $a=0$ 已被题目舍去，所以是唯一的。至于具体证明，这里留给读者。

题目 4.2.3. 设 a,b 为非负数，c,d 为正数，$b+c\geqslant a+d$。求 $\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ 的最小值。

证明 设 $M=\dfrac{a+b+c+d}{2}$，因 $b+c\geqslant a+d$，故 $b+c=M+p$，$a+d=M-p$（其中 $M>p\geqslant 0$）。不妨设 $c+d=M+q$，$a+b=M-q$（其中 $M>q\geqslant 0$），则

$$
\begin{aligned}
\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}&=\frac{b+c}{a+b}-\frac{b}{a+b}+\frac{b}{c+d}\\
&=\frac{M+p}{M-q}-\frac{b}{M-q}+\frac{b}{M+q}\\
&=\frac{M+p}{M-q}-\frac{2bq}{(M-q)(M+q)}\\
&\geqslant\frac{M+p}{M-q}-\frac{2(M-q)q}{(M-q)(M+q)}\\
&\geqslant\frac{M}{M-q}-\frac{2q}{M+q}\\
&=\frac{M+q+M-q}{2(M-q)}-\frac{M+q-(M-q)}{M+q}\\
&=\frac{M+q}{2(M-q)}+\frac{M-q}{M+q}-\frac{1}{2}\\
&\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\\
&=\sqrt{2}-\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

当且仅当 $p=0$，$a=0$，$\dfrac{M+q}{2(M-q)}=\dfrac{M-q}{M+q}$ 时取等号，即 $a=0$，$b=2$，$c=\sqrt{2}-1$，$d=\sqrt{2}+1$ 时，$\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ 取最小值 $\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$。 □

kuing 评注：上述证明过程中第二行的“不妨设”虽然是正确的，但作者并未说明可以这样设的原因，我觉得还是有必要交待一下的。事实上，原因在于将 a, b, c, d 分别用 d, c, b, a 替换后，所有已知条件的表达式都不变，因此可以不妨设 $c+d\geqslant a+b$，从而有上述证明中的不妨设。如果你觉得难以理解，你也可以分 $c+d\geqslant a+b$ 和 $c+d\leqslant a+b$ 两类去讨论，你会发现两类的证法是一样道理的。

题目 4.2.4. 已知 $a, b, c, x, y\in\mathbb{R}^+$，且 $ax+by=c$，$ax^2+by^2=c$，比较 $x+y$ 与 1 的大小关系。

解 若 $x+y\leqslant 1$，则

$$c=ax+by\geqslant ax(x+y)+by(x+y)=ax^2+by^2+(a+b)xy=c+(a+b)xy,$$

故 $(a+b)xy\leqslant 0$，与题设矛盾，所以 $x+y>1$。 □

kuing 评注：在我挑选题目上来的时候，见到这题就觉得有玩头，第一感觉首先让我想到柯西不等式，于是随即得到如下另证。

kuing 另证 由已知条件及柯西不等式，有

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2c^2&>(x^2+y^2)c^2\\
&=(x^2+y^2)(ax+by)^2\\
&>(x^2+y^2)(a^2x^2+b^2y^2)\\
&\geqslant(ax^2+by^2)^2\\
&=c^2,
\end{aligned}
$$

于是得到 $x+y>1$。 □

而由这另证的过程中，我还发现其实还得到了比 $x+y>1$ 更强的 $x^2+y^2>1$，又注意到柯西不等式是有指数推广的，于是立即考虑更高次方，即是否有 $x^n+y^n>1$？很快我便证实了这一点，而且指数无需正整数，甚至可以是任意实数，得到如下命题。

命题 4.2.1. 设 $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}^+$，且 $ax+by=c$，$ax^2+by^2=c$，则对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，都有 $x^\lambda+y^\lambda>1$。

证明 当 $\lambda=0$ 时不等式显然成立，当 $\lambda=2$ 时即 $x^2+y^2>1$ 前面已证，下面先证明当 $\lambda=-2$ 时不等式成立。

由已知条件及柯西不等式，有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)c^2&=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(ax^2+by^2)^2\\&>\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(a^2x^4+b^2y^4)\\&\geqslant(ax+by)^2\\&=c^2,\end{aligned}$$

所以 $x^{-2}+y^{-2}>1$，即当 $\lambda=-2$ 时不等式成立。

下面再对 λ 分几类分别证之。

（1）当 $0<\lambda<2$ 时，由熟知的结论：当 $t, u>0, 0<\alpha<1$ 时有 $t^\alpha+u^\alpha>(t+u)^\alpha$。在此结论中令 $\alpha=\dfrac{\lambda}{2}\in(0,1)$ 以及 $t=x^2, u=y^2$，得到

$$x^\lambda+y^\lambda>(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}>1;$$

（2）当 $-2<\lambda<0$ 时，仿照（1），令 $\alpha=-\dfrac{\lambda}{2}\in(0,1)$ 以及 $t=x^{-2}, u=y^{-2}$，得到

$$x^\lambda+y^\lambda>(x^{-2}+y^{-2})^{-\frac{\lambda}{2}}>1;$$

（3）当 $\lambda>2$ 时，由已知条件及 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}(x^\lambda+y^\lambda)c^\lambda&=(x^\lambda+y^\lambda)(ax+by)^2(ax+by)^{\lambda-2}\\&>(x^\lambda+y^\lambda)(a^2x^2+b^2y^2)(ax+by)^{\lambda-2}\\&\geqslant(ax^2+by^2)^\lambda\\&=c^\lambda,\end{aligned}$$

这样便得到 $x^\lambda+y^\lambda>1$；

（4）当 $\lambda<-2$ 时，由已知条件及 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}(x^\lambda+y^\lambda)c^{-\lambda}&=(x^\lambda+y^\lambda)(ax^2+by^2)^{-\lambda-2}(ax^2+by^2)^2\\&>(x^\lambda+y^\lambda)(ax^2+by^2)^{-\lambda-2}(a^2x^4+b^2y^4)\\&\geqslant(ax+by)^{-\lambda}\\&=c^{-\lambda},\end{aligned}$$

这样便得到 $x^\lambda+y^\lambda>1$。

综上所述，命题得证。 □

至此，看上去本题的指数推广好像已经完结，但其实还没完，因为尽管我们证明了 $x^\lambda+y^\lambda>1$，但从证明过程中我们可以看出，中间有不少放缩是比较松动的，所以 $x^\lambda+y^\lambda$ 的下确界也许能更大，下面再讨论一下。

事实上，令 $a=c=t, b=t-1$ 且 $t\to+\infty$ 时可使 $x\to 0, y\to 1$，因此当 $\lambda>0$ 时，能使 $x^\lambda+y^\lambda\to 1$，所以当 $\lambda>0$ 时，1 的确是 $x^\lambda+y^\lambda$ 的下确界。

然而，$\lambda<0$ 的情况似乎要复杂些，我暂时也未能解决，目前猜测当 $\lambda<0$ 时，$x^\lambda+y^\lambda$ 的下确界是 $\dfrac{2^\lambda+1}{2^\lambda}$，仍然有待研究。

能力提升

5.1 初探“幂平均三棱锥”的一条共性——李明、张进道

摘要 本文将“平均三棱锥”的概念推广成“幂平均三棱锥”，为探究“幂平均三棱锥”是否还具有“平均三棱锥”的一条共性，应用幂平均的性质和四面体余弦定理证实了一条新的结论：当幂指标 $\lambda > 4$ 时，“幂平均三棱锥”具有“平均三棱锥”的共性。

关键词 平均三棱锥 幂平均三棱锥 四面体余弦定理 二面角

文 [1] 定义了如下四类平均三棱锥：

在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，设 $\triangle ABC$、$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PAC$ 的面积分别为 S、S_1、S_2、S_3，设侧面 PAB 与侧面 PBC、侧面 PBC 与侧面 PAC、侧面 PAB 与侧面 PAC 所成的二面角分别为 α、β、γ，若该三棱锥满足下列四个条件之一：

（1）$S=\dfrac{S_1+S_2+S_3}{3}$；

（2）$S=\sqrt[3]{S_1S_2S_3}$；

（3）$S=\sqrt{\dfrac{S_1^2+S_2^2+S_3^2}{3}}$；

（4）$S=\dfrac{3S_1S_2S_3}{S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3}$。

则称该三棱锥为平均三棱锥。

更具体地，文 [1] 称满足条件（1）的三棱锥 $P\text{-}ABC$ 为算术平均三棱锥；称满足条件（2）的三棱锥 $P\text{-}ABC$ 为几何平均三棱锥；称满足条件（3）的三棱锥 $P\text{-}ABC$ 为平方平均三棱锥；称满足条件（4）的三棱锥 $P\text{-}ABC$ 为调和平均三棱锥。

文 [1] 证明了这四类平均三棱锥有一条共性，即：在平均三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 中至少有一个大于等于 $\dfrac{1}{3}$。

考虑到算术平均、几何平均、平方平均以及调和平均都是幂平均的特例，所以我们可以在文 [1] 的基础上进一步定义“幂平均三棱锥”：

在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，设 $\triangle ABC$、$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PAC$ 的面积分别为 S、S_1、S_2、S_3，若有

$$S=\begin{cases}\left(\dfrac{S_1^\lambda+S_2^\lambda+S_3^\lambda}{3}\right)^{\frac{1}{\lambda}}, & \lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq 0,\\ \sqrt[3]{S_1S_2S_3}, & \lambda=0,\end{cases}$$

则称三棱锥 $P\text{-}ABC$ 为“幂平均三棱锥”。

一个自然的问题是：“幂平均三棱锥”是否还具有文 [1] 中的共性呢？笔者经过初步探究得到如下一条**结论**：当 $\lambda\leqslant 4$ 时，“幂平均三棱锥”恒有文 [1] 中的共性。

为证明该结论，先介绍如下一条引理：

引理 5.1.1. 若 S_1、S_2、S_3 均大于 0，则

$$\sqrt{3(S_1^4+S_2^4+S_3^4)}\leqslant 3(S_1^2+S_2^2+S_3^2)-2(S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3)。$$

引理的证明 令 $x=S_1^2+S_2^2+S_3^2$，$y=S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3$，于是

$$\begin{aligned}\sqrt{3(S_1^4+S_2^4+S_3^4)}&=\sqrt{3(S_1^2+S_2^2+S_3^2)^2-2(3S_1^2S_2^2+3S_2^2S_3^2+3S_1^2S_3^2)}\\&\leqslant\sqrt{3(S_1^2+S_2^2+S_3^2)^2-2(S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3)^2}\\&=\sqrt{3x^2-2y^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 3x-2y\\
&=3(S_1^2+S_2^2+S_3^2)-2(S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3),
\end{aligned}
$$

故引理成立。 □

下面来证明上文**结论**。

证明 由于“幂平均关于幂指标 λ 单调递增”（参见文 [2]），于是，当 $\lambda \leqslant 4$ 时

$$S^2 \leqslant \sqrt{\frac{S_1^4+S_2^4+S_3^4}{3}},$$

结合上文引理便得到

$$S^2 \leqslant (S_1^2+S_2^2+S_3^2)-\frac{2}{3}(S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3),$$

又由四面体余弦定理（参见文 [3]）可得

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_1S_2\cos\alpha-2S_2S_3\cos\beta-2S_1S_3\cos\gamma=S^2,$$

于是

$$S_1S_2\left(\cos\alpha-\frac{1}{3}\right)+S_2S_3\left(\cos\beta-\frac{1}{3}\right)+S_1S_3\left(\cos\gamma-\frac{1}{3}\right)\geqslant 0,$$

所以 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 至少有一个大于等于 $\dfrac{1}{3}$，即 $\lambda \leqslant 4$ 时，“幂平均三棱锥”恒有文 [1] 中的共性，结论得证。 □

得出了上述结论，我们不禁想问：当 $\lambda > 4$ 时，“幂平均三棱锥”是否具有文 [1] 中的共性呢？福建省福清港头中学何灯老师通过 Bottema 软件求得：当 $\lambda \leqslant 4.81$ 时，“幂平均三棱锥”具有文 [1] 中的共性；当 $\lambda \geqslant 4.82$ 时，“幂平均三棱锥”不具有文 [1] 中的共性，至于该结论的手工证明还有待进一步研究。

致谢 本文的研究得到了杨学枝老师的指导帮助，在此表示衷心感谢！

参考文献

[1] 张进道, 李明. 四类平均三棱锥的一条共性 [J]. 中学数学, 2011.1:66.
[2] 靳平. 数学的 100 个基本问题 [M]. 太原: 山西科学技术出版社, 2004.1:105.
[3] 王太东, 赵兴凤. 余弦、正弦定理在四面体中的推广 [J]. 数学通讯, 2001.9:16.

5.2 多边形的一种分类方法[1]——李明

摘要 本文提出并证明了与多边形相关的一个定理，并根据该定理给出了多边形的一种分类方法。

关键词 多边形 外接圆 可直 n 边形 可锐 n 边形 可钝 n 边形

我们知道，边长给定的 n（$n \geqslant 4$）边形总能适当调整到有外接圆（文 [1]），但容易发现边长关系不同的 n 边形在有外接圆时，其外接圆的圆心位置却不全相同。对此，本文给出如下定理。

定理 5.2.1. 记 n（$n \geqslant 4$）边形的 n 条边长递增重排后为 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，则

（1）若 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \arcsin \dfrac{a_i}{a_n} = \dfrac{\pi}{2}$，则必可作出一个直径为 $d_1 = a_n$ 的圆，使得该 n 边形能调整到以此圆为外接圆，且外接圆圆心在最长边 a_n 的中点；

（2）若 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \arcsin \dfrac{a_i}{a_n} > \dfrac{\pi}{2}$，则必可作出一个直径为 $d_2 \in \left(a_n, \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right)$ 的圆，使得该 n 边形能调整到以此圆为外接圆，且外接圆圆心在该 n 边形内；

（3）若 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \arcsin \dfrac{a_i}{a_n} < \dfrac{\pi}{2}$，则必可作出一个直径为 $d_3 \in \left(a_n, \sqrt{\dfrac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})^3}{6(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_n)}}\right)$ 的圆，使得该 n 边形能调整到以此圆为外接圆，且外接圆圆心在该 n 边形外。

证明 先证情形（1）。以 $\dfrac{a_n}{2}$ 为腰，以 a_i（$i = 1, 2, \cdots, n-1$）为底，我们便能作出 $n-1$ 个小等腰三角形，它们的顶角依次为 $2\arcsin \dfrac{a_i}{a_n}$（$i = 1, 2, \cdots, n-1$）。由于 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} 2\arcsin \dfrac{a_i}{a_n} = \pi$，于是，将这 $n-1$ 个小等腰三角形的顶点相重合，腰顺次重合，我们便能得到图 5.2.1 中的 n 边形。该 n 边形显然有外接圆，其直径为 d_1（$d_1 = a_n$），这些顶点的重合处就是圆心 O，它恰好位于最长边 a_n 的中点；

再证情形（2）。由于 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \arcsin \dfrac{a_i}{a_n} > \dfrac{\pi}{2}$，于是 $\sum\limits_{i=1}^{n} \arcsin \dfrac{a_i}{a_n} > \pi$。令 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \arcsin \dfrac{a_i}{x}$（$x \geqslant a_n$），显然 $f(x)$ 在 $[a_n, +\infty)$ 上是单调递减的连续函数。又 $f(a_n) > \pi$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$。因此，必有唯一的 d_2（$d_2 > a_n$），使得 $f(d_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \arcsin \dfrac{a_i}{d_2} = \pi$。于是以 $\dfrac{d_2}{2}$ 为腰，以 a_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）为底，我们便能作出 n 个小等腰三角形，它们的顶角依次为 $2\arcsin \dfrac{a_i}{d_2}$（$i = 1, 2, \cdots, n$）。由于 $\sum\limits_{i=1}^{n} 2\arcsin \dfrac{a_i}{d_2} = 2\pi$，于是，将这 n 个小等腰三角形的顶点相重合，腰顺次重合，我们便能得到图 5.2.2 中的 n（$n \geqslant 4$）边形。该 n 边形显然有外接圆，其直径为 d_2（$d_2 > a_n$），这些顶点的重合处就是圆心 O，它显然位于该 n 边形内。再由 Jordan 不等式的变形 $\arcsin y < \dfrac{\pi}{2} \cdot y$（$0 < y < 1$），我们便有 $\pi = \sum\limits_{i=1}^{n} \arcsin \dfrac{a_i}{d_2} < \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{d_2}\right)$，于是 $d_2 < \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$；

最后证明情形（3）。用反证法。若我们能够用边 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 绘出图 5.2.1 的形状，则 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \arcsin \dfrac{a_i}{a_n} = \dfrac{\pi}{2}$，这显然与 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \arcsin \dfrac{a_i}{a_n} < \dfrac{\pi}{2}$ 矛盾。同样，若我们能绘出图 5.2.2 的形状，则

$$\sum_{i=1}^{n-1} \arcsin \frac{a_i}{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \arcsin \frac{a_i}{a_n} - \frac{\pi}{2} > \sum_{i=1}^{n} \arcsin \frac{a_i}{d_2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

这也与 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \arcsin \dfrac{a_i}{a_n} < \dfrac{\pi}{2}$ 矛盾。所以，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \arcsin \dfrac{a_i}{a_n} < \dfrac{\pi}{2}$ 的 n 边形有外接圆时，圆心 O 既不能位于最长边 a_n 的中点，也不能位于该 n 边形内。于是，外接圆圆心 O 只能位于该 n 边形外。

[1] 该文曾发表于《中国初等数学研究》2010 卷

显然此时外接圆直径 $d_3 > a_n$（图 5.2.3）。再由 a_n 所对应的圆心角为 $\theta \in (0,\pi)$，所以 a_n 所对应的劣弧长 $l = \dfrac{d_3}{2}\theta$。记 $T = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$，于是利用文 [2] 中的不等式 $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$（$x > 0$），我们便有

$$a_n = d_3 \sin\frac{\theta}{2} = d_3 \sin\frac{l}{d_3} > d_3 \sin\frac{T}{d_3} > d_3\left(\frac{T}{d_3} - \frac{T^3}{6d_3^3}\right) = T - \frac{T^3}{6d_3^2},$$

解得 $d_3 < \sqrt{\dfrac{T^3}{6(T-a_n)}}$。 □

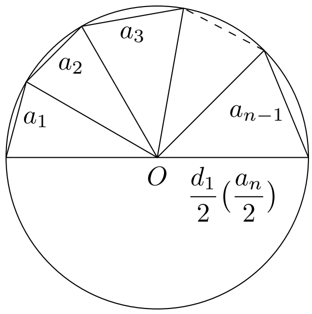


图 5.2.1

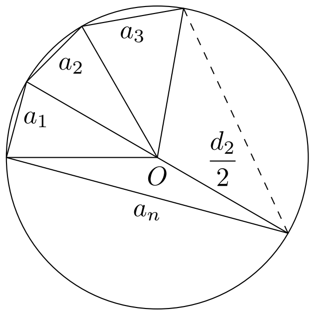


图 5.2.2

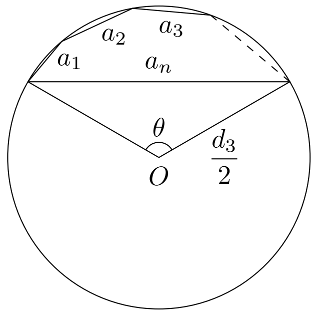


图 5.2.3

因为 n（$n \geqslant 4$）边形的 n 条边长递增重排后为 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，这 n 条边长一定满足且只能满足

$$\sum_{i=1}^{n-1} \arcsin\frac{a_i}{a_n} = \frac{\pi}{2},\quad \sum_{i=1}^{n-1} \arcsin\frac{a_i}{a_n} > \frac{\pi}{2},\quad \sum_{i=1}^{n-1} \arcsin\frac{a_i}{a_n} < \frac{\pi}{2}$$

这三个关系式之一。根据上文的定理，我们不妨将边长满足这三个关系式的 n 边形依次称为“可直 n 边形”、“可锐 n 边形”、“可钝 n 边形”，这就对多边形给出了一种分类方法。

参考文献

[1] 史坦因豪斯. 初等数学小丛书——又一百个数学问题 [M]. 庄亚栋, 译. 上海: 上海教育出版社, 1980.

[2] 刘玉琏, 傅沛仁, 林玎, 等. 数学分析讲义 [M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

朝花夕拾

6.1 【封面故事】正等角中心与费马点——何万程

定理 6.1.1. 在 $\triangle ABC$ 向外作正三角形 $\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$、$\triangle ABC'$，则直线 AA'、BB'、CC' 共点，这一点称为 $\triangle ABC$ 的正等角中心。

证明 作 $\triangle CAB'$ 的外接圆，作 $\triangle BCA'$ 的外接圆，两圆交于点 O，因为 $\angle AOC = 120°$，$\angle A'BC = \angle A'OC = 60°$，所以 $\angle AOC + \angle A'OC = 180°$，即直线 AA' 过点 O。同理可证直线 BB' 也过点 O。因此 $\angle AOB = 360° - \angle AOC - \angle BOC = 120°$，由此得 $\angle AC'B + \angle AOB = 180°$，所以 $\triangle ABC'$ 的外接圆也过点 O，即直线 CC' 也过点 O。 □

设 $\triangle ABC$ 的正等角中心是 O，当 $\triangle ABC$ 的所有内角都小于 $120°$ 时，正等角中心在 $\triangle ABC$ 内，且 $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB = 120°$；当有一个内角等于 $120°$ 时，正等角中心与该角的顶点重合；当有一个内角大于 $120°$ 时，正等角中心在 $\triangle ABC$ 外，假设这个角的顶点是 A，则点 O 与点 A 在 BC 的同一侧，$\angle BOC = 120°$，$\angle COA = \angle AOB = 60°$。

定理 6.1.2. 设 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 最大，其正等角中心是 O，向外作正三角形 $\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$、$\triangle ABC'$，则

（1）当 $\angle A < 120°$ 时 $AA' = BB' = CC' = AO + BO + CO$；

（2）当 $\angle A = 120°$ 时 $AA' = BB' = CC' = AB + CA$；

（3）当 $\angle A > 120°$ 时 $AA' = BB' = CC' = -AO + BO + CO$。

证明 （1）在 AA' 上取一点 P，使点 A 与点 P 在点 O 两侧，并且 $PO = BO$，由定理 6.1.1 的证明中知 $\angle BOP = 60°$，所以 $BO = BP$，$\angle CBO = \angle ABP$，又因为 $CB = AB$，所以 $\triangle CBO \cong \triangle ABP$，于是得 $CO = AP$，即 $AA' = AO + BO + CO$，同理可证 $BB' = AO + BO + CO$，$CC' = AO + BO + CO$，所以 $AA' = BB' = CC' = AO + BO + CO$。

类似可证明（2）、（3）。 □

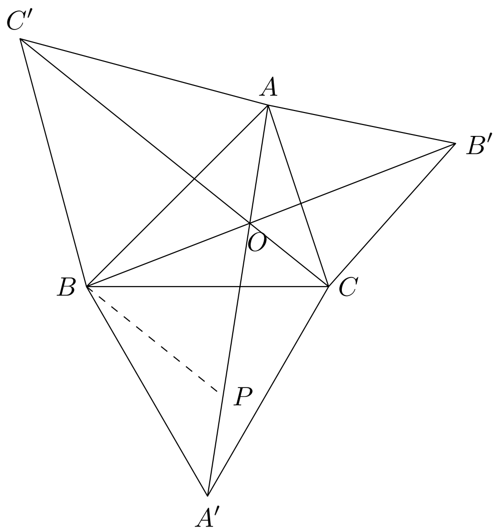


图 6.1.1

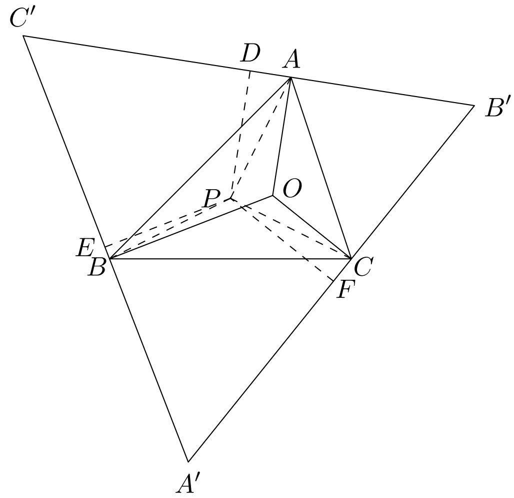


图 6.1.2

定理 6.1.3. 当三角形的所有内角都小于 $120°$ 时，该三角形的正等角中心到该三角形的各顶点距离的和是所有点到该三角形各顶点的和中最小的，这个点又称为费马点。

证明 设$\triangle ABC$的等角中心是O，连AO、BO、CO，过点A作$B'C'\perp AO$，过点B作$A'C'\perp BO$，过点C作$A'B'\perp CO$，另取一点P，作$PD\perp B'C'$，$PE\perp A'C'$，$PF\perp A'B'$，垂足分别是D,E,F，连PA、PB、PC。因为$\angle BOC=\angle COA=\angle AOB=120^\circ$，所以$\angle A'=\angle B'=\angle C'=60^\circ$，因此$A'B'=B'C'=C'A'$。由三角形的面积公式，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}A'B'\cdot CO+\frac{1}{2}A'C'\cdot BO+\frac{1}{2}B'C'\cdot AO\\=&\frac{1}{2}A'B'\cdot PF+\frac{1}{2}A'C'\cdot PE+\frac{1}{2}B'C'\cdot PD\\=&S_{\triangle A'B'C'},\end{aligned}$$

所以$AO+BO+CO=PD+PE+PF$，因此$AP+BP+CP>AO+BO+CO$，亦即$AO+BO+CO$最小。 □

现在来求这个和的值。如果$\triangle ABC$中$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，其面积是S。设$AO=x$，$BO=y$，$CO=z$。则由余弦定理，得下面方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+xy=c^2, & (6.1.1)\\ x^2+z^2+xz=b^2, & (6.1.2)\\ y^2+z^2+yz=a^2。 & (6.1.3)\end{cases}$$

(6.1.1)、(6.1.2)、(6.1.3) 三方程相加，得

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xy+xz+yz=a^2+b^2+c^2。\tag{6.1.4}$$

由三角形的面积公式得

$$xy+xz+yz=\frac{4}{\sqrt{3}}S。\tag{6.1.5}$$

(6.1.4) 减去 (6.1.5) 并两边除以 2，得

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}S。\tag{6.1.6}$$

(6.1.5) 的两倍加上 (6.1.6)，得

$$(x+y+z)^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S,$$

于是得

$$x+y+z=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S}。\tag{6.1.7}$$

设$x+y+z=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S}=l$。(6.1.1) 减去 (6.1.2)，两边再除以l，得

$$y-z=\frac{c^2-b^2}{l}。\tag{6.1.8}$$

(6.1.1) 减去 (6.1.3)，两边再除l，得

$$x-z=\frac{c^2-a^2}{l}。\tag{6.1.9}$$

(6.1.8) 和 (6.1.9) 相加，得

$$x+y-2z=\frac{2c^2-a^2-b^2}{l}。\tag{6.1.10}$$

(6.1.7) 的两倍加上 (6.1.10)，两边再除以 3，得

$$x+y=\frac{2c^2-a^2-b^2+2l^2}{3l}。\tag{6.1.11}$$

(6.1.9) 减去 (6.1.8)，得

$$x-y=\frac{b^2-a^2}{l}。\tag{6.1.12}$$

解由 (6.1.11)、(6.1.12) 组成的方程组，得

$$x=\frac{b^2+c^2+l^2-2a^2}{3l}=\frac{3\left(b^2+c^2-a^2\right)+4\sqrt{3}S}{3\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\sqrt{3}S}},$$

$$y=\frac{c^2+a^2+l^2-2b^2}{3l}=\frac{3\left(c^2+a^2-b^2\right)+4\sqrt{3}S}{3\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\sqrt{3}S}}。$$

同理可得

$$z=\frac{a^2+b^2+l^2-2c^2}{3l}=\frac{3\left(a^2+b^2-c^2\right)+4\sqrt{3}S}{3\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\sqrt{3}S}}。$$

类似上述计算，我们可得结论，无论外等角中心位置如何，总有

$$AA'=BB'=CC'=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S}。$$

定理 6.1.4. 当三角形有一内角不小于 120° 时，则这个角的顶点到该三角形的各顶点的距离的和是所有点到该三角形各顶点的和中最小的。

证明 过点 B 作 $A'C'\perp AB$，过点 C 作 $A'B'\perp AC$，使 $A'B'=A'C'$，直线 $B'C'$ 过点 A，另取一点 P，作 $PD\perp B'C'$，$PE\perp A'C'$，$PF\perp A'B'$，垂足分别是 D,E,F，连 PA、PB、PC。因为

$$\angle BAC>120^\circ,$$

所以

$$\angle A<60^\circ,$$

因此

$$A'B'=A'C'>B'C'。$$

由三角形的面积公式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}A'C'\cdot AB+\frac{1}{2}A'B'\cdot AC\\=&\frac{1}{2}B'C'\cdot PD+\frac{1}{2}A'C'\cdot PE+\frac{1}{2}A'B'\cdot PF=S_{\triangle A'B'C'},\end{aligned}$$

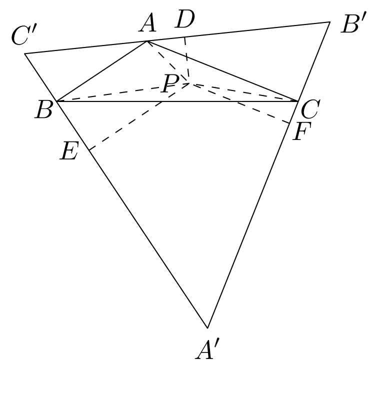


图 6.1.3

所以

$$AB+AC=\frac{B'C'}{A'B'}\cdot PD+PE+PF<PD+PE+PF。$$

因为

$$AP+BP+CP>PD+PE+PF,$$

所以

$$AB+AC<AP+BP+CP,$$

亦即 $AB+AC$ 最小。 □

1638 年，勒内 • 笛卡儿（René Descartes）邀请费马（Pierre de Fermat）思考关于到四个顶点距离为定值的函数的问题。这大概也是 1643 年，费马写信向埃万杰利斯塔 • 托里拆利（Evangelista Torricelli）询问关于费马点的问题的原因。这个问题最早也是被托里拆利解决的。他的解法中用到了椭圆的焦点的性质。这个点和当时已知的三角形特殊点都不一样。这个点因此也叫做托里拆利点。

1647 年，博纳文图拉 • 卡瓦列里（Bonaventura Francesco Cavalieri）在他的著作《几何学题集》（Exerciones Geometricae）中也探讨了这个问题。他发现，将作正三角形时作出的第三个点与对面的顶点连接，可以得出三条线段。这三条线段交于托里拆利点，而且托里拆利点对每条边张的角都是 120°。

例 6.1.1. 给定点 A、B 和直线 l，求作一点 P，使其到点 A、B 以及到直线 l 距离之和最小。

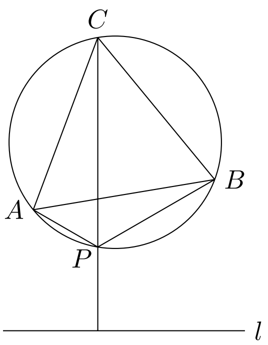


图 6.1.4

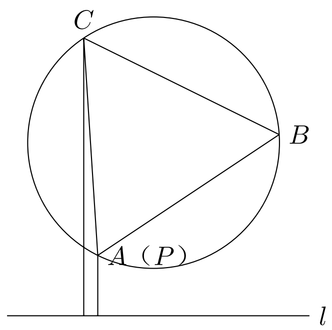


图 6.1.5

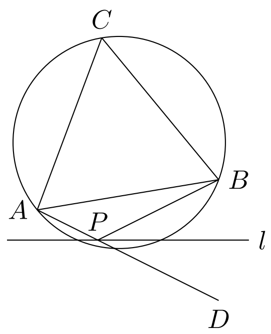


图 6.1.6

解 （1）若点 A、B 在直线 l 的异侧或一点在直线 l 上，则直线 AB 与 l 的交点就是所求。

（2）若点 A、B 都在直线 l 上，则线段 AB 上任何一点都是所求。

（3）若点 A、B 在直线 l 同侧，向远离直线 l 的一侧作正三角形 ABC 及其外接圆。

（a）若外接圆与直线无交点，并且点 C 到 l 的垂线与线段 AB 有交点，设点 P 到 l 的射影是 Q，则平面上任意点到点 A、B、直线 l 上任意点的距离和不比 CQ 小，所以所求的点就是点 C 到 l 的垂线与外接圆的交点。

（b）若外接圆与直线无交点，并且点 C 到 l 的垂线与线段 AB 无交点，设点 P 到 l 的射影是 Q，点 A 到 l 的射影是 T，则平面上任意点到点 A、B、直线 l 上任意点的距离和不比 $AB + AT$ 小，所以所求的点就是点 A。

（c）若外接圆与直线有交点设点 P 到 l 的射影是 Q。若点 Q 在外接圆外部，设点 B 关于 l 的对称点是 D，则直线 AD 与 l 的交点在外接圆外（因为此时不妨设距离 l 较近的点是 A，外接圆距 A 较近的点是 T，则直线 AT 与 l 的夹角小于 $30°$，直线 BT 与 l 的夹角大于 $30°$。），平面上任意点到点 A、B、直线 l 上任意点的距离和不比 CQ 小；若点 Q 在外接圆或内部，设点 B 关于 l 的对称点必定存在（原因类似前面），设这个点是 D，则平面上任意点到点 A、B、直线 l 上任意点的距离和不比 AD 小；所以所求的点就是 AD 与 l 的交点。 □

由上面的例子可以看到，这个问题：河岸近似可看成直线，在河岸边建一个水厂向河同侧的两村供水，使供水管道总长最小，求这个水厂的位置。通常来说，水厂的位置不是用对称点的方法得到的。