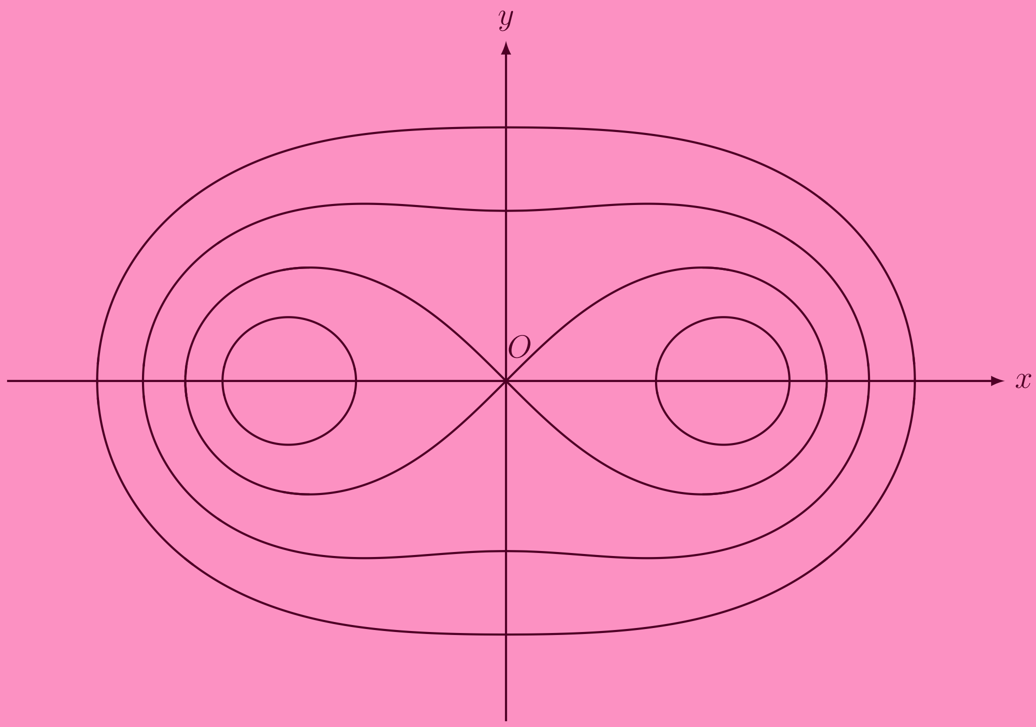
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2013 年第 1 期　　总第 11 期



目录

中考加油站

1.1 一线三角基本图的妙用——谢勇

在几何解题中，根据基本图形结构及其结论合理地展开联想，可以让我们借助已有的解题方法、思路、结论，化未知为已知，提高思维品质，快速打开解题思路。在相似三角形学习中，就有一个重要的基本图形结构——“一线三角”，值得研究。

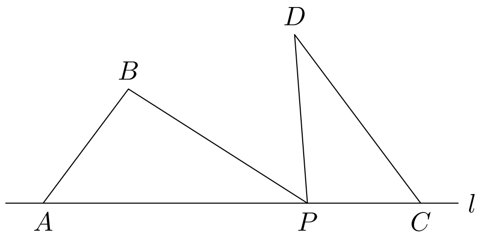


图 1.1.1

引例 如图 1.1.1，A，P，C 是直线 l 上不同的三点，B，D 两点在直线 l 的同侧，若 $\angle BPD = \angle BAP = \angle DCP = \alpha$（$0^\circ < \alpha < 180^\circ$），则有 $\triangle ABP \sim \triangle CPD$。

证明 因为 $\angle BPD + \angle DPC = \angle BPC = \angle BAP + \angle PBA$，所以 $\angle BPD + \angle DPC = \angle BAP + \angle PBA$。因为 $\angle BPD = \angle BAP$，所以 $\angle PBA = \angle DPC$。又因为 $\angle BAP = \angle DCP$，所以 $\triangle ABP \sim \triangle CPD$。 □

下面，借助这个基本图形结构及其结论解决几例考题。

例 1.1.1. 如图 1.1.2，P 为线段 AB 上一点，AD 与 BC 交于 E，$\angle CPD = \angle A = \angle B$，$BC$ 交 PD 于 F，AD 交 PC 于 G，则图中相似三角形有 （ ）

（A）1 对 （B）2 对 （C）3 对 （D）4 对

分析 由于 $\angle CPD = \angle A = \angle B$，根据引例可直接发现 $\triangle GAP \sim \triangle PBF$。再有 $\angle GPD = \angle A$，$\angle GDP = \angle PDA$ 及 $\angle CPF = \angle B$，$\angle PCF = \angle BCP$ 可分别证得 $\triangle DPG \sim \triangle DAP$，$\triangle CPF \sim \triangle CBP$，故图中相似三角形有三对。

解 选 C。 □

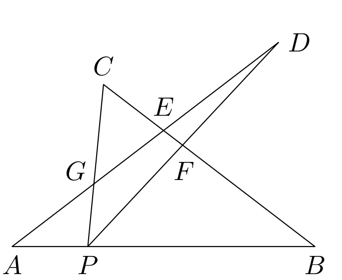


图 1.1.2

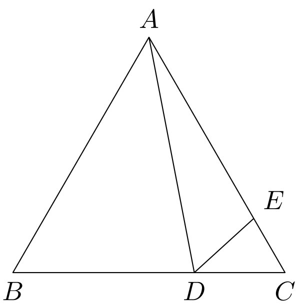


图 1.1.3

例 1.1.2. 如图 1.1.3，在等边 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 边上一点，E 为 AC 边上一点，且 $\angle ADE = 60^\circ$，$BD = 4$，$CE = \dfrac{4}{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为 （ ）

（A）$8\sqrt{3}$ （B）15 （C）$9\sqrt{3}$ （D）$12\sqrt{3}$

分析 欲求等边 $\triangle ABC$ 的面积，需先求其边长。观察发现 $\angle ADE=\angle B=\angle C=60^\circ$，于是由引例知道 $\triangle ABD\sim\triangle DCE$，然后根据相似三角形的对应边的比相等构建方程求解。

解 设 $DC=x$，则 $AB=BC=BD+DC=4+x$。

因为 $\triangle ABD\sim\triangle DCE$（证明略），所以 $\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{BD}{CE}$，所以 $\dfrac{4+x}{x}=\dfrac{4}{\frac{4}{3}}$，解得 $x=2$，所以 $BC=4+x=6$。故 $\triangle ABC$ 的面积是 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times BC^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$，答案选 C。 □

例 1.1.3. 如图 1.1.4，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$BC=4AD=4\sqrt{2}$，$\angle B=45^\circ$。直角三角板含 45° 角的顶点 E 在边 BC 上移动，一直角边始终经过点 A，斜边与 CD 交于点 F。若 $\triangle ABE$ 为等腰三角形，则 CF 的长等于________。

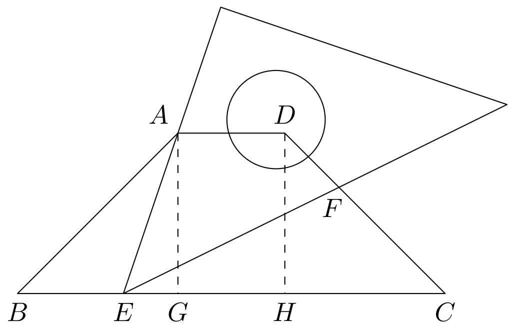


图 1.1.4

分析 由条件知 $\angle AEF=\angle B=\angle C=45^\circ$，从而根据引例知道 $\triangle ABE\sim\triangle ECF$。接下来，根据相似三角形的对应边的比相等，建立 CF 长与 BE 长之间的函数关系式，进而求出 $\triangle ABE$ 为等腰三角形的三种情况下的 BE 长，代入函数关系式即得 CF 长。

解 如图 1.1.4，过 A，D 两点分别作 $AG\perp BC$ 于 G，$DH\perp BC$ 于 H。

可求得 $BG=CH=\dfrac{1}{2}(4\sqrt{2}-\sqrt{2})=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。又因为 $\angle B=45^\circ$，所以 $AB=\sqrt{2}BG=3$。

设 $BE=x$，$CF=y$，则 $EC=BC-BE=4\sqrt{2}-x$。

因为 $\triangle ABE\sim\triangle ECF$（证明略），所以 $\dfrac{AB}{EC}=\dfrac{BE}{CF}$，所以 $\dfrac{3}{4\sqrt{2}-x}=\dfrac{x}{y}$，即 $y=\dfrac{x(4\sqrt{2}-x)}{3}$。

（1）如图 1.1.5，当 $AB=AE$ 时，$\angle B=\angle AEB=45^\circ$，所以 $\angle BAE=90^\circ$，所以 $BE=\sqrt{2}AB=3\sqrt{2}$，即 $x=3\sqrt{2}$，所以 $y=\dfrac{3\sqrt{2}(4\sqrt{2}-3\sqrt{2})}{3}=2$，即 $CF=2$；

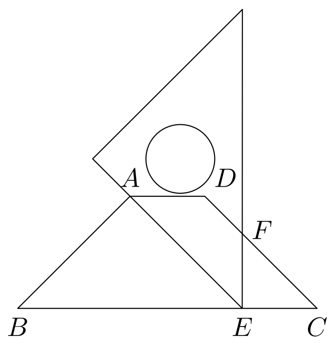


图 1.1.5

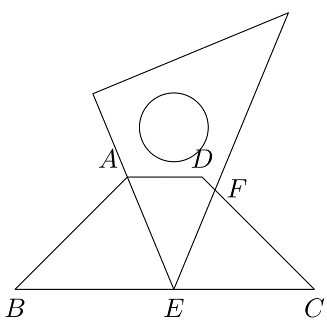


图 1.1.6

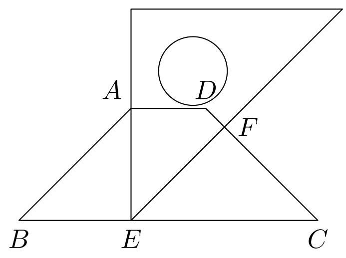


图 1.1.7

（2）如图 1.1.6，当 $AB=BE=3$ 时，$x=3$，所以 $y=\dfrac{3(4\sqrt{2}-3)}{3}=4\sqrt{2}-3$，即 $CF=4\sqrt{2}-3$；

（3）如图 1.1.7，当 $AE=BE$ 时，$\angle B=\angle BAE=45^\circ$，所以 $\angle AEB=90^\circ$。此时，BE 长就是图 1.1.4 中的 BG 长，等于 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $y=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(4\sqrt{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{3}=\dfrac{5}{2}$，即 $CF=\dfrac{5}{2}$。

综上可知答案填 2 或 $4\sqrt{2}-3$ 或 $\dfrac{5}{2}$。 □

例 1.1.4. 如图 1.1.8，点 P 是正方形 $ABCD$ 边 AB 上一点（不与点 A，B 重合），连接 PD 并将线段 PD 绕点 P 顺时针方向旋转 90° 得到线段 PE，PE 交边 BC 于点 F，连接 BE，DF。

（1）求证：$\angle ADP=\angle EPB$；

（2）求 $\angle CBE$ 的度数；

（3）当 $\dfrac{AP}{AB}$ 的值等于多少时，$\triangle PFD\sim\triangle BFP$？并说明理由。

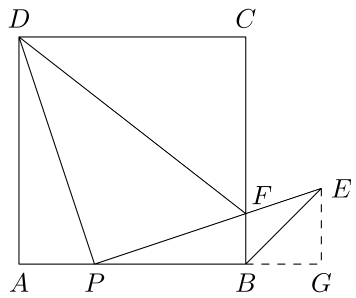


图 1.1.8

分析 图形中蕴含 $\angle DPE=\angle A=\angle ABC=90^\circ$，根据引例证明方法易解第（1）问，且有 $\triangle APD\sim\triangle BFP$。对于第（2）问，由于 $PD=PE$，可过点 E 作 AB 边的垂线，构造与 $\mathrm{Rt}\triangle APD$ 全等的直角三角形解决。对于第（3）问，可以逆向思考探究，将 $\triangle PFD\sim\triangle BFP$ 产生的相似比 $\dfrac{PD}{PB}=\dfrac{PF}{BF}$（即 $\dfrac{PD}{PF}=\dfrac{PB}{BF}$），与 $\triangle APD\sim\triangle BFP$ 产生的相似比 $\dfrac{AP}{BF}=\dfrac{PD}{PF}$ 联系在一起，证得 $AP=PB$ 后得解。

解 （1）证明：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle A=\angle PBC=90^\circ$，$AB=AD$，所以 $\angle ADP+\angle APD=90^\circ$。因为 $\angle DPE=90^\circ$，所以 $\angle APD+\angle EPB=90^\circ$，所以 $\angle ADP=\angle EPB$。

（2）如图 1.1.8，过 E 点作 $EG\perp AB$ 的延长线于点 G，则 $\angle A=\angle EGP=90^\circ$。

又因为 $\angle ADP=\angle EPB$，$PD=PE$，所以 $\triangle PAD\cong\triangle EGP$。所以 $EG=AP$，$AD=PG$。

又因为 $AB=AD$，所以 $AB=PG$，所以 $AB-PB=PG-PB$，即 $AP=BG$，所以 $EG=BG$，所以 $\angle EBG=45^\circ$，所以 $\angle CBE=\angle CBG-\angle EBG=45^\circ$。

（3）假设 $\triangle PFD\sim\triangle BFP$，则有 $\dfrac{PD}{PF}=\dfrac{PB}{BF}$。

因为 $\angle ADP=\angle FPB$，$\angle A=\angle PBF$，所以 $\triangle ADP\sim\triangle BPF$，所以 $\dfrac{PD}{PF}=\dfrac{AP}{BF}$，所以 $\dfrac{PB}{BF}=\dfrac{AP}{BF}$，所以 $PB=AP$。

所以 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{1}{2}$ 时，$\triangle PFD\sim\triangle BFP$。 □

1.2 利用函数图象的对称性解题——谢勇

与函数相关的内容，学生在初中阶段主要学习了一次函数、反比例函数及二次函数，知道了它们的图象分别是直线、双曲线和抛物线，并从图形对称性的角度，认识到这些图象都是轴对称图形，直线和双曲线还是中心对称图形。解题中，如果由此分析思考，就可找到一些新颖、方便、快捷的答题思路。请看下面几例问题。

例 1.2.1. 如图 1.2.1，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k<0$）的图象与经过原点的直线 l 相交于 A、B 两点，已知 A 点坐标为 $(-2,1)$，那么 B 点的坐标为________。

解析 因为双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$（$k<0$）的对称中心是原点 O，而原点 O 又是直线 l 的对称中心，由此知道它俩的交点 A，B 关于原点 O 对称，而 A 点坐标为 $(-2,1)$，所以 B 点坐标为 $(2,-1)$。 □

思路点拨 正比例函数的图象是一条经过原点的直线，它的对称中心有无数个，原点是其中之一；反比例函数的图象是双曲线，它的对称中心只有一个就是原点。当这两类函数的图象共存于同一平面直角坐标系时，形成的整体图形仍然具有中心对称性，对称中心就是原点。这时，如果两类函数图象有交点，则它们必定关于原点对称。实际中，部分学生会由 $A(-2,1)$ 出发，运用待定系数法分别求出双曲线和直线 l 的解析式，再构建方程（组）求解，显然，这没有上面解法简便。

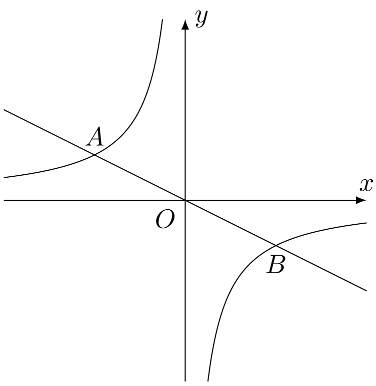


图 1.2.1

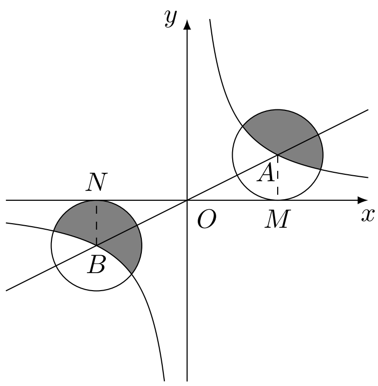


图 1.2.2

例 1.2.2. 如图 1.2.2，正比例函数与反比例函数的图象相交于 A，B 两点，分别以 A，B 两点为圆心，画与 x 轴相切的两个圆，若点 A 的坐标为 $(2,1)$，则图中两个阴影部分面积的和是________。

解析 取 $\odot A$，$\odot B$ 与 x 轴的切点分别为 M，N，连接 AM，BN，则 $AM\perp x$ 轴，$BN\perp x$ 轴。又 A 点坐标为 $(2,1)$，根据上题解析过程易求得 B 点坐标为 $(-2,-1)$，所以 $AM=1$，$BN=1$，可知 $\odot A$ 与 $\odot B$ 是两个等圆，且关于原点对称。由此观察图形知道，两个阴影部分面积的和就是其中一个圆的面积，求得答案为 π。 □

思路点拨 解答此题的关键：（1）理解交点 A，B 关于原点对称，求出 B 点坐标；（2）由 A，B 两点的坐标结合切线的性质发现 $\odot A$ 和 $\odot B$ 是半径为 1 的两个等圆，且关于原点对称；（3）由整个图形的中心对称性理解 $\odot A$ 中的阴影部分（或空白部分）与 $\odot B$ 中的空白部分（或阴影部分）关于原点对称，从而知晓它们的面积相等；（4）利用整体思想解答。可见，熟悉函数图象的对称性对解题起着重要的作用。

例 1.2.3. 如图 1.2.3，已知函数 $y_1=-x+1$ 的图象与 x 轴、y 轴分别交于点 C，B，与双曲线 $y_2=\dfrac{k}{x}$ 交于点 A，D，若 $AB+CD=BC$，则 k 的值为________。

解析 过点 D 作 $DE\perp x$ 轴于 E。

在 $y=-x+1$ 中，当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $y=0$ 时，$x=1$。所以 $OB=OC=1$。

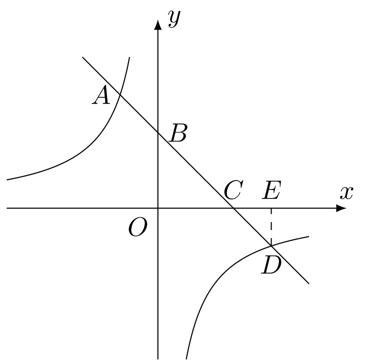


图 1.2.3

又因为 $\angle BOC = 90^\circ$，所以 $\angle BCO = 45^\circ$，所以 $\angle DCE = 45^\circ$，从而有 $DE = CE$。

因为直线 $y_1 = -x + 1$ 与双曲线 $y_2 = \dfrac{k}{x}$ 都关于直线 $y = x$ 对称，所以 $AB = CD$。

因为 $AB + CD = BC$，所以 $CD = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $DE = CE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}CD = \dfrac{1}{2}$，所以 $OE = OC + CE = \dfrac{3}{2}$，所以 D 点坐标为 $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$。

将它代入 $y_2 = \dfrac{k}{x}$ 中，得 $k = \dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}$，即 $k = -\dfrac{3}{4}$。 □

思路点拨 （1）双曲线 $y = \dfrac{k}{x}$（$k > 0$）与直线 $y = x + b$（或直线 $y = -x + b$）（$b \neq 0$）共存于同一平面直角坐标系中，形成的整体图形是以直线 $y = -x$（或直线 $y = x$）为对称轴的轴对称图形；（2）双曲线 $y = \dfrac{k}{x}$（$k < 0$）与直线 $y = -x + b$（或 $y = x + b$）（$b \neq 0$）共存于同一平面直角坐标系中，形成的整体图形是以直线 $y = x$（或直线 $y = -x$）为对称轴的轴对称图形。理解这些，对解答本题很关键。

例 1.2.4. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）的顶点坐标 $(-1, -3.2)$ 及部分图象（如图 1.2.4 所示），由图象可知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根分别是 $x_1 = 1.3$ 和 $x_2 =$________。

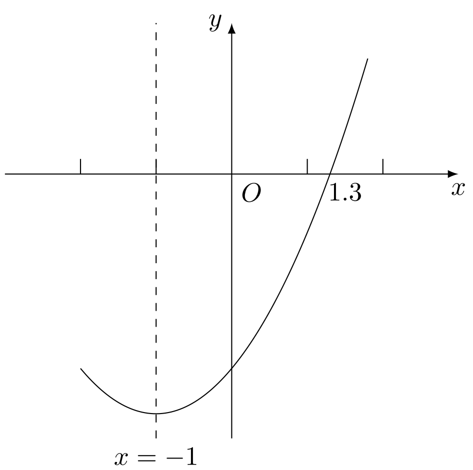


图 1.2.4

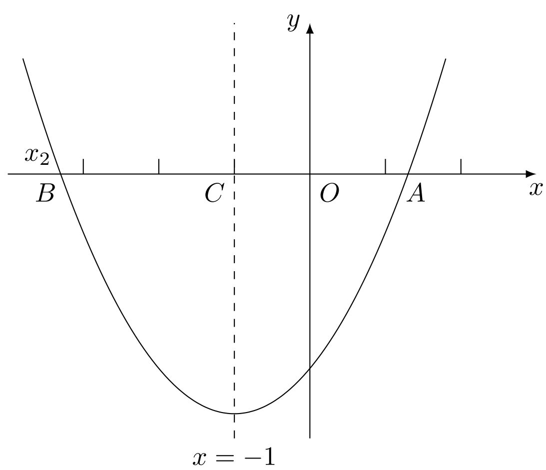


图 1.2.5

解析 由抛物线的顶点坐标 $(-1, -3.2)$ 知道抛物线的对称轴为直线 $x = -1$，取它与 x 轴的交点为 C（如图 1.2.5），则有 $AC = BC$，所以 $1.3 - (-1) = -1 - x_2$，从而求得 $x_2 = -3.3$。 □

思路点拨 （1）当抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）与 x 轴有两个交点时，它俩的横坐标就是方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两根；（2）由抛物线的轴对称性可知，抛物线与 x 轴的两个交点到其对称轴的距离相等，据此可建立等式。综合这两点，"按图索骥"，问题得解。

例 1.2.5. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $A(1,2)$，$B(3,2)$，$C(5,7)$，若点 $M(-2,y_1)$，$N(-1,y_2)$，$K(8,y_3)$ 也在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象上，则下列结论中正确的是（ ）

（A）$y_1<y_2<y_3$ （B）$y_2<y_1<y_3$ （C）$y_3<y_1<y_2$ （D）$y_1<y_3<y_2$

解析 根据 A，B，C 三点的位置可以判断二次函数的图象开口向上，又因为 A，B 两点的纵坐标相同，所以 A，B 两点关于抛物线的对称轴对称，可求得抛物线的对称轴为直线 $x=2$，从而知道点 $K(8,y_3)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点的坐标为 $(-4,y_3)$，这样它与 $M(-2,y_1)$，$N(-1,y_2)$ 都在对称轴的左侧，于是，由抛物线的性质判断得出 $y_2<y_1<y_3$，故选 B。 □

思路点拨 借助抛物线的轴对称性，把位于对称轴两侧的点，变换到对称轴的同一侧，便于利用二次函数的增减性来进行比较。其间，充分体现了数形结合的思想。本题如果先用待定系数法求出二次函数解析式，再直接代入求出函数值进行比较，未尝不可，但耗时费力。

数学评书

2.1 《智慧宝典》第三部第三回　途中遇王后　拆解破瑕疵——陈海峰

话说两位小英雄徒步从出“鬼见愁”，救出了众樵夫后，继续沿山路进发。只见路越走越险，这时他们看到一位女子正在舞剑，冰光剑影，两人不禁鼓掌拍手叫好。这时女子迅速收势，转过头来看见他俩，大喝一声：“来者何人！”两位小英雄面无惧色，说明要面见三角山的首领。从口中得知这女子是三角山的王后。这时小英面露微笑道：“王后真是高人也，应是文武双全，不过这套剑法似有瑕疵。”

这是王后顿时来了兴致，问道：“此话怎讲？”

小英道：如果我没看错的话，刚刚你的剑法中有两个招式——

招式一：求函数 $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间。

招式二：求函数 $y=\sin\left(-3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间。

只见王后点头称是。

小英接着说道：这两招式本来有本质的不同，但是你却舞为同样一个招式，对不？让我来解释一番。

对于招式一，求函数 $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间。你的剑法如下：

因为 $y=\sin x$ 在 $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 是减函数，所以 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant 3x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$（$k\in\mathbb{Z}$），故 $\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{12}$。

这一招你的收势是它的单调减区间 $\left[\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12},\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{12}\right]$（$k\in\mathbb{Z}$）对吧？

王后又点了点头。

小英接着说：再来看看你的招式二，求函数 $y=\sin\left(-3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间。你的剑法如下：

因为 $y=\sin x$ 在 $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 是减函数，所以 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant -3x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$（$k\in\mathbb{Z}$），故 $-\dfrac{2k\pi}{3}-\dfrac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant -\dfrac{2k\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}$。

这一招你的收势是它的单调减区间是 $\left[-\dfrac{2k\pi}{3}-\dfrac{5\pi}{12},-\dfrac{2k\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right]$（$k\in\mathbb{Z}$）对吧？

王后道：“对呀，有什么不妥的吗？”

小英道：“不妨看看这函数上的两个点吧，$\left(-\dfrac{5\pi}{12},?\right)$，$\left(-\dfrac{\pi}{12},?\right)$，你用舞一下剑，看看会怎么样！”

王后舞了一下，出现的是 $\left(-\dfrac{5\pi}{12},-1\right)$，$\left(-\dfrac{\pi}{12},1\right)$。

小英又道：“按照你得到的结果，该函数在区间 $\left[-\dfrac{5\pi}{12},-\dfrac{\pi}{12}\right]$ 上单调减，你再看一下上面两个点，是否符合减函数的定义。”

这时王后双手做揖，向小英求教。

小英道：要将之缴正也不是很难，我提供两个招式吧——

招式一　将 $y=\sin\left(-3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 用诱导公式可得 $y=-\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$。

而 $y=-\sin x$ 在区间 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ 是减函数，所以有 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 3x-\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则它的单调减区间为 $\left[\dfrac{2k\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right]$（$k\in\mathbb{Z}$）。 □

招式二　令 $u=-3x+\dfrac{\pi}{4}$，$x\in\mathbb{R}$，则 $y=\sin u$，$u\in\mathbb{R}$。

而 $u=-3x+\frac{\pi}{4}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数，如果要使 $y=\sin\left(-3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 是减函数，则需 $y=\sin u$ 是增函数，又 $y=\sin u$ 在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 是递增，则有 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，故也可得其单调减区间是 $\left[\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{12},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right]$（$k\in\mathbb{Z}$）。 □

这两个招式算是殊途同归，不过在舞弄时以第一种招式为主，这样更容易发挥它的威力。

王后喜不自胜，连声叫好。

两人又说明了来意，王后说道：“我带你俩去见我夫君。”

不知见到首领后又会发生何事，见听下回分解。

2.2 《智慧宝典》第三部第四回 三角山上见首领 五招破译藏宝图——陈海峰

上回说到两位小英雄指点了王后的剑法后，王后决定带他们去见首领，一路无话。三人到了峰顶，只见有一个小平台，就象一个三棱锥的锥顶被削去一小点，难怪被称是“三角山”了。王后先进去禀报一番，两位小英雄才得以进入。进入之后，首领赐座后对着案上一张图发呆，两位小英雄感到奇怪，这个首领有点冷。过了几分钟光景，只见首领叫两人过来，这时两位小英雄凑过来一看，是一张地图。

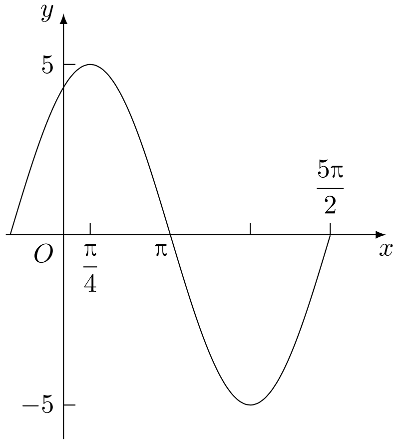


图 2.2.1

如图 2.2.1，它是函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$）的图象，由图中条件，写出该函数解析式。旁边注着：如果能破解这张图的所有位置，那么 φ 就是藏宝的地点，注意只能使用一次。

首领道：我已经破解了一部分，还有一部分不得其门而入。请两位小英雄助我一臂之力！我破解的如下：

由图知，$A=5$，由 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{5\pi}{2}-\pi=\dfrac{3\pi}{2}$，得 $T=3\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2}{3}$，所以 $y=5\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\varphi\right)$。

应该说，A、ω 这两个地方我是破解了，可是后面那个 φ 才是最关键所在，我原来这样破解的：

将 $(\pi,0)$ 代入该式得 $5\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi+\varphi\right)=0$，可得 $\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi$，即 $\varphi=k\pi-\dfrac{2\pi}{3}$（$k\in\mathbb{Z}$）。

又因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$。

结果 φ 出现了两种可能，可是这张图只使用一次，如果搞错就将消失了，如何保证万无一失呢？

小豪说道：“从这张图分析可知，点 $\left(\dfrac{\pi}{4},5\right)$ 在此函数的图象上，但在 $y=5\sin\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 中，令 $x=\dfrac{\pi}{4}$，则 $y=5\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2\pi}{3}\right)=5\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-5$，由此可知，$y=5\sin\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 不合题意。所以请首领放心，一定是 $y=5\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 无疑，按这个地方去找即可。”

首领就命人去找，不一会儿果然找到宝藏了。

首领对两人钦佩有加，又问：“你们果真才识过人，那么，我想知道问题出在哪里呢？如果不用刚刚小豪的方法，又如何知道那个地点是唯一的呢？”

小英这时笑道，这个不难，请看：

途径一——单调性法 因为点 $(\pi,0)$ 在递减的那段曲线上，所以 $\dfrac{2\pi}{3}+\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in\mathbb{Z}$）。由 $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$ 得 $\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi$，所以 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$（$k\in\mathbb{Z}$），因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$。 □

途径二——最值点法 将最高点坐标 $\left(\dfrac{\pi}{4},5\right)$ 代入 $y=5\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\varphi\right)$ 得 $5\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=5$，所以 $\dfrac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$（$k\in\mathbb{Z}$）取 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$。 □

途径三——起始点法 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象一般由“五点法”作出，而起始点的横坐标 x 正是由 $\omega x + \varphi = 0$ 解得的，故只要找出起始点横坐标 x_0 就可以迅速求得角 φ。由图象求得 $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi = -\omega x_0 = \dfrac{\pi}{3}$。 □

途径四——平移法 由图象知，将 $y = 5\sin\dfrac{2}{3}x$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位，就得到本题图象，故所求函数为 $y = 5\sin\dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $y = 5\sin\left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{\pi}{3}\right)$。 □

首领真是看得眼都花了，大叫到：“真是让我大开眼界了，看来找那个藏宝的地点本身也不难的。如果以后还有类似的藏宝图，有了小英雄的办法，这些宝藏就会重见天日了。呵呵！来人呀，摆宴席为两位小英雄接风。”

欲知还会发生何事，请听下回分解。

助力高考

3.1 ab1962 解题集精选（十一）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 501 ∼ 550 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》总第 1 期。

题目 3.1.1. 对于抛物线 $y^2=4x$ 上任意一点 Q，点 $P(a,0)$ 都满足 $|PQ|\geqslant|a|$，求 a 的取值范围。

解 设 $Q(x,y)$，则

$$|PQ|=\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2ax+a^2+4x}=\sqrt{(x-a+2)^2+4a-4},$$

由于 $x\in[0,+\infty)$，因此

（1）当 $a-2\geqslant0$ 即 $a\geqslant2$ 时，$|PQ|_{\min}=\sqrt{4a-4}\geqslant|a|$，解得 $a=2$；

（2）当 $a-2<0$ 即 $a<2$ 时，$|PQ|_{\min}=\sqrt{a^2}=|a|$。

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,2]$。 □

kuing 评注：我们可以试试从几何角度思考，问题可以转化为抛物线 $y^2=4x$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 除原点外没有其他公共点。若 $a\leqslant0$ 显然符合，下设 $a>0$。

可以消元判断，二者消去 y^2 并分解为 $x(x-2a+4)=0$，即要此方程在 $(0,2a]$ 上无解，因 $2a-4<2a$，所以只能是 $2a-4\leqslant0$，即得 $a\leqslant2$。

又或者利用曲率半径，转化为抛物线在原点处的曲率半径不小于圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的半径 a，由曲率公式可以计算出 $y^2=2px$（$p>0$）在原点处的曲率半径为 p，即得 $p\geqslant a$，本题中 $p=2$，结论相符。

题目 3.1.2. 抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上有两个动点 A、B 及一个定点 M，F 为焦点，若 $|AF|,|MF|,|BF|$ 成等差数列，求证：线段 AB 的垂直平分线过定点。

证明 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $M(c,d)$，AB 中点的坐标为 (x_0,y_0)。

抛物线 $y^2=2px$ 的准线为 $x=-\dfrac{p}{2}$，因 $|AF|,|MF|,|BF|$ 成等差数列，故 $2|MF|=|AF|+|BF|$，所以 $2\left(c+\dfrac{p}{2}\right)=x_1+\dfrac{p}{2}+x_2+\dfrac{p}{2}$，即 $x_1+x_2=2c$，$x_0=c$。

因为 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，作差得 $y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$，所以 AB 的斜率

$$k_{AB}=\frac{2p}{y_1+y_2}=\frac{p}{y_0},$$

所以 AB 的垂直平分线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0),$$

即

$$y=-\frac{y_0}{p}(x-c-p),$$

当 $x=c+p$ 时总有 $y=0$，而 c,p 为定值，可见过定点 $(c+p,0)$。 □

kuing 评注：经典点差法，结论可推广至一般圆锥曲线，详细就不写了，大家可以试试。

题目 3.1.3. 若函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$（$x\in\mathbb{R}$）的值域为 $[-1,4]$，求 a,b 的值。

解

$$y=\frac{ax+b}{x^2+1}\iff yx^2+y=ax+b\iff yx^2-ax+y-b=0,$$

故
$$\Delta=a^2-4y(y-b)=-4y^2+4by+a^2\geqslant 0\iff 4y^2-4by-a^2\leqslant 0,$$
解集为 $[-1,4]$，故 $-1+4=b$，$-1\times 4=-\dfrac{a^2}{4}$，所以 $a=\pm 4, b=3$。 □

kuing 评注：此题的相关讨论见 http://bbs.pep.com.cn/thread-886724-1-1.html，其中我的解法如下。

另解 （1）当 $a=0$ 时：若 $b=0$ 则恒有 $y=0$；若 $b>0$ 则显然 $y\in(0,b]$；若 $b<0$ 则显然 $y\in[b,0)$；
（2）当 $a\neq 0$ 时：设 $ax+b=t$，若 $t=0$ 则 $y=0$；若 $t\neq 0$ 则函数可化为
$$y=\frac{a^2}{t+\dfrac{a^2+b^2}{t}-2b},$$
注意到
$$t+\frac{a^2+b^2}{t}\in\left(-\infty,-2\sqrt{a^2+b^2}\right]\bigcup\left[2\sqrt{a^2+b^2},+\infty\right) \text{ 且 } \sqrt{a^2+b^2}>|b|,$$
可得
$$y\in\left[\frac{a^2}{-2\sqrt{a^2+b^2}-2b},0\right)\bigcup\left(0,\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}-2b}\right]。$$
即当 $a\neq 0$ 时必有
$$y\in\left[\frac{a^2}{-2\sqrt{a^2+b^2}-2b},\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}-2b}\right]。$$
由（1）（2）看出，若值域为 $[-1,4]$，就必有
$$\begin{cases}\dfrac{a^2}{-2\sqrt{a^2+b^2}-2b}=-1,\\[2ex] \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}-2b}=4,\end{cases}$$
解得 $a=\pm 4, b=3$。 □

这个解法虽然没有原解法简洁，但在方法上可以说适用范围更广一些，比如说假如题目限制了 x 在某个区间内，那么判别式法失效，但上述解法只需作一点修改仍然可用，因为由双勾函数的性质，无论 x 限制成如何，$t+\dfrac{a^2+b^2}{t}$ 的取值范围总可以求出，之后就可以类似地分析值域了。

题目 3.1.4. 已知点 $A(-2,2)$ 及点 $B(-3,-1)$，试在直线 $l:2x-y-1=0$ 上求出符合下列条件的点 P：
（1）使 $|PA|-|PB|$ 为最大；
（2）使 $|PA|^2+|PB|^2$ 为最小。

解 （1）作直线 AB，其方程为 $y=3x+8$，与 $l:2x-y-1=0$ 的交点为 $P_1(-9,-19)$。由
$$|PA|-|PB|\leqslant|AB|=\sqrt{10},$$
当且仅当 P 与 P_1 重合时上式取等号，故 $P(-9,-19)$ 时 $|PA|-|PB|$ 为最大；
（2）设 $P(x,y)$，则 $y=2x-1$，且
$$\begin{aligned}|PA|^2+|PB|^2&=(x+2)^2+(y-2)^2+(x+3)^2+(y+1)^2\\&=(x+2)^2+(2x-3)^2+(x+3)^2+(2x)^2\\&=10x^2-2x+22\\&=10\left(x-\frac{1}{10}\right)^2+21+\frac{9}{10},\end{aligned}$$
故当 $x=\dfrac{1}{10}$ 时 $|PA|^2+|PB|^2$ 为最小，此时 $P\left(\dfrac{1}{10},-\dfrac{4}{5}\right)$。 □

kuing 评注：其实第（2）问还有一个简单方法，就是利用中线长公式，取 AB 的中点 M，则由中线长公式可得

$$|PA|^2+|PB|^2=2|PM|^2+\frac{|AB|^2}{2},$$

从而要 $|PA|^2+|PB|^2$ 最小，只要 $|PM|$ 最小，所以只要过 M 作 l 的垂线，垂足便是所求。

题目 3.1.5. 在 $\triangle ABC$ 内求一点 P，使 $|AP|^2+|BP|^2+|CP|^2$ 的值最小。

解法一 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$P(x,y)$，则

$$\begin{aligned}&|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\\&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\\&=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2\\&=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2\\&\quad-3\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2-3\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2,\end{aligned}$$

因此当 $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$ 且 $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 时，即 P 为 $\triangle ABC$ 重心时，$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ 取最小值。 □

解法二 因 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$，故 $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PA}^2-2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}$，同理 $\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PB}^2-2\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{CA}^2=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PC}^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$，三式相加得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2&=2\overrightarrow{PA}^2+2\overrightarrow{PB}^2+2\overrightarrow{PC}^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}\\&=3\left(\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2\right)-\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)^2,\end{aligned}$$

所以

$$3\left(\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2\right)=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2\geqslant\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2,$$

当且仅当 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ 时上式取等号，因此 P 是 $\triangle ABC$ 的重心时 $\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2$ 取最小值 $\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2\right)$。 □

kuing 评注：向量的方法可以轻易将本题推广至 n 个点并且不限于平面内。具体地，设 G 为 n 个定点 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的重心，P 为任意动点，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|PA_i|^2&=\sum_{i=1}^n\left(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA_i}\right)^2\\&=n|PG|^2+2\overrightarrow{PG}\cdot\sum_{i=1}^n\overrightarrow{GA_i}+\sum_{i=1}^n|GA_i|^2\\&=n|PG|^2+\sum_{i=1}^n|GA_i|^2,\end{aligned}$$

故当且仅当 P 与 G 重合时 $\sum\limits_{i=1}^n|PA_i|^2$ 取最小值。

题目 3.1.6. 已知数列 $\{x_n\}$ 中，$x_0=0$，$x_{n+1}=3x_n+\sqrt{8x_n^2+1}$，求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式。

解 由于

$$x_{n+1}=3x_n+\sqrt{8x_n^2+1}, \tag{3.1.1}$$

考虑到求根公式，可知 x_{n+1} 是方程 $x^2-px+q=0$ 的大根，其中 p, q 由韦达定理求得

$$\begin{aligned}p&=3x_n+\sqrt{8x_n^2+1}+3x_n-\sqrt{8x_n^2+1}=6x_n,\\ q&=\big(3x_n+\sqrt{8x_n^2+1}\big)\big(3x_n-\sqrt{8x_n^2+1}\big)=x_n^2-1,\end{aligned}$$

于是 $x^2-px+q=0$ 就是

$$x^2-6x_n\cdot x+x_n^2-1=0, \tag{3.1.2}$$

所以

$$x_{n+1}^2-6x_n\cdot x_{n+1}+x_n^2-1=0,$$

将 n 换成 $n-1$，上式可以写成

$$x_{n-1}^2-6x_n\cdot x_{n-1}+x_n^2-1=0,$$

可见 x_{n-1} 是方程 (3.1.1) 的另一个根，于是

$$x_{n-1}=3x_n-\sqrt{8x_n^2+1}, \tag{3.1.3}$$

由式 (3.1.1) 和式 (3.1.3) 消去 $\sqrt{8x_n^2+1}$ 得

$$x_{n+1}-6x_n+x_{n-1}=0,$$

它的特征方程为 $x^2-6x+1=0$，特征根是 $3\pm2\sqrt{2}$，于是可设 $x_n=a\big(3+2\sqrt{2}\big)^n+b\big(3-2\sqrt{2}\big)^n$，把 $x_0=0$，$x_1=1$ 代入后可解出 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$，$b=-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$，因此

$$x_n=\frac{\sqrt{2}}{8}\Big[\big(3+2\sqrt{2}\big)^n+\big(3-2\sqrt{2}\big)^n\Big]。$$

□

kuing 评注：多年前我第一次见识这种方法就是看了廖老师解的这道题，记忆尤甚，当时看了很久才看懂，还发现了一个小瑕疵，就是在得到 $x_{n-1}^2-6x_n\cdot x_{n-1}+x_n^2-1=0$ 之后应该先说明 $x_{n+1}>x_{n-1}$ 才能得出 x_{n-1} 是方程 (3.1.1) 的另一个根，不过 x_n 递增很显然，可能正因如此才没作说明吧。

3.2 辅助函数 PK 代数变形——杨春波、程汉波

代数变形与辅助函数是解决代数问题的两把利器，但孰优孰劣？这不，某天它们之间展开了激烈的 PK，在面对同一代数问题时，正“吵”得不可开交呢：都说自己的解法好！

例 3.2.1. 已知实数 x, y 满足：$(x-2)^3+2012(x-2)=1$，$(y-2)^3+2012(y-2)=-1$，试求 $x+y$ 的值。

解 1.1 注意到两等式右端 1 和 -1 间的关系，考虑将两式相加。为了书写方便，特记 $m=x-2$，$n=y-2$，则原题设即 $m^3+2012m=1$，$n^3+2012n=-1$，相加即 $(m^3+n^3)+2012(m+n)=0$，分解因式得 $(m+n)(m^2-mn+n^2+2012)=0$，显见第二个括号不为 0，所以 $m+n=0$，即 $x+y=4$。 □

利用“代数变形”顺利解决此题，正在“代数变形”洋洋得意之时，“辅助函数”看不下去了：解此题哪需你这般费事，看我“辅助函数”大显身手。

解 1.2 注意到两等式左端形式完全一致，故记函数 $f(t)=t^3+2012t$，$t\in\mathbb{R}$，原题设即 $f(x-2)=1$，$f(y-2)=-1$，又易知 $f(t)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，且为增函数，所以由 $f(x-2)+f(y-2)=0$，立得 $x+y=4$。 □

“辅助函数”不屑一顾地看着“代数变形”说：“瞧瞧，我辅助函数一介入，利用函数的基本性质‘瞬秒’此题，而且立意更高远，体现了函数与方程的有机结合，这是活生生的函数与方程的思想啊！”。

“代数变形”哪里受得了这等蔑视，心想：不拿出点看家本领让你瞅瞅，你是不知道我的厉害！于是“代数变形”向“辅助函数”发起了新的挑战。

例 3.2.2. 已知 $\begin{cases} a^3-3a^2+5a=1, \\ b^3-3b^2+5b=5, \end{cases}$ 求 $a+b$ 的值。

“辅助函数”一瞧这两个式子：形式完全一致。笑道：这还不简单？！立马邀出函数 $f(x)=x^3-3x^2+5x$，$x\in\mathbb{R}$，于是 $f(a)=1$，$f(b)=5$，要求 $a+b$ 的值……“辅助函数”这时犯难了：$f(a)+f(b)=6$，那 $a+b$ 等于多少呢？两者似乎没有什么必然联系啊！

看到“辅助函数”一筹莫展的样子，“代数变形”不失时机地挖苦道：“刚才谁还笑话我呢，现在怎么解不出来了？你‘辅助函数’境界是高啊，立意是远啊，可对此题没用！”说话间，“代数变形”抛出了它的妙解。

解 2.1 由

$$\begin{cases} a^3-3a^2+5a=1, \\ b^3-3b^2+5b=5, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

得

$$\begin{cases} (a-1)^3+2(a-1)=-2, \\ (b-1)^3+2(b-1)=2, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

于是顺利将此题化为例 3.2.1，可得 $a+b=2$。 □

“辅助函数”看着解答，满腔的怨气：式 (3.2.2) 对我是小菜一碟，想不到你小子还有这一招，竟敢把式 (3.2.2) 变形为式 (3.2.1) 来耍我！不信我“辅助函数”解不了此题！“辅助函数”看着“代数变形”的解答思索了若干分钟，似乎从中发现了什么……突然一声惊呼：看我“辅助函数”来也！

解 2.2 $f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3$，于是函数 $f(x)$ 可以看作是函数 $g(x)=x^3+2x$ 向右平移 1 个单位，向上平移 3 个单位得到的，易知 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，其图象关于原点中心对称，且为增函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,3)$ 中心对称，也为增函数。由 $f(a)+f(b)=2f(1)$，知 $a+b=2\times1=2$。 □

“辅助函数”一语道破了此题的几何背景，“代数变形”当然不服输，立刻反击道：“你怎么想到变 $f(x)$ 为 $(x-1)^3+2(x-1)+3$？还不是受我‘代数变形’解答的启发？你抄袭我的解法！”。“辅助函数”辩解说：“我这是借鉴，不是抄袭，你 Out 了！站在别人的肩膀上，可以看得更远呀！”。

话虽这么说，但若能找到一种新的解法自是再好不过了，免得遗人话柄。这时，“辅助函数”想到了函数家族中的老大哥——导数，导数出马，片刻即给出了另解。

解 2.3 设 $f(x)=x^3-3x^2+5x$，$x\in\mathbb{R}$，令 $f''(x)=6x-6=0$，解得 $x=1$，便得 $f(x)$ 图象的拐点为 $(1,3)$，也为 $f(x)$ 图象的对称中心，于是由 $f(a)=1$，$f(b)=5$，立得 $a+b=2$。 □

“代数变形”看得糊里糊涂，不解道：“拐点是什么东西？怎么二阶导数等于 0 的点就是拐点呢？为什么拐点又是对称中心啊？”，“代数变形”突然严肃了起来，用质问的口气道：“你不是在拿一些所谓高深的知识糊弄我吧？”。面对质问，“辅助函数”一脸不屑：函数的世界你不懂，懒得给你解释！

PK 到此，两人还是各不服输，难分高下，但也都领略了相互的威力。最后商定：一题定胜负！为公平起见，两人随机从数学题库中抽取了一道代数题：

例 3.2.3. 若 $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$，求证 $x+y=0$。

“代数变形”沉思片刻，便给出两解：

证 3.1 注意到 $\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=1$，由 $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ 得

$$x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y, \tag{3.2.3}$$

即

$$x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1},$$

两侧同时平方，化简得

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}=1-xy,$$

两侧再同时平方，化简得

$$(x+y)^2=0,$$

即 $x+y=0$，得证。 □

证 3.2 式 (3.2.3) 即 $(x+y)+\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)=0$，对第二个括号分子有理化得

$$(x+y)+\left(\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0,$$

即

$$(x+y)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x+\sqrt{y^2+1}-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0,$$

显见第二个括号不会为 0，所以只有 $x+y=0$，得证。 □

“辅助函数”暗自佩服“代数变形”的灵活与巧妙：分母、分子有理化，因式分解，两次平方。作为回应，也赶紧给出两解：

证 3.3 记函数 $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$，$x\in\mathbb{R}$，则题设即为 $f(x)f(y)=1$。可用单调性的定义或导数证明 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的增函数，且 $\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)f(-x)=1$。综上即得 $f(y)=f(-x)$，$y=-x$，$x+y=0$。 □

证 3.4 对题设两侧同时取对数得 $\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)+\ln\big(y+\sqrt{y^2+1}\big)=0$，可记函数 $f(x)=\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$，$x\in\mathbb{R}$，则有

$$f(x)+f(y)=0, \tag{3.2.4}$$

易知 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，且在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，于是 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上为增函数。由式 (3.2.4) 立得 $x+y=0$。 □

“代数变形”心里暗暗赞叹：代数问题中“辅助函数”的介入可使问题变得清晰明了，以函数为载体，以函数的基本性质为工具，处理问题方向性强，技巧性低，较容易上手。

“代数变形”想：为何非要 PK，何不与“辅助函数”强强联合呢？恰巧，“辅助函数”也正有此意，两人握手言和。于是“代数变形”决定将新发现的妙解和“辅助函数”分享：

证 3.5 写出式 (3.2.3)：$x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y$ 的姊妹式：$y+\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x$，两式相加即得 $x+y=0$。 □

后语

一方面：解决代数问题的关键是掌握代数变形的技巧，变形实质上是为了达到某种目的而采用的“手段”，是化归、转化和联想的准备阶段，它属于技能性的层面。唯有在实践中反复操练才能把握，乃至灵活与综合地运用。代数变形是数学解题的基石，变形能力的强弱直接制约着解题能力的高低。

另一方面：在求解某些代数问题时，我们可以尝试运用构造函数法，根据命题中的条件或结论，构造出一个辅助函数，再运用函数的相关性质和定理解题，这往往能起到事半功倍之效果。辅助函数法是一种重要的数学方法，其构造思路也是多种多样的。

3.3 对 2009 年江西高考数学压轴数列题的研究——郭子伟

题目 3.3.1. （2009 江西）各项均为正数的数列 $\{a_n\}$，$a_1=a$，$a_2=b$，且对满足 $m+n=p+q$ 的正整数 m，n，p，q 都有 $\dfrac{a_m+a_n}{(1+a_m)(1+a_n)}=\dfrac{a_p+a_q}{(1+a_p)(1+a_q)}$。

（I）当 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{4}{5}$ 时，求通项 a_n；

（II）证明：对任意 a，存在与 a 有关的常数 λ，使得对于每个正整数 n，都有 $\dfrac{1}{\lambda}\leqslant a_n\leqslant\lambda$。

这里只讨论第（II）问，本题难度不小，官方参考答案（下面简称"标答"）在不求一般通项的情况下直接证出了结论（见附录），很巧妙，但同时也很难想到，我承认我想不出来。

下面我就老老实实地求出一般情况下的通项，给出异于官方参考答案的，但思路相对更顺畅的"笨方法"以及此数列的一些更细致的结果。

证明 先讨论 $a\neq 1$ 且 $b\neq 1$ 时的情形，注意到

$$\frac{a_m+a_n}{(1+a_m)(1+a_n)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+a_m)(1+a_n)-(1-a_m)(1-a_n)}{(1+a_m)(1+a_n)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-a_m}{1+a_m}\cdot\frac{1-a_n}{1+a_n},$$

令 $b_n=\dfrac{1-a_n}{1+a_n}$，则由 $\dfrac{a_m+a_n}{(1+a_m)(1+a_n)}=\dfrac{a_p+a_q}{(1+a_p)(1+a_q)}$ 得

$$b_mb_n=b_pb_q,$$

再令 $m=2$，$p=n+1$，$q=1$，得

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1-b}{1+b}\cdot\frac{1+a}{1-a},$$

所以 $\{b_n\}$ 为等比数列，从而

$$\frac{1-a_n}{1+a_n}=b_n=\left(\frac{1-b}{1+b}\cdot\frac{1+a}{1-a}\right)^{n-1}\cdot\frac{1-a}{1+a}=\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{n-2}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1},$$

解得

$$a_n=\frac{1-\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^{n-2}\left(\dfrac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}}{1+\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^{n-2}\left(\dfrac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}},$$

为使 a_n 恒为正，需

$$\left|\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{n-2}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}\right|<1$$

对正整数 n 恒成立，上式两边平方等价于

$$\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2\left(\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2\right)^{n-2}<1,$$

假如 $\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^2\left(\dfrac{1-b}{1+b}\right)^2>1$，那么当 n 充分大时上式左边必然不小于 1，所以必需且只需有

$$\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2\leqslant 1\iff-\left|\frac{1-a}{1+a}\right|\leqslant\frac{1-b}{1+b}\leqslant\left|\frac{1-a}{1+a}\right|。$$

（1）若 n 为奇数，则 $0<\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}\leqslant\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n-1}$，当 $\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}\to 0$ 时 $a_n\to 1$，当 $\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}=\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n-1}$ 时 $a_n=a$，注意到 a_n 关于 $\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}$ 总是单调的，所以有

$$\min\{1,a\}\leqslant a_n\leqslant\max\{1,a\};$$

（2）若 n 为偶数，则 $-\left|\frac{1-a}{1+a}\right|^{n-1}\leqslant\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}\leqslant\left|\frac{1-a}{1+a}\right|^{n-1}$，当 $\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}=-\left|\frac{1-a}{1+a}\right|^{n-1}$ 时 $a_n=\frac{1+a+|1-a|}{1+a-|1-a|}$，当 $\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}=\left|\frac{1-a}{1+a}\right|^{n-1}$ 时 $a_n=\frac{1+a-|1-a|}{1+a+|1-a|}$，注意到 a_n 关于 $\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{n-1}$ 是单调递减的，所以有

$$\frac{1+a-|1-a|}{1+a+|1-a|}\leqslant a_n\leqslant\frac{1+a+|1-a|}{1+a-|1-a|}。$$

注意到 $\frac{1+a-|1-a|}{1+a+|1-a|}<1$，$\frac{1+a+|1-a|}{1+a-|1-a|}>1$，且

$$a-\frac{1+a-|1-a|}{1+a+|1-a|}=\frac{(a+1)\big(|1-a|-(1-a)\big)}{1+a+|1-a|}\geqslant 0,$$

$$\frac{1+a+|1-a|}{1+a-|1-a|}-a=\frac{(a+1)\big(|1-a|+(1-a)\big)}{1+a-|1-a|}\geqslant 0,$$

故

$$\frac{1+a-|1-a|}{1+a+|1-a|}\leqslant\min\{1,a\},$$

$$\frac{1+a+|1-a|}{1+a-|1-a|}\geqslant\max\{1,a\},$$

所以综合（1）（2），对于任意正整数 n，都有

$$\frac{1+a-|1-a|}{1+a+|1-a|}\leqslant a_n\leqslant\frac{1+a+|1-a|}{1+a-|1-a|}。\tag{3.3.1}$$

再注意到，如果 $a>1$，则式 (3.3.1) 去绝对值后可以化简为 $\frac{1}{a}\leqslant a_n\leqslant a$；如果 $a<1$，则式 (3.3.1) 去绝对值后可以化简为 $a\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{a}$，因此，式 (3.3.1) 可以写成

$$\min\left\{a,\frac{1}{a}\right\}\leqslant a_n\leqslant\max\left\{a,\frac{1}{a}\right\}。\tag{3.3.2}$$

再讨论 $a=1$ 或 $b=1$ 的情形。若 $a=1$，则 $b_1=0$，于是 $b_2^2=b_1b_3=0$，$b_3^2=b_2b_4=0$，依此类推，得 b_n 恒为 0，所以此时 $\{a_n\}$ 恒为 1；若 $a\neq 1$ 且 $b=1$，则 $b_1\neq 0$，$b_2=0$，由 $b_2^2=b_1b_3$ 得 $b_3=0$，故后面的项也显然恒为 0，所以此时 $\{a_n\}$ 由第二项起恒为 1。

由此可见当 $a=1$ 或 $b=1$ 时也满足式 (3.3.2)，所以，取

$$\lambda=\max\left\{a,\frac{1}{a}\right\},$$

则

$$\frac{1}{\lambda}=\min\left\{a,\frac{1}{a}\right\},$$

即有

$$\frac{1}{\lambda}\leqslant a_n\leqslant\lambda$$

对于每个正整数 n 恒成立。 □

这样一来，不但得出的结果比标答更加简洁，而且由于当 $n=1$ 时 $\min\left\{a,\dfrac{1}{a}\right\}\leqslant a_n\leqslant\max\left\{a,\dfrac{1}{a}\right\}$ 总有一边可以取等，可见这个 $\lambda=\max\left\{a,\dfrac{1}{a}\right\}$ 对于本题来说已经是最佳数值，不能再小了。

为了得到更细节的结果，下面考查 $\{a_n\}$ 的单调性，当 $a=1$ 或 $b=1$ 时前面已经有结果，下设 $a\neq 1$ 且 $b\neq 1$。

为方便书写，记 $A=\dfrac{1+a}{1-a}$，$B=\dfrac{1-b}{1+b}$，上述证法中已经得到 a_n 的通项为

$$a_n=\frac{1-A^{n-2}B^{n-1}}{1+A^{n-2}B^{n-1}},\qquad \text{其中 } A^2B^2\leqslant 1,$$

则

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1-A^{n-1}B^n}{1+A^{n-1}B^n}-\frac{1-A^{n-2}B^{n-1}}{1+A^{n-2}B^{n-1}}=\frac{2A^{n-2}B^{n-1}(1-AB)}{(1+A^{n-1}B^n)(1+A^{n-2}B^{n-1})},$$

如果 $1-AB=0$ 即 $a=b$ 时，则 a_n 恒为 a，下设 $1-AB\neq 0$，因为 $A^2B^2\leqslant 1$ 所以 $1-AB>0$，故此 $a_{n+1}-a_n$ 的正负取决于 $A^{n-2}B^{n-1}$ 的符号，下面分类讨论。

（1）当 $A>0$ 且 $B>0$ 时，显然 $A^{n-2}B^{n-1}>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，即 $\{a_n\}$ 为递增数列，再注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，所以此时有 $a\leqslant a_n<1$；

（2）当 $A<0$ 且 $B<0$ 时，显然 $A^{n-2}B^{n-1}<0$，故 $a_{n+1}<a_n$，即 $\{a_n\}$ 为递减数列，再注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，所以此时有 $1<a_n\leqslant a$；

（3）当 $A>0$ 且 $B<0$ 时，若 n 为奇数，则 $A^{n-2}B^{n-1}>0$，若 n 为偶数，则 $A^{n-2}B^{n-1}<0$，所以此时 $\{a_n\}$ 为摆动数列；

（4）当 $A<0$ 且 $B>0$ 时，若 n 为奇数，则 $A^{n-2}B^{n-1}<0$，若 n 为偶数，则 $A^{n-2}B^{n-1}>0$，所以此时 $\{a_n\}$ 也为摆动数列。

再者，当 $\{a_n\}$ 为摆动数列时，即 $0>AB\geqslant -1$ 时，有

$$\begin{aligned}(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}-a_{n+1})&=\left(\frac{1-A^nB^{n+1}}{1+A^nB^{n+1}}-\frac{1-A^{n-2}B^{n-1}}{1+A^{n-2}B^{n-1}}\right)\left(\frac{1-A^nB^{n+1}}{1+A^nB^{n+1}}-\frac{1-A^{n-1}B^n}{1+A^{n-1}B^n}\right)\\&=\frac{2(A^{n-2}B^{n-1}-A^nB^{n+1})}{(1+A^nB^{n+1})(1+A^{n-2}B^{n-1})}\cdot\frac{2(A^{n-1}B^n-A^nB^{n+1})}{(1+A^nB^{n+1})(1+A^{n-1}B^n)}\\&=\frac{4A^{2n-3}B^{2n-1}(1+AB)(1-AB)^2}{(1+A^nB^{n+1})^2(1+A^{n-2}B^{n-1})(1+A^{n-1}B^n)},\end{aligned}$$

由 $0>AB\geqslant -1$ 得 $A^{2n-3}B^{2n-1}<0$，$(1+AB)(1-AB)^2\geqslant 0$，从而

$$(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}-a_{n+1})\leqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $AB=-1$。这表明，当 $0>AB>-1$ 时，从第三项开始，每一项的数值均在前两项之间，即 $\{a_n\}$ 不但摆动，而且摆动的幅度越来越小，就像阻尼振动那样，最终收敛到 1，而 $AB=-1$ 时总能取等，且摆动，故必然奇数项为 a，偶数项为 b。

综上所述，当 $a\neq 1$ 且 $b\neq 1$ 时，我们得到以下结论：

- 当 $AB=1$ 时，$\{a_n\}$ 为常数列，即 $a_n=a$；
- 当 $1>AB>0$ 时，$\{a_n\}$ 为单调增数列或单调减数列，并且 $\min\{1,a\}\leqslant a_n\leqslant\max\{1,a\}$；
- 当 $0>AB>-1$ 时，$\{a_n\}$ 为摆动数列，并且摆动的幅度越来越小，收敛于 1。
- 当 $AB=-1$ 时，$\{a_n\}$ 为摆动数列，并且有 $a_{2k-1}=a$，$a_{2k}=b$，其中 $k\in\mathbb{N}^+$。

至此，可以说我们对该数列有了更细致的了解。此外，由

$$\begin{aligned}A^2B^2 \leqslant 1 &\iff (1-a)^2(1+b)^2 \geqslant (1+a)^2(1-b)^2\\&\iff (a-b)(ab-1) \geqslant 0\\&\iff (b-a)\left(b-\frac{1}{a}\right) \leqslant 0,\end{aligned}$$

得到

$$\min\left\{a, \frac{1}{a}\right\} \leqslant b \leqslant \max\left\{a, \frac{1}{a}\right\},$$

再结合上述结论，也不难看出题目中取 $\lambda = \max\left\{a, \dfrac{1}{a}\right\}$ 是合理的而且最佳，于是这也算是本题的另一种证法了。

附录

以下就是本题第（II）问的标答，请大家品味一下其精妙之处。

证明 由题设 $\dfrac{a_m + a_n}{(1+a_m)(1+a_n)}$ 的值仅于 $m+n$ 有关，记为 b_{m+n}，则

$$b_{n+1} = \frac{a_1 + a_n}{(1+a_1)(1+a_n)} = \frac{a + a_n}{(1+a)(1+a_n)}。$$

考查函数 $f(x) = \dfrac{a+x}{(1+a)(1+x)}$（$x > 0$），则在定义域上有

$$f(x) \geqslant g(a) = \begin{cases}\dfrac{1}{1+a}, & a > 1,\\ \dfrac{1}{2}, & a = 1,\\ \dfrac{a}{1+a}, & 0 < a < 1,\end{cases}$$

故对 $n \in \mathbb{N}$，$b_{n+1} \geqslant g(a)$ 恒成立。又

$$b_{2n} = \frac{2a_n}{(1+a_n)^2} \geqslant g(a),$$

注意到 $0 < g(a) \leqslant \dfrac{1}{2}$，解上式得

$$\frac{g(a)}{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}} = \frac{1-g(a)-\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)} \leqslant a_n \leqslant \frac{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)},$$

取 $\lambda = \dfrac{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)}$，即有 $\dfrac{1}{\lambda} \leqslant a_n \leqslant \lambda$。 □

能力提升

4.1 一个连根式不等式的等比型推广——李明

文 [1] 得到了如下根式不等式：

$$\underbrace{\sqrt{a+\lambda\cdot\sqrt{a+\cdots+\lambda\cdot\sqrt{a}}}}_{n\text{ 层根号}}<\sqrt{a+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2},\tag{4.1.1}$$

其中，$2\leqslant n\in\mathbb{N}, \lambda>0, a>0$。

文 [2] 得到了式 (4.1.1) 的等差型推广如下：

$$\sqrt{a_1+\lambda\cdot\sqrt{a_2+\cdots+\lambda\cdot\sqrt{a_n}}}<\sqrt{a_2+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2},\tag{4.1.2}$$

其中，$2\leqslant n\in\mathbb{N}, \lambda>0, \{a_n\}$ 是正项等差数列且满足公差 $d\geqslant 0$。

笔者研究发现式 (4.1.1) 还有等比型推广如下：

$$\sqrt{a_1+\lambda\cdot\sqrt{a_2+\cdots+\lambda\cdot\sqrt{a_n}}}<\sqrt{a_1+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}}+\frac{\lambda}{2}\sqrt{q},\tag{4.1.3}$$

其中，$1\leqslant n\in\mathbb{N}, \lambda>0, \{a_n\}$ 是正项等比数列且满足公比 $q\geqslant 1$。

下面用数学归纳法给出不等式 (4.1.3) 的证明。

证明 记 $x_k=\sqrt{a_k+\lambda\cdot\sqrt{a_{k+1}+\cdots+\lambda\cdot\sqrt{a_n}}}$（$1\leqslant k\leqslant n$）。

当 $k=n$ 时，$x_n=\sqrt{a_n}<\sqrt{a_n+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}}+\frac{\lambda}{2}\sqrt{q}$ 显然成立。

假设 $x_k<\sqrt{a_k+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}}+\frac{\lambda}{2}\sqrt{q}$，其中 k 为 $[2,n]$ 里的某个整数，则有

$$x_{k-1}=\sqrt{a_{k-1}+\lambda x_k}<\sqrt{a_{k-1}+\lambda\left(\sqrt{a_k+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}}+\frac{\lambda}{2}\sqrt{q}\right)},$$

于是，欲证 $x_{k-1}<\sqrt{a_{k-1}+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}}+\frac{\lambda}{2}\sqrt{q}$，只需证

$$\sqrt{a_{k-1}+\lambda\left(\sqrt{a_k+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}}+\frac{\lambda}{2}\sqrt{q}\right)}\leqslant\sqrt{a_{k-1}+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}}+\frac{\lambda}{2}\sqrt{q},$$

两边平方并化简等价于证明

$$\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}+\lambda\sqrt{a_k+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}}\leqslant\frac{\lambda^2}{4}q+\lambda\sqrt{q}\sqrt{a_{k-1}+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}},$$

两边同时除以 $\lambda\sqrt{q}$，即证

$$\frac{\lambda}{4}+\sqrt{a_{k-1}+\frac{\lambda^2}{4}}\leqslant\frac{\lambda}{4}\sqrt{q}+\sqrt{a_{k-1}+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}},$$

显然成立。

综上，由数学归纳法可得 $x_1<\sqrt{a_1+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{q}}+\frac{\lambda}{2}\sqrt{q}$，即不等式 (4.1.3) 成立。 □

顺便指出，当 $1 \leqslant q < 4$ 时，不等式 (4.1.3) 右边可加强为 $\sqrt{a_1 + \frac{\lambda^2}{4}(2\sqrt{q} - q)} + \frac{\lambda}{2}\sqrt{q}$；当 $q \geqslant 4$ 时，不等式 (4.1.3) 右边可加强为 $\sqrt{a_1} + \frac{\lambda}{2}\sqrt{q}$。仿照不等式 (4.1.3) 的证明过程不难证明这两条加强结论，具体步骤留给读者练习。

参考文献

[1] 马乾凯, 李明. 一个根式不等式的推广 [J]. 中学数学教学参考 (上旬刊・高中版), 2011(4):65.
[2] 李明, 严文兰. 两个根式不等式的推广 [J]. 不等式研究通讯, 2012(1):112-114.

编者注： 上述证明过程中使用数学归纳法的过程与平常用的不同，在假设的时候所设的对象并不是原不等式，而是另一个辅助不等式，并且是由 $k = n$ 成立推至 $k = 1$ 成立，而 $k = 1$ 时就是原不等式，再由 n 的任意性即得到原不等式成立。这种方法在逻辑上是没问题的，而且很巧妙，是个值得学习方法，大家不妨仔细体会一下。

4.2 两个连根式的双边估计式——李明

一、自然连根式的双边估计

记 $x_n=\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}$（$n\in\mathbb{N}^+$），本文称 x_n 为自然连根式。文 [1] 给出了关于 x_n 上界的一个不等式如下：

$$x_n<\sqrt{n}+1。\tag{4.2.1}$$

笔者研究得到了关于 x_n 的一个双边估计式如下：

$$\sqrt{n-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}+\frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant\sqrt{n+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}+\frac{1}{2}。\tag{4.2.2}$$

相对于式 (4.2.1)，式 (4.2.2) 不仅加强了 x_n 的上界，还给出了 x_n 的一个形如新上界的下界。

下面给出式 (4.2.2) 的证明。

证明 （1）先来应用数学归纳法证明式 (4.2.2) 右侧，即证 $x_n\leqslant\sqrt{n+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}+\frac{1}{2}$。

当 $n=1$ 时，$x_1=1\leqslant\sqrt{1+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}}+\frac{1}{2}$ 显然成立。

当 $n=k$ 时，假设 $x_k\leqslant\sqrt{k+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}+\frac{1}{2}$ 成立，则有

$$x_{k+1}=\sqrt{(k+1)+x_k}\leqslant\sqrt{(k+1)+\sqrt{k+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}+\frac{1}{2}},$$

于是，当 $n=k+1$ 时，欲证 $x_{k+1}\leqslant\sqrt{(k+1)+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}+\frac{1}{2}$，只需证

$$\sqrt{(k+1)+\sqrt{k+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}+\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{(k+1)+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}+\frac{1}{2},$$

两边平方并化简等价于证明

$$\sqrt{(k+1)+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}-\sqrt{k+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{k},$$

即证

$$\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\sqrt{(k+1)+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}+\sqrt{k+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{k},$$

即证

$$2^k+1\geqslant\sqrt{(k+1)+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}+\sqrt{k+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}},$$

左边应用伯努利不等式，右边应用算术平均小于等于平方根平均，于是只需证明

$$k+2\geqslant2\sqrt{k+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}},$$

又只需证明

$$\left(\sqrt{k+\frac{3}{4}}\right)^2+\frac{5}{4}\geqslant 2\sqrt{k+\frac{3}{4}},$$

由算术几何平均不等式，显然成立。于是，由数学归纳法得到式 (4.2.2) 右侧成立；

（2）再来证明式 (4.2.2) 左侧，即证 $x_n\geqslant\sqrt{n-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}+\frac{1}{2}$。

仿照式 (4.2.2) 右侧的证明，可应用数学归纳法类似地完成这个左侧的证明（读者不妨自己思考）。这里笔者提供一种更简洁的放缩证明法如下：

当 $n=1$ 时，$x_1=1\geqslant\sqrt{1-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^1}+\frac{1}{2}$ 显然成立。

当 $n=2$ 时，$x_2=\sqrt{3}\geqslant\sqrt{2-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}$ 也容易证明成立。

当 $n\geqslant 3$ 时，由于 $x_n\geqslant\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\sqrt{n-2}}}\geqslant\sqrt{n+\sqrt{n}}$。于是，证明式 (4.2.2) 左侧只需证明

$$\sqrt{n+\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}+\frac{1}{2},$$

两边平方并化简即证

$$\sqrt{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\geqslant\sqrt{n-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^n},$$

显然成立。于是，式 (4.2.2) 左侧成立。

综上，式 (4.2.2) 得证。 □

顺便指出，利用式 (4.2.2) 并结合数列极限的两边夹定理，立即可以求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=1$，即 x_n 与 $\sqrt{n}$ 是等价的无穷大量。利用式 (4.2.2) 不难证明出一个强度稍弱，但形式上更加简洁的 x_n 的双边估计式如下：

$$\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}。\tag{4.2.3}$$

二、常值连根式的双边估计

记 $y_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{ 层根号}}$（$a>0$，$n\in\mathbb{N}^+$），本文称 y_n 为常值连根式。文 [2] 给出了关于 y_n 上界的一个不等式如下：

$$y_n<\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}。\tag{4.2.4}$$

笔者研究得到了关于 y_n 的一个双边估计式如下：

$$\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}}\right)^{n-1}<y_n<\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}\right)^n。\tag{4.2.5}$$

相对于式 (4.2.4)，式 (4.2.5) 不仅加强了 y_n 的上界，还给出了 y_n 的一个形如新上界的下界。

下面给出式 (4.2.5) 的证明。

证明 （1）先来应用数学归纳法证明式 (4.2.5) 右侧，即证 $y_n<\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}\right)^n$。

当 $n=1$ 时，要证 $y_1=\sqrt{a}<\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}$，只需证 $\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}>0$，显然成立。

当 $n=k$ 时，假设 $y_k<\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}\right)^k$ 成立，则有

$$y_{k+1}=\sqrt{a+y_k}<\sqrt{a+\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}\right)^k},$$

于是，当 $n=k+1$ 时，欲证 $y_{k+1}<\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}\right)^{k+1}$，只需证

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}\right)^k}\leqslant\left(\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}\right)^{k+1},$$

两边平方并化简等价于证明 $\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}\right)^{k+2}\geqslant 0$，显然成立。于是，由数学归纳法得到式 (4.2.5) 右侧成立；

（2）再来应用数学归纳法证明式 (4.2.5) 左侧，即证 $y_n>\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}}\right)^{n-1}$。

当 $n=1$ 时，要证 $y_1=\sqrt{a}>\sqrt{a+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$，只需证 $\sqrt{a}+\frac{1}{2}>\sqrt{a+\frac{1}{4}}$，两边平方后易见成立。

当 $n=k$ 时，假设 $y_k>\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}}\right)^{k-1}$ 成立，则有

$$y_{k+1}=\sqrt{a+y_k}>\sqrt{a+\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}}\right)^{k-1}},$$

于是，当 $n=k+1$ 时，欲证 $y_{k+1}>\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}}\right)^k$，只需证

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}}\right)^{k-1}}\geqslant\left(\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}}\right)^k,$$

两边平方并化简等价于证明 $\left(\frac{1}{\sqrt{4a+1}}\right)^k\leqslant 1$，显然成立。于是，由数学归纳法得到式 (4.2.5) 左侧成立。

综上，式 (4.2.5) 得证。 □

顺便指出，利用式 (4.2.5) 并结合数列极限的两边夹定理，立即可以求出 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$。最后，给出式 (4.2.5) 的如下两个简洁的特例供读者欣赏。

$$2-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 层根号}}<2-\left(\frac{1}{4}\right)^n,\quad(n\in\mathbb{N}^+)\tag{4.2.6}$$

$$3-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}<\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}_{n\text{ 层根号}}<3-\left(\frac{1}{6}\right)^n。\quad(n\in\mathbb{N}^+)\tag{4.2.7}$$

参考文献

[1] 匡继昌. 常用不等式 (第四版)[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2010.8:107.

[2] 马乾凯, 李明. 一个根式不等式的推广 [J]. 中学数学教学参考 (上旬刊・高中版), 2011(4):65.

4.3 这道题我是不是想多了——杨春波、程汉波

这应该是一道很老的竞赛题吧，关于抽象函数的。其实，就我个人而言，并不是很喜欢“抽象函数”这个称呼。抽象函数是我国数学教育界生造的一个概念，是应试教育的产物，这也反应了教学对本质理解的缺失。什么是抽象函数？其实就是函数方程嘛！相比之下，我更喜欢后者。好了，扯远了，下面言归正传。

例 4.3.1. 设函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增，且对所有的 $x>0$，均有

$$f\left[f(x)+\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{f(x)}, \tag{4.3.1}$$

试求 $f(1)$ 的值。

解 设 $f(1)=a$，在式 (4.3.1) 中令 $x=1$，有 $f[f(1)+1]=\dfrac{1}{f(1)}$，即

$$f(a+1)=\frac{1}{a}, \tag{4.3.2}$$

在式 (4.3.1) 中令 $x=a+1$，有 $f\left[f(a+1)+\dfrac{1}{a+1}\right]=\dfrac{1}{f(a+1)}$，即

$$f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=a, \tag{4.3.3}$$

于是 $f(1)=f\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}\right)=a$，又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单增，所以有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1,$$

解之得

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 或者 } a=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

若 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>1$，则 $1<a=f(1)<f(a+1)=\dfrac{1}{a}<1$，矛盾，于是 $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$。 □

上面的解答你可以轻松地在资料书中找到，解答中利用单调性把 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 舍去了，剩下 $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，那就是你了，解题到此为止！但我一直在想：怎么就说明 $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 是合题意的呢？

严格来讲，上述解法中存在纰漏：注意到 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，在 (4.3.2)、(4.3.3) 两式中，我们能够令 $\begin{cases} a+1>0, \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}>0, \end{cases}$ 得 $-1<a<-\dfrac{1}{2}$ 或 $a>0$。幸运的是 $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 在此范围内，幸运的事情哪有这么多，由 $f\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}\right)=a$ 我们可以继续地令，一直往下算，可以得到更多的不等式，a 的范围必定会逐渐缩小，我就不信 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 能一直在里面。

在式 (4.3.1) 中令 $x=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}$，有 $f\left[f\left(\dfrac{2a+1}{a(a+1)}\right)+\dfrac{a(a+1)}{2a+1}\right]=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{2a+1}{a(a+1)}\right)}$，即

$$f\left(a+\frac{a(a+1)}{2a+1}\right)=f\left(\frac{a(3a+2)}{2a+1}\right)=\frac{1}{a}; \tag{4.3.4}$$

在式 (4.3.1) 中令 $x=\dfrac{a(3a+2)}{2a+1}$，有……

过程就是这样，只要你有足够的耐心，可以一直进行下去。笔者又往下算了几项，综合前面的情况，得到以下这些数均在 $f(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内：

$a+1$，$\dfrac{2a+1}{a(a+1)}$，$\dfrac{a(3a+2)}{2a+1}$，$\dfrac{5a+3}{a(3a+2)}$，$\dfrac{a(8a+5)}{5a+3}$，$\dfrac{13a+8}{a(8a+5)}$，$\dfrac{a(21a+13)}{13a+8}$，$\dfrac{34a+21}{a(21a+13)}$,……

我们让这些式子都大于 0，发现 a 的范围与如下一些比值有关：

1，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{5}{8}$，$\dfrac{8}{13}$，$\dfrac{13}{21}$，$\dfrac{21}{34}$,……

容易知道，这些比值是如下数列前项与后项的比：

1，2，3，5，8，13，21，34，55，89,……

这不就是斐波那契数列吗？研究过斐波那契数列的人都知道：随着项数 N 趋向于无穷大时，前一项与后一项的比值越来越接近于黄金分割比 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$。观察那些比值的特征，你会发现：即使我们无限地进行下去，让得到的所有式子都大于 0，得到一个很小很小的范围，$a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 也会在里面，因为这是一个极限状态，有点闭区间套原理的感觉！

到这里，应该可以说 $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 是合题意的了。但我还是有一些不甘心：面对抽象函数试题，笔者总想给抽象的 $f(x)$ 找到一个具体的函数模型，以具体的函数为背景命制的抽象函数试题才是保证科学性的基础，而不是为了寻求解法的漂亮而随意编造。那能不能为例 4.3.1 找一个具体的函数呢？答案是肯定的（其实就是解这个函数方程）：

$\forall x_0>0$，设 $f(x_0)=a$，仿上容易得到 $f\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{x_0}{ax_0+1}\right)=a$，解关于 a 的方程 $x_0=\dfrac{1}{a}+\dfrac{x_0}{ax_0+1}$，得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2x_0}$，于是 $f(x_0)=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2x_0}$，由 x_0 的任意性知，即是 $f(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2x}$，又要求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单增，所以取 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}$，经检验满足题意。多么有成就感啊！

但坦白地讲，解函数方程并不是一件容易的事情，很大程度上依赖于经验，有时连蒙带猜，有时则必须靠深厚的数学功底方可。成型的方法（如柯西方法）和例子（如类柯西方程）已在我的博文《从函数方程看中学常见函数的特征性质》中详述过了，最后举两个活生生的例子，以享读者。

例 4.3.2. 设函数 $f(x)$ 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$，试判断 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的奇偶性。

易判 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，解题到这里就结束了，但笔者总想“一识庐山真面目”，于是便有了如下的探索之旅。

令 $y=x$，则 $f(2x)+f(0)=2f(x)+2f(x)$，易知 $f(0)=0$，得 $f(2x)=4f(x)$；

令 $y=2x$，则 $f(3x)+f(-x)=2f(x)+2f(2x)$，由上述结果，得 $f(3x)=9f(x)$；

令 $y=3x$，则 $f(4x)+f(-2x)=2f(x)+2f(3x)$，由上述结果，得 $f(4x)=16f(x)$；

继续这个过程，归纳可得 $f(nx)=n^2f(x)$，n 为正整数。

令 $x=1$，便得 $f(n)=n^2f(1)=an^2$，其中 $f(1)=a$；

令 $x=\dfrac{m}{n}$，便得 $f(m)=n^2f\left(\dfrac{m}{n}\right)$，故 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{f(m)}{n^2}=\dfrac{am^2}{n^2}$。

又因 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，故 $\forall x\in\mathbb{Q}$，都有 $f(x)=ax^2$。至此，我们有理由猜想：

$$f(x)=ax^2,\qquad(\forall x\in\mathbb{R})$$

其中 $a=f(1)$。代入题设检验，发现完全符合。

例 4.3.3. 设函数 $f(x)$ 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有 $f(xy)=xf(y)+yf(x)$，试判断 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的奇偶性。

解 令 $x=y=1$，有 $f(1)=2f(1)$，得到 $f(1)=0$；另一方面，有

$$f(1)=f[(-1)\times(-1)]=-2f(-1)=0,$$

则 $f(-1)=0$。令 $y=-1$，得

$$f(-x)=xf(-1)-f(x),$$

即 $f(-x)=-f(x)$，由 x 的任意性知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为奇函数。 □

同样地，我们能否找一个满足题意的函数 $f(x)$ 呢？这是一件颇有难度的工作，笔者做了如下尝试：

令 $y=\Delta x$，有 $f(x\Delta x)=xf(\Delta x)+\Delta xf(x)$，当 $x\neq 0$ 时，则

$$\frac{f(x\Delta x)-f(x)}{x(\Delta x-1)}=\frac{f(\Delta x)-f(1)}{\Delta x-1}+\frac{f(x)}{x},$$

不妨假设 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 1}\dfrac{f(\Delta x)-f(1)}{\Delta x-1}$ 是存在的，则可在上式中令 $\Delta x\to 1$，有

$$\lim_{\Delta x\to 1}\frac{f(x\Delta x)-f(x)}{x(\Delta x-1)}=\lim_{\Delta x\to 1}\frac{f(\Delta x)-f(1)}{\Delta x-1}+\lim_{\Delta x\to 1}\frac{f(x)}{x},$$

即

$$f'(x)=f'(1)+\frac{f(x)}{x},$$

下面解这个简单的微分方程：$y'=c+\dfrac{y}{x}$。令 $t=\dfrac{y}{x}$，则 $y'=(tx)'=t'x+t$，于是

$$t'x+t=c+t,$$

得 $t'=\dfrac{c}{x}$，积分有 $\dfrac{y}{x}=t=c\ln|x|+C$，C 为常数。所以

$$y=cx\ln|x|+Cx,$$

由 $f(1)=0$ 知 $C=0$，所以 $y=cx\ln|x|$。

当 $x=0$ 时，因 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，故 $f(0)=0$。

综上便有

$$f(x)=\begin{cases}cx\ln|x|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $c=f'(1)$。经检验，这样的函数 $f(x)$ 满足题意。

参考文献

[1] 张必平. 抽象函数试题不宜随意编造 [J]. 数学教学, 2008, 5.

[2] 杨春波, 程汉波. 从函数方程看中学常见函数的特征性质 [OL]. 新浪博客, 2012, 9.

[3] 杨春波. 从失效的导数定义谈起 [OL]. 新浪博客, 2012, 7.

编者注： 值得一提的是，对于例 4.3.2 和例 4.3.3 的两个函数方程，尽管作者都给出了其连续解，但其实两例均存在非连续解，并且都可以利用柯西方程构造出来。

具体地，设 $K(x)$ 是任意一个柯西方程的解，即 $K(x)$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 均有 $K(x)+K(y)=K(x+y)$。又设 c 为任意常数，那么：

- 函数 $f(x)=c\cdot\big(K(x)\big)^2$ 满足例 4.3.2 中的函数方程；
- 函数 $f(x)=\begin{cases}cxK(\ln|x|), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 满足例 4.3.3 中的函数方程。

以上两点很容易验证，过程我就不具体写了。而由于柯西方程存在非连续解，而且非连续解在任意区间上无界，也无单调性，所以当取 $K(x)$ 为非连续解时，$\big(K(x)\big)^2$ 和 $K(\ln|x|)$ 必然也都是非连续函数，这样就说明了该两例的函数方程均存在非连续解。

朝花夕拾

5.1 【封面故事】Cassini 卵形线和 Apollonius 圆——何万程

我们知道在一平面内到两定点距离和为定值的轨迹是椭圆，到两定点距离差为定值的轨迹是双曲线，当然上述轨迹存在是有一定条件限制的。那么到两定点距离积为定值和到两定点距离商为定值的轨迹是什么呢？下面就来讨论这两个问题。

到两定点的距离之积为常数的点的轨迹称为 Cassini 卵形线，这两个顶点称为 Cassini 卵形线的焦点。

设 Cassini 卵形线两焦点为 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，距离之积为 a^2（$a>0$），则

$$\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4,$$

化简得

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2c^2\left(x^2-y^2\right)-a^4+c^4=0,$$

变成以原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标方程，得

$$\cos 2\theta=\frac{\rho^4-a^4+c^4}{2c^2\rho^2}。$$

图 5.1.1 中由内到外所画的曲线分别是 $a=\dfrac{3}{4}c$（此时曲线为两个卵形）、$a=c$、$a=\dfrac{5}{4}c$、$a=\dfrac{3}{2}c$ 时的 Cassini 卵形线。

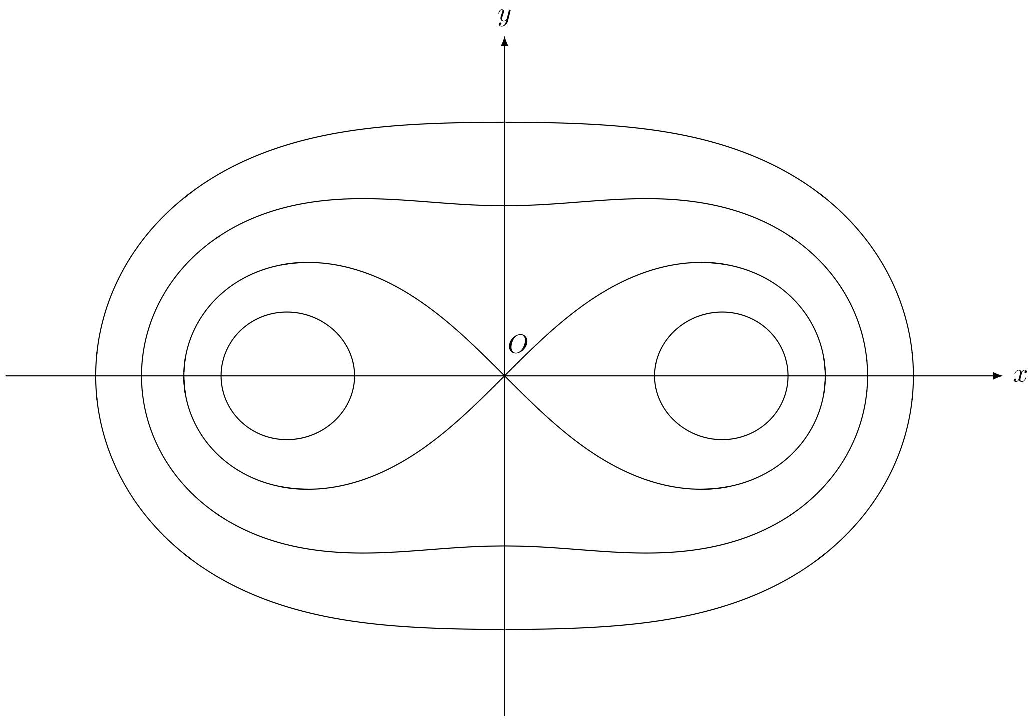


图 5.1.1

由 Cassini 卵形线的方程得

$$y=\pm\sqrt{\sqrt{4c^2x^2+a^4}-x^2-c^2},$$

由此得（$\pm$ 取其中一个符号求导）

$$y'=\pm x\left(\frac{2c^2}{\sqrt{4c^2x^2+a^4}}-1\right)\frac{1}{\sqrt{\sqrt{4c^2x^2+a^4}-x^2-c^2}}。$$

当 $a<c$ 时，Cassini 卵形线由两个卵形组成。$-\sqrt{a^2+c^2}\leqslant x\leqslant-\sqrt{-a^2+c^2}$ 或 $\sqrt{-a^2+c^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2+c^2}$。最高点是 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{-a^4+4c^4}}{2c},\dfrac{a^2}{2c}\right)$，最低点是 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{-a^4+4c^4}}{2c},-\dfrac{a^2}{2c}\right)$。

当 $a=c$ 时，Cassini 卵形线的图象像一个平放的 8 字，此时的 Cassini 卵形线也称为 Bernoulli 双纽线，此时的极坐标方程是 $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$。$-\sqrt{2}a\leqslant x\leqslant\sqrt{2}a$。最高点是 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$，最低点是 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}a}{2},-\dfrac{a}{2}\right)$。原点是曲线的二重点，切线是 $y=\pm x$。

当 $c<a<\sqrt{2}c$ 时，Cassini 卵形线由一个卵形组成，曲线中部有凹进的细腰。$-\sqrt{a^2+c^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2+c^2}$。最高点是 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{-a^4+4c^4}}{2c},\dfrac{a^2}{2c}\right)$，最低点是 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{-a^4+4c^4}}{2c},-\dfrac{a^2}{2c}\right)$，凹进最靠近 x 轴的点是 $\left(0,\pm\sqrt{a^2-c^2}\right)$，拐点是 $\left(\pm\dfrac{1}{c}\sqrt{\dfrac{c^2\sqrt{3\left(a^4-c^4\right)}-a^4+c^4}{6}},\pm\dfrac{1}{c}\sqrt{\dfrac{c^2\sqrt{3\left(a^4-c^4\right)}+a^4-c^4}{6}}\right)$。

当 $a\geqslant\sqrt{2}c$ 时，Cassini 卵形线由一个卵形组成，曲线是一个凸形。$-\sqrt{a^2+c^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2+c^2}$。最高点是 $\left(0,\sqrt{a^2-c^2}\right)$，最低点是 $\left(0,-\sqrt{a^2-c^2}\right)$。

下面求到点 $A\left(0,0\right)$ 与点 $B\left(l,0\right)$ 的距离之比等于 λ 的点的轨迹，其中 $l>0$。

设所求的点的坐标是 $P\left(x,y\right)$，则

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\left(x-l\right)^2+y^2}}=\lambda。$$

当 $\lambda=1$ 时，则上面的方程化简为

$$x=\frac{l}{2},$$

这就是线段 AB 的中垂线；

当 $\lambda\neq1$ 时，则上面的方程化简为

$$\left(x+\frac{\lambda^2 l}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2=\frac{\lambda^2 l^2}{\left(1-\lambda^2\right)^2},$$

这是以点 $\left(-\dfrac{\lambda^2 l}{1-\lambda^2},0\right)$ 为圆心，以 $\dfrac{\lambda l}{\left|1-\lambda^2\right|}$ 为半径的圆。

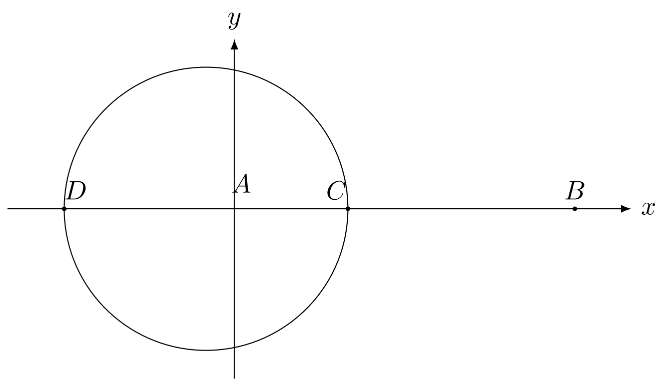


图 5.1.2

到两定点距离的商是定值，且定值不为 1 的轨迹称为 Apollonius 圆。由其定义可得 Apollonius 圆的简单作图法：作分线段 AB 为定比 λ 的内、外分点 C、D，以 CD 为直径的圆就是到点 A、B 距离的商为 λ 的轨迹。