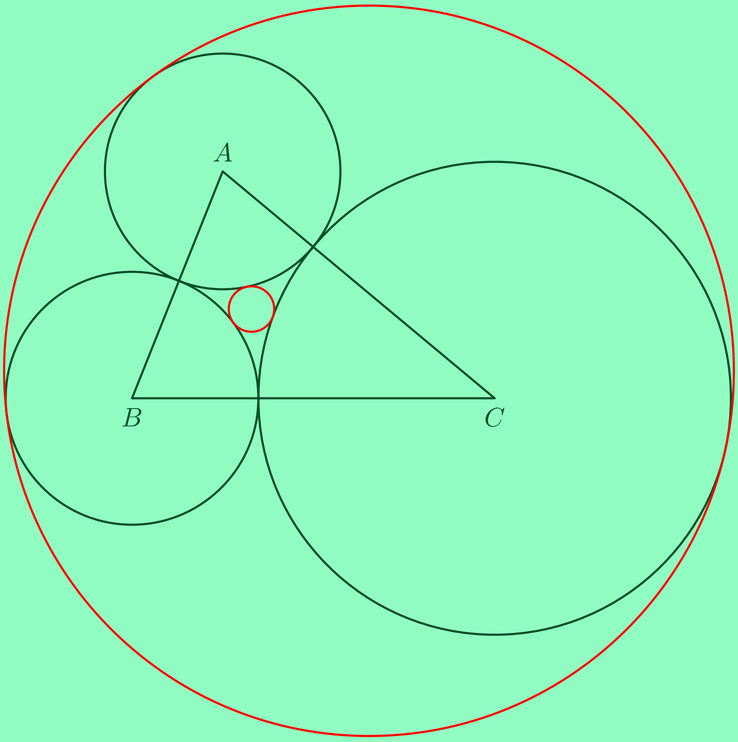
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2013 年第 2 期　　总第 12 期



目录

数学评书

1.1 《智慧宝典》第三部第五回　宴上起波澜　智慧化刁难——陈海峰

话说三角山的首领准备宴请两位小英雄，而且以最高的待遇设宴，这可惹恼了一些将官，要知道，最高级别的待遇是给对国家有特殊贡献的人呀，怎么这两位小英雄才来一天，竟然就能享受这个待遇了，心中愤愤不平，于是决定争取在宴席上让两位小英雄主动退出。

不多时，卫兵来说已准备好，宴席开始时，首领发话了："为什么给两位小英雄最高级别的待遇呢？因为两位小英雄帮我破解了藏宝图的秘密，这样我们的经济又能得以为续了。"这时众将官才明白，可是毕竟还些不服，其中一人说道："听说两位小英雄智慧超群，能否在宴席上助兴一番！"两位小英雄觉得此人话中有话，欣然答道："当然可以！"这时这人说道："我们三角国王经常夜观天象，知道一些星宿的运行规律，你来看看那两个星的运行规律有什么不同呢。"说着指着天上两颗星。

星宿一　函数 $y = \sin(\theta + 1)$ 的最小正周期是________；

星宿二　函数 $y = |\sin\theta + 1|$ 的最小正周期是________。

只见小英说道："星宿一的问题很简单，只需将 1 视为弧度，则根据 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期的求法可得 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$，也就是 2π 了。"

这时小豪制止着小英，接着说道："星宿二的答案是 π……（故意顿了顿，目光转向那位将官，只见他幸灾乐祸的样子）是错误的！"这时满庭一片哗然，以为小豪答错了。

只见小豪清了清嗓子道：星宿二的答案很容易做成 π，究其原因是受"周期减半"法则的影响，就是认为加绝对值符号后，最小周期减少到原来的一半，但是究竟哪些情况适合"周期减半"的法则呢？有些同学不太关注。事实上，对于像函数 $y = |\sin x|$，$y = |\cos x|$，它们的周期（以下均指最小正周期）是 π，周期确实减半了，而对于像 $y = |\sin x + 1|$，$y = |\tan x|$，我们可以用图象印证一下，请看：

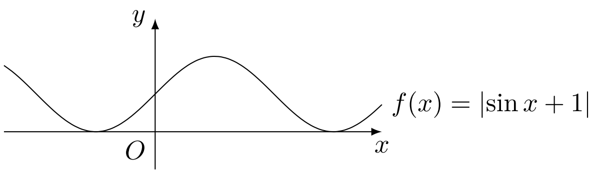


图 1.1.1

小豪奎星笔一出，闪出一道漂亮的圆弧。如图 1.1.1，可以看到，整个函数图象在 x 轴上方，它们的周期并没有减半。列位也可以再看看别的星宿，自己进一步探究可以发现：三角函数的"周期减半"法则仅仅适用于 $y = |\sin(\omega x + \varphi)|$，$y = |\cos(\omega x + \varphi)|$ 的类型，它根本不适用于 $y = |\sin(\omega x + \varphi) + b|$，$y = |\cos(\omega x + \varphi) + b|$，$y = |\tan(\omega x + \varphi) + b|$（其中 $b \neq 0$）这些情形。

事实上我们还可以通过周期的定义来证明。假设第二问的周期是 π，则应有 $f(x + \pi) = |\sin(\pi + x) + 1| = |-\sin x + 1| \neq f(x)$，这就不符合周期的定义了，因此周期为 π 是错误的，而 2π 代入显然符合。

这时这位将官双手抱拳道："两位小英雄果然名不虚传，本人甘拜下风！"后来两人才得知，此人乃三角山的国师也。

宴罢，三角山的首领便将自己拥有的一章《智慧宝典》送给了两位小英雄，两人遂跪谢。

欲知后事如何，且听下回分解。

1.2 《智慧宝典》第三部第六回 船上遇赌徒 释秘趋蛊惑——陈海峰

话说两位小英雄得到三角山首领赠送的《智慧宝典》散页后，便告辞而去。不日，根据首领的指引从山上下来，看到的却是一片大海，两人只好等过海的船只。

只见一个小点由小到大，却是一条大船。两人遂拿出银两，上了船，看甲板上欣赏美丽的景色。这时一阵喧哗，原来一些船客们围成一堆，两人心里明白，遇上一群好赌之徒了。靠近一看，原来赌局是这样的。

赌局 1 下列命题中的真命题是 （ ）

（A）零向量既无方向也无长度 （B）$\vec{0}=0$

（C）若 $\vec{a}=\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同或者相反 （D）零向量与任一向量共线

只见很多人就押中 C。结果大家都赔了，只听一阵嘘声，这时有人不服气，要求解释。只见庄家说："零向量有方向，且方向是任意的，长度为零，当然也不与 0 相等，故 A、B 都是错误的。至于大家押中的 C 嘛，呵呵，当 $\vec{a}$ 是 $\vec{0}$ 时，$\vec{0}$ 的方向是任意的，不一定平行，故 C 错误。其实只有 D 是真命题，大家没有看好啊，所以失算了，愿赌服输吧！要不再来一局。"

只听一阵吵闹声，再来、再来，我就不信邪了。这时庄家又摆起赌局。

赌局 2 下列写法正确的有几个 （ ）

① $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

② $\vec{a}-\vec{a}=0$

③ $0\cdot\vec{a}=0$

④ $\vec{0}\cdot k=0$

⑤ $|\vec{a}|=0 \implies \vec{a}=0$

（A）0 个 （B）1 个 （C）2 个 （D）3 个 （E）4 个 （F）5 个

又是一声的喧哗声，大家都开始押了，结果当然又是大败。答案是只有 1 个正确，就是选 B。大家又是要求解释。

只听庄家说道："向量的加减还是向量，所以①是正确的，②是错的。而实数与向量的积还是向量，所以③、④也都是错的，至于⑤嘛，向量的模为 0，应该为 $\vec{a}=\vec{0}$，所以⑤也是错的。"

这时大家个个都垂头丧气，只听庄家又发话了："再来一局如何？这局这样，你们可以互相商量，如果押对了，我情愿将刚刚所赢来的钱加倍奉还，如果你们输了，就把你们带来的钱全都送上来如何？"

参与的赌徒中有一人大声一喊："豁出去了！反正带来的钱已经输得差不多了，剩下这点钱也无法成事了，不如就再赌一局算了，如果能要回来还可生活。"这时很多人都附和了。庄家说道："好好好！爽快！那就再来！各位豪杰有请，看好了！"

赌局 3 与向量 $\vec{a}$ 平行的模为 5 的向量的个数是________。

这时全部赌友们就果然联合起来，一起商量，他们坚信"三个臭皮匠，胜过诸葛亮"，声音渐小了，看来应该有个统一的答案。

庄家发话了："请派一个代表来押。"这时只见一人刚要走上台上。小英与小豪大喊一声："朋友留步！"这时大家才回过神来，注意到了两位小英雄。

小豪说："我来代表你们来押此一回如何？"这时有人说："一个黄毛小子，乳臭未干，不能相信，这些钱可是我们的命根子了。"小豪只好将自己的姓名告诉众人。这时有人说："我听说过这两位小英雄，据说武功超群，智慧过人！我们就相信他俩一回吧！"小豪回敬刚刚那位仁兄道："知道这些钱是你们的命根子，那怎么不爱惜，将之拿来作赌资？！"这时很多人都低下了头。

只听小豪怒喝，开吧！这时小豪押得真切，说道："有两个或无数个！"

赌友们又是一阵哗然，"不是两个吗？怎么又画蛇添足了，栽了，我们命该绝了。"这时却见庄家脸色发紫道："愿闻其详！"

只听小豪道：此局的机关在于本题中的向量可以是零向量，也可以是非零向量。

（1）当 $\vec{a}$ 是非零向量时，有两个方向相反的且都与 $\vec{a}$ 平行的模为 5 的向量；

（2）当 $\vec{a}$ 是零向量时，与 $\vec{0}$ 平行的模为 5 的向量有无数个。

这时庄家面色发白，飞身一跃，跳入海中，离船而去。小豪命众人将庄家的钱分回，告诫大家要君子爱钱，取之有道。

此去究竟还会发生何事，且听下回分解。

助力高考

2.1 ab1962 解题集精选（十二）——廖凡

题目 2.1.1. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，求斜率为 2 的平行弦的中点轨迹方程。

解 设斜率为 2 的弦的两个端点为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，弦中点为 (x,y)，则

$$\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1，\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1，$$

相减得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{2}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0，$$

因斜率为 2，必有 $x_1\neq x_2$，故

$$\frac{(x_1+x_2)}{2}+(y_1+y_2)\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0，$$

因为 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，$x_1+x_2=2x$，$y_1+y_2=2y$，代入即得

$$x+4y=0，$$

于是所求的轨迹是直线 $x+4y=0$ 在椭圆内部的部分。 □

kuing 评注：典型的点差法处理弦中点问题，适用于一般二次曲线的情形，甚至是斜的。

题目 2.1.2. P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上异于长轴端点的任意一点，$F_1$、$F_2$ 是椭圆的左右焦点，$\odot C$ 是 $\triangle PF_1F_2$ 的旁切圆，N 为 $\odot C$ 与直线 F_1F_2 的切点，试讨论 N 的位置。

解 若 $\odot C$ 与线段 PF_2 相切，如图 2.1.1 所示。

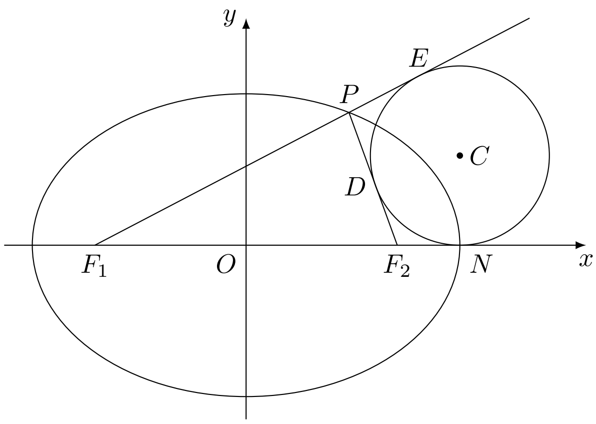


图 2.1.1

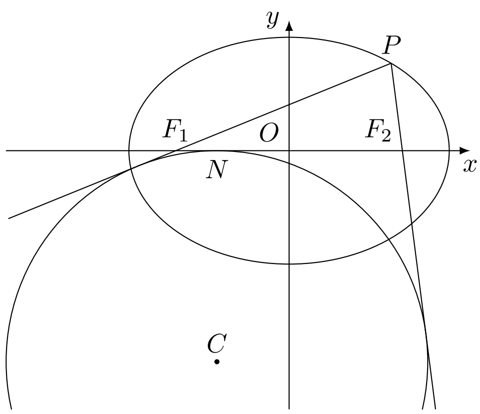


图 2.1.2

设 $\odot C$ 与线段 PF_2 切于点 D，与 F_1P 的延长线切于点 E，因为 $NF_2=F_2D=PF_2-PD$，$NF_1=F_1E=PF_1+PD$，相加得 $NF_1+NF_2=PF_1+PF_2=2a$，于是 $NO=a$，故图 2.1.1 中的 N 是右顶点。

同理，若 $\odot C$ 与线段 PF_1 相切，则 N 是左顶点。而若 $\odot C$ 与线段 F_1F_2 相切，则 N 随点 P 的变动而在线段 F_1F_2 内变动，如图 2.1.2 所示。 □

kuing 评注：其实在我选题的时候，第一眼觉得这题太简单，本来不太想选，后来突然觉得最后一种情况，也就是旁切圆在下面时似乎还有值得挖掘的地方，结果就得到了本文之后的另一文。

题目 2.1.3. 求证：对任意大于 1 的正整数 n，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 不可能为整数。

证明 用反证法，假设 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 是整数，则 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 乘以任何整数仍为整数。

下面我们去找一个与 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 有关的整数 Q，使它与 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 相乘不为整数就可以了。

我们把 $2,3,\cdots,n$ 分别用 2 除，除到商数为奇数为止，这是可以做的事情。设除 2 的次数分别为 $p_2,p_3,\cdots,p_n$，最后的奇数商数分别为 $k_2,k_3,\cdots,k_n$，于是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{1}{2^{p_2}k_2}+\frac{1}{2^{p_3}k_3}+\cdots+\frac{1}{2^{p_n}k_n}。$$

设 $p_2,p_3,\cdots,p_n$ 中最大的为 p，显然 $p\geqslant 1$，则 $2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n$ 必为整数，由假设知 $2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$ 也是整数。

另一方面，我们来证明 $2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$ 不是整数。

下面先证 $p_2,p_3,\cdots,p_n$ 之中只有一个等于 p。

如果 $p_2,p_3,\cdots,p_n$ 中有两个数 p_i 和 p_j 都等于 p（$2\leqslant i<j\leqslant n$），于是 $i=2^{p_i}k_i=2^pk_i$，$j=2^{p_j}k_j=2^pk_j$，由于 $i<j$，因此 $k_i<k_j$。因为 k_i 与 k_j 是奇数，故有偶数 $2t$ 在 k_i 与 k_j 之间，即 $k_i<2t<k_j$，$2^pk_i<2^p\cdot 2t<2^pk_j$，即 $i<2^p\cdot 2t<j$，设 $u=2^p\cdot 2t$，则 $p_u\geqslant p+1$，这与 p 是 $p_2,p_3,\cdots,p_n$ 中最大者矛盾。

因此，$p_2,p_3,\cdots,p_n$ 之中只有一个等于 p，设 $p_j=p$，则

$$2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=N+\frac{1}{2}k_1k_2\cdots k_{j-1}k_{j+1}\cdots k_n,$$

其中 N 是整数。因为 $k_1,k_2,\cdots,k_{j-1},k_{j+1},\cdots,k_n$ 都是奇数，所以 $\dfrac{1}{2}k_1k_2\cdots k_{j-1}k_{j+1}\cdots k_n$ 不是整数，故 $2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$ 不是整数，从而产生矛盾。

所以假设不成立，因此 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 不可能为整数。 □

kuing 评注： 上述证法要是在表达上加以简化就更加好了。此外，此方法适用于稍一般的情形：若 $m,n\in\mathbb{N}^+$，则 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n+m}$ 都不是整数。

题目 2.1.4. 解方程组

$$\begin{cases} a+b+c+d=10, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=30, \\ a^3+b^3+c^3+d^3=100, \\ abcd=24。\end{cases}$$

解 注意到

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=\frac{(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2}=\frac{100-30}{2}=35,$$

以及

$$\begin{aligned}&abc+abd+acd+bcd\\ =&\frac{(a+b+c+d)^3-3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(a^3+b^3+c^3+d^3)}{3}\end{aligned}$$

$$= \frac{10^3 - 3\times 10\times 30 + 2\times 100}{6} = 50,$$

故 a, b, c, d 是方程 $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ 的四个根，对其作因式分解，有

$$x^4-10x^3+24x^2+11x^2-50x+24=0,$$

$$x^2(x-4)(x-6)+(x-4)(11x-6)=0,$$

$$(x-4)[x^2(x-3)-3x^2+11x-6]=0,$$

$$(x-4)[x^2(x-3)-(3x-2)(x-3)]=0,$$

$$(x-4)(x-3)(x^2-3x+2)=0,$$

$$(x-4)(x-3)(x-1)(x-2)=0,$$

故原方程组的解为 a, b, c, d 为 1, 2, 3, 4 的任意排列。 □

kuing 评注：直接观察也可以看出答案，因而最后的因式分解其实可以直接得到。

题目 2.1.5. 两个集合 $M=\{1,2,3,4\}$，$N=\{a,b,c,d\}$，那么 $f: M\to N$ 满足 N 中恰好有一个元素无原象的映射个数是 （ ）

（A）288 （B）72 （C）144 （D）36

解法一 第一步，从 $N=\{a,b,c,d\}$ 中选无原象的元素，有 $C_4^1=4$ 种选法；

第二步，把 $M=\{1,2,3,4\}$ 中的元素分成三部分，使每一部分的元素分别与 N 中有原象的三个元数对应。M 中的元素分成三部分的分法数是 $\dfrac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}=6$，对应的方法有 $A_3^3=6$。

综上，所求映射个数 $=4\times 6\times 6=144$。 □

解法二 第一步同解法一；

第二步，我们把 M 中的 4 个元素当成 4 个不同的球，$N=\{a,b,c,d\}$ 中有原象的 3 个元素当成 3 个不同的框。这样，映射个数就转化成了把 4 个不同的球投到 3 个不同的框中，且每框至少一球的投法数。

可以先从 4 球中选 2 球投到一框中，有 $C_4^2C_3^1=18$ 种方法，再把剩下的两球投到另两个框中，每框一球，有 $A_2^2=2$ 种方法。

综上，所求映射个数 $=4\times 18\times 2=144$。 □

解法三 问题转化为把 4 个不同的球投到 4 个不同的框中，且恰有一个空框的投法数。

先把从 4 个球中选 2 个捆起来当成一球，问题转化为把 3 个不同的球投到 4 个不同的框中，且每框至多一球的投法数。

所以所求映射个数 $=C_4^2A_4^3=144$。 □

题目 2.1.6. 设平面上有 6 个圆，每个圆都不能盖住其它任何一个圆的圆心，证明：平面上任一个点都不会被这 6 个圆同时盖住。

证明 假设平面上点 M 被这 6 个圆同时盖住，设这 6 个圆的圆心分别为 O_1，O_2，O_3，O_4，O_5，O_6，按顺时针方向排列。

设圆 O_1，O_2 的半径分别为 r_1，r_2，连结 O_1O_2，MO_1，MO_2，不妨设 $MO_1\geqslant MO_2$，由条件及假设，有 $O_1O_2>r_1\geqslant MO_1$，于是在 $\triangle MO_1O_2$ 中，由余弦定理，有

$$\cos\angle O_1MO_2=\frac{MO_1^2+MO_2^2-O_1O_2^2}{2MO_1\cdot MO_2}<\frac{MO_1^2+MO_2^2-MO_1^2}{2MO_1\cdot MO_2}=\frac{MO_2}{2MO_1}\leqslant\frac{1}{2},$$

故 $\angle O_1MO_2>60^\circ$，同理可证 $\angle O_2MO_3>60^\circ$，$\cdots$，$\angle O_6MO_1>60^\circ$，于是 $\angle O_1MO_2+\angle O_2MO_3+\cdots+\angle O_6MO_1>360^\circ$，这是不可能的。

因此原命题成立。 □

kuing 评注：原解答放缩有误，以上是经过我修正的。此外，也可以用纯平面几何方法，通过角度大小关系推出 $\angle O_1MO_2>60^\circ$，具体地，不妨设 $r_1\geqslant r_2$，作如图 2.1.3 所示的辅助线。

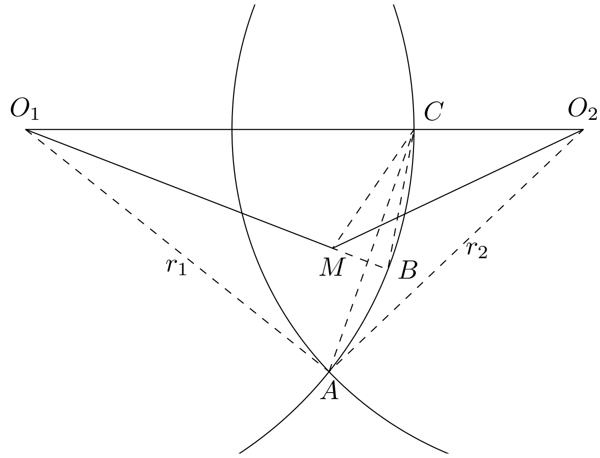


图 2.1.3

因为 $O_1O_2>O_1A\geqslant O_2A$，所以 $\angle AO_1O_2<60^\circ$，从而易得 $\angle O_1AC>60^\circ$，于是

$$\angle O_1MO_2>\angle O_1MC\geqslant\angle O_1BC\geqslant\angle O_1AC>60^\circ。$$

2.2 对《ab1962 解题集精选（十二）》里的一道椭圆题的拓展——郭子伟

在前面的《ab1962 解题集精选（十二）》一文里面的题目 2.1.2 提到了椭圆焦点三角形的旁切圆，并讨论了旁切圆与两焦点所在直线的切点位置。原题是比较简单的，但是作者向来对于含有丰富几何性质的圆锥曲线问题颇有兴趣，于是便对该题目所述的情境作了进一步的探索，试图挖掘一些相关的新结论出来。

为方便讲述，以下统一设给定的椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$ 分别为其左右焦点，离心率为 e，焦点到其对应准线的距离为 p，点 P 是椭圆上异于长轴顶点的动点。

当 $\triangle PF_1F_2$ 的旁切圆与线段 PF_1 或 PF_2 相切时，由原题的解答可知这时各个切点以及圆心的轨迹都很简单，这里不再讨论这种情形。

以下记 $\odot Q$ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的旁切圆并且与线段 F_1F_2 相切，$\odot I$ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆，考虑以下几个问题：

（1）求旁心 Q 的轨迹方程；

（2）求内心 I 的轨迹方程；

（3）设 $\odot Q$ 与 PF_1 的延长线切于点 D，求 D 的轨迹方程；

（4）设 $\odot I$ 与线段 PF_1 切于点 G，求 G 的轨迹方程。

相对来说，我还是对内切圆熟悉一些，所以现在先来解决问题（2）。为此，先给出两个引理：

引理 2.2.1. 若三角形三边长分别为 $x+y,\ y+z,\ z+x$，其中 $x,\ y,\ z>0$，则其内切圆半径为

$$r=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}。$$

引理 2.2.2. 设平面直角坐标系上有两定点 A、B 及动点 P，且直线 PA 与 PB 的斜率之积为非零常数 K，则当 $K<0$ 时，P 的轨迹是椭圆；当 $K>0$ 时，P 的轨迹是双曲线或两相交直线。特别地，当两定点坐标为 $A(-m,0),\ B(m,0)$ 时，轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{-Km^2}=1$。注意，要使斜率存在，以上所有情形的轨迹均要去除与 A、B 横坐标相同的点。

引理 2.2.1 只要用海伦公式即可证，引理 2.2.2 是熟知的，具体证明从略。

下面利用这两个引理，给出问题（2）的两种解法。

解法一 设 $I(x,y)$，其中 $x\in(-c,c)$，$\odot I$ 与 PF_1、PF_2、F_1F_2 分别切于 G、H、N，如图 2.2.1 所示。

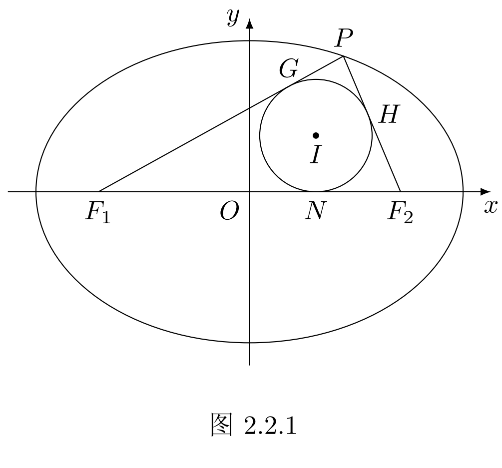


图 2.2.1

由切线长相等，有

$$F_1G=F_1N=c+x，F_2H=F_2N=c-x，PG=PH=\frac{PF_1+PF_2-F_1F_2}{2}=a-c,$$

由引理 2.2.1，有

$$y^2=\frac{(c+x)(c-x)(a-c)}{c+x+c-x+a-c},$$

化简得

$$(a-c)x^2+(a+c)y^2=(a-c)c^2,$$

即

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{y^2}{c^2}=1,（x\neq\pm c）$$

这就是内心 I 的轨迹方程。 □

解法二　设 $P(x_0,y_0)$，记 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}|y_0|\cdot F_1F_2=|y_0|c,$$

另一方面，设 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径为 r，则

$$S=\frac{1}{2}r(PF_1+PF_2+F_1F_2)=r(a+c),$$

因此

$$r=\frac{|y_0|c}{a+c},$$

仍然如图 2.2.1 所示，由切线长相等及焦半径公式，有

$$\begin{aligned}F_1N\cdot F_2N&=\frac{(F_1N+F_2N)^2-(F_1N-F_2N)^2}{4}\\&=c^2-\frac{(PF_1-PF_2)^2}{4}\\&=c^2-\frac{\big(a+ex_0-(a-ex_0)\big)^2}{4}\\&=c^2-e^2x_0^2\\&=c^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)\\&=\frac{c^2y_0^2}{b^2},\end{aligned}$$

因此，我们有

$$k_{IF_1}\cdot k_{IF_2}=-\frac{r^2}{F_1N\cdot F_2N}=-\frac{b^2}{(a+c)^2}=-\frac{1-e}{1+e},$$

于是，由引理 2.2.2，即得内心 I 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{y^2}{c^2}=1。（x\neq\pm c）$$ □

问题（2）解决了，回头看问题（1），不难发现上述两种方法都适用于问题（1），但其实不需要这样做了，我们可以通过问题（2）的结论直接推出问题（1）的结论。

解　如图 2.2.2 所示，注意到同一个角的外角平分线与内角平分线互相垂直，所以有

$$k_{QF_1}=-\frac{1}{k_{IF_1}},\ k_{QF_2}=-\frac{1}{k_{IF_2}},$$

利用上述解法二的结果，就有

$$k_{QF_1}\cdot k_{QF_2}=\frac{1}{k_{IF_1}\cdot k_{IF_2}}=-\frac{1+e}{1-e},$$

再由引理 2.2.2，即得旁心 Q 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{1-e}{1+e}\cdot\frac{y^2}{c^2}=1。（x\neq\pm c）$$ □

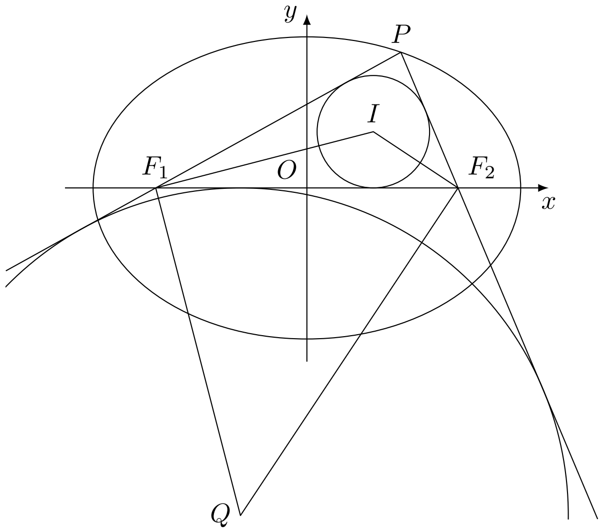


图 2.2.2

这样，问题（1）、（2）就解决了，轨迹都是以 F_1、F_2 为顶点的椭圆（除去 F_1、F_2 两点）。

继续来看问题（3）、（4），用平常的方法不好处理，注意到切点、焦点、动点三点共线，所以考虑用极坐标，为此还是需要给出引理，这个引理其实是很常用的。

引理 2.2.3 (圆锥曲线的极坐标方程). 以圆锥曲线的焦点为极点，向垂直于对应准线且不与该准线相交的方向作极轴，则此圆锥曲线的方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}。$$

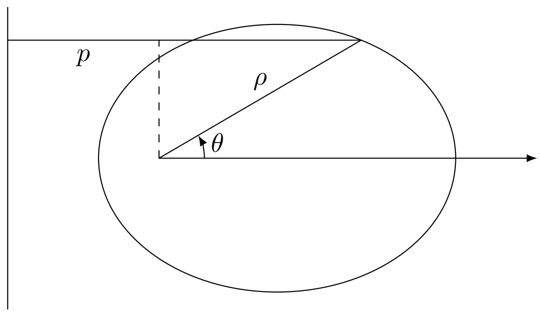


图 2.2.3

引理 2.2.3 的证明很容易，如图 2.2.3，由圆锥曲线的第二定义有 $\dfrac{\rho}{\rho\cos\theta+p}=e$，解出 ρ 即得。

现在，我们以 F_1 为极点，射线 F_1F_2 为极轴，在此极坐标系下，利用此引理来解决问题（3）、（4）。

解 （3）由切线长相等，有

$$PD=\frac{PF_1+PF_2+F_1F_2}{2}=a+c,$$

因此，由引理 2.2.3，即得 D 的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}-(a+c),$$

其中 $\cos\theta \neq \pm 1$。注意到 $ep = \dfrac{c}{a}\left(\dfrac{a^2}{c} - c\right) = \dfrac{(a+c)(a-c)}{a}$，代入上式化简可得

$$\rho = \frac{c(a+c)(\cos\theta - 1)}{a - c\cos\theta} = c \cdot \frac{(1+e)(\cos\theta - 1)}{1 - e\cos\theta};$$

（4）类似地，由 $PG = a - c$ 及引理 2.2.3，即得 G 的极坐标方程为

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} - (a - c),$$

其中 $\cos\theta \neq \pm 1$。化简得

$$\rho = c \cdot \frac{(1-e)(\cos\theta + 1)}{1 - e\cos\theta}。 \qquad \square$$

这样，问题（3）、（4）也算是解决了，理论上还可以将它们化成原直角坐标系下的方程，但是形式比较复杂，这里就不给出了，我们将它们的轨迹画出来，分别如图 2.2.4 及图 2.2.5 所示。

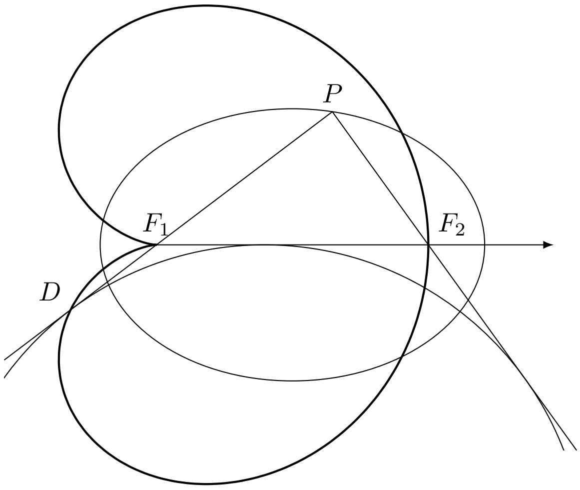


图 2.2.4

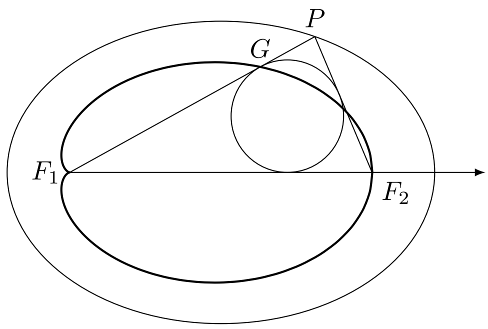


图 2.2.5

以上讨论的都是椭圆的焦点三角形的情形，那么如果换成双曲线，是否也有类似的结论呢？答案是肯定的，但是限于篇幅，而且解决方法与椭圆的相差无几，所以这里就不再详细写下去了，就当作是本文留下的习题吧，有兴趣的读者不妨试试推导。

2.3 三道高考压轴题的奥数背景及解法探讨——蒋明斌

2008 年至 2010 年高考江西卷理科数学压轴题比较难，其中第（ii）小题很少有人做出或根本无人做出，这三题所涉及的知识或方法有着深刻的奥数背景，本文对其背景及解法作些探讨。

一、2010 年江西卷理科数学第 22 题，涉及初等数论中不定方程。

1. 题目与标准答案

题目 2.3.1. 证明以下命题：

（i）对任一正整数 a, 都存在整数 b, c（$b<c$），使得 a^2, b^2, c^2 成等差数列。

（ii）存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$，其边长 a_n, b_n, c_n 为正整数且 a_n^2, b_n^2, c_n^2 成等差数列。

标准答案 （i）易知 $1^2, 5^2, 7^2$ 成等差数列，则 $a^2, (5a)^2, (7a)^2$ 也成等差数列，所以对任一正整数 a，都存在整数 $b=5a, c=7a$（$b<c$），使得 a^2, b^2, c^2 成等差数列。

（ii）若 a_n^2, b_n^2, c_n^2 成等差数列，则 $b_n^2-a_n^2=c_n^2-b_n^2$，即

$$(b_n+a_n)(b_n-a_n)=(c_n+b_n)(c_n-b_n)。\tag{2.3.1}$$

选取关于 n 的一个多项式，例如 $4n(n^2-1)$，使得它可按两种方式分解因式，由于

$$4n(n^2-1)=(2n-2)(2n^2+2n)=(2n^2-2n)(2n+2),$$

因此令

$$\begin{cases} a_n+b_n=2n^2-2n, \\ b_n-a_n=2n+2, \end{cases} \quad \begin{cases} c_n+b_n=2n^2+2n, \\ c_n-b_n=2n-2, \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} a_n=n^2-2n-1, \\ b_n=n^2+1, \qquad\qquad (n\geqslant 4) \\ c_n=n^2+2n-1, \end{cases}$$

易验证 a_n, b_n, c_n 满足式 (2.3.1)，即 a_n^2, b_n^2, c_n^2 成等差数列，当 $n\geqslant 4$ 时，有 $a_n<b_n<c_n$，且 $a_n+b_n-c_n=n^2-4n+1>0$，因此，以 a_n, b_n, c_n 为边长可构成三角形，将此三角形记作 $\triangle_n$（$n\geqslant 4$）。

其次，任取正整数 m, n（$m, n\geqslant 4, m\neq n$），假设 $\triangle_m$ 与 $\triangle_n$ 相似，则有

$$\frac{m^2-2m-1}{n^2-2n-1}=\frac{m^2+1}{n^2+1}=\frac{m^2+2m-1}{n^2+2n-1},$$

据比例的性质，有

$$\frac{m^2+1}{n^2+1}=\frac{m^2+2m-1}{n^2+2n-1}=\frac{m^2+2m-1-(m^2+1)}{n^2+2n-1-(n^2+1)}=\frac{m-1}{n-1},$$
$$\frac{m^2+1}{n^2+1}=\frac{m^2-2m-1}{n^2-2n-1}=\frac{m^2-2m-1-(m^2+1)}{n^2-2n-1-(n^2+1)}=\frac{m+1}{n+1},$$

所以

$$\frac{m-1}{n-1}=\frac{m+1}{n+1},$$

由此可得 $m=n$，与假设 $m\neq n$ 矛盾。即任意三角形 $\triangle_m$ 与 $\triangle_n$（$m, n\geqslant 4, m\neq n$）互不相似。所以存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$，其边长 a_n, b_n, c_n 为正整数且 a_n^2, b_n^2, c_n^2 成等差数列。 □

2. 背景

本题的直接背景是书 [1] 第 119 页第 8 题：若对某两个整数 r,s，有

$$\begin{cases} a=r^2-2rs-s^2, \\ b=r^2+s^2, \\ c=r^2+2rs-s^2, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

则 a^2,b^2,c^2 构成等差数列。

令 $r=n,s=1$（$n\in\mathbb{N},n\geqslant 4$），$a=a_n,b=b_n,c=c_n$，由 (2.3.2) 即得到上述第（ii）题证明中的 a_n,b_n,c_n。

因为 a_n^2,b_n^2,c_n^2 成等差数列，等价于：$a_n^2+c_n^2=2b_n^2$，所以本题实际上是讨论不定方程

$$x^2+y^2=2z^2 \tag{2.3.3}$$

的整数解的问题。

书 [2] 第 180 页给出了方程 (2.3.3) 当 $x\neq y,(x,y)=1$ 时的全部正整数解：

$$\begin{cases} x=2ab+a^2-b^2, \\ y=\left|2ab-a^2+b^2\right|, \qquad \text{（}x,y\text{ 可交换）} \\ z=a^2+b^2, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

其中 $a,b\in\mathbb{N},a>b>0,(a,b)=1$ 且 a,b 一奇一偶。

当 $x\neq y,(x,y)=1$ 时，令 $x+y=2u,x-y=2v,u>0,v>0$，由 $(x,y)=1$，有 $(u,v)=(x,y)=1$，即 $x=u+v,y=u-v$，代入方程 (2.3.3) 得

$$u^2+v^2=z^2\text{。}\qquad \text{（其中 }(u,v)=1\text{）} \tag{2.3.5}$$

方程 (2.3.5) 为勾股方程，在任何一本初等数论书中都可以找到方程 (2.3.5) 的全部基本整数解：$u=2ab,v=a^2-b^2,z=a^2+b^2$（$u,v$ 可交换），其中 $a,b\in\mathbb{N},a>b>0,(a,b)=1$ 且 a,b 一奇一偶。

所以此题的背景是初等数论中的勾股方程。

3. 解法探讨

本题只需构造出一组满足条件的 a_n,b_n,c_n 即可。上述标准答案中，a_n,b_n,c_n 的构造不易想到，下面给出一种思路很自然的构造方法。

证明　（i）

$$b^2-a^2=c^2-b^2\iff(b-a)(b+a)=(c-b)(c+b), \tag{2.3.6}$$

而 $b<c$，所以 $a<b<c\implies b+a<c+b$ 及 $b-a>c-b$。

由式 (2.3.6) $\iff\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{c+b}{b+a}$，设 $\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{c+b}{b+a}=t>1$，解得

$$b=\frac{t^2+1}{-t^2+2t+1}a\text{，}\ c=\frac{t^2+2t-1}{-t^2+2t+1}a\text{。}$$

由 $-t^2+2t+1>0\iff 1<t<\sqrt{2}+1$，试取 $t=2$，得 $b=5a,c=7a$，检验知，对任一正整数 a，有 $b=5a,c=7a$，满足 $b<c$ 且 a^2,b^2,c^2 成等差数列。

（ii）由（i）类似可得

$$b_n=\frac{t^2+1}{-t^2+2t+1}a_n\text{，}\ c_n=\frac{t^2+2t-1}{-t^2+2t+1}a_n\text{，且 }1<t<\sqrt{2}+1,$$

可令 $t=\dfrac{n+1}{n}, n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$，得

$$b_n=\frac{2n^2+2n+1}{2n^2-1}a_n，\ c_n=\frac{2n^2+4n+1}{2n^2-1}a_n，$$

取 $a_n=2n^2-1$，则 $b_n=2n^2+2n+1, c_n=2n^2+4n+1$。

显然，当 $n\geqslant 2$ 时，a_n,b_n,c_n 为正整数，且 $a_n<b_n<c_n$，又 $a_n+b_n=4n^2+2n>2n^2+4n+1=c_n$，所以 a_n,b_n,c_n 为边长可构成三角形，将此三角形记作 $\triangle_n$，且 a_n^2,b_n^2,c_n^2 成等差数列。

下面证边长为 a_n,b_n,c_n 的三角形互不相似。对正整数 m,n（$m\neq n$，不妨设 $m>m\geqslant 2$），若 $\triangle_m$，$\triangle_n$ 相似，则对应边成比例，有

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{b_m}{b_n}\iff\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_m}{a_m}，\ \frac{b_n}{a_n}=\frac{2n^2+2n+1}{2n^2-1}=1+\frac{2n+2}{2n^2-1}=f(n)，$$

而

$$f(x)=1+\frac{2x+2}{2x^2-1}=1+\frac{1}{(x+1)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}-2}，$$

当 $x\geqslant 2$ 时是减函数，由 $n>m\geqslant 2\implies f(n)<f(m)\implies\dfrac{b_n}{a_n}<\dfrac{b_m}{a_m}$，这与 $\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{b_m}{a_m}$ 矛盾。故 $\triangle_m$，$\triangle_n$ 互不相似。

所以存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$，其边长 a_n,b_n,c_n 为正整数且 a_n^2,b_n^2,c_n^2 成等差数列。 □

注 如果熟悉勾股方程 (2.3.5)，可以由方程 (2.3.5) 的基本整数解得出方程 (2.3.3) 的整数解 (2.3.4)，在解 (2.3.4) 中取特殊值即可构造出符合题设的 a_n,b_n,c_n。如

1）取 $a=n+1,b=n$（$n\geqslant 2$），得 $x=2n^2+4n+1$，$y=2n^2-1$，$z=2n^2+2n+1$，设 $a_n=y=2n^2-1$，$b_n=z=2n^2+2n+1$，$c_n=x=2n^2+4n+1$，这是我们上述解法中的 a_n,b_n,c_n。

2）取 $a=n,b=1$（$n\geqslant 4$），得 $x=n^2+2n-1$，$y=n^2-2n-1$，$z=n^2+1$，设 $a_n=y=n^2-2n-1$，$b_n=z=n^2+1$，$c_n=x=n^2+2n-1$，这是标准答案中的 a_n,b_n,c_n。

二、2009 年江西卷理科数学第 22 题，涉及递推数列的有界性。

1. 题目与标准答案

题目 2.3.2. 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$，$a_1=a$，$a_2=b$，且对满足 $m+n=p+q$ 的正整数 m，n，p，q 都有

$$\frac{a_m+a_n}{(1+a_m)(1+a_n)}=\frac{a_p+a_q}{(1+a_p)(1+a_q)}。\tag{2.3.7}$$

（i）当 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{4}{5}$ 时，求通项 a_n；

（ii）证明：对任意 a，存在与 a 有关的常数 λ，使得对于每个正整数 n，都有 $\dfrac{1}{\lambda}\leqslant a_n\leqslant\lambda$。

（i）略，主要讨论（ii）。

标准答案 （ii）由题设 $\dfrac{a_m+a_n}{(1+a_m)(1+a_n)}$ 的值仅于 $m+n$ 有关，记为 b_{m+n}，则

$$b_{n+1}=\frac{a_1+a_n}{(1+a_1)(1+a_n)}=\frac{a+a_n}{(1+a)(1+a_n)}。$$

考查函数 $f(x)=\dfrac{a+x}{(1+a)(1+x)}$（$x>0$），则在定义域上有

$$f(x)\geqslant g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+a}, & a>1,\\ \dfrac{1}{2}, & a=1,\\ \dfrac{a}{1+a}, & 0<a<1,\end{cases}$$

故对 $n\in\mathbb{N}$，$b_{n+1}\geqslant g(a)$ 恒成立。又

$$b_{2n}=\frac{2a_n}{(1+a_n)^2}\geqslant g(a),$$

注意到 $0<g(a)\leqslant\dfrac{1}{2}$，解上式得

$$\frac{g(a)}{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}}=\frac{1-g(a)-\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)}\leqslant a_n\leqslant\frac{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)},$$

取 $\lambda=\dfrac{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)}$，即有 $\dfrac{1}{\lambda}\leqslant a_n\leqslant\lambda$。 □

2. 背景

由于数列 $\{a_n\}$ 满足的基本关系式 (2.3.7) 可以化简为

$$\frac{a_m+a_n}{1+a_ma_n}=\frac{a_p+a_q}{1+a_pa_q}。\quad (m+n=p+q) \tag{2.3.8}$$

（ii）等价于：（iii）若正项数列 $\{a_n\}$ 满足式 (2.3.8)，则存在正数 b,c，使 $b\leqslant a_n\leqslant c$。

事实上，若（iii）成立，取 λ 满足：$\max\left\{\dfrac{1}{b},c\right\}<\lambda$，就有 $\dfrac{1}{\lambda}\leqslant a_n\leqslant\lambda$，即（ii）成立。

（iii）是一成题，2003 年出版的书 [3] 第 1205 页 8.164 题（前苏联教育部推荐试题，1990）：设正数列 $\{a_n\}$ 满足对任何自然数 k,n,m,l，只要 $k+n=m+l$，就有 $\dfrac{a_n+a_k}{1+a_na_k}=\dfrac{a_m+a_l}{1+a_ma_l}$，求证：存在正数 b 和 c，使得对任何 n 都有 $b\leqslant a_n\leqslant c$。

书 [4] 第 131 页例 3.1.19 也收录了此题，表述略有不同：设有正实数列 $\{a_n\}$ 使得表达式 $\dfrac{a_n+a_k}{1+a_na_k}$ 之值仅依赖于脚标之和 $k+n$，亦即当 $k+n=m+l$ 时，必有 $\dfrac{a_n+a_k}{1+a_na_k}=\dfrac{a_m+a_l}{1+a_ma_l}$，求证：数列 $\{a_n\}$ 有界。

3. 解法探讨

证明 （ii）首先将式 (2.3.7) 化为式 (2.3.8)，在式 (2.3.8) 中取 $m=n,p=1,q=2n-1$，得

$$\frac{2a_n}{1+a_n^2}=\frac{a_1+a_{2n-1}}{1+a_1a_{2n-1}}=\frac{a+a_{2n-1}}{1+aa_{2n-1}},$$

令 $\dfrac{a+a_{2n-1}}{1+aa_{2n-1}}=t$，显然 $t=\dfrac{2a_n}{1+a_n^2}\leqslant 1$，注意到 $a_{2n-1}>0$，则

$$a_{2n-1}=\frac{a-t}{ta-1}>0\iff (t-a)\left(t-\frac{1}{a}\right)<0, \tag{2.3.9}$$

当 $a=1$ 时，$\dfrac{2a_n}{1+a_n^2}=1\iff a_n=1\implies t=1$；当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{a}\leqslant t\leqslant 1$；当 $0<a<1$ 时，$a\leqslant t\leqslant 1$。

令 $u=\min\left\{a,\dfrac{1}{a}\right\}$，则对任意正实数 a，都有 $u\leqslant t\leqslant 1$，即

$$u\leqslant\frac{2a_n}{1+a_n^2}\leqslant 1\iff ua_n^2-2a_n+u\leqslant 0\iff\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}\leqslant a_n\leqslant\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u},$$

取 $\lambda=\dfrac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}$，则 $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}$，所以，$\dfrac{1}{\lambda}\leqslant a_n\leqslant\lambda$。 □

评注 这一证法的关键是得到 $\dfrac{2a_n}{1+a_n^2}=\dfrac{a+a_{2n-1}}{1+aa_{2n-1}}$，然后由 $a_{2n-1}>0$ 求出 $\dfrac{a+a_{2n-1}}{1+aa_{2n-1}}$ 的范围。

三、2008 年江西卷理科数学第 22 题，涉及不等式的证明。

1. 题目与标准答案

题目 2.3.3. 已知函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\frac{ax}{ax+8}},\ x\in(0,+\infty)。$$

（i）当 $a=8$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；
（ii）对任意正数 a，证明：$1<f(x)<2$。

（i）略，主要讨论（ii）。

标准答案 （ii）对任意给定的 $a>0$，$x>0$，由 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{8}{ax}}}$，若令 $b=\dfrac{8}{ax}$，则 $abx=8$，而

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}。$$

（一）先证 $f\left(x\right)>1$。因为

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}>\frac{1}{1+x},\ \frac{1}{\sqrt{1+a}}>\frac{1}{1+a},\ \frac{1}{\sqrt{1+b}}>\frac{1}{1+b},$$

又由

$$2+a+b+x\geqslant2\sqrt{2a}+2\sqrt{bx}\geqslant4\sqrt[4]{2abx}=8,$$

得 $a+b+x\geqslant6$。所以

$$\begin{aligned}
f\left(x\right)&=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}\\
&>\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\\
&=\frac{3+2(a+b+x)+(ab+ax+bx)}{(1+x)(1+a)(1+b)}\\
&\geqslant\frac{9+(a+b+x)+(ab+ax+bx)}{(1+x)(1+a)(1+b)}\\
&=\frac{1+(a+b+x)+(ab+ax+bx)+abx}{(1+x)(1+a)(1+b)}\\
&=1。
\end{aligned}$$

（二）再证 $f\left(x\right)<2$。不妨设 $x\geqslant a\geqslant b$。则 $0<b\leqslant2$。
（1）当 $a+b\geqslant7$，则 $a\geqslant5$，所以 $x\geqslant a\geqslant5$，因为

$$\frac{1}{\sqrt{1+b}}<1,\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+5}}<1,$$

此时

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}<2;$$

（2）当 $a+b<7$，注意到 $abx=8$，则 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{\dfrac{ab}{ab+8}}$，由

$$\frac{1}{1+b}<1-\frac{b}{1+b}+\frac{b^2}{4(1+b)^2}=\left[1-\frac{b}{2(1+b)}\right]^2 \implies \frac{1}{\sqrt{1+b}}<1-\frac{b}{2(1+b)},$$

同理，有 $\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}<1-\dfrac{a}{2(1+a)}$，则

$$f(x)<2-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}-2\sqrt{\frac{ab}{ab+8}}\right),$$

要证 $f(x)<2$，只需证

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>2\sqrt{\frac{ab}{ab+8}},$$

而

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}},$$

只要证

$$\frac{ab}{(1+a)(1+b)}>\frac{ab}{ab+8} \iff ab+8>(1+a)(1+b) \iff a+b<7,$$

显然成立，故 $f(x)<2$。

综上所述，对任何正数 a,x，皆有 $1<f(x)<2$。 □

2. 背景

显然（ii）等价于：若 $x,y,z>0,xyz=1$，则

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+2x}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y}}+\frac{1}{\sqrt{1+2z}}<2。\tag{2.3.10}$$

本题的背景是如下几道奥数题：

题 A. 2001 年第 42 届 IMO 第二题：对任意正实数 a,b,c，证明

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1。\tag{2.3.11}$$

注 令 $x=\dfrac{bc}{a^2},y=\dfrac{ca}{b^2},z=\dfrac{ab}{c^2}$，则式 (2.3.11) 等价于：若 $x,y,z>0,xyz=1$，则

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\geqslant 1。\tag{2.3.12}$$

题 B. 2004 年西部数学奥林匹克最后一题：求证：对任意正实数 a,b,c 都有

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}。\tag{2.3.13}$$

注 令 $x=\dfrac{b^2}{a^2},y=\dfrac{c^2}{b^2},z=\dfrac{a^2}{c^2}$，则式 (2.3.13) 等价于：若 $x,y,z>0,xyz=1$，则

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}。\tag{2.3.14}$$

题 C. 2003 年中国数学奥林匹克第三题：给定正整数 n（$n\geqslant 3$），求最小的正数 λ 使得对于任何 $\theta_i\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$（$i=1,2,\cdots,n$），只要 $\tan\theta_1\tan\theta_2\cdots\tan\theta_n=2^{\frac{n}{2}}$，就有 $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n\leqslant\lambda$（黄玉民提供）

注 当 $n \geqslant 3$ 时，题 C 的答案为 $\lambda = n-1$。特别地，当 $n=3$ 时，令 $2x = \tan^2\theta_1$，$2y = \tan^2\theta_2$，$2z = \tan^2\theta_3$，即得：若 $x,y,z>0, xyz=1$，则 $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2z}} < 2$，这正是式 (2.3.10) 右边的不等式，上述标准答案中对 $f(x)<2$ 的证明，基本上取自于题 C 命题人黄玉民先生的解答（见书 [5]P24-27），只是把三角形式换成了代数形式。

2006 年初，作者在文 [6] 给出了上述几题的推广：

若 $x,y,z>0, xyz=1$，则

（1）当 $\lambda \geqslant 8$ 时，有

$$\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} < 2; \tag{2.3.15}$$

（2）当 $8 > \lambda > \dfrac{5}{4}$ 时，有

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} < 2; \tag{2.3.16}$$

（3）当 $\dfrac{5}{4} \geqslant \lambda > 0$ 时，有

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}。 \tag{2.3.17}$$

在式 (2.3.16) 中取 $\lambda = 2$，即得式 (2.3.10)，说明第（ii）题是式 (2.3.16) 的特例。

3. 解法探讨

（ii）的证明对一般中学考生生来说有点难，绝大多数考生根本无从下手，据说无一考生证出。参考答案给出的证明不易想到，下面给出一个思路很自然的证法——减元法，即将三元问题化为二元问题，进而化为一元问题加以解决。

证明 （ii）令 $b = \dfrac{8}{ax}, c = x$，则 $abc = 8$，$1 < f(x) < 2$ 等价于

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} < 2。 \tag{2.3.18}$$

不妨设 $a \leqslant b \leqslant c$，令 $\sqrt{ab} = \lambda$，由 $abc = 8$ 有 $0 < ab \leqslant 4 \iff 0 < \lambda \leqslant 2$。

先求出 $A = \dfrac{1}{\sqrt{1+a}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b}}$（$\sqrt{ab} = \lambda, a>0, b>0, \lambda \leqslant 2$）的值域，因为

$$A^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}}\right)^2 = \frac{2+a+b+2\sqrt{1+a}\sqrt{1+b}}{(1+a)(1+b)},$$

令 $u = \sqrt{1+a}\sqrt{1+b} = \sqrt{1+a+b+ab} = \sqrt{1+a+b+\lambda^2}$，显然

$$u \geqslant \sqrt{1+2\sqrt{ab}+\lambda^2} = 1+\lambda,$$

$$A^2 = \frac{1+u^2-\lambda^2+2u}{u^2} = (1-\lambda^2)\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u} + 1,$$

又令 $t = \dfrac{1}{u}$，$0 < t \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$，则

$$A^2 = F(t) = (1-\lambda^2)t^2 + 2t + 1，0 < t \leqslant \frac{1}{\lambda+1}，F'(t) = 2[(1-\lambda^2)t+1],$$

由 $\lambda \leqslant 2$，有 $F'\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right) = 2-\lambda \geqslant 0$，又 $F'(0) = 1 > 0$，因此，对 $0 < t \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$，有 $F'(t) \geqslant 0$，所以 $F(t)$ 在 $\left(0, \dfrac{1}{\lambda+1}\right]$ 上是增函数，则

$$F(0) < F(t) \leqslant F\left(\frac{1}{\lambda+1}\right) \iff 1 < F(t) \leqslant \frac{4}{\lambda+1} \iff 1 < A \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}。$$

故当 $a>0, b>0, \sqrt{ab}\leqslant 2$，有

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{ab}}}。\tag{2.3.19}$$

应用式 (2.3.19) 左边的不等式，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}>\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}>1,$$

即 $f(x)>1$；

应用式 (2.3.19) 右边的不等式，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{ab}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{8}{ab}}},$$

要证式 (2.3.18) 的右边，只需证

$$\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{ab}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{8}{ab}}}<2,\tag{2.3.20}$$

令 $\sqrt{1+\sqrt{ab}}=v$，$1<v\leqslant\sqrt{3}$，$ab=\left(v^2-1\right)^2$，则式 (2.3.20) 等价于

$$\begin{aligned}\frac{2}{v}+\frac{v^2-1}{\sqrt{\left(v^2-1\right)^2+8}}<2 &\iff \frac{v^2-1}{\sqrt{\left(v^2-1\right)^2+8}}<\frac{2(v-1)}{v}\\ &\iff v(v+1)<2\sqrt{\left(v^2-1\right)^2+8}\\ &\iff [v(v+1)]^2<4\left[\left(v^2-1\right)^2+8\right]\\ &\iff 3v^4-2v^3-9v^2+18>0\\ &\iff 2v^2(v-1)+(v^2-3)(v^2-6)>0,\end{aligned}$$

由 $1<v\leqslant\sqrt{3}$ 知最后的不等式显然成立，所以式 (2.3.20) 成立，即 $f(x)<2$。

综上所述，$1<f(x)<2$。 □

参考文献

[1] U. 杜德利 (U.Dudley) 著, 周仲良译. 基础数论 [M]. 上海科学技术出版业, 1980.9.

[2] 曹珍富. 丢番图方程引论 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 1980.3.

[3] 黄玉民, 夏兴国主编. 世界数学奥林匹克解题大辞典 (代数卷)[M]. 河北少年儿童出版社, 2003.1.

[4] 朱华伟. 从数学竞赛到竞赛数学 [M]. 科学出版社, 2009.8.

[5] 走向 IMO——数学奥林匹克试题集锦 (2003)[M]. 华东师范大学出版社, 2003.8:24-27

[6] 蒋明斌. 一道西部数学奥林匹克赛题的溯源与推广 [J]. 中学数学研究 (南昌), 2006 年第 2 期.

能力提升

3.1 一些与三角恒等式有关的条件不等式题目整理——郭子伟

条件不等式题目所指的就是未知数满足一定条件的不等式证明题或者求最值题，本文所整理的条件不等式题的特点是，它们的条件都是形似某些三角恒等式的等式。

在整理时，由于都是在各种零散的记录（如论坛或网站的贴子、QQ 聊天记录等）中找题目，故未能提供每道题的出处。每道题我都尽量给出不同的解法，由于条件跟三角恒等式有关，所以这里我都将各种解法分成三角和代数两类。在这些解法中，比较常规的解法可能早已出现过，也有不少是我独立给出的，甚至有的还是在编写本文时才想出来的，所以我相信有相当一部分的解法还是新的。

有些解法的过程中会直接使用一些已知结论，比如 Schür 不等式、嵌入不等式之类，为了节省篇幅，这里就不详细证明这些结论了，想了解的话请参考任意一本初等不等式著作。其实为了让大家更容易接受本文的解法，我已经尽量避免使用较为高级的定理或方法，比如“s-R-r 方法”、拉格朗日乘数法等等，如果用上这些方法，那么每道题的解法都会增多不少。

言归正传，先来一道最简单的。

题目 3.1.1. 已知 $x, y, z > 0$，且 $xy + yz + zx = 1$，求 $f = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{y^2+1} + \dfrac{z}{z^2+1}$ 的最大值。

三角解法 联系到三角形内的三角恒等式 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1$，我们可以令 $x = \tan\dfrac{A}{2}, y = \tan\dfrac{B}{2}, z = \tan\dfrac{C}{2}$，其中 A, B, C 为任意三角形的三个内角。由万能公式有 $\dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1} = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$ 以及 $\dfrac{1}{\tan^2\theta+1} = \dfrac{\cos 2\theta + 1}{2}$，于是代入得到

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} = 1 + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \sin C),$$

由积化和差公式可知

$$\cos A + \cos B + \sin C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C \leqslant 2\sin\frac{C}{2} + \sin C。$$

下面用导数求 $2\sin\dfrac{C}{2} + \sin C$ 的最大值，令 $g(C) = 2\sin\dfrac{C}{2} + \sin C$，$C \in (0, \pi)$，则

$$g'(C) = \cos\frac{C}{2} + \cos C = \left(\cos\frac{C}{2} + 1\right)\left(2\cos\frac{C}{2} - 1\right),$$

可见 $g(C) \leqslant g\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，由此即得到

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leqslant 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

当 $x = y = 2 - \sqrt{3}, z = \sqrt{3}$ 时取等号，故所求的最大值就是 $1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$。 □

上述解法其实在《数学空间》总第 2 期中作过例题，对于 $xy + yz + zx = 1$ 的不等式，作上面的正切代换是个常规的办法。下面给出本题的代数解法。

代数解法 由已知条件，有

$$f = \frac{1}{x^2+xy+yz+zx} + \frac{1}{y^2+xy+yz+zx} + \frac{z}{z^2+xy+yz+zx}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{(x+y)(z+x)}+\frac{1}{(y+z)(x+y)}+\frac{z}{(z+x)(y+z)}\\
&=\frac{x+y+2z+(x+y)z}{(x+y)(y+z)(z+x)}\\
&=\frac{2z}{(x+y)(z^2+1)}+\frac{z+1}{z^2+1},
\end{aligned}
$$

由均值不等式，有

$$1=xy+z(x+y)\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}+z(x+y)\implies x+y\geqslant 2\sqrt{z^2+1}-2z,$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
f&\leqslant\frac{z}{\left(\sqrt{z^2+1}-z\right)(z^2+1)}+\frac{z+1}{z^2+1}\\
&=\frac{z\left(\sqrt{z^2+1}+z\right)}{z^2+1}+\frac{z+1}{z^2+1}\\
&=\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{z^2+1}+1,
\end{aligned}
$$

令 $\sqrt{z^2+1}=k>1$，则 $z=\sqrt{k^2-1}$，代入上式得

$$f\leqslant\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}+\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2}+1=h(k),$$

于是我们只需求函数 $h(k)$ 当 $k>1$ 的最大值，求导得

$$h'(k)=\frac{(2-k)(k+1)}{k^3\sqrt{k^2-1}},$$

故

$$h(k)\leqslant h(2)=\frac{3\sqrt{3}}{4}+1,$$

因此得到

$$f\leqslant 1+\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

等号成立当且仅当 $x=y=2-\sqrt{3},\ z=\sqrt{3}$，所以最大值就是 $1+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$。 □

题目 3.1.2. 已知 $a,\ b,\ c>0$，且 $abc+a+c=b$。设 $p=\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{2}{b^2+1}+\dfrac{3}{c^2+1}$，求 p 的最大值。

三角解法 由 $abc+a+c=b$ 得 $b=\dfrac{a+c}{1-ac}$，联系到两角之和的正切公式，令 $a=\tan x,\ c=\tan y$，其中 $x,\ y>0$ 且 $x+y<\dfrac{\pi}{2}$，则 $b=\tan(x+y)$。由公式 $\dfrac{1}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$ 及和差化积公式，得

$$
\begin{aligned}
p&=\cos 2x+1-\left(\cos(2x+2y)+1\right)+\frac{3}{2}(\cos 2y+1)\\
&=\cos 2x-\cos(2x+2y)+\frac{3}{2}\cos 2y+\frac{3}{2}\\
&=2\sin y\sin(2x+y)+\frac{3}{2}\cos 2y+\frac{3}{2}\\
&\leqslant 2\sin y+\frac{3}{2}\cos 2y+\frac{3}{2}\\
&=-3\left(\sin y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{10}{3},$$

当 $\sin(2x+y)=1$ 且 $\sin y=\dfrac{1}{3}$ 时取等号，此时 $b=2a=4c=\sqrt{2}$，所以 p 的最大值为 $\dfrac{10}{3}$。 □

此题大概就是根据正切公式出的，所以用正切代换之后立即消去条件并化为二元函数，是很自然的思路。那么除了三角代换可以消去条件之外，还有一种常规的消去条件的办法就是齐次化，下面就此方法给出此题的代数解法。

代数解法 由已知等式可设 $b=a+c+t,\ t>0$，则 $ac(a+c+t)=t$，那么

$$\begin{aligned}
p&=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}\\
&=\frac{2}{\dfrac{ta}{c(a+c+t)}+1}-\frac{2}{\dfrac{t(a+c+t)}{ac}+1}+\frac{3}{\dfrac{tc}{a(a+c+t)}+1}\\
&=\frac{2c(a+c+t)}{(a+c)(c+t)}-\frac{2ac}{(a+t)(c+t)}+\frac{3a(a+c+t)}{(a+c)(a+t)}\\
&=\frac{3(a+c)(a+t)(c+t)+ct(4a-c-t)}{(a+c)(a+t)(c+t)}。
\end{aligned}$$

（1）若 $4a-c-t<0$，则显然有 $p<3$；

（2）若 $4a-c-t\geqslant 0$，记

$$f(a,c,t)=\frac{3(a+c)(a+t)(c+t)+ct(4a-c-t)}{(a+c)(a+t)(c+t)},$$

则

$$f\left(a,\frac{c+t}{2},\frac{c+t}{2}\right)-f(a,c,t)=\frac{a(4a-c-t)(a+c+t)(c-t)^2}{(a+c)(a+t)(c+t)(2a+c+t)^2}\geqslant 0,$$

令 $\dfrac{c+t}{2}=ua,\ u>0$，则

$$p\leqslant f(a,ua,ua)=\frac{2u^2+8u+3}{(u+1)^2}=\frac{10}{3}-3\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2}{3}\right)^2\leqslant\frac{10}{3},$$

当 $c=t,\ u=\dfrac{1}{2}$ 时取等号。

综合（1）（2）知 p 的最大值为 $\dfrac{10}{3}$，等号成立当且仅当 $a=2c=2t$ 即 $b=2a=4c=\sqrt{2}$。 □

其实，如果已经事先知道或者猜到了最大值，也就是只要证明不等式 $p\leqslant\dfrac{10}{3}$ 时，作差配方更方便：

$$\frac{10}{3}-\frac{3(a+c)(a+t)(c+t)+ct(4a-c-t)}{(a+c)(a+t)(c+t)}=\frac{t(a-2c)^2+c(a-2t)^2+a(c-t)^2}{3(a+c)(a+t)(c+t)}\geqslant 0。$$

我没料到的是，所求式本身并没有对称性，但换元并齐次化后居然有半对称性，这使我倍感有趣和意外。

题目 3.1.3. 已知 $x,\ y,\ z\geqslant 0$，且 $x^2+y^2+z^2+xyz=4$，求证

$$0\leqslant xy+yz+zx-xyz\leqslant 2。$$

三角证法 首先不等式左边成立是显然的，这是因为 $x,\ y,\ z$ 中总有一个不大于 1（否则 $x^2+y^2+z^2+xyz>4$），由对称性，不妨设 $x\leqslant 1$，则 $yz\geqslant xyz$，所以不等式左边成立。

对于不等式右边，已知等式可以写成

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{z}{2}=1,$$

联系到当 $A+B+C=\pi$ 时有三角恒等式 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$，我们可以令 $\frac{x}{2}=\cos A,\ \frac{y}{2}=\cos B,\ \frac{z}{2}=\cos C$，其中 $A,\ B,\ C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ A+B+C=\pi$，则原不等式右边化为

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{2},$$

由对称性，不妨设 $A=\max\{A,B,C\}$，则 $A\geqslant\frac{\pi}{3}$，有 $1-2\cos A\geqslant 0$，再由

$$\cos B+\cos C=2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\leqslant 2\sin\frac{A}{2},$$
$$2\cos B\cos C=\cos(B-C)+\cos(B+C)\leqslant 1-\cos A,$$

得

$$\begin{aligned}&\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C\\=&\ \cos A(\cos B+\cos C)+\cos B\cos C(1-2\cos A)\\\leqslant&\ 2\cos A\sin\frac{A}{2}+\frac{1-\cos A}{2}(1-2\cos A)\\=&\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos A\left(2\sin\frac{A}{2}-1\right)^2\\\leqslant&\ \frac{1}{2},\end{aligned}$$

从而不等式右边也成立。 □

由此解法其实可以写出右边的一个加强式，不过会有根号，不太好看就不写了，来看简单的代数证法吧。

代数证法 不等式左边的证法同上，对于不等式右边，由于 $x,\ y,\ z$ 中总有两个不大于 1 或不小于 1，由对称性，不妨设 $(x-1)(y-1)\geqslant 0$，得 $x+y\leqslant xy+1$，则

$$xy+yz+zx-xyz=z(x+y)+(1-z)xy\leqslant z(xy+1)+(1-z)xy=xy+z,$$

另一方面，由均值不等式，有

$$4=x^2+y^2+z^2+xyz\geqslant(2+z)xy+z^2\implies 4-z^2\geqslant(2+z)xy\implies xy+z\leqslant 2,$$

所以不等式右边也成立。 □

题目 3.1.4. 已知 $a,\ b,\ c>0$，且 $a^2+b^2+c^2+abc\leqslant 4$，求证

$$a^2b+b^2c+c^2a\leqslant a^2+b^2+c^2。$$

三角证法一 对于满足 $a^2+b^2+c^2+abc\leqslant 4$ 的任何正数 $a,\ b,\ c$，均存在 $x,\ y,\ z>0$ 及 $0<t\leqslant 1$ 使得 $a=tx,\ b=ty,\ c=tz$ 且 $x^2+y^2+z^2+xyz=4$[①]。代入不等式化为

$$t(x^2y+y^2z+z^2x)\leqslant x^2+y^2+z^2,$$

[①] 设 $f(u)=\frac{a^2}{u^2}+\frac{b^2}{u^2}+\frac{c^2}{u^2}+\frac{abc}{u^3}$，则 $f(u)$ 在 $(0,1]$ 上连续且 $f(1)\leqslant 4$ 且 $\lim\limits_{u\to 0^+}f(u)=+\infty$，故必存在 $t\in(0,1]$ 使 $f(t)=4$，此时取 $x=\frac{a}{t},\ y=\frac{b}{t},\ z=\frac{c}{t}$ 即满足 $x^2+y^2+z^2+xyz=4$。

由 $0<t\leqslant 1$ 可见只要证明当 $x,\ y,\ z>0$ 且 $x^2+y^2+z^2+xyz=4$ 时

$$x^2y+y^2z+z^2x\leqslant x^2+y^2+z^2。\tag{3.1.1}$$

类似地，可令 $x=2\cos A,\ y=2\cos B,\ z=2\cos C$，其中 $A,\ B,\ C$ 为锐角三角形的三个内角，则式 (3.1.1) 化为

$$2(\cos^2 A\cos B+\cos^2 B\cos C+\cos^2 C\cos A)\leqslant \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C,$$

而这正是当嵌入不等式

$$p^2+q^2+r^2\geqslant 2(pq\cos A+qr\cos B+rp\cos C)$$

取 $p=\cos A,\ q=\cos B,\ r=\cos C$ 时的不等式，所以式 (3.1.1) 成立，故原不等式得证。 □

代数证法一 同样地，只要证式 (3.1.1) 即可。

由柯西不等式，有

$$x^2y+y^2z+z^2x\leqslant\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)},$$

因此，要证式 (3.1.1)，只要证如下更强式

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\leqslant x^2+y^2+z^2。\tag{3.1.2}$$

由于 $x^2,\ y^2,\ z^2$ 中总有两个不大于 1 或不小于 1，由对称性，不妨设 $(x^2-1)(y^2-1)\geqslant 0$，得 $x^2+y^2\leqslant x^2y^2+1$，则

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=x^2y^2+z^2(x^2+y^2)\leqslant x^2y^2+z^2(x^2y^2+1)=x^2y^2(1+z^2)+z^2,$$

又

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy+z^2,$$

所以只要证

$$xy(1+z^2)\leqslant 2,$$

而在题目 3.1.3 的代数证法中已经证得 $xy+z\leqslant 2$，所以

$$xy(1+z^2)\leqslant(2-z)(1+z^2)=2-z(z-1)^2\leqslant 2,$$

所以式 (3.1.2) 成立，故原不等式得证。 □

三角证法二 同样地，只要证式 (3.1.2) 即可。

联系到三角形中的三角恒等式 $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=1$，可令 $x=2\sin\dfrac{A}{2}$, $y=2\sin\dfrac{B}{2},\ z=2\sin\dfrac{C}{2}$，其中 $A,\ B,\ C$ 为任意三角形的三个内角，则

$$\begin{aligned}
\text{式 (3.1.2)}\iff\ & 4\sum\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\leqslant\sum\sin^2\frac{A}{2}\\
\iff\ & \sum(1-\cos A)(1-\cos B)\leqslant\sum\frac{1-\cos A}{2}\\
\iff\ & (\cos B+\cos C)\left(\frac{3}{2}-\cos A\right)-\cos B\cos C+\frac{3}{2}\cos A-\frac{3}{2}\geqslant 0\\
\iff\ & \cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}(3-2\cos A)-\cos^2\frac{B-C}{2}+2\cos A-1\geqslant 0,
\end{aligned}$$

记 $\cos\dfrac{B-C}{2}=\lambda$，则上式可以写成 $g(\lambda)\geqslant 0$，其中

$$g(\lambda)=-\lambda^2+\sin\frac{A}{2}(3-2\cos A)\lambda+2\cos A-1,$$

易证 $\sin\dfrac{A}{2}<\lambda\leqslant 1$，而 $g(\lambda)$ 为开口向下的二次函数，所以

$$g(\lambda)\geqslant\min\left\{g\left(\sin\frac{A}{2}\right),g(1)\right\},$$

不难计算出 $g\left(\sin\dfrac{A}{2}\right)=\cos^2 A$ 以及 $g(1)=\sin\dfrac{A}{2}\left(2\sin\dfrac{A}{2}-1\right)^2$，从而 $g(\lambda)\geqslant 0$，因此式 (3.1.2) 成立，故原不等式得证。 □

上述证法中使用的那个半角正弦的恒等式似乎被用得很少，几乎被忽略，而余弦的那个恒等式则用得很多，其实两恒等式本质是相同的，只不过作了个角变换而已，不应被忽略。这里使用它的好处在于，半角遇着平方，正好变成单角且去掉平方，使式子变得简单，后面如果用“s-R-r 方法”的话更加是一行之内搞定的事，不过前面也说了不用这方法，所以选用了相对麻烦一点的“$\dfrac{B-C}{2}$ 方法”。

好，继续来代数证法。

代数证法二 (反证法)　同样地，只要证式 (3.1.2) 即可，我们用反证法证之。

假设存在 $x,y,z>0$ 使得 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2>x^2+y^2+z^2$，下面证明此时必有 $x^2+y^2+z^2+xyz>4$。由 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2>x^2+y^2+z^2$ 得

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2+xyz\\
>&\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}+xyz\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}\right)^3}\\
=&\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}+\frac{xyz\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}}\\
\geqslant&\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}+\frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}\\
=&4+\frac{x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2+xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}\\
=&4+\frac{(x+y+z)\big(xyz-(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\big)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2},
\end{aligned}$$

而 $xyz\geqslant(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$ 正是 Schür 不等式的等价式，因此得到 $x^2+y^2+z^2+xyz>4$，与已知矛盾，故原不等式得证。 □

题目 3.1.5. 已知 $x,y,z>0$ 且 $xy+yz+zx+xyz=4$，求证

$$x+y+z\geqslant xy+yz+zx。$$

三角证法　已知等式可以写成

$$\left(\frac{\sqrt{xy}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{yz}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{zx}}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\sqrt{xy}}{2}\cdot\frac{\sqrt{yz}}{2}\cdot\frac{\sqrt{zx}}{2}=1,$$

因此，可以令 $\dfrac{\sqrt{yz}}{2}=\cos A$, $\dfrac{\sqrt{zx}}{2}=\cos B$, $\dfrac{\sqrt{xy}}{2}=\cos C$，其中 A, B, C 为锐角三角形的三个内角，则有 $x=\dfrac{2\cos B\cos C}{\cos A}$, $y=\dfrac{2\cos C\cos A}{\cos B}$, $z=\dfrac{2\cos A\cos B}{\cos C}$，原不等式化为

$$\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\geqslant 2(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)。\tag{3.1.3}$$

由嵌入不等式

$$p^2+q^2+r^2\geqslant 2(pq\cos C+qr\cos A+rp\cos B),$$

令 $p=\cos B\cos C,\ q=\cos C\cos A,\ r=\cos A\cos B$，得

$$(\cos B\cos C)^2+(\cos C\cos A)^2+(\cos A\cos B)^2\geqslant 2\cos A\cos B\cos C(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C),$$

由锐角三角形知 $\cos A\cos B\cos C>0$，故上式两边除以 $\cos A\cos B\cos C$ 就得到式 (3.1.3)，从而原不等式得证。 □

代数证法一 由于 $x,\ y,\ z$ 中总有两个不大于 1 或不小于 1，由对称性，不妨设 $(x-1)(y-1)\geqslant 0$，得 $x+y\leqslant xy+1$，则

$$4=z(x+y)+xy(1+z)\leqslant z(xy+1)+xy(1+z)=z(2xy+1)+xy,$$

得到

$$z\geqslant\frac{4-xy}{2xy+1},$$

由条件知

$$x+y+z\geqslant xy+yz+zx\iff x+y+z\geqslant 4-xyz\iff x+y+(1+xy)z\geqslant 4,$$

而

$$x+y+(1+xy)z\geqslant 2\sqrt{xy}+\frac{(1+xy)(4-xy)}{2xy+1},$$

令 $\sqrt{xy}=t$，由 $xy<4$ 知 $t<2$，则

$$x+y+(1+xy)z\geqslant 2t+\frac{(1+t^2)(4-t^2)}{2t^2+1}=\frac{t(2-t)(t-1)^2}{2t^2+1}+4\geqslant 4,$$

故原不等式成立。 □

代数证法二 将已知等式变形，有

$$\begin{aligned}&xy+yz+zx+xyz=4\\ \iff&(x+2)(y+2)(z+2)=(x+2)(y+2)+(y+2)(z+2)+(z+2)(x+2)\\ \iff&\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1,\end{aligned}$$

设 $a,\ b,\ c>0$，有

$$\frac{b+c}{2(a+b+c)}+\frac{c+a}{2(a+b+c)}+\frac{a+b}{2(a+b+c)}=1,$$

注意到 $\dfrac{1}{x+2}$ 等与 $\dfrac{b+c}{2(a+b+c)}$ 等的取值范围都是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，可见对于满足已知条件的任意 $x,\ y,\ z$ 都存在相应的 $a,\ b,\ c>0$ 使得 $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{b+c}{2(a+b+c)},\ \dfrac{1}{y+2}=\dfrac{c+a}{2(a+b+c)},\ \dfrac{1}{z+2}=\dfrac{a+b}{2(a+b+c)}$，反之亦然，即代换 $x=\dfrac{2a}{b+c},\ y=\dfrac{2b}{c+a},\ z=\dfrac{2c}{a+b}$ 是合理的，代入原不等式中，化为

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{2ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{2bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)},$$

上式去分母整理后正是 Schür 不等式，所以原不等式成立。 □

代数证法三 (反证法) 假设存在 $x,\ y,\ z>0$ 使得 $x+y+z<xy+yz+zx$，下面证明此时必有 $xy+yz+zx+xyz>4$。

由 $x+y+z<xy+yz+zx$ 得

$$xy+yz+zx+xyz>\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}+\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3},$$

所以只要证明

$$(xy+yz+zx)^2(x+y+z)^2+xyz(x+y+z)^3\geqslant 4(xy+yz+zx)^3。\tag{3.1.4}$$

记 $p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx$。

（1）若 $p^2>4q$，则 $(xy+yz+zx)^2(x+y+z)^2>4(xy+yz+zx)^3$，显然式 (3.1.4) 成立；

（2）若 $p^2\leqslant 4q$，由 Schür 不等式的等价形式

$$xyz\geqslant\frac{p(4q-p^2)}{9},$$

可知要证式 (3.1.4) 只需证

$$p^2q^2+\frac{p^4(4q-p^2)}{9}\geqslant 4q^3,$$

上式移项并因式分解为

$$\frac{1}{9}(4q-p^2)(p^2-3q)(p^2+3q)\geqslant 0,$$

注意到由均值不等式有 $p^2\geqslant 3q$，所以上式成立。

综合（1）（2）知式 (3.1.4) 成立，从而得到 $xy+yz+zx+xyz>4$，与已知矛盾，故原不等式得证。 □

与题目 3.1.5 等价的一道题是：已知 $x,\ y,\ z>0$，且 $x+y+z+2=xyz$，求证 $xy+yz+zx\geqslant 2(x+y+z)$。这道题我也见过几次，你能看出他们为什么等价吗？

接下来这道题与题目 3.1.5 可以说是“姊妹题”，仅仅是条件有点不同，但就因这一点不同，使我暂时还找不到一个三角代换的证法。

题目 3.1.6. 已知 $a,\ b,\ c\geqslant 0$，且 $a+b+c+abc=4$，求证

$$a+b+c\geqslant ab+bc+ca。$$

代数证法一 由于 $a,\ b,\ c$ 中总有两个不大于 1 或不小于 1，由对称性，不妨设 $(a-1)(b-1)\geqslant 0$，得 $ab+1\geqslant a+b$，则

$$4=a+b+(1+ab)c\geqslant a+b+(a+b)c=(a+b)(1+c),$$

得到

$$c\leqslant\frac{4}{a+b}-1,$$

由条件知

$$a+b+c\geqslant ab+bc+ca\iff 4-abc\geqslant ab+bc+ca\iff ab(c+1)+(a+b)c\leqslant 4,$$

而

$$ab(c+1)+(a+b)c\leqslant\frac{4ab}{a+b}+(a+b)\left(\frac{4}{a+b}-1\right)=4-\frac{(a-b)^2}{a+b},$$

所以原不等式得证。 □

代数证法二 (消元配方) 由条件得

$$c=\frac{4-a-b}{1+ab},$$

代入原不等式并作差配方

$$a+b+c-ab-bc-ca=\frac{\big(16-(a+b)^2+(a-b)^2\big)(a+b-2)^2+4ab(a-b)^2}{16(1+ab)},$$

注意到 $a+b\leqslant 4$，故原不等式成立。 □

代数证法三 (反证法) 假设存在 $a, b, c\geqslant 0$ 使得 $a+b+c<ab+bc+ca$，下面证明此时有 $a+b+c+abc>4$。由 $a+b+c<ab+bc+ca$ 得

$$a+b+c+abc>\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3},$$

所以只要证

$$(ab+bc+ca)^2(a+b+c)^2+abc(a+b+c)^3\geqslant 4(ab+bc+ca)^3,$$

这与式 (3.1.4) 一样所以成立，即得 $a+b+c+abc>4$，与已知矛盾，故原不等式得证。 □

由上述代数证法二可以看出原题的条件可以改为 $ab\geqslant 0,\ c\geqslant 0$ 且 $a+b+c+abc=4$，也就是说允许有两个元为负。而令我感到有趣的是，虽然这两“姊妹题”条件不同，没想到反证法的时候后面要证的式子竟然是一样的。

好，来最后一道。

题目 3.1.7. 已知 $a, b, c>0$，且 $ab+bc+ca+2abc=1$，求证

$$a^3+b^3+c^3+9abc\geqslant a+b+c。\tag{3.1.5}$$

这道题我个人认为比上面的这些题都要难，尽管由条件也可以三角代换或者类似于题目 3.1.5 的代数证法二那样作代换，但代入后次数会变得比较高，并不易处理。下面给出的两个麻烦的证法是在编写本文时几经周折才弄了出来的。

先来看三角证法，为方便书写，由这里开始记 $p=\sum\cos A,\ q=\sum\cos A\cos B,\ t=\cos\dfrac{B-C}{2},\ m=\sin\dfrac{A}{2}$。在证明原题前，先证明如下定理。

定理 3.1.1. 当 $A+B+C=\pi$ 时，有

$$\frac{5}{2}p-3-\frac{1}{2}\sqrt{(3-2p)^3}\leqslant q\leqslant\frac{5}{2}p-3+\frac{1}{2}\sqrt{(3-2p)^3}。\tag{3.1.6}$$

定理 3.1.1 的证明 式 (3.1.6) 等价于

$$\frac{1}{4}(3-2p)^3-\left(q-\frac{5}{2}p+3\right)^2\geqslant 0,\tag{3.1.7}$$

下证有恒等式

$$\frac{1}{4}(3-2p)^3-\left(q-\frac{5}{2}p+3\right)^2=4\sin^2\frac{B-C}{2}\sin^2\frac{C-A}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}。\tag{3.1.8}$$

由积化和差与和差化积公式，易得 $\cos B\cos C=m^2+t^2-1,\ \cos B+\cos C=2mt$，由此容易计算出

$$p=1-2m^2+2mt,$$

$$q=-4m^3t+(m+t)^2-1,$$

代入并因式分解，可得

$$\frac{1}{4}(3-2p)^3-\left(q-\frac{5}{2}p+3\right)^2=(1-t^2)(t-3m+4m^3)^2$$

$$
\begin{aligned}
&=\sin^2\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{3A}{2}\right)^2\\
&=\sin^2\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{3B+3C}{2}\right)^2\\
&=4\sin^2\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{B+2C}{2}\cos^2\frac{2B+C}{2}\\
&=4\sin^2\frac{B-C}{2}\sin^2\frac{C-A}{2}\sin^2\frac{A-B}{2},
\end{aligned}
$$

所以恒等式 (3.1.8) 成立，定理 3.1.1 得证。 □

由证明过程中的恒等式可以看出定理 3.1.1 是一个很强的结论[①]，下面利用这个定理来证明原不等式。

三角证法 由已知等式可令 $\sqrt{bc}=\sin\dfrac{A}{2}$, $\sqrt{ca}=\sin\dfrac{B}{2}$, $\sqrt{ab}=\sin\dfrac{C}{2}$，其中 A, B, C 为任意三角形的三个内角，则有 $a=\dfrac{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$, $b=\dfrac{\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}$, $c=\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$，代入原不等式中，有

$$
\begin{aligned}
\text{式 (3.1.5)} &\iff \sum\frac{\sin^3\dfrac{B}{2}\sin^3\dfrac{C}{2}}{\sin^3\dfrac{A}{2}}+9\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant\sum\frac{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}\\
&\iff \sum\frac{\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}}{\sin^4\dfrac{A}{2}}+9\geqslant\sum\frac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}\\
&\iff \sum\frac{(1-\cos B)(1-\cos C)}{(1-\cos A)^2}+9\geqslant\sum\frac{2}{1-\cos A},
\end{aligned}
\tag{3.1.9}
$$

记 $u=\dfrac{1}{1-\cos A}$, $v=\dfrac{1}{1-\cos B}$, $w=\dfrac{1}{1-\cos C}$，容易计算出

$$
\begin{aligned}
uvw&=\frac{1}{\prod(1-\cos A)}=\frac{2}{(p-1)^2},\\
\sum u&=uvw\sum(1-\cos A)(1-\cos B)=\frac{6-4p+2q}{(p-1)^2},\\
\sum uv&=uvw\sum(1-\cos A)=\frac{6-2p}{(p-1)^2},
\end{aligned}
$$

则

$$
\text{式 (3.1.9)} \iff \sum\frac{u^2}{vw}+9\geqslant 2\sum u \iff \frac{\left(\sum u\right)^3-3\sum u\sum uv}{uvw}+12\geqslant 2\sum u,
\tag{3.1.10}
$$

将上述数据代入并去分母化简整理有

$$
\text{式 (3.1.10)} \iff (q+1)\big(2q^2+4(4-3p)q+3p^3+7p^2-35p+27\big)\geqslant 0,
$$

由 $\prod(1-\cos A)>0$ 和 $\prod(1+\cos A)>0$ 相加可得 $q+1>0$，所以上式可以约去 $q+1$，并记

$$
f(x)=2x^2+4(4-3p)x+3p^3+7p^2-35p+27,
$$

则式 (3.1.10) 等价于

$$
f(q)\geqslant 0。
\tag{3.1.11}
$$

[①]实际上我就是对该恒等式展开获得定理 3.1.1 的，这种做法其实是模仿了 pqr 定理或者三角形基本不等式的证明，因为我知道这样做如无意外将会得到跟 pqr 定理和三角形基本不等式一样强的不等式。

注意到 $f(x)$ 为开口向上的二次函数，其对称轴为 $x=3p-4$，下证 $q>3p-4$。根据定理 3.1.1，只要证 $\frac{5}{2}p-3-\frac{1}{2}\sqrt{(3-2p)^3}>3p-4$，即 $2-p>\sqrt{(3-2p)^3}$，熟知 $1<p\leqslant\frac{3}{2}$，所以只要证 $(2-p)^2>(3-2p)^3$，因式分解为 $(p-1)(8p^2-27p+23)>0$，易知成立，所以 $q>3p-4$。

由此可见，$f(q)$ 关于 q 单调递增，再由定理 3.1.1，有

$$f(q)\geqslant f\left(\frac{5}{2}p-3-\frac{1}{2}\sqrt{(3-2p)^3}\right)=\frac{1}{2}(3-2p)\big(p^2-6p+7-2(2-p)\sqrt{3-2p}\big),$$

所以只要证

$$p^2-6p+7\geqslant 2(2-p)\sqrt{3-2p},$$

易证 $p^2-6p+7>0$，所以上式两边平方等价于

$$(p^2-6p+7)^2\geqslant 4(2-p)^2(3-2p)\iff (p-1)^4\geqslant 0,$$

显然成立，所以式 (3.1.11) 成立，原不等式得证。 □

不难看出，上述三角证法是比较“暴力”的，观赏性并不高，有的地方我也省略了繁琐的计算过程，所以可读性也不高。

而下面这个代数证法相对来说就有一定的可读性和观赏性，可以说我运气比较好，后面的计算比我预料中顺利得多。

代数证法 类似于题目 3.1.5 的代数证法二那样，可作代换 $a=\frac{x}{y+z}$, $b=\frac{y}{z+x}$, $c=\frac{z}{x+y}$，其中 x, y, $z>0$，则

$$\begin{aligned}\text{式 (3.1.5)}&\iff \sum\left(\frac{x}{y+z}\right)^3+\frac{9xyz}{\prod(x+y)}\geqslant\sum\frac{x}{y+z}\\&\iff \sum\frac{x^3(x+y)(x+z)}{(y+z)^2}+9xyz\geqslant\sum x(x+y)(x+z)\\&\iff \sum\left(\frac{x^3(x+y)(x+z)}{(y+z)^2}-xyz\right)\geqslant\sum x(x+y)(x+z)-12xyz,\end{aligned}\tag{3.1.12}$$

对于式 (3.1.12) 右边，容易计算出

$$\sum x(x+y)(x+z)-12xyz=\frac{1}{2}\sum(x+y+3z)(x-y)^2,$$

对于式 (3.1.12) 左边，有

$$\begin{aligned}&\sum\left(\frac{x^3(x+y)(x+z)}{(y+z)^2}-xyz\right)\\&=\sum\frac{x^4(x+y+z)+x^3yz-xyz(y+z)^2}{(y+z)^2}\\&=(x+y+z)\sum\frac{x^4+xyz(x-y-z)}{(y+z)^2}\\&=(x+y+z)\sum\frac{x^4-x^3(y+z)+x^2yz+(x^3-xyz)(y+z)}{(y+z)^2}\\&=(x+y+z)\left(\sum\frac{x^2(x-y)(x-z)}{(y+z)^2}+\sum\frac{x(x-y)(x+z)+x(x-z)(x+y)}{2(y+z)}\right)\\&=(x+y+z)\left(\sum\frac{x^2(x-y)(x-z)}{(y+z)^2}+\sum\left(\frac{x(x-y)(x+z)}{2(y+z)}+\frac{y(y-x)(y+z)}{2(z+x)}\right)\right)\end{aligned}$$

$$= (x+y+z)\left(\sum\frac{x^2(x-y)(x-z)}{(y+z)^2}+\frac{1}{2}\sum\frac{\big((x+y+z)^2-xy\big)(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}\right),$$

因此，式 (3.1.12) 等价于

$$\sum\frac{x^2(x-y)(x-z)}{(y+z)^2}+\frac{1}{2}\sum\frac{\big((x+y+z)^2-xy\big)(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}\geqslant\frac{1}{2}\sum\frac{(x+y+3z)(x-y)^2}{x+y+z},\tag{3.1.13}$$

进一步化简，注意到

$$\begin{aligned}\frac{(x+y+z)^2-xy}{(y+z)(z+x)}-\frac{x+y+3z}{x+y+z}&=\frac{(x+y+z)^2-xy+(y+z)(z+x)}{(y+z)(z+x)}-\frac{2(x+y+2z)}{x+y+z}\\&=\frac{(x+y+z)^2+z(x+y+z)}{(y+z)(z+x)}-\frac{2(x+y+2z)}{x+y+z}\\&=(x+y+2z)\left(\frac{x+y+z}{(y+z)(z+x)}-\frac{2}{x+y+z}\right)\\&=\frac{(x+y+2z)\big((x+y+z)^2-2(z^2+xy+yz+zx)\big)}{(y+z)(z+x)}\\&=\frac{(x+y+2z)(x^2+y^2-z^2)}{(y+z)(z+x)(x+y+z)},\end{aligned}$$

所以式 (3.1.13) 又等价于

$$\sum\frac{x^2(x-y)(x-z)}{(y+z)^2}+\frac{1}{2}\sum\frac{(x+y+2z)(x^2+y^2-z^2)(x-y)^2}{(y+z)(z+x)(x+y+z)}\geqslant 0。\tag{3.1.14}$$

下面分别证明

$$\sum\frac{x^2(x-y)(x-z)}{(y+z)^2}\geqslant 0;\tag{3.1.15}$$

$$\sum(x+y)(x+y+2z)(x^2+y^2-z^2)(x-y)^2\geqslant 0。\tag{3.1.16}$$

由对称性，不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$，则

$$\begin{aligned}&\sum\frac{x^2(x-y)(x-z)}{(y+z)^2}\\&=\frac{x^2(x-y)^2+x^2(x-y)(y-z)}{(y+z)^2}+\frac{y^2(y-z)(y-x)}{(z+x)^2}+\frac{z^2(y-z)^2+z^2(y-z)(x-y)}{(x+y)^2}\\&=\frac{x^2(x-y)^2}{(y+z)^2}+\left(\frac{x^2}{(y+z)^2}-\frac{y^2}{(z+x)^2}+\frac{z^2}{(x+y)^2}\right)(x-y)(y-z)+\frac{z^2(y-z)^2}{(x+y)^2},\end{aligned}$$

由 $x\leqslant y\leqslant z$ 易得 $(x-y)(y-z)\geqslant 0$ 以及 $\dfrac{z^2}{(x+y)^2}\geqslant\dfrac{y^2}{(z+x)^2}$，所以式 (3.1.15) 成立；

再由 $x\leqslant y\leqslant z$ 及 $(x-y)^2\leqslant(z-x)^2$，得

$$\begin{aligned}&\sum(x+y)(x+y+2z)(x^2+y^2-z^2)(x-y)^2\\&\geqslant(x+y)(x+y+2z)(x^2+y^2-z^2)(x-y)^2+(z+x)(z+x+2y)(z^2+x^2-y^2)(z-x)^2\\&\geqslant(x+y)(x+y+2z)(y^2-z^2)(x-y)^2+(z+x)(z+x+2y)(z^2-y^2)(x-y)^2\\&=(y^2-z^2)^2(x-y)^2\\&\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以式 (3.1.16) 也成立。

由式 (3.1.15), (3.1.16) 即得式 (3.1.14)，所以原不等式得证。 □

3.2 一类圆内接三角形的最大面积——李明、孙世宝

文 [1] 利用微积分的知识研究了圆内接定周长三角形的最大面积，得到如下定理。

定理 3.2.1. 设圆的半径为 R，其内接三角形周长为定值 l，则该三角形面积最大时，其形状为等腰三角形。记最大面积为 $S_{\max}$，则

$$S_{\max} = 4R^2t^2\left(\frac{a}{2}-t\right),$$

其中，$a=\dfrac{l}{2R}$，t 满足如下方程

$$4t^4-4at+a^2=0。$$

笔者利用初等数学知识研究了与上述问题类似的一类圆内接三角形的最大面积——**内接于定圆且两条边长之和为定值的三角形的最大面积**，得到了如下的定理。

定理 3.2.2. 设圆的半径为 R，其内接三角形有两边之和为定值 L（$L<4R$），则当且仅当这两条边相等时（即均为 $\dfrac{L}{2}$ 时），该三角形取到最大面积 $S_{\max}=\dfrac{L^3\sqrt{16R^2-L^2}}{64R^2}$。

证明 记该三角形为 $\triangle ABC$，角 A、B、C 的对应边分别为 a、b、c，不妨设 $a+b=L$。

由余弦定理和正弦定理可得

$$a^2+b^2-2ab\cos C=c^2=(2R\sin C)^2,$$

即

$$(a+b)^2-2ab(1+\cos C)=(2R\sin C)^2,$$

于是

$$ab=\frac{L^2-4R^2\sin^2 C}{2(1+\cos C)},$$

于是

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\left(\frac{L^2}{4}-R^2\sin^2 C\right)\cdot\frac{\sin C}{1+\cos C}。\tag{3.2.1}$$

令 $x=\tan\dfrac{C}{2}$，于是由正弦的万能公式和正切的半角公式可将式 (3.2.1) 化为

$$S=\frac{L^2}{4}x-\frac{4R^2x^3}{(1+x^2)^2}。\tag{3.2.2}$$

下面来证明

$$\frac{L^2}{4}x-\frac{4R^2x^3}{(1+x^2)^2}\leqslant\frac{L^3\sqrt{16R^2-L^2}}{64R^2}。\tag{3.2.3}$$

记 $t=\sqrt{\dfrac{16R^2}{L^2}-1}$，则式 (3.2.3) 可化为

$$\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\left(t^2+1\right)\cdot\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\leqslant\frac{t}{4(t^2+1)},$$

整理即为

$$\left(t^2+1\right)x^5-tx^4-\left(t^4-1\right)x^3-2tx^2+\left(t^2+1\right)x-t\leqslant 0,$$

因式分解为

$$(x-t)\cdot\left[\left(t^2+1\right)x^4+t^3x^3+x^2-tx+1\right]\leqslant 0。\tag{3.2.4}$$

由于

$$L=a+b=2R(\sin A+\sin B)=4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 4R\sin\frac{A+B}{2}=4R\cos\frac{C}{2},$$

于是 $\sec\frac{C}{2}\leqslant\frac{4R}{L}$，于是

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\sec^2\frac{C}{2}-1}\leqslant\sqrt{\frac{16R^2}{L^2}-1},$$

即

$$x-t\leqslant 0。\tag{3.2.5}$$

又由于

$$t^3x^3+1-tx=\left(t^3x^3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-tx\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2t^3x^3}-tx=\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}-1\right)tx>0,$$

于是

$$(t^2+1)x^4+t^3x^3+x^2-tx+1>0。\tag{3.2.6}$$

因此，由式 (3.2.5) 及式 (3.2.6) 可知式 (3.2.4) 成立，从而式 (3.2.3) 成立，等号成立当且仅当 $\cos\frac{A-B}{2}=1$，即 $A=B$，即 $a=b=\frac{L}{2}$。

综上可得 $S_{\max}=\frac{L^3\sqrt{16R^2-L^2}}{64R^2}$，当且仅当 $a=b=\frac{L}{2}$ 时取到该值，定理 3.2.2 证毕。 □

参考文献

[1] 舒阳春. 圆内接多边形定周长的面积最大值问题 [J]. 武汉科技大学学报（自然科学版）, 2000, 23(1) :105.

3.3 一个多重根式不等式的加强——李明

文 [1] 给出了如下一个多重根式不等式：

$$\sqrt{k\sqrt{(k+1)\cdots\sqrt{n}}}<k+1, \tag{3.3.1}$$

其中，$2\leqslant k\leqslant n-1$。

文 [2] 从方根次数和被开方数列两个角度同时推广不等式 (3.3.1)，得到了如下的不等式：

$$\sqrt[m]{a_1\cdot\sqrt[m]{a_2\cdots\sqrt[m]{a_n}}}<1+\frac{(a_1-1)(m-2)+(a_2-1)}{(m-1)^2}, \tag{3.3.2}$$

其中，$2\leqslant n,m\in\mathbb{N}$，$\{a_n\}$ 是单调递增的正项等差数列且满足末项 $a_n>1$。

笔者发现多重根式不等式 (3.3.2) 还可以进一步加强为如下更加简洁的不等式：

$$\sqrt[m]{a_1\cdot\sqrt[m]{a_2\cdots\sqrt[m]{a_n}}}<\left(a_1+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \tag{3.3.3}$$

其中，$2\leqslant n,m\in\mathbb{N}$，$\{a_n\}$ 是正项等差数列且满足公差 $d\geqslant 0$ 和末项 $a_n>1$。

下面用数学归纳法来给出不等式 (3.3.3) 的证明。

证明 记 $x_k=\sqrt[m]{a_k\cdot\sqrt[m]{a_{k+1}\cdots\sqrt[m]{a_n}}}$（$1\leqslant k\leqslant n$）。

当 $k=n$ 时，欲证 $x_n<\left(a_n+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}$，等价于证明

$$\left(a_n+\frac{d}{m-1}\right)^m>a_n^{m-1}。$$

由于 $2\leqslant m\in\mathbb{N}, d\geqslant 0, a_n>1$，于是

$$\left(a_n+\frac{d}{m-1}\right)^m\geqslant a_n^m>a_n^{m-1}。$$

假设 $x_k<\left(a_k+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}$，其中 k 为 $[2,n]$ 里的某个整数，则有

$$x_{k-1}=\sqrt[m]{a_{k-1}x_k}<\sqrt[m]{a_{k-1}\left(a_k+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}},$$

于是，欲证 $x_{k-1}<\left(a_{k-1}+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}$，只需证

$$\sqrt[m]{a_{k-1}\left(a_k+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}}\leqslant\left(a_{k-1}+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

即证

$$a_{k-1}^{m-1}\left(a_k+\frac{d}{m-1}\right)\leqslant\left(a_{k-1}+\frac{d}{m-1}\right)^m,$$

由二项式展开定理可得

$$\left(a_{k-1}+\frac{d}{m-1}\right)^m\geqslant a_{k-1}^m+ma_{k-1}^{m-1}\frac{d}{m-1}=a_{k-1}^{m-1}\left(a_{k-1}+d+\frac{d}{m-1}\right)=a_{k-1}^{m-1}\left(a_k+\frac{d}{m-1}\right)。$$

综上，由数学归纳法可得 $x_1<\left(a_1+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}$，即不等式 (3.3.3) 成立。 □

最后，我们论证一下不等式 (3.3.3) 是不等式 (3.3.2) 的加强。即要证明

$$1+\frac{(a_1-1)(m-2)+(a_2-1)}{(m-1)^2}\geqslant\left(a_1+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

由加权算术几何平均不等式可得

$$\text{左边}=\frac{m-2}{m-1}\cdot 1+\frac{1}{m-1}\cdot\left(a_1+\frac{d}{m-1}\right)\geqslant 1^{\frac{m-2}{m-1}}\cdot\left(a_1+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}=\text{右边。}$$

参考文献

[1] 匡继昌. 常用不等式 (第四版)[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2010.8:107.

[2] 李明, 韩安静, 严文兰. 一个多重根式不等式的推广 [J]. 数学空间, 2012 年第 1 期（总第 8 期）:22.

朝花夕拾

4.1 【封面故事】Soddy 圆——何万程

$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，与 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 都相切的圆称为 $\triangle ABC$ 的 Soddy 圆，其中在 $\triangle ABC$ 内部的 Soddy 圆称为 $\triangle ABC$ 的内 Soddy 圆，另外一个 Soddy 圆称为 $\triangle ABC$ 的外 Soddy 圆。

以下简单讲讲 Soddy 圆的存在情况和半径的求法。

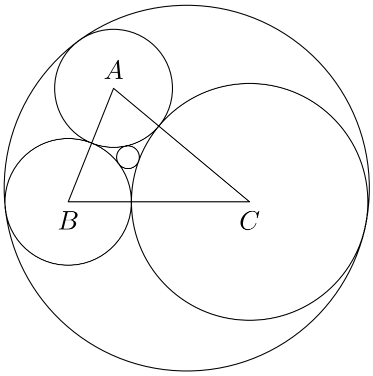


图 4.1.1

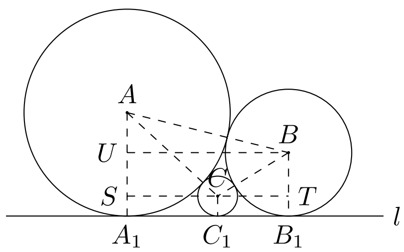


图 4.1.2

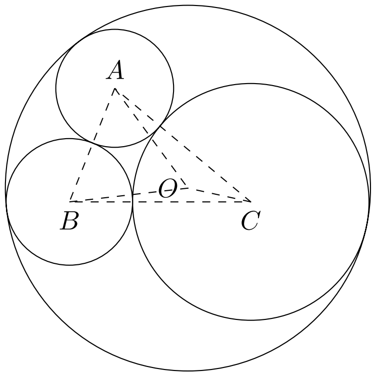


图 4.1.3

下面先确定 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 有一条公共的公切线时圆半径的关系，设 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，半径分别为 a、b、c，$a \leqslant b \leqslant c$。

设 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 有一条公切线 l，切点分别是 A_1、B_1、C_1。过点 C 作 l 的平行线，分别交直线 AA_1、BB_1 于点 S、T；过点 B 作 l 的平行线，交直线 AA_1 于点 U；连 AA_1、BB_1、CC_1、AB、AC、BC、ST、UB，则

$$SC = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2} = 2\sqrt{ac}，TC = \sqrt{(b+c)^2 - (b-c)^2} = 2\sqrt{bc}，$$
$$ST = SC + TC = 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\sqrt{c}，$$

而

$$AU = a - b，UB = ST = 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\sqrt{c}，AB = a + b，$$

由 $AU^2 + UB^2 = AB^2$ 得

$$(a-b)^2 + \left(2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\sqrt{c}\right)^2 = (a+b)^2，$$

整理得

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}，$$

并由此得

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 2abc\,(a+b+c)。$$

由双曲线的定义以及方程知，若 $\odot B, \odot C$ 的大小固定，当 $\odot A$ 夹在 $\odot B$、$\odot C$ 的两条外公切线之间时，$\odot A$ 的半径比 $\odot A, \odot B, \odot C$ 有一条公切线时的 $\odot A$ 的半径小，此时有

$$\frac{1}{\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}，$$

并由此得

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 > 2abc\,(a+b+c)；$$

当 $\odot A$ 与 $\odot B$、$\odot C$ 的一条外公切线相交时，$\odot A$ 的半径比 $\odot A, \odot B, \odot C$ 有一条公切线时的 $\odot A$ 的半径大，时有

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}},$$

并由此得

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 < 2abc\,(a+b+c)\text{。}$$

为了求得 Soddy 圆的半径，先证明平面四点的距离关系。

定理 4.1.1. 设平面四点 A、B、C、D 之间 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$AD = p$，$BD = q$，$CD = r$，令

$$\begin{aligned}
P_1 &= (ap)^2\left(-a^2+b^2+c^2-p^2+q^2+r^2\right),\\
P_2 &= (bq)^2\left(a^2-b^2+c^2+p^2-q^2+r^2\right),\\
P_3 &= (cr)^2\left(a^2+b^2-c^2+p^2+q^2-r^2\right),\\
Q &= (abc)^2+(aqr)^2+(brp)^2+(cpq)^2,
\end{aligned}$$

则有

$$P_1 + P_2 + P_3 = Q\text{。}$$

证明 由余弦定理，得

$$\begin{aligned}
\cos\angle ADB &= \frac{p^2+q^2-c^2}{2pq},\\
\cos\angle BDC &= \frac{q^2+r^2-a^2}{2qr},\\
\cos\angle CDA &= \frac{r^2+p^2-b^2}{2rp}\text{。}
\end{aligned}$$

设 $\cos\angle ADB = x$，$\cos\angle CDA = y$，因为 $\angle BDC = 360^\circ - \angle ADB - \angle CDA$ 或 $\angle BDC = \angle ADB + \angle CDA$，无论哪种情况，由余弦定理，都得

$$q^2 + r^2 - 2qr\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right) = a^2,$$

即

$$q^2 + r^2 - 2qrxy - a^2 = -2qr\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\text{。}$$

上面方程两边平方，把上面得到的 x、y 的值代入上面的方程，并且化简方程，得

$$P_1 + P_2 + P_3 = Q\text{。}$$

□

若 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，半径分别为 a、b、c，$a \leqslant b \leqslant c$，$\odot O$ 与上述三圆都内切，半径为 r，代入 A、B、C、O 四点距离关系的方程，得

$$\begin{aligned}
&\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-2abc\,(a+b+c)\right)r^2\\
&+2abc\,(ab+ac+bc)\,r + a^2b^2c^2 = 0,
\end{aligned}$$

解这个方程，得如下结论：

（**a**）如果 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \neq 2abc\,(a+b+c)$，就得

$$r = \frac{abc}{-ab-ac-bc \pm 2\sqrt{abc\,(a+b+c)}}\text{。}$$

由于

$$(ab+ac+bc)^2-4abc(a+b+c)$$
$$=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-2abc(a+b+c)。$$

当 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2>2abc(a+b+c)$ 时 $2\sqrt{abc(a+b+c)}<ab+bc+ca$，此时 r 的两个值都为负，也就是说在 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2>2abc(a+b+c)$ 时不可能有一圆与上述三圆都内切。

当 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2<2abc(a+b+c)$ 时 $2\sqrt{abc(a+b+c)}>ab+bc+ca$，此时 r 的值为正的只有

$$r=\frac{abc}{-ab-ac-bc+2\sqrt{abc(a+b+c)}}。$$

（**b**）如果 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=2abc(a+b+c)$，就得 $r=-\dfrac{abc}{2(ab+ac+bc)}<0$，这是不可能。也就是说在 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=2abc(a+b+c)$ 时不可能有一圆与上述三圆都内切。

在 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，半径分别为 a、b、c，$a\leqslant b\leqslant c$ 时：

（1）若 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2>2abc(a+b+c)$，则 $\odot A$ 夹在 $\odot B$、$\odot C$ 的两条外公切线之间，此时有 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}>\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}$；

（2）若 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=2abc(a+b+c)$，则 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 有一条公共的公切线，此时有 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}$；

（3）若 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2<2abc(a+b+c)$，则 $\odot A$ 与 $\odot B$、$\odot C$ 的一条外公切线相交，此时有 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}<\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}$。

若 $\odot O$ 与 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 都外切，用类似上面的方法，得到如果 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\neq 2abc(a+b+c)$，就得当 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2>2abc(a+b+c)$ 时

$$r=\frac{abc}{ab+ac+bc\pm 2\sqrt{abc(a+b+c)}};$$

当 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2<2abc(a+b+c)$ 时，

$$r=\frac{abc}{ab+ac+bc+2\sqrt{abc(a+b+c)}}。$$

如果 $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=2abc(a+b+c)$，就得到

$$r=\frac{abc}{2(ab+ac+bc)}。$$