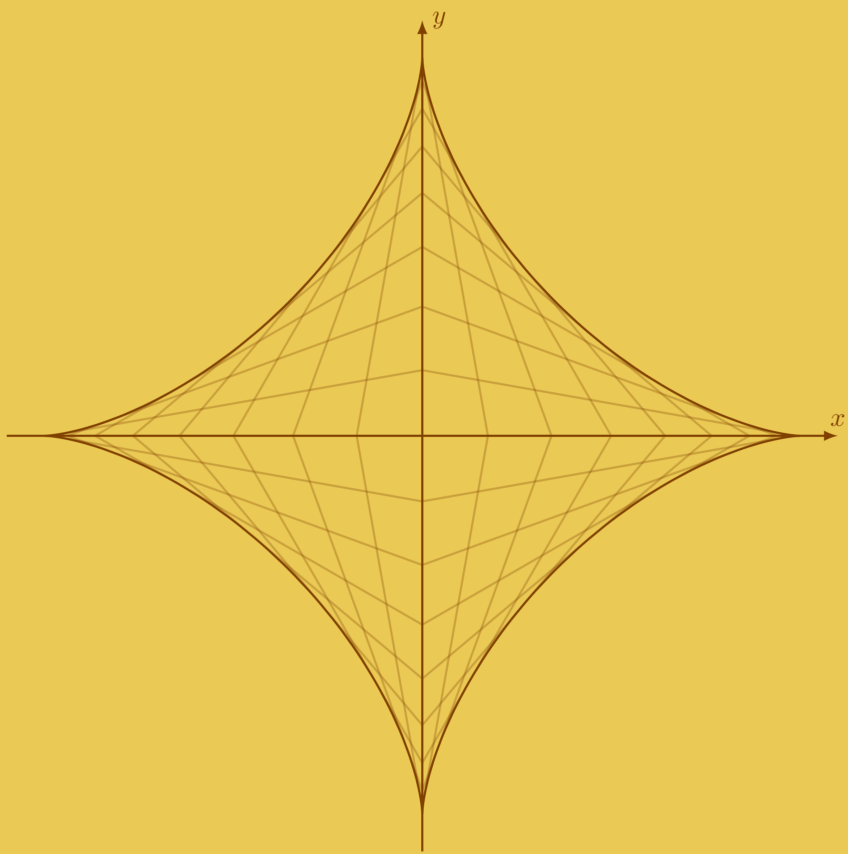
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2013 年第 4 期　　总第 14 期



目录

数学评书

1.1 《智慧宝典》第三部第九回　船过暗礁地　从容巧避险——陈海烽

上回说到两位小英雄两次战胜海盗，又教众人习武强身之事。船顺利在海上航行，这时只听船上有人又喊道："船老大通知，船正行驶在有暗礁的地方，请大家务必小心准备，以防不测。"两位小英雄也不敢怠慢，急忙询问船老大。

船老大说："这个地方有三处暗礁，可怕之处在于会经常移动，因此务必小心。如果避开了，那么此行就安全了。"正说着，忽然听船老大往前一指，暗礁来了，只见是：

暗礁一　如果 $\vec{a} \parallel \vec{b}$，$\vec{b} \parallel \vec{c}$，则 $\vec{a} \parallel \vec{c}$。

两位小英雄一看，这个暗礁确实比较小，容易避开。船老大说："很显然是错误的，只有其中 $\vec{b} \neq \vec{0}$ 才符合条件。"小豪说："这确实是一个暗礁，一些人可能不小心就撞上了，认为它与直线中的'若 $a \parallel b$，$b \parallel c$，则 $a \parallel c$'这条线路一样，看来船老大你还是挺细心的。"说着，又过来一个黑色的东西，船老大说，那是第二个暗礁了：

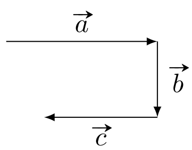
暗礁二　$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$。

两位小英雄认真看过了，只听船老大接着说："这个要注意从左边看，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ 是一个实数，再乘以一个 $\vec{c}$，结果显然是与 $\vec{c}$ 共线的一个向量，而右边先算 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 得到另外一个实数，再乘以一个 $\vec{a}$，结果应该是与 $\vec{a}$ 共线的一个向量，可见不一定相等的。"只听小英说："主要是不少船员可能受原来经验的影响，造成的行驶错误吧。"船老大也点头称是。这时，船老大又说："快看，第三个暗礁冲我们过来了！"

暗礁三　如果 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$，则 $\vec{a} = \vec{c}$。

"这个暗礁更危险，经常活动的，所以我们需要更加小心才是。"船老大提醒，"不少船老大就是没有注意到这一点，很多到这边船毁人亡呢。"

小豪道：还是受原先的经验的影响，两边同时除以一数，将 $\vec{b}$ 看作一个实数了。其实只要我们注意到，当 $\vec{b} = \vec{0}$ 时，显然就有 $\vec{a}$ 不一定等于 $\vec{c}$ 了，而且即使告诉你 $\vec{b} \neq \vec{0}$ 了，也是不一定相等的。我来举一个简单的例子吧：



看这个线路图，可知 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$=0，可是我们明显看出 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的方向相反了。所以看到这个确实要小心行驶，一般就是使用移项法。

船老大禁不住点了点头，说道："没想到两位小英雄不仅武功高强，对船只的行驶研究的功力也十分深厚呢。确实如此，我也经常提醒我的朋友们，现在这些地段只要巧妙的避过，那么往向量国的方向就会风平浪静了。"

此一去是否真的风平浪静，且听下回分解。

1.2 《智慧宝典》第三部第十回　误入无常三角区　上下左右险通关——陈海烽

话说船过了暗礁以后，开始果真是风平浪静，可是天有不测风云，忽然之间帆快速转动起来，根本没有方向。船老大说：“糟糕！台风来了，快下帆！”下帆以后，整只大船只能听风的摆布，好像是有意安排，过不多久竟然停了。这时大家才看到自己所在的地方，船老大说：“不好，我们进入三角区了，看来又是凶多吉少了。”

两位小英雄问什么是三角区，船老大说：三角区这边环境诡异，特别是海浪变化无常，人称“百慕小”，很多人到这边无法脱离险境，只能望船兴叹了！你们看——

$$\begin{tikzcd} & 2\alpha & \\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2} & \alpha \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \alpha+\beta-\beta \\ & \dfrac{\alpha}{2} & \end{tikzcd}$$

这是这边海浪的变化情况，你看船四周的海浪各不一样，有时都能行驶，可是我们要快速选择走哪一边，才能快速避开，你看一个浪头过来了：

浪头一　求 $\sin 15^\circ$ 的值。

船老大说道：这个浪头过来时的行驶方法可用配凑法，就是走 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$ 或者 $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ)$ 这条路，可是如果我们走“上边”，看好了——

走法　$\sin 15^\circ = \sqrt{\sin^2 15^\circ} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$。 □

“对呀”，小英说道：“看来您想象丰富哦，由 $a = \sqrt{a^2}$（$a > 0$）引发联想，降幂后成 30° 这一特殊角后顺利驶出。”这时又见一个浪头朝船冲来。

浪头二　已知 $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$，求 $\tan\alpha$ 的值。

船老大说，不少船公是这样行驶的

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha},$$

故有 $\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \dfrac{1}{2}$，解得 $\tan\alpha = -\dfrac{1}{3}$。可是我一般不使用这种行驶方法，你们看我又从它的“右边”经过了，它的“右边”是 $\alpha = \left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) - \dfrac{\pi}{4}$。

走法　$\tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\tan\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}-1}{1+\dfrac{1}{2}\times 1} = -\dfrac{1}{3}$。 □

小豪说：“这样处理太棒了，借浪打浪，常可借用的浪有如 $\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{\pi}{4}$、$\dfrac{\pi}{3}$ 等，往往能收到神奇的效果，是吧！”船老大点头称是，然后又手一指，说混合浪过来了——

浪头三　已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right) = \dfrac{1}{3}$，求 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha\right)$ 的值。

船老大说：这个浪很容易想到它的“上边”，就是它的 2 倍 $\frac{\pi}{3}-2\alpha$，但它要过去和 $\frac{2\pi}{3}+2\alpha$ 相会还有一点距离，于是再考虑走它的“右边”：$\frac{2\pi}{3}+2\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$，即为 $\frac{2\pi}{3}+2\alpha=\pi-2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$，这样就容易行驶了。

走法 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=\cos\left[\pi-2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos 2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-1=-\frac{7}{9}$。 □

小豪说道：“大精彩了，目标在前头，就是要巧妙看出每一个走法与下一步的关联，与武艺相比绝不逊色呀！”他们正说着，又一个浪头打了过来——

浪头四 证明：$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$。

船老大又说：这个比较麻烦些，有些船就是无法坚持下去。本来可以大致如此，先从右边然后绕到左边，会出现这样的情况 $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$，看到这种情况很多人以为出去无望，就放弃了，如果继续坚持撑下去，应该是

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\\
=&2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\
=&2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\\
=&\sin\alpha\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\right)+\sin\beta\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\\
=&\sin\alpha+\sin\beta,
\end{aligned}$$

这样就走出来了。可是我一般不使用这个方法，注意到浪头的左右两边，$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$，就有下面的走法。

走法

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha+\sin\beta\\
=&\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
=&\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
=&2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}。
\end{aligned}$$
□

小英说：“看来经过这个三角区的方法是要注意各种浪头之间的关系，不断的变换行驶方向，这与武功的最高境界——‘眼观六路，耳听八方’完全一致呀，难怪大家称您是船老大。”船老大笑而不答，不多时，船已靠岸了。

欲知两位小英雄究竟到达什么地方，还会遇到什么危险之事，且看下一部。

助力高考

2.1 ab1962 解题集精选（十四）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 $651\sim700$ 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》总第 1 期。

题目 2.1.1. 一长为 a 的木梁，其两端悬于两条相平行且长度都为 b 的绳索下，木梁处于水平位置，若把木梁绕其中轴转动一个角度 θ，问木梁升高多少？

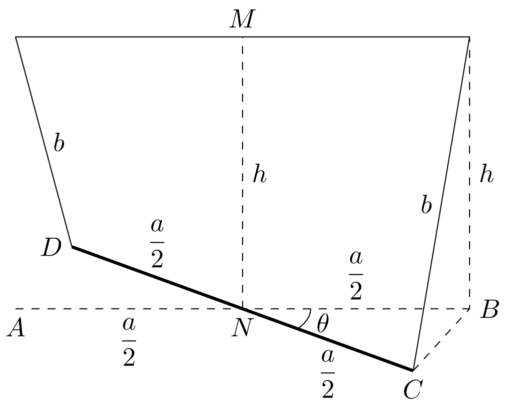


图 2.1.1

解 如图 2.1.1 所示，则

$$CB = 2\cdot NC\cdot \sin\frac{\theta}{2} = a\sin\frac{\theta}{2},$$

故

$$h^2 = b^2 - CB^2 = b^2 - a^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

因此木梁升高的高度为

$$b-h = b-\sqrt{b^2-a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}。$$

□

题目 2.1.2. 动直线 $y+2=k(x-5)$ 交抛物线 $y^2=4x$ 于 M，N，问抛物线上是否存在一点 P，使得 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{NP}$ 恒成立？

解 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立 $y+2=k(x-5)$ 与 $y^2=4x$，消 x 得

$$\frac{k}{4}y^2-y-5k-2=0,$$

由韦达定理得

$$y_1+y_2=\frac{4}{k},\ y_1y_2=-\frac{4(5k+2)}{k},$$

故

$$k(x_1+x_2-10)=y_1+y_2+4=\frac{4k+4}{k},$$

得

$$x_1+x_2=\frac{10k^2+4k+4}{k^2},$$

以及

$$x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=\frac{(5k+2)^2}{k^2},$$

假设存在 $P(x_0,y_0)$ 使 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{NP}$ 恒成立，因 $\overrightarrow{MP}=(x_0-x_1,y_0-y_1)$，$\overrightarrow{NP}=(x_0-x_2,y_0-y_2)$，故

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{NP}&\iff(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(y_0-y_1)(y_0-y_2)=0\\&\iff x_0^2-(x_1+x_2)x_0+x_1x_2+y_0^2-(y_1+y_2)y_0+y_1y_2=0\\&\iff x_0^2-\frac{10k^2+4k+4}{k^2}x_0+\frac{(5k+2)^2}{k^2}+y_0^2-\frac{4}{k}y_0-\frac{4(5k+2)}{k}=0\\&\iff x_0^2k^2-(10x_0k^2+4x_0k+4x_0)+(25k^2+20k+4)+y_0^2k^2-4y_0k-(20k^2+8k)=0\\&\iff(x_0^2-10x_0+5+y_0^2)k^2+(-4x_0+12-4y_0)k+(-4x_0+4)=0,\end{aligned}$$

上式对 $k\in\mathbb{R}$ 恒成立，应有

$$x_0^2-10x_0+5+y_0^2=0\text{ 且 }-4x_0+12-4y_0=0\text{ 且 }-4x_0+4=0,$$

解得 $x_0=1$，$y_0=2$，因此存在一点 $P(1,2)$ 使得 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{NP}$ 恒成立。 □

题目 2.1.3. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，且 $f(0)=f(1)$，如果对于任意不同的 x_1, $x_2\in[0,1]$，都有 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$，求证：$|f(x_2)-f(x_1)|<\dfrac{1}{2}$。

证明 若 $|x_2-x_1|\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\dfrac{1}{2}$；

若 $|x_2-x_1|>\dfrac{1}{2}$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1+1-x_2<\dfrac{1}{2}$，因 $f(0)=f(1)$，故

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)|&=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|\\&\leqslant|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|\\&<|x_2-1|+|0-x_1|\\&=1-x_2+x_1\\&<\frac{1}{2}。\end{aligned}$$

综上所述，原不等式得证。 □

kuing 评注：其实不分类讨论也可以，如下。

另证 不妨设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant1$，则

$$\begin{aligned}2|f(x_1)-f(x_2)|&=\big|f(x_1)-f(0)+f(x_1)-f(x_2)-\big(f(x_2)-f(1)\big)\big|\\&\leqslant|f(x_1)-f(0)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(1)|\\&<|x_1-0|+|x_1-x_2|+|x_2-1|\\&=x_1+x_2-x_1+1-x_2\\&=1,\end{aligned}$$

即得

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}。$$ □

题目 2.1.4. 如图 2.1.2，线段 AB 和圆 O 交于 C、D，$AC=BD$，AE、BF 分别切圆 O 于 E、F，EF 交 CD 于 G。求证：（1）$AE=BF$；（2）$OG\perp CD$。

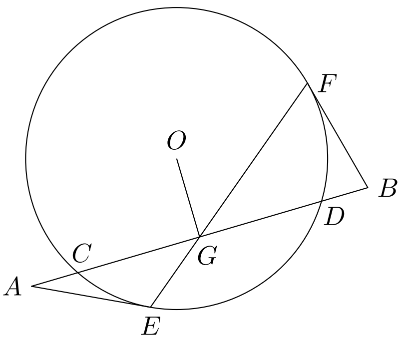


图 2.1.2

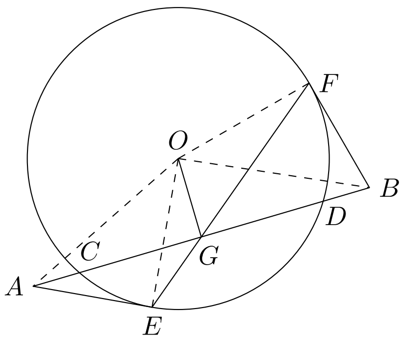


图 2.1.3

证明 （1）因为 AE 和 BF 都是圆 O 的切线，所以 $AE^2 = AC \cdot AD = AC \cdot (AC + CD)$，$BF^2 = BD \cdot BC = BD \cdot (BD + CD)$，因为 $AC = BD$，所以 $AE = BF$；

（2）连结 OA，OB，OE，OF，如图 2.1.3，则 $\angle AEO = \angle BFO = 90°$，又 $OE = OF$，$AE = BF$，所以 $\triangle AEO \cong \triangle BFO$，所以 $AO = BO$，$\angle EOA = \angle FOB$。

由 $AO = BO$ 得 $\angle OAB = \angle OBA$，由 $\angle EOA = \angle FOB$ 得 $\angle AOB = \angle EOF$，于是 $\angle OAB = \angle OEG$，所以 $OAEG$ 是圆内接四边形。

所以，$\angle OGA = \angle OEA = 90°$，所以 $OG \perp CD$。 □

题目 2.1.5. 一列队伍长 100 米，正在行进。传令兵从队伍末端到排头传令，又返回队伍末端，期间没有停留，这段时间里队伍前进了 100 米。已知队伍和传令兵的移动速度保持不变，问传令兵共跑了多少米？

解 设传令兵的速度为 x，队伍的速度为 y，则传令兵从末端到前端用时 $\dfrac{100}{x-y}$，传令兵从前端到末端用时 $\dfrac{100}{x+y}$，故由总时间得到等式

$$\frac{100}{x-y} + \frac{100}{x+y} = \frac{100}{y},$$

即

$$\frac{y}{x-y} + \frac{y}{x+y} = 1,$$

记 $\dfrac{x}{y} = t$，则

$$\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} = 1,$$

解得 $t = 1 + \sqrt{2}$，故传令兵所走的路程为

$$\frac{100}{y} \cdot x = 100t = 100\big(1 + \sqrt{2}\big)。$$ □

题目 2.1.6. 已知 A, B, C 为三角形的三个内角，x, y, z 为任意实数，求证

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2xy\cos A + 2yz\cos B + 2xz\cos C。$$

证法 1

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos A - 2yz\cos B - 2xz\cos C \\
&= x^2 - 2x(y\cos A + z\cos C) + y^2 + z^2 + 2yz\cos(A+C) \\
&= x^2 - 2x(y\cos A + z\cos C) + (y\cos A + z\cos C)^2 + (y\sin A - z\sin C)^2 \\
&= (x - y\cos A - z\cos C)^2 + (y\sin A - z\sin C)^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

故原不等式成立。 □

证法 2

$$x^2+y^2+z^2-2xy\cos A-2yz\cos B-2xz\cos C=x^2-2x(y\cos A+z\cos C)+y^2+z^2-2yz\cos B,$$

关于 x 的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta&=4(y\cos A+z\cos C)^2-4(y^2+z^2-2yz\cos B)\\&=-4y^2\sin^2 A-4z^2\sin^2 C+8yz[\cos A\cos C-\cos(A+C)]\\&=-4y^2\sin^2 A-4z^2\sin^2 C+8yz\sin A\sin C\\&=-4(y\sin A-z\sin C)^2\leqslant 0,\end{aligned}$$

故原不等式成立。 □

kuing 评注： 其实这两个证法没多大区别。这个不等式被称作“三角形嵌入不等式”，是个很有用的不等式，其证法还有一些，其中最简洁的是向量方法，见 http://bbs.pep.com.cn/forum.php?mod=redirect&goto=findpost&ptid=728314&pid=5432395 第 54 楼，将那里的 $\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)^2$ 换成 $\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)^2$ 即可。

2.2 例析平面向量问题的几种常见解法——杨凤国

平面向量作为一种工具，可以用来处理共线（平行）、垂直、长度、角度等问题，它是沟通代数与几何的重要工具，因而倍受高考命题者的青睐，成为高考命题的热点内容之一。在每年各省市的高考试卷中都可以看到它的身影，一般以选择题或填空题的形式出现，考查的主要内容有：平面向量基本定理、平面向量的数量积、平面向量模的运算、平面向量的夹角等内容。在解答题中一般以三角函数、解析几何等内容为背景，主要考查平面向量的坐标运算。下面笔者谈谈选择题与填空题中出现的，与平面几何图形有关的平面向量问题的常见解法，以期达到抛砖引玉的作用。

一、利用坐标法

所有的平面向量问题都可以用坐标法解。在建立坐标系时需要充分利用已知条件中的垂直或给定的角度等条件。有些图形在建立坐标系时可以采用特殊化的方式，以使坐标运算较为简便。坐标法解题的优点是思路简单，缺点是有时运算量会大一些。

例 2.2.1. 如图 2.2.1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$AD=DC=1$，$AB=3$，动点 P 在以点 C 为圆心，且与直线 BD 相切的圆内运动，设 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{AB}$（$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$），则 $\alpha+\beta$ 的取值范围是________。

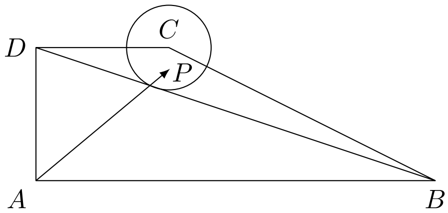


图 2.2.1

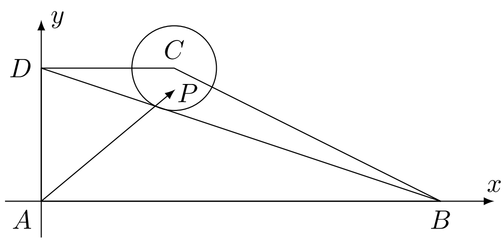


图 2.2.2

解 以 A 点为原点建立如图 2.2.2 所示的坐标系。

$A(0,0)$，$B(3,0)$，$D(0,1)$，$C(1,1)$，直线 BD 的方程为 $x+3y-3=0$。

设 $P(x,y)$，圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$（$r>0$）。

由直线 BD 与圆 C 相切得 $r=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{10}$。

因为 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(3,0)$，$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{AB}$，所以 $(x,y)=(0,\alpha)+(3\beta,0)=(3\beta,\alpha)$，所以 $x=3\beta$，$y=\alpha$，$\alpha+\beta=\dfrac{1}{3}x+y$。

令 $z=\dfrac{1}{3}x+y$，则 $y=-\dfrac{1}{3}x+z$，利用线性规划方法可得 $\dfrac{|4-3z|}{\sqrt{10}}<\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，解得 $1<z<\dfrac{5}{3}$。

所以 $1<\alpha+\beta<\dfrac{5}{3}$。 □

说明：将 $\alpha+\beta$ 用 x,y 表示之后，除了利用线性规划的方法解，也可以利用圆的参数方程解。

例 2.2.2. $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$\angle A=60^\circ$，$\angle A$ 的平分线 AD 交 BC 边于点 D，且 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AB}$，则 AD 的长为________。

解 以 A 为原点，AD 为 x 轴建立如图 2.2.3 所示的坐标系。

$A(0,0)$，$B\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，设 $C\left(3m,-\sqrt{3}m\right)$，所以

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(3m,-\sqrt{3}m\right)+\lambda\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(m+\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{3}m+\frac{3}{2}\lambda\right),$$

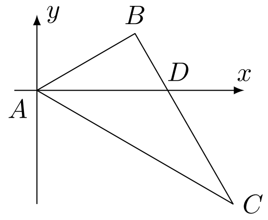


图 2.2.3

故 $D\left(m+\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{3}m+\frac{3}{2}\lambda\right)$。因为 D 点在 x 轴上，所以 $\lambda=\frac{2\sqrt{3}}{9}m$，即 $D\,(2m,0)$。

因为 B, D, C 三点共线，所以

$$k_{BD}=k_{CD}\implies\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}-2m}=-\sqrt{3},$$

解得 $m=\sqrt{3}$，所以 $AD=2\sqrt{3}$。 □

说明：1. 题目中给出角度的，可以把角的顶点放在原点建立坐标系。

2. 利用坐标法求解时经常会用到两点间距离公式，直线的方程，三点共线等知识点。

例 2.2.3.（2013 重庆 10）在平面上，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，$\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\left|\overrightarrow{OB_2}\right|=1$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$。若 $\left|\overrightarrow{OP}\right|<\frac{1}{2}$，则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 的取值范围是（　）

（A）$\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　（B）$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$　（C）$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$　（D）$\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

解　以 A 为原点建立如图 2.2.4 所示的坐标系。

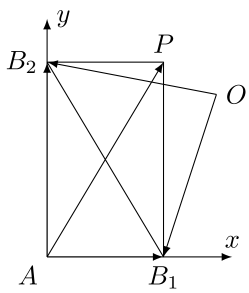


图 2.2.4

设 $B_1(a,0)$，$B_2(0,b)$，$O(x,y)$，所以

$$(x-a)^2+y^2=1, \tag{2.2.1}$$

$$x^2+(y-b)^2=1, \tag{2.2.2}$$

$$0\leqslant(x-a)^2+(y-b)^2<\frac{1}{4}, \tag{2.2.3}$$

(2.2.1) + (2.2.2) 得 $x^2+y^2=2-(x-a)^2-(y-b)^2$，所以 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{2-[(x-a)^2+(y-b)^2]}$，所以 $\frac{\sqrt{7}}{2}<\left|\overrightarrow{OA}\right|\leqslant\sqrt{2}$，选 D。 □

说明：本题也可以利用 $OB_1^2+OB_2^2=OA^2+OP^2$ 解。

二、利用平行四边形法则或三角形法则

涉及平面向量基本定理的问题，一般可以用平行四边形法则或三角形法则解。在利用基底进行运算时，一般思路是把未知向量向已知向量转化。在利用图形求解时，有时也要用到平面几何或解三角形的相关知识，如平行线分线段成比例、三角形相似、余弦定理、三角形面积等。

例 2.2.4. P 为 $\triangle ABC$ 内一点，且满足 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle APC$ 面积之比是 （　）

（A）$2:1$　　（B）$3:1$　　（C）$4:1$　　（D）$5:2$

解 1　作 $\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PE}=-3\overrightarrow{PC}$，设 PE 与 AB 交于点 F，如图 2.2.5。

由平行四边形法则知 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PE}$。

易知 $\triangle PBF\sim\triangle AEF$，所以 $\dfrac{PF}{EF}=\dfrac{PB}{AE}=\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{1}{2}$，$P$ 为 FC 中点。

所以 $S_{\triangle APC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle AFC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APC}}=\dfrac{3}{1}$，选 B。 □

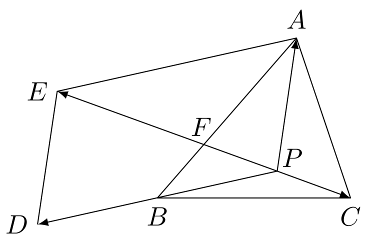


图 2.2.5

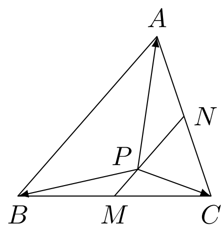


图 2.2.6

解 2　设 BC, AC 中点分别为 M, N。

因为 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=-2\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$，所以 $\overrightarrow{PN}=-2\overrightarrow{PM}$，如图 2.2.6。

所以 $\dfrac{PN}{MN}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APC}}=\dfrac{3}{1}$。 □

说明：利用平行四边形或三角形法则解题时，注意题目中向量的共线关系及相似三角形。

三、利用同乘向量法

同乘向量法是在一个向量等式的两边同时乘以某一个向量进行运算的方法。

例 2.2.5. $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=1$，$\angle BAC=120^\circ$，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则 $m+n=$ ________。

解　因为 $AB=2$，$AC=1$，$\angle BAC=120^\circ$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\angle BAC=-1$。

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\angle BAO=\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{AO}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=2,$$

同理可得 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}$。

由 $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ 得 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AB}^2+n\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，整理得 $4m-n=2$。

同理 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AC}^2$，整理得 $-m+n=\dfrac{1}{2}$。

解得 $m=\dfrac{5}{6}$，$n=\dfrac{4}{3}$，所以 $m+n=\dfrac{13}{6}$。 □

说明：1. 本题也可以利用坐标法解。

2. 本题也利用平行四边形法则解：作 $OE \parallel AC$ 交直线 AB 于点 E，$OF \parallel AB$ 交直线 AC 于点 F，结合正、余弦定理可分别求出 m，n。

四、利用平方法

平方法是将已知向量关系式两边平方化简的方法，利用平方法一般可以求出题目中的一个角度或数量积的值。涉及到向量模的运算时，使用平方法的情况较多。

例 2.2.6. $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，圆心为 O，且 $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值为 （　）

（A）$-\dfrac{1}{5}$　　（B）$\dfrac{1}{5}$　　（C）$-\dfrac{6}{5}$　　（D）$\dfrac{6}{5}$

解　因为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，所以 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$。

因为 $5\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}$，所以 $25\overrightarrow{OC}^2=9\overrightarrow{OA}^2+16\overrightarrow{OB}^2+24\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$。

所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{5}\left(3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=-\dfrac{1}{5}\left(4\overrightarrow{OB}^2-3\overrightarrow{OA}^2\right)=-\dfrac{1}{5}$。 □

说明：本题利用同乘向量法，在 $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ 的两边分别乘以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，解方程组可得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\dfrac{3}{5}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\dfrac{4}{5}$，故 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=-\dfrac{1}{5}$。

五、利用余弦定理

在进行数量积的运算时，有时要结合余弦定理消去数量积表达式中角的余弦，将数量积的运算转化为长度的运算。

例 2.2.7. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，若 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点 P 满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$，则

（I）当 $\lambda=1$ 时，$\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=$________；

（II）$\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}$ 的最小值为________。

解　设线段 AB 中点为 D，$\angle ADC=\theta$。

由 $\angle C=90^\circ$ 知 $|DC|=|DA|=|DB|$。

因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$，所以 $2\overrightarrow{PD}+\lambda\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$，$P, C, D$ 三点共线。

所以 $|PA|^2=|DA|^2+|DP|^2-2|DA|\cdot|DP|\cos\theta$，$|PB|^2=|DB|^2+|DP|^2+2|DB|\cdot|DP|\cos\theta$。

（I）$\lambda=1$ 时，因为 $2\overrightarrow{PD}+\lambda\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$，所以 $\overrightarrow{DP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{PC}$，所以

$$\frac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=\frac{|DA|^2+|DB|^2+2|DP|^2}{|PC|^2}=\frac{2|DC|^2+2|DP|^2}{|PC|^2}=5;$$

（II）因为 $2\overrightarrow{PD}+\lambda\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$，所以 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PC}=\dfrac{2+\lambda}{2}\overrightarrow{PC}$，所以

$$\frac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=\frac{|DA|^2+|DB|^2+2|DP|^2}{|PC|^2}=\frac{2\left(\dfrac{2+\lambda}{2}|PC|\right)^2+2\left(\dfrac{\lambda}{2}|PC|\right)^2}{|PC|^2}=(\lambda+1)^2+1\geqslant 1,$$

当 $\lambda=-1$ 时，上式等号成立。 □

说明：1. 一般地，$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2}$。例 2.2.5 中可以利用这个结论计算数量积。

2. 本题也可以利用坐标法解。

六、利用三点共线的充要条件

三点共线的充要条件：O、A、B、C 是平面内不同的四个点，则 A、B、C 共线的充要条件是，存在唯一的实数 t，使得 $\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{OB}+(1-t)\overrightarrow{OC}$。(证明从略)

说明：1. 充要条件中 t 满足的关系为 $\overrightarrow{CA}=t\overrightarrow{CB}$。

2. 特别地，若 A 为线段 BC 中点，则 $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$；若 A 为线段 BC 的三等分点（靠近 B），则 $\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$。

例 2.2.8. 如图 2.2.7，$\triangle ABC$ 中，点 E 为 AB 边的中点，点 F 为 AC 的三等分点（靠近点 A），BF 交 CE 于点 G，若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$，则 $x+y$ 等于 （ ）

（A）$\frac{2}{5}$ （B）$\frac{3}{5}$ （C）$\frac{4}{5}$ （D）$\frac{7}{5}$

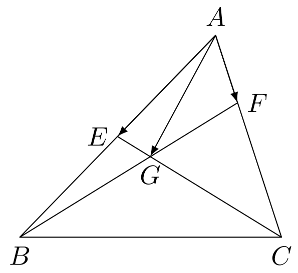


图 2.2.7

解 注意到 E、G、C 三点共线，B、G、F 三点共线，所以可以利用三点共线的充要条件解。

因为 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AE}+\frac{y}{3}\overrightarrow{AC}$，且 E、G、C 三点共线，所以 $x+\frac{y}{3}=1$。

同理 $\overrightarrow{AG}=\frac{x}{2}\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AF}$，所以 $\frac{x}{2}+y=1$。

解得 $x=\frac{4}{5}$，$y=\frac{3}{5}$，所以 $x+y=\frac{7}{5}$，选 D。 □

说明：1. 本题可以利用坐标法解，为使运算简便可以将 $\angle A$ 特殊化为直角。

2. 作 $FH\parallel AB$ 交 EC 于点 H，结合 $\triangle CFH\sim\triangle CAE$ 及 $\triangle FGH\sim\triangle BEG$ 可得 $\frac{FG}{BG}=\frac{2}{3}$，故 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AE}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}$，$x+y=\frac{7}{5}$。(辅助线的作法不唯一)

例 2.2.9. $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$\angle A=60^\circ$，$\angle A$ 的平分线 AD 交 BC 边于点 D，且 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AB}$，则 AD 的长为________。

解 因为 B,C,D 三点共线，所以 $\frac{1}{3}+\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$，故点 D 为线段 BC 的三等分点（靠近 B）。

由角平分线定理得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$，所以 $AC=6$。

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=9$，所以

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{\left(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}=2\sqrt{3}。$$ □

说明：1. 解题中经常会利用三点共线的充要条件，把未知向量表示为已知向量，这个结论需要大家熟练掌握。

2. 例 2.2.5中设 AO 交 BC 于点 F，也可以根据 F,B,C 三点共线，利用三点共线的充要条件解。

七、利用平均值不等式或函数方法

涉及到与向量有关的最值或取值范围时，通常利用平均值不等式或函数的方法解。

例 2.2.10. 如图 2.2.8，平面四边形 $ABCD$ 中，$BC=CD=1$，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最小值为 （　）

（A）$-4+\sqrt{2}$　　（B）$-3+\sqrt{2}$　　（C）$-4+2\sqrt{2}$　　（D）$-3+2\sqrt{2}$

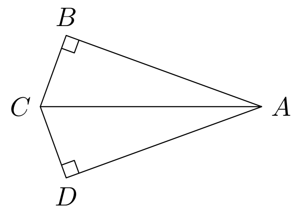


图 2.2.8

解 设 $\angle BAC=\theta$，$AB=x$，则 $\cos\theta=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，故

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos 2\theta=x^2\left(2\cos^2\theta-1\right)=x^2\left(2\cdot\frac{x^2}{x^2+1}-1\right)=\frac{x^4-x^2}{x^2+1},$$

令 $t=x^2+1>1$，则 $x^2=t-1$，故

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{(t-1)^2-(t-1)}{t}=t+\frac{2}{t}-3\geqslant -3+2\sqrt{2},$$

当且仅当 $t=\sqrt{2}$，即 $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时等号成立。选 D。 □

说明：本题也可以利用导数的方法求最小值。

以上七种方法是解决与平面图形有关的平面向量问题的常用方法，有些题目可能会综合用到几种不同的方法，要注意这几种方法的灵活应用。

练习题

1.（2013 天津理）在 $\square ABCD$ 中，$AD=1$，$\angle BAD=60^\circ$，E 为 CD 的中点。若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$，则 AB 的长为________。

2.（2013 江苏）设 D，E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，BC 上的点，$AD=\dfrac{1}{2}AB$，$BE=\dfrac{2}{3}BC$。若 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$（$\lambda_1$，$\lambda_2$ 为实数），则 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值为________。

3. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{OB}$，则 $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 的面积的比值为 （　）

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）1　　（D）$\dfrac{4}{3}$

4. 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c，重心为 G，则 $\left|\overrightarrow{GA}\right|^2+\left|\overrightarrow{GB}\right|^2+\left|\overrightarrow{GC}\right|^2=$________。

5.（2013 南京一模）如图 2.2.9，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BC=2$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EB}$。若 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{2}$，则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=$________。

6.（2013 耀华一模）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=\sqrt{3}$，P 为矩形内一点，且 $AP=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$（$\lambda, \mu\in\mathbb{R}$），则 $\lambda+\sqrt{3}\mu$ 的最大值为 （　）

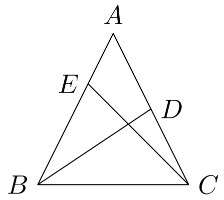


图 2.2.9

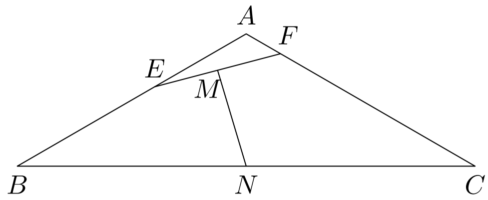


图 2.2.10

（A）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　（B）$\dfrac{3}{2}$　（C）$\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$　（D）$\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}$

7.（2013 徐州质检一）如图 2.2.10，在等腰 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC=1$，$A=120^\circ$，E, F 分别是 AB, AC 上的点，且 $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AC}$，其中 $m, n\in(0,1)$，若 EF, BC 的中点为 M, N，且 $m+4n=1$，则 $\left|\overrightarrow{MN}\right|$ 的最小值为________。

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$BE$ 与 CD 交于点 F，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$，vvb 表示 $\overrightarrow{AF}$。

9.（2013 黑龙江二模 16）向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ 满足：$|\vec{a}|=1$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$，$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 $\dfrac{1}{2}$，$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$，$\left|\vec{d}-\vec{c}\right|=1$，则 $\left|\vec{d}\right|$ 的最大值是________。

练习题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	A	$\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$	$-\frac{4}{3}$	A	$\frac{\sqrt{7}}{7}$	$\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$

关于这些练习题的更多讨论参见 `http://bbs.pep.com.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=2868074`。

2.3 一道构成三角形概率题的错解——郭子伟

前些天在人教论坛上看到这样一道题：

例 2.3.1. 将长度为 1 的木棍随机地折成两段[1]，对较长的一段再随机折成两段，求所得的三段小木棍能构成三角形的概率 P。

据说这是 2013 年全国高中数学联赛河南预赛高一试题里出现的题目，经网上搜索，确实为该试题中某大题里的第一问。当时在论坛上以及网上流传的参考答案中，对本题的解答都是用了平面区域的面积比来计算，得到结果是 $\frac{1}{3}$。实际上这是错误的，下面引用论坛上某网友提供的过程：

错解 设第一次折断后，较短的一段长为 x，则 $0<x<\frac{1}{2}$。
第二次折断后，所得两段长记作 y、z，则 $y+z=1-x$，$z=1-x-y>0$，知 $0<x+y<1$。
由组成三角形的条件 $x+y>z$ 且 $y+z>x$ 且 $z+x>y$ 得，$0<x<\frac{1}{2}$，$0<y<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x+y$。

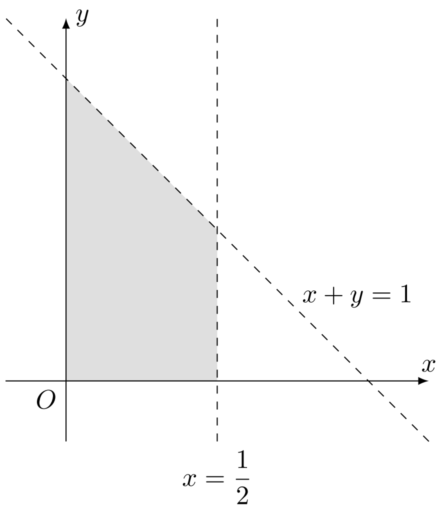


图 2.3.1

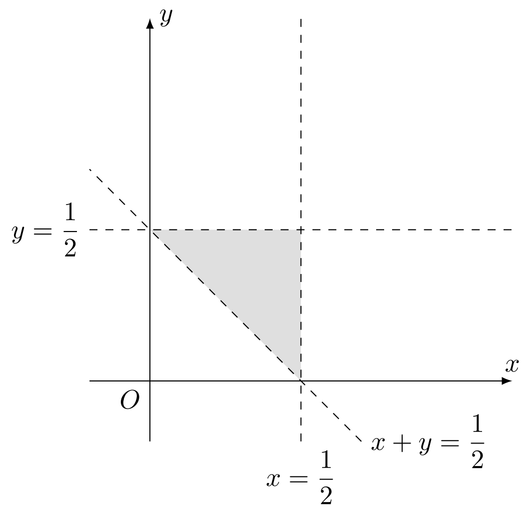


图 2.3.2

可行域是 $0<x<\frac{1}{2}$ 且 $0<x+y<1$，是如图 2.3.1 所示的梯形，面积为 $S=\frac{3}{8}$；组成三角形的条件是 $0<x<\frac{1}{2}$，$0<y<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x+y$，其区域是如图 2.3.2 所示的三角形，面积为 $s=\frac{1}{8}$，故

$$P=\frac{s}{S}=\frac{1}{3}。$$ □

这个解法初看上去完全没问题，那到底错在哪里呢？

实际上，这个解法由前面的推理直到计算两个区域的面积都是没错的，错只错在最后一步 $P=\frac{s}{S}$，这是因为解法中所给出的随机变量 (x,y) 在可行域内并不是均匀分布的。

为了让大家容易理解，这里我不打算用很严格的数学语言来证明这一点，而是用较通俗的语言来解释。

我们先不管它是否构成三角形，仅看基本事件。考虑随机变量 (x,y) 落在梯形中位线（即 $x=\frac{1}{4}$）两侧的概率，由于 x 仅由第一次折断所决定，所以显然 $x<\frac{1}{4}$ 和 $x>\frac{1}{4}$ 的概率相同，也就是说如果我们做大量的独立重复试验，那么在中位线两侧的点的数量是接近的，但是中位线两侧的面积显然不同，左侧大右侧小，因此右侧的点将会比左侧更密集（事实上显然越右越密），这足以说明分布的不均匀，便不能直接用面积比计算概率。

[1] 或者你会以为本文所述的错解是因为这句话的描述未够清楚而造成类似于“贝特朗奇论”那样的情形，但其实看下去就知道，这里的错解跟“贝特朗奇论”是完全不同的，该错解与后面给出的正确解法对这句话的理解并无不同。

我们还可以用软件来模拟本题中的过程来验证以上说法，这里我使用的是 Mathematica7 软件，运行如下语句：

```
n = 10000;
i = 1;
Do[{cut1 = RandomReal[];
  x[i] = Min[cut1, 1 - cut1];
  y[i] = RandomReal[1 - x[i]];
  i++}, {n}]
ListPlot[Table[{x[k], y[k]}, {k, 1, n}],
 PlotRange -> {{0, 1}, {0, 1}}, AspectRatio -> 1, PlotStyle -> Gray]
```

其中，`RandomReal[]` 表示产生 0 到 1 之间的实随机数，`RandomReal[x]` 表示产生 0 到 x 之间的实随机数，`Min[x,y]` 表示取 x, y 中较小者，后面的是绘图语句。

整个程序的意思就是做 10000 次独立重复试验，然后将它们确定的 (x, y) 都绘制出来。

刚才运行的一次得到图 2.3.3，仔细看就可以看出右边的点相对密集一点。

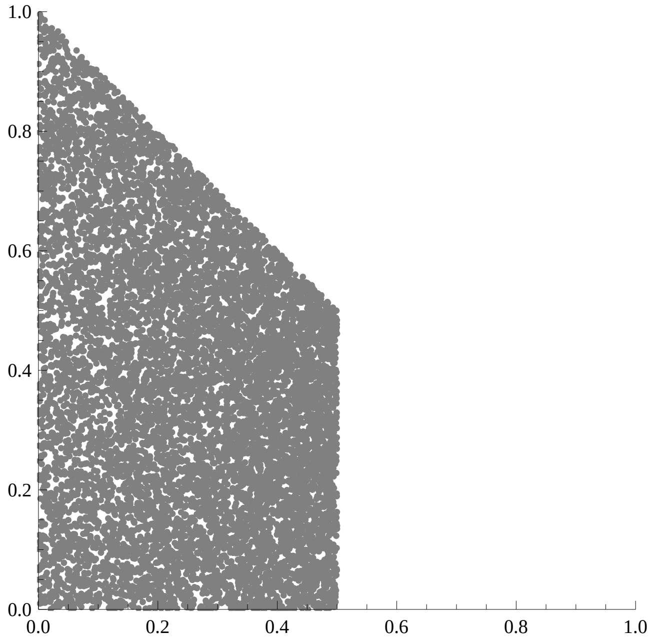


图 2.3.3

那正确的解法应该怎样呢？很遗憾，这道题恐怕难以找到普通高中生能接受的常规方法，这里我要用到积分来做，有能力的同学可以试着理解一下。

解 设第一次折断后较短的一条长为 x，则 $0 < x < \dfrac{1}{2}$，设第二次折断后的两段长为 y，$1 - x - y$，则由构成三角形易得 $\dfrac{1}{2} - x < y < \dfrac{1}{2}$，因此，在第一次折断后较短的一条长为 x 的前提下，第二次折断后三段小木棍能构成三角形的概率为 $\dfrac{x}{1-x}$，又因为在第一次折断时，较短的长度在区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 上的概率为 $2\,\mathrm{d}x$，因此所求的概率为

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} \cdot 2\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1 \approx 0.386294。$$

□

这道题出现高中竞赛，只能说明命题人根本没考虑过以上这些问题，原题的第二问更加直接地证实了这一点，因为里面出现了这样的一个式子：$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{P}{n}$，其中 P 为第一问所求的概率。

我们仍然可以用软件模拟实验来验证这个结果，还是使用 Mathematica7 软件，运行以下语句：

```
n = 200000;
Do[{
  i = 0;
  Do[{
     cut1 = RandomReal[];
     a = Min[cut1, 1 - cut1];
     b = RandomReal[1 - a];
     c = 1 - a - b;
     If[a + b > c && b + c > a && c + a > b, i++];
     }, {n}]
   Print[N[i/n]]
  }, {10}]
```

意思就是做 10 次实验，每次实验里面用 200000 次独立重复试验来得出数量比。

刚才运行的一次得到的结果如下：

0.384335

0.385715

0.38942

0.386055

0.3863

0.38483

0.38605

0.386445

0.38505

0.385085

可以看到与理论值是很接近的，如果增大试验数量将会更接近，当然运行时间也更长。

如果你有 Mathematica 软件也可以自己运行一下上面列出的语句看看结果如何，语句里用到的命令很简单，我就不解释太多了，不懂的可以自己查看软件的帮助文档。

由本例可以看出，在几何概型的题目中，使用线段比、面积比等等的方法计算概率时得多留一个心眼，就是注意均匀分布的问题。然而，如何判断分布是否均匀或许需要对概率理论有更多的认识才行，所以命题者在命制概率题时最好量力而为，尽量避免类似的题在高中出现。

能力提升

3.1 一道不等式问题的证明与类比探究——程汉波、任后兵

2013 年《数学教学》第 2 期数学问题第 877 题为：

问题 3.1.1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\cos A\cos B}{\cos C}+\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}\geqslant\frac{3}{2}。$$

证法 1 由于

$$\begin{aligned}\frac{\cos A\cos B}{\cos C}&=\frac{\cos A\cos B}{-\cos(A+B)}\\&=\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B-\cos A\cos B}\\&=\frac{1}{\tan A\tan B-1}\\&=\frac{\tan C}{\tan A\tan B\tan C-\tan C}\\&=\frac{\tan C}{\tan A+\tan B},\end{aligned}$$

设 $x=\tan A,\ y=\tan B,\ z=\tan C$，则 $x,\ y,\ z>0$，于是原不等式等价于

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geqslant\frac{3}{2},$$

该式即为著名的 Nesbitt 不等式，容易证得。 □

证法 2 设 $x=\cot A,\ y=\cot B,\ z=\cot C$，则 $x,\ y,\ z>0$，且 $xy+yz+zx=1$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\cos A\cos B}{\cos C}&=\frac{\sqrt{1+\tan^2 C}}{\sqrt{1+\tan^2 A}\sqrt{1+\tan^2 B}}\\&=\frac{xy\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\\&=\frac{xy\sqrt{(z+x)(z+y)}}{z\sqrt{(x+y)(x+z)}\sqrt{(y+x)(y+z)}}\\&=\frac{xy}{zx+yz},\end{aligned}$$

故原不等式等价于证明

$$\frac{xy}{zx+yz}+\frac{yz}{xy+zx}+\frac{zx}{yz+xy}\geqslant\frac{3}{2},$$

该式也即为著名的 Nesbitt 不等式，容易证得。 □

证法 3 设 $a,\ b,\ c$ 分别为 $\triangle ABC$ 的三边长，由余弦定理知

$$\frac{\cos A\cos B}{\cos C}=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{2c^2(a^2+b^2-c^2)},$$

于是原不等式等价于证明

$$\sum\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{[(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)](a^2+b^2-c^2)}\geqslant\frac{3}{2},$$

设 $x=(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$, $y=(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)$, $z=(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$，易得 x, y, $z>0$，故原不等式等价于证明

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geqslant\frac{3}{2},$$

该式即为著名的 Nesbitt 不等式，容易证得。 □

证法 4 由重要三角恒等式 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$，故可设

$$\cos A=\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(z+x)}},\quad \cos B=\sqrt{\frac{yz}{(z+x)(x+y)}},\quad \cos C=\sqrt{\frac{zx}{(x+y)(y+z)}},$$

其中 x, y, $z>0$，于是原不等式等价于

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geqslant\frac{3}{2},$$

该式即为著名的 Nessbit 不等式，容易证得。 □

证法 5 在 $\triangle ABC$ 中有嵌入不等式：$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos A+2yz\cos B+2zx\cos C$，其中 x, y, z 是任意实数。令 $xy=\cos A$, $yz=\cos B$, $zx=\cos C$，则

$$\frac{\cos A\cos B}{\cos C}+\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}\geqslant 2(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C),$$

又由于 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$，且 $\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$，故

$$\frac{\cos A\cos B}{\cos C}+\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}\geqslant\frac{3}{2},$$

得证。 □

证法 1、2、3、4 从不同的角度出发，最终殊途同归，也揭示了该数学问题的背景就是著名的 Nesbitt 不等式，证法 5 联想到嵌入不等式，得到比原来更强的结果，着实美妙。

至此，对于该题的解答已相对丰满，但伟大数学家、教育家波利亚曾告诉我们：没有任何一道题可以解决的十全十美，总剩下一些工作要做，经过充分的探讨总结，总会有点滴的发现。

因而笔者顺势对该题进行了类比探究：若将该题中余弦函数换为其他三角函数，会得到怎么样的不等式呢？以下笔者以问题的形式呈现探究得到的成果。

问题 3.1.2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin C}+\frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin B}\geqslant\frac{5}{2}。$$

证明 由于

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin C}=\frac{\sin A\sin B}{\sin(A+B)}=\frac{\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}=\frac{1}{\cot A+\cot B},$$

设 $x=\cot A$, $y=\cot B$, $z=\cot C$，则 x, y, $z>0$，且 $xy+yz+zx=1$，故原不等式等价于

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geqslant\frac{5}{2}。$$

该代数不等式即为 2008 年全国高中数学联赛江西省预赛第 14 题，具体证明及研究见《数学教学》的文 [1] 和文 [2]，在此不予赘述。 □

编者注：取不了等号。

问题 3.1.3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\sin A\sin B}{\cos C}+\frac{\sin B\sin C}{\cos A}+\frac{\sin C\sin A}{\cos B}\geqslant\frac{9}{2}。$$

证明 由于

$$\frac{\sin A\sin B}{\cos C}=\frac{\sin A\sin B}{-\cos(A+B)}=\frac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B-\cos A\cos B}=\frac{1}{1-\cot A\cot B},$$

设 $x=\cot A,\ y=\cot B,\ z=\cot C$，则 $x,\ y,\ z>0$，且 $xy+yz+zx=1$，故原不等式等价于

$$\frac{1}{x(y+z)}+\frac{1}{y(z+x)}+\frac{1}{z(x+y)}\geqslant\frac{9}{2},$$

由柯西不等式的分式变形形式知

$$\frac{1}{x(y+z)}+\frac{1}{y(z+x)}+\frac{1}{z(x+y)}\geqslant\frac{(1+1+1)^2}{2(xy+yz+zx)}=\frac{9}{2},$$

得证。 □

问题 3.1.4. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\cos A\cos B}{\sin C}+\frac{\cos B\cos C}{\sin A}+\frac{\cos C\cos A}{\sin B}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

证明 由于

$$\frac{\cos A\cos B}{\sin C}=\frac{\cos A\cos B}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\cos B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}=\frac{\cot A\cot B}{\cot A+\cot B},$$

设 $x=\cot A,\ y=\cot B,\ z=\cot C$，则 $x,\ y,\ z>0$，且 $xy+yz+zx=1$，故原不等式等价于

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2},$$

由均值不等式知

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}\leqslant\frac{xy}{2\sqrt{xy}}+\frac{yz}{2\sqrt{yz}}+\frac{zx}{2\sqrt{zx}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故原不等式得证。 □

注：对于问题 3.1.3、问题 3.1.4，转化为代数不等式后，笔者最初给出了 p-q-r 证法，比较繁琐，后在网友“kuing”的提示下得到以上简洁漂亮的证法，在此致谢。

问题 3.1.5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\cos A\sin B}{\cos C}+\frac{\cos B\sin C}{\cos A}+\frac{\cos C\sin A}{\cos B}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}。$$

证明 由于

$$\frac{\cos A\sin B}{\cos C}=\frac{\cos A\sin B}{-\cos(A+B)}=\frac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B-\cos A\cos B}=\frac{\cot A}{1-\cot A\cot B},$$

设 $x=\cot A,\ y=\cot B,\ z=\cot C$，则 $x,\ y,\ z>0$，且 $xy+yz+zx=1$，故原不等式等价于

$$\frac{x}{z(x+y)}+\frac{y}{x(y+z)}+\frac{z}{y(z+x)}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}。$$

由 $xy+yz+zx=1$ 以及 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}
\sum\frac{x}{z(x+y)}&=\sum\frac{x\sum xy}{z(x+y)}\\
&=\sum\frac{x(xy)}{z(x+y)}+\sum\frac{x(yz+zx)}{z(x+y)}\\
&=\sum\frac{x^2y}{z(x+y)}+\sum x\\
&=\frac{1}{\sum y\sum xy(yz+zx)}\cdot\sum\frac{x^2y}{z(x+y)}\sum y\sum xy(yz+zx)+\sum x\\
&\geqslant\frac{1}{\sum y\sum xy(yz+zx)}\cdot\left(\sum xy\right)^3+\sum x,
\end{aligned}$$

由于 $(xy+yz+zx)^2\geqslant 3xyz(x+y+z)$，所以 $\sum xy(yz+zx)\leqslant\frac{2}{3}\left(\sum xy\right)^2$，于是

$$\frac{\left(\sum xy\right)^3}{\sum y\sum xy(yz+zx)}+\sum x\geqslant\frac{\left(\sum xy\right)^3}{\frac{2}{3}\left(\sum xy\right)^2\sum x}+\sum x=\frac{3}{2\sum x}+\sum x,$$

又由于 $\sum x\geqslant\sqrt{3\sum xy}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{3}{2\sum x}+\sum x\geqslant\frac{3}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，当 $x=y=z$，即 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时等号成立，原不等式得证。 □

注：1. 由轮换对称性，类似地，在锐角 $\triangle ABC$ 中还有

$$\frac{\sin A\cos B}{\cos C}+\frac{\sin B\cos C}{\cos A}+\frac{\sin C\cos A}{\cos B}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}。$$

2. 上述证法得到了网友“天书”的提示，在此致谢，他还给出了配凑均值不等式的证法。

3. 该不等式曾在“悠闲数学娱乐论坛”里发帖引起讨论，网友“pxchg1200”给出了柯西不等式证法，参见 `http://kkkkuingggg.haotui.com/viewthread.php?tid=1391&page=1#pid9367`。

编者注：还可以这样证，在得到 $\sum\frac{x}{z(x+y)}=\sum\frac{x^2y}{z(x+y)}+\sum x$ 后，记 $p=x+y+z$，则由柯西不等式、均值不等式以及已知不等式 $xyz+x^2y+y^2z+z^2x\leqslant\frac{4}{27}p^3$，得到

$$\begin{aligned}
\sum\frac{x^2y}{z(x+y)}+\sum x&\geqslant\frac{\left(\sum yz\right)^2}{\sum yz(x+y)}+\sum x\\
&=\frac{1}{2xyz+xyz+\sum y^2z}+\sum x\\
&\geqslant\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{9}+\frac{4p^3}{27}}+p\\
&=\frac{27}{6\sqrt{3}+4p^3}+p,
\end{aligned}$$

而

$$\frac{27}{6\sqrt{3}+4p^3}+p-\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{p\left(p-\sqrt{3}\right)^2\left(2p+\sqrt{3}\right)}{3\sqrt{3}+2p^3}\geqslant 0,$$

故原不等式得证。

问题 3.1.6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$1<\frac{\cos A\sin B}{\sin C}+\frac{\cos B\sin C}{\sin A}+\frac{\cos C\sin A}{\sin B}<2。$$

证明 由于

$$\frac{\cos A\sin B}{\sin C}=\frac{\cos A\sin B}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}=\frac{\cot A}{\cot A+\cot B},$$

设 $x=\cot A,\ y=\cot B,\ z=\cot C$，则 $x,\ y,\ z>0$，且 $xy+yz+zx=1$，故原不等式等价于

$$1<\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}<2,$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}&>\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1,\\ \frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}&<\frac{x+z}{x+y+z}+\frac{y+x}{x+y+z}+\frac{z+y}{x+y+z}=2,\end{aligned}$$

故原不等式得证。

又当 $x=y^2\to 0,\ z=\dfrac{1-y^3}{y+y^2}$ 时，有 $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}\to 0+0+1=1$；当 $x=y\to 0,\ z=\dfrac{1-x^2}{2x}$ 时，有 $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}\to\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1=2$。因此原不等式中左右两端常数分别为 $\dfrac{\cos A\sin B}{\sin C}+\dfrac{\cos B\sin C}{\sin A}+\dfrac{\cos C\sin A}{\sin B}$ 的下确界和上确界，不能再进行缩小。 □

注：由轮换对称性，类似地，在锐角 $\triangle ABC$ 中还有

$$1<\frac{\sin A\cos B}{\sin C}+\frac{\sin B\cos C}{\sin A}+\frac{\sin C\cos A}{\sin B}<2。$$

问题 3.1.7. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\tan A\tan B}{\tan C}+\frac{\tan B\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C\tan A}{\tan B}\geqslant 3\sqrt{3}。$$

证明

$$\begin{aligned}&\frac{\tan A\tan B}{\tan C}+\frac{\tan B\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C\tan A}{\tan B}\\ &\geqslant 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\\ &=3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\cdot\sqrt{\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A}\\ &\geqslant 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{\cot^2 A\cot^2 B\cot^2 C}}\\ &=3\sqrt{3},\end{aligned}$$

当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时等号成立，得证。 □

问题 3.1.8. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\cot A\cot B}{\cot C}+\frac{\cot B\cot C}{\cot A}+\frac{\cot C\cot A}{\cot B}\geqslant\sqrt{3}。$$

证明

$$\begin{aligned}&\frac{\cot A\cot B}{\cot C}+\frac{\cot B\cot C}{\cot A}+\frac{\cot C\cot A}{\cot B}\\ =&\frac{\cot^2 A\cot^2 B+\cot^2 B\cot^2 C+\cot^2 C\cot^2 A}{\cot A\cot B\cot C}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \frac{\cot A\cot^2 B\cot C+\cot A\cot B\cot^2 C+\cot^2 A\cot B\cot C}{\cot A\cot B\cot C}\\
&= \cot A+\cot B+\cot C\\
&\geqslant \sqrt{3\left(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A\right)}\\
&= \sqrt{3},
\end{aligned}
$$

当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时等号成立，得证。 $\square$

佛曾经曰：一花一世界，一树一菩提。智利当代著名诗人聂鲁达的诗歌《统一》中这样写道：一粒沙里藏着一个世界，一滴水里拥有一片海洋。生活告诉我们：一件很小的东西里也能隐藏着很深的道理；一件很平凡的事情里也能寓意着大智慧。这是世人对人生的理解，人生如此，数学亦应如此，数学解题更应如此！所以我对解题的理解是：一题一世界，一法一菩提。从一道小题之中，你可以见识数学思想方法的深邃，你可以领略某些巧解妙招的精妙，你可以窥见命题人那火热的思考，你可以看到一片天，甚至是整个世界。

一道好题，犹如一块璀璨的碧玉，折射出人类智慧的光辉；一种妙解，犹如一弯绚丽的彩虹，撑起一片湛蓝的天空。类似的三角不等式问题还有很多（如升高次数、变角为半角或倍角等），而且每一个问题证法都不唯一，给我们留下了无限的思考空间，在此留给有兴趣的读者探究。

参考文献

[1] 李建潮. 一道竞赛题之我见 [J]. 数学教学. 2010（7）: 25, 28.

[2] 蒋明斌. 一道竞赛题的证法再探 [J]. 数学教学. 2011（2）: 27-28.

3.2 一个优美连根式不等式的推广——李明

文 [1] 给出了如下一个优美连根式不等式：

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}<2, \tag{3.2.1}$$

其中，$n\in\mathbb{N}^+$。

笔者发现式 (3.2.1) 可从开方次数角度推广成如下不等式：

$$\sqrt[t]{1+\sqrt[t]{2+\sqrt[t]{3+\cdots+\sqrt[t]{n}}}}<\sqrt[t-1]{2}, \tag{3.2.2}$$

其中，$n\in\mathbb{N}^+, t\in\mathbb{R}, t\geqslant 2$。

证明式 (3.2.2) 需借助如下引理（文 [2]）。

引理 3.2.1 (加权幂平均单调性). 设 $a>0, b>0, 0<\mu<1, p\geqslant q>0$，则有

$$\left(\mu a^{\frac{1}{p}}+(1-\mu)b^{\frac{1}{p}}\right)^p\leqslant\left(\mu a^{\frac{1}{q}}+(1-\mu)b^{\frac{1}{q}}\right)^q。$$

下面我们应用数学归纳法并结合上述引理来证明式 (3.2.2)。

证明 记 $x_k=\sqrt[t]{k+\sqrt[t]{(k+1)+\cdots+\sqrt[t]{n}}}$（$1\leqslant k\leqslant n$）。于是，$x_n=\sqrt[t]{n}<\sqrt[t-1]{n+1}$ 显然成立。

假设 $x_k<\sqrt[t-1]{k+1}$ 成立，其中 k 是区间 $[2,n]$ 上的某个整数，则

$$x_{k-1}=\sqrt[t]{(k-1)+x_k}<\sqrt[t]{(k-1)+\sqrt[t-1]{k+1}},$$

于是，欲证 $x_{k-1}<\sqrt[t-1]{k}$，只需证

$$\sqrt[t]{(k-1)+\sqrt[t-1]{k+1}}\leqslant\sqrt[t-1]{k}, \tag{3.2.3}$$

通过等价变形，有

$$\begin{aligned}
\text{式 (3.2.3)}\iff&(k-1)+(k+1)^{\frac{1}{t-1}}\leqslant k^{\frac{t}{t-1}}\\
\iff&(k-1)+(k+1)^{\frac{1}{t-1}}\leqslant k\cdot k^{\frac{1}{t-1}}\\
\iff&\frac{k-1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{t-1}}+\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{1}{t-1}}\leqslant 1\\
\iff&\left(\frac{k-1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{t-1}}+\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{1}{t-1}}\right)^{t-1}\leqslant 1,
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

因为 $t\geqslant 2$，由引理知

$$\left(\frac{k-1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{t-1}}+\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{1}{t-1}}\right)^{t-1}\leqslant\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}=\frac{2}{k},$$

又由假设中 k 的范围可得 $\dfrac{2}{k}\leqslant 1$，于是式 (3.2.4) 得证，即 $x_{k-1}<\sqrt[t-1]{k}$ 成立。

于是，由数学归纳法得 $x_1<\sqrt[t-1]{2}$ 成立，即式 (3.2.2) 得证。 □

顺便指出，在式 (3.2.2) 的基础上，我们立即可得，当 $n\in\mathbb{N}^+, n\geqslant 2$ 时，有如下有趣的不等式链：

$$\cdots<\sqrt[4]{2}<\sqrt[4]{1+\sqrt[4]{2+\cdots+\sqrt[4]{n}}}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2+\cdots+\sqrt[3]{n}}}<\sqrt{2}<\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}<2,$$

最后提出一个笔者未能解决的问题供读者深入研究，即：当 $1<t<2$ 时，式 (3.2.2) 是否仍能成立？

参考文献

[1] （波）史坦因豪斯 著, 庄亚栋 译.（初等数学小丛书）又一百个数学问题 [M]. 上海: 上海教育出版社, 1980:3.

[2] 匡继昌. 常用不等式（第四版）[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2010:74.

3.3 一道几何题引申出的一系列相关结论——文武光华数学工作室

文武光华数学工作室潘成华老师曾解答了如下的命题 3.3.1：

命题 3.3.1. 如图 3.3.1，四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC+\angle BDC=180^\circ$，$\angle ABD$、$\angle ACD$ 的角平分线交于点 G，E、F 分别为 BC、AD 的中点，求证：E、F、G 三点共线。

此题不难，潘老师给出了一个很好的三角解答。田开斌老师探究了此命题的本质。经过一番探索，理清了一系列与之相关的命题，下面一一叙述。最后再返回来给出命题 3.3.1 的解答。

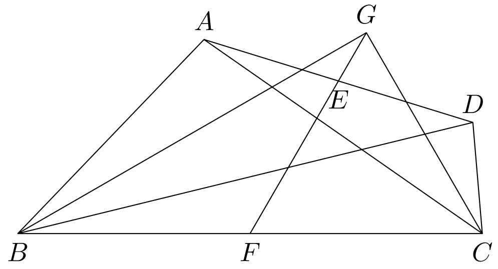


图 3.3.1

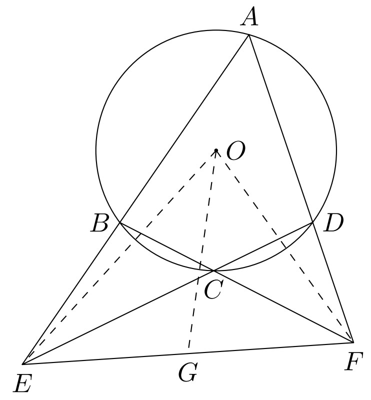


图 3.3.2

命题 3.3.2. 如图 3.3.2，$\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 外接圆，AB、DC 交于点 E，AD、BC 交于点 F，G 为 EF 中点，求证：G 关于 $\odot O$ 的幂等于 $\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2$。

证明 如图 3.3.2，连结 OE、OF、OG。设 $\odot O$ 半径为 R，则 E 关于 $\odot O$ 的幂为：OE^2-R^2，F 关于 $\odot O$ 的幂为：OF^2-R^2，G 关于 $\odot O$ 的幂为：OG^2-R^2。

由于[①]E、F 关于 $\odot O$ 为一组共轭点，所以 $EF^2=\left(OE^2-R^2\right)+\left(OF^2-R^2\right)\Longrightarrow OE^2+OF^2=EF^2+2R^2$。

又根据三角形中线长公式知：$2(OE^2+OF^2)=EF^2+4OG^2\Longrightarrow 2(EF^2+2R^2)=EF^2+4OG^2\Longrightarrow OG^2-R^2=\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2$。即 G 关于 $\odot O$ 的幂等于 $\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2$。 □

命题 3.3.3. 如图 3.3.3，$\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 外接圆，AB、DC 交于点 E，AD、BC 交于点 F，G 为 EF 中点，M、N 分别为 AC、BD 中点，根据牛顿定理[②]知 M、N、G 三点共线，求证：$GN\cdot GM=\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2$。

证明 如图 3.3.3，设 AC、BD 交于点 L，因为 G 在 L 关于 $\odot O$ 的极线上，所以 L 在 G 关于 $\odot O$ 的极线上。过 L 作 $LT\perp OG$ 于 T，则根据命题 3.3.2 知：$GT\cdot GO=G$ 关于 $\odot O$ 的幂 $=\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2$。

又根据垂径定理知 $OM\perp LM$、$ON\perp LN$，且 $OT\perp LT$，所以 O、T、N、L、M 五点共圆，所以 $GN\cdot GM=GT\cdot GO=\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2$。 □

命题 3.3.4. 如图 3.3.4，$\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 外接圆，AB、DC 交于点 E，AD、BC 交于点 F，G 为 EF 中点，M、N 分别为 AC、BD 中点，根据牛顿定理知 M、N、G 三点共线，直线 MN 分别交 BC、DA、CD、AB 于 H、I、J、K，求证：$GH\cdot GI=GJ\cdot GK=GN\cdot GM=\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2$。

①请参考配极定理及相关资料。

②完全四边形 $ABCDEF$ 中，L、M、N 分别为 AC、BD、EF 中点，则 L、M、N 三点共线。

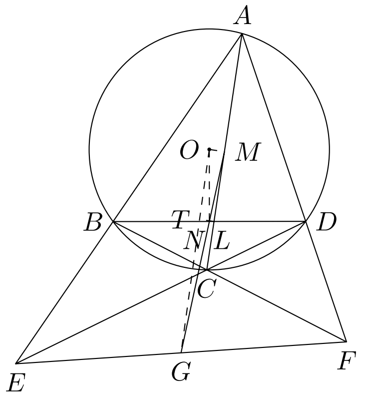


图 3.3.3

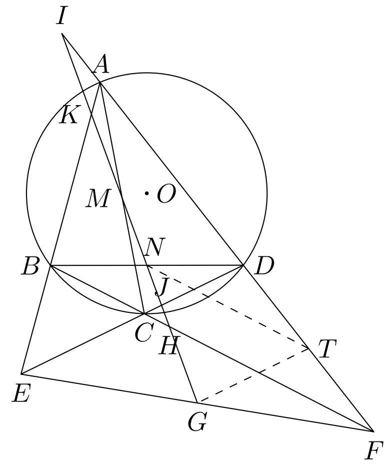


图 3.3.4

证明 命题 3.3.3 中已经证明了 $GN \cdot GM = \left(\frac{EF}{2}\right)^2$，此处不再赘述。下面证明：$GH \cdot GI = GJ \cdot GK = \left(\frac{EF}{2}\right)^2$。

如图 3.3.4，取 DF 中点为 T，连结 NT、GT，则 $\triangle JCH \sim \triangle GTN$。于是 $\angle GTN = \angle JCH = \angle EAF$。又 $\frac{TG}{TN} = \frac{DE}{BF} = \frac{DE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} \cdot \frac{AE}{AF} = \frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADC} \cdot \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAD} \cdot \frac{AE}{AF} = \frac{AE}{AF}$，所以 $\triangle GTN \sim \triangle AEF$。所以 $\triangle GHF = \triangle GNT = \triangle GFI$，所以 $GH \cdot GI = GF^2 = \left(\frac{EF}{2}\right)^2$。同理可证 $GJ \cdot GK = \left(\frac{EF}{2}\right)^2$。所以 $GH \cdot GI = GJ \cdot GK = GN \cdot GM = \left(\frac{EF}{2}\right)^2$。 □

命题 3.3.5. 如图 3.3.5，$\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 外接圆，AB、DC 交于点 E，AD、BC 交于点 F，G 为 EF 中点，M、N 分别为 AC、BD 中点，根据牛顿定理知 M、N、G 三点共线，直线 MN 分别交 BC、DA、CD、AB 于 H、I、J、K，以 EF 为直径作 $\odot G$ 交 MN 于 P，求证：EP 为 $\angle HEI$、$\angle JEK$、$\angle NEM$ 的角平分线，FP 为 $\angle HFI$、$\angle JFK$、$\angle NFM$ 的角平分线。

证明 如图 3.3.5，延长 PG 交 $\odot G$ 于 Q，则 $PE \perp QE$，且 G 为 PQ 中点。根据命题 3.3.4 结论知：$GH \cdot GI = GJ \cdot GK = GN \cdot GM = \left(\frac{EF}{2}\right)^2$，所以 I、H、P、Q 是一组调和点列，K、J、P、Q 是一组调和点列，M、N、P、Q 是一组调和点列。而 $\angle PEQ = \angle PFQ = 90°$，所以 EP 为 $\angle HEI$、$\angle JEK$、$\angle NEM$ 的角平分线，FP 为 $\angle HFI$、$\angle JFK$、$\angle NFM$ 的角平分线。 □

命题 3.3.6. 如图 3.3.6，$\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 外接圆，AB、DC 交于点 E，AD、BC 交于点 F，M、N 分别为 AC、BD 中点，$\angle AED$ 和 $\angle AFB$ 的角平分线交于点 P，求证：M、N、P 三点共线。

证明 根据命题 3.3.5 的结论知，P 为以 EF 为直径的圆与 MN 的交点，所以 M、N、P 共线，且 $EP \perp FP$。 □

下面我们返回来证明命题 3.3.1。

命题 3.3.1 的证明 如图 3.3.7，设 AC、BD 交于点 Q，BA、CD 交于点 P，连结 PQ，取其中点为 T。因为 $\angle BAC + \angle BDC = 180°$，所以 A、P、D、Q 四点共圆。根据命题 3.3.5 结论知 T、F、G 三点共线。又根据牛顿定理知 E、F、T 共线，所以 E、F、G 共线。 □

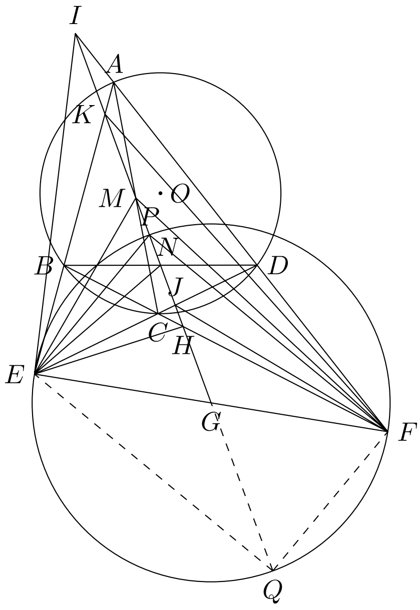


图 3.3.5

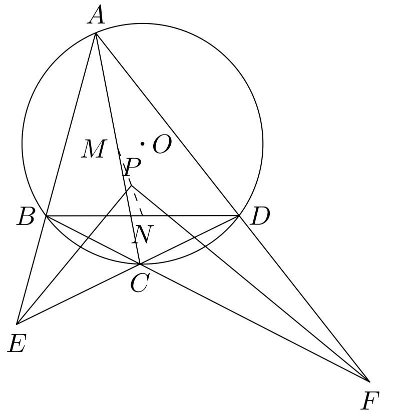


图 3.3.6

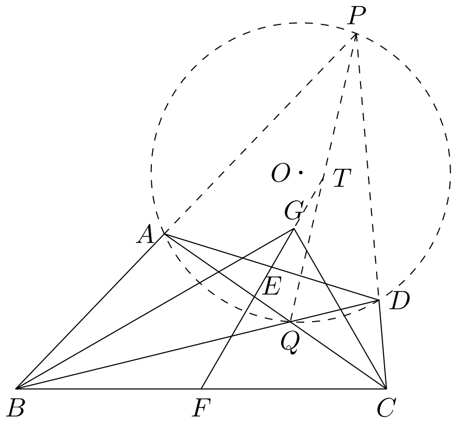


图 3.3.7

例 3.3.1. 如图 3.3.8，P 为 $\odot O$ 外一点，过 P 引 $\odot O$ 两条割线 PAB、PCD，E、F 分别为 BC、AD 中点，求证：$\angle BPE = \angle DPF$。

证明 根据命题 3.3.5 显然。事实上，$\triangle PBC \sim \triangle PDA$，所以 $\triangle PBE \sim \triangle PDF$。 □

例 3.3.2. 如图 3.3.9，$\odot O$ 内接四边形 $ABCD$ 中，BA、CD 交于点 G，M、N 分别为 BD、AC 中点，直线 MN 分别交 CB、AD 于 E、F，求证：$\angle EGB = \angle FGD$。

证明 根据命题 3.3.5，显然成立。 □

例 3.3.3. 如图 3.3.10，$\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 外接圆，AB、DC 交于点 E，AD、BC 交于点 F，G 为 EF 中点，M、N 分别为 AC、BD 中点，求证：$\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{EF}{2GM}$。

我们先证明

引理 3.3.1. 如图 3.3.11，完全四边形 $ABCDEF$ 中，M 为 AC 中点，N 为 EF 中点，求证：$S_{\text{四边形 }MBND} = S_{\triangle AEM} + S_{\triangle AFM}$。

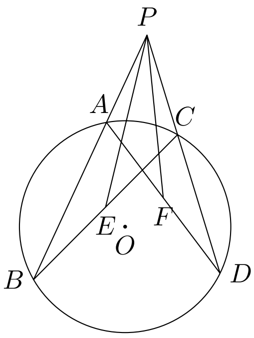


图 3.3.8

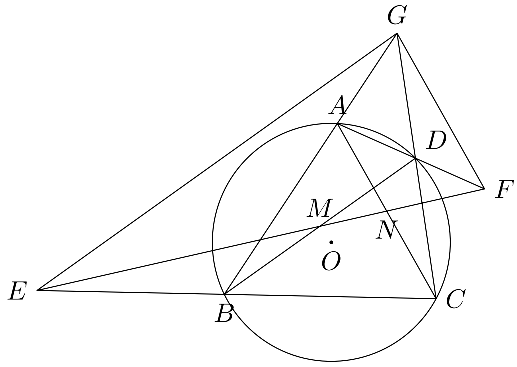


图 3.3.9

证明 因为 M 为 AC 中点，所以

$$S_{\text{四边形 }MBCD}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle ADM}, \tag{3.3.1}$$

如图 3.3.11，取 EC 中点为 P，FC 中点为 Q。则 $MP\parallel AE$，$NP\parallel CF$，所以 $S_{\triangle CBN}=S_{\triangle CBP}=S_{\triangle EBP}=S_{\triangle EBM}$，即

$$S_{\triangle CBN}=S_{\triangle EBM}, \tag{3.3.2}$$

同理可知：

$$S_{\triangle CDN}=S_{\triangle FDM}, \tag{3.3.3}$$

(3.3.1) + (3.3.2) + (3.3.3) 知 $S_{\text{四边形 }MBND}=S_{\triangle AEM}+S_{\triangle AFM}$。 □

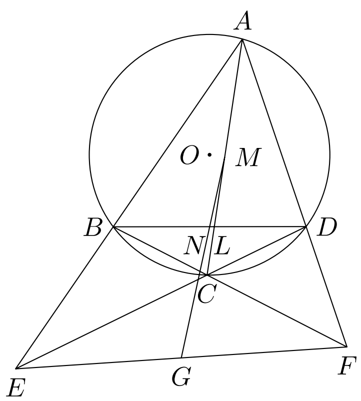


图 3.3.10

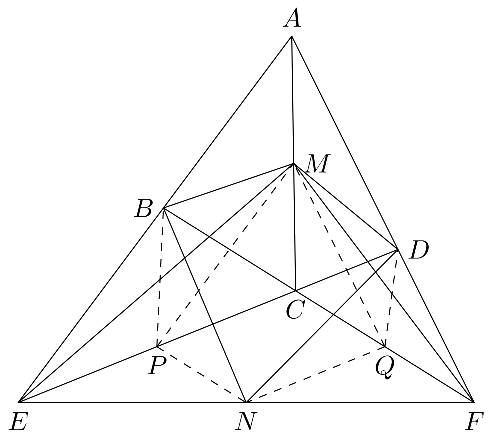


图 3.3.11

下面借助引理 3.3.1 证明例 3.3.3。

例 3.3.3 的证明 如图 3.3.12，设 AC、BD 交于点 L，则直线 EF 为 L 关于 $\odot O$ 的极线，所以 $OL\perp EF$，设 OL 交 EF 于 S。延长 AL 交 EF 于 R，则 O、M、S、R 四点共圆，于是知 $\angle ARF=\angle MOL=\angle MNL$。而 $S_{\text{四边形 }MBGD}=\dfrac{1}{2}\cdot MG\cdot BD\cdot\sin\angle MNL$，$S_{\triangle AEM}+S_{\triangle AFM}=\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot EF\cdot\sin\angle ARF=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot\dfrac{EF}{2}\cdot\sin\angle ARF$，根据引理 3.3.1 知，$\dfrac{1}{2}\cdot MG\cdot BD\cdot\sin\angle MNL=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot\dfrac{EF}{2}\cdot\sin\angle ARF\Longrightarrow\dfrac{BD}{AC}=\dfrac{EF}{2GM}$。 □

例 3.3.4 (广东陈栋老师题目). 如图 3.3.13，$\odot O$ 与 $\odot P$ 外切于点 Q，L 为两圆的外位似中心，过 L 的割线 AB、CD 交两圆于逆对应点 A、B 和 C、D，M、N 分别为 BC、AD 中点，求证：$\dfrac{QM}{QN}=\dfrac{BC}{AD}$。

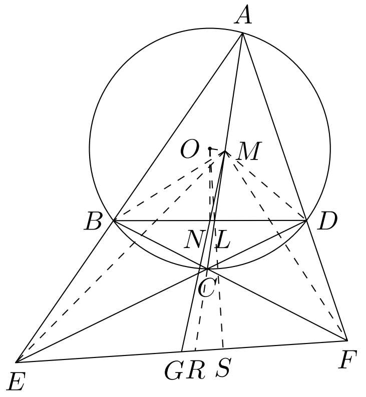


图 3.3.12

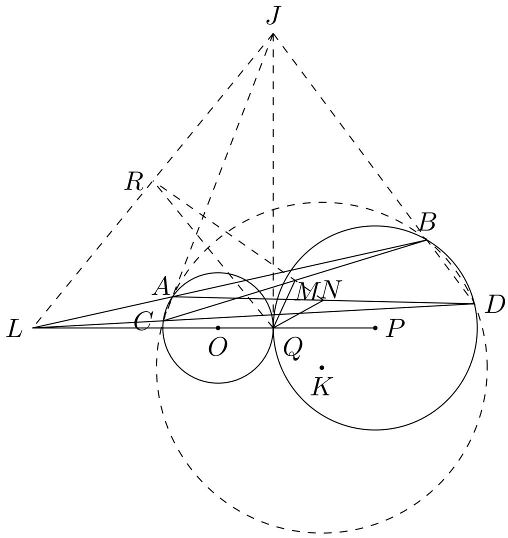


图 3.3.13

证明 易知 $\odot P$ 与 $\odot O$ 以 L 为反演中心，以 LQ^2 为反演幂，互为反形，所以 $LA \cdot LB = LC \cdot LD = LQ^2$。于是知 A、C、D、B 四点共圆，设为 $\odot K$。延长 CA、DB 交于点 J，根据蒙日定理[①]知 JQ 为 $\odot O$ 与 $\odot P$ 的内公切线，所以 $JQ \perp LP$。取 LJ 中点为 R，根据命题 3.3.3 知：$RM \cdot RN = \left(\frac{LJ}{2}\right)^2 = RQ^2$，所以 $\triangle MRQ \sim \triangle QRN$，所以 $\frac{QM}{QN} = \frac{RQ}{RN} = \frac{LJ}{2RN}$。又根例 3.3.3 的结论知 $\frac{LJ}{2RN} = \frac{BC}{AD}$，所以 $\frac{QM}{QN} = \frac{BC}{AD}$。 □

[①] 三圆根轴共点或互相平行。

3.4 浅谈“作差有理化放缩法”证明根式不等式——郭子伟

玩不等式多了就知道，从总体上讲，根式不等式比有理不等式要难，特别是多个根式的情形往往让人难以下手。处理根式不等式的一种常规的想法是如何通过有效的放缩将根式放缩成有理式①，而讲到放缩法，均值、柯西等等的方法技巧实在太多了，很难总结，巧妙之处往往无法用言语来表达。本文仅是试图对其中的一种方法——“作差有理化放缩法②”作一点浅谈。

先提醒一句，这个方法不算很常用，甚至可以说比较难用（看完后面的例子便知），故此通常是在常规方法不凑效时才值得一试，成功率并不高。

为方便叙述，下面以 A、B 等字母表示有理式。这里仅以二次根式为例，对于 $\sqrt{A}$，将其与 B 作差然后分子有理化，即

$$\sqrt{A}-B=\frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B},$$

当 $A-B^2$ 恒非负或恒非正时，视实际情况来将分母放缩成有理式，从而得到 $\sqrt{A}$ 的有理估计式。

这样做的好处在哪里？其实这样是为了减少误差，得到强的估计式。因为我们可以选择一个合适的 B，使 $A-B^2$ 是一个比较小的量，这样在分母放缩的时候产生的误差就小，得到的估计式就强。

比如说，当 $a,b\geqslant 0$ 且 $a^2+b^2\neq 0$ 时，我们尝试对 $\sqrt{a^2+b^2}$ 作上界估计。

先来简单点的，由均值有

$$\sqrt{a^2+b^2}-\frac{a+b}{\sqrt{2}}=\frac{\dfrac{(a-b)^2}{2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}}\leqslant\frac{\dfrac{(a-b)^2}{2}}{\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}}=\frac{(a-b)^2}{2\sqrt{2}(a+b)},$$

于是得到

$$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}+\frac{(a-b)^2}{2\sqrt{2}(a+b)}=\frac{3a^2+2ab+3b^2}{2\sqrt{2}(a+b)},\tag{3.4.1}$$

式 (3.4.1) 就是一个很好的上界估计，形式好，分母简单。

又或者这样

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2}-\left(a+b-\frac{(4-2\sqrt{2})ab}{a+b}\right)&=\frac{\dfrac{2\big(3-2\sqrt{2}\big)ab(a-b)^2}{(a+b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+a+b-\dfrac{(4-2\sqrt{2})ab}{a+b}}\\&\leqslant\frac{\dfrac{2\big(3-2\sqrt{2}\big)ab(a-b)^2}{(a+b)^2}}{\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}+a+b-\dfrac{\big(4-2\sqrt{2}\big)ab}{a+b}},\end{aligned}$$

化简整理，最终就可以得到

$$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\frac{(a+b)\Big(a^2+2\big(3-2\sqrt{2}\big)ab+b^2\Big)}{a^2+2\big(4\sqrt{2}-5\big)ab+b^2},\tag{3.4.2}$$

式 (3.4.2) 就是一个很强的上界估计了，比 (3.4.1) 强，而且 $a=b$ 或 $ab=0$ 都能取等号。但是在形式上，式 (3.4.2) 显然是更复杂的，所以在实际应用中，式 (3.4.1) 会更实用些。

我们甚至可以在分母里再作类似的有理化再放缩，即

$$\sqrt{A}-B=\frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}=\frac{A-B^2}{\dfrac{A-C^2}{\sqrt{A}+C}+B+C}=\frac{A-B^2}{\dfrac{A-C^2}{\dfrac{A-D^2}{\sqrt{A}+D}+C+D}+B+C}=\cdots,$$

---

①这里的“有理”仅针对变量，而不必考虑变量的系数，也就是说 $\sqrt{2}a$ 这里也认为是有理式。

②这名字其实是我临时作的。

这样一直下去，越到后面放缩产生的误差将会越小，但是代价就是放缩得到的式子越来越复杂，所以一般来说不必这样做。

显然，这方法的关键就是如何找到好的 B，以及有理化后分母如何放缩。这其实也是最讲技巧的地方，得根据实际情况而定，这里只能讲讲我个人的一点经验。

首先必须先注意不等式的取等条件，否则误差再小也没用，通常可以借助均值、柯西之类的不等式来寻找近似的量，慢慢调整。其次是注意形式，尽可能让放缩后的式子简洁，这样才能方便之后的证明。如果 B 找得好，使得分子够小，那么分母放缩时方可大胆舍项添项，让分式简单、对称，甚至让其轮换求和时能直接合起来。此外，有时先将不等式两边平方再尝试也是个不错的选择。

好了，讲更多大概还是不及来几个例子实际些，以下例子中的证法均由作者独立给出，如有雷同，实属巧合。在证明过程中，有些地方可能会用到一些经典不等式，为节省篇幅，这里都将不加证明地使用它们。

例 3.4.1. 已知 $a,\,b,\,c\in\mathbb{R}^+$ 且 $a+b+c=3$，求证

$$a\sqrt{a+b}+b\sqrt{b+c}+c\sqrt{c+a}\geqslant 3\sqrt{2}。$$

证法一 两边平方并齐次化，有

$$\sum a\sqrt{a+b}\geqslant 3\sqrt{2}\iff\sum a^2(a+b)+2\sum ab\sqrt{(a+b)(b+c)}\geqslant\frac{2}{3}\left(\sum a\right)^3，\tag{3.4.3}$$

由

$$2\sqrt{(a+b)(b+c)}-(a+2b+c)=-\frac{(a-c)^2}{2\sqrt{(a+b)(b+c)}+a+2b+c}\geqslant-\frac{(a-c)^2}{a+b+c},$$

得到

$$2\sqrt{(a+b)(b+c)}\geqslant b+\sum a-\frac{(a-c)^2}{\sum a},$$

所以要证式 (3.4.3) 只要证

$$\sum a^2(a+b)+\sum ab\left(b+\sum a-\frac{(a-c)^2}{\sum a}\right)\geqslant\frac{2}{3}\left(\sum a\right)^3，\tag{3.4.4}$$

整理，有

$$\begin{aligned}\text{式 (3.4.4)}&\iff\sum a^3+\sum a^2b+\sum ca^2+\sum ab\sum a-\frac{2}{3}\left(\sum a\right)^3\geqslant\frac{\sum ab(a-c)^2}{\sum a}\\&\iff\left(\sum a^2+\sum ab-\frac{2}{3}\left(\sum a\right)^2\right)\sum a\geqslant\frac{\sum ab(a-c)^2}{\sum a}\\&\iff\sum\left(\left(\sum a\right)^2-6ab\right)(a-c)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

记 $S_c=\left(\sum a\right)^2-6ab,\ S_a=\left(\sum a\right)^2-6bc,\ S_b=\left(\sum a\right)^2-6ca$，则

$$S_a+S_b+S_c=3\left(\sum a\right)^2-6\sum ab=3\sum a^2>0,$$

以及由 Schür 不等式有

$$\begin{aligned}S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a&=3\left(\sum a\right)^4-12\sum ab\left(\sum a\right)^2+36abc\sum a\\&=3\left(\sum a\right)\left(\left(\sum a\right)^3-4\sum ab\sum a+12abc\right)\\&\geqslant 9abc\sum a>0,\end{aligned}$$

由此可得 $\sum S_c(a-c)^2\geqslant 0$ 成立，即式 (3.4.4) 成立，从而原不等式得证。 □

证法二 仍然证式 (3.4.3)，由

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(a+b)(b+c)}-\left(b+\frac{2ca}{c+a}\right) &= \frac{(a+b)(b+c)-\left(b+\dfrac{2ca}{c+a}\right)^2}{\sqrt{(a+b)(b+c)}+b+\dfrac{2ca}{c+a}} \\
&= \frac{(a-c)^2(ab+bc+ca)}{(c+a)^2\sqrt{(a+b)(b+c)}+b(c+a)^2+2ca(c+a)} \\
&= \frac{(a-c)^2(ab+bc+ca)}{(c+a)^2\big(\sqrt{(a+b)(b+c)}-b\big)+2(ab+bc+ca)(c+a)} \\
&= \frac{(a-c)^2}{(c+a)^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(a+b)(b+c)}+b}+2(c+a)} \\
&\geqslant \frac{(a-c)^2}{(a+c)^2\cdot\dfrac{2}{b}+2(a+c)} \\
&= \frac{b(a-c)^2}{2(a+c)(a+b+c)},
\end{aligned}
$$

得到

$$
\sqrt{(a+b)(b+c)} \geqslant b+\frac{2ca}{c+a}+\frac{b(a-c)^2}{2(a+b+c)(a+c)} = b+\frac{4ca+ab+bc}{2(a+b+c)},
$$

所以要证式 (3.4.3) 只要证

$$
\sum a^2(a+b)+2\sum ab\left(b+\frac{4ca+ab+bc}{2(a+b+c)}\right)\geqslant \frac{2}{3}\left(\sum a\right)^3, \tag{3.4.5}
$$

去分母并展开整理，最终可将式 (3.4.5) 化为

$$
\sum a^4+\sum ab^3 \geqslant 2\sum a^3b,
$$

进一步配凑为

$$
\left(\sum a^2\right)^2-3\sum a^3b+\sum ab(a-b)^2 \geqslant 0,
$$

由 Vasc 不等式可知上式成立，从而式 (3.4.3) 成立，原不等式得证。 □

注 此例中，由于左边的次数是 $\dfrac{3}{2}$，所以得两边平方才能减去有理式。

在证法一中，$a+2b+c$ 是通过均值找出来的，最后用到的结论是 S.O.S 方法里面的结论之一：记 $S=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2$，若 $S_a+S_b+S_c\geqslant 0$ 且 $S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a\geqslant 0$，则 $S\geqslant 0$。这里将此结论简单证一下。若 $S_a+S_b, S_b+S_c, S_c+S_a$ 全为零，则必定 $S_a=S_b=S_c=0$，此时 $S=0$。若 S_a+S_b, S_b+S_c, S_c+S_a 不全为零，则必有其中之一为正的，否则与 $S_a+S_b+S_c\geqslant 0$ 矛盾。不妨设 $S_b+S_c>0$，配方得

$$
S=\frac{\big((S_b+S_c)a-bS_c-cS_b\big)^2+(S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a)(b-c)^2}{S_b+S_c}\geqslant 0。
$$

在证法二中，$b+\dfrac{2ca}{c+a}$ 是通过柯西再均值找出来的，过程中做了两次有理化，但这并不是因为我觉得不够精确，而是我发现第二次有理化刚好可以约掉 $ab+bc+ca$。可惜后面证式 (3.4.5) 时未发现更简单方法，展开的计算量稍大，而且还用到了 Vasc 不等式，所以我对证法二还不十分满意。

本题的其他证法参见：

`http://kkkkuingggg.haotui.com/thread-1119-1-1.html`

`http://www.aoshoo.com/bbs1/dispbbs.asp?boardid=14&Id=24794`

例 3.4.2. 已知 $a,\ b,\ c\geqslant 0,\ k\in[0,2]$，求证

$$\sum\sqrt{a^2+kab+b^2}\leqslant\sum a+\sqrt{\sum a^2+k\sum ab}。$$

证明 由对称性，不妨设 $a=\min\{a,b,c\}$，则

$$\sqrt{a^2+kab+b^2}-(a+b)=\frac{(k-2)ab}{\sqrt{a^2+kab+b^2}+a+b}\leqslant\frac{(k-2)ab}{2(a+b)}\leqslant\frac{(k-2)a}{4},$$

得到

$$\sqrt{a^2+kab+b^2}\leqslant\frac{k+2}{4}a+b,$$

同理有 $\sqrt{a^2+kac+c^2}\leqslant\dfrac{k+2}{4}a+c$，所以

$$\sum\sqrt{a^2+kab+b^2}\leqslant\frac{k+2}{4}a+b+\frac{k+2}{4}a+c+\sqrt{b^2+kbc+c^2},$$

因此只要证

$$\frac{k}{2}a+\sqrt{b^2+kbc+c^2}\leqslant\sqrt{\sum a^2+k\sum ab},$$

两边平方化简为

$$\frac{k^2}{4}a^2+ka\sqrt{b^2+kbc+c^2}\leqslant a^2+ka(b+c),$$

由 $k\in[0,2]$ 知上式显然成立，故原不等式得证。 □

注 注意到当 $k\neq 2$ 时原不等式的取等条件是 $a,\ b,\ c$ 中任意一个为 0，所以左边放缩的时候只对与 a 相关的两个根号进行放缩，另一个不能动。

事实上，考虑几何意义，不难看出本题是 Hlawka 不等式的特例，所以其实 k 的范围可以是 $[-1,2]$，但是 k 为负数时上述证法失效。

例 3.4.3. 已知 $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^+$ 且 $a+b+c=1$，求证

$$a\sqrt{1-bc}+b\sqrt{1-ca}+c\sqrt{1-ab}\geqslant\sqrt{\frac{23}{24}-\frac{15abc}{8}}。$$

证明 两边平方等价于

$$\sum a^2(1-bc)+2\sum ab\sqrt{(1-bc)(1-ca)}\geqslant\frac{23}{24}-\frac{15abc}{8},$$

由

$$\begin{aligned}2\sqrt{(1-bc)(1-ca)}-\big(2-c(a+b)\big)&=\frac{4(1-bc)(1-ca)-\big(2-c(a+b)\big)^2}{2\sqrt{(1-bc)(1-ca)}+2-c(a+b)}\\&=\frac{-c^2(a-b)^2}{2\sqrt{\big((a+b+c)^2-bc\big)\big((a+b+c)^2-ca\big)}+2-c(a+b)}\\&\geqslant\frac{-c^2(a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+ab+2bc+2ca+2-c(a+b)}\\&=\frac{-c^2(a-b)^2}{4-3(ab+bc+ca)},\end{aligned}$$

得到

$$2\sqrt{(1-bc)(1-ca)}\geqslant 2-c(a+b)-\frac{c^2(a-b)^2}{4-3(ab+bc+ca)},$$

所以只要证

$$\sum a^2(1-bc)+\sum ab\left(2-c(a+b)-\frac{c^2(a-b)^2}{4-3(ab+bc+ca)}\right)\geqslant\frac{23}{24}-\frac{15abc}{8},$$

上式展开为

$$\sum a^2-abc\sum a+2\sum ab-2abc\sum a-\frac{abc\sum c(a-b)^2}{4-3(ab+bc+ca)}\geqslant\frac{23}{24}-\frac{15abc}{8},$$

由 $a+b+c=1$，记 $q=ab+bc+ca,\ r=abc$，则 $0<q\leqslant\frac{1}{3},\ 0<r\leqslant\frac{q}{9}\leqslant\frac{1}{27}$，上式化简等价于

$$\frac{1}{24}\geqslant\frac{r(q-9r)}{4-3q}+\frac{9}{8}r。\tag{3.4.6}$$

若 $0<q\leqslant\frac{1}{4}$，则 $0<r\leqslant\frac{1}{36}$，故

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}-\frac{r(q-9r)}{4-3q}-\frac{9}{8}r&\geqslant\frac{1}{24}-\frac{r(1-36r)}{13}-\frac{9}{8}r\\&\geqslant\frac{1}{24}-\frac{3r(1-36r)}{8}-\frac{9}{8}r\\&=\frac{1}{24}(18r-1)^2>0,\end{aligned}$$

所以此时式 (3.4.6) 成立；

若 $\frac{1}{4}<q\leqslant\frac{1}{3}$，则将式 (3.4.6) 整理为

$$\frac{1}{24r}+\frac{9r}{4-3q}\geqslant\frac{q}{4-3q}+\frac{9}{8},$$

由双勾函数性质易证左边关于 r 递减，故由 Schür 不等式的等价形式 $r\geqslant\frac{4q-1}{9}$ 可知只需证

$$\frac{9}{24(4q-1)}+\frac{4q-1}{4-3q}\geqslant\frac{q}{4-3q}+\frac{9}{8},$$

作差分解等价于

$$\frac{(1-3q)(14-17q)}{2(4-3q)(4q-1)}\geqslant 0,$$

显然成立，故此时式 (3.4.6) 也成立。

综上所述，原不等式得证。 □

注 此例中，右边也有一个根式，所以一开始自然也想到两边平方。那个 $2-c(a+b)$ 也是通过均值找出来的。

此外，利用此方法可以将原不等式右边加强到 $\sqrt{\frac{323}{324}-\frac{35abc}{12}}$，但是相信这还不是最佳系数。

例 3.4.4. 已知 $a,\ b,\ c\geqslant 0$，求证

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\leqslant\frac{3}{2}(a+b+c)。$$

证明 两边平方等价于

$$\sum a^2+\sum bc+2\sum\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)}\leqslant\frac{9}{4}\left(\sum a\right)^2,$$

由

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)}-(a^2+b^2+bc+ca) &= \frac{-(a-b)^2(a+b-c)^2}{2\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)}+a^2+b^2+bc+ca} \\
&\leqslant \frac{-(a-b)^2(a+b-c)^2}{2(a+b+c)^2},
\end{aligned}
$$

得到

$$2\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)} \leqslant a^2+b^2+bc+ca-\frac{(a-b)^2(a+b-c)^2}{2(a+b+c)^2},$$

所以只要证

$$\sum a^2+\sum bc+\sum\left(a^2+b^2+bc+ca-\frac{(a-b)^2(a+b-c)^2}{2(a+b+c)^2}\right) \leqslant \frac{9}{4}\left(\sum a\right)^2,$$

去分母整理为

$$12\left(\sum a\right)^2\left(\sum a^2+\sum bc\right) \leqslant 9\left(\sum a\right)^4+2\sum(a-b)^2(a+b-c)^2,$$

配方为

$$\left(\sum a^2-2\sum bc\right)^2+24abc(a+b+c) \geqslant 0,$$

显然成立，故原不等式得证。 □

注 别被最后那个配方吓倒，其实很容易，也是自然的，因为我做到倒数第二步的时候，原本只是打算写成 p, q, r 的形式再考虑用 Schür 不等式之类的方法，结果在展开 $2\sum(a-b)^2(a+b-c)^2$ 并分离出 r 的时候就发现剩下的正是完全平方，最后的配方式就是这样来的。

值得一提的是，本题是比较有名的题目了，其他精彩的证法参见文 [1] $\sim$ [4]，其中，文 [1] 及文 [2] 都用到了非常巧妙的直接放缩；文 [3] 也是用有理化放缩，但是没有两边平方，而是直接用在原不等式上，比我上面的证法要简洁得多；而文 [4](P68 $\sim$ 69) 的证明计算量很大，但是那种方法是我第一次见，也是值得学习的。

顺便指出，由上述证法中最后的配方式反推回去，还可以得出原不等式有如下加强式

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab} \leqslant \sqrt{\frac{9}{4}(a+b+c)^2-\frac{6abc}{a+b+c}},$$

上式可能还是新的。

例 3.4.5. 已知 x, y, $z \geqslant 0$，求证

$$\sqrt{1+\frac{48x}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{48y}{z+x}}+\sqrt{1+\frac{48z}{x+y}} \geqslant 15。$$

证明 由

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1+\frac{48x}{y+z}}-\left(1+\frac{40x}{3y+3z+4x}\right) \\
={}& \frac{\dfrac{192x(y+z-2x)^2}{(y+z)(3y+3z+4x)^2}}{\sqrt{1+\dfrac{48x}{y+z}}+1+\dfrac{40x}{3y+3z+4x}} \\
={}& \frac{7\cdot 192x(y+z-2x)^2}{(3y+3z+4x)^2\sqrt{49(y+z)(y+z+48x)}+7(y+z)(3y+3z+44x)(3y+3z+4x)} \\
\geqslant{}& \frac{7\cdot 192x(y+z-2x)^2}{(3y+3z+4x)^2(25y+25z+24x)+7(y+z)(3y+3z+44x)(3y+3z+4x)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{14x(y+z-2x)^2}{(3y+3z+4x)(x^2+y^2+z^2+5xy+2yz+5zx)}$$
$$\geqslant \frac{14x(y+z-2x)^2}{(3y+3z+4x)(x^2+y^2+z^2+5xy+5yz+5zx)},$$

得到

$$\sqrt{1+\frac{48x}{y+z}} \geqslant 1+\frac{40x}{3y+3z+4x}+\frac{14x(y+z-2x)^2}{(3y+3z+4x)(x^2+y^2+z^2+5xy+5yz+5zx)},$$

所以只要证

$$\sum \frac{20x}{3y+3z+4x}+\frac{7}{\sum x^2+5\sum xy}\sum \frac{x(y+z-2x)^2}{3y+3z+4x} \geqslant 6, \tag{3.4.7}$$

记 $p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx,\ r=xyz$，式 (3.4.7) 去分母展开按 r 整理等价于

$$f(r)=(331p^2+6q)r+3p(12p^2+q)(p^2-4q) \geqslant 0,$$

若 $p^2 \geqslant 4q$ 则显然 $f(r) \geqslant 0$，而当 $3q \leqslant p^2 < 4q$ 时，由 Schür 不等式得

$$f(r) \geqslant f\left(\frac{4pq-p^3}{9}\right)=\frac{7}{9}p(p^2-3q)(4q-p^2) \geqslant 0,$$

从而总有 $f(r) \geqslant 0$，式 (3.4.7) 成立，故原不等式得证。 □

注 这个证法其实是我作了多次的尝试，花了不少时间才得到的，关键之处在于取等条件，这题的取等条件是 $x=y=z$ 或 $x=0$ 且 $y=z$ 及其轮换，所以在寻找近似量以及放缩的时候必须同时顾及，因此有一定难度，具体的构造过程这里难以讲清，请自行体会。

此外，文 [4](P70) 给出了一个可以直接放缩到右边的局部不等式，证明步骤简单，但是该局部不等式的证明十分“暴力”，而且并未给出构造原理，有待破解。

例 3.4.6. 已知 $a,\ b,\ c \geqslant 0$ 且最多只有一个为 0，求证

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \leqslant \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c-\frac{8abc(a+b+c)}{25(a+b)(b+c)(c+a)}}。$$

证明 由轮换对称性，不妨设 $c=\min\{a,b,c\}$。将原不等式两边平方，等价于

$$\sum \frac{a^2}{a+b}+\sum \frac{2ab}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \leqslant \frac{25}{16}\sum a-\frac{abc\sum a}{2\prod(a+b)},$$

由

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(a+b)(b+c)}-(a+2b+c) &= \frac{-(a-c)^2}{\sqrt{(a+b)\cdot 4(b+c)}+a+2b+c} \\ &\leqslant \frac{-(a-c)^2}{\dfrac{a+5b+4c}{2}+a+2b+c} \\ &= -\frac{2(a-c)^2}{3(a+3b+2c)}, \end{aligned}$$

得到

$$2\sqrt{(a+b)(b+c)} \leqslant a+2b+c-\frac{2(a-c)^2}{3(a+3b+2c)},$$

故

$$\frac{2ab}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}=\frac{2ab\sqrt{(a+b)(b+c)}}{(a+b)(b+c)} \leqslant \frac{ab(a+2b+c)}{(a+b)(b+c)}-\frac{2ab(a-c)^2}{3(a+3b+2c)(a+b)(b+c)},$$

由均值，又有

$$\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(c+a)}} \leqslant \frac{bc(b+2c+a)}{(b+c)(c+a)},$$
$$\frac{2ca}{\sqrt{(c+a)(a+b)}} \leqslant \frac{ca(c+2a+b)}{(c+a)(a+b)},$$

由以上三式可见，要证原不等式，只需证明

$$\sum\frac{a^2}{a+b}+\sum\frac{ab(a+2b+c)}{(a+b)(b+c)}-\frac{2ab(a-c)^2}{3(a+3b+2c)(a+b)(b+c)} \leqslant \frac{25}{16}\sum a-\frac{abc\sum a}{2\prod(a+b)},$$

由 $c=\min\{a,b,c\}$ 可设 $a=c+t$ 且 $b=c+u$，其中 $t,\, u \geqslant 0$，代入上式并去分母展开按 c 整理，等价于

$$\begin{aligned}&4c^3(43t^2-27tu+27u^2)+2c^2\big(t(75t^2-139tu+225u^2)+45u^3\big)\\&\qquad+c\big(38t^2(t-2u)^2+(77t^2-224tu+411u^2)tu+18u^4\big)+tu(11t+9u)(t-3u)^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

由均值容易证明 $43t^2-27tu+27u^2 \geqslant 0$, $75t^2-139tu+225u^2 \geqslant 0$, $77t^2-224tu+411u^2 \geqslant 0$，所以上式成立，从而原不等式得证，等号成立当且仅当 $a=b=c$ 或 $a=3b$ 且 $c=0$ 及其轮换。 □

注 这道题是在编写本文时才得到的，加强了熟悉的 Jack Garfunkel 不等式，可能也是新的不等式。

参考文献

[1] Vasile Cirtoaje. Algebraic Inequalities Old and New Methods[M]. GIL Publishing House, 2006: 420-421.

[2] 杨学枝. 数学奥林匹克不等式研究 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2009: 383-384.

[3] 韩京俊. 初等不等式的证明方法 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 88-89.

[4] 陈计, 季潮丞. 代数不等式 [M]. 上海科技教育出版社, 2009: 68-70.

朝花夕拾

4.1 竹竿扫过的区域边界曲线——郭子伟

一根 1 米长的竹竿倚靠在光滑墙边，竖直放置，由于轻微骚动，竹竿底端向外滑开（滑开的方向与墙壁垂直，地面光滑），求竹竿从开始滑动到整个竿着地的过程中所扫过的区域的边界曲线。

这是个经典问题，结果是星形线（第一象限部分），如图 4.1.1 所示。在解法上，可以用常规的求包络线的方法不难解决，但超出了高中范畴，这里就不写了。下面我提供几种解法，全部都只需用到高中知识。这些解法虽然均由我独立给出，但不排除有的解法前人早已给出。

这里就不再用墙边和竹竿的描述了，直接抽象为平面直角坐标系中，定长为 1 的线段两端 A、B 分别在 x、y 轴的正半轴上滑动，求 AB 所扫过的区域在第一限象内的边界曲线。

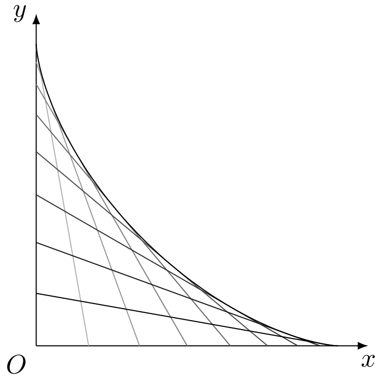


图 4.1.1

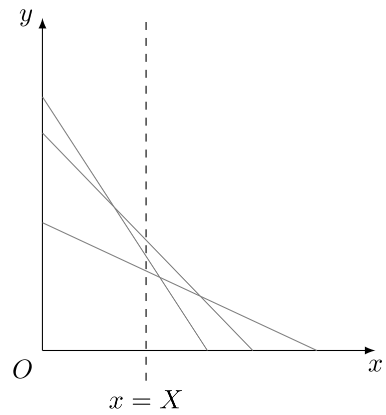


图 4.1.2

解法一 由 $AB=1$ 可设 $A(\cos t,0)$, $B(0,\sin t)$，其中 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则直线 AB 的方程为

$$\frac{x}{\cos t}+\frac{y}{\sin t}=1,$$

亦即

$$y=\sin t\left(1-\frac{x}{\cos t}\right)。$$

现在，我们让 x 取定为 $x=X$（$X\in(0,1)$，下同），那么当 t 变化时，记上式中的 y 能取得的最大值为 Y，那么点 (X,Y) 便在边界曲线上（图 4.1.2 为这段话的示意图，希望能帮助理解），于是，记

$$g(t)=\sin t\left(1-\frac{X}{\cos t}\right)\quad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

求导得

$$g'(t)=\cos t-\frac{X}{\cos^2 t},$$

故知当且仅当 $\cos t=\sqrt[3]{X}$ 时 $g(t)$ 取最大值，此时 $\sin t=\sqrt{1-\sqrt[3]{X^2}}$，故

$$Y=g(t)_{\max}=\sqrt{1-\sqrt[3]{X^2}}\left(1-\frac{X}{\sqrt[3]{X}}\right)=\sqrt{\left(1-\sqrt[3]{X^2}\right)^3},$$

变形得 $\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{Y^2}=1$，因此边界曲线方程就是

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1\quad x,y\in(0,1)。$$

□

解法二 考查线段 AB 上使得 $BC=m,\ CA=n$（$n+n=1$）的点 C 的轨迹，设 $\angle BAO=\alpha$，则易得 $C(m\cos\alpha, n\sin\alpha)$，故 C 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1\,(x,\,y>0),$$

类似地，让 x 取定为 $x=X$，只要求出当 $m,\,n$ 变化时上式中的 y 的最大值 Y 即可（示意图如图 4.1.3）。由 Carlson 不等式，有

$$1=(m+n)(m+n)\left(\frac{X^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)\geqslant\left(\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3,$$

当且仅当 $m=\sqrt[3]{X^2},\ n=1-\sqrt[3]{X^2}$ 时取等，既然等号一定能取到，那就是说上式取等时的 y 就是 Y，即 $\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{Y^2}=1$，因此边界曲线方程就是

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1\quad x,y\in(0,1)。$$

□

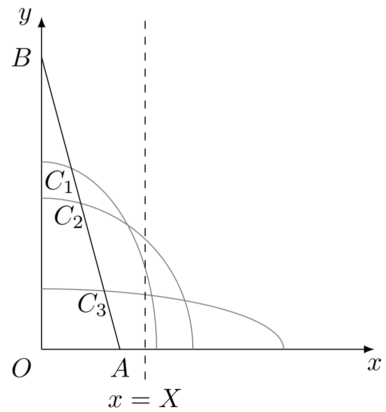


图 4.1.3

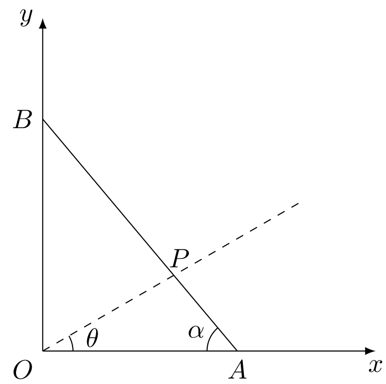


图 4.1.4

解法三 过原点 O 向第一象限内作一条定射线且与 x 轴夹角为 θ，设该射线与 AB 交于 P，如图 4.1.4 所示。

设 $\angle BAO=\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，那么当 α 变化时，点 P 所能达到的离原点最远的点便在边界曲线上，也就是只要求 OP 的最大值。

由正弦定理得

$$OP=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}\cdot OA=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha}=\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha}},$$

又由 Carlson 不等式，有

$$\left(\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}+\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}+\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}\right)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\geqslant\left(\sqrt[3]{\sin^2\theta}+\sqrt[3]{\cos^2\theta}\right)^3,$$

得到

$$OP\leqslant\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{\sin^2\theta}+\sqrt[3]{\cos^2\theta}\right)^3}},$$

当且仅当 $\tan\alpha=\sqrt[3]{\tan\theta}$ 时取等，故 OP 的最大值就是 $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{\sin^2\theta}+\sqrt[3]{\cos^2\theta}\right)^3}}$，因此，如果以原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴，那么边界曲线的极坐标方程就是

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{\sin^2\theta}+\sqrt[3]{\cos^2\theta}\right)^3}}\quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

将它化回直角坐标系下的方程也很容易，去分母即为

$$\sqrt{\left(\sqrt[3]{\rho^2\sin^2\theta}+\sqrt[3]{\rho^2\cos^2\theta}\right)^3}=1,$$

由 $\rho\sin\theta=y$, $\rho\cos\theta=x$ 即得方程为

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1\quad x,y\in(0,1)。$$

□

以上所得到的方程中，如果不限制变量范围，则曲线为完整的星形线（如本期封面图），而如果线段的定长改为正数 a，则方程为 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$。

另外，为了说明以上内容绝无超出高中知识范围，这里附上前面用到的 Carlson 不等式的均值证明。

定理 4.1.1 (Carlson 不等式)**.** 已知 $x_{ij}>0$（$i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,m$），则

$$\begin{aligned}&(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m})(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m})\cdots(x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm})\\ \geqslant&\left(\sqrt[n]{x_{11}x_{21}\cdots x_{n1}}+\sqrt[n]{x_{12}x_{22}\cdots x_{n2}}+\cdots+\sqrt[n]{x_{1m}x_{2m}\cdots x_{nm}}\right)^n。\end{aligned}$$

证明 由均值不等式得

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{\frac{x_{11}x_{21}\cdots x_{n1}}{(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m})(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m})\cdots(x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm})}}\\ \leqslant&\frac{1}{n}\left(\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m}}+\frac{x_{21}}{x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m}}+\cdots+\frac{x_{n1}}{x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm}}\right),\\ &\sqrt[n]{\frac{x_{12}x_{22}\cdots x_{n2}}{(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m})(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m})\cdots(x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm})}}\\ \leqslant&\frac{1}{n}\left(\frac{x_{12}}{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m}}+\frac{x_{22}}{x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m}}+\cdots+\frac{x_{n2}}{x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm}}\right),\\ &\cdots\cdots\\ &\sqrt[n]{\frac{x_{1m}x_{2m}\cdots x_{nm}}{(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m})(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m})\cdots(x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm})}}\\ \leqslant&\frac{1}{n}\left(\frac{x_{1m}}{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m}}+\frac{x_{2m}}{x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m}}+\cdots+\frac{x_{nm}}{x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm}}\right),\end{aligned}$$

以上 m 式相加即得

$$\frac{\sqrt[n]{x_{11}x_{21}\cdots x_{n1}}+\sqrt[n]{x_{12}x_{22}\cdots x_{n2}}+\cdots+\sqrt[n]{x_{1m}x_{2m}\cdots x_{nm}}}{\sqrt[n]{(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m})(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m})\cdots(x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm})}}\leqslant 1,$$

整理即为定理。 □

当然，如果你觉得用这个不等式还是太高级了，不能算是高中知识，那也没关系，我们完全可以将解法二、三中用到 Carlson 不等式的部分改为用导数求最值，很容易，我就不详写了。