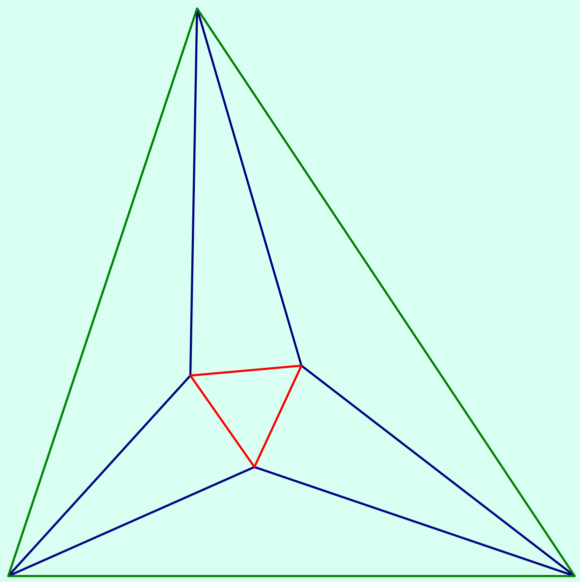
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2014 年第 1 期　　总第 15 期



目录

助力高考

1.1 ab1962 解题集精选（十五）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 701 ∼ 750 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》总第 1 期。

题目 1.1.1. 如图 1.1.1 所示，PQ 是抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）过焦点 F 的弦，MN 为 PQ 在准线 l 上的射影，PQ 绕直线 l 旋转一周所得的旋转面的面积为 S_1，以 MN 为直径的球的面积为 S_2，则 S_1,S_2 的大小关系为________。

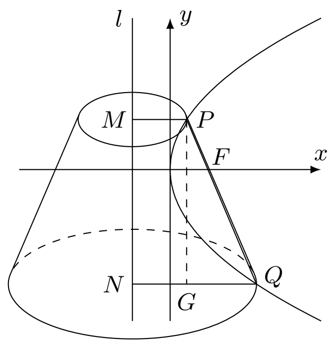


图 1.1.1

解 设 $PF=PM=r_1,QF=QN=r_2$，过 P 作 $PG\perp QN$ 于 G，则

$$S_1=\pi(PM+QN)PQ=\pi(r_1+r_2)^2,$$
$$S_2=4\pi\cdot\left(\frac{MN}{2}\right)^2=\pi MN^2=\pi PG^2=\pi[(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2]=4\pi r_1r_2,$$

故

$$S_1-S_2=\pi(r_1+r_2)^2-4\pi r_1r_2=\pi(r_1-r_2)^2\geqslant 0,$$

所以 $S_1\geqslant S_2$。 □

kuing 评注 我们还可以证明以 MN 为直径的圆恰好与 PQ 相切于 F。

设 MN 中点为 K，记 K 到 PQ 的距离为 d，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}PQ\cdot d&=S_{\triangle KPQ}\\&=S_{\text{梯形}PQNM}-S_{\triangle KPM}-S_{\triangle KQN}\\&=\frac{1}{2}(PM+QN)MN-\frac{1}{2}PM\cdot KM-\frac{1}{2}QN\cdot KN\\&=\frac{1}{2}(PF+QF)MN-\frac{1}{4}PF\cdot MN-\frac{1}{4}QF\cdot MN\\&=\frac{1}{4}PQ\cdot MN,\end{aligned}$$

从而得到 $d=\dfrac{MN}{2}$，因此以 MN 为直径的圆与 PQ 相切，再由切线长相等，易知切点就是 F。

由此可见，以 MN 为直径的球也必与 PQ 绕直线 l 旋转一周所得的旋转面相切，而且可以说是“内切”。尽管如此，但这与它们的面积大小并没有必然关系。由上述证明可知，当 $r_1=r_2$ 时两面积相等，符合结论：球的表面积与其外切的圆柱的侧面积相等。

题目 1.1.2. 证明：$(\mathrm{C}_n^0)^2+(\mathrm{C}_n^1)^2+(\mathrm{C}_n^2)^2+\cdots+(\mathrm{C}_n^n)^2=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$。

证明 因为 $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$，在 $(1+x)^n(1+x)^n$ 的展开式中

$$\begin{aligned}x^n\text{ 项}&=\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_n^nx^n+\mathrm{C}_n^1x\mathrm{C}_n^{n-1}x^{n-1}+\mathrm{C}_n^2x^2\mathrm{C}_n^{n-2}x^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n\mathrm{C}_n^0\\&=[(\mathrm{C}_n^0)^2+(\mathrm{C}_n^1)^2+(\mathrm{C}_n^2)^2+\cdots+(\mathrm{C}_n^n)^2]x^n,\end{aligned}$$

在 $(1+x)^{2n}$ 的展开式中

$$x^n\text{ 项}=\mathrm{C}_{2n}^nx^n=\frac{(2n)!}{n!n!}x^n,$$

于是 $(\mathrm{C}_n^0)^2+(\mathrm{C}_n^1)^2+(\mathrm{C}_n^2)^2+\cdots+(\mathrm{C}_n^n)^2=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$。 □

题目 1.1.3. 过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的焦点的弦 AB 所在的直线的倾斜角为 α，求 $|AB|$。

解 不妨设 AB 过设左焦点 $F(-c,0)$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$，则

$$|AB|=e\left(x_A+x_B+\frac{a^2}{c}+\frac{a^2}{c}\right)=e(x_A+x_B)+2a,$$

$y=\tan\alpha(x+c)$ 代入 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 消 y 得

$$b^2x^2+a^2\tan^2\alpha(x^2+2cx+c^2)=a^2b^2,$$

即

$$(b^2+a^2\tan^2\alpha)x^2+(2ca^2\tan^2\alpha)x+a^2c^2\tan^2\alpha-a^2b^2=0,$$

故

$$x_A+x_B=-\frac{2ca^2\tan^2\alpha}{b^2+a^2\tan^2\alpha}=-\frac{2ca^2\tan^2\alpha}{a^2\sec^2\alpha-c^2},$$

所以

$$\begin{aligned}|AB|&=-\frac{2c^2a\tan^2\alpha}{a^2\sec^2\alpha-c^2}+2a\\&=\frac{2a^3\sec^2\alpha-2ac^2-2c^2a\tan^2\alpha}{a^2\sec^2\alpha-c^2}\\&=\frac{2a^3\sec^2\alpha-2ac^2\sec^2\alpha}{a^2\sec^2\alpha-c^2}\\&=\frac{2ab^2\sec^2\alpha}{a^2\sec^2\alpha-c^2}\\&=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}\\&=\frac{2ab^2}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha},\end{aligned}$$

以上各式都可为答案。 □

题目 1.1.4. $\triangle ABC$ 中，a,b,c 是 A,B,C 所对的边长，且 AC 边上的高为 $c-a$，求 $\sin\dfrac{C-A}{2}+\cos\dfrac{C+A}{2}$。

解 设 AC 边上的高是 h，则 $c-a=h$，故

$$\frac{c}{h}-\frac{a}{h}=1,$$

$$\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\sin C}=1，$$
$$\sin C-\sin A=\sin A\sin C，$$
$$2\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(C+A)-\cos(C-A)]，$$
$$2\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2}=-\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{C+A}{2}-1-1+2\sin^2\frac{C-A}{2}\right)，$$
$$\left(\cos\frac{C+A}{2}+\sin\frac{C-A}{2}\right)^2=1，$$

因 $c-a=h$ 故 $C>A$，从而 $\sin\dfrac{C-A}{2}>0$，又 $\cos\dfrac{C+A}{2}=\sin\dfrac{B}{2}>0$，从而
$$\cos\frac{C+A}{2}+\sin\frac{C-A}{2}=1。$$
□

题目 1.1.5. 已知三棱锥 $ABCD$ 中，$AB=AC=AD=BC=1$，求全面积的最大值。

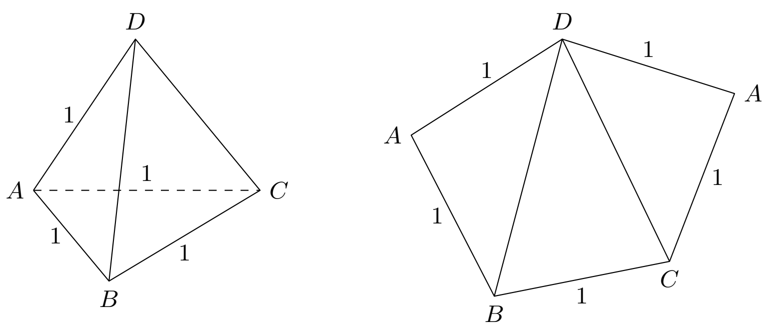


图 1.1.2

解 作出其表面展开图，如图 1.1.2 所示，是五边长都为 1 的五边形，要使 D-ABC 全面积最大，就要使此五边形面积最大，因此为正五边形时面积最大。 □

题目 1.1.6. 瓶中有 36 粒药片，现从中随意倒出若干粒（至少倒出一粒），“倒出药粒数目为奇数的概率”与“倒出药粒数目为偶数的概率”谁大谁小？

解 设事件 A 为倒出药粒数目为奇数，B 为倒出药粒数目为偶数，则
$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_{36}^1+\mathrm{C}_{36}^3+\mathrm{C}_{36}^5+\cdots+\mathrm{C}_{36}^{35}}{N},$$
$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_{36}^2+\mathrm{C}_{36}^4+\mathrm{C}_{36}^6+\cdots+\mathrm{C}_{36}^{36}}{N},$$
因为 $\mathrm{C}_{36}^1+\mathrm{C}_{36}^3+\mathrm{C}_{36}^5+\cdots+\mathrm{C}_{36}^{35}=\mathrm{C}_{36}^0+\mathrm{C}_{36}^2+\mathrm{C}_{36}^4+\mathrm{C}_{36}^6+\cdots+\mathrm{C}_{36}^{36}$，所以 $\mathrm{C}_{36}^1+\mathrm{C}_{36}^3+\mathrm{C}_{36}^5+\cdots+\mathrm{C}_{36}^{35}>\mathrm{C}_{36}^2+\mathrm{C}_{36}^4+\mathrm{C}_{36}^6+\cdots+\mathrm{C}_{36}^{36}$，于是 $P(A)>P(B)$。 □

kuing 评注 中间的等式由 $(1-1)^{36}$ 的展开式可得，可以推广到一般数字。不过，这题其实应该交待等可能性，然而在实际操作中会不会有这样的等可能性？

题目 1.1.7. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）长轴的两个端点分别为 A_1, A_2。若椭圆上存在 Q 点使 $\angle A_1QA_2=135^\circ$，求离心率 e 的范围。

解 不妨设 $Q(x_0,y_0)$, $y_0>0$, $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$，所以 $k_{A_1Q}=\dfrac{y_0}{x_0+a}$, $k_{A_2Q}=\dfrac{y_0}{x_0-a}$，故

$$\tan\angle A_1QA_2=\frac{k_{A_2Q}-k_{A_1Q}}{1+k_{A_1Q}k_{A_2Q}}=\frac{\dfrac{y_0}{x_0-a}-\dfrac{y_0}{x_0+a}}{1+\dfrac{y_0}{x_0-a}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+a}}=\frac{2ay_0}{x_0^2-a^2+y_0^2},\tag{1.1.1}$$

由于 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，因此 $x_0^2=\dfrac{a^2}{b^2}(b^2-y_0^2)$，代入式 (1.1.1) 得

$$\tan\angle A_1QA=\frac{2ay_0}{y_0^2-\dfrac{a^2}{b^2}y_0^2}=\frac{2ab^2}{y_0(b^2-a^2)}=-1,$$

因 $y_0\leqslant b$，故

$$y_0=\frac{2ab^2}{a^2-b^2}=\frac{2ab^2}{c^2}\leqslant b,$$

故 $2ab\leqslant c^2$，$2a\sqrt{a^2-c^2}\leqslant c^2$，$4a^2(a^2-c^2)\leqslant c^4$，$4-4e^2\leqslant e^4$，解得 $e^2\geqslant 2\sqrt{2}-2$ 或 $e^2\leqslant -2\sqrt{2}-2$（舍），故 $e\geqslant\sqrt{2\sqrt{2}-2}$，又因为 $e<1$，因此 $\sqrt{2\sqrt{2}-2}\leqslant e<1$。 □

kuing 评注 此题的推广见下一篇文章。

题目 1.1.8. 定点 $A(4,0)$ 到双曲线 $x^2-y^2=a^2$（$a>0$）上的点的最小距离为 $\sqrt{5}$，求双曲线方程，并求出此点的坐标。

解 设双曲线上的点为 $P(x,y)$，则

$$|PA|^2=(x-4)^2+y^2=(x-4)^2+x^2-a^2=2x^2-8x+16-a^2=2(x-2)^2+8-a^2,$$

对称轴是 $x=2$，$x\in(-\infty,-a]\bigcup[a,+\infty)$。

当 $a\leqslant 2$ 时，在 $x=2$ 上，$|PA|^2_{\min}=8-a^2=5$，故 $a=\sqrt{3}$；

当 $a>2$ 时，在 $x=a$ 上，$|PA|^2_{\min}=a^2-8a+16=5$，故 $a=4+\sqrt{5}$。

于是双曲线方程是 $x^2-y^2=3$ 或 $x^2-y^2=\left(4+\sqrt{5}\right)^2$，最近的点分别是 $(2,\pm1)$ 和 $\left(4+\sqrt{5},0\right)$。 □

题目 1.1.9. 求证：$\left(\dfrac{n}{2}\right)^n>n!>\left(\dfrac{n}{3}\right)^n$，其中 $n\geqslant 6$, $n\in\mathbb{N}^+$。

证明 （1）设 $a_n=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}{n!}$，则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

由于当 $n\geqslant 2$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$，因此 $a_{n+1}>a_n$，因 $a_6=\dfrac{3^6}{6!}=\dfrac{729}{720}>1$，故当 $n\geqslant 6$ 时 $a_n>1$，故 $\left(\dfrac{n}{2}\right)^n>n!$；

（2）设 $b_n=\dfrac{\left(\dfrac{n}{3}\right)^n}{n!}$，则

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\left(\dfrac{n+1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\left(\dfrac{n}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

当 $n\in\mathbb{N}^+$ 时 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$，因此 $b_{n+1}<b_n$，因 $b_6=\dfrac{2^6}{6!}=\dfrac{64}{720}<1$，故当 $n\geqslant 6$ 时 $b_n<1$，故 $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n<n!$。

综上，原不等式得证。 □

kuing 评注 对于右边的不等式，由 e 的定义知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$，故此按照上述证法可以证明更强式 $n!>\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n$；左边的不等式还可以用均值来证，当 $n=6$ 时可直接验证，当 $n>6$ 时，由均值不等式有

$$\begin{aligned}n!&=2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot(n-1)n\\&<\left(\frac{2+3+\cdots+(n-2)}{n-3}\right)^{n-3}\cdot(n-1)n\\&=\left(\frac{n}{2}\right)^{n-3}\cdot(n-1)n,\end{aligned}$$

而当 $n>6$ 时易证

$$\left(\frac{n}{2}\right)^3-(n-1)n=\frac{1}{8}n(n^2-8n+8)>0,$$

从而 $n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n$。

1.2 对《ab1962 解题集精选（十五）》里的一道椭圆题的拓展——郭子伟

前面的《ab1962 解题集精选（十五）》一文（下面简称“原文”）中的题目 1.1.7 是：

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）长轴的两个端点分别为 A_1, A_2。若椭圆上存在 Q 点使 $\angle A_1QA_2=135^\circ$，求离心率 e 的范围。

除了原文中的直接解法之外，还可以先把 $\angle A_1QA_2$ 的范围确定下来，然后使该范围包含 135° 而建立不等式从而解出 e 的范围。

解 由对称性，不妨设 A_1 是左端点，A_2 是右端点，Q 是椭圆上 y 轴上方的任意一点，则 $k_{A_1Q}>0$, $k_{A_2Q}<0$，熟知 $k_{A_1Q}k_{A_2Q}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，得 $1+k_{A_1Q}k_{A_2Q}>0$，故此

$$\tan\angle A_1QA_2=\frac{k_{A_2Q}-k_{A_1Q}}{1+k_{A_1Q}k_{A_2Q}}=-\frac{|k_{A_1Q}|+|k_{A_2Q}|}{1+k_{A_1Q}k_{A_2Q}}\leqslant-\frac{2\sqrt{|k_{A_1Q}k_{A_2Q}|}}{1+k_{A_1Q}k_{A_2Q}}=-\frac{2ab}{a^2-b^2}=-\frac{2ab}{c^2},$$

当且仅当 $|k_{A_2Q}|=|k_{A_1Q}|$，即 Q 为短轴端点时取等。

又当 Q 趋向 A_1（Q 始终在 y 轴上方）时 $k_{A_2Q}\to0^-$，而 $k_{A_1Q}k_{A_2Q}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，从而 $k_{A_1Q}\to+\infty$，因此 $\tan\angle A_1QA_2\to-\infty$。

而 Q 在椭圆上运动时 $\angle A_1QA_2$ 连续变化，故综上可知 $\tan\angle A_1QA_2$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{2ab}{c^2}\right]$。

故此，对于本题，就只要 $\tan135^\circ\in\left(-\infty,-\dfrac{2ab}{c^2}\right]$，即 $\dfrac{2ab}{c^2}\leqslant1$ 即可，接下来跟原文解答相同。 □

上述解法中用到的小结论 $k_{A_1Q}k_{A_2Q}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 可以从教材的例题中提炼出来，而实际上，这里的 A_1, A_2 还可以更一般一些，它们只要关于椭圆的中心对称，结论同样成立，即：

引理 1.2.1. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上有两定点 $A_1(x_0,y_0)$, $A_2(-x_0,-y_0)$，动点 $P(x_p,y_p)$ 在椭圆上，则当 k_{PA_1} 和 k_{PA_2} 都存在时，恒有 $k_{PA_1}k_{PA_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$。

这里我们用特别一点的方法来证明引理 1.2.1。

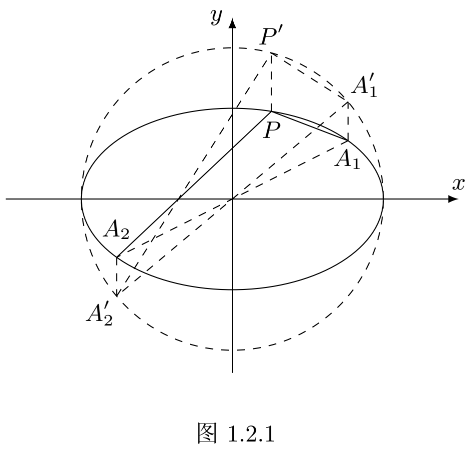


图 1.2.1

证明 以长轴为直径作圆，分别过 A_1, A_2, P 作与 y 轴平行的直线与圆相交，取其与之较近的交点 A_1', A_2', P'，连结相关的线段，如图 1.2.1 所示。

设 $A_1'(x_0,y_0')$, $A_2'(-x_0,-y_0')$, $P'(x_p,y_p')$，则易证

$$y_0'=\frac{a}{b}y_0,\ \ y_p'=\frac{a}{b}y_p,$$

因为 $A_1'A_2'$ 是圆的直径，从而 $PA_1' \perp PA_2'$，即 $k_{PA_1'}k_{PA_2'} = -1$，所以

$$k_{PA_1}k_{PA_2} = \frac{y_p - y_0}{x_p - x_0} \cdot \frac{y_p + y_0}{x_p + x_0} = \frac{\dfrac{b}{a}y_p' - \dfrac{b}{a}y_0'}{x_p - x_0} \cdot \frac{\dfrac{b}{a}y_p' + \dfrac{b}{a}y_0'}{x_p + x_0} = \frac{b^2}{a^2}k_{PA_1'}k_{PA_2'} = -\frac{b^2}{a^2},$$

引理 1.2.1 得证。 □

原文及上述解法中都用到了一条公式：$\tan\angle A_1QA_2 = \dfrac{k_{A_2Q} - k_{A_1Q}}{1 + k_{A_1Q}k_{A_2Q}}$，有的同学可能不熟悉它，其实这叫"到角公式"，以前应该在高中有教的，不过现在好像没有了，故此这里也顺便将它证一下。

引理 1.2.2. 已知两直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2，l_1 与 l_2 相交于 P，记 l_1 绕 P 逆时针旋转至首次与 l_2 重合所转过的角度为 θ，则当 $l_1 \not\perp l_2$ 时

$$\tan\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}。$$

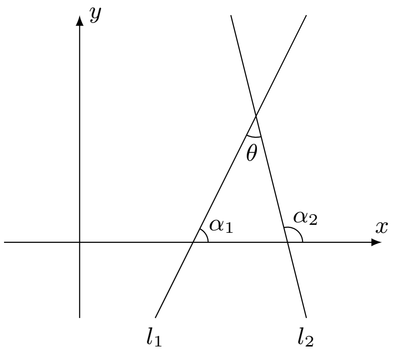


图 1.2.2

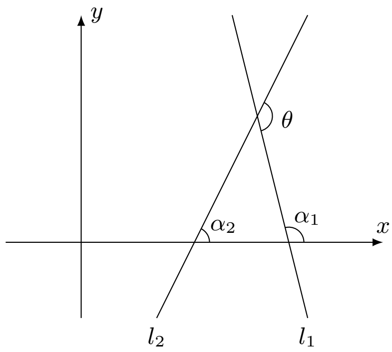


图 1.2.3

证明　设 l_1, l_2 的倾斜角分别为 α_1, α_2。

若 $\alpha_1 < \alpha_2$，则 $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$（图 1.2.2）；若 $\alpha_1 > \alpha_2$，则 $\theta = \pi - (\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1 + \pi$（图 1.2.3）。由此可见，无论哪种情况，都有

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1\tan\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

引理 1.2.2 得证。 □

现在，我们延用本文开头的解法，结合以上的引理，就可以探究下面这个问题：

问题 1.2.1. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（$a > b > 0$）上有两定点 $A_1(x_0, y_0)$, $A_2(-x_0, -y_0)$，动点 $P(x_p, y_p)$ 在椭圆上且异于 A_1, A_2，讨论 $\angle A_1PA_2$ 的取值范围。

由对称性，我们只讨论 $x_0, y_0 \geqslant 0$ 且 P 在直线 A_1A_2 上方的情况。

解　为方便书写，下面将 $\angle A_1PA_2$ 的取值范围简记为 D。

当 $y_0 = 0$ 即 A_1A_2 为长轴时，由前面的结果知 $D = \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi - \arctan\dfrac{2ab}{c^2}\right]$；

当 $x_0 = 0$ 即 A_1A_2 为短轴时，用类似于长轴端点时的方法容易求得 $D = \left[\arctan\dfrac{2ab}{c^2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$；

下面讨论 $x_0, y_0 > 0$ 的情况。

（1）当 $x_p \in (-x_0, x_0)$ 时，易见 $k_{PA_2} > k_{A_1A_2} = \dfrac{y_0}{x_0}$，即 $k_{PA_2} \in \left(\dfrac{y_0}{x_0}, +\infty\right)$，由引理 1.2.1 及引理 1.2.2 得

$$\tan\angle A_1PA_2 = \frac{k_{PA_1} - k_{PA_2}}{1 + k_{PA_1}k_{PA_2}} = \frac{-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{1}{k_{PA_2}} - k_{PA_2}}{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{b^2}{k_{PA_2}} + a^2k_{PA_2}\right)。$$

（1-1）若 $\dfrac{y_0}{x_0} \geqslant \dfrac{b}{a}$，则 $\dfrac{b^2}{k_{PA_2}} + a^2k_{PA_2}$ 关于 k_{PA_2} 递增，故

$$\tan\angle A_1PA_2 \in \left(-\infty, -\frac{1}{c^2}\left(\frac{b^2x_0}{y_0} + \frac{a^2y_0}{x_0}\right)\right) = \left(-\infty, -\frac{a^2b^2}{c^2x_0y_0}\right) \implies D = \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arctan\frac{a^2b^2}{c^2x_0y_0}\right)；$$

（1-2）若 $\dfrac{y_0}{x_0} < \dfrac{b}{a}$，则 $\dfrac{b^2}{k_{PA_2}} + a^2k_{PA_2}$ 关于 k_{PA_2} 先减后递增，当 $k_{PA_2} = \dfrac{b}{a}$ 时取最小值，故

$$\tan\angle A_1PA_2 \in \left(-\infty, -\frac{2ab}{c^2}\right] \implies D = \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arctan\frac{2ab}{c^2}\right]；$$

（2）当 $x_p \in (-a, -x_0)$ 时，易见 $0 < k_{PA_1} < k_{A_1A_2} = \dfrac{y_0}{x_0}$，即 $k_{PA_1} \in \left(0, \dfrac{y_0}{x_0}\right)$，由引理 1.2.1 及引理 1.2.2 得

$$\tan\angle A_1PA_2 = \frac{k_{PA_1} - k_{PA_2}}{1 + k_{PA_1}k_{PA_2}} = \frac{k_{PA_1} + \dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{1}{k_{PA_1}}}{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{c^2}\left(a^2k_{PA_1} + \frac{b^2}{k_{PA_1}}\right)。$$

（2-1）若 $\dfrac{y_0}{x_0} \leqslant \dfrac{b}{a}$，则 $a^2k_{PA_1} + \dfrac{b^2}{k_{PA_1}}$ 关于 k_{PA_1} 递减，故

$$\tan\angle A_1PA_2 \in \left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{a^2y_0}{x_0} + \frac{b^2x_0}{y_0}\right), +\infty\right) = \left(\frac{a^2b^2}{c^2x_0y_0}, +\infty\right) \implies D = \left(\arctan\frac{a^2b^2}{c^2x_0y_0}, \frac{\pi}{2}\right)；$$

（2-2）若 $\dfrac{y_0}{x_0} > \dfrac{b}{a}$，则 $a^2k_{PA_1} + \dfrac{b^2}{k_{PA_1}}$ 关于 k_{PA_1} 先减后递增，当 $k_{PA_1} = \dfrac{b}{a}$ 时取最小值，故

$$\tan\angle A_1PA_2 \in \left[\frac{2ab}{c^2}, +\infty\right) \implies D = \left[\arctan\frac{2ab}{c^2}, \frac{\pi}{2}\right)；$$

（3）当 $x_p = -x_0$ 时，显然 $\angle A_1PA_2 = \dfrac{\pi}{2}$。

另外，不难证明当 $\dfrac{y_0}{x_0} = \dfrac{b}{a}$ 时有 $ab = 2x_0y_0$，故此综上所述，我们得到

$$D = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi - \arctan\dfrac{2ab}{c^2}\right], & y_0 = 0, \\ \left[\arctan\dfrac{2ab}{c^2}, \dfrac{\pi}{2}\right), & x_0 = 0, \\ \left(\arctan\dfrac{a^2b^2}{c^2x_0y_0}, \pi - \arctan\dfrac{2ab}{c^2}\right], & \dfrac{y_0}{x_0} < \dfrac{b}{a}, \\ \left[\arctan\dfrac{2ab}{c^2}, \pi - \arctan\dfrac{a^2b^2}{c^2x_0y_0}\right), & \dfrac{y_0}{x_0} > \dfrac{b}{a}, \\ \left(\arctan\dfrac{2ab}{c^2}, \pi - \arctan\dfrac{2ab}{c^2}\right), & \dfrac{y_0}{x_0} = \dfrac{b}{a}。 \end{cases}$$ □

1.3 例谈高三数学专题研究课课题的生长点——何睦

本文系苏州市教育科学“十二五”规划 2013 年度重点课题《基于数学素养生成的教学实践与校本课程开发研究》（课题编号：130801243）的阶段性研究成果。

2013 年 8 月 15 日，笔者有幸受邀在 2013 年苏州市暑期普通高中教师课程改革培训活动中作了题为“例谈高三数学专题研究课课题的生长点”的专题汇报。现将内容整理成文，鉴于学识和经验尚浅，期望得到专家、前辈指正，以期对专题研究课课题的有关思考更为深入和成熟。

生长点 1. 以学生的信息反馈作为专题研究课课题的生长点

教学的本质在于引起、维持和促进学生的学习活动，所以教师的教必须直接指向学生的学，根据学生的学情及时调整自己的教，在专题课课题的选取上，我坚持以学生的信息反馈作为最重要的生长点。学生的信息反馈主要表现为：学生在数学知识上的错误观点和学生在解题学习中的困惑与难点。

案例 1. 局部缩小在数学解题中的应用（源于学生学习中的困惑与难点）

恒成立问题（含最值问题）中参数范围问题是高考中的重要问题。学生普遍感到参数的分类讨论问题总是“想不到、分不清、做不全”。为此我开设了专题研究课《局部缩小在数学解题中的应用》，在不避免分类讨论方法的基础上，有效的解决了学生的困惑，提高了此类问题的得分率。

探究 1.（08 年江苏，14）$f(x)=ax^3-3x+1$ 对于 $x\in[-1,1]$ 总有 $f(x)\geqslant 0$ 成立，则 $a=$________。

解 由不等式恒成立，取特殊值缩小参数的范围，$\begin{cases} f(-1)\geqslant 0, \\ f(1)\geqslant 0, \\ f(0)\geqslant 0, \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqslant 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a\leqslant 4, \\ a\geqslant 2, \\ a\geqslant 4, \end{cases}$ 可得 $a=4$。 □

探究 2. 已知函数 $f(x)=(ax^2+x)\mathrm{e}^x$，其中 e 是自然数的底数，$a\in\mathbb{R}$，若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是单调增函数，求 a 的取值范围。

解 $f'(x)=[ax^2+(2a+1)x+1]\mathrm{e}^x$，由题可转化为 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，令 $g(x)=ax^2+(2a+1)x+1$，则 $g(x)\geqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立。取特殊值缩小参数的范围，由 $\begin{cases} g(1)\geqslant 0, \\ g(-1)\geqslant 0, \end{cases}$ 得 $a\in\left[-\dfrac{2}{3},0\right]$。

（i）当 $a=0$ 时，$g(x)\geqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，故 $a=0$ 符合要求；

（ii）当 $a\in\left[-\dfrac{2}{3},0\right)$ 时，$g(x)$ 的图像开口向下，只要满足 $\begin{cases} g(1)\geqslant 0, \\ g(-1)\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $a\in\left[-\dfrac{2}{3},0\right)$。

综上，a 的取值范围是 $\left[-\dfrac{2}{3},0\right]$。 □

探究 3. 已知函数 $f(x)=(m-3)x^3+9x$。若函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上最大值为 4，求 m 的值。

解 函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上最大值为 4，故 $f(x)\leqslant 4$ 在区间 $[1,2]$ 上恒成立，由 $\begin{cases} f(1)\leqslant 4, \\ f(2)\leqslant 4, \end{cases}$ 得 $m\leqslant -2$，而 $f'(x)=3[(m-3)x^2+3]$，令 $f'(x)=0$，当 $m\leqslant -2$ 时，存在极值点 $x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{3}{3-m}}$，且 $\sqrt{\dfrac{3}{3-m}}<1$，则 $f'(x)<0$ 在区间 $[1,2]$ 上恒成立，则 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 单调递减，故 $f(x)_{\max}=f(1)=m+6=4$，$m=-2$。

综上 $m=-2$。 □

选题说明 探究 1 是恒成立问题中的求值问题，通过取特殊值可直接将值夹逼得到；探究 2 和探究 3 利用局部缩小方法研究不等式恒成立和最值问题中的参数范围问题，通过取特殊值缩小所求参数的范围以达到减少分类的目的，提高解题的正确率。

生长点 2. 以教材内容作为专题研究课课题的生长点

一贯以来高考命题人都会从教材中寻找命题的灵感，所以教材中知识的呈现方式、教材例题和习题成为我开设专题研究课课题的重要生长点之一。

案例 2. 取对数运算在数学解题中的应用（源于教材习题）

对数的价值在于简化计算，必修一教材中的一道复习题，可通过取对数运算直接得证，取对数可将乘除问题转化为加减问题，因此成为很多高考题的优化方法。由此，我开设了专题研究课《取对数运算在数学解题中的应用》。

（必修 1 教材复习题）已知 a,b,c 均为不等于 1 的正数，且 $ab\neq 1$，求证：$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$。

探究 1.（2010 江苏卷）实数 x,y 满足 $3\leqslant xy^2\leqslant 8, 4\leqslant \dfrac{x^2}{y}\leqslant 9$，则 $\dfrac{x^3}{y^4}$ 的最大值是________。

解 取常用对数，原问题可转化为：已知 $\begin{cases}\lg 3\leqslant \lg x+2\lg y\leqslant \lg 8,\\ \lg 4\leqslant 2\lg y-\lg y\leqslant \lg 9,\end{cases}$ 求 $3\lg x-4\lg y$ 的取值范围。易求得 $3\lg x-4\lg y$ 的取值范围是 $[\lg 2,\lg 27]$，从而 $\dfrac{x^3}{y^4}$ 的最大值为 27。 □

探究 2.（2013 年苏锡常镇二模）数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{b_n}+b_{n-1}=2(n\geqslant 2, n\in\mathbb{N}^+)$。

（1）求 b_2，b_3，猜想数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，并用数学归纳法证明；

（2）设 $x=b_n^n$，$y=b_n^{n+1}$，比较 x^x 与 y^y 的大小。

解 （1）$b_n=\dfrac{n}{n+1}$，过程略。

（2）x^x 与 y^y 均为正数，同取自然底数的对数，即比较 $x\ln x$ 与 $y\ln y$ 的大小。

$$x\ln x=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot n\ln\frac{n}{n+1}=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\ln\frac{n}{n+1};$$
$$y\ln y=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot (n+1)\ln\frac{n}{n+1}=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\ln\frac{n}{n+1},$$

所以 $x\ln x=y\ln y$，从而 $x^x=y^y$。 □

探究 3.（2008 江苏卷）若 $f_1(x)=3^{|x-p_1|}$，$f_2(x)=2\cdot 3^{|x-p_2|}$，$x\in\mathbb{R}$，$p_1$，$p_2$ 为常数，且

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & f_1(x)\leqslant f_2(x),\\ f_2(x), & f_1(x)>f_2(x)。\end{cases}$$

（I）求 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数成立的充要条件（用 p_1，p_2 表示）；

（II）设 a,b 为两实数，$a<b$ 且 $p_1,p_2\in(a,b)$，若 $f(a)=f(b)$。求证：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度和为 $\dfrac{b-a}{2}$（闭区间 $[m,n]$ 的长度定义为 $n-m$）。

解 通过取对数运算将问题转化为两个含参的绝对值函数问题，问题得以简化，解题过程略。 □

（变型题）若 $g_1(x)=|x-p_1|$，$g_2(x)=|x-p_2|+\log_3 2$，$x\in\mathbb{R}$，p_1，p_2 为常数，且

$$g(x)=\begin{cases}g_1(x), & g_1(x)\leqslant g_2(x),\\ g_2(x), & g_1(x)>g_2(x)。\end{cases}$$

（I）求 $g(x)=g_1(x)$ 对所有实数成立的充要条件（用 p_1，p_2 表示）；

（II）设 a,b 为两实数，$a<b$ 且 $p_1,p_2\in(a,b)$，若 $g(a)=g(b)$。求证：$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度和为 $\dfrac{b-a}{2}$（闭区间 $[m,n]$ 的长度定义为 $n-m$）。

探究 4. 取对数研究的经典课题：a^b 和 b^a 谁大？

引例　设 $0<a<b<1$，比较 a^b 和 b^a 的大小。

解　a^b 和 b^a 均为正数，两边同取自然底数的对数，即比较 $b\ln a$ 与 $\ln b$ 的大小，为了使得两边结构对等，再次转化为比较 $\dfrac{\ln a}{a}$ 与 $\dfrac{\ln b}{b}$ 的大小，构造辅助函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 比较即可。 □

结论和方法成为不少高考试题的命题背景。

1.（全国高考）(1) 已知 a,b 为实数，且 $\mathrm{e}<a<b$，其中 e 是自然对数的底数，证明 $a^b>b^a$；

(2) 如果正实数 a,b 满足 $a^b=b^a$，且 $a<1$，证明：$a=b$。

2.（上海高考）已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，某同学发现：总存在正实数 $a,b(a<b)$，使 $a^b=b^a$，则 a 的取值范围为________。

生长点 3. 以试题的再研究作为专题研究课课题的生长点

历年高考试题（包括一些高质量的模拟试卷）在高三复习中的价值和作用是巨大的，题目不会重复出现，但其中蕴含的数学思想与方法却是相通的。所以研究试题和对试题的重组也成为我开设专题研究课课题的重要生长点之一。

案例 3. 两动点间距离的最值问题研究

引例　（2013 年苏锡常镇高三数学二模）分别在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与直线 $y=\mathrm{e}x-1$ 上各取一点 M 与 N，则 MN 的最小值为________。

解　曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上点 M 一旦确定，满足条件的最小值时的点 N 也随之确定，问题可转化为一个动点的问题：求曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上一点 M，使其到直线 $y=\mathrm{e}x-1$ 的距离最短。方法：两个动点向一个动点转化。 □

变式 1.（两圆中的两动点问题）如果 M 是函数 $y=f(x)$ 图像上的点，N 是函数 $y=g(x)$ 图像上的点，且 M,N 两点之间的距离 $|MN|$ 能取到最小值 d，那么将 d 称为函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 之间的距离。按这个定义，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 和 $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 之间的距离是________。

变式 2.（圆与椭圆中的两动点问题）在椭圆 $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{2}=1$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 各取一点 M,N，则 MN 的最小值为________。

变式 3.（双曲线中的两动点问题）已知 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),x_1x_2<0$ 是双曲线 $y=\dfrac{3}{x}$ 图像上两点，则 MN 的最小值为________。

生长点 4. 以教研活动获得的启示作为专题研究课课题的生长点

教研活动是教师日常教育生活中必不可少的一部分。每个人都会从活动获得自身从事新的实践活动的重要启示。我时常以各类教研活动中获得的启示和灵感作为开设专题研究课课题的生长点之一。

苏州市教科院陈兆华老师在《中学数学月刊》2011 年 8 月刊发表的一篇文章：《透视数学高考，展望课改方向》，文章中有一个观点让我很受启发："除了传统意义上的结合函数图像研究代数问题外，有时画一些示意图，其实也是数形结合的体现"。陈老师利用示意图轻松、简单的给出了 2011 年江苏高考填空压轴 13 题的优化解法。读完后，在佩服陈老师研究深度之余，不得不引起我对高三解题教学的反思：学生总是对压轴题感到无力，其实并不是题目真的难，而是我的讲解不够自然、不贴近学生的真实想法。为此，我研究了近年来江苏的高考试题的压轴题，发现不少压轴题都可以通过数形结合或者特殊化的思想加以解决，为此我开设了专题研究课《尝试法在数学解题中的应用》。

案例 4. 尝试法在数学解题中的应用

一、试图（数形结合思想，整体宏观把握函数的性态）

例 1. 函数 $f(x)=|x^2+x-t|$ 在区间 $[-1,2]$ 上最大值为 4，则实数 $t=$________。

解 由图像易得 $f(x)_{\max}=\max\left\{f\left(-\dfrac{1}{2}\right),f(2)\right\}$，故 $\begin{cases}f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4,\\ f(2)\leqslant 4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(2)=4,\\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 4,\end{cases}$ 得 $t=2$ 或 $\dfrac{15}{4}$。 □

例 2.（2005 江苏卷）已知 $a\in\mathbb{R}$，函数 $f(x)=x^2|x-a|$，求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值。

解 $f(x)=\left|x^3-ax^2\right|$，令 $g(x)=x^3-ax^2$，$g'(x)=x(3x-2a)$，由导函数图像可知，无论 a 取何值，图像在 $[1,2]$ 的单调性可能为：单调递减、单调递增或先减后增。

（1）若 $g(1)g(2)\leqslant 0$，即 $1\leqslant a\leqslant 2$ 时，$f(x)_{\min}=0$；

（2）若 $\begin{cases}g(1)>0,\\ g(2)>0,\end{cases}$ 即 $a<1$ 时，此时 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=g(1)=1-a$；

（3）若 $\begin{cases}g(1)<0,\\ g(2)<0,\end{cases}$ 即 $a>2$ 时，此时 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 单调递减或先减后增，故

$$f(x)_{\min}=\min\{-g(1),-g(2)\}=\min\{a-1,4a-8\}=\begin{cases}a-1, & a>\dfrac{7}{3},\\ 4a-8, & 2<a\leqslant\dfrac{7}{3},\end{cases}$$

综上，$f(x)_{\min}=\begin{cases}1-a, & a\leqslant 1,\\ 0, & 1<a\leqslant 2,\\ 4(a-2), & 2<a\leqslant\dfrac{7}{3},\\ a-1, & a>\dfrac{7}{3}。\end{cases}$ □

二、试数（将问题特殊化，从而发现问题的结论或研究问题的一般思路）

例 1.（2013 年南京、淮安高三数学二模）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=7n+2$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n^2$。若将数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 中相同的项按从小到大的顺序排列后看作数列 $\{c_n\}$，则 c_9 的值为________。

解 $\{c_n\}$ 中的项目依次为：$b_3,b_4,b_{10},b_{11},b_{17},b_{18},b_{24},b_{25},b_{31},\cdots$，观察满足条件的 $\{b_n\}$ 的项下标，容易得到数列 $\{c_n\}$ 的通项公式为：$c_n=\begin{cases}\left(\dfrac{7n-1}{2}\right)^2, & n\text{ 为奇数},\\ \left(\dfrac{7n-6}{2}\right)^2, & n\text{ 为偶数}。\end{cases}$。 □

例 2. 设 $t\in\mathbb{R}$，若 $n\in\mathbb{N}^+$ 时，不等式 $(tn-20)\ln\dfrac{n}{t}\geqslant 0$ 恒成立，则 t 的取值范围是________。

解 当 $n=1$ 时，$t\in[1,20]$；当 $n=2$ 时，$t\in[2,10]$；当 $n=3$ 时，$t\in\left[3,\dfrac{20}{3}\right]$；当 $n=4$ 时，$t\in[4,5]$；当 $n=5$ 时，$t\in[4,5]$；当 $n=6$ 时，$t\in\left[\dfrac{10}{3},6\right]$；当 $n=7$ 时，$t\in\left[\dfrac{20}{7},7\right]$；当 $n=8$ 时，$t\in\left[\dfrac{5}{2},8\right]$，我们发现当 n 增大时，t 的范围先不断缩小而后不断增大（呈现区间套思想），故易得 $t\in[4,5]$。 □

综上，以学生的信息反馈、以教材内容、以对试题的再研究和以教研活动中获得的启示作为高三数学专题研究课课题选取的重要生长点。以期通过专题研究课的开设，提高高三数学复习课的有效性，提升学生的思维品质和思维能力。

1.4 变换主元，柳暗花明——程汉波

恩格斯曾将数学凝练的概括为：数学是研究空间形式与数量关系学科。可见，在许多数学问题中，都会含有常量、参量、变量等多个量（统称为数量），有时按照常规思维对这些数量主次性的区分往往使我们陷入繁难甚至无法解决的境地，但若变换角度，反客为主，往往能事半功倍，收到意想不到的效果。

例 1.4.1. （2012 年全国高中数学联赛江苏省预赛第 11 题）解关于 x 的方程

$$\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)x^3+\left(3\cos^2\frac{\theta}{2}-4\right)x+\sin\theta=0。$$

分析 这是一个关于 x 的一元三次方程，若采取因式分解法求解，一时真不知道如何分解；若利用三次方程的求根公式求解，显然十分繁琐，况且考纲也并不要求中学生掌握其求根公式，怎么办？如若发现方程中系数与常数项 $\cos^2\frac{\theta}{2}, 3\cos^2\frac{\theta}{2}-4, \sin\theta$ 可变为二次齐次的 $\cos^2\frac{\theta}{2}, -\cos^2\frac{\theta}{2}-4\sin^2\frac{\theta}{2}, 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$，进而可以转变为以 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的表达式为系数的方程，且最高次数是 2 次，然后转换视角，将原方程视作 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的一元二次方程，则顺利达到降次的目的，豁然开朗，柳暗花明。

解 原方程可变为

$$\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)x^3-\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)x+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0。\tag{1.4.1}$$

（1）若 $\cos\frac{\theta}{2}=0$，则 $\sin^2\frac{\theta}{2}=1$，则式 (1.4.1) 即为 $-4x=0$，解得 $x=0$；

（2）若 $\cos\frac{\theta}{2}\neq 0$，在式 (1.4.1) 两端同时除以 $\cos^2\frac{\theta}{2}$ 得

$$x^3-\left(1+4\tan^2\frac{\theta}{2}\right)x+2\tan\frac{\theta}{2}=0,$$

即为

$$4x\tan^2\frac{\theta}{2}-2\tan\frac{\theta}{2}+x-x^3=0,$$

因式分解得

$$\left(2\tan\frac{\theta}{2}-x\right)\left[2x\tan\frac{\theta}{2}-\left(x^2-1\right)\right]=0,$$

于是

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{x}{2},\quad \tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-x^2}{2x},$$

所以反解得

$$x=2\tan\frac{\theta}{2}\text{ 或 }x=-\tan\frac{\theta}{2}\pm\sec\frac{\theta}{2}。$$

综上：当 $\cos\frac{\theta}{2}=0$，即 $\theta=\pi+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，原方程的解为 $x=0$；当 $\cos\frac{\theta}{2}\neq 0$，即 $\theta\neq\pi+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，$x=2\tan\frac{\theta}{2}$ 或 $x=-\tan\frac{\theta}{2}\pm\sec\frac{\theta}{2}$。 □

上述“变换主元，反客为主”的技巧突破了一元三次方程难以因式分解时难以直接求解的瓶颈，思路独特，令人耳目一新。这启示我们：在某些情况下，可以人为地突出某些元素的地位和作用，变换主元，独辟蹊径，往往会柳暗花明又一村。下面结合若干例题，阐述变换主元的技巧在解题中的巧妙应用。

例 1.4.2. （2006 年上海交通大学保送推优试题）设 $k\geqslant 9$，解关于 x 的方程

$$x^3+2kx^2+k^2x+9k+27=0。$$

分析　这是一个关于 x 的一元三次方程，按照常规思路，我们希望对方程左端进行因式分解达到降次的目的，进而得到方程的根，但得出因式分解的结果却步履维艰，读者可尝试；

但假若转换视角，将 x 看作参数，则原方程可以看作关于 k 的一元二次方程，有效的达到了降次的目的，进而得到巧妙且计算简单的解法。

解　原方程可以整理为关于 k 的方程

$$xk^2+(2x^2+9)k+x^3+27=0，$$

即为

$$(k+x+3)(xk+x^2-3x+9)=0，$$

解得 $k=-x-3$，$k=-\dfrac{x^2-3x+9}{x}$，反解 x 得原方程的解为

$$x_1=-k-3，x_{2,3}=\frac{3-k\pm\sqrt{(k-9)(k+3)}}{2}。$$

□

例 1.4.3.（2007 年上海交通大学冬令营试题）设 $f(x)=(1+a)x^4+x^3-(3a+2)x^2-4a$，试证明对任意实数 a：

（1）方程 $f(x)=0$ 总有一个相同的实数根；

（2）存在 $x_0\in\mathbb{R}$，恒有 $f(x_0)\neq 0$。

分析　$f(x)=0$ 是一个关于 x 的一元四次方程，因式分解困难重重，一元四次方程求根公式更是空中楼阁，怎么办？方程 $f(x)=0$ 中关于 a 是一次的，若视 x 为参数，a 为变量，变换主元，反客为主，则很好的达到了降次的效果，可谓“四两拨千斤”！

解　将 $f(x)=0$ 整理为关于 a 的方程为

$$f(x)=(x^4-3x^2-4)a+x^4+x^3-2x^2=0，$$

即为

$$f(x)=(x-2)(x+2)(x^2+1)a+x^2(x-1)(x+2)=0，$$

因此，对任意的实数 a，$x=-2$ 总是方程 $f(x)=0$ 的根，且存在 $x_0=2$，使得 $f(x_0)=16\neq 0$，故（1）（2）得证。 □

例 1.4.4.（2007 年北京大学保送生考试数学试题）证明：对任意实数 k，方程 $x^2+y^2-2kx-(6+2k)y-2k-31=0$ 恒过两定点。

分析　题设中圆的方程随着参数 k 取值的不同而相异，一时还真难以看出这些圆要过哪两个定点，思维受阻，怎么办？若转换视角，反客为主，将 k 视作主元，则拨云去雾，茅塞顿开。

证明　将圆的方程整理为关于 k 的一次函数，即

$$-(2x+2y+2)k+x^2+y^2-6y-31=0，$$

令 $\begin{cases}-(2x+2y+2)=0，\\ x^2+y^2-6y-31=0，\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-6，\\ y=5，\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2，\\ y=3。\end{cases}$

于是对任意的实数 k，方程 $x^2+y^2-2kx-(6+2k)y-2k-31=0$ 恒过两个定点 $(-6,5),(2,3)$。 □

例 1.4.5.（2011 年浙江省高中数学竞赛第 10 题）对任意 $a\in[-1,1]$，已知 $f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a>0$ 恒成立，求 x 的取值范围。

分析 题中要求二次函数 $f(x)$ 的值恒大于零，则须使 $f(x)$ 的最小值大于零，而 $f(x)$ 的最小值一定在对称轴处取得吗？这要由 x 的范围来定，而 x 的范围正是我们所要求的，真是“山重水复疑无路”啊！考虑到在函数 $f(x)$ 中 x 是自变量，是“主”，a 是变化的参量，是“客”，若将主客角色逆转，反客为主，把 $f(x)$ 看作是 a 的函数，则将“柳暗花明又一村”了。

解 设 $g(a)=(x-2)a+x^2-4x+4$，则函数 $g(a)>0$ 对任意的 $a\in[-1,1]$ 恒成立，于是有 $\begin{cases} g(-1)>0, \\ g(1)>0, \end{cases}$ 解得 $x<1$ 或 $x>3$，即 x 的取值范围为 $(-\infty,1)\bigcup(3,+\infty)$。 □

例 1.4.6.（2011 全国高中数学联赛湖北省预赛第 10 题）已知 $a,b\in\mathbb{R}$，关于 x 的方程 $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ 有一个实根，求 a^2+b^2 的最小值。

分析 参考答案证法的思路是：设 r 为方程 $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ 的实根，则有 $(r^2+1)^2+r(ar^2+b)=0$。显然 $r\neq0$，则由柯西不等式易得 $(ar^2+b)^2\leqslant(a^2+b^2)(r^4+1)$，于是 $a^2+b^2\geqslant\dfrac{(ar^2+b)^2}{r^4+1}=\left[-\dfrac{(r^2+1)^2}{r}\right]^2\times\dfrac{1}{r^4+1}=\dfrac{(r^2+1)^4}{r^2(r^4+1)}=\dfrac{(r^4+2r^2+1)^2}{r^2(r^4+1)}$，最后求得右端关于 r 的代数式的最小值。上述解法首先将原方程变形，ar^2+b 可用 r 表出，继而运用柯西不等式对 a^2+b^2 进行放缩与变形，最终求得其最小值。该解法技巧性之强，难度之大令人感觉很不自然，也难以想到。题目要求 a^2+b^2 的最小值，即点 (a,b) 到原点距离的平方，受此启发，我们不妨转换视角，将题目中关于 x 的方程看作是关于参数 a,b 的直线方程，则可以得到如下简洁自然的解法。

解 设 r 为方程 $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ 的实根，则有 $r^4+ar^3+2r^2+br+1=0$，显然 $r\neq0$，并设直线 $l:r^3a+rb+r^4+2r^2+1=0$，则原点到直线 l 上的点的距离应不小于原点到直线 l 的垂直距离，于是有

$$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\left|r^4+2r^2+1\right|}{\sqrt{r^6+r^2}}=\frac{(r^2+1)^2}{\sqrt{r^2(r^4+1)}}=\frac{\sqrt{2}(r^2+1)^2}{\sqrt{2r^2(r^4+1)}}\geqslant\frac{\sqrt{2}(r^2+1)^2}{\dfrac{2r^2+r^4+1}{2}}=2\sqrt{2},$$

则 $a^2+b^2\geqslant8$，经检验，等号可以取得，即 a^2+b^2 的最小值为 8。 □

例 1.4.7. 若对任意的 $k\in(-1,1]$，关于 x 的不等式 $kx>6\ln x+x^2-8x+c\,(c<3)$ 在 $x\in(0,6]$ 上恒成立，求 c 的取值范围。

分析 该题变量、参数较多，若按照一般思路，习惯将 x 看作主元，分离参变量得到 $c<-x^2+(k+8)x-6\ln x$，令 $g(x)=-x^2+(k+8)x-6\ln x$，$x\in(0,6]$，因而只需要 $c<g(x)_{\min}$，$x\in(0,6]$，由于 $g'(x)=-2x+(k+8)-\dfrac{6}{x}$ 在 $x\in(0,6]$ 上的正负性不确定，因此要得到 $g(x)_{\min}$ 并非易事，导致思维受阻。假若发现问题中 k,c,x 是相互独立的，逐次变换主元，则可得到以下优美的解法。

解 首先视 k 为主元，分离参数 k 得，$k>\dfrac{6\ln x}{x}+x-8+\dfrac{c}{x}$ 对任意的 $k\in(-1,1]$，$x\in(0,6]$ 恒成立，则 $-1\geqslant\dfrac{6\ln x}{x}+x-8+\dfrac{c}{x}$。

然后视 c 为主元，分离参数 c 得，$c\leqslant-x^2-6\ln x+7x$ 对任意的 $x\in(0,6]$ 恒成立，令 $f(x)=-x^2-6\ln x+7x$，$x\in(0,6]$，则 $c\leqslant f(x)_{\min}$，容易求得 $f(x)_{\min}=6-6\ln6$。

所以，c 的取值范围为 $c\leqslant6-6\ln6$。 □

例 1.4.8.（2011 年第二届陈省身杯数学奥林匹克第 6 题）对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$，证明：

$$-\frac{3}{2}(x^2+y^2+2z^2)\leqslant3xy+yz+zx\leqslant\frac{3+\sqrt{13}}{4}(x^2+y^2+2z^2)。$$

分析 参考答案证法的思路是：当 x, y, z 均为 0 时，显然成立；当 x, y, z 不同时为 0 时，将原不等式变形为 $-\dfrac{3}{2} \leqslant F(x,y,z) = \dfrac{3xy+yz+zx}{x^2+y^2+2z^2} \leqslant \dfrac{3+\sqrt{13}}{4}$，进而将问题转化为求三元函数 $F(x,y,z)$ 的值域。然而，该证法的运算量与代数变形技巧均不容小视，其实，若抓住二次齐次式的特征，转换视角，锁定主元，可得到以下直接简单的证法。

证明 将左端不等式 $-\dfrac{3}{2}(x^2+y^2+2z^2) \leqslant 3xy+yz+zx$ 整理变形得

$$6z^2+2(x+y)z+3(x^2+2xy+y^2) \geqslant 0,$$

由于 $\Delta_z = 4(x+y)^2 - 4\times 6\times 3(x+y)^2 = -68(x+y)^2 \leqslant 0$，故得证。

将右端不等式 $3xy+yz+zx \leqslant \dfrac{3+\sqrt{13}}{4}(x^2+y^2+2z^2)$ 整理变形得

$$\frac{3+\sqrt{13}}{2}z^2-(x+y)z+\frac{3+\sqrt{13}}{4}(x^2+y^2)-3xy \geqslant 0,$$

由于

$$\begin{aligned}\Delta_z &= (x+y)^2 - 4\times\frac{3+\sqrt{13}}{2}\times\left[\frac{3+\sqrt{13}}{4}\left(x^2+y^2\right)-3xy\right]\\ &= -\left(10+3\sqrt{13}\right)\cdot(x^2+y^2)+\left(20+6\sqrt{13}\right)xy\\ &= -\left(10+3\sqrt{13}\right)(x-y)^2 \leqslant 0,\end{aligned}$$

故得证。 □

以上几例只是对主元法的使用作了初步探究。利用主元法，我们可以分解因式、解方程（组）、证明不等式、求参数范围、求最值、解决过定点和恒成立等问题，它在中学数学中有着广泛的应用，主元若选择得当，不但解题思路清晰，而且解法简洁明快。另外，主元法也是解题的一种重要思想方法，其间充满着辩证思维，蕴含了转化与化归的数学思想，体现了和谐统一、普遍联系的哲学观点，我们若能灵活运用它，必将收到事半功倍之效。

能力提升

2.1 配以对偶，柳暗花明——程汉波

大家知道，数学中有许多问题有着和谐的对称美，如等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项顺序和与逆序和相加，由此巧妙地得到前 n 项求和公式。解题中如果能善于挖掘与利用这种和谐对称美，往往会有意想不到的收获，配以对偶这种解题技巧就是其中典型的一例。

例 2.1.1. （第 46 届 IMO 第 3 题）设正实数 x,y,z 满足 $xyz\geqslant 1$，证明：

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 0。$$

当年此题的平均得分为 0.91 分，摩尔多瓦选手 Boreico Iurie 以优美的证法获得了第 46 届 IMO 特别奖。他的证法大致如下：

证明 设

$$\begin{aligned}A&=\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}=\sum\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2},\\B&=\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^5-y^2}{y^3(y^2+z^2+x^2)}+\frac{z^5-z^2}{z^3(z^2+x^2+y^2)}=\sum\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)},\end{aligned}$$

则

$$A-B=\sum\left[\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}\right]=\sum\frac{(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\geqslant 0,$$

因为 $xyz\geqslant 1$，所以

$$A\geqslant B=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\geqslant\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum(x^2-yz)\geqslant 0。\qquad\square$$

特别奖的解答针对原式 A 的特点，构造了式子 B，欲擒故纵，通过 A 与 B 间的运算，以 B 为桥梁顺利证得 $A\geqslant 0$。这启示我们：在解决某些数学问题时，针对其中某个式子 A 的特点，为其配凑一个合适的对偶式 B，使得由 A 和 B 之间的某些运算，能产生一些有用的关系式，从而促使问题向有利的方向转化，进而解决问题。我们将这种解决问题的技巧称为配以对偶的技巧。运用该技巧的一般步骤是：

步骤 1：将已知式令为 A 并配其对偶式 B；

步骤 2：对 A 与 B 进行适当的运算；

步骤 3：转化或消去 B，从而解决原问题。

配以对偶，功效独特，往往能柳暗花明又一村。以下结合若干实例，对配以对偶在数学解题中的应用加以阐述，望对读者起到抛砖引玉的作用。

例 2.1.2. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，且 $abc=1$，求证：

$$\frac{1}{a\,(a+b)}+\frac{1}{b\,(b+c)}+\frac{1}{c\,(c+a)}\geqslant\frac{3}{2}。$$

证明 设

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{a\,(a+b)}+\frac{1}{b\,(b+c)}+\frac{1}{c\,(c+a)},\\B&=\frac{1}{a\,(b+c)}+\frac{1}{b\,(c+a)}+\frac{1}{c\,(a+b)},\end{aligned}$$

无论 a,b,c 大小顺序如何，$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 与 $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ 大小顺序都相同，因而 A 为乱序和，B 为逆序和，则由排序不等式知 $A\geqslant B$。又

$$\begin{aligned}A+B&=\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}+\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}+\frac{1}{c(a+b)}\\&=\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\\&=\frac{b(c+a)}{a+b}+\frac{c(a+b)}{b+c}+\frac{a(b+c)}{c+a}\\&\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b(c+a)}{a+b}\cdot\frac{c(a+b)}{b+c}\cdot\frac{a(b+c)}{c+a}}\\&=3,\end{aligned}$$

所以 $2A\geqslant A+B\geqslant 3$，故 $A\geqslant\frac{3}{2}$。 □

例 2.1.3. 设 x,y,z 是正实数，求证：

$$\frac{z\left(z^2-y^2\right)}{x+y}+\frac{x\left(x^2-z^2\right)}{y+z}+\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{z+x}\geqslant 0。$$

证明 记不等式左边为 A，构造其对偶式

$$B=\frac{z\left(z^2-x^2\right)}{x+y}+\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{y+z}+\frac{y\left(y^2-z^2\right)}{z+x},$$

则

$$A-B=\frac{z\left(x^2-y^2\right)}{x+y}+\frac{x\left(y^2-z^2\right)}{y+z}+\frac{y\left(z^2-x^2\right)}{z+x}=z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)=0,$$

所以 $A=B$。又

$$\begin{aligned}A+B&=\left(\frac{z\left(z^2-y^2\right)}{x+y}+\frac{y\left(y^2-z^2\right)}{z+x}\right)+\left(\frac{x\left(x^2-z^2\right)}{y+z}+\frac{z\left(z^2-x^2\right)}{x+y}\right)+\left(\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{z+x}+\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{y+z}\right)\\&=\frac{(x+y+z)(y+z)(y-z)^2}{(x+y)(z+x)}+\frac{(x+y+z)(z+x)(z-x)^2}{(y+z)(x+y)}+\frac{(x+y+z)(x+y)(x-y)^2}{(z+x)(y+z)}\\&\geqslant 0。\end{aligned}$$

所以 $A\geqslant 0$。 □

注 类似配以对偶的技巧，可以证明著名的 W. Janous 猜想“设 x,y,z 是正实数，求证：$\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}\geqslant 0$”。

例 2.1.4. 若 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1,a_i\in\mathbb{R}^+\,(i=1,2,\cdots,n)$，证明：

$$\frac{a_1^n}{a_1^{n-1}+a_1^{n-2}a_2+\cdots+a_2^{n-1}}+\frac{a_2^n}{a_2^{n-1}+a_2^{n-2}a_3+\cdots+a_3^{n-1}}+\cdots+\frac{a_n^n}{a_n^{n-1}+a_n^{n-2}a_1+\cdots+a_1^{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}。$$

证明 记不等式左边为 A，构造 A 的对偶式

$$B=\frac{a_2^n}{a_1^{n-1}+a_1^{n-2}a_2+\cdots+a_2^{n-1}}+\frac{a_3^n}{a_2^{n-1}+a_2^{n-2}a_3+\cdots+a_3^{n-1}}+\cdots+\frac{a_1^n}{a_n^{n-1}+a_n^{n-2}a_1+\cdots+a_1^{n-1}},$$

则

$$
\begin{aligned}
A-B &= \frac{a_1^n-a_2^n}{a_1^{n-1}+a_1^{n-2}a_2+\cdots+a_2^{n-1}}+\frac{a_2^n-a_3^n}{a_2^{n-1}+a_2^{n-2}a_3+\cdots+a_3^{n-1}}+\cdots+\frac{a_n^n-a_1^n}{a_n^{n-1}+a_n^{n-2}a_1+\cdots+a_1^{n-1}} \\
&= (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_1) \\
&= 0。
\end{aligned}
$$

所以 $A=B$。又

$$
A+B=\frac{a_1^n+a_2^n}{a_1^{n-1}+a_1^{n-2}a_2+\cdots+a_2^{n-1}}+\frac{a_2^n+a_3^n}{a_2^{n-1}+a_2^{n-2}a_3+\cdots+a_3^{n-1}}+\cdots+\frac{a_n^n+a_1^n}{a_n^{n-1}+a_n^{n-2}a_1+\cdots+a_1^{n-1}},
$$

根据排序不等式，有 $a_i^n+a_j^n \geqslant a_i^{n-1}a_j+a_ia_j^{n-1}$，$2(a_i^n+a_j^n)\geqslant(a_i+a_j)(a_i^{n-1}+a_j^{n-1})$，于是

$$
\begin{aligned}
A+B &\geqslant \frac{a_1^n+a_2^n}{\frac{n}{2}(a_1^{n-1}+a_2^{n-1})}+\frac{a_2^n+a_3^n}{\frac{n}{2}(a_2^{n-1}+a_3^{n-1})}+\cdots+\frac{a_n^n+a_1^n}{\frac{n}{2}(a_n^{n-1}+a_1^{n-1})} \\
&\geqslant \frac{(a_1+a_2)(a_1^{n-1}+a_2^{n-1})}{n(a_1^{n-1}+a_2^{n-1})}+\frac{(a_2+a_3)(a_2^{n-1}+a_3^{n-1})}{n(a_2^{n-1}+a_3^{n-1})}+\cdots+\frac{(a_n+a_1)(a_n^{n-1}+a_1^{n-1})}{n(a_n^{n-1}+a_1^{n-1})} \\
&= \frac{1}{n}[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_n+a_1)] \\
&= \frac{2}{n}。
\end{aligned}
$$

所以 $A\geqslant\frac{1}{n}$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时等号成立。 □

例 2.1.5.（《数学通讯》征解问题 118）设 a,b,c,d 是正实数，且 $abcd=1$，求 $M=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}$ 的最小值。

解 构造两个对偶式

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b}, \\
C &= \frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}+\frac{b}{a+b},
\end{aligned}
$$

则

$$
M+B=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+d}+\frac{c+d}{d+a}+\frac{d+a}{a+b}\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{(c+d)(d+a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}}=4,
$$

且

$$
\begin{aligned}
M+C &= \frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b} \\
&= (a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right) \\
&\geqslant \frac{4(c+a)}{b+c+d+a}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d} \\
&= 4,
\end{aligned}
$$

所以 $2M+B+C\geqslant 8$，又由 $B+C=4$，故 $M\geqslant 2$，当 $a=b=c=d$ 时取等。 □

编者注 题目条件中的“$abcd=1$”这一条件是多余的，此题年代久远，原题亦无此多余条件，不知为何《数学通讯》要用其来作征解题？

例 2.1.6. 对任意的自然数 n，求证：$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)>\sqrt[3]{3n+1}$。

证明 设

$$\begin{aligned}A&=(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)=\frac{2}{1}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{3n-1}{3n-2},\\B&=\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1},\\C&=\frac{4}{3}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{3n+1}{3n},\end{aligned}$$

容易证明对任意正整数 m，有 $\frac{m+1}{m}>\frac{m+2}{m+1}$，所以 $A>B>C$，于是

$$A^3>ABC=\frac{3n+1}{1}=3n+1,$$

所以 $A>\sqrt[3]{3n+1}$。 □

例 2.1.7.（2012 年“北约联盟”自主招生试题）求证：对任意正整数 n，$\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ 必可以表示成 $\sqrt{s}+\sqrt{s-1}$ 的形式，其中 $s\in\mathbb{N}^+$。

证明 设 $a_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^n$，构造其对偶式 $b_n=\left(\sqrt{2}-1\right)^n$。

由二项式定理知，存在整数 a,b，使得 $a_n=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，$b_n=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，则

$$1=\left(\sqrt{2}+1\right)^n\left(\sqrt{2}-1\right)^n=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b,$$

于是

$$a=b+1,$$

所以

$$a_n=\sqrt{b+1}+\sqrt{b},$$

令 $b+1=s$，则 $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{s}+\sqrt{s-1}$，得证。 □

例 2.1.8.（2011 年全国高中数学联赛山西省预赛第 9 题）$\triangle ABC$ 三个内角的度数满足：$\frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{1}{3}$，求 $T=\cos A+\cos B+\cos C$ 的值。

解 由 $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{1}{3}$，且 $A+B+C=\pi$，得 $A=\frac{\pi}{13},B=\frac{3\pi}{13},C=\frac{9\pi}{13}$，则

$$T=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13},$$

又设

$$W=\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13},$$

则

$$T+W=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13},$$

构造构造正 13 边形 $A_1A_2\cdots A_{13}$，设 $\overrightarrow{OA_1}=\left(\cos\frac{\pi}{13},\sin\frac{\pi}{13}\right)$，$A_1A_2\cdots A_{13}$ 按逆时针方向排列，则点 $A_1A_2\cdots A_{13}$ 的横坐标依次为 $\cos\frac{\pi}{13},\cos\frac{3\pi}{13},\cdots,\cos\frac{25\pi}{13}$，由 $\sum\limits_{i=1}^{26}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$ 得

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos\frac{25\pi}{13}=0,$$

由诱导公式 $\cos\alpha=\cos(2\pi-\alpha)$，则

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2},$$

即 $T+W=\dfrac{1}{2}$，又

$$\begin{aligned}T\cdot W&=\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}\right)\\&=-\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{13}-\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}-\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}-\cos\frac{6\pi}{13}\right)\\&=-\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}\right)\\&=-\frac{3}{4},\end{aligned}$$

故 T,W 是方程 $x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}=0$ 的两根，解得 $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{4}$，又由于 $T>0$，所以 $T=\dfrac{1+\sqrt{13}}{4}$。 □

结语　在数学解题过程中，如果我们能恰当的构造出对偶关系式，不仅能够收到以简驱繁、简缩思维、拓宽思路的功效，从而提高解题速度，而且让人萌生一种“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”的美妙感觉，对于激发学生的学习兴趣也是大有裨益。其实，对偶思想不论在古典数学还是在近现代数学中都是一种不朽的数学思想。

参考文献

[1] 蔡小雄. 代数变形 [M]. 浙江: 浙江大学出版社, 2008,6.
[2] 胡典顺. 数学解题应该追求自然 [J]. 数学通讯. 2009,7-8.
[3] 严桂华. 构造对偶式解赛题 (高一、高二、高三)[J]. 数理天地 (高中版). 2004,8.
[4] 管宏斌, 蔡敏. 构造对偶式的八种途径 [J]. 数学教学. 2005,7.

2.2 一个等差型连根式不等式的高次推广——李明

文 [1] 推广连根式不等式 $\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{层根号}}<\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$（其中 $a>0$，$n\in\mathbb{N}^{+}$）得到了如下的等差型连根式不等式：

$$\sqrt{a_1+\lambda\cdot\sqrt{a_2+\cdots+\lambda\cdot\sqrt{a_n}}}<\sqrt{a_2+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}, \tag{2.2.1}$$

其中 $n\geqslant 2$, $n\in\mathbb{N}$, $\lambda>0$，$\{a_n\}$ 是正项等差数列且满足公差 $d\geqslant 0$。

笔者研究发现式 (2.2.1) 还可继续推广成如下的高次连根式不等式：

$$\sqrt[m]{a_1+\lambda\cdot\sqrt[m]{a_2+\cdots+\lambda\cdot\sqrt[m]{a_n}}}<\sqrt[m]{a_2+\left(\lambda-\frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}}+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \tag{2.2.2}$$

其中 $m,n\geqslant 2$, $m\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $\lambda>0$, $\{a_n\}$ 是正项等差数列且满足公差 $d\geqslant 0$。

证明上述不等式 (2.2.2) 需借助如下一条引理。

引理 2.2.1. 设 $u,v>0$, $m\geqslant 2$, $m\in\mathbb{R}$，则 $(u+v)^m\geqslant u^m+muv^{m-1}+v^m$。

证明 令 $x=\frac{u}{v}>0$，于是只需证 $(x+1)^m\geqslant x^m+mx+1$。令 $f(x)=(x+1)^m-x^m-mx-1$，则 $f'(x)=m[(x+1)^{m-1}-(x^{m-1}+1)]$。于是 $f''(x)=m(m-1)[(x+1)^{m-2}-x^{m-2}]\geqslant 0$，所以 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$，于是 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即 $(x+1)^m\geqslant x^m+mx+1$，引理得证。 □

下面用数学归纳法并结合上述引理来证明不等式 (2.2.2)。

证明 只需考虑 $d>0$ 的情形，$d=0$ 时的情形文 [2] 已经证实。

记

$$x_k=\sqrt[m]{a_k+\lambda\cdot\sqrt[m]{a_{k+1}+\cdots+\lambda\cdot\sqrt[m]{a_n}}},\qquad (1\leqslant k\leqslant n) \tag{2.2.3}$$

$$M_k=\sqrt[m]{a_k+\left(\lambda-\frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}}+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}。\quad (1\leqslant k\leqslant n+1) \tag{2.2.4}$$

当 $k=n$ 时，$x_n=\sqrt[m]{a_n}<M_{n+1}$ 显然成立。

假设 $x_k<M_{k+1}$ 成立，其中 k 是区间 $[2,n]$ 上的某个整数，则

$$x_{k-1}=\sqrt[m]{a_{k-1}+\lambda x_k}<\sqrt[m]{a_{k-1}+\lambda M_{k+1}},$$

于是，欲证 $x_{k-1}<M_k$，只需证 $\sqrt[m]{a_{k-1}+\lambda M_{k+1}}\leqslant M_k$，即证

$$M_k^m\geqslant a_{k-1}+\lambda M_{k+1}。 \tag{2.2.5}$$

由引理可得

$$\begin{aligned}
M_k^m&=\left[\sqrt[m]{a_k+\left(\lambda-\frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}}+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right]^m\\
&\geqslant\left[\sqrt[m]{a_k+\left(\lambda-\frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}}\right]^m+m\sqrt[m]{a_k+\left(\lambda-\frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}}\left[\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right]^{m-1}+\left[\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right]^m\\
&=a_k+\lambda\cdot\left[\sqrt[m]{a_k+\left(\lambda-\frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}}+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right]
\end{aligned}$$

$$= a_k + \lambda M_k,$$

于是只需证

$$a_k + \lambda M_k \geqslant a_{k-1} + \lambda M_{k+1}, \tag{2.2.6}$$

化简即证

$$M_{k+1} - M_k \leqslant \frac{d}{\lambda}, \tag{2.2.7}$$

即证

$$\sqrt[m]{a_{k+1} + \left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}} - \sqrt[m]{a_k + \left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}} \leqslant \frac{d}{\lambda}。 \tag{2.2.8}$$

对式 (2.2.8) 左侧应用拉格朗日中值公式，即证

$$\frac{d}{m} \cdot \xi^{\frac{1-m}{m}} \leqslant \frac{d}{\lambda}, \tag{2.2.9}$$

其中 $a_k + \left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} < \xi < a_{k+1} + \left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}$。

整理式 (2.2.9)，即证

$$\xi \geqslant \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{\frac{m}{1-m}}。 \tag{2.2.10}$$

注意到 $\xi > a_k + \left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} > \left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}$，于是证明式 (2.2.10)，只需证明

$$\left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} \geqslant \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{\frac{m}{1-m}}, \tag{2.2.11}$$

化简即证 $m \geqslant 2$，由已知条件知成立，所以式 (2.2.5) 得证，即 $x_{k-1} < M_k$ 成立。

于是，由数学归纳法，我们得到了 $x_1 < M_2$ 成立，即不等式 (2.2.2) 得证。 □

最后指出，在式 (2.2.2) 中取 $\lambda = m$，我们可得到如下的简洁推论：

$$\sqrt[m]{a_1 + m \cdot \sqrt[m]{a_2 + \cdots + m \cdot \sqrt[m]{a_n}}} < \sqrt[m]{a_2 + m - 1} + 1, \tag{2.2.12}$$

其中 $m, n \geqslant 2$, $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\{a_n\}$ 是正项等差数列且满足公差 $d \geqslant 0$。

参考文献

[1] 李明, 严文兰. 两个根式不等式的推广 [J]. 不等式研究通讯, 2012(1):112-114.

[2] 马乾凯, 李明. 一个根式不等式的推广 [J]. 中学数学教学参考 (上旬刊 • 高中版), 2011(4):65.

编者注 式 (2.2.8) 无需用拉格朗日中值公式来证，事实上，令

$$f(d) = \frac{d}{\lambda} - \sqrt[m]{a_k + d + \left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}} + \sqrt[m]{a_k + \left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}},$$

则 $f(0) = 0$，求导得

$$f'(d) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{m}\left(a_k + d + \left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}-1},$$

由于 $m \geqslant 2$，故

$$f'(d) > \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{m}\left(\left(\lambda - \frac{\lambda}{m}\right)\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}(m-1)^{\frac{1}{m}-1},$$

再由 $m \geqslant 2$ 易得 $(m-1)^{\frac{1}{m}-1} \leqslant 1$，从而 $f'(d) > 0$，即得 $f(d) \geqslant 0$，所以式 (2.2.8) 成立。

2.3 自主招生，你准备好了吗——甘志国

1. 自主招生概况

自主招生是高校扩大招生自主权的重要举措，属于新生事物。大凡新生事物，多欠完备，却是发展的机遇。

目前，在全国 112 所“211 工程”院校中，已经有 75 所（占 67%）参与到自主招生中；在 39 所“985 工程”高校中除了三大（北约、华约、卓越联盟）一小（京都联盟）四联盟中的 27 所高校，再加上“单飞”的复旦大学、南开大学及湖南大学，一共有 30 所，已占到 985 高校的 77%。

“四联盟”的具体内涵是：

“北约”联盟成员（12 所）：北京大学、北京大学医学部、北京航空航天大学、北京师范大学、厦门大学、山东大学、武汉大学、华中科技大学、中山大学、四川大学、兰州大学、香港大学。

“华约”联盟成员（7 所）：清华大学、浙江大学、南京大学、西安交通大学、中国科学技术大学、中国人民大学、上海交通大学。

“卓越”联盟成员（9 所）：北京理工大学、重庆大学、东南大学、大连理工大学、哈尔滨工业大学、华南理工大学、天津大学、同济大学、西北工业大学。

“京都”联盟成员（5 所）：北京邮电大学、北京交通大学、北京林业大学、北京化工大学、北京科技大学。

参加自主招生对于高校和考生来说，是个双赢的过程。考生要想如愿读名校，参加自主招生是最好的捷径。可以预见，在未来的一段时间里，自主招生将会持续高热。易曰：君子见机而作，不俟终日！

2. 自主招生试题特点

下面谈谈数学自主招生试题的若干特点。

目前，高中生在数学思维和数学素养方面表现出诸多不足，比如思维广度不开阔；思路不清晰，对题目的分析不周全，难以准确识别模型以尽快将其转化为相应的数学问题；学生普遍知识面狭窄（如对复数等许多基本知识都不了解）；运算能力较低等等；尤其是创新意识和动手操作能力较差。

针对以上情形，自主招生试题有如下特点：

特点一、自主招生试题突出考查考生的数学思维与数学素养。

自主招生的目的是选拔顶尖的优秀人才，所以试题必然会突出这一特点，因为它是各种能力的核心。

自主招生试题 1.（2009 • 清华大学）有限条抛物线及其内部（指含焦点的区域）能覆盖整个平面吗？证明你的结论。

分析 本题就不是简单考查抛物线的知识，顺利解答本题需要整体考查抛物线的图形特征，解答如下：

假设有限条抛物线及其内部能覆盖整个平面，则一定有有限条抛物线的内部能覆盖整个平面。所以平面直角坐标系上的定点 A（其坐标待定）在某一条定抛物线 $\Gamma:(ax+by+c)^2=dx+ey+f$（得 $ax+by+c=0$, $dx+ey+f=0$ 表示两条相交直线）内。

设抛物线 Γ 的焦点坐标是 (s,t)，把抛物线 Γ 沿向量 $(-s,-t)$ 平移后，抛物线 Γ 变为抛物线 $\Gamma':(ax+by+c')^2=dx+ey+f'$（其焦点坐标为坐标原点 $(0,0)$）；又设定点 A 变为两相交直线 $ax+by+c'=0$, $dx+ey+f'=0$ 的交点 A'，得点 A' 在抛物线 $\Gamma':(ax+by+c')^2=dx+ey+f'$ 上。

而点 A 在抛物线 Γ 内，所以平移后，点 A' 也在抛物线 Γ' 内。前后矛盾！所以欲证成立。

注 容易证明：有限条双曲线及其内部（指含焦点的区域）能覆盖整个平面。

特点二、自主招生试题突出考查思维的广阔性（如发散思维）、深刻性与灵活性。

数学思维的关键是思维品质，如思维的宽阔与深厚。宽阔主要表现在能迅速理解题意寻找出各种不同的解题思路；深刻性则主要表现为能较快地看清问题的数学本质，在更为深入的层面上等价转化问题，即在不同的背景下寻求相同的数学结构。

自主招生样题（2010 • 清华大学等五校）甲、乙等 4 人传球，第一次由甲将球传出，每次传球时，传球者将球等可能地传给另外 3 人中的任何 1 人。

（I）经过 2 次传球后，球在甲、乙两人手中的概率各是多少？

（II）经过 n 次传球后，球仍在甲手中的概率记为 $p_n(n=1,2,\cdots)$，试求出 p_{n+1} 与 p_n 的关系式及 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$。

解　（I）用树形图（即列举法）可得答案：经过 2 次传球后，球在甲、乙两人手中的概率分别是 $\frac{1}{3},\frac{2}{9}$。

（II）p_{n+1} 与 p_n 的关系式为 $p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)(n=1,2,\cdots)$。

可求得 $p_n=\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right](n=1,2,\cdots),\lim\limits_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{4}$。 □

本题与下面的三道题有相同的数学本质（结构），请注意体会：

（2003 年高考新课程卷文科第 16 题）将 3 种作物种植在图 2.3.1 的 5 块试验田里，每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物，不同的种植方法共有________种。（以数字作答）（答案：42）

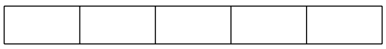


图 2.3.1

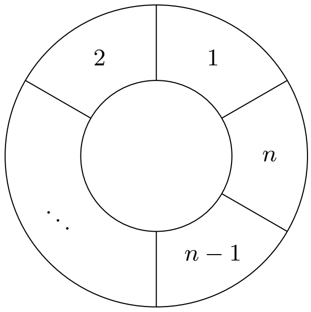


图 2.3.2

（2）（排数模型）用 1, 2, 3 三个数字排成 6 位整数，要求首位和末位排 1，且任意相邻的两个数码不相同，可以得到多少个不同的 6 位整数？（答案：10）

（3）（涂色问题）用 $m(m\geqslant 2)$ 种不同的颜色给图 2.3.2 中的 n 个区域 $1,2,\cdots,n$ 涂色，要求任意两个相邻区域涂不同颜色，且规定区域 1 只涂一种指定颜色，则不同的涂色方法有多少种？（答案：$\frac{(m-1)^n+(-1)^n(m-1)}{m}$。）

特点三、许多自主招生试题有深刻背景，可以引申推广。

自主招生试题 2.　（2005 • 上海交通大学）4 封不同的信放入 4 只写好地址的信封中，全装错的概率为________，恰好只有一次装错的概率为________。

（答案：$\frac{3}{8},\frac{1}{3}$。）

分析　本题的背景是组合数学中著名的“错位排列”问题。

自主招生试题 3.　（2010 • 南开大学数学特长班）求证：$\sin x>x-\frac{1}{6}x^3,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。

分析　本题的背景是泰勒（Brook Taylor，1685 ～ 1731）展开式，用三次求导即可获证。

自主招生试题 4.　（2009 • 清华大学）请写出三个数（正数）均为质数，且它们形成公差为 8 的等差数列，并证明你的结论。

（答案：$3,11,19$。）

质数问题非常古老，之中的猜想很多也很有名，比如哥德巴赫（Goldbach，1690 ～ 1764）猜想等。华裔数学家陶哲轩（Terence Tao，1975 ～ ）在第 25 届（2006 年）国际数学家大会上获得菲尔兹（Fields，1863 ～ 1932）奖，数学天才陶哲轩的一项重要贡献就是证明了存在任意长（至少三项）的素数等差数列（指各项都是素数的等差数列，素数就是质数）。这就是这道自主招生题的深刻背景。

关于此题的研究读者还可研读拙文 [1]。

下面的这道自主招生试题也涉及数论的核心问题——质数：

自主招生试题 5. （2013 • 北约）最多能找多少个两两不相等的正整数使其任意三个数之和为质数，并证明你的结论。

（答案：4 个，比如 1, 5, 7, 11。）

特点四、自主招生试题覆盖面广。

自主招生还没有明确的考试大纲，试题的覆盖面很广，很多题的难度超出高考、联赛，甚至高中数学的知识范围而涉及高等数学，需要考生“见多识广”。

自主招生试题 6. （2010 • 南京大学特色考试）已知 $A=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{2x+1}{x-3}\geqslant 1\right\}$, $B=\left\{y\ \middle|\ y=b\arctan t, -1\leqslant t\leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}, b\leqslant 0\right\}$, $A\bigcap B=\varnothing$，求 b 的取值范围。

（答案：$\left[-\dfrac{12}{\pi},0\right]$。）

分析 解答本题时要用到反正切函数是增函数的性质，而该知识在全国所有教材中均未讲述，但却在自主招生命题范围内。

自主招生试题 7. （2010 • 华约）设定点 A、B、C、D 是以 O 点为中心的正四面体的顶点，用 σ 表示空间以直线 OA 为轴满足条件 $\sigma(B)=C$ 的旋转，用 τ 表示空间关于 OCD 所在平面的镜面反射，设 l 为过 AB 中点与 CD 中点的直线，用 ω 表示空间以 l 为轴的 180° 旋转。设 $\sigma\circ\tau$ 表示变换的复合，先作 τ，再作 σ，则 ω 可以表示为 （ ）

（A）$\sigma\circ\tau\circ\sigma\circ\tau\circ\sigma$ （B）$\sigma\circ\tau\circ\sigma\circ\tau\circ\sigma\circ\tau$ （C）$\tau\circ\sigma\circ\tau\circ\sigma\circ\tau$ （D）$\sigma\circ\tau\circ\sigma\circ\sigma\circ\tau\circ\sigma$

（答案：D。）

分析 解答本题时要用到变换及其运算的概念，而这在《高等代数》中才能学到。

自主招生试题 8. （2005 • 上海交通大学保送推优）已知 $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{\sqrt{3}x}-\sqrt{\sqrt{3}y}$，其中 $x, y\in\mathbb{Q}$，则 $(x,y)=$________ 。

（答案：$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。）

分析 解答本题就要用到结论“若 $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$（$a,b,c,d\in\mathbb{Q}$，$\sqrt{m}$ 是无理数），则 $a=c$, $b=d$”，而此结论教材上没有，学生只有在课外书籍中获得。解答下面的自主招生试题 9 也要用到与此类似的结论。

特点五、部分自主招生试题（比如涉及恒等变形、解析几何的题）运算量较大且有较强的技巧。

运算能力是各种思维能力和技巧的显化，各种思维与创意往往体现在简捷巧妙的“计算”上，需要考生仔细体会“想”与“算”的关系，运用纯熟！“想”得深远，可以“算”得既快又好；“算”得到位，可以验证并延伸“想”的奇妙。

自主招生试题 9. （2013 • 北约）以 $\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt[3]{2}$ 为根的有理系数多项式的项的最高次数为 （ ）

（A）2 （B）3 （C）5 （D）6

解 C。显然，多项式 $f(x)=(x^2-2)[(x-1)^3+2]$ 以 $\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt[3]{2}$ 为根且是有理系数多项式。

若存在一个次数不超过 4 的有理系数多项式 $g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 其有根 $\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt[3]{2}$，其中 a,b,c,d,e 不全为 0，得

$$g(\sqrt{2})=(4a+2c+e)+(2b+d)\sqrt{2}=0,$$

所以

$$4a+2c+e=2b+d=0,$$

且

$$g(1-\sqrt[3]{2})=-(7a+b-c-d-e)-(2a+3b+2c+d)\sqrt[3]{2}+(6a+3b+c)\sqrt[3]{4}=0,$$

所以

$$7a+b-c-d-e=2a+3b+2c+d=6a+3b+c=0,$$

得方程组

$$\begin{cases} 4a+2c+e=0, & (2.3.1)\\ 2b+d=0, & (2.3.2)\\ 7a+b-c-d-e=0, & (2.3.3)\\ 2a+3b+2c+d=0, & (2.3.4)\\ 6a+3b+c=0, & (2.3.5)\end{cases}$$

$(2.3.1)+(2.3.3)$，得

$$11a+b+c-d=0, \tag{2.3.6}$$

$(2.3.2)+(2.3.6)$，得

$$11a+3b+c=0, \tag{2.3.7}$$

$(2.3.4)+(2.3.6)$，得

$$13a+4b+3c=0, \tag{2.3.8}$$

$(2.3.7)-(2.3.5)$，得 $a=0$，再由 $(2.3.7)$、$(2.3.8)$，得 $b=c=0$，又由 $(2.3.1)$、$(2.3.2)$，得 $d=e=0$。所以 $a=b=c=d=e=0$，与 a,b,c,d,e 不全为 0 矛盾！所以不存在一个次数不超过 4 的有理系数多项式 $g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 其有根 $\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt[3]{2}$。

所以选 C。 □

自主招生试题 10. （2013 • 北约）对于任意 θ，求 $32\cos^6\theta-\cos 6\theta-6\cos 4\theta-15\cos 2\theta$ 的值。

（答案：10。）

自主招生试题 11. （2010 • 华约）（I）正四棱锥的体积 $V=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，求正四棱锥的表面积的最小值；

（II）一般地，设正 n 棱锥的体积 V 为定值，试给出不依赖于 n 的一个充分必要条件，使得正 n 棱锥的表面积取得最小值。

（答案：（I）4；（II）当且仅当正 n 棱锥的表面积是底面积的 4 倍时。）

特点六、自主招生试题注重引导培养考生创新意识和动手操作能力。

毫无疑问，这是自主招生考试的主旨和方向。

自主招生试题 12. （2011 • 华约）已知圆柱形水杯质量为 a g，其重心在圆柱轴的中点处（杯底厚度及重量忽略不计，且水杯直立放置）。质量为 b g 的水恰好装满水杯，装满水后的水杯的重心还有圆柱轴的中点处。

（I）若 $b=3a$，求装入半杯水的水杯的重心到水杯底面的距离与水杯高的比值；

（II）水杯内装多少克水可以使装入水后的水杯的重心最低？为什么？

（答案：（I）$\dfrac{7}{20}$；（II）$\sqrt{a^2+ab}-a$。）

特点七、部分自主招生试题解法简洁新颖，用到知识也很少。

自主招生试题 13. （2008 • 复旦大学）已知 $a,b\in\mathbb{R}$，满足 $(a+b)^{59}=-1,(a-b)^{60}=1$，则 $a^{59}+a^{60}+b^{59}+b^{60}=$ （ ）

（A）-2　　（B）-1　　（C）0　　（D）1

（答案：C。）

自主招生试题 14. （2011 • 北约）是否存在四个正实数，它们两两乘积分别是 2, 3, 5, 6, 10, 16。

对于该题，笔者在拙文 [2] 中给出的两种解法均只用到了小学数学知识。

3. 自主招生试题来源

由于自主招生试题命题人多是大学教授、专家或数学界知名人士，他们视野宽阔，经常站在数学学科和社会发展的前沿思考问题，因此每年的自主招生试题都令人耳目一新，难以捉摸；但仔细分析近 10 年来的保送推优自主招生试题，还是可以看出其一些特点的，比如原创是其最大的特点。笔者认为自主招生试题的来源有以下六个方面。

来源一、教材。

教材是命题的基本依据，不少自主招生试题有教材背景，是教材上例题、习题、定义、定理的组合改编，甚至有时就是原题。

自主招生试题 15. （2008 • 复旦大学）求证 $\sqrt{2}$ 是无理数。

本题就是普通高中课程标准实验教科书《数学 • 选修 2-2 • A 版》（人民教育出版社，2007 年第 2 版）第 90 页的例 5。

早在公元前五世纪，古希腊的数学家希帕索斯（Hippasus）就发现等腰直角三角形的直角边和斜边的比不能用两个整数的比来表示，用现在的话来说就是发现了 $\sqrt{2}$ 是一个无理数。这个不同凡响的结论对当时信奉“万物皆数”（即一切数都可以用整数或整数之比来表示）的毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前 572 ～公元前 497）学派来说，无异于一场动摇根基的风暴，导致了数学史上的第一次危机。这位发现真理的数学家被人投身海里，献出了宝贵的生命。

这道题常用反证法来证：尾数法，同为偶数法，素因子证法，算术基本定理证法，与最小值性质相矛盾的证法；直接证法就是无限连分数法。

自主招生试题 16. （2002 • 上海交通大学）欲建面积为 $144\,\mathrm{m}^2$ 的长方形围栏，它的一边靠墙（如图 2.3.3），现有铁丝网 50 m，问筑成这样的围栏最少要用铁丝网多少米？并求此时围栏的长度。

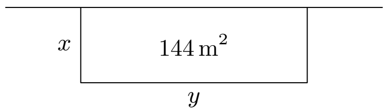


图 2.3.3

（答案：最少要用铁丝网 $24\sqrt{2}$ m。）

本题与普通高中课程标准实验教科书《数学 5 • 必修 • A 版》（人民教育出版社，2007 年第 3 版）（下简称《必修 5》）第 100 页的习题第 2 题如出一辙（虽说前者先于后者）：

一段长为 30 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长 18 m，问这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大？最大面积是多少？(图略)

自主招生试题 17. （2005 • 上海交通大学）是否存在三边为连续自然数的三角形，使得

（1）最大角是最小角的两倍；（2）最大角是最小角的三倍。

若存在，求出该三角形；若不存在，请说明理由。

（答案：（1）存在，且三角形的三边长是 4, 5, 6；（2）不存在。）

这道题源于普通高中课程标准实验教科书《数学 5 • 必修 • A 版》（人民教育出版社，2007 年第 3 版）（下简称《必修 5》）《第一章解三角形》复习参考题的最后一题是 B 组的第 3 题：

研究一下，是否存在一个三角形同时具有下面两条性质：

（1）三边是三个连续的自然数；

（2）最大角是最小角的 2 倍。

自主招生试题 18. （2005 • 上海交通大学）已知月利率为 γ，采用等额还款方式，若本金为 1 万元，试推导每月等额还款金额 m 关于 γ 的函数关系式（假设贷款时间为 2 年）。

（答案：$m=\dfrac{\gamma(1+\gamma)^{24}}{(1+\gamma)^{24}-1}$（万元）。）

本题来源于全日制普通高级中学教科书（必修）《数学 • 第一册（上）》（人民教育出版社，2006 年第 2 版）第 144-145 页的“研究性学习课题：数列在分期付款中的应用”。

自主招生试题 19. （2011 • 华约）已知 $\triangle ABC$ 不是直角三角形。

（I）证明：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$；

（II）若 $\sqrt{3}\tan C-1=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan A}$，且 $\sin 2A,\sin 2B,\sin 2C$ 的倒数成等差数列，求 $\cos\dfrac{A-C}{2}$ 的值。

（答案：（I）略；（II）1 或 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$。）

自主招生试题 20. （2009 • 南京大学）求所有满足条件 $\tan A+\tan B+\tan C\leqslant[\tan A]+[\tan B]+[\tan C]$ 的非直角三角形。（笔者注：这里“$[x]$”表示不大于实数 x 的最大整数。）

（答案：所有满足满足条件的三角形是三边长之比为 $\sqrt{5}:2\sqrt{2}:3$ 的三角形。）

自主招生试题 21. （2005 • 复旦大学）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A:\tan B:\tan C=1:2:3$，求 $\dfrac{AC}{AB}$ 的值。

（答案：$\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$）

这三道自主招生试题都源于普通高中课程标准实验教科书《数学 4 • 必修 • B 版》（人民教育出版社）第 154 页“巩固与提高”的第 7 题（即自主招生试题 19（I）），也与全日制普通高级中学教科书（必修）《数学 • 第一册（下）》（2006 年人民教育出版社）第 46 页的第 15 题的特例。

关于对这三道题的研究，读者还可浏览拙文 [3]。

来源二、国内外高考试题。

许多稍难的高考试题更适合更高层次的选拔，所以有些就被改编成了自主招生试题。

自主招生试题 22. （2013 • 卓越）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2-na_n+\alpha$，首项 $a_1=3$。

（I）如果 $a_n\geqslant 2n$ 恒成立，求 α 的取值范围；

（II）如果 $\alpha=-2$，求证 $\dfrac{1}{a_1-2}+\dfrac{1}{a_2-2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n-2}+\dfrac{1}{a_n+1}<2$。

（答案：（I）$[-2,+\infty)$；（II）略。）

显然，本题是由 2002 年高考全国卷理科压轴题（即第 21 题）改编的：

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2-na_n+1,n=1,2,3,\cdots$。

（I）当 $a_1=2$ 时，求 a_2,a_3,a_4，并由此猜想出 a_n 的一个通项公式；

（II）当 $a_1\geqslant 3$ 时，证明：对所有的 $n\geqslant 1$，有

（i）$a_n\geqslant n+2$；

（ii）$\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\cdots+\dfrac{1}{1+a_n}\leqslant\dfrac{1}{2}$。

自主招生试题 23. （2011 • 卓越）已知椭圆的两个焦点为 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$，且椭圆与直线 $y=x-\sqrt{3}$ 相切。

（I）求椭圆的方程；

（II）过 F_1 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，与椭圆分别交于 P,Q 及 M,N，求四边形 $PMQN$ 面积的最大值与最小值。

显然，本题是由 2005 年高考全国卷（II）理科第 21 题及 2013 年高考全国卷（II）理科第 20 题改编的，这两道高考题分别是：

P,Q,M,N 四点都在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上，F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点。已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线，$\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线，且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$。求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值与最大值。

平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 右焦点的直线 $x+y-\sqrt{3}=0$ 交 M 于 A,B 两点，P 为 AB 的中点，且 OP 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$。

（I）求 M 的方程；

（II）C,D 为 M 上的两点，若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD\perp AB$，求四边形 $ACBD$ 面积的最大值。

自主招生试题 24. （2011 • 卓越）（I）设 $f(x)=x\ln x$，求 $f'(x)$；

（II）设 $0<a<b$，求常数 c，使得 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b|\ln x-c|\,\mathrm{d}x$ 取得最小值；

（III）记（II）中的最小值为 $m_{a,b}$，证明 $m_{a,b}<\ln 2$。

（答案：（I）$f'(x)=\ln x+1$；（II）$c=\ln\dfrac{a+b}{2}$；（III）略。）

本题应当是改编于 2004 年高考全国卷（III）第 23 题：

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x,g(x)=x\ln x$。

（I）求函数 $f(x)$ 的最大值；

（II）设 $0<a<b$，证明 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$。

自主招生试题 10（III）与这道高考题（II）中右边的不等式完全一致。这道高考题有着丰富的高等数学背景，比如可看成是泰勒展开式的特例，用泰勒定理给予证明；其中所证不等式右边的不等式的背景正是高等数学中的有界平均振荡函数（简称 BMO）。在中学数学中经常使用的基本初等函数中，只有对数函数是典型的无界 BMO 函数。上述不等式所表达的内容就是 $\ln x\in\mathrm{BMO}$ 即 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b|\ln x-c_I|\,\mathrm{d}x\leqslant\ln 2$。更确切的结果是 $\|\ln x\|_{\mathrm{BMO}}=\ln 2$。BMO 函数是一类非常重要的函数，它出现在许多数学前沿问题中；著名数学家 C.Fefferman 主要是因为对 BMO 的深入研究而荣获 1978 年度菲尔兹奖。

来源三、历年的保送推优自主招生试题。

由于自主招生命题系统的多样性与复杂性，所以历年的保送推优自主招生试题也是不可回避的极好命题源。由下面的一组试题可看出这一特点：

自主招生试题 25.（2008 • 北京大学）已知六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 中，$AC_1=AB_1,BC_1=BA_1,CA_1=CB_1$，$\angle A+\angle B+\angle C=\angle A_1+\angle B_1+\angle C_1$，求证 $\triangle ABC$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 面积的一半。

自主招生试题 26. （2008 • 北京大学）求证：边长为 1 的正五边形的对角线长为 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。

自主招生试题 27. （2010 • 北京大学）已知 A,B 为边长为 1 的正五边形上的点，证明：线段 AB 长度的最大值为 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。

自主招生试题 28. （2012 • 北约）求证：若圆内接五边形的每个角都相等，则它为正五边形。

关于自主招生试题 28，笔者得到了以下结论：

各边相等的圆内接 n 边形是正 n 边形；

各角相等的圆内接奇数边形是正多边形；

各角相等的圆内接偶数边形不一定是正多边形。

证明 （1）设 $\odot O$ 的内接 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边相等，则 $\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\cdots$。再由等腰三角形 $OA_1A_2,OA_2A_3,\cdots$ 可得 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各内角相等，所以 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正 n 边形。

（2）设 $\odot O$ 的内接奇数边形是 $2n+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$，只证 $n\geqslant 2$ 的情形。

由 $\odot O$ 的内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 对角互补，可得 $\angle A_4A_1A_2+\angle A_2=\pi$，所以 $A_1A_4 /\!/ A_2A_3$。得 $\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_3A_4}$，$A_1A_2=A_3A_4$。

同理，$A_2A_3=A_4A_5=A_6A_7=\cdots=A_{2n}A_{2n+1}=A_1A_2, A_1A_2=A_2A_3$。

同理，$A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=\cdots$。所以多边形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 是正多边形。

（3）比如，各角相等的圆内接四边形不一定是正方形。 □

来源四、各级各类竞赛试题。

由于自主招生试题总体难度基本上介于高考和联赛之间，从高观点看，各级各类竞赛如全国联赛、希望杯竞赛，甚至国外一些竞赛试题，也会成为自主招生命题的重要借鉴。

自主招生试题 29. （2012 • 北约）求 $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=1$ 实数解的个数。

（答案：0。）

编拟本题时借鉴了 2010 年浙江省高中数学竞赛题：

满足方程 $\sqrt{x-2009-2\sqrt{x-2010}}+\sqrt{x-2009+2\sqrt{x-2010}}=2$ 所有实数解为________。

（答案：$2010\leqslant x\leqslant 2011$。）

来源五、某些初等数学研究成果。

如前面的自主招生试题 2。

来源六、高等数学。

突出选拔性的一个重要命题特点就是考虑考生进入高校后继续学习、研究的潜力，这必然在自主招生试题中有重要体现。

自主招生试题 30. （2002 • 上海交通大学保送）（I）用数学归纳法证明以下结论：

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}。(n\geqslant 2, n\in\mathbb{N}^+)$$

（II）已知当 $0<x\leqslant 1$ 时，$1-\dfrac{x^2}{6}<\dfrac{\sin x}{x}<1$，试用此式与（I）的不等式求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1\sin 1+2\sin\frac{1}{2}+\cdots+n\sin\frac{1}{n}\right)。$$

（答案：（I）略；（II）1。）

注 解答第（II）问除了要运用第（I）问结论外，还要使用高等数学中数列极限的“夹逼准则”。

4. 应对自主招生试题的策略

考生在日常学习中应该重新审视高考中“不太考”的知识和方法，并做必要的拓展，增强对数学问题的探究意识，关注高中数学后续内容的学习，注重数学思想方法的学习和创造性思维的培养，细述如下：

策略一、考生要自觉加强基本运算能力的训练。

千里之行，始于足下；强化基本功训练，是今后延拓与快速提高的资本！

策略二、注重知识的延伸与拓展。

日常学习中不能仅仅局限于课本，要学得更深更广。

（1）注重在不同的知识阶段及时延伸与拓展。

如学习函数时，不仅要学习函数的定义、基本性质及各类基本初等函数，还要见缝插针，乘势及时学习函数方程与函数思想方法的应用等高级和深化的知识与方法。这有助于对函数理解得更为完整与深刻，在更为高级的层面上构建知识结构和认知结构。

（2）关注 AP 课程及其他多种形式的学习。

AP 课程是指针对 AP 众多的考试科目进行的授课辅导，目前以 Calculus AB（微积分 AB）、Calculus BC（微积分 BC）、Statistics（统计学）、Physics B（物理 B）、Macroeconomics（宏观经济学）、Microeconomics（微观经济）等几门课程为主。

AP 课程中的许多内容和方法已经进入自主招生试题，如极限理论中的数列收敛准则、夹逼定理、函数极限存在定理、迫敛性定理、两个重要极限、罗比达法则，微积分中的微积分定义、罗尔定理、拉格朗日中值定理、积分中值定理、牛顿—莱布尼茨公式等。

策略三、注重数学思想方法的学习与运用。

这是提升数学思维水平铸造学科思维力的必经之途。如反证法、奇偶分析法、构造法、数学归纳法等等。

策略四、培养推广与探究的意识。

这是立足于研究问题的重要方法。

策略五、建立大学习观。

串串门，建立多学科的数学模型，你会发现数学是极为有趣、富有魅力的！

从前面的自主招生试题 12 及下面的自主招生试题 31 可见一斑。

自主招生试题 31. （2010 • 华约）假定亲本总体中三种基因型式：AA, Aa, aa 的比例为 $u:2v:w(u>0, v>0, w>0, u+2v+w=1)$ 且数量充分多，参与交配的亲本是该总体中随机的两个。

（I）求子一代中，三种基因型式的比例；

（II）子二代的三种基因型式的比例与子一代的三种基因型式的比例相同吗？并说明理由。

（答案：（I）$p^2:2pq:q^2$；（II）相同。）

策略六、培养自主学习能力。

二十一世纪最重要的个人能力首推自主学习能力！有了过硬的自学能力和意识，即可与时俱进，从容应对很多新问题。

到此，读者可能对自主招生试题有了比较全面深入的了解，希望你提前做好规划、及时行动、充分应变，并在做中体味、修正、总结、提高。你还可抽时间浏览笔者发表的关于自主招生的文章 [1-5]。

祝你成功！

参考文献

[1] 甘志国. 一道 2009 年清华大学自主招生数学试题的背景 [J]. 中学数学月刊, 2010(9):41。
[2] 甘志国. 小学生简解北约自主招生题 [J]. 新高考 (高二 • 数学 • 文科), 2013(5):48。
[3] 甘志国. 由一道课本题巧解三道大学自主招生题 [J]. 数学教学, 2013(2):43-44。
[4] 甘志国. 谈一道 2010 年北京大学自主招生数学试题 [J]. 数学通讯, 2011(10 上):56-58。
[5] 甘志国. 介绍几道 2008 年自主招生数学试题 [J]. 中学数学杂志, 2009(1):54-56。

朝花夕拾

3.1 【封面故事】Morley 三角形——何万程

Morley 定理最早是英国数学家 Morley 于 1904 年发现的。Morley 曾对他的剑桥大学同学提到过这个定理，后来就称这个定理为“Morley 定理”。这个定理莫勒虽然早就发现了，但他一直没有发表，过了 20 年才在日本正式发表。在这 20 年中，别的数学家也发现了这个定理。下面简单介绍下 Morley 定理的一个证明方法和一些其余关于三角形三等分线的结论，这个证明方法不但证明正三角形的结论，还确定了边长。

我们不难证明如下结论：对 $\triangle ABC$，如果存在 β，γ，使 $\angle A+\beta+\gamma=180^\circ$，且 $\dfrac{AC}{\sin\beta}=\dfrac{AB}{\sin\gamma}$，则 $\angle B=\beta$，$\angle C=\gamma$。

下面的 $\triangle ABC$ 中设 R 是其外接圆半径，$\angle A=3\alpha$，$\angle B=3\beta$，$\angle C=3\gamma$。

定理 3.1.1 (Morley 定理)**.** 以 $\triangle ABC$ 内角靠近每边的两条三等分线的交点为顶点的三角形是正三角形，并且这个正三角形边长是 $8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$。

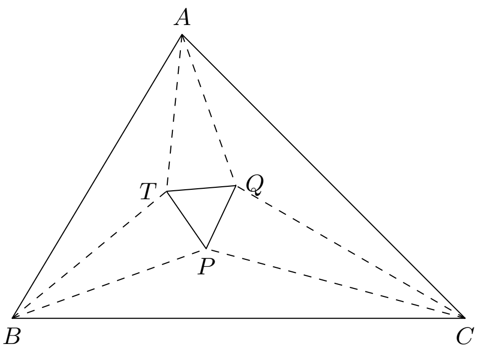


图 3.1.1

证明　在 $\triangle ABC$ 中 AT、AQ 是 $\angle A$ 的三等分线，BT、BP 是 $\angle B$ 的三等分线，CQ、CP 是 $\angle C$ 的三等分线，因为

$$\begin{aligned}AC&=2R\sin\angle B=2R\sin3\beta=2R\sin\beta\left(3\cos^2\beta-\sin^2\beta\right)\\&=8R\sin\beta\sin\left(60^\circ+\beta\right)\sin\left(60^\circ-\beta\right)\\&=8R\sin\beta\sin\left(60^\circ+\beta\right)\sin\left(\alpha+\gamma\right)。\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{AQ}{\sin\gamma}=\dfrac{AC}{\sin\left(\alpha+\gamma\right)}$，所以

$$AQ=8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(60^\circ+\beta\right)。$$

同理可得

$$AT=8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(60^\circ+\gamma\right)。$$

所以

$$\frac{AQ}{\sin\left(60^\circ+\beta\right)}=\frac{AT}{\sin\left(60^\circ+\gamma\right)},$$

又因为 $\alpha+60^\circ+\beta+60^\circ+\gamma=180^\circ$，利用前面所说的结论，得 $\angle ATQ=60^\circ+\beta$，$\angle AQT=60^\circ+\gamma$，根据正弦定理，得

$$\frac{QT}{\sin\alpha}=\frac{AQ}{\sin\left(60^\circ+\beta\right)},$$

所以

$$QT = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

同理得

$$PT = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma，PQ = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

所以 $PQ = PT = QT$，即 $\triangle PQT$ 是正三角形，其边长为 $8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$。 □

Morley 定理所定义的正三角形叫做内 Morley 三角，原三角形与内 Morley 三角形的面积之比的取值范围是 $\left[\dfrac{3}{64}\csc^6\dfrac{\pi}{9},+\infty\right)$，仅当原三角形是正三角形时取得最小值。这个结论的证明比较复杂，这里就省略了。

利用类似的方法，可得

定理 3.1.2. 以 $\triangle ABC$ 外角靠近每边的两条三等分线的交点为顶点的三角形是正三角形，并且这个正三角形边长是 $8R\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ-\beta)\sin(60^\circ-\gamma)$。

定理 3.1.3. 以 $\triangle ABC$ 一边靠近该边的外角三等分线的交点，另两边靠近前一边及靠近对应边的外角三等分线与靠近对应边的第三角的内角三等分线的交点组成的三角形是正三角形，并且与点 C 在直线 AB 两侧的正三角形边长是 $8R\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ-\beta)\sin\gamma$，与点 B 在直线 CA 两侧的正三角形边长是 $8R\sin(60^\circ-\alpha)\sin\beta\sin(60^\circ-\gamma)$，与点 A 在直线 BC 两侧的正三角形边长是 $8R\sin\alpha\sin(60^\circ-\beta)\sin(60^\circ-\gamma)$。

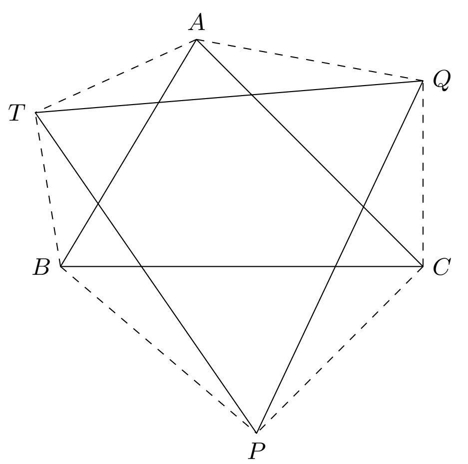


图 3.1.2

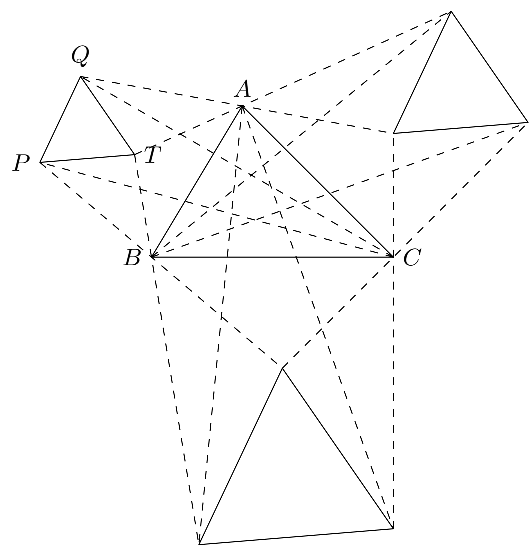


图 3.1.3