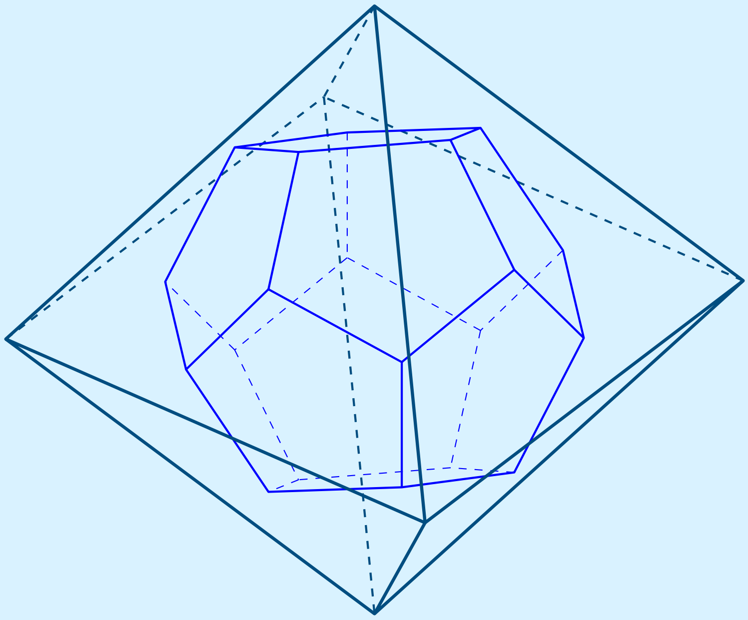
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2014 年第 2 期　　总第 16 期



目录

助力高考

1.1　ab1962 解题集精选（十六）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 751 ∼ 800 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》总第 1 期。

题目 1. 已知 $f(x)=x\ln x$，$0<a<b$。求证

$$0<f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2。$$

证明　设

$$g(x)=f(a)+f(x)-2f\left(\frac{a+x}{2}\right)=a\ln a+x\ln x-(a+x)\ln\frac{a+x}{2},$$

则

$$g'(x)=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}=\ln\frac{2x}{a+x},$$

当 $x>a$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，因 $0<a<b$，故

$$g(b)=f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)>g(a)=0;$$

设

$$q(x)=g(x)-(x-a)\ln 2,$$

则

$$q'(x)=g'(x)-\ln 2=\ln\frac{x}{a+x},$$

当 $x>a$ 时，$q'(x)<0$，$q(x)$ 递减，因 $0<a<b$，故

$$q(b)=f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-(b-a)\ln 2<q(a)=0,$$

于是

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2。$$

□

kuing 评注　这道好像是早年的高考题吧，反正后来成了 FAQ①，最简单的解法无疑就是上面这种选择变量求导的方法了，相关贴子：

http://bbs.pep.com.cn/thread-375025-1-1.html

http://bbs.pep.com.cn/thread-375445-1-1.html

http://bbs.pep.com.cn/thread-877699-1-1.html

题目 2. 设 O 为坐标原点，A、B 是圆 $x^2+y^2=1$ 上两动点，且 $\angle AOB=120^\circ$，$C(2,0)$，则 $\triangle ABC$ 外接圆圆心 M 的轨迹是？

①Frequently Asked Questions 的缩写，中文意思就是“经常问到的问题”

解 设 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos(\alpha+120^\circ),\sin(\alpha+120^\circ))$，$M(x,y)$，因 $OM\perp AB$，故

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{\sin(\alpha+120^\circ)-\sin\alpha}{\cos(\alpha+120^\circ)-\cos\alpha}=\frac{y}{x}\cdot\frac{\cos(\alpha+60^\circ)}{-\sin(\alpha+60^\circ)}=-1,$$

即

$$\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha},$$

故

$$\sin\alpha=\frac{y-\sqrt{3}x}{x+\sqrt{3}y}\cos\alpha。\tag{1}$$

设 D 为 AC 中点，因 $OD\perp AC$，故

$$\frac{y-\dfrac{\sin\alpha}{2}}{x-\dfrac{\cos\alpha+2}{2}}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-2}=-1,$$

即

$$2x\cos\alpha+2y\sin\alpha+3-4x=0。\tag{2}$$

由式 (1)、(2) 解得

$$\cos\alpha=\frac{(4x-3)(x+\sqrt{3}y)}{2(x^2+y^2)},\quad \sin\alpha=\frac{(4x-3)(y-\sqrt{3}x)}{2(x^2+y^2)}$$

于是

$$\frac{(4x-3)^2(x+\sqrt{3}y)^2}{4(x^2+y^2)^2}+\frac{(4x-3)^2(y-\sqrt{3}x)^2}{4(x^2+y^2)^2}=1,$$

化简得

$$15x^2-y^2-24x+9=0,$$

即

$$\frac{(x-0.8)^2}{0.04}-\frac{y^2}{0.6}=1。$$

□

题目 3. 已知 $\sin A+\sin B=\dfrac{1}{2}$，求 $\cos A+\cos B$ 的取值范围。

解法一 由 $\sin A+\sin B=\dfrac{1}{2}$，设 $\cos A+\cos B=t$，两式平方相加得

$$t^2=\frac{7}{4}+2\cos(A-B)\in\left[-\frac{1}{4},\frac{15}{4}\right],$$

所以

$$t^2\leqslant\frac{15}{4},$$

即

$$-\frac{\sqrt{15}}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\sqrt{15}}{2}。$$

□

解法二 设 $\cos A+\cos B=t$，则 $\cos A=t-\cos B$，由 $\sin A+\sin B=\dfrac{1}{2}$，得 $\sin A=\dfrac{1}{2}-\sin B$，于是

$$\begin{aligned}(t-\cos B)^2+\left(\frac{1}{2}-\sin B\right)^2=1 &\implies t^2+\frac{1}{4}-2t\cos B-\sin B=0\\ &\implies t^2+\frac{1}{4}=\sqrt{4t^2+1}\sin(B+\varphi)\\ &\implies \sin(B+\varphi)=\frac{t^2+\frac{1}{4}}{\sqrt{4t^2+1}}\leqslant 1\\ &\implies t^4-\frac{7}{2}t^2-\frac{15}{16}\leqslant 0\\ &\implies \left(t^2-\frac{15}{4}\right)\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\leqslant 0\\ &\implies -\frac{\sqrt{15}}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\sqrt{15}}{2}。\end{aligned}$$

□

kuing 评注 严格来说，这两个解法其实都还没解完。皆因求的是取值范围，就应该进一步去说明最终解出的解集中的值都是能取到的才行，因为我们在推理时往往不是等价变形，通常只是得到一个必要条件，未必充分，所以解集中有可能出现取不到的部分。然而在现实中，这一点似乎并未得到足够重视。

下面我们就来论证一下，以下仍然设 $t=\cos A+\cos B$。

首先对于满足条件的 A,B，当它们同时变为 $\pi-A,\pi-B$ 时，仍然满足条件，而 t 变为相反数，故此只要说明 t 能取遍 $\left[0,\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right]$ 即可。

令 $f(A)=\arcsin\left(\dfrac{1}{2}-\sin A\right)$，则当 $A\in\left[-\arcsin\dfrac{1}{2},\pi+\arcsin\dfrac{1}{2}\right]$ 时 $f(A)$ 为连续函数，且 B 取 $f(A)$ 时一定满足已知条件。当 $A=\arcsin\dfrac{1}{4}$ 时，$B=f(A)=A$，此时 $t=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，当 $A=\pi-\arcsin\dfrac{1}{4}$ 时，$B=f(A)=\pi-A$，此时 $t=0$，所以，当 A 由 $\arcsin\dfrac{1}{4}$ 连续变化到 $\pi-\arcsin\dfrac{1}{4}$ 且总取 $B=f(A)$ 时，t 取遍 $\left[0,\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right]$。

这样，我们终于可以断言：t 的取值范围是 $\left[-\dfrac{\sqrt{15}}{2},\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right]$。

当然，论证解集中的值都能取到的方法并不唯一，但通常都不是一件容易的事，有时尽管看上去很显然，但说起来就很麻烦，所以也难怪无法重视起来。

下面再从几何角度去论证一下，如图 1，圆 O 为单位圆，弦 PQ 所在直线方程为 $y=\dfrac{1}{4}$，在弦 PQ 上任取一点 T，过 T 作弦 $MN\perp OT$。

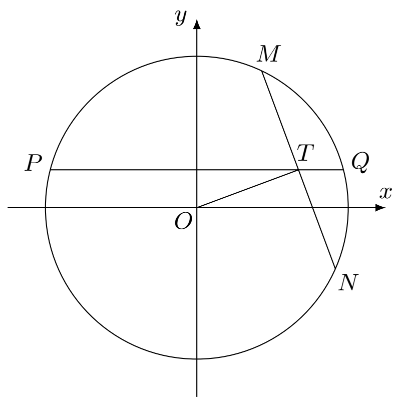


图 1

设 $M(\cos A,\sin A)$, $N(\cos B,\sin B)$，因为 T 为 MN 中点，故 $\dfrac{\sin A+\sin B}{2}=\dfrac{1}{4}$，即这样的 A, B 总满足条件，而 T 的横坐标就是 $\dfrac{t}{2}$。注意 T 只要在弦 PQ 上就可以作出相应的弦 MN（包括端点 P 或 Q 处，此时 M, N 与端点重合也符合条件），也就是说 $\dfrac{t}{2}$ 可以取遍线段 PQ 的横坐标，易知 $P\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4},\dfrac{1}{4}\right)$, $Q\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4},\dfrac{1}{4}\right)$，所以 t 可以取遍 $\left[-\dfrac{\sqrt{15}}{2},\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right]$。

题目 4. 求 $\tan 20^\circ(\csc 10^\circ-1)$。

解

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ(\csc 10^\circ-1)&=\tan 20^\circ\cdot\frac{1-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}\\&=\tan 20^\circ\cdot\frac{1-\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}\cdot\frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}\\&=\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 80^\circ\\&=\frac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ},\end{aligned}$$

因为

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=\frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{8},$$

以及

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ&=\sin 20^\circ\cos 10^\circ\sin 40^\circ\\&=\frac{1}{2}(\sin 30^\circ+\sin 10^\circ)\sin 40^\circ\\&=\frac{1}{4}\sin 40^\circ+\frac{1}{2}\sin 40^\circ\sin 10^\circ\\&=\frac{1}{4}\sin 40^\circ-\frac{1}{4}(\cos 50^\circ-\cos 30^\circ)\\&=\frac{\sqrt{3}}{8},\end{aligned}$$

因此，原式 $=\sqrt{3}$。 □

题目 5. 已知 $0\leqslant x\leqslant 1$，$a=\arcsin(\cos x)$，$b=\cos(\arcsin x)$，求证：$a>b$。

证明 因为 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $x\geqslant\sin x$（当且仅当 $x=0$ 取等）且 $y=\arcsin x$ 递增，故

$$\arcsin(\sin x)\leqslant\arcsin x\implies x\leqslant\arcsin x\implies\cos x\geqslant\cos(\arcsin x),$$

又由 $0\leqslant x\leqslant 1$ 得 $0<\cos x\leqslant 1$，所以

$$\cos x>\sin(\cos x)\implies\arcsin(\cos x)>\arcsin[\sin(\cos x)]=\cos x,$$

所以

$$\arcsin(\cos x)>\cos(\arcsin x),$$

即 $a>b$。 □

题目 6. 如何证明空间四边形中四边的平方和大于对角线的平方和？

证明 设空间四边形为 $ABCD$，则

$$\begin{aligned}
&AB^2+BC^2+CD^2+AD^2-BD^2-AC^2\\
=&\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{BD}^2-\overrightarrow{AC}^2\\
=&\overrightarrow{AB}^2+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2+\overrightarrow{AD}^2-(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2-\overrightarrow{AC}^2\\
=&\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}\cdot AC+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\\
=&(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})^2\geqslant 0,
\end{aligned}$$

当且仅当 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 时上式取等号，因 $ABCD$ 是空间四边形故 $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，故 $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2>BD^2+AC^2$。 □

题目 7. 试定义两个函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足：
（1）它们定义域均为 $(0,1)$；
（2）他们的值域都是 $[0,1]$；
（3）对于任意的实数 $a\in(0,1)$，$f(x)=a$ 有惟一解，$g(x)=a$ 有无穷多解。

解 当 $x\in(0,1)$ 且为无理数时，定义 $f(x)=x$，当 $x\in(0,1)$ 且为有理数时，我们先把 $(0,1)$ 中的有理数按如下方法排成队

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},\cdots$$

删除重复的有理数后的序列为 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots,a_n,\cdots$，定义 $f(a_1)=0, f(a_2)=1, f(a_3)=a_1, f(a_4)=a_2$，当 $n\geqslant 3$ 时 $f(a_n)=a_{n-2}$。

取 $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件。 □

题目 8. 已知 $a, b, c\in\mathbb{R}^+, abc\leqslant 1$，求证：$\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\geqslant a+b+c$。

证明 要证原不等式成立只要证

$$a^2b+b^2c+c^2a\geqslant abc(a+b+c),$$

只要证

$$\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant\sqrt[3]{(abc)^2}(a+b+c)=\sqrt[3]{a^5b^2c^2}+\sqrt[3]{a^2b^5c^2}+\sqrt[3]{a^2b^2c^5},$$

因为 $\sqrt[3]{abc}\leqslant 1$ 所以 $\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant a^2b+b^2c+c^2a$，于是只要证

$$a^2b+b^2c+c^2a\geqslant\sqrt[3]{a^5b^2c^2}+\sqrt[3]{a^2b^5c^2}+\sqrt[3]{a^2b^2c^5},$$

因为

$$\frac{a^2b+a^2b+c^2a}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^5b^2c^2},$$
$$\frac{b^2c+b^2c+a^2b}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^2b^5c^2},$$
$$\frac{c^2a+c^2a+b^2c}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^2b^2c^5},$$

相加即得原不等式成立。 □

kuing 评注 其实可以写得简洁些，由

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}\geqslant 3b,$$

等三式相加即得，当然，原理是一样的，所以这不叫另解。

题目 9. 设 S_n, T_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，若对 $n\in\mathbb{N}^+$ 均有 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+1}{4n+29}$，则 $\dfrac{a_9}{b_9}=$________。

解

$$\frac{S_n}{T_n}=\frac{\frac{1}{2}(a_1+a_n)n}{\frac{1}{2}(b_1+b_n)n}=\frac{a_1+a_n}{b_1+b_n}=\frac{7n+1}{4n+29},$$

故

$$\frac{a_1+a_{17}}{b_1+b_{17}}=\frac{7\times 17+1}{4\times 17+29}=\frac{120}{97},$$

因为

$$\frac{a_1+a_{17}}{b_1+b_{17}}=\frac{a_9+a_9}{b_9+b_9}=\frac{2a_9}{2b_9}=\frac{a_9}{b_9},$$

故 $\dfrac{a_9}{b_9}=\dfrac{120}{97}$。 □

1.2 错题集——郭子伟

必须先明确指出，本错题集是真正意义上的错题集，因为这里收集的题都是错题，注意是题目本身出错，而不是平时学生为了应付考试而记录的错题本之类的东西，那种没意思。

函数类

错题 1. 已知 $f(\sin x)=\cos x$，求 $f(-\cos x)$。

错因 令 $x=30^\circ$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，令 $x=150^\circ$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，矛盾。

修改建议 可以改为 $f(\sin x)=\cos 2x$，$f(\sin x)=\cos 4x$，$f(\sin x)=\cos 6x$ 等。

错题 2. 已知函数 $f(x)$ 满足对所有的实数 x, y，都有 $f(x)+f(2x+y)=f(3x-y)+x-2010$，则 $f(2010)=$________。

错因 令 $y=\dfrac{x}{2}$ 得到 $f(x)=x-2010$，再令 $y=2x$ 得到 $f(4x)=x-2010$，矛盾。

修改建议 重新命制。

错题 3. 已知 $f(1,1)=1$, $f(m,n)\in\mathbb{N}^+$（$m,n\in\mathbb{N}^+$）且对任何 $m,n\in\mathbb{N}^+$ 都有：$f(m,n+1)=f(m,n)+2$；$f(m+1,n)=2f(m,n)$，给出以下三个结论：

（1）$f(1,5)=9$；

（2）$f(5,1)=16$；

（3）$f(5,6)=26$。

其中正确结论的个数为 （ ）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

错因 我们用两个方向考虑 $f(m+1,n+1)$ 与 $f(m,n)$ 的关系。

一、$f(m+1,n+1)=f(m+1,n)+2=2f(m,n)+2$；

二、$f(m+1,n+1)=2f(m,n+1)=2(f(m,n)+2)=2f(m,n)+4$。

所以，若要此题正确，除非 $2=4$。

修改建议 重新命制。

注 2008 年广州二模也出现过类似的错题，当时那道题目是：已知 a 是正常数，定义运算“#”如下：对于任意 m, n 为正整数，若 $m\,\#\,n=a$，则 $(m+1)\,\#\,n=2a$, $m\,\#\,(n+1)=a+1$。当 $1\,\#\,1=1$ 时，则 $1\,\#\,10=$________，$5\,\#\,10=$________。

另外，我还曾经将错就错，思考过这样一个问题，由于根据不同的计算顺序，得出的结果不一样，那么，对应于由 $f(1,1)$ 到 $f(5,6)$ 的不同计算路线，可以算出多少个 $f(5,6)$ 来？当然，最好我们还是将这个问题抽象出来，严格地写成另一个题目比较好，比如说，可以编造成如下题目：

在算式 $((((((((1\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2)\,\square\,2$ 里的 9 个方框中，任选 4 个填“$+$”，另外 5 个填“$\times$”，则此算式的结果可以有多少个？

这个问题似乎不太容易，主要是如何证明不同的填法得出的结果是否一定不相等？如果有重复，又会有多少个重复？一般情况又如何呢？仍然有待研究。

错题 4. 若函数 $f(|2x-1|)$ 的定义域 $[0,2]$，则函数 $f(x)$ 的定义域是________。

错因 既然 x 能取 2，则 $f(3)$ 有意义，于是 x 理应能取 -1，可见 $f(|2x-1|)$ 的定义域不会是 $[0,2]$。

那么，是不是将 $[0,2]$ 改成 $[-1,2]$，题目就没问题了呢？且看下一题。

错题 5. 若函数 $f(|2x-1|)$ 的定义域 $[-1,2]$，则函数 $f(x)$ 的定义域是________。

错因 设常数 $a<0$，构造

$$f(x)=\sqrt{x(x-3)(a-x)},$$

那么 $f(|2x-1|)$ 的定义域为 $[-1,2]$，满足题目的条件，然而，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,a]\bigcup[0,3]$，因 a 而异，由此可见，题目的条件根本不足以确定 $f(x)$ 的定义域。

类似地，由 $f(x^2)$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域这类题都存在这种问题。于是问题就有点严重了，因为这类题相信在大家学函数概念时都遇到过，可以说是常规的习题，但又有多少人会注意到这些？

修改建议 删除此类题。

错题 6. 已知函数 $y=f(x)$（$x\in\mathbb{R}$）满足 $f(x+1)=-f(x)$，且 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=|x|$，则方程 $|f(x)|=\log_2|x|$ 解的个数是 （ ）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

错因 命题人可能以为：由 $f(x+1)=-f(x)$ 得 $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$，所以 $f(x)$ 周期为 2，然后根据 $[-1,1]$ 上的图象而作出整个函数图象，再看交点个数。

但是，由条件有 $f(0.5)=f(-0.5)=0.5$，而 $f(-0.5+1)\neq-f(-0.5)$，与条件矛盾。

这类错题挺常见的，犯此错的原因就是很多命题者想当然地以为“$f(x+1)=-f(x)$”只能得出周期为 2，用完就没用了，反而忘记了等式的本身。

修改建议 去掉“$f(x+1)=-f(x)$”而直接给出周期为 2，如果还是想保留“$f(x+1)=-f(x)$”的话，也可以将后面的改为“当 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=x$”。一般来说，给出 $f(x+a)=-f(x)$（$a>0$）之类的条件后，想给定某区间上的解释式，则这个区间的长度不应超过 a，而且应该一开一闭，这样就不会产生类似的矛盾。

错题 7. 若 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，且满足：$y=f(x)$ 是偶函数，$y=f(x-1)$ 是奇函数，且当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\lg x$，则方程 $f(x)=2012$ 在区间 $(-6,10)$ 内的所有实数根之和为 （ ）

A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 24

题目出处 贵州省 2012 年 4 月 7 号适应性考试数学 12 题

错因 命题人可能以为：因为 $y=f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)=2012$ 在 $(-6,6)$ 内的实根之和必为 0，故剩下只要考虑 $[6,10)$ 内的。易证 $f(x)$ 关于 $x=8$ 对称，在 $(6,8)$ 内递减且值域为 $\mathbb{R}$，所以在 $[6,10)$ 内有两个实根而且关于 $x=8$ 对称，所以和为 16，选 C。

但是，以上还未曾考虑几个特殊的地方，比如说 $x=6$, $x=8$ 处就没考虑到，如果这两处都不为 2012，那么就不影响上述结果，然而，不难发现，题目的所有条件都未能够确定 $x=2k$（k 为任意整数）的值，如果 $f(0)=2012$，那么将有 $f(6)=-2012$, $f(8)=2012$，于是就多了一个根 $x=8$，结果变成 24，如果 $f(0)=-2012$，那么将有 $f(6)=2012$, $f(8)=-2012$，于是就多了一个根 $x=6$，结果变成 22。由此可见，答案有三个可能。

修改建议 另外定义 $f(0)$ 即可。

错题 8. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$, $f(x)+f(1-x)=1$, $f\left(\dfrac{x}{5}\right)=\dfrac{1}{2}f(x)$，且当 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ 时，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，求 $f\left(\dfrac{1}{2008}\right)$。

错因 命题人可能以为：由 $f(0)=1$ 得 $f(1)=1$，故 $f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$，得 $f\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$，所以 $f\left(\dfrac{1}{5}\right)=f\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$，又由 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ 时 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，可得当 $\dfrac{1}{5}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{5}$ 时 $f(x)=\dfrac{1}{2}$，而 $\dfrac{1}{5}<\dfrac{625}{2008}<\dfrac{4}{5}$，则 $f\left(\dfrac{625}{2008}\right)=\dfrac{1}{2}$，所以 $f\left(\dfrac{1}{2008}\right)=\dfrac{1}{32}$。

但是，满足条件的函数其实不存在，理由如下。

由 $f(5)=2f(1)=2$, $f(-4)+f(5)=1$ 得 $f(-4)=-1$。

但 $f(-4)=2f\left(-\dfrac{4}{5}\right)=2\left(1-f\left(\dfrac{9}{5}\right)\right)=2-4f\left(\dfrac{9}{25}\right)=2-4\cdot\dfrac{1}{2}=0$，矛盾。

修改建议 将定义域改为 $[0,1]$ 即可。

注 这道是非常经典的错题了，我最早在 2008 年初的 `http://bbs.pep.com.cn/thread-350657-1-1.html` 一贴中看到此题，但其实在 2007 年这题就已经存在。以上贴出的过程引用自链接中 yezhu 版主（吴剑）的贴子。事实上，这题的背景是 Contor 函数，在 $[0,1]$ 上的函数图象是可以作出来的，不过由于内容较多且深，这里就不再展开了，详情请前往链接。值得一提的是，该题后来年年月月都被各地的各种考试题所抄，几乎每次都是将 $\dfrac{1}{2008}$ 的分母改为当时的年份就当新题用了，然而大部分在抄的时候都没有修改其定义域。

错题 9. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，且满足 $2f(x+2)+f(-x)=0$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=\ln x+ax$（$a<-\dfrac{1}{2}$），当 $x\in(-4,-2)$ 时，$f(x)$ 的最大值为 -4。

（1）求实数 a 的值；

（2）略。

题目出处 辽宁省沈阳市 2010 年高三年级教学质量监测（二）

错因 令 $x=-1$，得到 $f(1)=0$，但代入 $(0,2)$ 的式中应有 $f(1)=a$，也就是说 $a=0$，就已经和题目矛盾了。

事实上，再看深一点，其实由前面两个条件已经可以得到 $f(x)$ 恒为 0，理由如下。

由奇函数以及 $2f(x+2)+f(-x)=0$，即有 $f(-x)=-f(x)$ 且 $f(x)=2f(x+2)$，那么对于任意实数 x，有

$$f(x)=2f(x+2)=-2f(-x-2)=-4f(-x)=4f(x),$$

所以只能 $f(x)=0$。

由此可见，此题错得非常厉害！

修改建议 重新命制。

错题 10. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的可导函数，满足 $f(x)<f'(x)$，且 $f(x-1)$ 为偶函数，$f(-2)=1$，则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为 （ ）

A. $(0,+\infty)$ B. $(-\infty,0)$ C. $(e^4,+\infty)$ D. $(-\infty,e^4)$

题目出处 东北育才等辽宁五校 2011-2012 学年度上学期期末考试高二年级数学试卷（理）第 12 题

错因 命题人可能以为：由 $f(x-1)$ 为偶函数，$f(-2)=1$，得 $f(0)=1$，而

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0,$$

因此 $\dfrac{f(x)}{e^x}$ 为增函数，而 $f(x)<e^x\iff\dfrac{f(x)}{e^x}<1=\dfrac{f(0)}{e^0}$，所以解集为 $(-\infty,0)$，选 B。

但是，由条件也有 $f(-2)=1>e^{-2}$，可见 $x=-2$ 不满足 $f(x)<e^x$，与答案矛盾。

事实上，由 $f(x)<f'(x)$ 且 $f(x-1)$ 为偶函数还可以推出 $f(x)$ 恒负。

因为 $f(x-1)$ 是偶函数，即对任意 x 恒有

$$f(x-1)=f(-x-1),$$

两边对 x 求导有

$$[f(x-1)]'=[f(-x-1)]',$$

即

$$f'(x-1)=-f'(-x-1),$$

即 $f'(x-1)$ 为奇函数。又由 $f(x)<f'(x)$ 有

$$f(x-1)<f'(x-1),$$

$$f(-x-1)<f'(-x-1),$$

两式相加有

$$2f(x-1)=f(x-1)+f(-x-1)<f'(x-1)+f'(-x-1)=0,$$

即 $f(x-1)<0$，也即 $f(x)$ 必然恒负。

修改建议 可以去掉“$f(x-1)$ 为偶函数”这条件，再将“$f(-2)=1$”，“$f(x)<e^x$”分别改为“$f(-1)=-\dfrac{2}{e}$”，“$f(x)<-2e^x$”。

几何类

错题 11. 长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 AC_1 在各个面上的投影分别是长为 1, 2, 3 的线段，则该长方体外接的半径是________。

错因 命题人可能以为：设长方体三条棱长为 a, b, c，该长方体外接的半径为 R，则 $a^2+b^2=1, b^2+c^2=4, a^2+c^2=9$，三式相加得 $14=2(a^2+b^2+c^2)=2(2R)^2$，故 $R=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$。

事实上，问题在于：方程组 $a^2+b^2=1, b^2+c^2=4, a^2+c^2=9$ 无实数解，消 a, c 后你会发现 $b^2=-2$。

修改建议 一般地，使本题没问题的充要条件是：那三个投影线段长度的平方能构成三角形。

错题 12. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$，$A$、$B$ 是双曲线的左、右焦点，O 为坐标原点，$\odot O$ 的半径为 5，P 为双曲线右支上一点，且 PA 与 $\odot O$ 相切，切点为 C，D 为 PA 的中点，求 $CD-OD$。

错因 命题人可能以为：作出草图，如图 1 所示。

则 $AC=\sqrt{OA^2-OC^2}=\sqrt{25+16-5^2}=4$，于是 $CD-OD=\dfrac{1}{2}PA-AC-\dfrac{1}{2}PB=\dfrac{1}{2}(PA-PB)-AC=5-4=1$。

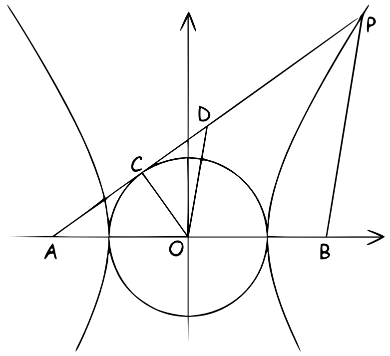


图 1

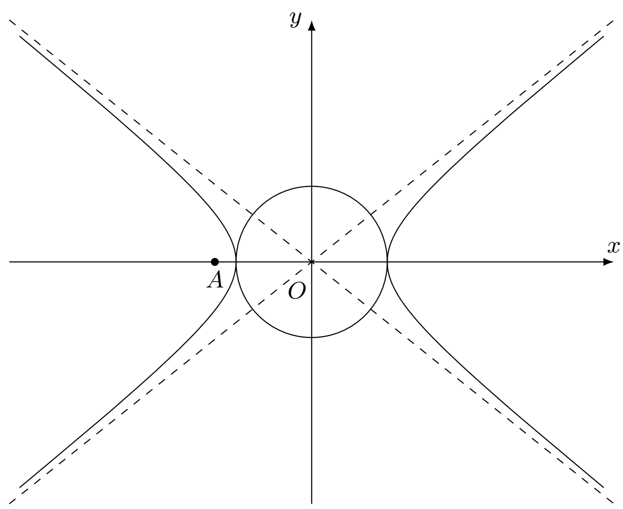


图 2

但其实想想也知道有问题，明显 $CD<OD$，怎么会得出 $CD-OD=1$?

事实上，如果将图形画准确一些，而不是随手画草图，就会发现 AP 根本不可能与 $\odot O$ 相切，如图 2 所示。

下面从代数角度证明 AP 必与 $\odot O$ 相交。

一般地，设左焦点 $F(-c,0)$，右支上第一象限内的任意点 $P(a\sec t, b\tan t)$（$0<t<\dfrac{\pi}{2}$），设 O 到直线 PF 的距离为 d，则不难计算出

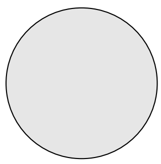
$$d=\frac{bc\sin t}{a\cos t+c},$$

所以关于 t 递增，即得 $d\in(0,b)$。又或者先证明过焦点且与渐近线平行的直线与以 O 为圆心，b 为半径的圆相切，亦可得 $d\in(0,b)$。

于是，对于原题的数值，$\odot O$ 的半径为 5 大于 4，所以 AP 必与 $\odot O$ 相交。

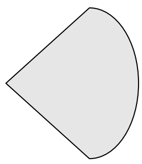
修改建议 将 $\odot O$ 的半径改为小于 b 的任一常数即可。

错题 13. 一个不透明圆锥体的正视图和侧视图（左视图）为两个全等的正三角形。若将它倒立放在桌面上，则该圆锥体在桌面上从垂直位置旋转到水平位置的过程中，其在水平桌面上的正投影不可能是（　）



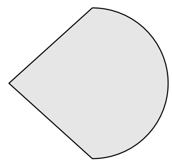
圆形区域

A



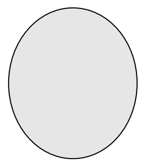
等腰三角形两腰与半椭圆围成的区域

B



等腰三角形两腰与半圆围成的区域

C



椭圆形区域

D

错因 命题人显然是让我们选 C，的确，C 是显然不可能的，因为只要圆锥一倾斜，其底面圆在桌面上的正投影就是椭圆形，所以绝不可能是 C。

但是，其实选项 B 也是不可能的，这题要变成多选题才行，所以理论上这道也不算是错题。

选项 B 的问题出在“半椭圆”上，实际上，椭圆弧部分应该比半椭圆还要多出一些，而且等腰三角形的两腰与椭圆弧是相切的，而不是像选项 B 的“接口处”那样“起角”。

或者也可以这样想，旋转一定角度时底面圆在桌面上的正投影肯定是椭圆，也就是说整个圆锥体的正投影至少得包含一个完整的椭圆在里面，所在显然不可能是选项 B 那样子的。

正确的图形如图 3 所示。

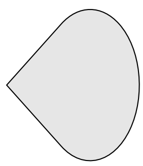


图 3

修改建议 将选项 B 画成图 3 那样，并将说明改为“等腰三角形两腰与大半个椭圆围成的区域”。

错题 14. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$ 上有一点 P，F_1、F_2 是椭圆的左、右焦点，且 $\angle F_1PF_2=120^\circ$，求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积。

错因 由椭圆定义、余弦定理及均值不等式，有

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{(PF_1+PF_2)^2-F_1F_2^2}{2PF_1\cdot PF_2}-1=\frac{4a^2-4c^2}{2PF_1\cdot PF_2}-1\geqslant\frac{8a^2-8c^2}{(PF_1+PF_2)^2}-1=\frac{2b^2}{a^2}-1,$$

当且仅当 P 为短轴端点时取等号。对于本题，$a^2=100, b^2=64$，代入得 $\cos\angle F_1PF_2 \geqslant \dfrac{7}{25}$，与 $\angle F_1PF_2=120^\circ$ 矛盾。

修改建议 更改数据使之满足 $\cos\angle F_1PF_2 \geqslant \dfrac{2b^2}{a^2}-1$ 即可。

错题 15. 若 $\triangle ABC$ 的角 A、C 满足 $5(\cos A+\cos C)+4(\cos A\cos C+1)=0$，则 $\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=$________。

题目出处 2011 年全国高中数学联赛一试 B 卷第 5 题

错因 命题人以为：令 $\tan\dfrac{A}{2}=m, \tan\dfrac{C}{2}=n$，用万能公式 $\cos A=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}, \cos C=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}$，代入等式中可化简得 $(mn)^2=9$，即 $\tan^2\dfrac{A}{2}\tan^2\dfrac{C}{2}=9$，又 $\dfrac{A}{2}$、$\dfrac{C}{2}$ 均为锐角，所以 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}>0$，故 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=3$。

从这个结果来看，其实想想也知道不可能，因为我们熟知三角形中有恒等式 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$，各项都是正的，所以 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ 必然是 $(0,1)$ 内的值，又怎么会等于 3 呢？

而从已知等式来看，其实也是显然不成立的，因为 $\cos A+\cos C=2\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}>0$，且 $\cos A\cos C+1\geqslant 0$，所以 $5(\cos A+\cos C)+4(\cos A\cos C+1)$ 一定是正的，又怎么会等于 0 呢？

也就是说，这题无论从条件还是结果来看都是很容易发现问题的，可见这题命题人的水平实在是不敢恭维，很难想象这题竟然会出现在联赛题中。

修改建议 我估计命题人命本题的顺序是先有了 $5(\cos A+\cos C)+4(\cos A\cos C+1)=0$ 与 $\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}$ 的关系，最后为了开方时舍去负值才添加“三角形”这一条件上去，却没注意“三角形”得到的除了“$\dfrac{A}{2}$、$\dfrac{C}{2}$ 均为锐角”之外还带有其他“副作用”，因此，修改的方法很简单，直接将“$\triangle ABC$ 的角 A、C”改成“A, $C\in(0,\pi)$”即可。

错题 16. 斜棱柱的底面和侧面中，矩形的个数最多可有 （　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 6 个

错因 首先明确一些定义，根据人教版的高中数学教材所说，棱柱的定义是：有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱（prism）。

侧面、底面、侧棱这些定义就不说了，这没争议。而斜棱柱就是侧棱与底面不垂直的棱柱，这也没争议。

注意到定义里面并没有规定底面多边形的形状，也就是说底面可以是凹多边形，所以两个底面完全可以搞成如图 4 这个样子，然后斜着一整，就可以整出图 5 那样的斜棱住，其中灰色部分的侧面全是矩形，可见斜棱住侧面矩形是想要多少有多少。

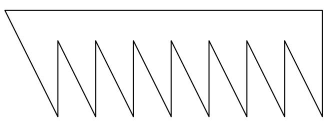


图 4

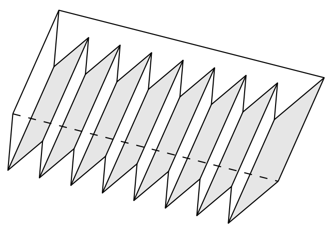


图 5

修改建议 加设条件“底面为凸多边形”。

错题 17. 若三个不同的点 A, B, C 满足 $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}):(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}):(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB})=3:4:(-5)$，则这三点（　）

A. 组成锐角三角形　　B. 组成直角三角形　　C. 组成钝角三角形　　D. 在同一条直线上

错因 不存在满足等式的三点，下面来分析一下那个比值满足什么条件时才存在那样的三点。

如果 A, B, C 三点共线，若 B 在 A, C 之间，设 $AB = x > 0$, $BC = y > 0$，则

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}\right):\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\right):\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right) &= \big(-y(x+y)\big):\big(-(x+y)x\big):(xy)\\ &= \left(1+\frac{y}{x}\right):\left(1+\frac{x}{y}\right):(-1),\end{aligned}$$

所以，若 $\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}\right):\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\right):\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right) = p:q:r$ 且 A, B, C 三点共线，则 p, q, r 不能全部同号，而如果将比例化简为 p, $q > 0$, $r = -1$，则还需要 p, $q > 1$ 且 $(p-1)(q-1) = 1 \iff pq = p+q$；

如果 A, B, C 构成三角形，设对应边长为 a, b, c，则

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}\right):\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\right):\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right) = p:q:r\\ \iff\ & ab\cos C : bc\cos A : ca\cos B = p:q:r\\ \iff\ & (a^2+b^2-c^2):(b^2+c^2-a^2):(c^2+a^2-b^2) = p:q:r\\ \iff\ & b^2:c^2:a^2 = (p+q):(q+r):(r+p),\end{aligned}$$

所以此时 $p+q$, $q+r$, $r+p$ 三者同号，如果都为正，那么 $\sqrt{p+q}$, $\sqrt{q+r}$, $\sqrt{r+p}$ 要构成三角形。

由上述结论可见，原题的等式不可能成立。

修改建议 可以将比值改为 $6:3:(-2)$ 或 $3:3:(-1)$ 等。

错题 18. 三个半径都为 r 的球 O_1, O_2, O_3 彼此相切地靠紧放在水平桌面上。正四面体 D-ABC 的面 ABC 紧贴桌面，其他三个面与三个球分别相切，则正四面体的棱长为 ( )

A. $\dfrac{2r}{3}$ B. $2r$ C. $\left(2+\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}\right)r$ D. $\left(4-\sqrt{6}\right)r$

错因 题目没说明球在四面体里面还是在外面，这样已经有两类满足条件的正四面体了。更重要的是，即使先规定了里外，按照“其他三个面与三个球分别相切”这样的表达，四面体的位置仍然不能够确定。

我们以球在四面体内部为例，其俯视图可以像图 6 那样子（图中的点表示球与侧面相切的位置，下同），也可以像图 7 那样子（此时四面体最大），甚至可以像图 8 那样子，都是满足“其他三个面与三个球分别相切”这句话的，然而它们的大小显然不一样。球在四面体外部的情形类似，所以按照题目的表达，正四面体的棱长无法确定，但是有一定范围。

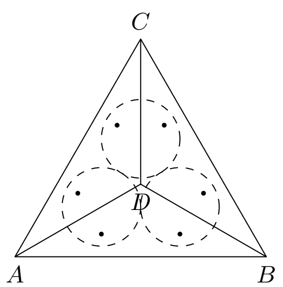


图 6

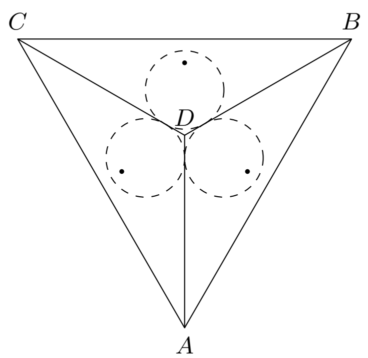


图 7

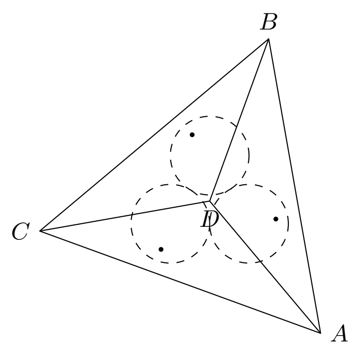


图 8

修改建议 虽然可以改为求正四面棱长的取值范围，但是球在四面体外部的情况稍复杂，所以建议还是修改“其他三个面与三个球分别相切”这句话，比如说改成“三个球均在正四面体内部，面 DAB 与球 O_1、O_2 都相切，面 DBC 与球 O_2、O_3 都相切，面 DCA 与球 O_3、O_1 都相切”，这样就只能是图 6 那样子了。

错题 19. $\triangle ABC$ 内接于以 O 为圆心，1 为半径的圆，且 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值为（　）

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

错因　命题人可能以为：由条件得 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，两边平方得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OB}-\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OA}\\&=1-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=2。\end{aligned}$$

但是，由 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 可得 $2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$，于是 $|AC|=2$，也就是说 AC 是 $\odot O$ 的直径，即 O 在 AC 中点上，再由 $2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，于是 B、C 重合，与 $\triangle ABC$ 矛盾。

修改建议　可以改为 $\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，其中 k 为 $(-2,2)$ 内的常数。

其他

错题 20. 已知 $f(x)=\tan x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，若存在 $a,b\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $f(\cot a)=a,\ \cot(f(b))=b$ 同时成立，则（　）

A. $a=\tan b$　　B. $b=\cot a$　　C. $a=b$　　D. $a+b=\dfrac{\pi}{2}$

题目出处　武汉六校联考（可能是 2010 年）

错因　这题我猜不透命题人的想法，但或许有人会这样解：由 $f(\cot a)=a,\ \cot(f(b))=b$ 得 $\cot a=\arctan a$，$\tan b=\operatorname{arccot} b$，分别作出 $y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arccot} x$ 的图象，如图 9 所示。

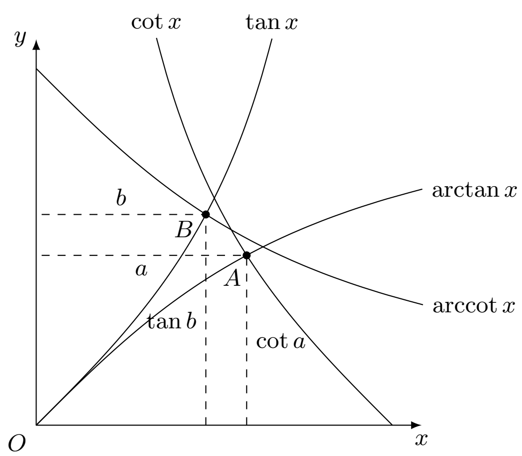


图 9

设 $y=\cot x$ 与 $y=\arctan x$ 交于 A，则 $A(a,\cot a)$，设 $y=\tan x$ 与 $y=\operatorname{arccot} x$ 交于 B，则 $B(b,\tan b)$，则由对称性，可知 $a=\tan b$ 且 $b=\cot a$，结果选项 A、B 均正确。

这个解法看似没问题，但其实还是错的，错在第一步，$f(\cot a)=a$，即 $\tan(\cot a)=a$，它并不能得到 $\cot a=\arctan a$，而应该得到 $\cot a=k\pi+\arctan a$，其中 k 是任意整数，由此可见，满足 $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且 $f(\cot a)=a$ 的 a 有无数个。

同理也有无数个 b 满足条件，所以 a,b 的关系无法确定。

其实直接从图象来理解也可以看出无数解，以 $\cot(\tan b)$ 为例，当 b 由 0 变到 $\dfrac{\pi}{2}$ 的过程中，$\tan b$ 由 0 变化到 $+\infty$，在 $\tan b$ 由 0 变为 π 时，$\cot(\tan b)$ 由 $+\infty$ 变到 $-\infty$，在 $\tan b$ 由 π 变为 2π 时，$\cot(\tan b)$ 亦由 $+\infty$ 变到 $-\infty$，……，如此下去，变化无穷次，每次都与 b 相交，所以有无穷个交点。

有条件的话，你也可以用软件作出 $\cot(\tan x)$ 的图象来看看。

修改建议 将“$f(\cot a)=a,\ \cot(f(b))=b$”改为“$\cot a=\operatorname{arctan} a,\ \tan b=\operatorname{arccot} b$”，并去掉选项 A、B 其一。

错题 21. 已知 $0<a<1$，方程 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 的实根个数为 n，且 $(x+1)^n+(x+1)^{11}=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_{10}(x+2)^{10}+a_{11}(x+2)^{11}$，则 $a_1=$ （ ）

A. 9　　B. -10　　C. 11　　D. -12

题目出处 2011 年浙江省三校高三联考数学（理）

错因 命题人可能大概是画了 $a^{|x|}$ 和 $|\log_a x|$ 的草图看了下，然后想当然得出 $n=2$。

事实上，当 $0<a<1$ 时，函数 a^x 与 $\log_a x$ 的交点问题是个非常经典的问题，具体请见《数学空间》2011 年第 7 期（总第 7 期）的封面故事。此结论应用于本题，结果是 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 的实根个数为 2 或 4，动态演示请见 `http://bbs.pep.com.cn/thread-950555-1-1.html` 二楼。

此外，本题还有一个不好的地方，就是将两道毫无关系的题生硬地拼凑成一道题，这是很低级的命题手法。

修改建议 将前半部分直接删除，后面直接写“$(x+1)^2+(x+1)^{11}=\cdots$”。

错题 22. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>1,\ a_{n+1}-1=a_n(a_n-1),\ n\in\mathbb{N}^+$，且

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2012}}=2, \tag{1}$$

求 $a_{2013}-4a_1$ 的最小值。

题目出处 扬州市 $2012\sim2013$ 学年度第一学期期末检测高三数学试卷

错因 命题人可能以为：

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)&\implies \frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\\
&\implies 2=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2012}}=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{2013}-1}\\
&\implies a_{2013}=\frac{2-a_1}{3-2a_1},
\end{aligned}$$

易知 $a_{2013}>1$，故 $1<a_1<\dfrac{3}{2}$，令 $t=3-2a_1\in(0,1)$，于是

$$a_{2013}-4a_1=\frac{2-a_1}{3-2a_1}-4a_1=2t+\frac{1}{2t}-\frac{11}{2}\geqslant-\frac{7}{2},$$

当 $a_1=\dfrac{5}{4}$ 时取等。

但是，我们重新看回式 (1)，显然地，数列的每一项由 a_1 唯一确定，所以，式 (1) 左边亦由 a_1 唯一确定，那么，式 (1) 其实是关于 a_1 的方程，理论上可以将 a_1 解出来，尽管可能不止一个解（其实也不难感觉到不会有多个解，下面将会证实），但这必定不会是连续的变量，a_{2013} 也一样，也就是说，所求的式子 $a_{2013}-4a_1$ 顶多只能取若干个固定的值，我想这肯定是命题人并未曾考虑的事情。

下面证明满足条件的 a_1 有且只有一个。为严格说明，有必要引入如下引理。

引理 1. 设 $f(x)=x^2-x+1$，记 $f(x)$ 的 n 次迭代为 $f_n(x)$，即

$$f_n(x)=\underbrace{f(f(f(\cdots f(x)\cdots)))}_{n\text{个}f},$$

则对任意正整数 n，$f_n(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上都是严格递增且大于 1。

其实引理 1 是很显然的，不过为了严格起见还是要证的。

用归纳法，当 $n=1$，$f(x)$ 显然在 $(1,+\infty)$ 上严格递增且大于 1，假设当 $n=k$ 时引理 1 成立，注意到 $f_{k+1}(x)=f(f_k(x))$ 且 $f_n(x)$ 显然可导，则由复合函数求导法则知

$$f'_{k+1}(x)=f'(f_k(x))f'_k(x)=(2f_k(x)-1)f'_k(x),$$

从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时由归纳假设可得 $f'_{k+1}(x)>0$，再者易知恒有 $f_n(1)=1$，所以当 $n=k+1$ 时引理 1 也成立，由数学归纳法知引理 1 获证。

回到原题，由条件有

$$2=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2012}}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{f(a_1)}+\frac{1}{f_2(a_1)}+\cdots+\frac{1}{f_{2011}(a_1)}=g(a_1),$$

由引理 1 知 $g(a_1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上严格递减，又显然 $g(1)=2012$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，从而方程 $g(a_1)=2$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个解，这就证明了满足题目条件的 a_1 有且只有一个，亦即 $a_{2013}-4a_1$ 的值是唯一确定的。至于具体的值是多少，如无意外是没办法解出来的，所以说这是一道错题。

错题 23. 已知数列 $\left\{\dfrac{1}{n+2}\right\}$ 前 n 项和为 S_n，“存在 $n_0\in\mathbb{N}^+$，对任意 $n>n_0$”成立的必要条件是“$S_n>2013$”，求 n_0 的最小值。

题目出处 2013 年临川一中高二月考最后一题

错因 这题实在太糟糕了，为了考逻辑用语，生硬地将一个数列题整成这个样子，“存在 $n_0\in\mathbb{N}^+$，对任意 $n>n_0$”这个是什么？连语句都不完整，怎么成立？完全搞不懂，第一次见这样出题的。引用网友说的一句话“逻辑符号本来是为了把问题叙述清楚，这种题反倒是故意让人看不懂。”

再者，按照我对命题人原意的猜测，本来想表达的意思可能是：求 n_0 的最小值使得任意 $n>n_0$ 有 $S_n>2013$。但即便是这样，题目也根本做不下去。

所以，但愿这只是因为题目在传播的时候录入错误所致，否则实在太不可思议。

1.3 巧解无理方程——等差中项的视角——程汉波

方程中含有根式，且被开方数是含有未知数的代数式的方程叫做无理方程，解无理方程的基础是根式运算及整式方程的解法，一般是根据方程的同解原理，把一个无理方程转化为有理方程，然后求解。这类试题很好的考察了学生的恒等变形能力、函数与方程思想、转化化归思想以及数形结合思想，因而在自主招生与竞赛中时常昙花一现，这类问题如若方法不得当，计算将极其繁杂。

例 1.（2012 年“北约联盟”自主招生试题第 2 题）求方程

$$\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=1$$

的实数根的个数。

分析 笔者在网络与期刊上查到的关于该题解法均大致为：注意到

$$\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}=\sqrt{(x+2)-6\sqrt{x+2}+3^2}=\left|\sqrt{x+2}-3\right|,$$
$$\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=\sqrt{(x+2)-10\sqrt{x+2}+5^2}=\left|\sqrt{x+2}-5\right|,$$

而由 $\left|\sqrt{x+2}-3\right|+\left|\sqrt{x+2}-5\right|\geqslant|-3+5|=2>1$ 得出该无理方程无实数解。但是，如若没有发现或者题目本身不具有以上完全平方式的特征，又或者将右边的 1 改为大于等于 2 的数，该怎么办呢？其实，我们若将方程与等差中项的概念联系起来，也可以得到如下巧妙解法，并且该解法可以解决很多类似的无理方程问题。

解 由题意知 $\dfrac{1}{2}$ 为 $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}, \sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}$ 的等差中项，故可设

$$\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2}-d, \tag{1}$$
$$\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2}+d, \tag{2}$$

由 $(2)^2-(1)^2$ 并整理得 $8-2\sqrt{x+2}=d$，则 $\sqrt{x+2}=\dfrac{8-d}{2}$，$x=\left(\dfrac{8-d}{2}\right)^2-2$，代入 (1) 中并整理得 $d^2=1$，故 $d=\pm1$。但均不能满足 (1)、(2) 右端的 $\dfrac{1}{2}-d, \dfrac{1}{2}+d$ 都为非负数，所以原无理方程无实数解。 □

注 读者可类似地解决：

2011 年第 22 届希望杯数学竞赛高二第二试第 15 题：解方程

$$\sqrt{x^2-2\sqrt{5}x+9}+\sqrt{x^2+2\sqrt{5}x+9}=10。$$

2010 年全国高中数学联赛浙江省预赛第 11 题：求满足方程

$$\sqrt{x-2009-2\sqrt{x-2010}}+\sqrt{x-2009+2\sqrt{x-2010}}=2$$

的所有实数解。

其实，这种构造等差数列来解决无理方程问题的技巧在高中数学教材中也能找到渊源。在教材推导椭圆的标准方程的过程中，按教材中方式建立直角坐标系后，由 $|MF_1|+|MF_2|=2a$ 得到无理方程 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$，之后教材中采用两次平方的技巧化其为整式方程，从而得到椭圆的标准方程，过程计算量大而且繁琐，该处一直是教学中的一个难点。但若构造等差数列，便可得到如下简捷推导。

例 2. 由 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ 推导椭圆的标准方程。

解 由题意知 a 为 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ 的等差中项，故可设

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-d, \tag{3}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+d, \tag{4}$$

由 $(4)^2-(3)^2$ 得 $4cx=4ad$，则 $d=\dfrac{cx}{a}$，代入 (3) 中得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{cx}{a},$$

再两边平方并整理即可得到椭圆的标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$。 □

注 （1）此法不仅使推导过程更简洁，而且顺手牵羊地的得到椭圆的焦半径公式为 $|PF_1|=a+\dfrac{c}{a}x$, $|PF_2|=a-\dfrac{c}{a}x$；

（2）文 [1] 用“常数变易法”巧妙的解得无理方程 $\sqrt{x^2+12x+40}+\sqrt{x^2-12x+40}=20$ 和 $\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}=4$，其实，这只是此例的特列，当然地也从等差中项的视角予以解决。

例 3. （2010 年西安市高中数学联赛）在实数范围内解方程 $\sqrt[3]{x^2+x-1}+\sqrt[3]{10-x-x^2}=3$。

分析 文 [2] 中给出了如下巧妙的解法，设 $a=\sqrt[3]{x^2+x-1}$, $b=\sqrt[3]{10-x-x^2}$，则

$$\begin{cases} a+b=3, \\ a^3+b^3=9, \end{cases}$$

由 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$，得

$$\begin{cases} a+b=3, \\ ab=2, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=2, \\ b=1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=1, \\ b=2, \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2+x-1}=2, \\ \sqrt[3]{10-x-x^2}=1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+x-1}=1, \\ \sqrt[3]{10-x-x^2}=2, \end{cases}$$

解得 $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$ 或 $x_3=1$, $x_4=-2$，最后检验均符合题意。其实，若从等差中项的视角，也可得到以下简洁自然的解法，相比而言，对于某些学生更易理解掌握。

解 由题意知 $\dfrac{3}{2}$ 为 $\sqrt[3]{x^2+x-1}$, $\sqrt[3]{10-x-x^2}$ 的等差中项，故可设

$$\sqrt[3]{10-x^2-x}=\frac{3}{2}-d, \tag{5}$$

$$\sqrt[3]{x^2+x-1}=\frac{3}{2}+d, \tag{6}$$

由 $(5)^3+(6)^3$ 并整理得 $d^2=\dfrac{1}{4}$，则 $d=\pm\dfrac{1}{2}$。

当 $d=\dfrac{1}{2}$ 时，有 $x^2+x-9=0$，则 $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$；当 $d=-\dfrac{1}{2}$ 时，有 $x^2+x-2=0$，则 $x_3=1$, $x_4=-2$。经检验，x_1, x_2, x_3, x_4 都是原无理方程的解。 □

例 4. （2005 年复旦大学保送生考试试题第 14 题）在实数范围内求解方程 $\sqrt[4]{10+x}+\sqrt[4]{7-x}=3$。

分析 文 [4] 中给出了如下巧妙的解法，设 $y=\sqrt[4]{10+x}$，则 $x=y^4-10$，于是方程转化为 $y+\sqrt[4]{17-y^4}=3$，两端四次方并因式分解得 $(y-1)(y-2)(y^2-3y+16)=0$，所以 $y=1$ 或 $y=2$。当 $y=1$ 时，$x=-9$；当 $y=2$ 时，$x=6$。着实巧妙，但其中四次多项式的因式分解并非易事，最初的换元尝试也是如此。其实，如从等差中项的视角，便可得到以下简洁的解法。

解 由题意可知 $\dfrac{3}{2}$ 为 $\sqrt[4]{7-x}$, $\sqrt[4]{10+x}$ 的等差中项，故可设

$$\sqrt[4]{7-x}=\frac{3}{2}-d, \tag{7}$$

$$\sqrt[4]{10+x}=\frac{3}{2}+d, \tag{8}$$

由 $(7)^4+(8)^4$ 并整理得 $16d^4+216d^2-55=0$，解得 $d^2=\dfrac{1}{4}$，则 $d=\pm\dfrac{1}{2}$。

当 $d=\dfrac{1}{2}$ 时，可解得 $x_1=6$；当 $d=-\dfrac{1}{2}$ 时，可解得 $x_2=-9$。

经检验，x_1, x_2 均为原无理方程的解。 □

例 5. 在实数范围内求解方程 $\sqrt{x+19}+\sqrt[3]{x+95}=12$。

分析 笔者在网络上查到以下巧妙证法：设 $f(x)=\sqrt{x+19}+\sqrt[3]{x+95}$，容易征得 $f(x)$ 在定义域 $[-19,+\infty)$ 内单调递增，且 $f(30)=\sqrt{49}+\sqrt[3]{125}=12$，故原方程仅有一个实根 $x=30$。真叫人拍案叫绝！但得出 $x=30$ 并不是一蹴而就的，而是经历多番观察、尝试和调整才得出的。如从等差中项的视角，则可有效回避这一突兀之处。

解 由题意知 6 为 $\sqrt{x+19}$, $\sqrt[3]{x+95}$ 的等差中项，故可设

$$\sqrt{x+19}=6-d, \tag{9}$$

$$\sqrt[3]{x+95}=6+d, \tag{10}$$

由 $(10)^3-(9)^2$ 并整理得 $d^3+17d^2+120d+104=0$，即 $(d+1)(d^2+16d+104)=0$，解得 $d=-1$，则 $x=30$。经检验，$x=30$ 是原无理方程的解。 □

例 6. 在实数范围内求解方程 $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x+4}$。

分析 同上例类似，有人这样求解，设

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x+1}{5x+4}}+\sqrt{\frac{4x-3}{5x+4}}=\sqrt{\frac{3}{5}-\frac{7}{5(5x+4)}}+\sqrt{\frac{4}{5}-\frac{31}{5(5x+4)}},$$

则 $f(x)$ 在定义域 $\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$ 内单调递增，又由于 $f(1)=1$，故原方程仅有一个实数根 $x=1$。真令人赞叹，但 $f(x)$ 的构造、$f(x)$ 的单调递增的证明明以及 $f(1)=1$ 都蕴含着丰富的数学思想与技巧，很好地考察了学生的数学素养。如从等差中项的视角，也可得到如下有味解法。

解 易知原方程等价于 $\sqrt{\dfrac{3x+1}{5x+4}}+\sqrt{\dfrac{4x-3}{5x+4}}=1$，则 $\dfrac{1}{2}$ 为 $\sqrt{\dfrac{4x-3}{5x+4}}$, $\sqrt{\dfrac{3x+1}{5x+4}}$ 的等差中项，故可设

$$\sqrt{\frac{4x-3}{5x+4}}=\frac{1}{2}-d, \tag{11}$$

$$\sqrt{\frac{3x+1}{5x+4}}=\frac{1}{2}+d, \tag{12}$$

由 $(12)^2-(11)^2$ 得 $d=\dfrac{4-x}{2\left(5x+4\right)}$，代入 (11) 中得 $\sqrt{\dfrac{4x-3}{5x+4}}=\dfrac{3x}{5x+4}$，两端平方并化简得 $11x^2+x-12=0$，则 $x=1$ 或 $x=-\dfrac{12}{11}$，由于 $x\geqslant\dfrac{3}{4}$，故 $x=1$，经检验，$x=30$ 是原无理方程的解。 □

例 7. （2006 年太原市高中数学竞赛）在实数范围内求解方程 $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$。

分析 文 [2] 中给出了如下解法：将方程两边同时立方得 $2x+3\sqrt[3]{x^2-1}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1})=5x$，又将 $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$ 代入上式中得 $\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{5x}=x$，再将这个式子两边立方得 $5x(x^2-1)=x^3$，即 $x(4x^2-5)=0$，解得 $x_1=0, x_{2,3}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，最后检验均符合题意。看似“暴力”，若看出“迭代”玄机实则漂亮！其实，如从等差中项的视角，也可得到以下简洁的解法。

解 当 $x=0$ 时，方程显然成立，即 $x_1=0$ 时原方程的一个根。

当 $x\neq0$ 时，易知原方程等价于 $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{5x}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{5x}}=1$，则 $\dfrac{1}{2}$ 为 $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{5x}}, \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{5x}}$ 的等差中项，故可设

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{5x}}=\frac{1}{2}-d, \tag{13}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{5x}}=\frac{1}{2}+d, \tag{14}$$

由 $(14)^3-(13)^3$ 得 $\dfrac{1}{x}=-5d^3-\dfrac{15}{4}d$，代入 (13) 解得 $d^2=\dfrac{1}{20}$，即 $d=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{10}$，则 $\dfrac{1}{x}=-5d\cdot d^2-\dfrac{15}{4}d=-4d$，所以 $x_{2,3}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。经检验，$x_1=0, x_{2,3}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 均符合题意。 □

由上观之，求解形如“ $\sqrt[m]{f\left(x\right)}+\sqrt[n]{g\left(x\right)}=\sqrt[p]{h\left(x\right)}$（常数），$m, n, p\in\mathbb{N}^+, m, n, p>1$”的无理方程，我们可首先将其变形为 $\dfrac{\sqrt[m]{f\left(x\right)}}{\sqrt[p]{h\left(x\right)}}+\dfrac{\sqrt[n]{g\left(x\right)}}{\sqrt[p]{h\left(x\right)}}=1$，即得 $\dfrac{1}{2}$ 为 $\dfrac{\sqrt[m]{f\left(x\right)}}{\sqrt[p]{h\left(x\right)}}, \dfrac{\sqrt[n]{g\left(x\right)}}{\sqrt[p]{h\left(x\right)}}$ 的等差中项，于是可设 $\dfrac{\sqrt[m]{f\left(x\right)}}{\sqrt[p]{h\left(x\right)}}=\dfrac{1}{2}-d$, $\dfrac{\sqrt[n]{g\left(x\right)}}{\sqrt[p]{h\left(x\right)}}=\dfrac{1}{2}+d$，最后变无理方程为有理方程进行求解，该方法提供了一种快捷、简便、巧妙而且有章可循的将无理方程转变为有理方程，进而得到无理方程所有实根策略。

参考文献

[1] 徐章韬. 初等数学中几种常数变易法 [J]. 数学教学. 2013（2）: 25.
[2] 肖维松. 含有三次根式的无理方程的解法探究 [J]. 数学通讯. 2012（2）（下半月）: 61.
[3] 张雪明. 著名高校自主招生真题题典（数学）[M]. 北京：现代教育出版社, 2012: 22.
[4] 2005 年复旦大学保送生考试数学试题参考答案 [J]. 空念数学杂志. 2012（8）: 74-75.

1.4 出新意于“课本”之中，寄妙理于“推论”之外——如何攻克湖北理科压轴题?——赵亮

1. 引子

在选修 4-5 中，对排序不等式作了简单介绍，即顺序和大于乱序和大于逆序和。定理的形式比较简单，证明比较困难（运用了局部调整法）。表面上看，该知识点在湖北高考中地位不是很高，但其类似形式的命题却在湖北高考中广泛应用（我们暂称之为“潜应用”），比如 2011 年和 2012 年湖北理科高考数学压轴题。

湖北近几年高考及其调考压轴题呈现出以下趋势：首先证一个局部不等式，然后将其推广。而推广又分为两种形式：第一，从“应用”层面推广，如 2013 年湖北理科高考压轴题，其特点在于首先利用导数证明一个局部不等式，然后利用这个不等式对一个数的大小进行估计；其次，从“维数”方面推广，其特点是首先证明一个二维的不等式，然后将其推广为 n 维，如 2012 年湖北高考压轴题，2013 年武汉市理科二月和四月调考压轴题，2013 武汉外国语学校高三新起点调考压轴题 [1] 等，都呈现出这种特点。尤其要注意著名不等式之间的联系，它们之间往往也可以相互证明，比如 Jensen 不等式，Young 不等式，Cauthy 不等式，Hölder 不等式和幂平均不等式。笔者发现：从二维不等式出发，然后推广为 n 维形式，其研究手法和排序不等式的研究方式类似，这也是华罗庚先生所讲的研究数学问题的“进”和“退”的策略——往往一道难题将其形式“退化”至一定程度，我们能够更加清晰地看到矛盾的实质，然后再“进化”至更广泛的命题形式，使问题得以彻底解决。本文以湖北八校 2013 届高三第一次联考压轴题切入，对其二维形式进行证明演绎，然后将其推广为 n 维形式，从而得到“指数版”的排序不等式。

2. 例题讲解

（湖北八校 2013 届高三第一次联考）已知函数 $f(x)=(1+x)^t-1$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，其中实数 t 满足 $t\neq 0$ 且 $t\neq 1$。直线 $l: y=g(x)$ 是 $f(x)$ 的图像在 $x=0$ 处的切线。

（I）求 l 的方程：$y=g(x)$；

（II）若 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，试确定 t 的取值范围；

（III）若 $a_1, a_2\in(0,1)$，求证：

$$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_1}。\tag{1}$$

解 （I）因为 $f'(x)=t(1+x)^{x-1}$，所以 $f'(0)=t$，又 $f(0)=0$，所以 $l: y=tx$；

（II）令 $h(x)=f(x)-g(x)=(1+x)^t-tx-1$，$h'(x)=t(1+x)^{t-1}-t=t[(1+x)^{t-1}-1]$。

当 $t<0$ 时，$w(x)=(1+x)^{t-1}-1$ 单调递减，当 $x=0$ 时，$h'(x)=0$，当 $x\in(-1,0)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增。

所以，$x=0$ 是 $h(x)$ 的唯一极小值点，所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，$f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立；

当 $0<t<1$ 时，$w(x)=(1+x)^{t-1}-1$ 单调递减，当 $x=0$ 时，$h'(x)=0$，当 $x\in(-1,0)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(0,+\infty)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减。

所以，$x=0$ 是 $h(x)$ 的唯一极大值点，$h(x)\leqslant h(0)=0$，不满足 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立；

当 $t>1$ 时，$w(x)=(1+x)^{t-1}-1$ 单调递增，当 $x=0$ 时，$h'(x)=0$，当 $x\in(-1,0)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增。

所以，$x=0$ 是 $h(x)$ 的唯一极小值点，所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，$f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立。

综上，$t\in(-\infty,0)\bigcup(1,+\infty)$；

（III）当 $a_1=a_2$，不等式 (1) 显然成立；当 $a_1\neq a_2$ 时，不妨设 $a_1<a_2$。

$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}>a_1^{a_2}+a_2^{a_1} \iff a_1^{a_1}-a_1^{a_2}>a_2^{a_1}-a_2^{a_2}$。令 $\varphi(x)=x^{a_1}-x^{a_2}$，$x\in[a_1,a_2]$。

下证 $\varphi(x)$ 是单调减函数。$\varphi'(x)=a_1x^{a_1-1}-a_2x^{a_2-1}=a_1x^{a_2-1}\left(x^{a_1-a_2}-\dfrac{a_2}{a_1}\right)$，易知 $a_1-a_2\in(-1,0)$，

$1+a_1-a_2\in(0,1)$，$\dfrac{1}{1+a_1-a_2}>1$，由（II）知当 $t>1$，$(1+x)^t>1+tx$，所以

$$a_2^{\frac{1}{1+a_1-a_2}}=[1+(a_2-1)]^{\frac{1}{1+a_1-a_2}}>1+\frac{a_2-1}{1+a_1-a_2}=\frac{a_1}{1+a_1-a_2}>a_1,$$

所以 $a_2>a_1^{1+a_1-a_2}$，$\dfrac{a_2}{a_1}>a_1^{a_1-a_2}\geqslant x^{a_1-a_2}$，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $[a_1,a_2]$ 上单调递减。

所以 $\varphi(a_1)>\varphi(a_2)$，即 $a_1^{a_1}-a_1^{a_2}>a_2^{a_1}-a_2^{a_2}$，所以 $a_1^{a_1}+a_2^{a_2}>a_1^{a_2}+a_2^{a_1}$。

综上所述，不等式 (1) 对 $a_1,a_2\in(0,1)$ 恒成立。 □

3. 猜想与证明

由上述不等式 (1) 成立，读者不禁会问：n 维形式的不等式是否也会成立呢？我们用以下两个推论来回答这个问题。

推论一 若 $a_1,a_2,a_3\in(0,1)$，求证：$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{b_1}+a_2^{b_2}+a_3^{b_3}$。其中 (b_1,b_2,b_3) 是 (a_1,a_2,a_3) 的一个乱序排列。

证明 我们将不等式 $a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{b_1}+a_2^{b_2}+a_3^{b_3}$ 的所有情形列出来，有如下列式子：

$$\begin{cases}a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3},\\ a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_1}+a_2^{a_3}+a_3^{a_2},\\ a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_3}+a_2^{a_2}+a_3^{a_1},\\ a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_1}+a_3^{a_3},\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1},\\ a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_3}+a_2^{a_1}+a_3^{a_2},\end{cases}\tag{3}$$

显然，根据不等式 (1)，很容易知道式 (2) 的四个不等式均成立。

而式 (3) 中的两个不等式形式相同，因而只需证明其中一个即可，下面证明：

若 $a_1,a_2,a_3\in(0,1)$，则 $a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$。

i）先设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$，则有 $a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_1}+a_3^{a_3}$，现在即证 $a_1^{a_2}+a_2^{a_1}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$，即证 $a_2^{a_1}-a_2^{a_3}\geqslant a_3^{a_1}-a_3^{a_3}$，令 $\varphi(x)=x^{a_1}-x^{a_3}$，则易知：当 $x\in[a_2,a_3]\subseteq[a_1,a_3]$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调递减，所以 $a_2^{a_1}-a_2^{a_3}\geqslant a_3^{a_1}-a_3^{a_3}$。因此，当 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$ 时，$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$ 成立。同理，当 $a_2\leqslant a_3\leqslant a_1$，$a_3\leqslant a_1\leqslant a_2$ 时，不等式 $a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$ 依然成立；

ii）若 $a_2\leqslant a_1\leqslant a_3$，则 $a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_2^{a_2}+a_1^{a_3}+a_3^{a_1}$，即证：$a_2^{a_2}+a_1^{a_3}+a_3^{a_1}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$，即证：$a_2^{a_2}-a_2^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}-a_1^{a_3}$，令 $\varphi(x)=x^{a_2}-x^{a_3}$，则易知：当 $x\in[a_2,a_1]\subseteq[a_2,a_3]$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调递减，所以 $a_2^{a_2}-a_2^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}-a_1^{a_3}$。因此，当 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$ 时，$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$ 成立；

iii）若 $a_1\leqslant a_3\leqslant a_2$，则 $a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_1}+a_2^{a_3}+a_3^{a_2}$，即证：$a_1^{a_1}+a_2^{a_3}+a_3^{a_2}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$，即证：$a_1^{a_1}-a_1^{a_2}\geqslant a_3^{a_1}-a_3^{a_2}$，令 $\varphi(x)=x^{a_1}-x^{a_2}$，则易知：当 $x\in[a_1,a_3]\subseteq[a_1,a_2]$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调递减，所以 $a_1^{a_1}-a_1^{a_2}\geqslant a_3^{a_1}-a_3^{a_2}$。因此，当 $a_1\leqslant a_3\leqslant a_2$ 时，$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$ 成立；

iv）若 $a_3\leqslant a_2\leqslant a_1$，则 $a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_3^{a_3}+a_1^{a_2}+a_2^{a_1}$，即证：$a_3^{a_3}+a_1^{a_2}+a_2^{a_1}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$，即证：$a_3^{a_3}-a_3^{a_1}\geqslant a_2^{a_3}-a_2^{a_1}$，令 $\varphi(x)=x^{a_3}-x^{a_1}$，则易知：当 $x\in[a_3,a_2]\subseteq[a_3,a_1]$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调递减，所以 $a_3^{a_3}-a_3^{a_1}\geqslant a_2^{a_3}-a_2^{a_1}$。因此，当 $a_3\leqslant a_2\leqslant a_1$ 时，$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$ 成立。

综上所述，当 $a_1,a_2,a_3\in(0,1)$，$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}$ 恒成立。同理可证：当 $a_1,a_2,a_3\in(0,1)$，$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+a_3^{a_3}\geqslant a_1^{a_3}+a_2^{a_1}+a_3^{a_2}$ 恒成立。

综合 (2)、(3) 可知，推论一成立。 □

推论二 若 $a_i \in (0,1)$（$i=1,2,\cdots,n$），求证：

$$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+\cdots+a_n^{a_n} \geqslant a_1^{b_1}+a_2^{b_2}+\cdots+a_n^{b_n}。$$

其中 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的一个乱序排列。

证明 本题采用数学归纳法进行证明。

i）当 $n=2,3$ 时，由推论一可知，显然成立；

ii）假设当 $n=k-1,k$ 时，本命题成立，即

$$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+\cdots+a_{k-1}^{a_{k-1}} \geqslant a_1^{b_1}+a_2^{b_2}+\cdots+a_{k-1}^{b_{k-1}},$$

$$a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+\cdots+a_k^{a_k} \geqslant a_1^{b_1}+a_2^{b_2}+\cdots+a_k^{b_k},$$

则当 $n=k+1$ 时，设 $f=a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+\cdots+a_k^{a_k}+a_{k+1}^{a_{k+1}}$，我们分 $k+1$ 种情形讨论：

由归纳假设可知：

当指数 a_{k+1} 不与其他指数对调时

$$f \geqslant a_1^{b_1}+a_2^{b_2}+\cdots+a_k^{b_k}+a_{k+1}^{a_{k+1}},$$

其中 $(b_1,b_2,\cdots,b_k)$ 是 $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ 的一个乱序排列；

当指数 a_{k+1} 与指数 a_1 对调时

$$f \geqslant (a_1^{a_{k+1}}+a_{k+1}^{a_1})+a_2^{a_2}+\cdots+a_k^{a_k} \geqslant (a_1^{a_{k+1}}+a_{k+1}^{a_1})+a_2^{b_1}+\cdots+a_k^{b_{k-1}},$$

其中 $(b_1,b_2,\ldots,b_{k-1})$ 是 $(a_2,a_3,\ldots,a_k)$ 的一个乱序排列；

当指数 a_{k+1} 与指数 a_2 对调时

$$f \geqslant (a_2^{a_{k+1}}+a_{k+1}^{a_2})+a_1^{a_1}+a_3^{a_3}\cdots+a_k^{a_k} \geqslant (a_2^{a_{k+1}}+a_{k+1}^{a_2})+a_1^{b_1}+a_3^{b_2}+\cdots+a_k^{b_{k-1}},$$

其中 $(b_1,b_2,\ldots,b_{k-1})$ 是 $(a_1,a_3,\ldots,a_k)$ 的一个乱序排列；

……

当指数 a_{k+1} 与指数 a_k 对调时

$$f \geqslant (a_k^{a_{k+1}}+a_{k+1}^{a_k})+a_1^{a_1}+a_2^{a_2}\cdots+a_{k-1}^{a_{k-1}} \geqslant (a_k^{a_{k+1}}+a_{k+1}^{a_k})+a_1^{b_1}+a_2^{b_2}+\cdots+a_{k-1}^{b_{k-1}},$$

其中 $(b_1,b_2,\ldots,b_{k-1})$ 是 $(a_1,a_2,\ldots,a_{k-1})$ 的一个乱序排列。

所以当 $n=k+1$ 时，不等式 $a_1^{a_1}+a_2^{a_2}+\cdots+a_{k+1}^{a_{k+1}} \geqslant a_1^{b_1}+a_2^{b_2}+\cdots+a_{k+1}^{b_{k+1}}$ 亦成立。

综上所述，原命题成立。 □

点评 用同样的方法可以证明：当 $a_i \in (0,1)$（$i=1,2,\cdots,n$），则 $a_1^{b_1}+a_2^{b_2}+\cdots+a_n^{b_n} \geqslant a_1^{a_n}+a_2^{a_{n-1}}+\cdots+a_n^{a_1}$。其中 $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ 是 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的一个乱序排列。请读者自行证明。

4. 反思点评

源于课本，高于课本，出新意于“课本”之中，寄妙理于“推论”之外，是近几年来湖北高考压轴题的命题趋势。在本文的例题中，考查了基本的导数问题——利用导数求最值。考查了 Bernoulli 不等式，这也是源于课本，但是其难度明显高于课本。因此，为了应对高考所呈现出的新的命题形式，我们的策略是：以课本为纲，以探索为目，最终达到纲举目张的效果。以课本为纲，并不是仅仅满足于课本上的习题，而是围绕着课本的习题向“纵深”方向拓展。比如，Bernoulli 不等式比较简单，而由 Bernoulli 不等式衍生出新不等式的形式

林林总总，不一而足。这就需要我们花大量心思去归纳和整理。以探索为目，就是要求我们在解决问题的过程中，始终对问题“存疑”——二维的形式解决了，三维的形式是否成立？能否进一步推广为 n 维形式？往往问题的提出，也带动了方法的复习，比如本例中就创造性地运用了数学归纳法，对 n 维形式“指数版”排序不等式作了深入探讨，而这种思维范式和 2012 年湖北高考理科压轴题有异曲同工之妙。实际问题并没有真正结束，推论二是否能进一步推广？比如当 $a_i \in (1,+\infty)$（$i=1,2,\cdots,n$）时，推论二是否仍然成立？当 $a_i \in (0,+\infty)$（$i=1,2,\cdots,n$）时，推论二是否依然成立？更为深刻的一种命题是：形式上满足顺序、乱序和逆序的代数式之和，是否也满足排序不等式的关系呢？（这里不仅仅局限于积的和、指数的和，可以是任何形式的代数式之和）或者，这种深刻命题形式并不一定正确，那么能否给出一些限制条件，使得这种命题普遍成立？这一切有待我们去不断挖掘，在挖掘的过程中，不但能够增长知识，深刻思想，锤炼思维，而且在解题技巧方面得以长足的进步。而这正是我们在高考复习中需要采取的策略，通过问题的提出带动题目的产生，通过题目的产生带动方法的复习，不断地从“新”“异”“深”三个方面下功夫，不断地问自己“这样变可不可以？那样变行不行?”，而这个过程正符合胡适先生的研究理念：“大胆猜想，小心求证”。任何一个好的压轴题正是在这样的理念下应运而生的，我们在复习的时候也应该沿着这条思路走下去，不满足于解决某一道难题，而应在解决之后往“纵深”方向多几个“追问”，多一点“思辩”，多一些“积累”。那么经过这样的复习之后，湖北高考压轴题也就不攻自破了！

参考文献

[1] 赵亮. 函数与不等式的博弈 [J]. 中学数学杂志, 2013, 11: 49-53

能力提升

2.1 平行投影和透视投影——何万程

很多人都知道空间几何图形的斜二测法画图方法，但是这种画图法是人为硬性规定的吗？下面将来解答这个问题，并介绍两种重要的空间几何图形画图法。

平行投影

定义 1. 在一束平行光线照射下在投影平面形成的像称为平行投影，也称为轴测投影。

在投影平面背对光线的点我们也延伸到投影平面上形成像。

定义 2. 光线与投影平面垂直时所成的像称为正投影，不垂直时所成的像称为斜投影。

斜二测法就是一种斜投影。如图 1，光线与 x、y 轴成等角，与投影平面所成角的正切值是 2，像的 z' 轴换为斜二测法的 x 轴，x 轴换为斜二测法的 y 轴，y 轴换为斜二测法的 z 轴，这样就得到斜二测法的坐标系。

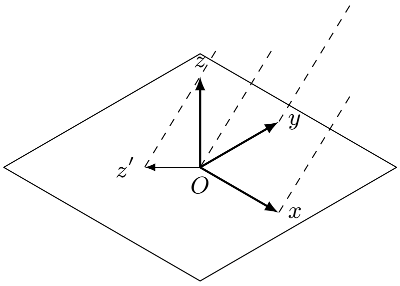


图 1

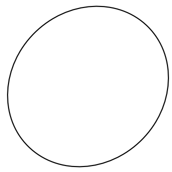


图 2

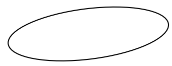


图 3

由于斜二测法是斜投影，球的像可看成是母线与光线平行的圆柱与投影面的交线，所以球的像是一个倾斜 $45°$ 的椭圆，短半轴长与球半径相等，长半轴长是球半径的 $\dfrac{\sqrt{1^2+2^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$（图 2），这与第八期 5.3 这篇文章里的结论是一致的。

对于原 xOz 平面上的圆 $x^2+z^2=r^2$，我们以 y 作为新的坐标 y 轴建立投影平面坐标，此时设圆上的点 (x,y) 的投影是 (x',y')，则

$$x'=x+\frac{\sqrt{2}}{4}z，y'=-\frac{\sqrt{2}}{4}z，$$

所以

$$x=x'+y'，z=-2\sqrt{2}y'，$$

代入 $x^2+z^2=r^2$ 整理得

$$x'^2-2x'y'+9y'^2=r^2，$$

这是一个长轴的斜率为 $\sqrt{17}-4$，长半轴长为 $\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}{4}r$，短半轴长为 $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{17}}}{4}r$ 的椭圆（图 3），椭圆是倾斜的，因此有旋转体的直观图一般不使用斜二测法去画。由这个结论，我们可以看到人民教育出版社出版的普通高中课程标准实验教科书《数学》（必修 2）第 18 页例 3 的画图法是错误的，电子课本地址：`http://www.pep.com.cn/gzsx/jszx_1/czsxtbjxzy/xkbsyjc/dzkb/bx2/201102/t20110222_1023671.htm`。

下面来讨论一般的正投影。如图 4，直线 OP 垂直于投影平面，x'、y'、z' 分别是点 x、y、z 在投影平面的正投影，$Ox=Oy=Oz=1$，$\angle POx=\alpha$，$\angle POy=\beta$，$\angle POz=\gamma$，则

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1，$$

$$Ox' = \sin\alpha，Oy' = \sin\beta，Oz' = \sin\gamma，$$

根据三面角第一余弦定理得

$$\cos\angle x'Oy' = -\cot\alpha\cot\beta，\ \cos\angle y'Oz' = -\cot\beta\cot\gamma，\ \cos\angle z'Ox' = -\cot\gamma\cot\alpha。$$

x' 轴换成投影面的 x 轴，y' 轴换成投影面的 y 轴，z' 轴换成投影面的 z 轴，这样就得到了正投影面的坐标系，平行于坐标轴的线段在投影面中仍然与投影面坐标轴平行，平行于原 x 轴的线段在投影面内的长度是原来长度的 $\sin\alpha$，平行于原 y 轴的线段在投影面内的长度是原来长度的 $\sin\beta$，平行于原 z 轴的线段在投影面内的长度是原来长度的 $\sin\gamma$，经过以上步骤便可确定空间某一点在投影面上的像。

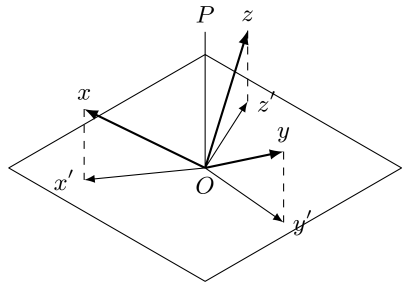


图 4

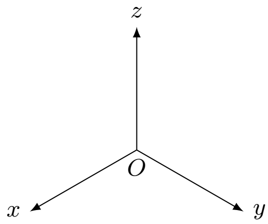


图 5

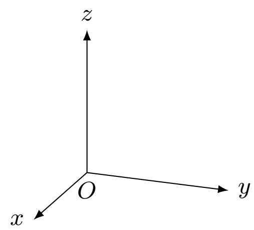


图 6

显然半径为 r 的球的像是半径为 r 的圆。若半径为 r 的圆所在平面的法向量是 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{l}$ 与投影平面所成角为 θ，$\boldsymbol{l}$ 在投影面上的像是 $\boldsymbol{l}'$，则圆所在平面与投影平面的交线与 $\boldsymbol{l}'$ 垂直，所以圆的像是长轴与 $\boldsymbol{l}'$ 垂直，短轴与 $\boldsymbol{l}'$ 平行，长半轴为 r，短半轴为 $r\sin\theta$ 的椭圆。若 $\boldsymbol{l}$ 的单位向量为 $\{p,q,r\}$，则

$$\cos\theta = \sqrt{p^2\sin^2\alpha + q^2\sin^2\beta + r^2\sin^2\gamma - 2pq\cos\alpha\cos\beta - 2pr\cos\alpha\cos\gamma - 2qr\cos\beta\cos\gamma}，$$

$$\sin\theta = \sqrt{p^2\cos^2\alpha + q^2\cos^2\beta + r^2\cos^2\gamma + 2pq\cos\alpha\cos\beta + 2pr\cos\alpha\cos\gamma + 2qr\cos\beta\cos\gamma}。$$

若 $\angle x'Oy'$、$\angle y'Oz'$、$\angle z'Ox'$ 其中之一是直角，则必定 α、β、γ 之一为直角，即 x 轴、y 轴、z 轴之一在投影平面内，此时 $\angle x'Oy'$、$\angle y'Oz'$、$\angle z'Ox'$ 必定两个为直角，剩余的那个是平角或为 $0°$，所以斜二测法不会是正投影。

若 $\alpha=\beta=\gamma$，则

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}，\ \sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \frac{\sqrt{6}}{3}，$$

$$\angle x'Oy' = \angle y'Oz' = \angle z'Ox' = 120°，$$

此时的投影画法称为正等测法。为了画图方便，正等测法投影平面的轴的单位长度画成与实际单位长度相等，这样得到的像是实际的 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，这与第八期 5.3 这篇文章里的结论是一致的。正等测投影平面的坐标轴如图 5 所示。

若 $2\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$，则

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}，\ \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{3}，\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}，\ \sin\beta = \sin\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}，$$

$$\cos\angle x'Oy' = \cos\angle z'Ox' = -\frac{\sqrt{7}}{4}，\ \cos\angle y'Oz' = -\frac{1}{8}，$$

此时的投影画法称为正二测法。为了画图方便，正二测法投影平面的 x 轴单位长度画成与实际单位长度的一半，投影平面的 y、z 轴单位长度画成与实际单位长度相等，这样得到的像是实际的 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$。正二测投影平面的坐标轴如图 5 所示。

下面要纠正一下很多人画圆锥（图 7）、球北极、南极（图 8）的错误画图法。

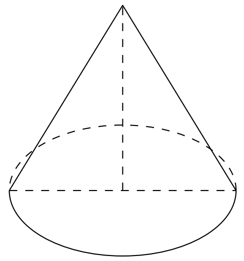


图 7

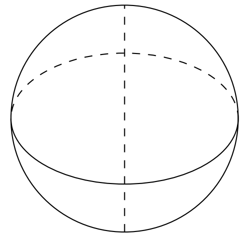


图 8

圆锥的错误在于有一些母线在所画的边界线之外，正确的画法应该如图 9，边界线是过圆锥顶点与底面椭圆相切的线段，圆台的边界线画法与圆锥的类似。球北极、南极的错误在于如果用平行投影，此时如果赤道平面不是一线段（即赤道平面与投影光线不平行），那么南极北极不在边界上，正确画法应该如图 10，过球心与投影面的 z 轴平行的直线上取距球心 r 个 z 轴单位长度的两点。即使用透视投影法（下面将介绍）画出来的两极的点也不可能都在边界上的。

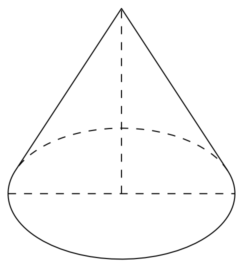


图 9

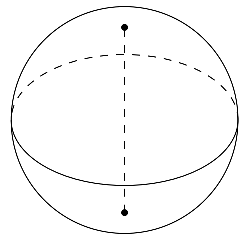


图 10

透视投影

定义 3. 在点光源发射光线照射下在投影平面形成的像称为透视投影，也称为中心投影，光源也称为视点。

在投影平面背对光线的点我们也延伸到投影平面上形成像。

定义 4. 视点与投影平面的距离称为视距。

如图 11，设点 P 是视点，点 O 是过点 P 垂直于投影平面的直线与投影平面的交点，则 OP 就是视距，点 B 是射线 PA 与投影面的交点，点 B 就是点 A 的像。当射线 PA 与投影平面无交点时点 A 不能成像。当视距越来越大，光线就越来越接近平行线，所以平行投影可看成是透视投影的极限情形。

以下讨论如无特殊说明，则规定视距为 d。

我们把 $\overrightarrow{OP}$ 作为 z 轴，选择投影平面内过点 O 的两条垂直直线作为 x 轴和 y 轴，设点 A 的坐标是 (x, y, z)，根据透视投影的定义，点 A 的坐标为

$$\left(\frac{dx}{d-z}, \frac{dy}{d-z}\right)。$$

若已知点坐标为是 (x, y, z)，我们可以用下面的方法作出像（图 12）：在投影面上作点 $A(x, y)$；在不与 OA 重合的一轴上取点 P，使 $\overline{OP} = d$；在所选的轴上取点 Q，使 $\overline{OQ} = d - z$；过点 Q 作 AP 的平行线，交直线 OA 于点 B，则点 B 就是所求的像。

易知与投影平面平行的平面内的平行直线的像都是平行的，直线上相距相等的点的像相距也相等；过视点的直线的像是一个点。下面讨论不是与投影平面平行的平面内的直线，设直线的方向向量是 $\{p, q, r\}$，直线过

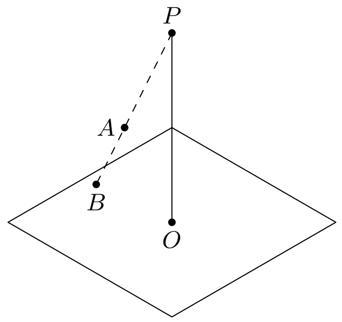


图 11

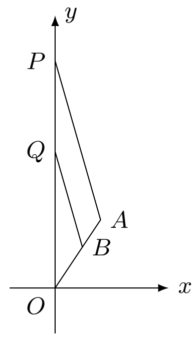


图 12

点 (x_0, y_0, z_0)，则直线上点的像的坐标是

$$\left(\frac{d\,(x_0+pt)}{d-z_0-rt}, \frac{d\,(y_0+qt)}{d-z_0-rt}\right),$$

这些点在直线

$$(dq+ry_0-qz_0)\,x-(dq+rx_0-pz_0)\,y=d\,(qx_0-py_0)$$

上，当 t 趋向负无穷大时，上面的坐标的极限为

$$\left(-\frac{dp}{r}, -\frac{dq}{r}\right),$$

这个极限点称为直线像的灭点，如果直线不与 z 轴平行时此时直线的像就是从灭点发出的一条射线。由灭点的坐标可以看到，一切不是与投影平面平行的平面内的平行直线的像相交于同一灭点。若不用坐标计算来确定灭点，可取两条平行直线，作这两条平行直线的像的交点，得到灭点。

易知与投影平面平行的平面的像会占据整个投影平面；过视点的平面的像是一条直线。下面讨论不与投影平面平行的平面，设平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则此时 A、B 必定不全为 0，不妨设 $A\neq 0$，该平面与平面 $y=kz+b$ 的交线的 x 坐标为

$$x=-\frac{(Bk+C)z+Bb+D}{A},$$

这条直线的灭点是

$$\left(\frac{d(Bk+C)}{A}, -kd\right),$$

这些灭点在直线 $Ax+By=Cd$ 上，这条直线称为该平面像的灭线，由此可知不与投影平面平行且不过视点的平面的像是由灭线分割开的某个半平面。由灭点的方程可以看到，一切不是与投影平面平行的平面的像相交于同一灭线。

由此可见，透视投影是最接近人眼看到实际三维图形的。由透视投影的定义可知，二次曲线的像可看成是二次锥面与投影面的交线，所以二次曲线的像仍然是二次曲线或其退化情形。特别的，若从视点向圆上任何点引射线都与投影面相交，则这个圆的像就是一个椭圆。球的像可以看成是圆锥与投影平面的交线，若从视点向球上任何点引射线都与投影面相交，则若球心于视点连线垂直于投影平面，球的像是圆，其余情况球的像是椭圆，且球心的像越远离原点，像的离心率越大。

一般作图选用的坐标系可能与上述所选的坐标系不完全一致，我们称所选的坐标系为参考坐标系。若参考坐标系两坐标轴都在投影面内，最后一轴与原坐标的一轴重合，则此时重合的那轴灭点在原点；若参考坐标系只有一轴在投影平面内，则不在投影平面内的两轴都有一个灭点；若参考坐标系三坐标轴都不在投影平面内，

则三轴都有一个灭点。若参考坐标轴的三单位方向向量为 $\{p_1,q_1,r_1\}$、$\{p_2,q_2,r_2\}$、$\{p_3,q_3,r_3\}$，参考坐标系原点是原坐标系的点 (x_0,y_0,z_0)，则点 (x,y,z) 在原坐标系里的坐标为

$$(xp_1+yp_2+zp_3+x_0,xq_1+yq_2+zq_3+y_0,xr_1+yr_2+zr_3+z_0)\text{，}$$

由此便可作出点的像。

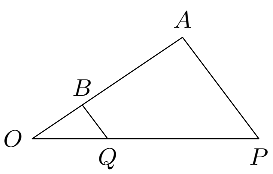


图 13

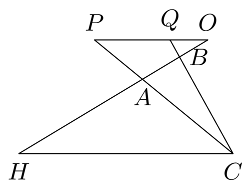


图 14

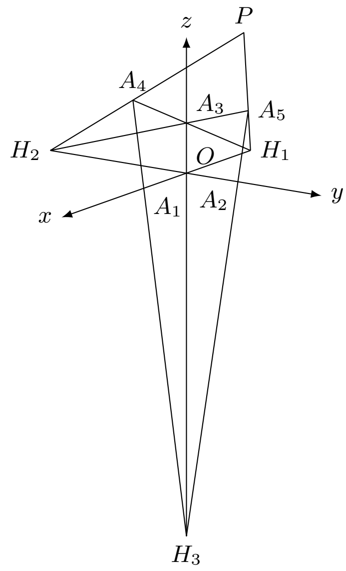


图 15

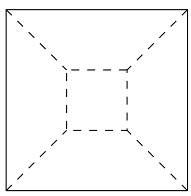


图 16

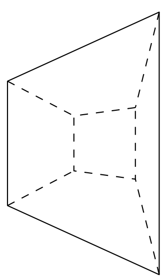


图 17

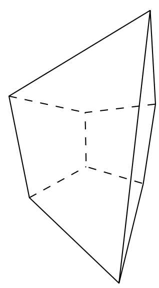


图 18

下面介绍不用坐标计算方法来作参考坐标系中像的点的方法。首先确定参考坐标系中点 $O(0,0,0)$、$\left(\dfrac{d}{2},0,0\right)$、$\left(0,\dfrac{d}{2},0\right)$、$\left(0,0,\dfrac{d}{2}\right)$ 三点的像和有灭点的轴的灭点，方法可按上面所讲的方法去做。再确定参考坐标系中点 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$ 的位置，以点 $(x,0,0)$ 为例：把整个坐标系平移到，使远坐标系的原点参考坐标系坐标原点的像重合，选择原坐标系中不与参考坐标系的轴重合的一轴，假定为 x 轴，作出原坐标系的点 $\left(\dfrac{d}{2},0,0\right)$、$(x,0,0)$ 的像 P、Q，设点 A 是原坐标系中点 $\left(\dfrac{d}{2},0,0\right)$ 的像，若参考坐标轴的像无灭点，过点 Q 作直线 AP 的平行线与直线 OA 的交点 B 就是点 $(x,0,0)$ 的像（图 13）；若参考坐标轴的像有灭点 H，则过点 H 作 OP 的平行线，这条平行线与直线 AP 相交于点 C，则直线 CQ 与直线 OA 的交点 B 就是点 $(x,0,0)$ 的像（图 14）。若轴的像有灭点则作与轴平行的直线的像时过灭点，若轴的像无灭点则作与轴平行的直线的像时与轴的像平行，以下以三轴都有灭点为例，设 x 轴的像的灭点为 H_1，点 $(x,0,0)$ 的像为 A_1，y 轴的像的灭点为 H_2，点 $(0,y,0)$ 的像为 A_2，z 轴的像的灭点为 H_3，点 $(0,0,z)$ 的像为 A_3，作过点 $(0,0,z)$ 且分别与 x、y 轴平行的直线的像，此时分别为射线 H_1A_3、H_2A_3，过点 $(x,0,0)$ 作与 z 轴平行的像，此时即射线 H_3A_1，射

线 H_1A_3 与射线 H_3A_1 相交于点 A_4，过点 $(0,y,0)$ 作与 z 轴平行的像，此时即射线 H_3A_2，射线 H_2A_3 与射线 H_3A_2 相交于点 A_5，此时点 A_4、A_5 即分别为参考坐标系的点 $(x,0,z)$、$0,y,z)$，过点 $(x,0,z)$ 作与 y 轴平行的直线的像，此时即射线 H_2A_4，过点 $(0,y,z)$ 作与 x 轴平行的直线的像，此时即射线 H_1A_5，射线 H_2A_4 与射线 H_1A_5 的交点 P 即为参考坐标系中点 (x,y,z) 的像（图 15）。

图 16、图 17、图 18 分别是参考坐标轴只有一灭点、参考坐标轴有两灭点、三参考坐标轴有三灭点时的大正方体的透视投影图。

2.2 一个三角恒等式与一个多项式结论——郭子伟

定理 1. 设 $n\in\mathbb{N}^+$，记

$$S_{m,n}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k, & m=0,\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\cos^m\frac{k\pi}{n}, & m=1,2,\ldots,n,\end{cases}$$

则 $S_{0,n}=S_{1,n}=\cdots=S_{n-1,n}=0$ 且 $S_{n,n}=\dfrac{n}{2^{n-2}}$。

证明 当 $m=0$ 时显然 $S_{0,n}=0$；当 $m=1,\ 2,\ ...,\ n-1$ 时，由著名的欧拉公式知

$$\cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2},$$

由二项式定理，有

$$\begin{aligned}S_{m,n}&=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\cos^m\frac{k\pi}{n}\\&=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/n})^m\\&=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\sum_{r=0}^{m}\mathrm{C}_m^r\mathrm{e}^{(m-2r)\mathrm{i}k\pi/n}\\&=\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{m}\mathrm{C}_m^r\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\mathrm{e}^{(m-2r)\mathrm{i}k\pi/n}\\&=\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{m}\mathrm{C}_m^r\sum_{k=0}^{2n-1}(-\mathrm{e}^{(m-2r)\mathrm{i}\pi/n})^k,\end{aligned}$$

又由欧拉公式有

$$-\mathrm{e}^{(m-2r)\mathrm{i}\pi/n}=-\cos\frac{(m-2r)\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{(m-2r)\pi}{n},$$

易见当 $m=1,\ 2,\ ...,\ n-1,\ r=0,\ 1,\ ...,\ m$ 时 $-1<\dfrac{m-2r}{n}<1$，此时必定 $-\mathrm{e}^{(m-2r)\mathrm{i}\pi/n}\neq 1$，故由等比数列求和公式得

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-\mathrm{e}^{(m-2r)\mathrm{i}\pi/n})^k=\frac{1-(-\mathrm{e}^{(m-2r)\mathrm{i}\pi/n})^{2n}}{1+\mathrm{e}^{(m-2r)\mathrm{i}\pi/n}}=\frac{1-\mathrm{e}^{2(m-2r)\mathrm{i}\pi}}{1+\mathrm{e}^{(m-2r)\mathrm{i}\pi/n}},$$

再由欧拉公式有

$$\mathrm{e}^{2(m-2r)\mathrm{i}\pi}=\cos\big(2(m-2r)\pi\big)+\mathrm{i}\sin\big(2(m-2r)\pi\big)=1,$$

所以此时恒有 $S_{m,n}=0$；

当 $m=n$ 时，类似地，可以化为

$$S_{n,n}=\frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r\sum_{k=0}^{2n-1}(-\mathrm{e}^{(n-2r)\mathrm{i}\pi/n})^k,$$

由欧拉公式有

$$-\mathrm{e}^{(n-2r)\mathrm{i}\pi/n}=-\cos\frac{(n-2r)\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{(n-2r)\pi}{n},$$

当 $r=1,2,...,n-1$ 时 $-1<\frac{n-2r}{n}<1$，此时必定 $-\mathrm{e}^{(n-2r)\mathrm{i}\pi/n}\neq 1$，故由等比数列求和公式有

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-\mathrm{e}^{(n-2r)\mathrm{i}\pi/n})^k=\frac{1-\mathrm{e}^{2(n-2r)\mathrm{i}\pi}}{1+\mathrm{e}^{(n-2r)\mathrm{i}\pi/n}}=\frac{1-\cos\big(2(n-2r)\pi\big)-\mathrm{i}\sin\big(2(n-2r)\pi\big)}{1+\mathrm{e}^{(n-2r)\mathrm{i}\pi/n}}=0,$$

而当 $r=0$ 及 $r=n$ 时 $-\mathrm{e}^{(n-2r)\mathrm{i}\pi/n}=1$，所以

$$S_{n,n}=\frac{1}{2^n}(\mathrm{C}_n^0\cdot 2n+\mathrm{C}_n^n\cdot 2n)=\frac{n}{2^{n-2}}。$$

综上所述，定理 1 得证。 □

由定理 1 立得如下结论。

定理 2. 设 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，若对任意 $|x|\leqslant 1$ 恒有 $|f(x)|\leqslant 1$，则 $|a_n|$ 的最大值为 2^{n-1}。若记 n 次第一类切比雪夫多项式为 $T_n(x)$，则当且仅当 $f(x)=T_n(x)$ 时 $a_n=2^{n-1}$，当且仅当 $f(x)=-T_n(x)$ 时 $a_n=-2^{n-1}$。

证明 由条件，运用绝对值不等式及定理 1，有

$$2n\geqslant\sum_{k=0}^{2n-1}\left|f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right|\geqslant\left|\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^kf\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right|=\left|\sum_{m=0}^{n}S_{m,n}a_m\right|=\frac{n}{2^{n-2}}|a_n|,$$

所以

$$|a_n|\leqslant 2^{n-1}。$$

下面考查取等条件，易见为

$$\left|f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right|=1，k=0,1,\ldots,2n-1,$$

且

$$f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\cdot f\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{n}\right)=-1，k=0,1,\ldots,2n-2,$$

由此可见，当 $f(1)$ 的值确定下来后，那么

$$f(1),f\left(\cos\frac{\pi}{n}\right),f\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right),\ldots,f\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right),f(-1)$$

这 $n+1$ 个值也将被确定下来，而 $f(x)$ 为 n 次多项式，所以此时 $f(x)$ 也被唯一确定下来，而 $f(1)$ 只能取 1 或 -1，也就是说只有两个 $f(x)$ 能满足取等条件，又易知 $T_n(x)$ 和 $-T_n(x)$ 满足条件，所以结论成立。 □

参考文献

[1] http://zh.wikipedia.org/wiki/欧拉公式

[2] http://zh.wikipedia.org/wiki/切比雪夫多项式

2.3 研究二次曲线内接三角形的内切圆、旁切圆问题——甘志国

1. 这方面已有的结论、赛题、高考题

题目 1. （第六届（2009 年）中国东南地区数学奥林匹克竞赛试题第 6 题，陶平生供题）如图 1，已知 $\odot O$、$\odot I$ 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆。证明：过 $\odot O$ 上的任意一点 D，都可作一个 $\triangle DEF$，使得 $\odot O$、$\odot I$ 分别是 $\triangle DEF$ 的外接圆和内切圆。

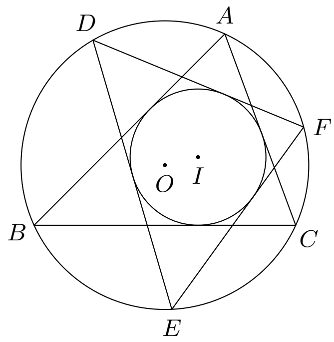


图 1

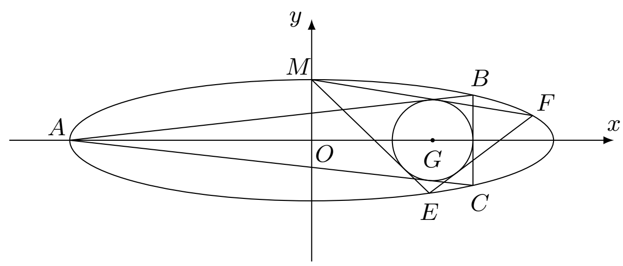


图 2

题目 2. （2009 年高考江西卷文科第 22 题）如图 2，已知圆 $G:(x-2)^2+y^2=r^2$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$ 的内接 $\triangle ABC$ 的内切圆，其中 A 为椭圆的左顶点。

（1）求圆 G 的半径 r；

（2）过点 $M(0,1)$ 作圆 G 的两条切线交椭圆于 E,F 两点，证明：直线 EF 与圆 G 相切。

题目 3. （文献 [1] • 例 3）过抛物线 $y=x^2$ 上的任意点 A 向圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 引两条切线 AB、AC，交抛物线于点 B、C，连结 BC，证明 BC 也是圆的切线。

题目 4. （文献 [2] • 题 1）过抛物线 $y=x^2-2$ 上的任意点 A 向圆 $x^2+y^2=1$ 引两条切线 AB、AC，交抛物线于点 B、C，连结 BC，证明 BC 也是圆的切线。

题目 5. （文献 [2] • 题 2）过抛物线 $y=(x-1)^2+1$ 上的任意点 A 向圆 $(x-1)^2+(y-3)^2=1$ 引两条切线 AB、AC，交抛物线于点 B、C，连结 BC，证明 BC 也是圆的切线。

还可用平移给出这三道题之间的联系：把题目 4 中的抛物线和圆分别按向量 $(0,2)$、$(1,3)$ 平移后得到的结论就是题目 3、题目 5 的结论。

文献 [3] 的例 3 用较长篇幅及椭圆的参数方程证得了结论“设 A,B,C 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的三点，若直线 AB,AC 均是圆 $x^2+y^2=\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)^2$ 的切线，则直线 BC 也是该圆的切线。”

因为该证明中并未用到条件“$a>b>0$”，所以有：

定理 1. 设 A,B,C 是曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的三点，若直线 AB,AC 均是圆 $x^2+y^2=\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)^2$ 的切线，则直线 BC 也是该圆的切线。

把定理 1 中的 x,y 互换，得：

定理 1′. 设 A,B,C 是曲线 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$ 上的三点，若直线 AB,AC 均是圆 $x^2+y^2=\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)^2$ 的切线，则直线 BC 也是该圆的切线。

在定理 $1'$ 中作变换 $\begin{cases} x=\dfrac{b}{a+b}x', \\ y=\dfrac{a}{a+b}y', \end{cases}$ （作此变换后直线与原曲线的公共点的个数不会改变）得：

定理 2. 设 A,B,C 是圆 $x^2+y^2=(a+b)^2(a>0,b>0)$ 上的三点，若直线 AB,AC 均是曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的切线，则直线 BC 也是该曲线的切线。

把定理 2 中的 x,y 互换，得：

定理 2′. 设 A,B,C 是圆 $x^2+y^2=(a+b)^2(a>0,b>0)$ 上的三点，若直线 AB,AC 均是曲线 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 的切线，则直线 BC 也是该曲线的切线。

全国初等/中等教育类核心期刊《中学数学教学参考》（上旬）2012 年第 3 期发表的文献 [4] 及 2013 年第 4 期发表的文献 [5] 分别得到了如下结论：

结论 1. [4] 如图 3，过抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上的点 A 向圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(b>0,r>0)$ 引两条切线 AB、AC，交抛物线于点 B、C，连结 BC，那么直线 BC 与圆 I 相切的充要条件是 $2pb=a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}$。

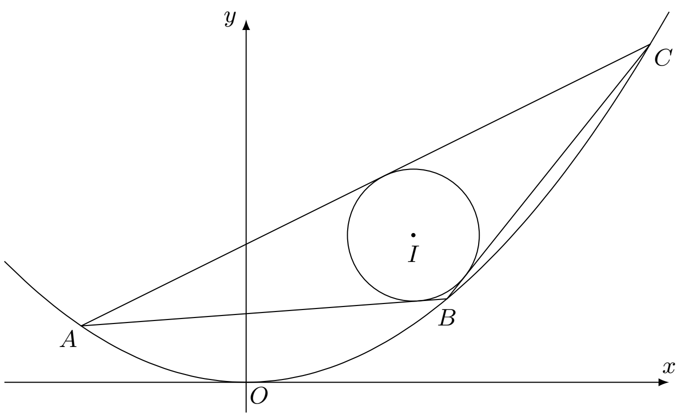


图 3

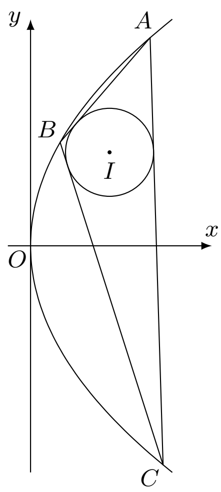


图 4

结论 2. [5] 如图 4，已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，点 $I(a,b)$ 是抛物线内任意一点，过抛物线上任意一点 A 作圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 的两条切线，与抛物线分别交于 B、C 两点，则当且仅当 $r=\sqrt{p^2+2pa}-\sqrt{p^2+b^2}$ 时，圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆。

易知结论 1, 2 是等价的：把结论 2 中的 x 与 y，a 与 b 均互换后，得结论 2 中的“当且仅当 $r=\sqrt{p^2+2pa}-\sqrt{p^2+b^2}$”换为“当且仅当 $r=\sqrt{p^2+2pb}-\sqrt{p^2+a^2}$”，也即“当且仅当 $(r+\sqrt{p^2+a^2})^2=\sqrt{p^2+2pb}$”，即“当且仅当 $2pb=a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}$”。

这里先说明以上两个结论及其证明均有误，以下以结论 1 来说明：

如图 5，过抛物线 $x^2=y$ 上的点 $A(\sqrt{3},3)$ 向圆 $x^2+(y-6)^2=9$ 引两条切线 $AB:y=3$、$AC:y=\sqrt{3}x$，分别交抛物线于点 $B(-\sqrt{3},3)$、$C(0,0)$，可得直线 $BC:y=-\sqrt{3}x$ 也是圆的切线。但结论 1 中的“$2pb=a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}$”不成立，而“$2pb=a^2+r^2-2r\sqrt{a^2+p^2}$”成立。（这说明结论 1 可能还有另外一半的美丽结论）

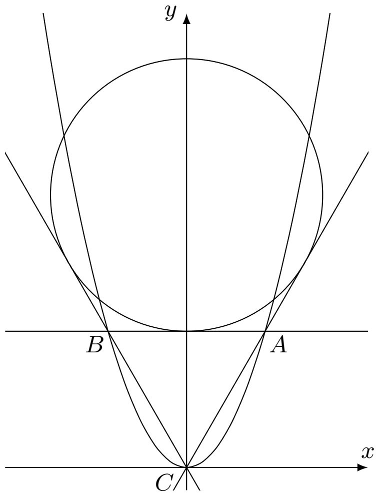


图 5

结论 1 出错的原因是其证明中的“注意到圆 I 在抛物线开口内”（见文献 [4] 倒数第三段）是不对的（文献 [4] 倒数第三段第三行中的“Fx_1^3”均应改为“Fx_1^2”）。

结论 1 的证明也有误：由“$x_1\in\mathbb{R}$ 且 $x_1\neq a\pm r$”得到文献 [4] 中的“$P^2=Dr^2$, $2PQ=Er^2$, $Q^2+2PR=Er^2$, $2QR=Gr^2$, $R^2=Hr^2$ 应同时成立”是对的，但结论 1 中的点 A 显然不是“任意一点 A”而是“某一点 A”，所以得不出“$x_1\in\mathbb{R}$ 且 $x_1\neq a\pm r$”，因而该证明是错误的。

结论 1 中 $a=0$ 时的情形就是文献 [6] 的结论，所以文献 [6] 的结论及其证明也均有误。

本文将用初等方法研究二次曲线内接三角形的内切圆、旁切圆的问题，当二次曲线是圆或抛物线时，得到了完整的结论。

2. 引理

引理 1.（1）如图 6，点 I 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线上且在 $\triangle ABC$ 内，射线 AI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P，则 $PI=PB\iff$ 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心；

（2）如图 7，点 I 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线上且在 $\triangle ABC$ 外，线段 AI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P，则 $PI=PB\iff$ 点 I 是 $\triangle ABC$ 的关于点 A 的旁心（即点 I 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线上）。

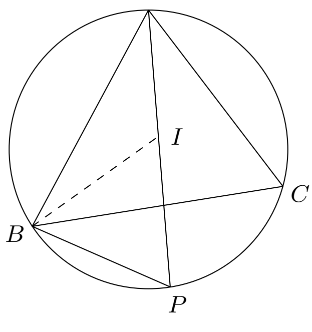


图 6

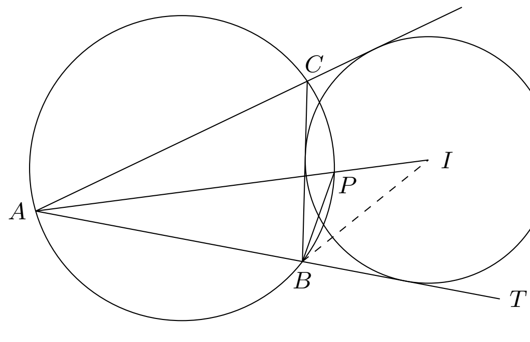


图 7

证明 分别用图 6，图 7 来证。先连结 IB。

（1）$\Longrightarrow$ 由题设得 $\angle PBI=\angle PIB$，所以

$$2(\angle PBC+\angle IBC)=2\angle PBI=\angle PIB+\angle PBI=180^\circ-\angle APB=180^\circ-\angle ACB$$

$$=\angle BAC+\angle ABC=2\angle PAC+\angle ABC=2\angle PBC+\angle ABC,$$

所以

$$\angle ABC=2\angle IBC,$$

可得点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心；

$\Longleftarrow$ 由题设得 $\angle ABC=2\angle IBC$，所以

$$\angle PIB+\angle PBI=180^\circ-\angle APB=180^\circ-\angle ACB=2\angle PAC+2\angle IBC=2(\angle PBC+\angle IBC)=2\angle PBI,$$

所以

$$\angle PIB=\angle PBI,$$

所以 $PI=PB$；

（2） $\Longrightarrow$ 由题设得 $\angle PBI=\angle PIB$，所以

$$2(\angle IBC-\angle PBC)=2\angle PBI=\angle APB=\angle ACB=\angle CBT-2\angle IAC=\angle CBT-2\angle PBC,$$

所以

$$\angle CBT=2\angle IBC,$$

可得点 I 是 $\triangle ABC$ 的关于点 A 的旁心；

$\Longleftarrow$ 由题设得 $\angle CBT=2\angle IBC$，所以

$$\angle APB=\angle ACB=\angle CBT-2\angle IAC=\angle CBT-2\angle PBC=2(\angle IBC-\angle PBC)=2\angle PBI,$$

所以

$$\angle PIB=\angle PBI,$$

所以 $PI=PB$。 □

引理 2. 若 $\triangle ABC$ 各顶点的坐标分别是 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，则 $\triangle ABC$ 内心 I 的坐标是

$$\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right),$$

其中 $a=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2},b=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2},c=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

引理 3. 若 $\triangle ABC$ 各顶点的坐标分别是 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，则 $\triangle ABC$ 在内角 A 的角平分线上的旁心 I_A（下文就把旁心 I_A 及旁切圆 I_A 分别叫做 $\triangle ABC$ 关于点 A 的旁心、旁切圆）的坐标是

$$\left(\frac{bx_2+cx_3-ax_1}{b+c-a},\frac{by_2+cy_3-ay_1}{b+c-a}\right),$$

其中 $a=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2},b=\sqrt{(x_3-x_3)^2+(y_3-y_1)^2},c=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

编者注 鉴于引理 3 和引理 4 较为常见，限于篇幅，这里就略去其证明，请读者自行证之或查阅相关文献。

引理 4. 若 $x_1>x_2>x_3$，则：

（1）

$$(x_1-x_2)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}+(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}$$
$$+(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}-(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)>0;$$

（2）

$$(x_1-x_2)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}+(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}$$
$$+(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)-(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}>0;$$

（3）

$$(x_1-x_2)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}+(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}$$
$$+(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)-(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}>0;$$

（4）

$$(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}+(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}$$
$$+(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)-(x_1-x_2)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}>0。$$

证明 设 $a=x_1+x_2, b=x_1+x_3, c=x_2+x_3$，得 $a>b>c$。

（1）只需证明

$$(b-c)|bc|+(a-b)|ab|+(a-c)|ac|\geqslant(a-b)(b-c)(a-c),$$

又

$$左边=(b-c)|bc|+(a-b)|ab|+(a-b)|ac|+(b-c)|ac|=(a-b)|a|(|b|+|c|)+(b-c)|c|(|a|+|b|),$$

$$右边=a(a-b)(b-c)-c(a-b)(b-c),$$

所以只需证明 $|a|(|b|+|c|)\geqslant a(b-c)$，$|c|(|a|+|b|)\geqslant -c(a-b)$，这是显然成立的，所以欲证成立；

（2）只需证明

$$(a-c)\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)}+(b-c)\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}+(a-b)(b-c)(a-c)>(a-b)\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)},$$

$$[(a-b)+(b-c)]\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)}+(b-c)\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}+(a-b)(b-c)(a-c)$$
$$>(a-b)\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)},$$

$$(b-c)\sqrt{c^2+1}(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1})+(b-c)(a-b)(a-c)>(a-b)\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{(b+c)(b-c)}{\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}},$$

$$\sqrt{c^2+1}(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1})+(a-b)(a-c)>(a-b)\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{b+c}{\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}},$$

因为 $b\leqslant|b|<\sqrt{b^2+1}$，$c<\sqrt{c^2+1}$，所以 $b+c<\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}$，$\dfrac{b+c}{\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}}<1$，即只需证明

$$\sqrt{c^2+1}(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1})+(a-b)(a-c)>(a-b)\sqrt{a^2+1},$$

$$\sqrt{c^2+1}(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1})>(a-b)(\sqrt{a^2+1}-a+c),$$

因为 $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}>|a|+|b|\geqslant a-b>0$，所以只需证明

$$\sqrt{c^2+1}>\sqrt{a^2+1}-a+c,$$

$$\sqrt{c^2+1}-c>\sqrt{a^2+1}-a,$$

用导数易证函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数，所以欲证成立；

（3）只需证明

$$(a-b)\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}+(b-c)\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}+(a-b)(b-c)(a-c)>(a-c)\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)},$$

$$\begin{aligned}&(a-b)\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}+(b-c)\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}+(a-b)(b-c)(a-c)\\&>(a-b)\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)}+(b-c)\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)},\end{aligned}$$

$$\frac{(a-b)(b+c)(b-c)\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}}+(a-b)(b-c)(a-c)>\frac{(b-c)(a+b)(a-b)\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}},$$

$$a-c>\frac{(a+b)\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}}-\frac{(b+c)\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}},$$

用导数可证函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数，所以

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}>\frac{b}{\sqrt{b^2+1}},\ \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}>\frac{c}{\sqrt{c^2+1}},$$

由前者可得

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}>\frac{a+b}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}},\ \frac{a\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}>\frac{(a+b)\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}},$$

由后者可得

$$\frac{b+c}{\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}}>\frac{c}{\sqrt{c^2+1}},\ -\frac{c\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{c^2+1}}>-\frac{(b+c)\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}},$$

所以

$$\frac{a\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}-\frac{c\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{c^2+1}}>\frac{(a+b)\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}}-\frac{(b+c)\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}},$$

即只需证明

$$a-c\geqslant\frac{a\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}-\frac{c\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{c^2+1}},$$

$$a-c\geqslant\frac{(a-c)(1-ac)}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{c^2+1}},$$

只需证明 $\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{c^2+1}\geqslant|1-ac|$，这平方后易证，所以欲证成立；

（4）只需证明

$$(a-b)\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}+(a-c)\sqrt{(a^2+1)(c^2+1)}+(a-b)(b-c)(a-c)>(b-c)\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)},$$

在（2）的证明的第一个不等式中令 $a=-c',b=-b',c=-a'$，得 $a'>b'>c'$ 时，有

$$(a'-b')\sqrt{(a'^2+1)(b'^2+1)}+(a'-c')\sqrt{(a'^2+1)(c'^2+1)}+(a'-b')(b'-c')(a'-c')>(b'-c')\sqrt{(b'^2+1)(c'^2+1)},$$

而这正是欲证。 □

引理 5. （1）

$$\begin{aligned}&(x_1-x_2)^2[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]+(x_1-x_3)^2[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]\\&+(x_2-x_3)^2[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]+[(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)]^2\end{aligned}$$

$$= (4x_1^2+1)(x_2-x_3)^2[(x_2+x_3)^2+1]+(4x_2^2+1)(x_1-x_3)^2[(x_1+x_3)^2+1]$$
$$+(4x_3^2+1)(x_1-x_2)^2[(x_1+x_2)^2+1];$$

（2）

$$(pa^2+4p^3t^2-4p^2at-pr^2)^2+(a^3+ar^2+4p^2at^2-4pa^2t+2ar\sqrt{a^2+p^2}-4prt\sqrt{a^2+p^2})^2$$
$$=(2a^2r-4part+r^2\sqrt{a^2+p^2}-4pat\sqrt{a^2+p^2}+4p^2t^2\sqrt{a^2+p^2}+a^2\sqrt{a^2+p^2})^2;$$

（3）

$$(pa^2+4p^3t^2-4p^2at-pr^2)^2+(a^3+ar^2+4p^2at^2-4pa^2t-2ar\sqrt{a^2+p^2}+4prt\sqrt{a^2+p^2})^2$$
$$=(2a^2r-4part-r^2\sqrt{a^2+p^2}+4pat\sqrt{a^2+p^2}-4p^2t^2\sqrt{a^2+p^2}-a^2\sqrt{a^2+p^2})^2。$$

证明 把左右两边展开后均可获证。 □

3. 关于圆的内接三角形的内切圆、旁切圆的完整结论

定理 3. 设 $\odot I$ 与 $\odot O$ 的半径及圆心距分别为 r,R,d。

（1）设 $\odot I$ 是 $\odot O$ 的某个内接三角形的内切圆，则 $d^2+2rR=R^2$；

（2）若 $d^2+2rR=R^2$，则 $\odot I$ 在 $\odot O$ 内，所以过 $\odot O$ 上的任意一点 A 可作 $\odot I$ 的两条不同切线，设它们分别交 $\odot O$ 于另外的点 B,C，则圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆。

证明 只证 $d>0$ 时的情形。如图 8，延长 AI 交 $\odot O$ 于点 K，连结 KB，延长 IO,OI 分别交 $\odot O$ 于点 M,N。

（1）由引理 1–（1）得 $KB=KI=2R\sin\dfrac{\angle BAC}{2}$。还有 $AI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\angle BAC}{2}}$，所以 $IA\cdot IK=2rR$。有 $(R+d)(R-d)=IN\cdot IN=IA\cdot IK=2rR$，所以 $d^2+2rR=R^2$；

（2）可先得若 $r<R$，再证 $d<R-r$，所以 $\odot I$ 内含于 $\odot O$。

由引理 1–（1）知，要证圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，只需证明 $KB=KI$。

得 $KB=2R\sin\dfrac{\angle BAC}{2}$，$AI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\angle BAC}{2}}$。

再由 $(R+d)(R-d)=IN\cdot IN=IA\cdot IK=2rR$，得 $KB=KI$。 □

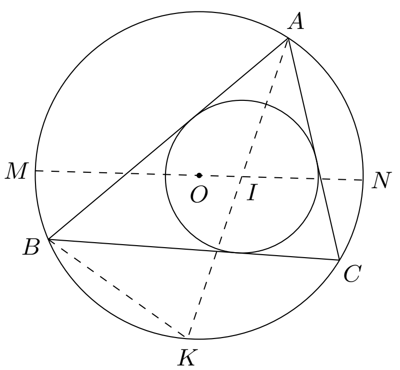


图 8

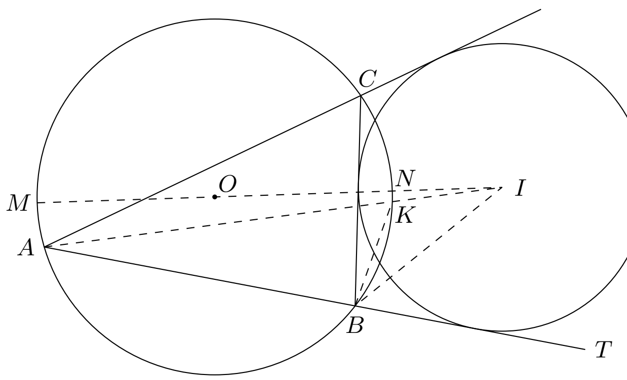


图 9

定理 4. 设 $\odot I$ 与 $\odot O$ 的半径及圆心距分别为 r, R, d。

（1）设 $\odot I$ 是 $\odot O$ 的某个内接三角形的旁切圆，则 $d^2-2rR=R^2$；

（2）当 $d^2-2rR=R^2$ 时，$\odot I$ 上有点在 $\odot O$ 外但不一定有点在 $\odot O$ 内，当且仅当这两个圆相交即 $r<4R$ 时，$\odot I$ 上有点在 $\odot O$ 内，此时过 $\odot O$ 上且在 $\odot I$ 外的任意一点 A 可作 $\odot I$ 的两条不同切线，设它们分别交 $\odot O$ 于另外的点 B, C，则圆 I 也是 $\triangle ABC$ 的旁切圆。

证明 如图 9，连结 AI 交 $\odot O$ 于点 K，连结 KB，易知点 O, I 不重合，所以可延长 IO, OI 分别交 $\odot O$ 于点 M, N。

（1）只证明 $\odot I$ 是 $\odot O$ 的某个内接 $\triangle ABC$ 的关于点 A 的旁切圆的情形。

由引理 1–（2），得 $KI=KB=2R\sin\dfrac{\angle BAC}{2}$，$AI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\angle BAC}{2}}$。

有 $(d+R)(d-R)=IM\cdot IN=IA\cdot IK=2rR$，即 $d^2-2rR=R^2$；

（2）由 $d^2-2rR=R^2$，得 $d>R$，所以 $\odot I$ 上有点在 $\odot O$ 外。

可得 $d<r+R$，所以当且仅当 $d^2>(R-r)^2$ 即 $r<4R$ 也即 $\odot I$ 与 $\odot O$ 相交时，$\odot I$ 上有点在 $\odot O$ 内。

由引理 1–（2）知，要证圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，只需证明 $KB=KI$。

得 $BK=2R\sin\dfrac{\angle BAC}{2}$，$AI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\angle BAC}{2}}$。

再由 $IA\cdot IK=IM\cdot IN=(d+R)(d-R)=2rR=BK\cdot AI$，得 $KB=KI$。 □

推论 1. 设 $\odot I$ 与 $\odot O$ 的半径及圆心距分别为 r, R, d。过 $\odot O$ 上在 $\odot I$ 外的点 A 可作 $\odot I$ 的两条不同切线，设它们分别交 $\odot O$ 于另外的点 B, C，则直线 BC 也与 $\odot I$ 相切的充要条件是 $d^2\pm 2rR=R^2$。

4. 关于抛物线内接三角形的内切圆、旁切圆的完整结论

定理 5. （1）设圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 是抛物线 $\Gamma: x^2=2py(p>0)$ 的某个内接三角形的内切圆，则 $2pb=a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}$；

（2）当 $2pb=a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}$ 时，圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 在抛物线 $\Gamma: x^2=2py(p>0)$ 内；

（3）过抛物线 $\Gamma: x^2=2py(p>0)$ 上的任意一点 A 可作圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0, 2pb=a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2})$ 的两条不同切线，设分别交 Γ 于另外的点 B, C，则圆 I 也是 $\triangle ABC$ 的内切圆。

证明 （1）可设抛物线 Γ 的内接三角形是 $\triangle ABC$，其中 $A(2px_1, 2px_1^2)$, $B(2px_2, 2px_2^2)$, $C(2px_3, 2px_3^2)$（x_1, x_2, x_3 两两不等），下面只证明 $x_1>x_2>x_3$ 的情形，其余的情形可类似证明。由引理 2 可得 $\triangle ABC$ 的内心 I 的横、纵坐标分别是

$$a=2p\cdot\frac{x_1(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}}{(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}},$$

$$b=2p\cdot\frac{x_1^2(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2^2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3^2(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}}{(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}},$$

又 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2px_1 & 2px_1^2\\ 1 & 2px_2 & 2px_2^2\\ 1 & 2px_3 & 2px_3^2\end{vmatrix}\right|=2p^2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3),$$

所以 $\triangle ABC$ 的内切圆半径是

$$r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{AB+BC+CA}=\frac{2p(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)}{(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}},$$

所以欲证的结论即

$$\begin{aligned}&[x_1^2(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2^2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3^2(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]\\&\cdot[(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]\\=&[x_1(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\\&+[(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)]^2+(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)\\&\cdot\{4[x_1(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\\&+[(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned}&(x_1-x_2)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}+(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}\\&+(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}-(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)\\=&\{4[x_1(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\\&+[(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

由引理 4–（1）知该式左边是正数，所以即证

$$\begin{aligned}&\{(x_1-x_2)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}+(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}\\&+(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}-(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)\}^2\\=&4[x_1(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\\&+[(x_2-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2,\end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned}&(x_1-x_2)^2[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]+(x_1-x_3)^2[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]\\&+(x_2-x_3)^2[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]+[(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)]^2\\&+2(x_1-x_2)(x_1-x_3)[(x_2+x_3)^2+1]\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}\\&+2(x_1-x_2)(x_2-x_3)[(x_1+x_3)^2+1]\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}\\&+2(x_1-x_3)(x_2-x_3)[(x_1+x_2)^2+1]\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}\\&-2(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}\\&-2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)^2\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}\\&-2(x_1-x_2)(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}\\=&4x_1^2(x_2-x_3)^2[(x_2+x_3)^2+1]+4x_2^2(x_1-x_3)^2[(x_1+x_3)^2+1]+4x_3^2(x_1-x_2)^2[(x_1+x_2)^2+1]\end{aligned}$$

$$+8x_1x_2(x_1-x_3)(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}$$

$$+8x_1x_3(x_1-x_2)(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}$$

$$+8x_2x_3(x_1-x_2)(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}$$

$$+(x_2-x_3)^2[(x_2+x_3)^2+1]+(x_1-x_3)^2[(x_1+x_3)^2+1]+(x_1-x_2)^2[(x_1+x_2)^2+1]$$

$$+2(x_1-x_3)(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}$$

$$+2(x_1-x_2)(x_2-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}$$

$$+2(x_1-x_2)(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]},$$

这由引理 5–（1）立得，所以欲证成立；

（2）只需证明：当 $(x_0,y_0)=(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)\,(\theta\in\mathbb{R})$ 时，恒有 $x_0^2-2py_0<0$。

$$\begin{aligned}x_0^2-2py_0&=(a+r\cos\theta)^2-2p\,(b+r\sin\theta)\\&=a^2+2ar\cos\theta+r^2\cos^2\theta-2pb-2pr\sin\theta\\&=-2r\sqrt{a^2+p^2}+2r\,(a\cos\theta-p\sin\theta)-r^2\sin^2\theta\\&=-2r\sqrt{a^2+p^2}-2r\sqrt{a^2+p^2}\sin\,(\theta-\theta_0)-r^2\sin^2\theta\\&=-2r\sqrt{a^2+p^2}\,[1+\sin\,(\theta-\theta_0)]-r^2\sin^2\theta,\end{aligned}$$

（其中 $\sin\theta_0=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+p^2}},\cos\theta_0=\dfrac{p}{\sqrt{a^2+p^2}}$）由此可证 $x_0^2-2py_0<0$；

（3）设 $A(2pt,2pt^2)$，易知过点 A 作圆 I 的切线的斜率 k 均存在，可设该切线的方程为 $y-2pt^2=k(x-2pt)$，即 $2pkx-2py+4p^2t^2-4p^2kt=0$，得

$$\frac{\left|2pka-a^2-r^2-2r\sqrt{a^2+p^2}+4p^2t^2-4p^2kt\right|}{2p\sqrt{k^2+1}}=r,$$

$$[(2pa-4p^2t)k-(a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}-4p^2t^2)]^2=4p^2r^2k^2+4p^2r^2,$$

$$(4p^2a^2+16p^4t^2-16p^3at-4p^2r^2)k^2-4(pa-2p^2t)(a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}-4p^2t^2)k$$

$$+(a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}-4p^2t^2)^2-4p^2r^2=0,$$

设切线 AB,AC 的斜率分别为 k_1,k_2，可得 $B(2p(k_1-t),2p(k_1-t)^2)$，$C(2p(k_2-t),2p(k_2-t)^2)$，且直线 BC 的方程是

$$BC:(k_1+k_2-2t)x-y-2p(k_1-t)(k_2-t)=0,$$

还可得

$$k_1+k_2=\frac{pa^3+par^2-4p^3at^2-2p^2a^2t-2p^2r^2t+8p^4t^3+2par\sqrt{a^2+p^2}-4p^2rt\sqrt{a^2+p^2}}{p^2a^2+4p^4t^2-4p^3at-p^2r^2},$$

$$k_1k_2=\frac{a^4+r^4+6a^2r^2+16p^4t^4-8p^2a^2t^2-8p^2r^2t^2+4a^2r\sqrt{a^2+p^2}+4r^3\sqrt{a^2+p^2}-16p^2rt^2\sqrt{a^2+p^2}}{4p^2a^2+16p^4t^2-16p^3at-4p^2r^2},$$

所以

$$(k_1+k_2-2t)a$$

$$= \frac{2a^4+2a^2r^2+8p^2a^2t^2-8pa^3t+4a^2r\sqrt{a^2+p^2}-8part\sqrt{a^2+p^2}}{2pa^2+8p^3t^2-8p^2at-2pr^2},$$

$$-2p(k_1-t)(k_2-t)$$

$$= \frac{-a^4-r^4-6a^2r^2-4p^2a^2t^2+4p^2r^2t^2+4pa^3t+4par^2t-4a^2r\sqrt{a^2+p^2}-4r^3\sqrt{a^2+p^2}+8part\sqrt{a^2+p^2}}{2pa^2+8p^3t^2-8p^2at-2pr^2},$$

由引理 5–（2）可证得圆心 $I\left(a, \dfrac{a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}}{2p}\right)$ 到直线 BC 的距离是 r，所以直线 BC 也是圆 I 的切线。

再由（2）的结论立得圆 I 也是 $\triangle ABC$ 的内切圆。 □

推论 2. 若圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 是抛物线 $\Gamma:x^2=2py(p>0)$ 的某个内接三角形的内切圆（可证其充要条件是 $2pb=a^2+r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}$），则过抛物线 Γ 上的任意一点 A 可作圆 I 的两条不同切线分别交 Γ 于另外的点 B,C，圆 I 也是 $\triangle ABC$ 的内切圆。

定理 6. （1）设圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 是抛物线 $\Gamma:x^2=2py(p>0)$ 的某个内接三角形的旁切圆，则 $2pb=a^2+r^2-2r\sqrt{a^2+p^2}$；

（2）当 $2pb=a^2+r^2-2r\sqrt{a^2+p^2}$ 时，圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 上有点在抛物线 $\Gamma:x^2=2py(p>0)$ 外也有点在抛物线 Γ 内；

（3）过抛物线 $\Gamma:x^2=2py(p>0)$ 上且在圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0,2pb=a^2+r^2-2r\sqrt{a^2+p^2})$ 外的任意一点 A 可作圆 I 的两条不同切线，当切线均不是铅垂线时，设这两条切线分别交 Γ 于另外的点 B,C，则圆 I 也是 $\triangle ABC$ 的旁切圆。

证明 （1）可设抛物线 Γ 的内接三角形是 $\triangle ABC$，其中 $A(2px_1,2px_1^2)$, $B(2px_2,2px_2^2)$, $C(2px_3,2px_3^2)$（x_1, x_2, x_3 两两不等），下面只证明 $x_1>x_2>x_3$ 的情形，其余的情形可类似证明。

当圆心 I 是 $\triangle ABC$ 关于点 A 的旁心时，由定理 3 可得圆心 I 的横、纵坐标分别是

$$a=2p\cdot\frac{x_1(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}}{(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}},$$

$$b=2p\cdot\frac{x_1^2(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2^2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3^2(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}}{(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}},$$

又 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=2p^2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3),$$

所以 $\triangle ABC$ 关于点 A 的旁切圆半径是

$$r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{AB-BC+CA}=\frac{2p(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)}{(x_3-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}},$$

所以欲证的结论即

$$\begin{aligned}
&[x_1^2(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2^2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3^2(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]\\
&\cdot[(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]\\
=&[x_1(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\\
&+[(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)]^2+(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)\\
&\cdot\{4[x_1(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2
\end{aligned}$$

$$+[(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\}^{\frac{1}{2}},$$

也即

$$\begin{aligned}&(x_1-x_2)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}+(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}\\&+(x_3-x_2)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}-(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)\\=&\{4[x_1(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\\&+[(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

由引理 4–（2）知该式左边是正数，所以即证

$$\begin{aligned}&\{(x_1-x_2)\sqrt{[(x_1+x_3)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}+(x_1-x_3)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_2+x_3)^2+1]}\\&+(x_3-x_2)\sqrt{[(x_1+x_2)^2+1][(x_1+x_3)^2+1]}-(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)\}^2\\=&4[x_1(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+x_2(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+x_3(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2\\&+[(x_3-x_2)\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}+(x_1-x_3)\sqrt{(x_1+x_3)^2+1}+(x_1-x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}]^2,\end{aligned}$$

这由引理 5–（1）立得，所以此时欲证成立；

当圆心 I 是 $\triangle ABC$ 关于点 B 的旁心时，用引理 3，4–（3），5–（1）同理可得欲证成立；

当圆心 I 是 $\triangle ABC$ 关于点 C 的旁心时，用引理 3，4–（4），5–（1）同理可得欲证成立；

（2）可设圆 I 上的点 (x_0,y_0) 为 $(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)(\theta\in\mathbb{R})$，有

$$\begin{aligned}x_0^2-2py_0&=(a+r\cos\theta)^2-2p\,(b+r\sin\theta)\\&=a^2+2ar\cos\theta+r^2\cos^2\theta-2pb-2pr\sin\theta\\&=2r\sqrt{a^2+p^2}+2r\,(a\cos\theta-p\sin\theta)-r^2\sin^2\theta\\&=2r\sqrt{a^2+p^2}-2r\sqrt{a^2+p^2}\sin(\theta-\theta_0)-r^2\sin^2\theta\\&=2r\sqrt{a^2+p^2}\,[1-\sin(\theta-\theta_0)]-r^2\sin^2\theta,\end{aligned}$$

（其中 $\sin\theta_0=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+p^2}},\cos\theta_0=\dfrac{p}{\sqrt{a^2+p^2}}$）选 $\theta-\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$ 时，可证 $x_0^2-2py_0<0$，即圆 I 上的点 (x_0,y_0) 在抛物线 Γ 内。

可选 θ 使 $a\cos\theta=|a|$，得 $\sin\theta=0$，所以 $x_0^2-2py_0=2r\sqrt{a^2+p^2}+2r|a|>0$，即圆 I 上的点 (x_0,y_0) 在抛物线 Γ 外；

（3）设 $A(2pt,2pt^2)$，由题设知过点 A 作圆 I 的切线的斜率 k 存在，可设该切线的方程为 $y-2pt^2=k(x-2pt)$，即 $2pkx-2py+4p^2t^2-4p^2kt=0$，得

$$\frac{\left|2pka-a^2-r^2+2r\sqrt{a^2+p^2}+4p^2t^2-4p^2kt\right|}{2p\sqrt{k^2+1}}=r,$$

$$[(2pa-4p^2t)k-(a^2+r^2-2r\sqrt{a^2+p^2}-4p^2t^2)]^2=4p^2r^2k^2+4p^2r^2,$$

$$\begin{aligned}&(4p^2a^2+16p^4t^2-16p^3at-4p^2r^2)k^2-4(pa-2p^2t)(a^2+r^2-2r\sqrt{a^2+p^2}-4p^2t^2)k\\&+(a^2+r^2-2r\sqrt{a^2+p^2}-4p^2t^2)^2-4p^2r^2=0,\end{aligned}$$

设切线 AB,AC 的斜率分别为 k_1,k_2，可得 $B(2p(k_1-t),2p(k_1-t)^2)$，$C(2p(k_2-t),2p(k_2-t)^2)$，且直线 BC 的方程是

$$BC:(k_1+k_2-2t)x-y-2p(k_1-t)(k_2-t)=0,$$

还可得

$$k_1+k_2=\frac{pa^3+par^2-4p^3at^2-2p^2a^2t-2p^2r^2t+8p^4t^3-2par\sqrt{a^2+p^2}+4p^2rt\sqrt{a^2+p^2}}{p^2a^2+4p^4t^2-4p^3at-p^2r^2},$$

$$k_1k_2=\frac{a^4+r^4+6a^2r^2+16p^4t^4-8p^2a^2t^2-8p^2r^2t^2-4a^2r\sqrt{a^2+p^2}-4r^3\sqrt{a^2+p^2}+16p^2rt^2\sqrt{a^2+p^2}}{4p^2a^2+16p^4t^2-16p^3at-4p^2r^2},$$

所以

$$\begin{aligned}&(k_1+k_2-2t)a\\=&\frac{2a^4+2a^2r^2+8p^2a^2t^2-8pa^3t-4a^2r\sqrt{a^2+p^2}+8part\sqrt{a^2+p^2}}{2pa^2+8p^3t^2-8p^2at-2pr^2},\\&-2p(k_1-t)(k_2-t)\\=&\frac{-a^4-r^4-6a^2r^2-4p^2a^2t^2+4p^2r^2t^2+4pa^3t+4par^2t+4a^2r\sqrt{a^2+p^2}+4r^3\sqrt{a^2+p^2}-8part\sqrt{a^2+p^2}}{2pa^2+8p^3t^2-8p^2at-2pr^2},\end{aligned}$$

由引理 5–（3）可证得圆心 $I\left(a,\dfrac{a^2+r^2-2r\sqrt{a^2+p^2}}{2p}\right)$ 到直线 BC 的距离是 r，所以直线 BC 也是圆 I 的切线。

再由（2）的结论立得圆 I 也是 $\triangle ABC$ 的旁切圆。 □

推论 3. 若圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 是抛物线 $\Gamma:x^2=2py(p>0)$ 的某个内接三角形的旁切圆（可证其充要条件是 $2pb=a^2+r^2-2r\sqrt{a^2+p^2}$），则过抛物线 Γ 上的圆 I 外任意一点 A 可作圆 I 的两条不同切线（当切线均不是铅垂线时）分别交 Γ 于另外的点 B,C，圆 I 也是 $\triangle ABC$ 的旁切圆。

推论 4. 若过抛物线 $\Gamma:x^2=2py(p>0)$ 上的点 A 能作圆 $I:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 的两条不同切线且分别交 Γ 于点 $B,C(A,B,C$ 两两不重合)，则直线 BC 也是圆 I 的切线的充要条件是 $2pb=a^2+r^2\pm 2r\sqrt{a^2+p^2}$。

文献 [1], [2] 中的例题（即以上题目 3, 4, 5）就是推论 3 中“充分性”的应用，由推论 3 及平移可以编拟出很多类似于题目 3, 4, 5 的题目来，比如：

题目 6. 过抛物线 $y^2=x$ 上的点 A 向圆 $(x-12)^2+y^2=9$ 引两条切线 AB、AC，交抛物线于点 B、C，连结 BC，证明 BC 也是圆的切线。

题目 7. 过抛物线 $x^2=16y$ 上的任意点 A 向圆 $(x-6)^2+(y-5)^2=4$ 引两条切线 AB、AC，交抛物线于点 B、C，连结 BC，证明 BC 也是圆的切线。

题目 8. 过抛物线 $x^2=6y$ 上的任意点 A 向圆 $(x-4)^2+(y-36)^2=400$ 引两条切线 AB、AC，交抛物线于点 B、C（A、B、C 两两不重合），连结 BC，证明 BC 也是圆的切线。

题目 9. 过抛物线 $y^2=x$ 上的点 A 向圆 $(x-r^2\pm r)^2+y^2=r^2(r>0)$ 引两条切线 AB、AC，交抛物线于点 B、C（A、B、C 两两不重合），连结 BC，证明 BC 也是圆的切线。

问题 设二次曲线 Γ',Γ 的方程分别为 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，若二次曲线 Γ' 对于 Γ 均有性质 Ψ（见定理），求 a, b, c, d, e, f, h, k, r 的等量关系。

当曲线 Γ 是圆或抛物线时，该问题均已解决；还需解决曲线 Γ 是椭圆、双曲线的情形。

参考文献

[1] 梁开华. 解数学题的分步进行 [J]. 数学通报, 2007（10）: 31-32
[2] 耿恒考. 对一道例题的看法——兼与梁开华老师商榷 [J]. 数学通报, 2011（3）: 62-63
[3] 梁开华. 与椭圆有关的圆的若干问题 [J]. 中学数学月刊, 2013（4）: 39-42
[4] 李昌. 抛物线中的一个优美结论 [J]. 中学数学教学参考（上旬）, 2012（3）: 72
[5] 胡福林. 以抛物线内任意一点为圆心的“三角切圆”方程 [J]. 中学数学教学参考（上旬）, 2013（4）: 56-57
[6] 杨华, 江明鑫, 钱学吉. 对一道例题的探究与发现 [J]. 数学通报, 2011（3）: 36-37
[7] 朱德祥编. 高等几何 [M]. 北京：高等教育出版社, 1983

朝花夕拾

3.1 【封面故事】正多面体的互容——何万程

这里所说的正多面体互容关系是一个正多面体内有一个正多面体，内部正多面体的一些顶点在外部正多面体的面内，构成了漂亮的图形。下面就简单介绍下正多面体互容关系的构造法。以下用符号 $m\,(n)$ 表示在一个正 m 面体内含有一个正 n 面体的互容关系。

(1) $4\,(6)$，在正四面体上四个面的中心，四个高的中点是一个正方体的八个顶点。

(2) $6\,(4)$，引正方体各面的六条对角线就是正四面体的六棱。

(3) $6\,(8)$，正方体各面的中心是正八面体的六个顶点。

(4) $6\,(12)$，在正方体的面 $BCGH$ 内作对称轴 PQ，取对称轴的黄金分割，$P'Q'$ 是较小的一段，并且 P'、Q' 与上、下面等距。类似的在其他五面内取点，这样就取得十二个点。再把正方体的中心与八个顶点相连，黄金分割这连线，使其较短部分靠近顶点，又得到八个点，所得的二十个点就是正十二面体的顶点。

(5) $6\,(20)$，在正方体的面 $BCGH$ 内作对称轴 PQ，取对称轴的黄金分割，$P'Q'$ 是较长的一段，并且 P'、Q' 与上、下面等距。类似的在其他五面内取点，这样就得到的十二个点是正二十面体的顶点。

(6) $8\,(6)$，正八面体各面的中心是正方体的八个顶点。

(7) $8\,(20)$，把正八面体的棱黄金分割，把同顶点的棱相间截取较长、较短线段，所得的十二个点是正二十面体的顶点。

(8) $12\,(6)$，正十二面体各面取一条对角线所得的十二条对角线就是正方体的十二条棱。

(9) $12\,(20)$，正十二面体各面的中心是正二十面体的十二个顶点。

(10) $20\,(12)$，正二十面体各面的中心是正十二面体的二十个顶点。

(11) $4\,(8)$，综合 $6\,(8)$、$6\,(4)$ 考虑，得正四面体各棱的中点就是正八面体的六个顶点。

(12) $4\,(12)$，综合 $4\,(8)$，$8\,(20)$，$20\,(12)$ 考虑，其中内正十二面体有四个顶点是正四面体某一面的中心。

(13) $4\,(20)$，综合 $4(8)$，$8(20)$ 考虑，其中内正二十面体有四个面是正四面体某一面的内接正三角形。

(14) $8\,(4)$，综合 $8\,(6)$，$6\,(4)$ 考虑。

(15) $8\,(12)$，综合 $8\,(20)$，$20\,(12)$ 考虑，其中内正十二面体有八个顶点是正八面体某面的中心。item **12 (4)**，综合 $12\,(6)$，$6\,(4)$ 考虑，内正四面体的顶点都是正十二面体的顶点。

(16) $12\,(8)$，综合 $6\,(12)$，$6\,(8)$ 考虑，正十二面体的三双对棱满足任意两条不同组的棱互相垂直，则这六棱的中点就是内正八面体的顶点。

(17) $20\,(4)$，综合 $20\,(12)$，$12\,(6)$，$6\,(4)$ 考虑，内正四面体的顶点都是正二十面体某面的中心。

(18) $20\,(6)$，综合 $20\,(12)$，$12\,(6)$ 考虑，内正方体的顶点都是正二十面体某面的中心。

(19) $20\,(8)$，综合 $6\,(20)$，$6\,(8)$ 考虑，正十二面体的三双对棱满足任意两条不同组的棱互相垂直，则这六棱的中点就是内正八面体的顶点。

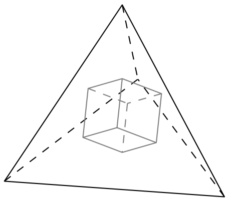


图 1

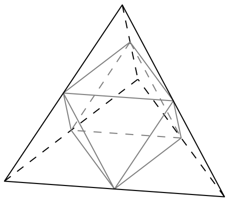


图 2

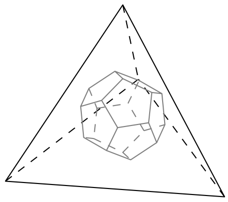


图 3

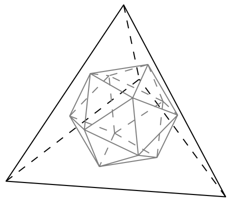


图 4

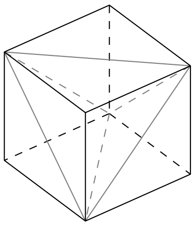


图 5

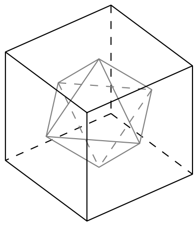


图 6

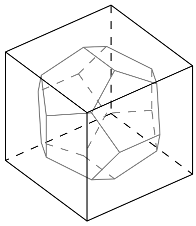


图 7

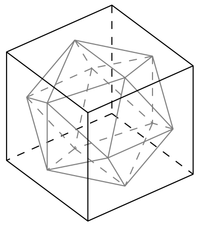


图 8

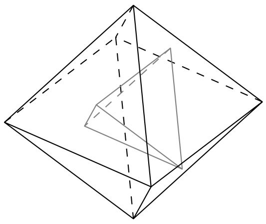


图 9

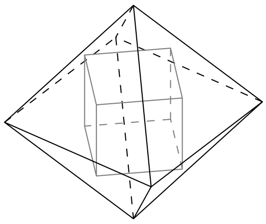


图 10

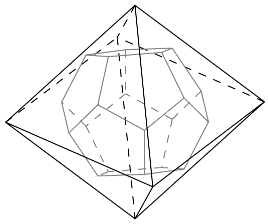


图 11

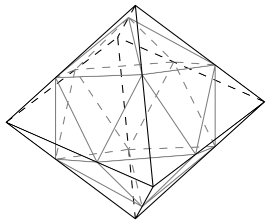


图 12

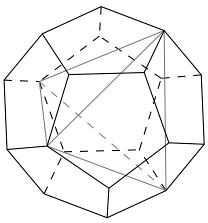


图 13

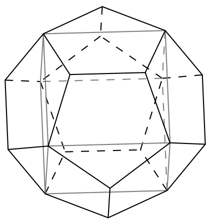


图 14

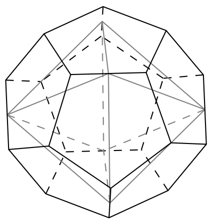


图 15

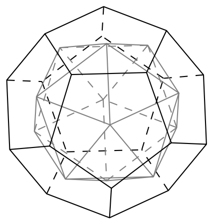


图 16

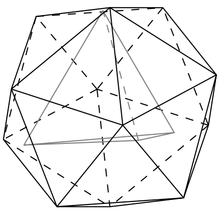


图 17

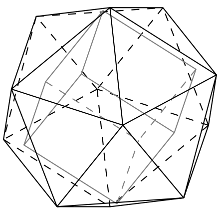


图 18

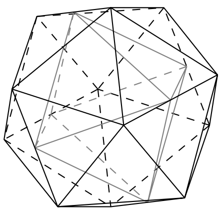


图 19

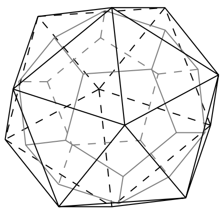


图 20